19. $f(x) = \ln x,\ a = 1,\ n = 6$

20. $f(x) = \tan x,\ a = 0,\ n = 3$

Calcule los polinomios de Taylor que se piden en los Ejercicios 21-26, utilizando polinomios de Taylor o Maclaurin conocidos y cambiando las variables, como se hizo en los Ejemplos 6-8.

21. $P_3(x)$ para e^{3x} alrededor de $x = -1$.

22. $P_8(x)$ para e^{-x^2} alrededor de $x = 0$.

23. $P_4(x)$ para $\operatorname{sen}^2 x$ alrededor de $x = 0$. *Sugerencia*: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

24. $P_5(x)$ para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $x = \pi$.

25. $P_6(x)$ para $1/(1 + 2x^2)$ alrededor de $x = 0$.

26. $P_8(x)$ para $\cos(3x - \pi)$ alrededor de $x = 0$.

27. Calcule todos los polinomios de Maclaurin $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$.

28. Calcule todos los polinomios de Taylor $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$ en $x = 1$.

29. Calcule el polinomio de Maclaurin $P_{2n+1}(x)$ para $\operatorname{senh} x$ combinando adecuadamente en los polinomios para e^x y e^{-x}.

30. Combinando adecuadamente los polinomios de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ y $\ln(1 - x)$, obtenga el polinomio de Maclaurin de orden $2n + 1$ para $\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

31. Escriba la fórmula de Taylor para $f(x) = e^{-x}$ con $a = 0$ y utilícela para calcular $1/e$ con una precisión de cinco cifras decimales (se puede utilizar una calculadora, pero no su función e^x).

32. Escriba la forma general de la fórmula de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ con resto de Lagrange. ¿Qué valor necesita tener n para asegurar que la correspondiente aproximación del polinomio de Taylor proporcionará el seno de 1 radián con una precisión de cinco cifras decimales?

33. ¿Cuál es la mejor aproximación de orden 2 a la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 0$? ¿Cuál es el error de esta aproximación? Responda ahora las mismas preguntas para $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. ¿Puede ser mejorada (es decir, hacerse más pequeña) la constante $1/6 = 1/3!$ en la fórmula del error para la aproximación de grado 2?

34. Factorizando $1 - x^{n+1}$ (o mediante división de polinomios), demuestre que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} \qquad (*)$$

A continuación demuestre que si $|x| \leqslant K < 1$, entonces

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1 - x}\right| \leqslant \frac{1}{1 - K}|x^{n+1}|$$

Esto implica que $x^{n+1}/(1 - x) = O(x^{n+1})$ cuando $x \to 0$ y confirma la fórmula (d) de la Tabla 4. ¿Qué dice entonces el Teorema 11 sobre el polinomio de Maclaurin de orden n para $1/(1 - x)$?

***35.** Diferenciando la identidad (*) del Ejercicio 34 y sustituyendo después n por $n + 1$, demuestre que

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n + 1)x^n + \frac{n + 2 - (n + 1)x}{(1 - x)^2}x^{n+1}$$

Utilice después el Teorema 11 para determinar el n-ésimo polinomio de Maclaurin para $1/(1 - x)^2$.

4.9 Formas indeterminadas

En la Sección 2.5 demostramos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esto no se puede ver inmediatamente sustituyendo $x = 0$ en la función $(\operatorname{sen} x)/x$, ya que tanto $\operatorname{sen} x$ como x valen cero en $x = 0$. $(\operatorname{sen} x)/x$ se denomina **forma indeterminada** del tipo [0/0] en $x = 0$. El límite de esa forma indeterminada puede ser cualquier número. Por ejemplo, cada uno de los cocientes kx/x, x/x^3 y x^3/x^2 es una forma indeterminada del tipo [0/0] en $x = 0$, pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

Existen otros tipos de formas indeterminadas. Se muestran, junto con un ejemplo de cada tipo, en la Tabla 5.

Tabla 5. Tipos de formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0+} x \ln \frac{1}{x}$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi - 2x}\right)$
$[0^0]$	$\lim_{x\to 0+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x\to(\pi/2)-} (\tan x)^{\cos x}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Las formas indeterminadas de tipo $[0/0]$ son las más comunes. A menudo se pueden evaluar de forma bastante sencilla utilizando las fórmulas de Taylor conocidas.

Ejemplo 1 Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$.

Solución Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 0$. Sustituyamos las funciones exponenciales y trigonométricas con sus polinomios de Maclaurin de grado tres más los correspondientes términos de error utilizando la notación O:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) - \left(2x - \frac{2^3x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) - 2 - 2x - x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^3}{3} + O(x^5)}{\frac{x^3}{3} + O(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3
\end{aligned}
$$

Observe cómo se han utilizado las propiedades de la notación O presentadas en la sección anterior. Necesitamos que los polinomios de Maclaurin sean al menos de grado tres porque todos los términos de menor grado se cancelan en el numerador y en el denominador. ■

Ejemplo 2 Evalúe $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

Solución Este límite es también de la forma [0/0]. Comenzaremos por sustituir $x = 1 + t$. Nótese que $x \to 1$ es equivalente a $t \to 0$. Ahora podemos utilizar el polinomio de Maclaurin conocido para $\ln(1 + t)$. Para este límite servirá incluso el polinomio de grado uno $P_1(t) = t$ con error $O(t^2)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} &= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{2t + t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t + O(t^2)}{2t + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + O(t)}{2 + t} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Reglas de l'Hôpital

Muchas formas indeterminadas del tipo [0/0] se pueden resolver mediante métodos algebraicos simples, en general simplificando factores comunes. Se pueden encontrar ejemplos en las Secciones 1.2 y 1.3. En otros casos se puede utilizar el método de los polinomios de Taylor, si se conocen o se pueden calcular fácilmente los polinomios apropiados. Desarrollaremos a continuación un tercer método denominado **Regla de l'Hôpital**[1], que se utiliza para calcular límites de formas indeterminadas de los tipos $[\infty/\infty]$. Los otros tipos de formas indeterminadas se pueden reducir generalmente a una de estas dos mediante métodos algebraicos y tomando logaritmos.

TEOREMA 12 **Primera Regla de l'Hôpital**

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en el intervalo (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Supongamos además que

(i) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (con L finito o ∞ o $-\infty$).

Entonces,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Se obtienen resultados similares si cada aparición de $\lim_{x\to a+}$ se sustituye por $\lim_{x\to b-}$ o incluso $\lim_{x\to c}$, siendo $a < c < b$. Los casos $a = -\infty$ y $b = \infty$ están también permitidos.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el caso en el que interviene $\lim_{x\to a+}$ para a finito. Se define

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

Entonces F y G son continuas en el intervalo $[a, x]$ y diferenciables el intervalo (a, x) para todo x perteneciente al intervalo (a, b). Por el Teorema del Valor Medio Generalizado (Teorema 16 de la Sección 2.6) debe existir un número c en el intervalo (a, x) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[1] El Marqués de l'Hôpital (1661-1704), de quien toman el nombre estas reglas, publicó el primer libro de texto de cálculo. El acento circunflejo (ˆ) no se empezó a utilizar en el idioma francés hasta después de la Revolución Francesa. El Marqués hubiera escrito su nombre como «l'Hospital».

Como $a < c < x$, si $x \to a+$, entonces necesariamente $c \to a+$, por lo que tenemos

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

El caso en el que interviene $\lim_{x\to b-}$ para b finito se demuestra de forma similar, y los casos en que $a = -\infty$ o $b = \infty$ se siguen de los casos que ya se han considerado realizando el cambio de variable $x = 1/t$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ejemplo 3 Vuelva a calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$. (*Véase* el Ejemplo 2).

Solución Tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Nótese que al aplicar la Regla de l'Hôpital se calcula el cociente de las derivadas, *no* la derivada del cociente.

Este ejemplo ilustra cómo se realizan los cálculos basados en la Regla de l'Hôpital. Cuando se ha identificado que el límite es de la forma indeterminada [0/0], se sustituye por el límite del cociente de las derivadas. La existencia de este último límite justifica la igualdad. Es posible que el límite del cociente de las derivadas sea todavía indeterminado, en cuyo caso se puede aplicar una segunda vez la Regla de l'Hôpital. Se puede ir aplicando así repetidas veces hasta que finalmente se pueda obtener un límite, lo que justifica todas las aplicaciones anteriores de la regla.

Observación La solución anterior parece más fácil que la del Ejemplo 2, y podríamos estar tentados de pensar que las Reglas de l'Hôpital son más fáciles de utilizar que los polinomios de Taylor. En este caso resultó más fácil porque sólo tuvimos que aplicar la Regla de l'Hôpital una sola vez. Si intentamos rehacer el Ejemplo 1 utilizando la Regla de l'Hôpital, tendremos que utilizar dicha regla tres veces (lo que corresponde al hecho de que en el Ejemplo 1 se necesitan polinomios de tercer grado).

Ejemplo 4 Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\,(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$.

Solución Tenemos que (utilizando la Regla de l'Hôpital tres veces)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\,(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x} \quad \text{simplificar los 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} \quad \text{todavía} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(2x)}{e^x - 1} \quad \text{todavía} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos(2x)}{e^x} = \frac{-1+4}{1} = 3$$

Ejemplo 5 Calcule (a) $\lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x}$ y (b) $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x}$.

Solución

(a) $\lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2}{-2\operatorname{sen} x \cos x} = -\infty$$

(b) No se puede utilizar la Regla de l'Hôpital para calcular $\lim_{x\to 1+} x/(\ln x)$ porque no es una forma indeterminada. El denominador tiende 0 cuando $x \to 1+$, pero el numerador no tiende a 0. Como $\ln x > 0$ para $x > 1$, tenemos, directamente,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

Si hubiéramos intentado utilizar la Regla de l'Hôpital habríamos llegado a la respuesta errónea $\lim_{x\to 1+} (1/(1/x)) = 1$.

Ejemplo 6 Calcule $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

Solución La forma indeterminada en este caso es del tipo $[\infty - \infty]$, a la que no se puede aplicar la Regla de l'Hôpital. Sin embargo, se puede transformar en una forma indeterminada del tipo $[0/0]$ tras combinar las fracciones en una sola.

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \quad [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{-0}{2} = 0$$

Se puede obtener una versión de la Regla de l'Hôpital que sirve para formas indeterminadas del tipo $[\infty/\infty]$.

TEOREMA 13 **Segunda Regla de l'Hôpital**

Suponga que f y g son diferenciables en el intervalo (a, b) y que en dicho intervalo $g'(x) \neq 0$. Suponga también que

(i) $\lim_{x \to a+} g(x) = \pm \infty$.

(ii) $\lim_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (siendo L finito, o ∞ o $-\infty$).

Entonces,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

De nuevo, se obtienen resultados similares para $\lim_{x \to b-}$ y para $\lim_{x \to c}$, y los casos $a = -\infty$ y $b = \infty$ están permitidos.

La demostración de la segunda Regla de l'Hôpital es técnicamente mucho más difícil que la de la primera Regla, y no la presentaremos aquí. El Ejercicio 35 al final de esta sección da una idea de la demostración.

Observación *No* se debe intentar utilizar las Reglas de l'Hôpital para calcular límites que no sean formas indeterminadas del tipo [0/0] o [∞/∞]. Esos intentos casi siempre conducen a conclusiones falsas, como se observó en el Ejemplo 5(b) anterior (en sentido estricto, la segunda Regla de l'Hôpital se puede aplicar a la forma [a/∞], pero no tiene sentido hacerlo si a no es infinito, ya que en ese caso el límite es obviamente 0).

Observación No se puede extraer ninguna conclusión sobre $\lim f(x)/g(x)$ utilizando la Regla de l'Hôpital si $\lim f'(x)/g'(x)$ no existe. Deben utilizarse otras técnicas. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$ por el Teorema del Sándwich, incluso aunque no exista $\lim_{x\to\infty} (\cos x)/1$.

Ejemplo 7 Calcule (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ y (b) $\lim_{x\to 0+} x^a \ln x$, siendo $a > 0$.

Solución Ambos límites se contemplan en el Teorema 5 de la Sección 3.4. Lo resolveremos aquí mediante la Regla de l'Hôpital.

(a)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \qquad \text{todavía } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0
\end{aligned}$$

De forma similar, se puede demostrar que $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$ para todo entero positivo n, aplicando repetidamente la Regla de l'Hôpital.

(b)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} x^a \ln x \qquad (a > 0) \qquad [0 \cdot (-\infty)]\\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \qquad \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^a}{-a} = 0
\end{aligned}$$

El modo más fácil de resolver formas indeterminadas de los tipos $[0^0]$, $[\infty^0]$ y $[1^\infty]$ es tomar logaritmos de las expresiones que aparecen. Los dos ejemplos siguientes ilustran la técnica.

Ejemplo 8 Calcule $\lim_{x\to 0+} x^x$.

Solución Esta forma indeterminada es del tipo $[0^0]$. Sea $y = x^x$. Entonces,

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$$

por el Ejemplo 7(b). Entonces $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1$.

Ejemplo 9 Calcule $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x$.

Solución En este caso la forma indeterminada es del tipo 1^∞. Sea $y = \left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x$. Entonces, tomando logaritmos en los dos miembros,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right) \qquad [\infty\cdot 0]\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\operatorname{sen}\frac{3}{x}}\left(\cos\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cos\frac{3}{x}}{1+\operatorname{sen}\frac{3}{x}} = 3\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x = e^3$.

Ejercicios 4.9

Calcule los límites de los Ejercicios 1-32.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\tan 4x}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\tan^{-1} x}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1}$
7. $\lim_{x\to 0} x\cot x$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$
9. $\lim_{t\to \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t-\pi}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{10x - e^x}{x}$
11. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos 3x}{\pi - 2x}$
12. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(ex)-1}{\operatorname{sen}\pi x}$
13. $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x-\tan x}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2-2\cos x}{x^4}$
17. $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan x - x}$
18. $\lim_{r\to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} r}{\cos r}$
19. $\lim_{t\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$
20. $\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{x-1}$
21. $\lim_{x\to\infty} x(2\tan^{-1} x - \pi)$
22. $\lim_{t\to(\pi/2)-} (\sec t - \tan t)$

23. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{te^{at}}\right)$

24. $\lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$

*__25.__ $\lim_{x\to 0+} (\csc x)^{\operatorname{sen}^2 x}$

*__26.__ $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

*__27.__ $\lim_{t\to 0}\frac{3\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 3t}{3\tan t-\tan 3t}$

*__28.__ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$

*__29.__ $\lim_{t\to 0}(\cos 2t)^{1/t^2}$

*__30.__ $\lim_{x\to 0+}\frac{\csc x}{\ln x}$

*__31.__ $\lim_{x\to 1-}\frac{\ln \operatorname{sen} \pi x}{\csc \pi x}$

*__32.__ $\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{1/x}$

33. (Un cociente de Newton para la segunda derivada) Calcule $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ si f es una función dos veces diferenciable.

