

Suprafete 3D

Una dintre cele mai importante probleme in sistemele de proiectare si fabricatie asistate de calculator este aceea a modelarii suprafetelor. Modelele trebuie sa ofere flexibilitate in proiectare, care este in esenta o activitate de natura creativa, sa conduca la implementari simple ale calculului proprietatilor suprafetelor si nu in ultimul rand, sa permita descrierea unor forme oricat de variate.

Suprafetele 3D pot fi definite :

- **clasic** : prin ecuatii implicite sau explicite(exemple: sfera, cilindrul, paraboloidul, s.a.);
- **ca suprafete de forma libera;**

Suprafetele de forma libera, la randul lor se impart in doua categorii:

- Suprafete obtinute prin baleiere spatiaa :
 - ✚ suprafete de rotatie ;
 - ✚ suprafete de translatie;
- Suprafete definite prin puncte si vectori tangenti :
 - ✚ suprafete de interpolare, care contin toate punctele date;
 - ✚ suprafete de aproximare, a caror forma si pozitie spatiaa este determinata de punctele date;

Modelarea matematica a suprafetelor de forma libera

Suprafetele de forma libera se reprezinta prin ecuatii parametrice:

$$\begin{cases} x = f_x(u, w) \\ y = f_y(u, w) \\ z = f_z(u, w) \end{cases}$$

unde u si w sunt definite in intervalele
 $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ si $w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$.

Avantajele reprezentarii prin ecuatii parametrice:

- usurinta in modificarea formei suprafetei;
- celelalte ecuatii (implicite , explicite) nu permit definirea unei suprafete prin functii cu valori multiple;
- transformarile 3D pot fi aplicate direct pe ecuatiile parametrice
- extensia reprezentarii de la 2D la 3D consta in adaugarea ecuatiei pentru coordonata z

Suprafete de rotatie

Se numesc astfel acele suprafete care se obtin prin rotatia unui obiect plan (o linie, o curba, un poligon etc.) in jurul unei axe 3D (axa Ox, Oy, Oz sau o dreapta oarecare in spatiu).

Rotind cu 360 de grade un segment de dreapta in jurul unei axe paralele cu el (fara ca segmentul sa se suprapuna pe axa) se genereaza o suprafata cilindrica circulara. Daca segmentul rotit este coplanar cu axa, dar nu si paralel sau perpendicular pe axa, atunci prin rotatia sa cu 360 de grade se va genera suprafata unui trunchi de con circular drept.

Exemplul 1:

Fie $p(u)$ ecuatiile parametrice a obiectului generator, in acest caz un segment de dreapta P_1P_2 , in planul XOY :

$$p(u) = P_1 + u (P_2 - P_1), \text{ cu } 0 \leq u \leq 1$$

sau, in coordonate omogene,

$$p(u) = [x_1 + u(x_2 - x_1) \quad y_1 + u(y_2 - y_1) \quad 0 \quad 1], \text{ cu } u \in [0, 1]$$

Efectuand o rotatie in jurul axei Oy se va obtine un trunchi de con.

Fie matricea de rotatie $R(\varphi)$:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

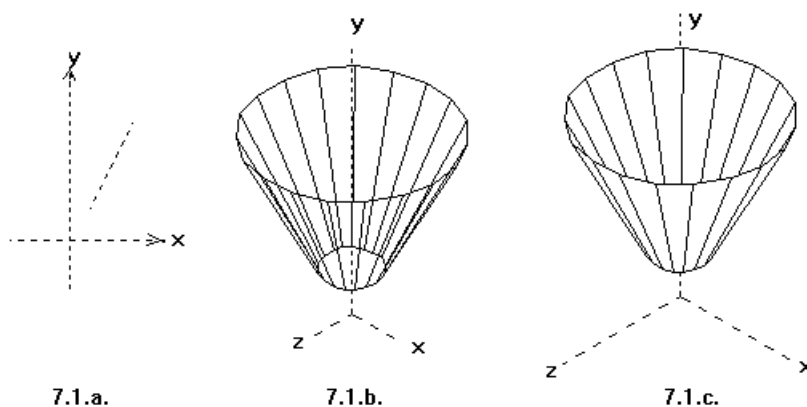


Figura 7.1.

Atunci, ecuatiile suprafetei generate prin rotatie in jurul axei Oy va fi :

$$S(u, \varphi) = p(u) \cdot R(\varphi) = [(x_1 + u(x_2 - x_1)) \cdot \cos(\varphi) \quad (y_1 + u(y_2 - y_1)) \quad -(x_1 + u(x_2 - x_1)) \cdot \sin(\varphi) \quad 1]$$

cu $u \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Dand valori particulare pentru u si φ se obtin puncte de pe suprafata respectiva.

Pentru vizualizarea suprafetelor de forma libera se folosesc mai multe metode, la care ne referim in paragraful « Vizualizarea suprafetelor de forma libera ». In cele ce urmeaza se va exemplifica generarea diferitelor tipuri de suprafete de forma libera afisandu-le prin metoda « wire-frame » :

- se calculeaza un set de puncte de pe suprafata ;
- se unesc punctele calculate prin segmente de dreapta, astfel incat suprafata sa fie aproximata prin cele 2 familii de curbe ortogonale in spatiul parametric ; de exemplu, pentru suprafata din exemplul 1, cele 2 familii de curbe sunt :
 - ◆ curbe de u constant si
 - ◆ curbe de φ constant

Exemplul 2:

Fie semicercul de raza r , considerat in planul xOy , si centrat in originea sistemului de coordonate. Ecuatia sa parametrica este:

$$\begin{cases} x(u) = r \cos(u) \\ y(u) = r \sin(u) \\ z(u) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi$$

Prin rotatia sa in jurul axei Ox se obtine o sfera. Matricea de rotatie este:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuatia parametrica a suprafetei se obtine astfel:

$$S(u, \varphi) = p(u) \cdot R_x(\varphi) = [r \cdot \cos(u) \quad r \cdot \sin(u) \cdot \cos(\varphi) \quad r \cdot \sin(u) \cdot \sin(\varphi) \quad 1]$$

cu $u \in [0, \pi]$ si $\varphi \in (0, 2\pi)$

Ecuatia in forma pe componente va fi :

$$\begin{aligned} x(u, \varphi) &= r \cdot \cos(u) \\ y(u, \varphi) &= r \cdot \sin(u) \cdot \cos(\varphi) \\ z(u, \varphi) &= r \cdot \sin(u) \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Exemplul 3:

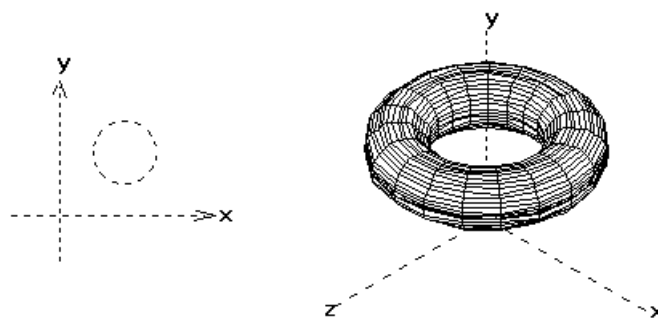
Fie cercul considerat in planul xOy cu centrul x_c, y_c si raza r, avand ecuatiile parametrice:

$$\begin{cases} x(u) = x_c + r \cos u \\ y(u) = y_c + r \sin u \\ z(u) = 0 \end{cases}$$

Considerand rotatia in jurul axei Oy, cu matricea de rotatie $R_y(\varphi)$ (prezentata anterior), se va obtine urmatoarea ecuatie parametrica a suprafetei:

$$\begin{aligned} S(u, \varphi) &= p(u) * R_y(\varphi) = [x(u) \ y(u) \ 0 \ 1] * R_y(\varphi) = \\ &= [(x_c + r \cos(u)) * \cos(\varphi) \ (y_c + r \sin(u)) \ -(x_c + r \cos(u)) * \sin(\varphi) \ 1] \\ &\text{cu } u \in [0, 2\pi] \text{ si } \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Se va obtine astfel un tor:



Ca obiect generator poate fi folosit orice obiect, chiar si o curba de forma libera.

Curbele de forma libera, reprezentate in forma geometrica matriciala sunt definite astfel:

$$\begin{aligned} P(u) &= U * M * G, \text{ unde:} \\ U &= [u^3 \ u^2 \ u \ 1] - \text{curba cubica;} \\ M &= \text{matrice specifica tipului de curba;} \\ G &= \text{vectorul conditiilor geometrice;} \end{aligned}$$

Exemplul 4:

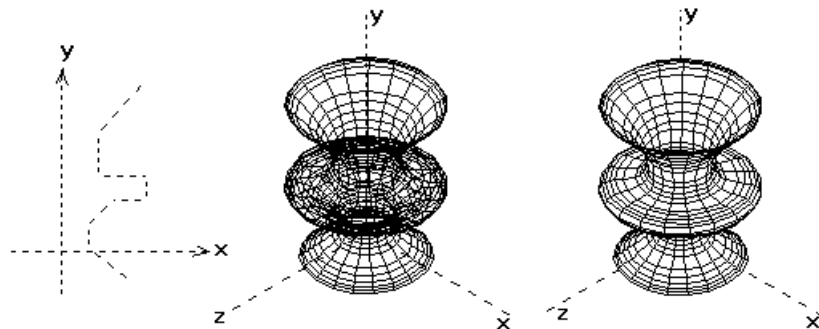
Fie curba Bezier cubica, cu ecuatiile parametrice :

$$\begin{aligned} P(u) &= U * M_B * [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]^T, \text{ unde :} \\ P_0, P_1, P_2, P_3 &\text{ sunt cele 4 puncte care determina o curba Bezier;} \\ M_B &\text{ este matricea de baza Bezier;} \end{aligned}$$

Suprafata obtinuta prin rotatie in jurul axei Oy este definita astfel:

$S_B = P(u) * R(\varphi)$ sau

$$S_B(u, \varphi) = U \cdot M_B \cdot \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot R_y(\varphi)$$



Afisarea unei suprafete de rotatie

```
typedef struct{
    float x;
    float y;
    float z;
}p3d;
```

```
typedef struct{
    float x;
    float y;
}p2d;
```

```
int npo = 30; // nr puncte ob generator
int nrot= 30; // nr rotatii
```

```
p3d ps[npo][nrot]; // puncte suprafata
```

// Calculeaza puncte de pe obiectul generator si le memoreaza pe prima coloana a matricei ps

```
// Exemplu: obiectul generator este o curba Bezier definita prin punctele:
p2d P0, P1, P2, P3, p;
```

```
float du = 1.0/(npo -1);
for (int i =0, u=0; u<=1; u+=du, i++)
    {p = Bezier(u); // vezi cursul ref. la curbe
    ps[i][0].x = p.x; ps[i][0].y = p.y; ps[i][0].z = 0;
    }
```

// Memoreaza pe celelalte coloane ale matricei ps punctele obtinute prin rotatie in jurul
axeii OY

// fi= 2*PI/nrot este pasul unghiular de rotatie in jurul axeii OY

```
float cosfi = cos(2*PI/nrot);
```

```
float sinfi = sin(2*PI/nrot);
```

```
for (int j = 1; j < nrot; j++)  
    for (i = 0; i < npo; i++)  
        { ps[i][j].x = ps[i][j-1].x * cosfi;  
          ps[i][j].y = ps[i][j-1].y;  
          ps[i][j].z = - ps[i][j-1].x * sinfi;  
        }
```

// Aplica punctelor din ps transformare de rotatie in jurul axeii OX

```
for(i=0; i < npo; i++)  
    for(j=0; j < nrot; j++)  
        { ps[i][j].y = .....  
          ps[i][j].z = .....  
        }
```

// Afisare suprafata prin polilinii : meridiene (curbe de fi constant) si paralele (curbe de u
constant)

// Se efectueaza o proiectie ortografica asupra punctelor 3D

// Afisare meridiene

```
for(j=0; j < nrot; j++)  
{ glBegin(LINE_STRIP); // polilinie  
  for(i=0; i < npo; i++)  
      glVertex3D(ps[i][j].x, ps[i][j].y, ps[i][j].z);  
  glEnd();  
}
```

// Afisare paralele

```
for(i=0; i < npo; i++)  
{ glBegin(LINE_STRIP); // polilinie  
  for(j=0; j < nrot; j++)  
      glVertex3D(ps[i][j].x, ps[i][j].y, ps[i][j].z);  
  glVertex3D(ps[i][0].x, ps[i][0].y, ps[i][0].z);  
  glEnd();  
}
```

Suprafete de translatie

O alta metoda de a genera o suprafata 3D consta in translatarea unui obiect (linie, poligon, curba, etc.) de-a lungul unei traiectorii. Traiectoria poate fi o dreapta sau o curba in spatiu. Suprafetele astfel obtinute sunt numite "**Sweep Surfaces**".

Metoda este larg folosita in sistemele de proiectare si fabricatie asistate de calculator, fiind adecvata definirii interactive a suprafetelor si corpurilor. Generarea suprafetelor prin rotatie este un caz particular al metodei de baleiere spatiaa, in care traiectoria este circulara.