34. Si f tiene tercera derivada continua, calcule

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+h)+3f(x-h)-f(x-3h)}{h^3}$$

*__35. (Demostración de la segunda Regla de l'Hôpital)__ Complete los detalles del siguiente esquema de demostración de la segunda Regla de l'Hôpital (Teorema 13) para el caso en el que a y L sean los dos finitos. Sea $a<x<t<b$ y demuestre que existe un valor c en (x, t) tal que

$$\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Trabaje ahora algebraicamente con la ecuación anterior para llegar a la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)}-L=\frac{f'(c)}{g'(c)}-L+\frac{1}{g(x)}\left(f(t)-g(t)\,\frac{f'(c)}{g'(c)}\right)$$

Se deduce entonces que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-L\right|+\frac{1}{|g(x)|}\left(|f(t)|+|g(t)|\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\right)$$

Demuestre que el miembro derecho de la inecuación anterior se puede hacer tan pequeño como se desee (por ejemplo, menor que cualquier número positivo ϵ) escogiendo primero t y después x suficientemente cercanos a a.
No hay que olvidar que $\lim_{c\to a+}(f'(c)/g'(c))=L$ y $\lim_{x\to a+}|g(x)|=\infty$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes palabras, frases y afirmaciones?**
  - ◇ Punto crítico de f.
  - ◇ Punto singular de f.
  - ◇ Punto de inflexión de f.
  - ◇ f tiene un valor máximo absoluto M.
  - ◇ f tiene un valor mínimo local en $x=c$.
  - ◇ Asíntota vertical.
  - ◇ Asíntota horizontal.
  - ◇ Asíntota oblicua.
  - ◇ Linealización de $f(x)$ en $x=a$.
  - ◇ El polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$ alrededor de $x=a$.
  - ◇ La fórmula de Taylor con resto de Lagrange.
  - ◇ $f(x)=O((x-a)^n)$ cuando $x\to a$.
  - ◇ Una raíz de $f(x)=0$.
  - ◇ Un punto fijo de $f(x)$.
  - ◇ Una forma indeterminada.
  - ◇ Reglas de l'Hôpital.
- **Explique cómo estimar el error de una aproximación lineal (recta tangente) al valor de una función.**
- **Explique cómo calcular una raíz de una ecuación $f(x)=0$ utilizando el Método de Newton. ¿Cuándo funciona bien este método?**

Ejercicios de repaso

1. Si el radio r de una bola crece con una velocidad del 2% por minuto, ¿con qué velocidad crece el volumen de dicha bola?

2. (Atracción gravitatoria) La atracción gravitatoria que ejerce la tierra sobre una masa m que está a una distancia r del centro de la tierra es una función continua de r para $r\geqslant 0$, dada por

$$F=\begin{cases}\dfrac{mgR^2}{r^2} & \text{si } r\geqslant R\\ mkr & \text{si } 0\leqslant r<R\end{cases}$$

siendo R el radio de la tierra, y g la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la tierra.

(a) Calcule la constante k en función de g y de R.

(b) F disminuye a medida que m se aleja de la superficie de la tierra, bien hacia arriba o bien hacia abajo. Demuestre que F disminuye cuando r crece desde R al doble de velocidad con la que disminuye F cuando r decrece desde R.

3. (Resistencias en paralelo) Dos resistencias variables R_1 y R_2 se conectan en paralelo de forma que su resistencia combinada R se expresa como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En un instante en el que $R_1 = 250$ ohmios y $R_2 = 1000$ ohmios, R_1 crece con una velocidad de 100 ohmios/min. ¿Con qué velocidad debe cambiar R_2 en ese instante (a) para mantener R constante y (b) para que R aumente con una velocidad de 10 ohmios/min?

4. (Ley de los gases) El volumen V (en m^3), la presión P (en kilopascales, kPa) y la temperatura T (en grados Kelvin, K) de una muestra de un cierto gas cumplen la ecuación $pV = 5{,}0T$.

(a) ¿Con qué rapidez se incrementa la presión si la temperatura es de 400 °K y se incrementa a razón de 4 °K/min cuando el gas se mantiene encerrado en un volumen de 2 m^3?

(b) ¿Con qué velocidad disminuye la presión si el volumen es de 2 m^3 y se incrementa a razón de 0,05 m^3/min si la temperatura se mantiene constante a 400 °K?

5. (Tamaño de una tirada de imprenta) A una editorial le cuesta 10 000 € la imprenta para una tirada de un libro, y los costes de material por cada libro impreso son de 8 €. Además, los costes de mantenimiento de máquinas, costes laborales y costes de almacenamiento añaden unos costes de $6{,}25$ € $\times\, 10^{-7}x^2$ si la tirada es de x copias. ¿Cuántas copias debe imprimir la editorial para minimizar el coste medio por libro?

6. (Maximización del beneficio) Un mayorista de bicicletas debe pagar al fabricante 75 € por cada bicicleta. Las investigaciones de mercado indican al mayorista que si cobra a sus clientes x € por bicicleta, puede esperar vender $N(x) = 4{,}5 \times 10^6/x^2$ bicicletas. ¿Qué precio debería poner para maximizar su beneficio, y cuántas bicicletas debería pedir al fabricante?

7. Calcule el máximo volumen posible de un cono circular recto que se puede inscribir en una esfera de radio R.

8. (Minimización de costes de producción) El coste $C(x)$ € de producción en una factoría varía con la cantidad x de producto que se fabrica. El coste aumenta rápidamente con x cuando x es pequeño, y más lentamente para valores mayores de x debido a las economías de escala. Sin embargo, si x se hace demasiado grande, los recursos de la factoría pueden resultar gravados en exceso, y el coste puede empezar a aumentar rápidamente de nuevo. La Figura 4.59 muestra una gráfica típica de la función de coste $C(x)$.

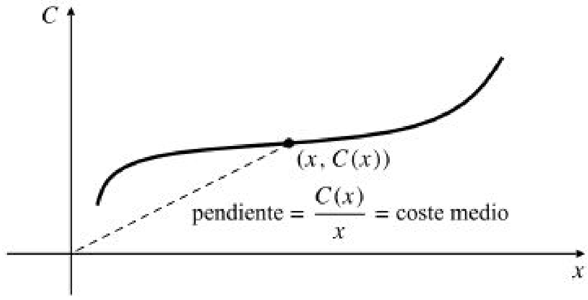


Figura 4.59

Si se fabrican x unidades, el coste medio por unidad es de $C(x)/x$ €, que es la pendiente de la recta del origen al punto $(x, C(x))$ en la gráfica.

(a) Si se desea escoger x para minimizar este coste medio por unidad (tal como sería el caso si todas las unidades producidas se pudieran vender por el mismo precio), demuestre que x debe ser tal que haga el coste medio igual al coste marginal:

$$\frac{C(x)}{x} = C'(x)$$

(b) Interprete geométricamente en la figura anterior la conclusión de (a).

(c) Si el coste medio es igual al coste marginal para algún valor de x, ¿minimiza necesariamente ese valor de x el coste medio?

9. (Diseño de una caja) Se cortan cuatro cuadrados de un rectángulo de cartón cuyas medidas son 50 cm × 80 cm, como se muestra en la Figura 4.60, y la pieza resultante se dobla en forma de una caja rectangular cerrada con dos solapas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de dicha caja?

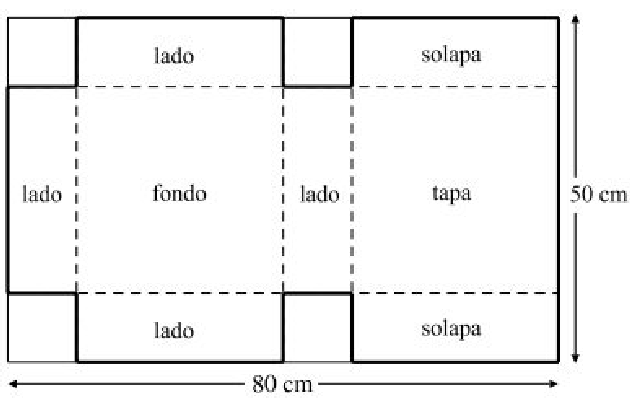


Figura 4.60

10. **(Producción de un huerto)** Cierto huerto tiene 60 árboles y produce un promedio de 800 manzanas por árbol y año. Si se aumenta la densidad de árboles, disminuye la cosecha por árbol. Por cada árbol adicional que se planta, la cosecha promedio por árbol se reduce en 10 manzanas al año. ¿Cuántos árboles más se deberían plantar para maximizar la cosecha total anual de manzanas del huerto?

11. **(Rotación de una antena de seguimiento)** ¿Cuál es la máxima velocidad a la que debe girar la antena del Ejercicio 41 de la Sección 4.1 para seguir al cohete durante toda su trayectoria ascendente vertical?

12. Una mesa ovalada tiene su borde exterior con la forma de la curva $x^2 + y^4 = 1/8$, donde x e y se miden en metros. ¿Cuál es la anchura del recibidor más estrecho en el que la mesa puede girar horizontalmente 180°?

13. Una bola hueca de hierro cuya pared mide 2 cm de espesor pesa la mitad de lo que pesaría si estuviera construida de hierro macizo. ¿Cuál es el radio de la bola?

14. **(Alcance de un cañón disparado desde una colina)** Una bala de cañón se lanza con una velocidad de 200 pies/s con un ángulo de 45° sobre la horizontal desde la cima de una colina, cuya altura a una distancia horizontal x de la cima es $y = 1000/(1 + (x/500)^2)$ pies sobre el nivel del mar. ¿Qué distancia horizontal puede cubrir la bala de cañón antes de llegar al suelo?

15. **(Aproximación lineal de un péndulo)** Como $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ para valores pequeños de $|\theta|$, la ecuación no lineal del movimiento de un péndulo simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$$

que determina el ángulo de desplazamiento $\theta(t)$ respecto a la vertical en el instante t para un péndulo simple, se aproxima con frecuencia por la ecuación lineal más sencilla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

cuando el máximo desplazamiento del péndulo no es muy grande. ¿Cuánto vale el error porcentual del miembro derecho de la ecuación si $|\theta|$ no supera los 20°?

16. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 para $\operatorname{sen}^2 x$ en $x = 0$ y utilícelo como ayuda para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen}^2 x - 3x^2 + x^4}{x^6}$$

17. Utilice un polinomio de Taylor de grado 2 para $\tan^{-1} x$ en $x = 1$, para calcular un valor aproximado de $\tan^{-1}(1.1)$. Estime el tamaño del error utilizando la fórmula de Taylor.

18. La recta $2y = 10x - 19$ es tangente a $y = f(x)$ en $x = 2$. Si se hace una aproximación inicial $x_0 = 2$ para una raíz de $f(x) = 0$ y se aplica una vez el Método de Newton, ¿cuál será la nueva aproximación que resulta?

19. Calcule todas las soluciones de la ecuación $\cos x = (x - 1)^2$ con una precisión de 10 cifras decimales.

20. Calcule la mínima distancia del punto (2, 0) a la curva $y = \ln x$.

21. Un coche viaja de noche por una carretera curva sin pendientes cuya ecuación es $y = e^x$. En un cierto instante sus faros iluminan una señal localizada en el punto (1, 1). ¿Dónde está el coche en ese instante?

Problemas avanzados

1. **(Crecimiento de un cristal)** Un único cristal cúbico de sal crece en un vaso de precipitados con una solución salina. El volumen del cristal V crece con una velocidad proporcional al área de superficie y al volumen que le resta para llegar a un volumen límite V_0:

$$\frac{dV}{dt} = kx^2(V_0 - V)$$

siendo x la longitud del lado del cristal en el instante t.

(a) Utilizando $V = x^3$, transforme la ecuación anterior en otra que exprese la velocidad de cambio dx/dt de la longitud del lado x en función de t.

(b) Demuestre que la velocidad de crecimiento de la longitud del lado del cristal disminuye con el tiempo, pero permanece positiva mientras $x < x_0 = V_0^{1/3}$.

(c) Calcule el volumen del cristal cuando la longitud de su lado crece a la mitad de la velocidad inicial.

***2.** **(Una revisión del cálculo)** Suponga que está en un tanque (la variedad militar) moviéndose por el eje y positivo hacia el origen. En el instante $t = 0$ está a 4 km del origen, y 10 minutos después está a 2 km del origen. Su velocidad está disminuyendo; es proporcional a su distancia al origen. Usted sabe que un tanque enemigo está esperando en algún lugar del eje x positivo, pero hay una pared alta que sigue la curva $xy = 1$ (todas las distancias se miden en kilómetros) que le impide ver realmente dónde está. ¿Con qué velocidad debe ser capaz de girar el cañón de su torreta para maximizar sus posibilidades de sobrevivir al enfrentamiento?

3. **(Economía de los análisis de sangre)** Suponga que se necesita realizar un análisis de sangre a un gran número N de personas para detectar la presencia de un

virus. Si cada análisis cuesta C €, entonces el coste total del programa de análisis será NC €. Si la proporción de gente en la población que tiene el virus no es grande, este coste se puede reducir mucho utilizando la siguiente estrategia. Se dividen las N muestras de sangre en N/x grupos de x muestras cada uno. Se junta toda la sangre de un grupo para realizar un solo análisis de ese grupo. Si el análisis es negativo, no es necesario realizar más análisis a los individuos de seguro. Si la muestra del grupo resulta positiva, se analizan todos los individuos del grupo.
Suponga que la fracción de individuos de la población infectada con el virus es p, de forma que la fracción de personas no infectadas es $q = 1 - p$. La probabilidad de que un individuo determinado no esté infectado es q, por lo que la probabilidad de que todos los x individuos de un grupo no estén infectados es q^x. Entonces, la probabilidad de que una muestra conjunta esté infectada es $1 - q^x$. Cada grupo requiere un análisis, y los grupos infectados requieren x análisis extras. En consecuencia, el número medio total de análisis a realizar es

$$T = \frac{N}{x} + \frac{N}{x}(1 - q^x)x = N\left(\frac{1}{x} + 1 - q^x\right)$$

Por ejemplo, si $p = 0.01$, de forma que $q = 0.99$ y $x = 20$, entonces el número medio de análisis requeridos es $T = 0.23N$, una reducción aproximada del 75%. Pero es posible que los resultados puedan ser mejores si tomamos un valor distinto de x.

(a) Para $q = 0.99$, calcule el número x de muestras en un grupo que minimiza T (es decir, resuelva $dT/dx = 0$). Demuestre que el valor de x que minimiza T cumple

$$x = \frac{(0.99)^{-x/2}}{\sqrt{-\ln(0.99)}}$$

(b) Utilice la técnica de iteración del punto fijo (*véase* la Sección 4.6) para calcular x en la ecuación de (a). Comience, por ejemplo, con $x = 20$.

4. (Medida de variaciones de *g*) El periodo P de un péndulo de longitud L se expresa como

$$P = 2\pi\sqrt{L/g}$$

siendo g la aceleración de la gravedad.

(a) Suponiendo que L permanece fijo, demuestre que un incremento de un 1% en g produce una disminución de aproximadamente un 0.5% en el periodo P (las variaciones del periodo de un péndulo se pueden utilizar para detectar pequeñas variaciones de g entre lugares diferentes de la superficie de la tierra).

(b) Para g fijo, ¿qué cambio porcentual en L producirá un 1% de incremento en P?

5. (Ley de Torricelli) La velocidad a la que se vacía un tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad de líquido en el tanque por encima del nivel del desagüe. Si $V(t)$ es el volumen de líquido en el tanque en el instante t y $y(t)$ es la altura de la superficie del líquido por encima del desagüe, entonces $dV/dt = -k\sqrt{y}$, siendo k una constante que depende del tamaño del desagüe. Para un tanque cilíndrico con área de sección cruzada constante A y desagüe en el fondo:

(a) Verifique que la profundidad $y(t)$ de líquido en el tanque en el instante t cumple la ecuación $dy/dt = -(k/A)\sqrt{y}$.

(b) Verifique que si la profundidad de líquido en el tanque en $t = 0$ es y_0, entonces la profundidad instantes posteriores durante el proceso de vaciado es $y = \left(\sqrt{y_0} - \dfrac{kt}{2A}\right)^2$.

(c) Si el tanque se vacía completamente en un tiempo T, exprese la profundidad $y(t)$ en el instante t en función de y_0 y de T.

(d) En función de T, ¿cuánto tiempo tarda en vaciarse la mitad del líquido del tanque?

6. Si un tanque cónico de radio R en su parte superior y profundidad H se vacía de acuerdo con la Ley de Torricelli, y tarda en vaciarse un tiempo T, demuestre que la profundidad del líquido en el tanque en el instante t $(0 < t < T)$ es

$$y = y_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2/5}$$

siendo y_0 la profundidad en $t = 0$.

7. Calcule la máxima área posible de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es P.

8. Calcule una tangente a la gráfica de $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ que no sea paralela a ninguna otra tangente.

9. (Ángulos de bifurcación de cables eléctricos y tuberías)

(a) La resistencia ofrecida por un cable al flujo de corriente eléctrica que circula a través suyo es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección cruzada. Por tanto, la resistencia R de un cable de longitud L y radio r es $R = kL/r^2$, siendo k una constante positiva.
Un cable largo recto de longitud L y radio r_1 se extiende desde A hasta B. Un segundo cable recto de radio menor r_2 se conecta entre un punto P en la recta AB y un punto C situado a una distancia h de B de forma que CB es perpendicular a AB (*véase* la Figura 4.61). Calcule el valor del ángulo

$\theta = \angle BPC$ que minimiza la resistencia total del camino APC, es decir, la resistencia de AP más la resistencia de PC.

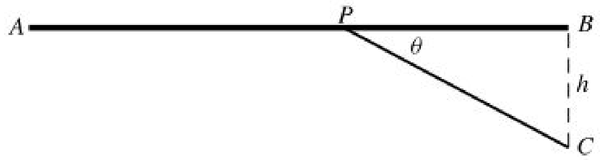


Figura 4.61

(b) La resistencia de una tubería (por ejemplo, un vaso sanguíneo) al flujo de un líquido a través de ella, por la Ley de Poiseuille, es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a la *cuarta potencia* de su radio: $R = kL/r^4$. Si la situación del apartado (a) se representa con tuberías en vez de cables, obtenga el valor de θ que minimiza la resistencia total del camino APC. ¿Cómo se relaciona su respuesta con la respuesta del apartado (a)? ¿Se podría haber predicho esta relación?

10. (Alcance de un chorro de líquido) Un tanque de agua cilíndrico situado sobre una mesa horizontal tiene un pequeño agujero localizado en su pared vertical a una altura h del fondo del tanque. El agua se escapa del tanque horizontalmente por el agujero y después se curva hacia abajo debido a la influencia de la gravedad hasta llegar a la mesa a una distancia R de la base del tanque, como se muestra en la Figura 4.62 (se ignora la resistencia del aire). La Ley de Torricelli implica que la velocidad v a la que sale el agua del tanque por el agujero es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agujero respecto a la superficie del agua. Si la profundidad del agua en el tanque en el instante t es $y(t) > h$, entonces $v = k\sqrt{y - h}$, siendo k una constante que depende del tamaño del agujero.

(a) Calcule la distancia R en función de v y h.

(b) Para una profundidad dada y del agua en el tanque, ¿a qué altura habría que poner el agujero para maximizar R?

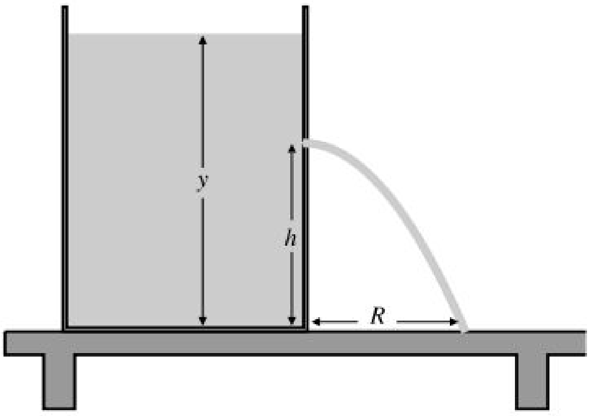


Figura 4.62

(c) Supóngase que la profundidad del agua en el tanque en el instante $t = 0$ es y_0, que el alcance R del chorro es R_0 en ese instante y que el nivel de agua desciende hasta la altura h del agujero en T minutos. Calcule, en función de t, el alcance R del agua que escapa por un agujero en el instante t.

***11. (Diseño de un recogedor)** Se cortan cuadrados iguales de dos esquinas adyacentes de una plancha de metal cuadrada cuyo lado tiene una longitud de 25 cm. Las tres solapas resultantes se doblan, como se muestra en la Figura 4.63, para formar los lados de un recogedor. Calcule el máximo volumen de un recogedor construido de esta forma.

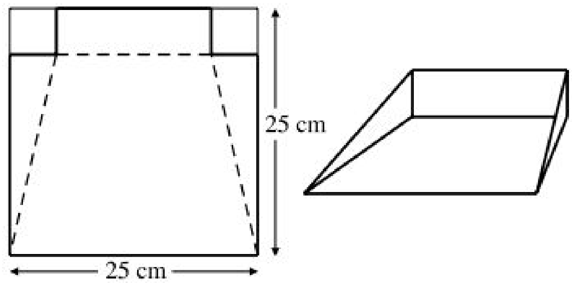


Figura 4.63

CAPÍTULO 5

Integración

Hay en este mundo personas optimistas que piensan que cualquier símbolo que empiece con un signo de integral debe indicar necesariamente algo que tendrá todas las propiedades que debe tener una integral. Por supuesto esto resulta molesto para los matemáticos rigurosos. Pero lo que es incluso más molesto es que al hacerlo así a menudo se llega a la solución correcta.

E. J. McShane
de *Bulletin of the American Mathematical Society, v. 69, p. 611, 1963*

Introducción El segundo problema fundamental del que se ocupa el cálculo es el problema de las áreas, es decir, el problema de determinar el área de una región del plano limitada por varias curvas. Como el problema de las tangentes considerado en el Capítulo 2, muchos problemas prácticos en diversas disciplinas requieren el cálculo de áreas para obtener su solución, y la solución del problema de las áreas necesariamente requiere utilizar la noción de límite. A primera vista, el problema de las áreas parece no estar relacionado con el problema de las tangentes. Sin embargo, veremos que los dos problemas están muy estrechamente relacionados. Uno de ellos es el inverso del otro. Calcular un área equivale a obtener una primitiva o, si preferimos decirlo así, calcular una integral. La relación entre las áreas y las primitivas se denomina Teorema Fundamental del Cálculo. Cuando lo hayamos demostrado, podremos obtener las áreas que deseemos, suponiendo que podamos integrar (es decir, obtener primitivas) las diversas funciones que aparezcan.

Sería interesante tener a nuestra disposición un conjunto de reglas de integración similares a las reglas de diferenciación obtenidas en el Capítulo 2. Utilizando dichas reglas de diferenciación, es posible obtener la derivada de cualquier función diferenciable. Desafortunadamente, la integración es generalmente más difícil. De hecho, algunas funciones muy simples no son derivadas de funciones simples. Por ejemplo, e^{x^2} no es la derivada de ninguna combinación finita de funciones elementales. Sin embargo, emplearemos algún tiempo en la Sección 5.6 y en las Secciones 6.1-6.4 en desarrollar técnicas para integrar tantas funciones como sea posible. Posteriormente, en el Capítulo 6, examinaremos cómo aproximar áreas limitadas por gráficas de funciones que no se pueden integrar.

5.1 Sumas y notación sigma

Cuando empecemos a calcular áreas en la sección siguiente, aparecerán a menudo sumas de valores de funciones. Es necesario tener una notación conveniente para representar sumas de un número (posiblemente grande) arbitrario de términos, y también desarrollar técnicas para calcular el valor de dichas sumas.

Utilizaremos el símbolo $\sum$ para representar una suma. Se trata de la letra griega mayúscula *sigma*, equivalente a nuestra letra S, aumentada de tamaño.

DEFINICIÓN 1 Notación sigma

Si m y n son enteros con $m \leqslant n$, y si f es una función definida en los enteros m, $m+1$, $m+2$, ..., n, el símbolo $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ representa la suma de los valores de f en dichos enteros:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n)$$

La suma explícita que aparece en el miembro derecho de la ecuación es el **desarrollo** de la suma representada utilizando la notación sigma en el miembro izquierdo.

Ejemplo 1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$

La i que aparece en el símbolo $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ se denomina **índice del sumatorio**. Para calcular $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ se va sustituyendo sucesivamente el índice i por los enteros m, $m+1$, ..., n, y se suman los resultados. Obsérvese que el valor de la suma no depende de la forma en que denominamos al índice. El índice no aparece en el miembro derecho de la definición. Si usáramos otra letra en lugar de i en la suma del Ejemplo 1, dicha suma tendría el mismo valor:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

El índice del sumatorio es una *variable auxiliar* que se utiliza para representar un punto arbitrario en el que se evalúa la función para obtener un término que se incluirá en la suma. Por otra parte, la suma $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ depende de los dos números m y n, denominados **límites del sumatorio**; m es el **límite inferior** y n es el **límite superior**.

Ejemplo 2 **(Ejemplos de sumas utilizando la notación sigma)**

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19 + 20$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{m=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}}$$

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

Algunas veces se utiliza una variable con subíndice a_i para indicar el i-ésimo término de una suma general, en vez de utilizar la notación funcional $f(i)$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

En particular, una **serie infinita** es una suma con infinitos términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Cuando no se pone un término al final, detrás de ..., se sobreentiende que los términos continúan hasta el infinito. En el Capítulo 9 estudiaremos las series infinitas.

Cuando se suma un número finito de términos, el orden en el que se suman carece de importancia, ya que cualquier orden producirá el mismo resultado. Si todos los números tienen un factor común, entonces dicho factor se puede extraer de cada término y multiplicarlo después de calcular la suma: $ca + cb = c(a + b)$. Estas leyes de la aritmética se convierten en la siguiente regla de *linealidad* para sumas finitas. Si A y B son constantes, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} (A f(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^{n} f(i) + B \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Las dos sumas $\sum_{j=m}^{m+n} f(j)$ y $\sum_{i=0}^{n} f(i+m)$ tienen el mismo desarrollo, es decir, $f(m) + + f(m+1) + \cdots + f(m+n)$. Por tanto, las dos sumas valen lo mismo.

$$\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m)$$

Esta igualdad se puede obtener también sustituyendo j por $i + m$ allí donde j aparezca en el miembro izquierdo, teniendo en cuenta que $i + m = m$ se convierte en $i = 0$ y que $i + m = m + n$ se convierte en $i = n$. Muchas veces es conveniente realizar **cambios de índice** en un sumatorio.

Ejemplo 3 Exprese $\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2}$ de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Solución Sea $j = i + 2$. Entonces $j = 3$ corresponde a $i = 1$ y $j = 17$ corresponde a $i = 15$. Por tanto,

$$\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2} = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{1+(i+2)^2}$$

Cálculo de sumas

Existe una **forma cerrada** para expresar la suma S de los n primeros enteros positivos, concretamente,

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para ver esto, escribamos la suma hacia adelante y hacia atrás y sumemos las dos, con lo que se obtiene

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + \quad n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + \quad 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + (n+1) = n(n+1) \end{array}$$

La fórmula de S se obtiene entonces sin más que dividir por 2.

En general, no es tan fácil obtener una forma cerrada para cualquier suma. Sólo se puede simplificar $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ para un pequeño conjunto de funciones f. El Teorema 1 recoge las fórmulas que necesitaremos en las secciones siguientes.

TEOREMA 1 Fórmulas para sumas

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ términos}} = n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ si $r \neq 1$

DEMOSTRACIÓN La fórmula (a) es trivial: la suma de n unos vale n. La demostración de la fórmula (b) se ha presentado anteriormente. Otras tres formas se sugieren en los Ejercicios 34-36.

Para demostrar (c), escribiremos n copias de la igualdad

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

una para cada valor de k desde 1 hasta n, y las sumaremos:

$$\begin{array}{rcllclcl}
2^3 & - & 1^3 & = & 3\times 1^2 & + & 3\times 1 & + & 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & 3\times 2^2 & + & 3\times 2 & + & 1 \\
4^3 & - & 3^3 & = & 3\times 3^2 & + & 3\times 3 & + & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3(n-1)^2 & + & 3(n-1) & + & 1 \\
(n+1)^3 & - & n^3 & = & 3n^2 & + & 3n & + & 1 \\
\hline
(n+1)^3 & - & 1^3 & = & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i^2) & + & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i) & + & n \\
 & & & = & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i^2) & + & \dfrac{3n(n+1)}{2} & + & n
\end{array}$$

En la última línea se ha utilizado la fórmula (b). En la ecuación final se puede despejar la suma deseada para obtener la fórmula (c). Nótense las cancelaciones que se producen cuando se suman los miembros izquierdos de las n ecuaciones. El término 2^3 de la primera línea se cancela con el término -2^3 de la segunda línea, y así sucesivamente, dejándonos sólo con dos términos, el término $(n+1)^3$ de la n-ésima línea y el término -1^3 de la primera línea:

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3$$

Esto es un ejemplo de lo que se denomina **suma telescópica**. En general, una suma de la forma $\sum_{i=m}^{n}(f(i+1) - f(i))$ se reduce en forma telescópica a la forma cerrada $f(n+1) - f(m)$, ya que se cancelan todos los términos excepto el primero y el último.