Cea mai simpla suprafata de translatie se obtine translatand un segment de dreapta . Stiind ca ecuatia unui segment determinat de punctele $P_1(x_1,y_1,z_1)$ si $P_2(x_2,y_2,z_2)$ este :

$$p(u) = P_1 + u (P_2 - P_1) = [(x_1+u(x_2-x_1)) \quad (y_1+u(y_2-y_1)) \quad (z_1+u(z_2-z_1))] \\ \text{cu } u \in [0, 1]$$

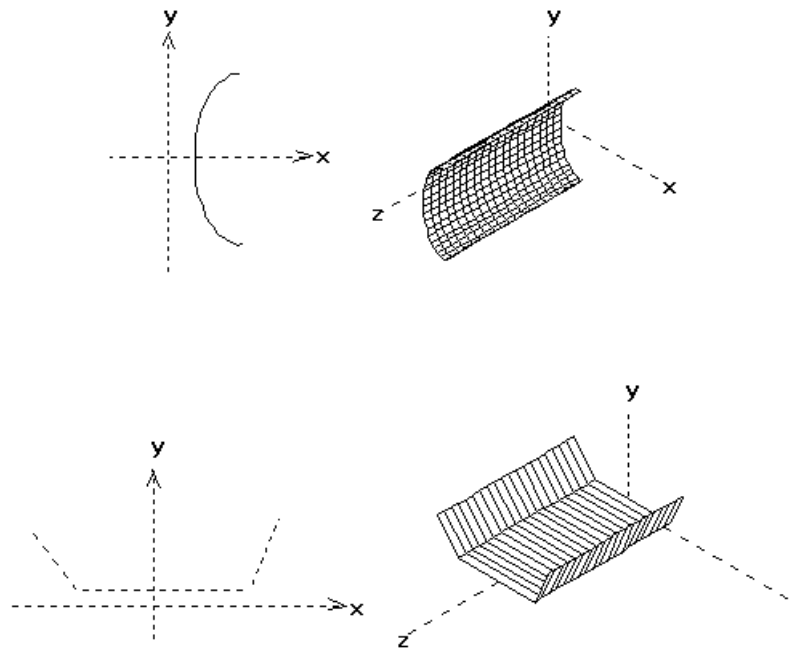
Ecuatia suprafetei de translatie va fi:

$$S(u,t) = p(u) * T(t) , \text{ cu } u \in [0, 1] \text{ si } t \in [0, 1];$$

Unde $T(t)$ este matricea transformarii de translatie. De exemplu, pentru o translatie cu o distanta d de-a lungul unei axe paralele cu axa OZ , matricea T este:

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \cdot t & 1 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Exemple :

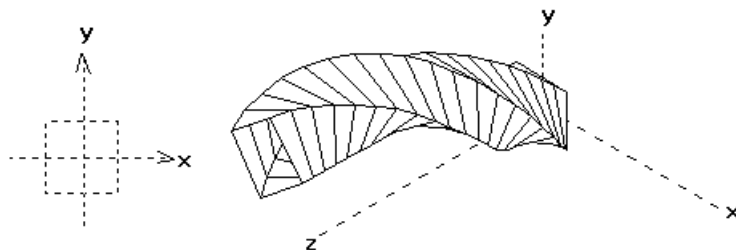


Translatia pe o directie $D[dx, dy, dz]$ este definita de matricea:

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx \cdot t & dy \cdot t & dz \cdot t & 1 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Daca se doreste efectuarea suplimentara si a unei rotatii, in fiecare pas de translatie, cu translatia pe directia axei OZ, matricea $T(t)$ devine:

$$T(t) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) & 0 & 0 \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \cdot t & 1 \end{bmatrix}$$



Suprafete de forma libera

In proiectarea asistata de calculator sunt frecvente cazurile in care se doreste obtinerea unei suprafete care trece printr-un set de puncte sau a carei forma este controlata printr-un set de puncte. In primul caz, suprafata este numita de interpolare, in cel de-al doilea, de aproximare.

Modelarea suprafetelor de interpolare / aproximare se bazeaza pe notiunea de « *petic* » de suprafata ("patch"). **Un petic este o colectie de puncte marginite de 4 curbe.** Cordonatele lor sunt definite prin functii continue de 2 variabile :

$$\begin{cases} x = x(u, w) \\ y = y(u, w) \\ z = z(u, w) \end{cases}$$

$$\text{cu } u_1 \leq u \leq u_2 \text{ si } w_1 \leq w \leq w_2$$

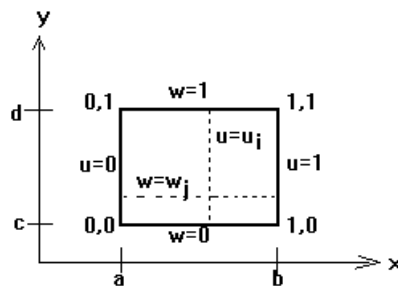
Exemplu :

Un dreptunghi este un petic de suprafata plana, a carui ecuatie parametrica este :

$$X(u, w) = P_0.x + u(P_2.x - P_0.x)$$

$$Y(u, w) = P_0.y + w(P_1.y - P_0.y) \quad 0 \leq u, w \leq 1$$

$$Z(u, w) = 0$$



$$X(u, w) = a + u(b - a)$$

$$Y(u, w) = c + w(d - c) \quad 0 \leq u, w \leq 1$$

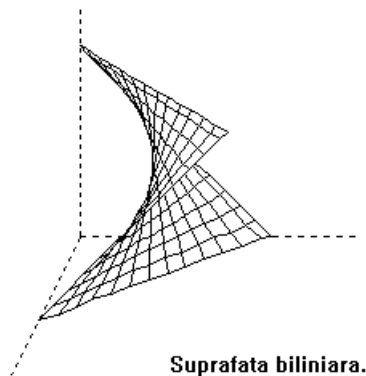
$$Z(u, w) = 0$$

Punctele supraf se obtin prin interpolare biliniara → caz particular de supraf biliniara.

Suprafata biliniara

Suprafata biliniara este definita prin patru puncte situate arbitrar in spatiu, care se asociaza colturilor patraturului unitate in spatiul parametric (u,w). Exemplu:

$P_0(0,0,1)$, $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(0,1,0)$



Ecuatia parametrica este:

$$p(u,w) = P_0(1-u)(1-w) + P_1(1-u)w + P_2u(1-w) + P_3uw$$

$$\begin{cases} p(0,0) = P_0 \\ p(1,1) = P_3 \\ p(0,1) = P_1 \\ p(1,0) = P_2 \end{cases}$$

Suprafata biliniara contine o infinitate de segmente de curba ortogonale in spatiul parametric.