Para demostrar la fórmula (d), sea $s = \sum_{i=1}^{n} r^{i-1}$ y restemos s de rs:

$$\begin{aligned}(r-1)s = rs - s &= (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) - (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})\\ &= r^n - 1\end{aligned}$$

El resultado se deduce dividiendo por $r - 1$.

Ejemplo 4 Calcule $\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3)$, siendo $1 \leqslant m < n$.

Solución Utilizando las reglas de las sumas y algunas de las fórmulas del Teorema 1, se calcula

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) &= 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{n} k + 3 \sum_{k=1}^{n} 1\\ &= 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)}{2} + 3n\\ &= 2n^3 + n^2 + 2n\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) &= \sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) - \sum_{k=1}^{m} (6k^2 - 4k + 3)\\ &= 2n^3 + n^2 + 2n - 2m^3 - m^2 - 2m\end{aligned}$$

Observación Maple puede calcular las expresiones en forma cerrada de algunas sumas. Por ejemplo,

```
> sum(i^4, i=1..n) ; factor (%) ;
```

$$\frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}n - \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{30}n(2n+1)(n+1)(3n^2+3n-1)$$

Ejercicios 5.1

Desarrolle las sumas de los Ejercicios 1-6.

1. $\sum_{i=1}^{4} i^3$

2. $\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1}$

3. $\sum_{i=1}^{n} 3^i$

4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$

5. $\sum_{j=3}^{n} \frac{(-2)^j}{(j-2)^2}$

6. $\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^3}$

Escriba las sumas de los Ejercicios 7-14 utilizando una notación sigma (nótese que las respuestas no son únicas).

7. $5 + 6 + 7 + 8 + 9$

8. $2 + 2 + 2 + \cdots + 2$ (200 términos)

9. $2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots - 99^2$

10. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 100x^{99}$

11. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

12. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n}$

13. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

14. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n}$

Exprese las sumas de los Ejercicios 15 y 16 de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(i)$.

15. $\sum_{j=0}^{99} \operatorname{sen}(j)$

16. $\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1}$

Calcule los valores en forma cerrada de las sumas de los Ejercicios 17-30.

17. $\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2i$ **18.** $\sum_{j=1}^{1000} (2j+3)$

19. $\sum_{k=1}^{n} (\pi^k - 3)$ **20.** $\sum_{i=1}^{n} (2^i - i^2)$

21. $\sum_{m=1}^{n} \ln m$ **22.** $\sum_{i=0}^{n} e^{i/n}$

23. La suma del Ejercicio 8.

24. La suma del Ejercicio 11.

25. La suma del Ejercicio 12.

***26.** La suma del Ejercicio 10. *Sugerencia*: Diferencie la suma $\sum_{i=0}^{100} x^i$.

***27.** La suma del Ejercicio 9. *Sugerencia*: La suma es

$$\sum_{k=1}^{49} ((2k)^2 - (2k+1)^2) = \sum_{k=1}^{49} (-4k-1)$$

***28.** La suma del Ejercicio 14. *Sugerencia*: Para esta suma, aplique el método de demostración del Teorema 1(d).

29. Verifique la fórmula del valor de una suma telescópica:

$$\sum_{i=m}^{n} (f(i+1) - f(i)) = f(n+1) - f(m)$$

¿Por qué se utiliza la palabra «telescópica» para describir esta suma?

En los Ejercicios 30-32, evalúe las sumas telescópicas dadas.

30. $\sum_{n=1}^{10} (n^4 - (n-1)^4)$ **31.** $\sum_{j=1}^{m} (2^j - 2^{j-1})$

32. $\sum_{i=m}^{2m} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

33. Demuestre que $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, y a partir de ahí, evalúe $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$.

34. La Figura 5.1 muestra un cuadrado de lado n subdividido en n^2 cuadrados más pequeños de lado 1. ¿Cuántos cuadrados pequeños están sombreados? Obtenga la expresión en forma cerrada de $\sum_{i=1}^{n} i$ considerando la suma de las áreas de los cuadrados sombreados.

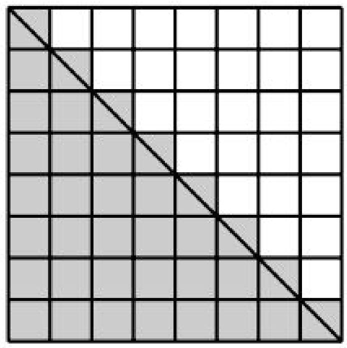


Figura 5.1

35. Escriba n copias de la igualdad $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, una para cada entero k desde 1 hasta n, y súmelas después para obtener la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

de una forma similar a la demostración del Teorema 1(c).

36. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(b).

37. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(c).

38. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(d).

39. La Figura 5.2 muestra un cuadrado de lado $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, subdividido en un cuadrado pequeño de lado 1 y $n-1$ regiones con forma de L, cuyos lados cortos son 2, 3, ..., n. Demuestre que el área de la región con forma de L cuyo lado corto vale i es i^3, y a partir de aquí verifique que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

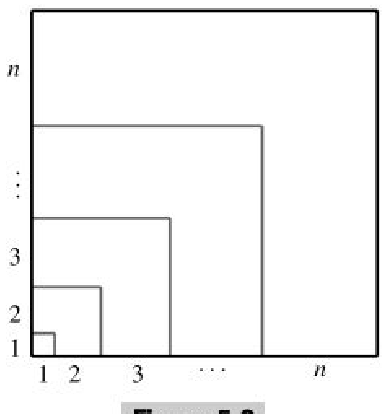


Figura 5.2

***40.** Escriba n copias de la igualdad

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

una para cada entero k desde 1 hasta n, y súmelas después para obtener la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

de una forma similar a la demostración del Teorema 1(c).

41. Utilice inducción matemática para verificar la fórmula de la suma de cubos dada en el Ejercicio 40.

42. Extienda el método del Ejercicio 40 para obtener una expresión en forma cerrada de $\sum_{i=1}^{n} i^4$. Puede utilizar Maple u otro sistema de matemáticas por computador para facilitar los desarrollos algebraicos.

43. Utilice Maple u otro sistema de matemáticas por computador para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^k$ para $k = 5, 6, 7, 8$. Observe el término con la mayor potencia de n en cada caso. Prediga el término de mayor potencia de y $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ y verifique su predicción.

5.2 Áreas como límites de sumas

En el Capítulo 2 comenzamos el estudio de las derivadas definiendo lo que se entiende por tangente a una curva en un punto dado. Es interesante empezar el estudio de las integrales definiendo lo que se entiende por **área** de una región plana, pero esa definición de área es mucho más difícil de dar que la definición de tangente. Supongamos (como hicimos, por ejemplo, en la Sección 3.3) que conocemos intuitivamente lo que es el área e indiquemos algunas de sus propiedades (*véase* la Figura 5.3).

(i) El área de una región plana es un número real no negativo que se mide en unidades al cuadrado.
(ii) El área de un rectángulo con anchura w y altura h es $A = wh$.
(iii) Las áreas de regiones planas congruentes son iguales.
(iv) Si una región S está incluida en una región R, entonces el área de S será menor o igual que el área de R.
(v) Si una región R es la unión de (un número finito de) regiones que no se solapan, entonces el área de R es la suma de las áreas de esas regiones.

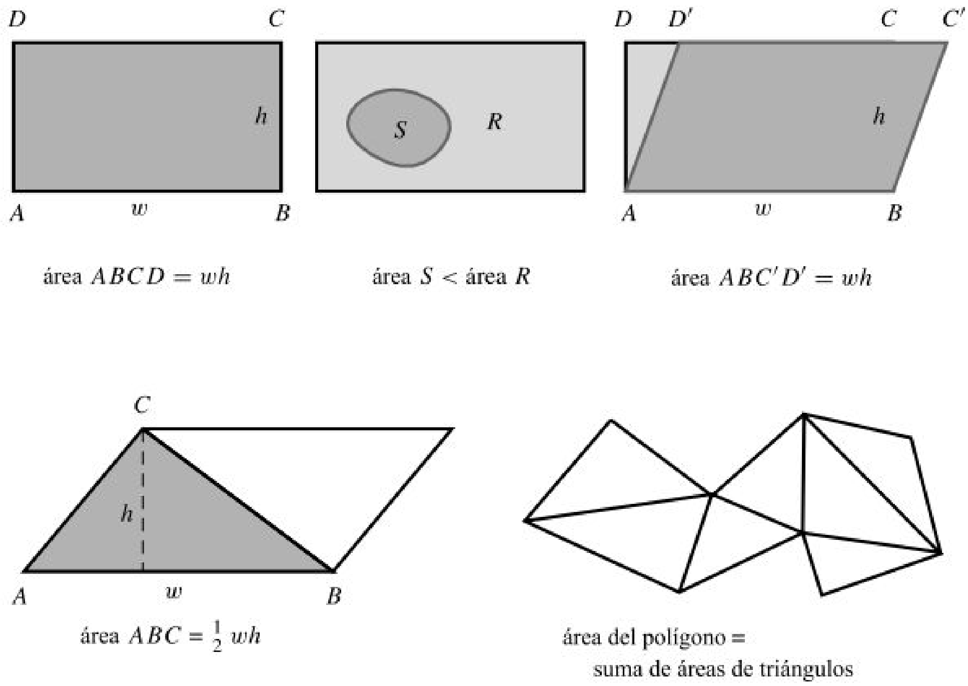


Figura 5.3 Propiedades del área.

Utilizando estas cinco propiedades, se puede calcular el área de cualquier **polígono** (una región delimitada por segmentos rectos). Primero, téngase en cuenta que las propiedades (iii) y (v) permiten demostrar que el área de un paralelogramo es la misma que la de un rectángulo con su misma anchura de la base y altura. Todo triángulo se puede acoplar con una copia congruente de sí mismo para formar un paralelogramo, por lo que el área del triángulo será la mitad del producto de la anchura de la base por la altura. Finalmente, todo polígono se puede subdividir en un número finito de triángulos que no solapan, por lo que su área será la suma de las áreas de dichos triángulos.

No podemos ir más allá de los polígonos si no tomamos límites. Si una región está limitada por una curva, su área sólo se podrá aproximar utilizando rectángulos o triángulos; el cálculo de su área exacta requiere la evaluación de un límite. En la Sección 1.1 vimos cómo se puede hacer esto en el caso de un círculo.

El problema básico del área

En esta sección vamos a considerar la forma de calcular el área de una región R que está por debajo de la gráfica de $y = f(x)$, una función f continua con valores no negativos, por encima del eje x y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, con $a < b$ (*véase* la Figura 5.4). Para ello, procederemos como sigue. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos utilizando los puntos de división:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

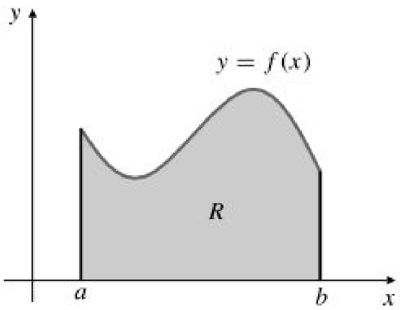


Figura 5.4 El problema básico del área: calcular el área de la región R.

Denominamos Δx_i a la longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Construiremos un rectángulo vertical sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ cuya base será de longitud Δx_i y cuya altura será $f(x_i)$. El área de este rectángulo es $f(x_i)\Delta x_i$. Formamos la suma de estas áreas:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

En la Figura 5.5 se muestran estos rectángulos sombreados para una función decreciente f. En el caso de una función creciente, las partes superiores de los rectángulos estarían por encima de la gráfica de f en vez de por debajo. Evidentemente, S_n es una aproximación al área de la región R, y dicha aproximación mejora cuando n crece, suponiendo que los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ se escogen de forma que la anchura Δx_i del rectángulo más ancho tiende a cero.

Por ejemplo, obsérvese en la Figura 5.6 que subdividir un intervalo en dos pequeños subintervalos disminuye el error de aproximación, al reducirse la parte del área bajo la curva que no está contenida en los rectángulos. Por lo tanto, es razonable calcular el área de R calculando el límite de S_n cuando $n \to \infty$, con la restricción de que la máxima anchura de los subintervalos Δx_i debe tender a cero:

$$\text{Área de } R = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{máx}\,\Delta x_i \to 0}} S_n$$

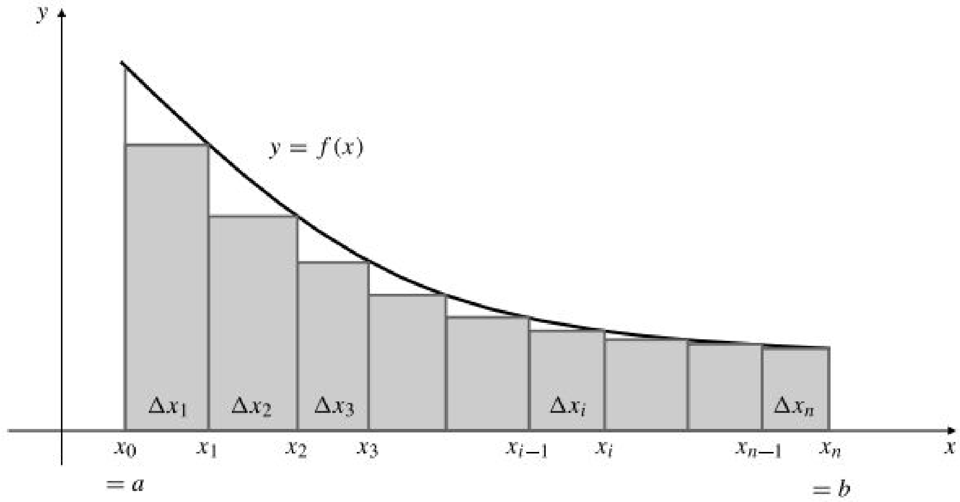


Figura 5.5 Aproximación del área bajo la gráfica de una función decreciente utilizando rectángulos.