Pot fi vizualizate prin :

- doua familii de curbe
- retea de fatete conectate, cu varfurile pe suprafata

Petice bicubice

In general, un « petic » de suprafata de interpolare/aproximare este descris parametric prin polinoame de grad 3. Spunem in acest caz ca este un petic **bicubic**. Gradul 3 este gradul minim care poate asigura respectarea unor restrictii de continuitate la jonctiunea dintre 2 petice, astfel incat sa putem modela suprafete complexe prin retele de petice.

Un petic bicubic contine 2 familii de curbe cubice (Hermite, Bezier, B-Spline, etc.) ortogonale in spatiul parametric.

O **curba cubica** este definita prin ecuatiile parametrice :

$$P(u) = a_3 * u^3 + a_2 * u^2 + a_1 * u + a_0;$$

Sau, matricial:

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T = U \cdot A = \sum_{i=0}^3 a_i u^i$$

Peticul bicubic este definit prin ecuatiile:

$$p(u, w) = \sum \sum a_{ij} \cdot u^i \cdot w^j$$

$$0 \leq i, j \leq 3$$

numita si **forma algebrica**

sau, matricial:

p(u, w) = U * A * W^T , unde :

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix};$$

$$W = \begin{bmatrix} w^3 & w^2 & w & 1 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{03} & a_{02} & a_{01} & a_{00} \end{bmatrix}$$

a_{ij} se numesc **coeficienti algebrici**.

Peticele bicubice se deosebesc prin modul in care sunt definite geometric (conditiile geometrice pe care le satisfac).

Suprafete Hermite (Coons)

O curba Hermite este definita prin : coordonatele punctelor extreme si tangentele in punctele extreme.

Ecuatia geometrica a unei curbe Hermite (Coons) este urmatoarea :

$$p(u) = [F_1(u) F_2(u) F_3(u) F_4(u)] * [P_0 P_1 P_0^u P_1^u]^T$$

unde $F_i(u)$ sunt functiile de ponderare (sau de amestec) specifice curbelor Hermite.

Functiile de ponderare determina contributia conditiilor geometrice in calculul punctelor de pe curba. Fie:

$$F(u) = [F_1(u) F_2(u) F_3(u) F_4(u)]$$

din care extragem matricea **M_H**, **matricea de baza Hermite** (specifica curbelor Hermite).

$$F(u) = [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(u) = U * M_H$$

Atunci, ecuatia curbei Hermite se poate rescrie astfel:

$$p(u) = U * M_H * G_H$$

O suprafata Hermite este definita prin :

- ✚ coordonatele colturilor suprafetei
- ✚ vectorii tangenti in cele 4 colturi
- ✚ vectorii de rasucire

In continuare folosim urmatoarele notatii :

$$P_{00} = p(0,0);$$

$$P_{01} = p(0,1);$$

$$P_{10} = p(1,0);$$

$$P_{11} = p(1,1);$$

■ vectorii tangenti la suprafata (cate 2 pentru fiecare colt al peticulului):

$$P_{u00} = p^u_{uw}(0,0);$$

$$P_{w00} = p^w_{uw}(0,0);$$

.....

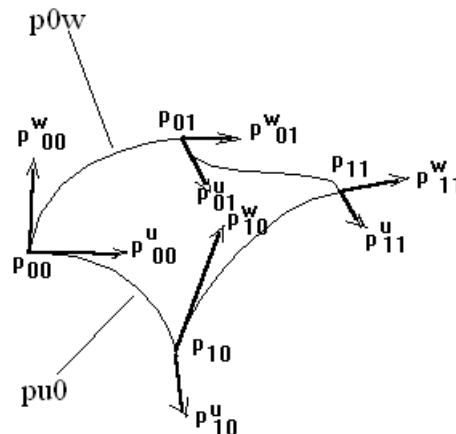
unde p^u_{uw} este derivata partiala in raport cu u iar p^w_{uw} este derivata partiala in raport cu w.

■ vectorii de rasucire (cate unul pentru fiecare colt) :

$$P^{uw}_{00}, P^{uw}_{01}, P^{uw}_{10}, P^{uw}_{11}, \text{ unde}$$

$$P^{uw}_{ij} = \frac{\partial^2 p(u,w)}{\partial u \partial w}$$

Imaginea unui astfel de petic este prezentata in figura urmatoare:



Peticul Hermite contine 2 familii de curbe Hermite, ortogonale in spatiul parametric.

Coordonatele colturilor si vectorii tangenti definesc curbele marginitoare ale peticulului. De exemplu:

$$p_{0w} = F(u)^* [P_{00} P_{01} P_{00}^w P_{01}^w]^T$$

$$p_{u0} = F(u)^* [P_{00} P_{10} P_{00}^u P_{10}^u]^T$$

Pentru curbele Hermite, conditiile geometrice se reprezinta printr-un vector.

Pentru peticele Hermite, conditiile geometrice sunt cuprinse intr-o matrice, S_H , alcatuita astfel :

$$S_H = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{00}^w & F_{01}^w \\ F_{10} & F_{11} & F_{10}^w & F_{11}^w \\ F_{00}^u & F_{01}^u & F_{00}^{uw} & F_{01}^{uw} \\ F_{10}^u & F_{11}^u & F_{10}^{uw} & F_{11}^{uw} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(0,w) \\ \leftarrow P(1,w) \\ \leftarrow P^u(0,w) \\ \leftarrow P^u(1,w) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ p(u,0) & p(u,1) & p^w(u,0) & p^w(u,1) \end{matrix}$$

Impunand in forma algebrica, generala pentru peticele bicubice, conditiile geometrice care definesc peticul Hermite, rezulta 16 ecuatii vectoriale din care se obtin cei 16 coeficienti algebrici. Inlocuind expresiile lor in forma algebrica si apoi grupand termenii dupa variabilele prin care sunt reprezentate conditiile geometrice, obtinem forma geometrica :

$$p(u,w) = [F_1(u) F_2(u) F_3(u) F_4(u)] S_H [F_1(w) F_2(w) F_3(w) F_4(w)]^T$$

unde F_1, F_2, F_3, F_4 sunt functiile de ponderare pentru curbele Hermite.

Ecuatia se poate rescrie :

$$p(u,w) = F(u) S_H F(w)$$

dar, $F(u) = U^* M_H$ si $F(w) = W^* M_H$.

Rezulta **forma (ecuatia) geometrica matriciala a peticului Hermite:**

$$p(u,w) = U^* M_H^* S_H^* M_H^T * W^T$$

in care S_H **contine conditiile geometrice** care definesc suprafata, iar M_H este matricea de baza Hermite.

Forma algebrica matriciala este:

$$p(u,w) = U^* A^* W^T$$

deci, $A = M_H^* S_H^* M_H^T$

In majoritatea aplicatiilor se folosesc suprafete determinate prin mai mult de 4 puncte. Acestea se pot obtine, de exemplu, prin compunere din petice Hermite. Continuitatea la jonctiunea peticelor se poate impune prin conditiile geometrice ale peticelor.

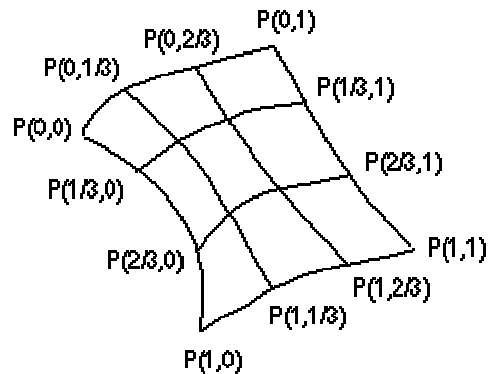
Dezavantajul peticelor Hermite este ca definirea se face prin vectori tangenti si vectori de rasucire, ele fiind astfel incomode pentru aplicatiile de proiectare asistata de calculator interactive.

Peticul Ferguson

Peticul Ferguson este un caz particular al peticului Hermite, in care vectorii de rasucire sunt nuli ($p_{00}^{uw} = p_{01}^{uw} = p_{10}^{uw} = p_{11}^{uw} = 0$). La jonctiunea dintre 2 F-petice se poate asigura numai continuitatea de ordinul 1. Aceasta poate conduce la suprafete care nu sunt suficient de netede pentru unele aplicatii, dar peticele de acest tip sunt usor de construit si modificat, fiind utile in multe situatii.

Peticul de suprafata definit prin 16 puncte

Cele 16 puncte se pun in corespondenta unor valori prestabilite ale variabilelor u si w , de exemplu : 0, 1/3, 2/3, 1, ca in figura de mai jos :



In acest caz, ecuatia parametrica a suprafetei este :

$p(u,w) = U \cdot N \cdot P \cdot N^T \cdot W^T$, in care

$$U = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$$

$$W = [w^3 \ w^2 \ w \ 1]$$

$$P = \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,\frac{1}{3}) & p(0,\frac{2}{3}) & p(0,1) \\ p(\frac{1}{3},0) & p(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & p(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) & p(\frac{1}{3},1) \\ p(\frac{2}{3},0) & p(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) & p(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) & p(\frac{2}{3},1) \\ p(1,0) & p(1,\frac{1}{3}) & p(1,\frac{2}{3}) & p(1,1) \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \\ 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{11}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Specificare peticelor prin 16 puncte este atragatoare pentru aplicatiile de proiectare asistata de calculator, dar in compunerea peticelor de acest tip se poate asigura numai continuitatea de ordin 0 la frontiera de jonctiune (coincidenta punctelor care definesc frontiera).

Suprafete Bezier

O suprafata Bezier este alcatuita din doua familii de curbe Bézier, ortogonale in spatiul parametric.

Ecuatia parametrica a unei curbe Bezier definita prin $n+1$ puncte este :

$$p(u) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot B_{i,n}(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

unde $B_{i,n}(u)$ este polinomul Bernstein de gradul n .

Ecuatia parametrica a peticulului Bezier definit prin $(m+1 \times n+1)$ puncte este :

$$p(u,w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} \cdot B_{i,m}(u) \cdot B_{j,n}(w) \quad 0 \leq u, w \leq 1$$

In practica se folosesc curbele cubice Bezier si suprafetele bicubice Bezier, acestea fiind satisfacatoare din punct de vedere al continuitatii geometrice.

Cubica Bezier are ecuatia:

$$p(u) = (1-u)^3 * P_0 + 3 * u * (1-u)^2 * P_1 + 3 * u * (1-u) * P_2 + u^3 * P_3$$

iar forma matriciala este :

$$p(u) = [F_1(u) \ F_2(u) \ F_3(u) \ F_4(u)] * [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]^T.$$

sau

$$p(u) = F(u) * G_B$$

$F(u)$ se descompune astfel :

$$F(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

unde ultima este **matricea de baza Bezier, notata M_B** . Putem deci scrie ecuatia parametrica in forma matriciala :

$$p(u) = U * M_B * G_B$$

Matricea de baza, M_B , este aceeași pentru toate curbele Bezier, iar G_B este cea care difera de la o curba la alta.

Peticul bicubic Bezier

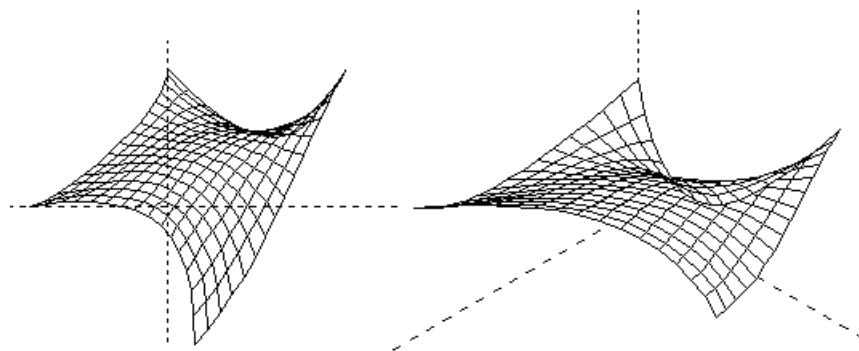
Definit prin 4x4 puncte de control :

Ecuatia matriciala:

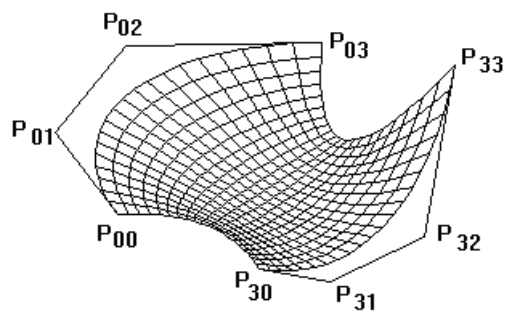
$$p(u,w) = U * M_B * S_B * M_B^T * W^T$$

S_B este matricea punctelor care determina peticul Bezier. Ea are forma :

$$S_B = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$



- Un petic Bezier bicubic este determinat de **16 puncte**, numite **puncte de control**.
- Peticul contine numai 4 dintre acestea (colturile : P_{00} , P_{03} , P_{30} , P_{33}), celelalte controland forma suprafetei.