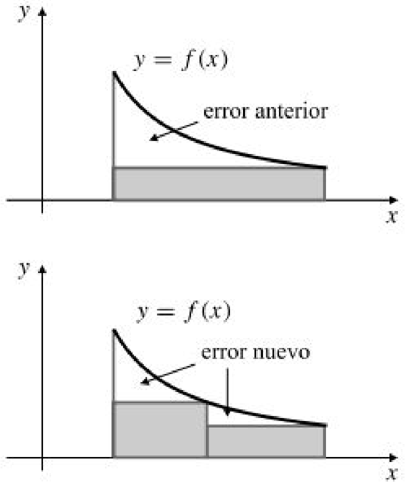


Figura 5.6 Al utilizar más rectángulos disminuye el error.

Algunas veces, pero no siempre, es útil escoger los puntos x_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ en $[a, b]$ de forma que las longitudes de los subintervalos sean todas iguales. En ese caso tenemos

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b - a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b - a)$$

Cálculo de algunas áreas

Vamos a dedicar el resto de esta sección a presentar algunos ejemplos en los que aplicaremos la técnica que acabamos de explicar para calcular áreas por debajo de gráficas de funciones, aproximándolas con rectángulos. Empezaremos con una región de área conocida, por lo que podemos comprobar que el método proporciona el resultado correcto.

Ejemplo 1 Calcule el área A de la región que queda por debajo de la recta $y = x + 1$, por encima del eje x y entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Se trata de la región sombreada en la Figura 5.7(a). Es un *trapezoide* (un polígono de cuatro lados con una pareja de lados paralelos) y su área es de 4 unidades al cuadrado (se puede dividir en un rectángulo y un triángulo, cada uno de ellos con área de 2 unidades al cuadrado). Calcularemos el área como un límite de sumas de áreas de rectángulos construidos como se ha descrito anteriormente. Dividamos el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos *de la misma longitud* en los puntos

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{n},\ x_2 = \frac{4}{n},\ x_3 = \frac{6}{n},\ \ldots,\ x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

El valor de $y = x + 1$ cuando $x = x_i$ es $x_i + 1 = \frac{2i}{n} + 1$ y el i-ésimo subintervalo, $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$, es de longitud $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. Obsérvese que $\Delta x_i \to 0$ cuando $n \to \infty$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación que se muestran en la Figura 5.7(a) es

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1\right)\frac{2}{n} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] \qquad \text{(Uso de las partes (a) y (b) del Teorema 1)} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \\ &= 2\,\frac{n+1}{n} + 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área pedida A se expresa como

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\,\frac{n+1}{n} + 2\right) = 2 + 2 = 4 \text{ unidades al cuadrado.}$$

■

Ejemplo 2 Calcule el área A de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$, siendo $b > 0$.

Solución El área A la región es el límite de la suma S_n de las áreas de los rectángulos que se muestran en la Figura 5.7(b). De nuevo se han utilizado subintervalos de la misma longitud, cada uno de ellos de longitud b/n. La altura del i-ésimo rectángulo es $(ib/n)^2$. Por tanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

por la fórmula (c) del Teorema 1. Entonces, el área pedida es

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b^3\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3} \text{ unidades al cuadrado}$$

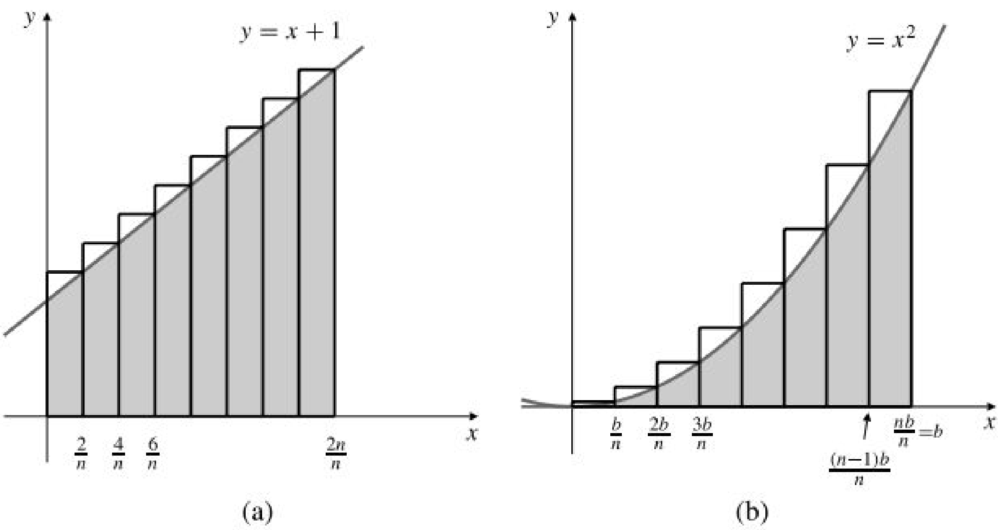


Figura 5.7
(a) La región del Ejemplo 1.
(b) La región del Ejemplo 2.

■

El cálculo del área bajo la gráfica de $y = x^k$ en un intervalo I se va haciendo más y más difícil a medida que k crece, si continuamos intentando subdividir I en intervalos de la misma longitud (*véase* el Ejercicio 14 al final de esta sección el caso de $k = 3$). Sin embargo, es posible calcular el área para un valor arbitrario de k si se subdivide el intervalo I en subintervalos cuyas longitudes crecen según una progresión geométrica. El Ejemplo 3 ilustra esta idea.

Ejemplo 3 Sea $b > a > 0$ y sea k un número real cualquiera excepto -1. Demuestre que el área A de la región comprendida por $y = x^k$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \text{ unidades al cuadrado}$$

Solución Sea $t = (b/a)^{1/n}$ y sean

$$x_0 = a,\ x_1 = at,\ x_2 = at^2,\ x_3 = at^3,\ \ldots,\ x_n = at^n = b$$

Estos puntos dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos en los que el subintervalo i-ésimo, $[x_{i-1}, x_i]$, tiene una longitud de $\Delta x_i = at^{i-1}(t-1)$. Si $f(x) = x^k$, entonces $f(x_i) = a^k t^{ki}$. La suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la Figura 5.8 es:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^k t^{ki} a t^{i-1}(t-1) \\
&= a^{k+1}(t-1)t^k \sum_{i=1}^{n} t^{(k+1)(i-1)} \\
&= a^{k+1}(t-1)t^k \sum_{i=1}^{n} r^{(i-1)} \qquad \text{siendo } r = t^{k+1} \\
&= a^{k+1}(t-1)t^k \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad \text{(por el Teorema 1(d))} \\
&= a^{k+1}(t-1)t^k \frac{t^{(k+1)n} - 1}{t^{k+1} - 1}
\end{aligned}$$

Sustituyamos ahora t por el valor $(b/a)^{1/n}$ y ordenemos factores para obtener

$$\begin{aligned}
S_n &= a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{(k+1)/n} - 1} \\
&= (b^{k+1} - a^{k+1})c^{k/n} \frac{c^{1/n} - 1}{c^{(k+1)/n} - 1}, \qquad \text{donde } c = \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

De los tres factores en la línea final anterior, el primero no depende de n, y el segundo, $c^{k/n}$, tiende a $c^0 = 1$ cuando $n \to \infty$. El tercer factor es una forma indeterminada del tipo $[0/0]$, que se puede calcular utilizando la Regla de L'Hôpital. Hagamos primero $u = 1/n$. Ahora

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{c^{1/n} - 1}{c^{(k+1)/n} - 1} &= \lim_{u\to 0+} \frac{c^u - 1}{c^{(k+1)u} - 1} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{u\to 0+} \frac{c^u \ln c}{(k+1)c^{(k+1)u}\ln c} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

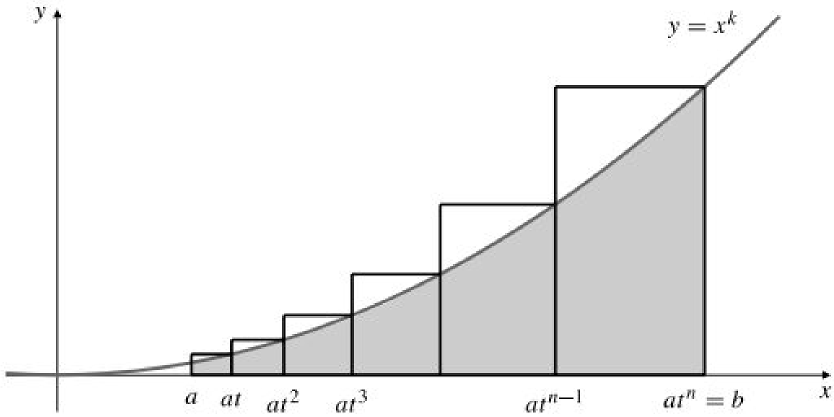


Figura 5.8 En esta partición las longitudes de los subintervalos crecen exponencialmente.

Por tanto, el área pedida es

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = (b^{k+1} - a^{k+1}) \times 1 \times \frac{1}{k+1} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \text{ unidades al cuadrado}$$

¡¡ ATENCIÓN !! Este ejemplo es largo y más bien difícil. Omítalo o tómese su tiempo y calcule cuidadosamente cada paso.

Como se puede ver, puede ser difícil calcular áreas limitadas por curvas utilizando el método descrito anteriormente. Afortunadamente, hay una forma más fácil, como veremos en la Sección 5.5.

Observación Por razones técnicas ha sido necesario suponer que $a > 0$ en el Ejemplo 3. El resultado es también válido para $a = 0$, suponiendo que $k > -1$. En este caso, tenemos que $\lim_{a\to 0+} a^{k+1} = 0$, por lo que el área bajo $y = x^k$, por encima de $y = 0$, y entre $x = 0$ y $x = b > 0$ es $A = b^{k+1}/(k+1)$ unidades al cuadrado. Para $k = 2$, el resultado concuerda con el del Ejemplo 2.

Ejemplo 4 Identifique el límite $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$ con un área, y calcúlela.

Solución El término i-ésimo de la suma se puede escribir de forma que dependa de i/n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Los términos se pueden interpretar ahora como áreas de rectángulos de base $1/n$ y alturas $1 - x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, siendo

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ x_3 = \frac{3}{n},\ \ldots,\ x_n = \frac{n}{n}$$

Por tanto, el límite L es el área bajo la curva $y = 1 - x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (*véase* la Figura 5.9). Esta región es un triángulo cuya área es de 1/2 unidades al cuadrado, por lo que $L = 1/2$.

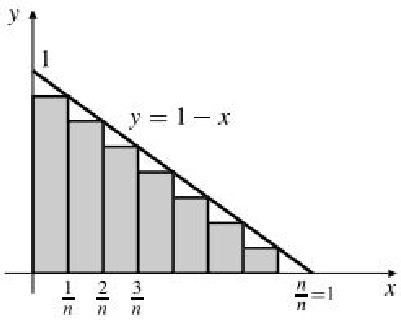


Figura 5.9 Interpretación en forma de una suma de áreas.

Ejercicios 5.2

Utilice las técnicas de los Ejemplos 1 y 2 (con subintervalos de la misma longitud) para calcular las áreas de las regiones especificadas en los Ejercicios 1-13.

1. Por debajo de $y = 3x$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
2. Por debajo de $y = 2x + 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.
3. Por debajo de $y = 2x - 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
4. Por debajo de $y = 3x + 4$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.
5. Por debajo de $y = x^2$, por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
6. Por debajo de $y = x^2 + 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = a > 0$.
7. Por debajo de $y = x^2 + 2x + 3$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.
8. Por encima de $y = x^2 - 1$, por debajo de $y = 0$.
9. Por encima de $y = 1 - x$, por debajo de $y = 0$, desde $x = 2$ hasta $x = 4$.
10. Por encima de $y = x^2 - 2x$, por debajo de $y = 0$.
11. Por debajo de $y = 4x - x^2 + 1$, por encima de $y = 1$.

*12. Por debajo de $y = e^x$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = b > 0$.

*13. Por debajo de $y = 2^x$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

14. Utilice la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$ de los Ejercicios 39-41 de la Sección 5.1, para calcular el área de la región comprendida bajo la curva $y = x^3$, por encima del eje x y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = b > 0$.
15. Utilice la subdivisión de $[a, b]$ dada en el Ejemplo 3 para calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x$, por encima de $y = 0$ desde $x = a > 0$ hasta $x = b > a$. ¿Por qué no es sorprendente su respuesta?

En los Ejercicios 16-19, interprete la suma S_n en forma de una suma de áreas de rectángulos que aproximen el área de una cierta región del plano y calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$.

16. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n}\left(1 - \dfrac{i}{n}\right)$
17. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n}\left(1 - \dfrac{2i}{n}\right)$
18. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2n + 3i}{n^2}$

*19. $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{n}\sqrt{1 - (j/n)^2}$

5.3 La integral definida

En esta sección realizaremos y haremos más preciso el procedimiento utilizado para calcular áreas que se ha desarrollado en la Sección 5.2, y lo utilizaremos para definir la *integral definida* de una función f en un intervalo I. Supongamos por ahora que $f(x)$ está definida y es continua en el intervalo cerrado infinito $[a, b]$. Ya no supondremos que los valores de f son no negativos.

Particiones y sumas de Riemann

Sea P un conjunto finito de puntos de la recta real ordenados entre a y b, es decir,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

siendo a $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Ese conjunto P se dice que es una **partición** de $[a, b]$. Divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y la longitud del i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$. Diremos que son los subintervalos de la partición P. El número n depende de cada partición particular, por lo que escribiremos $n = n(P)$. La longitud del i-ésimo subintervalo de P es

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (\text{para } 1 \leqslant i \leqslant n)$$

y el máximo de esos números Δx_i se denomina **norma** de la partición P, y se indica como $\|P\|$:

$$\|P\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$$

Como f es continua en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P, toma sus valores máximo y mínimo en puntos de dicho subintervalo (por el Teorema 8 de la Sección 1.4). Por tanto, existen números l_i y u_i en $[x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$f(l_i) \leqslant f(x) \leqslant f(u_i) \qquad \text{siempre que } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$$

Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces $f(l_i)\Delta x_i$ y $f(u_i)\Delta x_i$ representan las áreas de rectángulos en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ cuya base está en el eje x y cuyas alturas pasan por el punto más bajo y más alto, respectivamente, de la gráfica de f en ese intervalo (*véase* la Figura 5.10). Si A_i es la parte del área comprendida bajo $y = f(x)$ y por encima del eje x que está en la banda vertical cuyos límites son $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$, entonces

$$f(l_i)\Delta x_i \leqslant A_i \leqslant f(u_i)\Delta x_i$$

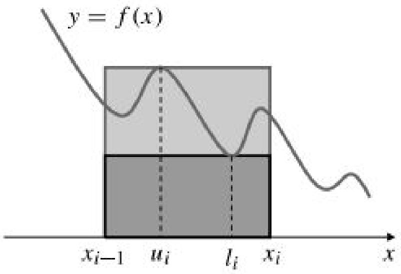


Figura 5.10

Si f puede tomar valores negativos, entonces uno de los valores $f(l_i)\Delta x_i$ y $f(u_i)\Delta x_i$, o ambos, pueden ser negativos, y representarán entonces el área negativa de un rectángulo que está por debajo del eje x. En cualquier caso, siempre tenemos que $f(l_i)\Delta x_i \leqslant f(u_i)\Delta x_i$.

DEFINICIÓN 2 Sumas de Riemann superior e inferior

La **suma inferior (de Riemann), $L(f, P)$**, y la **suma superior (de Riemann), $U(f, P)$**, de la función f y la partición P se definen como:

$$L(f, P) = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \cdots + f(l_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

$$U(f, P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

La Figura 5.11 ilustra estas sumas de Riemann como sumas de áreas de rectángulos *con signo*; toda área que esté por debajo del eje x cuenta como negativa.

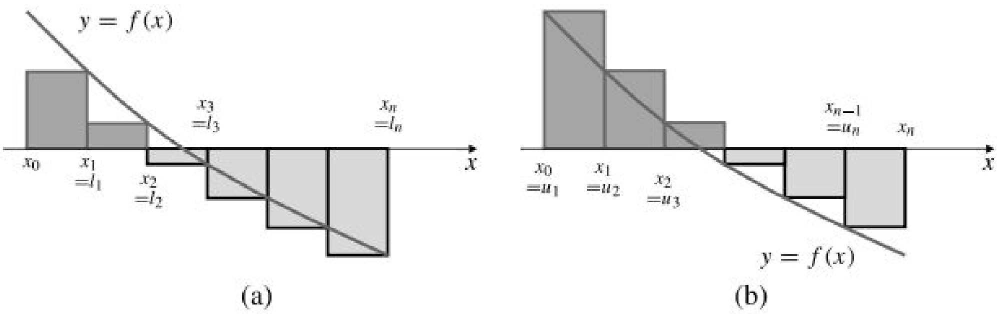


Figura 5.11 (a) Una suma inferior de Riemann y (b) una suma superior de Riemann de la función decreciente f. Las áreas de los rectángulos sombreados en oscuro cuentan como positivas; las áreas de los sombreados en claro cuentan como negativas.

Ejemplo 1 Calcule las sumas de Riemann inferior y superior de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo [1, 2], correspondientes a la partición P de [1, 2] en cuatro subintervalos de la misma longitud.

Solución La partición P está formada por los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 5/4$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 7/4$ y $x_4 = 2$. Como $1/x$ es decreciente en [1, 2], sus valores mínimo y máximo en el subintervalo i-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$ son $1/x_i$ y $1/x_{i-1}$, respectivamente. Por tanto, las sumas de Riemann inferior y superior son

$$L(f, P) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{533}{840} \approx 0.6345$$

$$U(f, P) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{319}{420} \approx 0.7595$$

Ejemplo 2 Calcule las sumas de Riemann inferior y superior de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ (siendo $a > 0$), correspondientes a la partición P_n de $[0, a]$ en n subintervalos de la misma longitud.

Solución Cada subintervalo de P_n tiene una longitud de $\Delta x = a/n$, y los puntos de división son $x_i = ia/n$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Como x^2 es creciente en $[0, a]$, sus valores mínimo y máximo en el subintervalo i-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$ se producen en $l_i = x_{i-1}$ y $u_i = x_i$, respectivamente. Por tanto, la suma de Riemann inferior de f para la partición P_n es

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^2 \Delta x = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema 1(c) de la Sección 5.1 para calcular la suma de los cuadrados. De forma similar, la suma de Riemann superior es

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \Delta x \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} \end{aligned}$$

La integral definida

Si se calculan $L(f, P)$ y $U(f, P)$ para particiones P que tienen cada vez más puntos colocados más y más cerca, es razonable esperar que, en el límite, esas sumas de Riemann convergerán a un valor común que será el área limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$. Éste es de hecho el caso, pero todavía no lo podemos demostrar completamente.

Si P_1 y P_2 son dos particiones de $[a, b]$, de forma que cada punto de P_1 pertenece también a P_2, se dice que P_2 es un **refinamiento** de P_1. No es difícil demostrar que en este caso

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P_2) \leqslant U(f, P_2) \leqslant U(f, P_1)$$

Añadir más puntos a una partición aumenta la suma inferior y disminuye la suma superior (*véase* el Ejercicio 18 al final de esta sección). Dadas dos particiones cualesquiera, P_1 y P_2, podemos formar su **refinamiento común** P, formado por todos los puntos de P_1 y P_2. Así,

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_2)$$

Por tanto, cada suma inferior es menor o igual que cada suma superior. Como los números reales son completos, debe existir *al menos un* número real I tal que

$$L(f, P) \leqslant I \leqslant U(f, P), \qquad \text{para cualquier partición } P$$

Si *sólo hay un número* que cumple lo anterior, se denomina integral definida de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN 3 La integral definida

Supongamos que hay un único número I tal que para toda partición P del intervalo $[a, b]$ se cumple que

$$L(f, P) \leqslant I \leqslant U(f, P)$$

Decimos entonces que la función f es **integrable** en el intervalo $[a, b]$ y el valor I se denomina **integral definida** de f en el intervalo $[a, b]$. La integral definida se expresa mediante el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es un *número*; no es una función de x. Depende de los números a y b y de la función concreta f, pero no de la variable x (es una **variable auxiliar** como la variable i del sumatorio $\sum_{i=1}^{n} f(i)$). Si se sustituye x por cualquier otra variable el valor de la integral no cambia:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$$

Todas las partes del símbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ tienen su propio nombre:

(i) $\int$ se denomina **signo integral**; recuerda a la letra S ya que representa el límite de una suma.
(ii) a y b se denominan **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**.
(iii) La función f es el **integrando**; x es la **variable de integración**.
(iv) dx es el **diferencial** de x. Sustituye a Δx en las sumas de Riemann. Si un integrando depende de más de una variable, el diferencial nos indica cuál es la variable de integración.

Ejemplo 3 Demuestre que $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$, y calcule $\int_0^a x^2\, dx$.

Solución Calcularemos los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior de f en el intervalo $[0, a]$, obtenidas en el Ejemplo 2 anterior.

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

Si $L(f, P_n) \leqslant I \leqslant U(f, P_n)$, debemos tener que $I = a^3/3$. Por tanto, $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[0, a]$, y

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

Para todas las particiones P del intervalo $[a, b]$ tenemos que

$$L(f, P) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant U(f, P)$$

Si $f(x) \geqslant 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región R limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ tiene un valor de A unidades al cuadrado, siendo $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Si $f(x) \leqslant 0$ en el intervalo $[a, b]$, el área de R es $-\int_a^b f(x)\,dx$ unidades al cuadrado. Para una función f general, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la parte de R que está por encima del eje x, menos el área de la parte de R que está por debajo del eje x (*véase* la Figura 5.12). $\int_a^b f(x)\,dx$ puede verse como una «suma» de «áreas» de infinitos rectángulos con alturas $f(x)$ y «anchuras infinitesimalmente pequeñas» dx; es un límite de las sumas de Riemann superior e inferior.

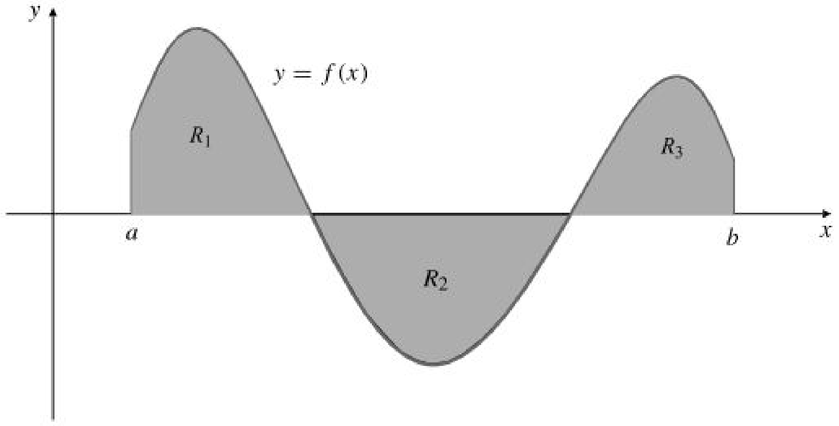


Figura 5.12 $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área R_1 − área R_2 + área R_3.

Sumas de Riemann generales

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, una partición del intervalo $[a, b]$ con norma $\|P\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P seleccionamos un punto c_i (denominado *etiqueta*). Sea $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ el conjunto de esas etiquetas. La suma

$$\begin{aligned} R(f, P, c) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\ &= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \end{aligned}$$

se denomina **suma de Riemann** de f en el intervalo $[a, b]$, correspondiente a la partición P y a las etiquetas c.

Nótese en la Figura 5.13 que $R(f, P, c)$ es una suma de áreas *con signo* de rectángulos comprendidos entre el eje x y la curva $y = f(x)$. Para cualquier selección de las etiquetas c, la suma de Riemann $R(f, P, c)$ cumple

$$L(f, P) \leqslant R(f, P, c) \leqslant U(f, P)$$

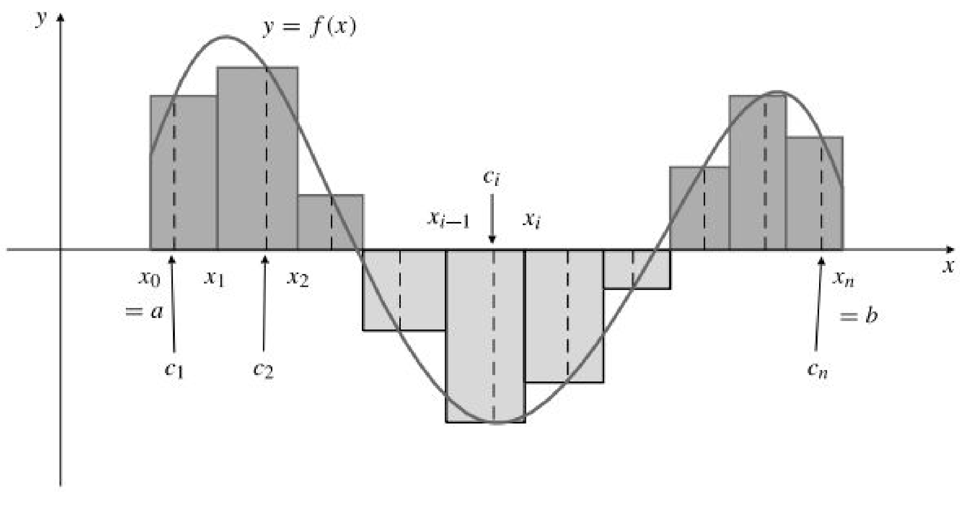


Figura 5.13 La suma de Riemann $R(f, P, c)$ es la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en oscuro menos la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en claro.

Por tanto, si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces su integral es el límite de esas sumas de Riemann, donde el límite se toma cuando el número $n(P)$ de subintervalos de P tiende a infinito de forma que las longitudes de todos los subintervalos tienden a cero. Es decir,

$$\lim_{\substack{n(P)\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f, P, c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como veremos en el Capítulo 7, muchas aplicaciones de integración se basan en reconocer que un límite de sumas de Riemann es una integral definida.

TEOREMA 2 Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Como se ha indicado anteriormente, todavía no podemos demostrar este teorema de forma completamente general. La demostración se basa en el uso de la propiedad de completitud de los números reales y se presenta en el Apéndice IV. Sin embargo, podemos hacer la siguiente observación. Para demostrar que f es integrable en el intervalo $[a, b]$ es suficiente que, para cualquier número positivo ϵ, se pueda encontrar una partición P de $[a, b]$ para la que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Esta condición evita que haya más de un número I que sea mayor que cualquier suma inferior y menor que cualquier suma superior. No es difícil encontrar esa partición si la función f es no decreciente (o no creciente) en el intervalo $[a, b]$ (*véase* el Ejercicio 17 al final de esta sección). Por tanto, las funciones continuas no decrecientes y no crecientes son integrables. También lo es, por tanto, cualquier función continua que sea la suma de una función no decreciente y una función no creciente. Esta clase de funciones incluyen a casi cualquier función continua que nos podamos encontrar en aplicaciones concretas del cálculo, pero, desafortunadamente, no incluye a todas las funciones continuas.

En la Sección 5.4 ampliaremos la definición de integral definida a ciertas clases de funciones que no son continuas.

Ejemplo 4 Exprese el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)^{1/3}$ como una integral definida.

Solución Deseamos interpretar la suma como una suma de Riemann para $f(x) = (1 + x)^{1/3}$. El factor $2/n$ sugiere que el intervalo de integración es de longitud 2 y está dividido en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $2/n$. Sea $c_i = (2i - 1)/n$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cuando $n \to \infty$, $c_1 = 1/n \to 0$ y $c_n = (2n - 1)/n \to 2$. Por tanto, el intervalo es $[0, 2]$ y los puntos de la partición son $x_i = 2i/n$. Obsérvese que $x_{i-1} = (2i - 2)/n < c_i < 2i/n = x_i$ para todo i, de forma que la suma es en realidad una suma de Riemann para $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Como f es continua en ese intervalo, es integrable en él, y

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)^{1/3} = \int_0^2 (1 + x)^{1/3}\,dx$$

Ejercicios 5.3

En los Ejercicios 1-6, sea P_n la partición del intervalo dado $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x_i = (b - a)/n$. Calcule $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ para las funciones f dadas y los valores dados de n.

1. $f(x) = x$ en $[0, 2]$, con $n = 8$.

2. $f(x) = x^2$ en $[0, 4]$, con $n = 4$.

3. $f(x) = e^x$ en $[-2, 2]$, con $n = 4$.

4. $f(x) = \ln x$ en $[1, 2]$, con $n = 5$.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, con $n = 6$.

6. $f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$, con $n = 4$.

En los Ejercicios 7-10, calcule $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ para las funciones f dadas en los intervalos $[a, b]$ dados, siendo P_n

la partición del intervalo en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$$

y a partir aquí, que f es integrable en el intervalo $[a, b]$ (¿por qué?). ¿Qué es $\int_a^b f(x)\,dx$?

7. $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 1]$.

8. $f(x) = 1 - x$, $[a, b] = [0, 2]$.

9. $f(x) = x^3$, $[a, b] = [0, 1]$.