O alta forma a ecuatiei parametrice este :

$$p(u,w) = [(1-u)^3 \ 3u(1-u)^2 \ 3u^2(1-u) \ u^3] * S_B * [(1-w)^3 \ 3w(1-w)^2 \ 3w^2(1-w) \ w^3]^T$$

- Peticul Bezier are urmatoarele **avantaje** :
 - a. este definit doar prin puncte
 - b. se pot defini colturile suprafetei

- c. se pot defini tangentele la curbele marginitoare ale suprafetei, prin alegerea punctelor de control care definesc frontierele
- d. proprietatea de *inchidere convexa* (peticul este continut in poliedrul convex determinat de punctele de control)
- e. se poate actiona interactiv asupra formei sale prin deplasarea punctelor de control
- f. calculele necesare pentru divizarea suprafetei sunt simple
- g. are proprietatea de invarianta afina
- h. are forma poligonului de control

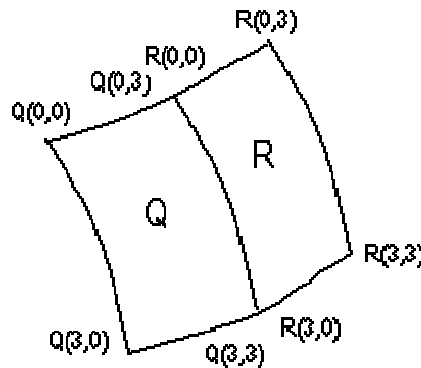
➤ **Dezavantaj :**

Suprafata Bezier, ca si curba Bezier, nu poseda proprietatea de *control local* . Astfel, deplasarea unui punct de control are efect asupra formei intregii suprafete, chiar daca s-ar dori o modificare locala a formei !

Compunere de petice Bezier

Atunci cand se doreste obtinerea unei suprafete care sa posede proprietatile peticului bicubic Bezier, dar sa fie definita prin mai mult de 16 puncte de control, se poate recurge la compunerea peticelor bicubice Bezier.

Aceasta operatie consta in alipirea a doua petice de suprafata, Q si R, ca in figura urmatoare :



Se poate asigura **continuitatea** :

- **de ordin 0** - punctele de control de pe frontiera de jonctiune trebuie sa coincida

$$Q_{i3} = R_{i0}, 0 \leq i \leq 3$$

- **de ordin 1** - vectorii tangenti la cele doua petice, in orice punct al frontierei comune, trebuie sa coincida ; conditia este asigurata daca cele patru perechi de laturi ale poliedrelor de control sunt coliniare

$$Q_{i3} - Q_{i2} = k (R_{i1} - R_{i0}), 0 \leq i \leq 3$$

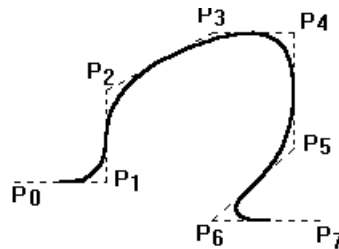
unde k este o constanta pozitiva.

Aceasta conditie este considerata prea restrictiva pentru aplicatiile practice de proiectare asistata de calculator, de aceea ea este inlocuita cu conditia ca **vectorii tangenti in colturile comune celor doua petice sa fie coplanari.**

Suprafete B-spline

- **Suprafetele B-spline sunt, ca si suprafetele Bezier, suprafete de aproximare definite numai prin puncte.**

O curba B-spline se obtine prin alipirea mai multor segmente de curba.



Curba Bspline de grad 2

Ecuatiile care definesc segmentele de curba B-spline uniforma, periodica, de grad doi si trei pot fi scrise in modul urmator :

$$P_{i3} = [u^2 \ u \ 1] * M_{S3} * [P_{i-1} \ P_i \ P_{i+1}]$$

unde P_{i-1} , P_i si P_{i+1} sunt punctele de control
 $0 \leq u \leq 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ si

$$P_{i4} = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] * M_{S4} * [P_{i-1} \ P_i \ P_{i+1} \ P_{i+2}]$$

$0 \leq u \leq 1$ si $1 \leq i \leq n-1$

Aceste ecuatii se pot generaliza in forma :

$$P_i = U_k * M_{Sk} * P_k, \quad 1 \leq i \leq n+2-k$$

$$P_k = \{ P_j \mid i-1 \leq j \leq i+k-2 \}$$

- pentru $k=3 \Rightarrow$ curba B-spline de ordinul 2
- pentru $k=4 \Rightarrow$ curba B-spline de ordin 3 (cubica).

- **O suprafata B-spline definita prin $m \times n$ puncte de control se obtine prin alipirea mai multor petice bipatratice sau bicubice.** Ecuatia unui astfel de petic este :

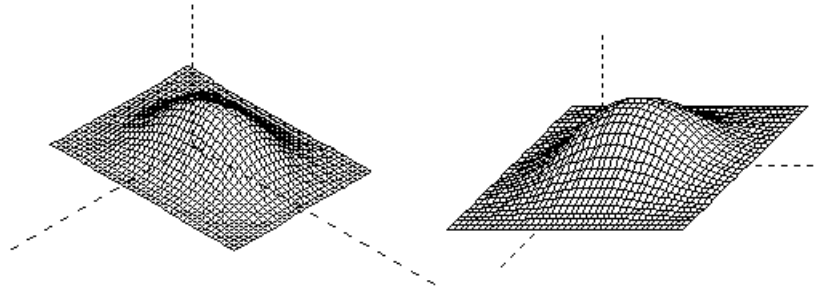
$$p_{ij}(u, w) = U_k * M_k * P_{kl} * M_l^T * W_l^T$$

unde $1 \leq i \leq m+2-k$, $1 \leq j \leq n+2-1$ si $u, w \in [0, 1]$

Matricea P_{kl} este o parte din matricea punctelor de control care definesc o suprafata Bspline si are forma :

$$P_{kl} = \{ P_{ab} \mid i-1 \leq a \leq i+k-2; j-1 \leq b \leq j+l-2 \}$$

Pentru $l=4$ si $k=4$ obtinem ecuatiile de suprafata bicubica B-spline. Deci, fiecare segment de suprafata bicubica B-spline este determinat de 4×4 puncte de control.



Suprafete Bspline bipatratice

Suprafete riglate

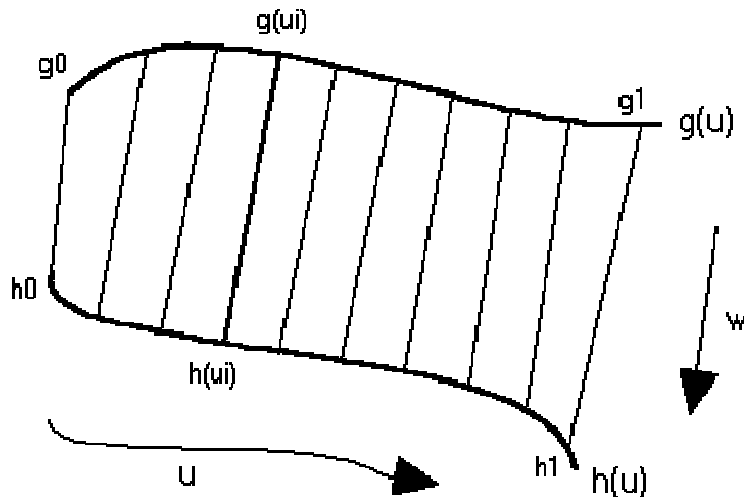
- O suprafata riglata este definita prin doua curbe, $g(u)$ si $h(u)$.
- Ea contine toate segmentele de dreapta $g(u_i)-h(u_i)$ cu u_i in intervalul $[0,1]$.

Deci, punctele de pe o suprafata riglata se pot obtine folosind ecuatiile parametrica :

$$p(u,w) = g(u) + w(h(u) - g(u))$$

$$\text{cu } u, w \in [0,1]$$

Figura urmatoare radea o suprafata rigla:



O suprafața riglată poate fi definită ca un petic Hermite, particularizând matricea S_H astfel:

$$G_R = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 & \mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_0 - \mathbf{g}_0 & \mathbf{h}_0 - \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1 - \mathbf{g}_1 & \mathbf{h}_1 - \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_0^u & \mathbf{h}_0^u & 0 & 0 \\ \mathbf{g}_1^u & \mathbf{h}_1^u & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atunci, ecuația matricială a suprafeței riglate este:

$$p(u, w) = U * M_H * G_R * M_H^T * W^T .$$

Cazuri speciale de suprafețe riglate sunt : planul, cilindrul, conul.

Suprafețe cilindrice

Suprafețele cilindrice sunt cazuri particulare de suprafețe riglate.

- O suprafață cilindrică este definită printr-o curbă și un vector.
- Suprafața se obține prin translația vectorului pe curbă.

Ecuația parametrică este :

$$p(u, w) = g(u) + d * w \quad \text{cu } u, w \in [0, 1]$$

unde

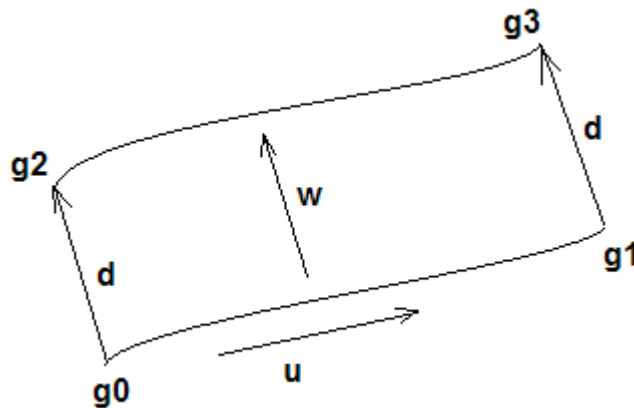
$g(u)$ este o curbă oarecare în spațiu
 d este vectorul care, prin deplasare pe curbă, paralel cu el însuși, generează suprafața.

O suprafata cilindrica poate fi definita ca un petic de suprafata Hermite. Avem astfel ecuatiua matriciala :

$$p(u,w) = U * M_H * G_C * M_H^T * W^T$$

in care G_C are forma :

$$G_C = \begin{bmatrix} g_0 & g_2 & g_2 - g_0 & g_2 - g_0 \\ g_1 & g_3 & g_2 - g_0 & g_2 - g_0 \\ g_0^u & g_0^u & 0 & 0 \\ g_1^u & g_1^u & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Reprezentarea suprafetelor obiectelor 3D prin suprafete de forma libera

Suprafata unui obiect 3D poate fi reprezentata fie poliedral (retea poliedrala - fete conectate prin varfuri) fie prin suprafete de forma libera.

Avantajele reprezentarii prin suprafete de forma libera sunt :

- este analitica (faciliteaza calculul proprietatilor suprafetei)
- este mai economica (o aceiasi rezolutie a reprezentarii necesita mai putine puncte)
- permite interactivitatea cu mai mare usurinta decat in reprezentarea poliedrala
- este mult mai flexibila in unele operatii cu solide, cum ar fi deformatiunile.

Vizualizarea suprafetelor de forma libera

Sunt doua metode principale de afisare a suprafetelor de forma libera :

- **afisare wireframe** : suprafata $S(u,w)$ este aproximata prin cele doua familii de curbe ortogonale in spatiul parametric (curbe de $u=const$ si curbe de $w=const$).
- **afisare prin fete opace** : suprafata este aproximata printr-o retea de fete conectate prin varfuri ;
 - Varfurile sunt puncte de pe suprafata, $S(u_i, w_j)$

- Fiecare fata este un patrulater care conecteaza 4 puncte vecine de pe suprafata
- Suprafata este afisata aplicand un algoritm de eliminare a partilor nevizibile
- Deoarece fetele nu sunt plane, pentru o mai buna aproximare a suprafetei, se poate recurge la:

■ **triunghiularizarea fetelor;**

■ **divizarea fetelor pana la obtinerea de fete plane**(pe baza unui criteriu de planeitate) sau **fete care se proiecteaza intr-un singur pixel;**

Pentru calculul punctelor de pe suprafata se poate folosi ecuatia matriciala :

$$p(u,w) = U * M * G * M^T * W^T ,$$

unde G este matricea conditiilor geometrice, specifica suprafetei iar M este matricea specifica tipului suprafetei (Hermite, Bezier, B-spline)

sau

$$p(u,w) = [F_1(u) F_2(u) F_3(u) F_4(u)] * G * [F_1(w) F_2(w) F_3(w) F_4(w)]^T.$$

$$0 \leq u, w \leq 1$$

unde F1, F2, F3, F4 sunt functiile de ponderare, specifice tipului suprafetei

Divizarea suprafetei se face recursiv. La fiecare pas suprafata se divide in punctul (u=0.5 si w=0.5), rezultand patru subpetice (Vezi fisierul « **Divizarea curbilor si a suprafetelor de forma libera** »).