10. $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, 3]$.

En los Ejercicios 11-16, exprese los límites dados en forma de integral definida.

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$

***15.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$

***16.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2}$

***17.** Si f es una función continua y no decreciente en un intervalo $[a, b]$, y P_n es la partición de $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud ($\Delta x_i = (b - a)/n$ para $1 \leqslant i \leqslant n$), demuestre que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

Como podemos hacer el miembro izquierdo tan pequeño como queramos escogiendo n suficientemente grande, f debe ser integrable en el intervalo $[a, b]$.

***18.** Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea P' un refinamiento de P con un punto más, x', que cumple, por ejemplo, que $x_{i-1} < x' < x_i$ para algún valor de i entre 1 y n. Demuestre que

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P)$$

para alguna función continua f (*Sugerencia*: Considere los valores máximo y mínimo de la función f en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x']$ y $[x', x_i]$). A partir de aquí, deduzca que

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P) \text{ si } P'$$

es *cualquier* refinamiento de P.

5.4 Propiedades de la integral definida

Es conveniente ampliar la definición de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ para permitir que $a = b$ y $a > b$, así como $a < b$. En esta ampliación intervendrán particiones P con $x_0 = a$ y $x_n = b$, y con puntos intermedios ordenados entre los dos puntos de los extremos, de modo que si $a = b$, entonces debe cumplirse que $\Delta x_i = 0$ para todo i, y por tanto la integral es cero. Si $a > b$, tenemos que $\Delta x_i < 0$ para todo i, por lo que la integral será negativa para funciones f positivas y viceversa.

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades más importantes de la integral definida.

TEOREMA 3 Sean f y g dos funciones integrables en un intervalo que contiene a los puntos a, b y c. Entonces:

(a) Cualquier integral sobre un intervalo de longitud cero es cero.

$$\int_b^a f(x)\,dx = 0$$

(b) Al invertir los límites de integración, la integral cambia de signo.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) Una integral depende linealmente del integrando. Si A y B son constantes, entonces

$$\int_a^b (A f(x) + Bg(x))\, dx = A \int_a^b f(x)\, dx + B \int_a^b g(x)\, dx$$

(d) Una integral depende aditivamente del intervalo de integración.

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

(e) Si $a \leqslant b$ y $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

(f) **Desigualdad del triángulo** para integrales definidas. Si $a \leqslant b$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

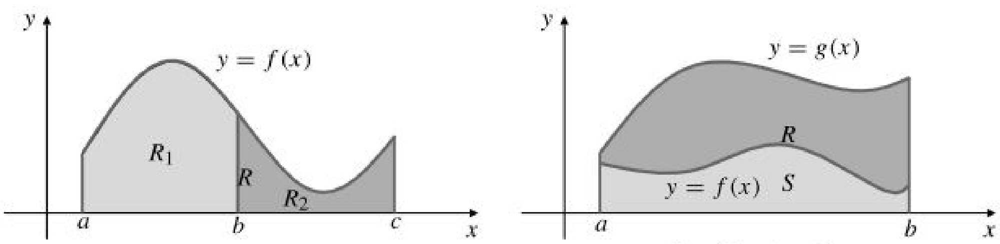
(g) La integral de una función impar en un intervalo simétrico alrededor de cero vale cero. Si f es una función impar ($f(-x) = -f(x)$), entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$$

(h) La integral de una función par en un intervalo simétrico alrededor de cero vale dos veces la integral en la mitad positiva del intervalo. Si f es una función par ($f(-x) = f(x)$), entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$$

Todas estas propiedades se pueden deducir partiendo de la definición de integral definida. La mayoría de ellas son intuitivamente razonables si consideramos las integrales como áreas (con signo). Por ejemplo, las propiedades (d) y (e) son, respectivamente, las propiedades (v) y (vi) de las áreas mencionadas en el primer párrafo de la Sección 5.2 (*véase* la Figura 5.14).



área R_1 + área R_2 = área R

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(a)

área $S \leq$ área R

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(b)

Figura 5.14
(a) Propiedad (d) del Teorema 3.
(b) Propiedad (e) del Teorema 3.

La propiedad (f) es una generalización de la desigualdad del triángulo para números:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \qquad \text{o, de forma más general,} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Se deduce de la propiedad (e) (suponiendo que $|f|$ es integrable en el intervalo $[a, b]$), ya que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Las propiedades de simetría (g) y (h), que se ilustran en la Figura 5.15, son particularmente útiles y conviene tenerlas siempre presentes, ya que pueden ahorrar trabajo innecesario al calcular integrales definidas.

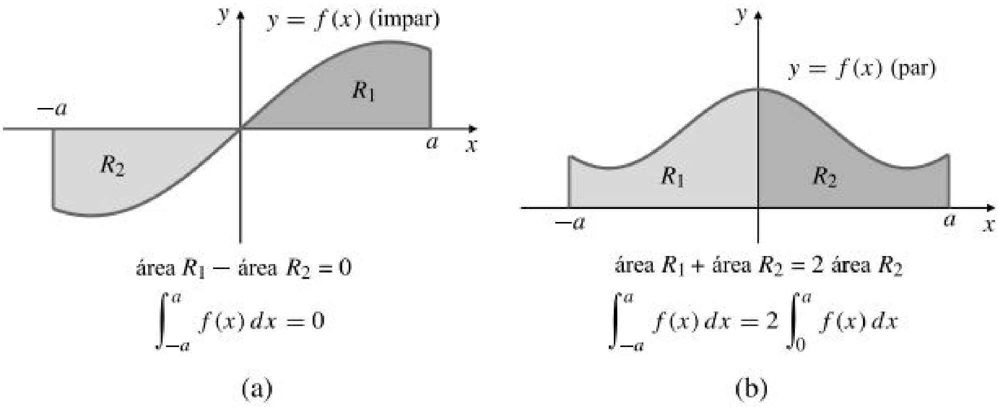


Figura 5.15
(a) Propiedad (g) del Teorema 3.
(b) Propiedad (h) del Teorema 3.

Todavía no disponemos de un método sencillo para calcular integrales definidas. Sin embargo, algunas integrales se pueden simplificar utilizando las propiedades presentadas en el Teorema 3, y otras se pueden interpretar como áreas conocidas.

Ejemplo 1 Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2 + 5x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{3} (2 + x)\,dx$ y (c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Solución *Véanse* las Figuras 5.16-5.18.

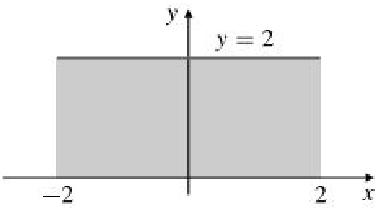


Figura 5.16

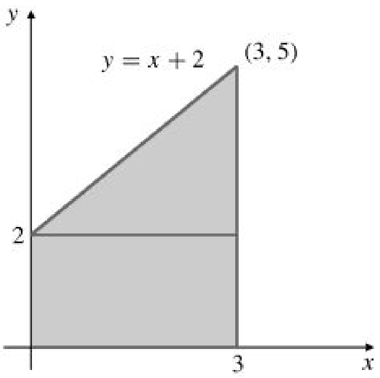


Figura 5.17

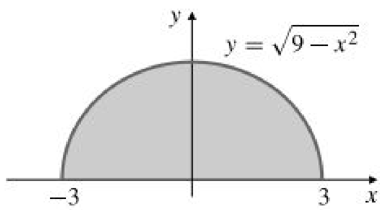


Figura 5.18

(a) Por la propiedad de linealidad (c), $\int_{-2}^{2} (2 + 5x)\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx + 5\int_{-2}^{2} x\,dx$. La primera integral de la derecha representa el área de un rectángulo de anchura 4 y altura 2 (Figura 5.16), por lo que su valor es 8. La segunda integral de la derecha es 0 porque el integrando es impar y el intervalo de integración es simétrico alrededor del 0. Por tanto,

$$\int_{-2}^{2} (2 + 5x)\,dx = 8 + 0 = 8$$

(b) $\int_0^3 (2 + x)\, dx$ representa el área del trapezoide de la Figura 5.17. Sumando las áreas del rectángulo y del triángulo que forman dicho trapezoide, se obtiene

$$\int_0^3 (2 + x)\, dx = (3 \times 2) + \frac{1}{2}(3 \times 3) = \frac{21}{2}$$

(c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ representa el área de un semicírculo de radio 3 (Figura 5.18), por lo que

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi(3^2) = \frac{9\pi}{2}$$

Aunque las áreas se miden en unidades de longitud al cuadrado, las integrales definidas son números y no tienen unidades. Incluso cuando se utiliza un área para calcular una integral, no se asignan unidades a la integral.

Un Teorema del Valor Medio para integrales

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M en dicho intervalo, por ejemplo en los puntos $x = l$ y $x = u$, respectivamente:

$$m = f(l) \leqslant f(x) \leqslant f(u) = M \qquad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Para el caso de la partición P de 2 puntos del intervalo $[a, b]$ con $x_0 = a$ y $x_1 = b$, tenemos que

$$m(b - a) = L(f, P) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant U(f, P) = M(b - a)$$

Por tanto,

$$f(l) = m \leqslant \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx \leqslant M = f(u)$$

Por el Teorema del Valor Medio, $f(x)$ debe tomar todos los valores entre $f(l)$ y $f(u)$ en algún punto entre l y u (Figura 5.19). Por tanto, existe un número c entre l y u tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Es decir, $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al área $(b - a) f(c)$ de un rectángulo cuya anchura de la base es $b - a$ y su altura es $f(c)$ para algún valor c entre a y b. Éste es el Teorema del Valor Medio para integrales.

TEOREMA 4 **El Teorema del Valor Medio para integrales**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(c)$$

Obsérvese en la Figura 5.19 que el área por debajo de la curva $y = f(x)$ y por encima de la recta $y = f(c)$ es igual al área por encima de $y = f(x)$ y por debajo de $y = f(c)$. En este sentido, $f(c)$ es el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

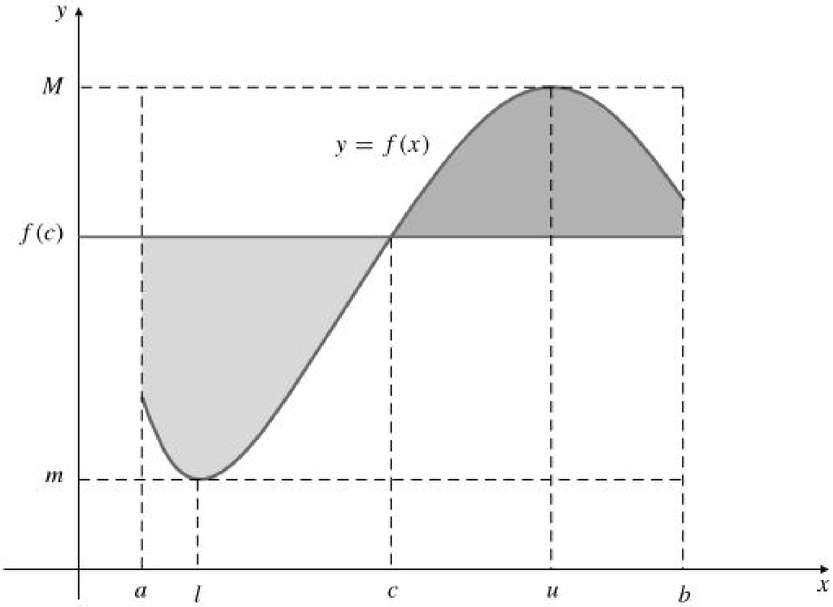


Figura 5.19 La mitad del área entre $y = f(x)$ y la línea horizontal $y = f(c)$ está por debajo de dicha línea, y la otra mitad está por encima de dicha línea.

DEFINICIÓN 4 Valor medio de una función

Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en $[a, b]$, que se indica como $\bar{f}$, es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2 Calcule el valor medio de $f(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 5]$.

Solución El valor medio (*véase* la Figura 5.20) es

$$\bar{f} = \frac{1}{5-1}\int_1^5 2x\,dx = \frac{1}{4}\left(4 \times 2 + \frac{1}{2}(4 \times 8)\right) = 6$$

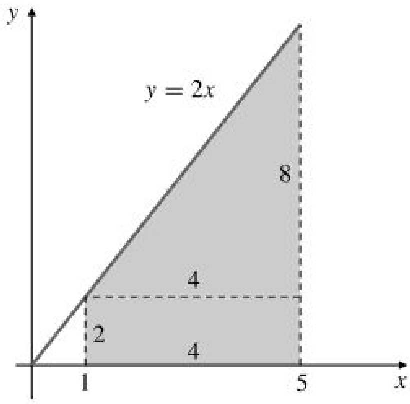


Figura 5.20 $\int_1^5 2x\,dx = 24$.

Definición de integrales de funciones continuas por tramos

La definición de integrabilidad y de integral definida, dadas anteriormente, se puede extender a una clase de funciones más amplia que las funciones continuas. Una extensión simple pero muy importante es a la clase de *funciones continuas por tramos*.

Considérese la gráfica $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 5.21(a). Aunque f no es continua en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ (es discontinua en c_1 y c_2), es claro que la región encerrada debajo de la gráfica y encima del eje x entre $x = a$ y $x = b$ tiene un área determinada. Esa área puede representarse como

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$$

Esto es razonable ya que existen funciones continuas en $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$ y $[c_2, b]$ iguales a $f(x)$ en los correspondientes intervalos abiertos (a, c_1), (c_1, c_2) y (c_2, b).

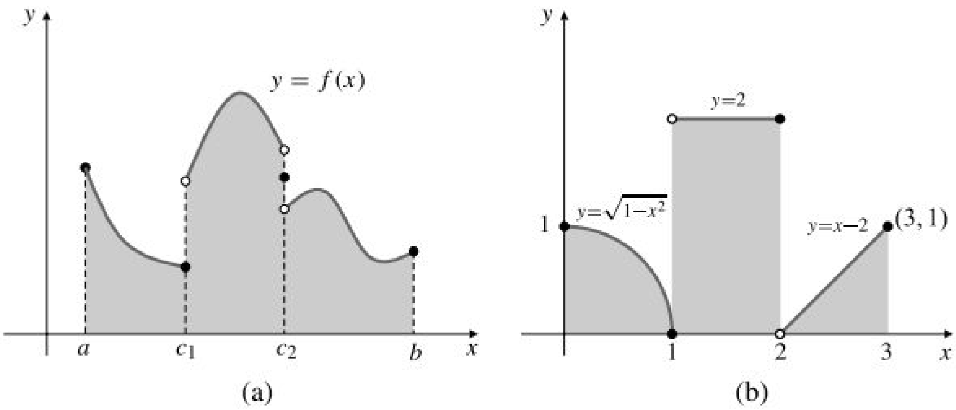


Figura 5.21 Dos funciones continuas por tramos.