Algoritm de vizualizare petic Bezier, prin divizarea suprafetei pana la nivel de petic care se proiecteaza intr-un singur pixel

- Pentru vizualizarea suprafetei se foloseste **volumul incadrator al peticului**, care este un paralelipiped cu fetele paralele cu planele principale ale sistemului de coordonate 3D.
- **Varfurile de minim si de maxim ale acestui paralelipiped se obtin ca minim respectiv maxim dintre coordonatele celor 16 puncte de control.** stiind ca peticul Bezier este inclus in poliedrul convex determinat de cele 16 puncte de control.

Algoritmul de afisare este urmatorul:

pentru fiecare pixel p al imaginii
afisareBezier(S,p); // S fiind matricea punctelor de control

```

}

void afisareBezier(supraf S, Pixel p) {
    ▪ calcul volum incadrator al lui S;
    ▪ proiectie volum incadrator; // proiectia se va numi PS
    ▪ daca (PS nu intersecteaza suprafata pixelului p) atunci
      return;
    ▪ daca (PS este inclusa in supraf pixelului p ) atunci
      {
        • se determina punctul suprafetei care se
          proiecteaza in pixel ca medie aritmetica a celor 4
          colturi ale peticului Bezier ;
        • se calculeaza o normala in acel punct, apoi o
          culoare folosind normala respectiva
        • se afiseaza pixelul in culoarea determinata;
          return ;
      }
    divizeaza suprafata S in S1, S2, S3, S4 ;
    afisareBezier(S1,p);
    afisareBezier(S2,p);
    afisareBezier(S3,p);
    afisareBezier(S4,p);
}

```

Nota: divizarea suprafetei se face in punctul de mijloc din spatiul parametric,

$$u=0.5, w=0.5$$

Vizualizarea bazata pe descompunerea suprafetei pana la nivel de petice plane

Divizarea unei suprafete poate fi uniforma sau neuniforma.

a. uniforma

Ne propunem un anumit numar de diviziuni chiar daca intr-unul din pasii “neterminali” unul din petice satisface conditia de planeitate.

b. Neuniforma (adaptiva)

Daca, la un pas, unul din petice este plan nu-l mai divizam.

- Aceasta divizare este mai rapida
- Dezavantaj : la afisarea peticelor adiacente care au fost divizate la nivele diferite (de ex. unul de 2 ori si celalalt de 3 ori) pot sa apara rupturi (laturile patrulaterelor care aproximeaza peticele nu corespund).

Algoritmul Lane – Carpenter

- Efectueaza o divizare adaptiva a suprafetei
- **Imbina afisarea cu divizarea.** In acest fel se evita memorarea tuturor fetelor rezultate din divizarea recursiva a suprafetei, pana la satisfacerea criteriului de planeitate.

Imaginea este generata linie cu linie.

Se folosesc 3 liste :

LP – lista peticelor (fetelor)

LPA - lista peticelor active (proiectiilelor sunt intersectate de linia curenta)

LPG - lista peticelor folosite pentru generarea liniei imagine curenta

Algoritmul este urmatorul:

```
initalizare LP;
initalizare LPA;
pentru fiecare linie imagine
{
    actualizare LPA ;
    pentru fiecare (Pi din LPA)
    {
        daca (Pi "este plan")
            atunci
                introduce Pi in LPG;
            altfel
                {
                    divizare Pi in Pij cu i=1,2 si j=1,2;
                    pentru fiecare Pij
                        daca (Pij este intersectat de linia imagine
                            curenta)
                            atunci
                                introducem Pij in LPA;
                            altfel
                                introducem Pij in LP;
                    }
                }
    }
    genereaza linia imagine curenta folosind peticele din LPG;
}
```

Observatie: Un petic este adaugat la LPA atunci cand

$y\text{-linie imagine} \geq \min(y_{\text{proiectie colturi petic}})$.

Criterii de planeitate pentru un petic Bezier

1. Se calculeaza planul in care se afla 3 dintre colturile peticului. Se calculeaza apoi distanta maxima de la celelalte puncte de control la acest plan. Daca aceasta distanta este sub o limita de toleranta, peticul se considera plan.

Acest criteriu impune coplanaritatea varfurilor poliedrului caracteristic cu o anumita toleranta, stiindu-se ca peticul Bezier este inclus in poliedrul convex al punctelor de control.

2. Se impune coplanaritatea colturilor peticului si linearitatea marginilor peticului:

Coplanaritatea este data de conditia:

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} < \delta$$

Frontierele sunt curbe Bezier (polinoame de gradul III), deci

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} u^i w^j$$

Ecuatia unei frontiere este:

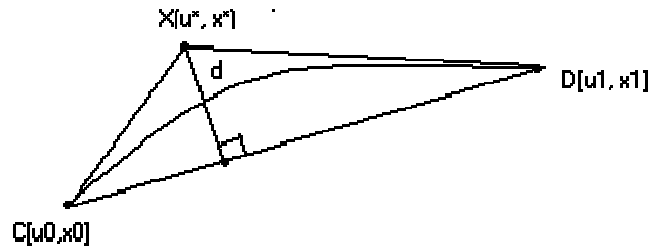
$$A_i(\mathbf{u}) = a_{00} + a_{10} * u + a_{20} * u^2 + a_{30} * u^3$$

Verificarea liniaritatii se face separat pe axele x, y, z.
Ecuatia de mai sus se poate scrie pe componente :

$a_{00x} + a_{10x} * u + a_{20x} * u^2 + a_{30x} * u^3$ deoarece

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ijx} \\ a_{ijy} \\ a_{ijz} \end{bmatrix}$$

Consideram proiectia pe axa x:



Daca $d < e$ frontiera este considerata liniara.

$$\mathbf{x}'_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} ; \quad \mathbf{x}'_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{c}_x : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{d}_x : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^x = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{u}_0}{\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_0} \\ \mathbf{x}^x = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0 (\mathbf{u}^x - \mathbf{u}_0) \end{cases}$$

Se scrie ecuatia corzii CD : $\alpha_1 \cdot \mathbf{x} + \alpha_2 \cdot \mathbf{u} + \alpha_3 = 0$ si se porneste de la ecuatiile parametriche:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + t(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)$$

↓

$$\Rightarrow (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)$$

$$t = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}$$

$$\overbrace{\mathbf{x}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)}^{\alpha_1} + \overbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)}^{\alpha_2} + \overbrace{\mathbf{x}_0(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}^{\alpha_3} = 0$$

Rezulta :

$$d = \text{abs} \left(\frac{\alpha_1 \cdot \mathbf{x}^* + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}^* + \alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \right)$$