DEFINICIÓN 5 Funciones continuas por tramos

Sea $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ un conjunto finito de puntos en la recta real. Una función f definida en el intervalo $[c_0, c_n]$, excepto posiblemente en alguno de los puntos c_i, $(0 \leqslant i \leqslant n)$, se denomina **continua por tramos** en dicho intervalo si para todo i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existe una función F_i continua en el intervalo cerrado $[c_{i-1}, c_i]$, tal que

$$f(x) = F_i(x) \qquad \text{en el intervalo } \textit{abierto } (c_{i-1}, c_i)$$

En este caso, se define la integral definida de f desde c_0 hasta c_n como

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx$$

Ejemplo 3 Calcule $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

Solución El valor de la integral es la suma de las áreas sombreadas en la Figura 5.21(b):

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2\right) + (2 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = \frac{\pi + 10}{4}$$

Ejercicios 5.4

1. Simplifique $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$.

2. Simplifique $\int_0^2 3f(x)\,dx + \int_1^3 3f(x)\,dx - \int_0^3 2f(x)\,dx - \int_1^2 3f(x)\,dx$.

Calcule las integrales en los Ejercicios 3-16 utilizando las propiedades de la integral definida e interpretando las integrales como áreas.

3. $\int_{-2}^{2} (x+2)\,dx$

4. $\int_0^2 (3x+1)\,dx$

5. $\int_a^b x\,dx$

6. $\int_{-1}^{2} (1-2x)\,dx$

7. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt$

8. $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-x^2}\,dx$

9. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x^3)\,dx$

10. $\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds$

11. $\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\,du$

12. $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$

13. $\int_{-4}^{4} (e^x - e^{-x})\,dx$

14. $\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\,dt$

***15.** $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

***16.** $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Sabiendo que $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$, calcule las integrales de los Ejercicios 17-22.

17. $\int_0^2 6x^2\,dx$

18. $\int_2^3 (x^2-4)\,dx$

19. $\int_{-2}^{2} (4-t^2)\,dt$

20. $\int_0^2 (v^2 - v)\,dv$

21. $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1-x^2})\,dx$

22. $\int_{-6}^{6} x^2(2+\operatorname{sen} x)\,dx$

La definición de $\ln x$ como un área, realizada en la Sección 3.3, implica que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

para $x > 0$. Utilice ese resultado para calcular las integrales de los Ejercicios 23-26.

23. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_2^4 \frac{1}{t}\,dt$

25. $\int_{1/3}^{1} \frac{1}{t}\,dt$

26. $\int_{1/4}^{3} \frac{1}{s}\,ds$

Calcule los valores medios de las funciones de los Ejercicios 27-32 en los intervalos dados.

27. $f(x) = x + 2$ en $[0, 4]$

28. $g(x) = x + 2$ en $[a, b]$

29. $f(t) = 1 + \operatorname{sen} t$ en $[-\pi, \pi]$

30. $k(x) = x^2$ en $[0, 3]$

31. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ en $[0, 2]$

32. $g(s) = 1/s$ en $[1/2, 2]$

Funciones continuas por tramos

33. Calcule $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx$. Recuerde que $\operatorname{sgn} x$ vale 1 si $x > 0$ y -1 si $x < 0$.

34. Calcule $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$

35. Calcule $\int_0^2 g(x)\,dx$, siendo $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x & \text{si } 1< x\leqslant 2 \end{cases}$

36. Calcule $\int_0^3 |2-x|\,dx$.

***37.** Calcule $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\operatorname{sgn}(x-1)\,dx$.

38. Calcule $\int_0^{3.5} \lfloor x \rfloor\,dx$, siendo $\lfloor x \rfloor$ el máximo entero menor o igual que x (*véase* el Ejemplo 10 de la Sección P.5).

Calcule las integrales de los Ejercicios 39-40 observando las gráficas de los integrandos.

39. $\int_{-3}^{4} (|x+1| - |x-1| + |x+2|)\,dx$

40. $\int_0^3 \frac{x^2-x}{|x-1|}\,dx$

41. Calcule el valor medio de la función $f(x) = |x+1|\operatorname{sgn} x$ en el intervalo $[-2, 2]$.

42. Si $a < b$ y f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b (f(x) - \bar{f})\,dx = 0$.

43. Suponga que $a < b$ y que f es continua en el intervalo $[a, b]$. Calcule la constante k que minimiza la integral $\int_a^b (f(x)-k)^2\,dx$.

5.5 El Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección demostraremos la relación que existe entre la integral definida presentada en la Sección 5.3 y la integral indefinida (o primitiva general) presentada en la Sección 2.10. Una consecuencia de esta relación es que aprenderemos a calcular integrales definidas de funciones cuyas primitivas seamos capaces de calcular.

En la Sección 3.3 planteamos el problema de calcular una función cuya derivada fuera $1/x$. Resolvimos este problema definiendo la función deseada ($\ln x$) en función del área encerrada bajo la gráfica de $y = 1/x$. Esta idea motiva el siguiente teorema, y es un caso especial del mismo.

TEOREMA 4 Teorema Fundamental del Cálculo

Supongamos que la función f es continua en un intervalo I que contiene al punto a.

PARTE I. Sea la función F definida en I:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces F es diferenciable en I, y $F'(x) = f(x)$ en dicho intervalo. Por tanto, F es una primitiva de f en I:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)}$$

PARTE II. Si $G(x)$ es *cualquier* primitiva de $f(x)$ en I, de forma que $G'(x) = f(x)$ en I, entonces para todo b en I se cumple

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)}$$

DEMOSTRACIÓN Utilizando la definición de derivada, podemos calcular

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \qquad \text{por el Teorema 3(d)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h f(c) \qquad \text{para alguna } c = c(h) \text{ (que depende de } h\text{)} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{entre } x \text{ y } x + h \text{ (Teorema 4)} \\
&= \lim_{c\to x} f(c) \qquad \text{ya que } c \to x \text{ cuando } h \to 0 \\
&= f(x) \qquad \text{ya que } f \text{ es continua.}
\end{aligned}$$

Además, si $G'(x) = f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$ en I para alguna constante C (por el Teorema 13 de la Sección 2.6). Entonces,

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) = G(x) + C$$

Sea $x = a$ y obténgase $0 = G(a) + C$ mediante el Teorema 3(a), de forma que $C = -G(a)$. Hagamos ahora $x = b$ para obtener

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

Por supuesto, se puede sustituir t por x (o cualquier otra variable) como variable de integración en el miembro izquierdo.

Observación Hay que recordar las dos conclusiones del Teorema Fundamental, ya que ambas son útiles. La parte I trata de la derivada de una integral; nos indica cómo diferenciar una integral definida con respecto a su límite superior. La parte II considera la integral de una derivada; nos indica cómo calcular una integral definida si se puede obtener una primitiva del integrando.

DEFINICIÓN 6

Para facilitar el cálculo de integrales definidas utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo se define el **símbolo de evaluación**:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

donde $\int f(x)\,dx$ indica la integral indefinida o primitiva general de f (*véase* la Sección 2.10). Cuando se calcula una integral definida de esta forma, omitiremos la constante de integración $(+C)$ de la integral indefinida ya que se cancela en la resta:

$$(F(x) + C)\Big|_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Cualquier primitiva de f se puede utilizar para calcular la integral definida.

Ejemplo 1 Calcule (a) $\int_0^a x^2\,dx$ y (b) $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$.

Solución

(a) $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{a^3}{3}$ $\left(\text{ya que } \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2\right)$

(b)
$$\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^2$$
$$= \frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) + 4 - \left(\frac{1}{3}(-1) - \frac{3}{2}(1) + (-2)\right) = \frac{9}{2}$$

¡¡ ATENCIÓN !! Hay que prestar atención y tener en cuenta todos los signos menos al sustituir un límite inferior negativo.

Ejemplo 2 Calcule el área A de la región plana que está por encima del eje x y por debajo de la curva $y = 3x - x^2$.

Solución Necesitamos obtener los puntos donde la curva $y = 3x - x^2$ cruza al eje x. Esos puntos son las soluciones de la ecuación

$$0 = 3x - x^2 = x(3 - x)$$

Las únicas raíces son $x = 0$ y $x = 3$ (*véase* la Figura 5.22). Por tanto, el área de la región es

$$A = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

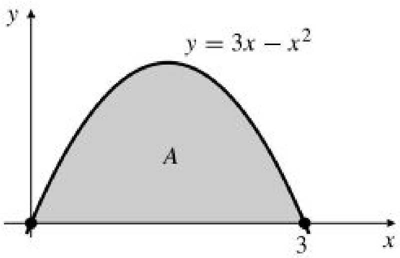


Figura 5.22

Ejemplo 3 Calcule el área bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$, por encima de $y = 0$ y desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

Solución El área pedida, que se ilustra en la Figura 5.23, es

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Bigg|_0^\pi = -(-1 - (1)) = 2 \text{ unidades al cuadrado}$$

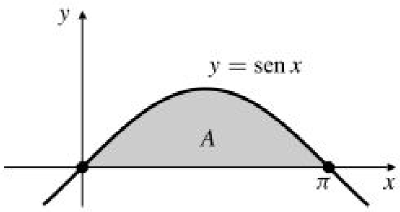


Figura 5.23

Nótese que, aunque la integral definida es un número puro, un área es una magnitud geométrica que implícitamente requiere unidades. Si las unidades del eje x y del eje y son, por ejemplo, metros, el área debe expresarse en metros cuadrados (m^2). Si no se especifican las unidades de longitud de los ejes x e y, el área se expresará en unidades al cuadrado.

Ejemplo 4 Calcule el área de la región R que está por encima de la recta $y = 1$ y por debajo de la curva $y = 5/(x^2 + 1)$.

Solución La región R se muestra sombreada en la Figura 5.24. Para calcular las intersecciones de $y = 1$ e $y = 5/(x^2 + 1)$, debemos resolver la ecuación:

$$1 = \frac{5}{x^2 + 1}$$

por lo que $x^2 + 1 = 5$, $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

El área A de la región R es el área bajo la curva $y = 5/(x^2+1)$ y por encima del eje x entre $x = -2$ y $x = 2$, menos el área de un rectángulo de anchura 4 y altura 1. Como $\tan^{-1} x$ es una primitiva de $1/(x^2+1)$,

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{5}{x^2+1}\,dx - 4 = 2\int_{0}^{2} \frac{5}{x^2+1}\,dx - 4$$

$$= 10\tan^{-1} x \Big|_{0}^{2} - 4 = 10\tan^{-1} 2 - 4 \text{ unidades al cuadrado}$$

Obsérvese el uso de la simetría par (Teorema 3(h) de la Sección 5.4) para sustituir el límite inferior de integración por 0. Es más fácil sustituir 0 en la primitiva que -2.

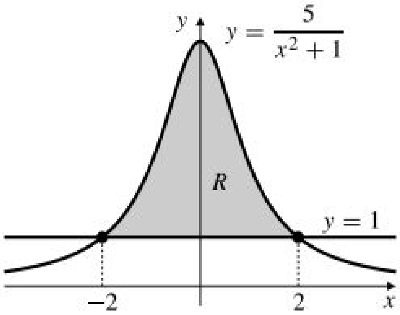


Figura 5.24

Ejemplo 5 Calcule el valor medio de $f(x) = e^{-x} + \cos x$ en el intervalo $[-\pi/2, 0]$.

Solución El valor medio es

$$\bar{f} = \frac{1}{0 - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)} \int_{-(\pi/2)}^{0} (e^{-x} + \cos x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(-e^{-x} + \operatorname{sen} x)\Big|_{-(\pi/2)}^{0}$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1 + 0 + e^{\pi/2} - (-1)) = \frac{2}{\pi} e^{\pi/2}$$

Hay que tener cuidado con las integrales de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$, donde f no es continua en *todos* los puntos del intervalo $[a, b]$. El Teorema Fundamental no se aplica en esos casos.

Ejemplo 6 Sabemos que $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Sin embargo, es *incorrecto* decir que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$$

aun cuando $1/x$ sea una función impar. De hecho, $1/x$ es indefinida y no tiene límite en $x = 0$, y no es integrable en $[-1, 0]$ ni en $[0, 1]$ (Figura 5.25). Obsérvese que

$$\lim_{c\to 0+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} -\ln c = \infty$$

por lo que las dos regiones sombreadas en la Figura 5.25 tienen área infinita. Las integrales de este tipo se denominan **integrales impropias**. Las consideraremos en la Sección 6.5.

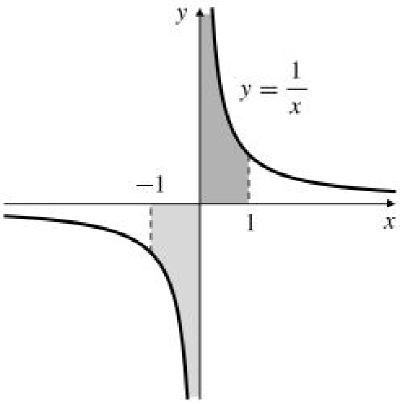


Figura 5.25

Presentaremos a continuación algunos ejemplos que ilustran la primera conclusión del Teorema Fundamental.

Ejemplo 7 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\,dt$, (b) $G(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$, (c) $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$

Solución Para obtener las soluciones hay que aplicar la primera conclusión del Teorema Fundamental junto con otras reglas de diferenciación.

(a) Obsérvese que $F(x) = -\int_3^x e^{-t^2}\,dt$ (por el Teorema 3(b)). Por lo tanto, por el Teorema Fundamental, $F'(x) = -e^{-x^2}$.

(b) Por la Regla del Producto y la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + x^2 \frac{d}{dx} \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt \\ &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + x^2 e^{-(5x)^2}\,(5) \\ &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + 5x^2 e^{-25x^2} \end{aligned}$$

(c) Se divide la integral en una diferencia de dos integrales en cada una de las cuales la variable x aparece sólo en el límite superior.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \\ H'(x) &= e^{-(x^3)^2}(3x^2) - e^{-(x^2)^2}(2x) \\ &= 3x^2 e^{-x^6} - 2x e^{-x^4} \end{aligned}$$

Los apartados (b) y (c) del Ejemplo 7 son ejemplos de las siguientes fórmulas que incorporan la Regla de la Cadena en la primera conclusión del Teorema Fundamental.

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Ejemplo 8 Resuelva la **ecuación integral** $f(x) = 2 + 3\int_4^x f(t)\, dt$.

Solución Diferenciando la ecuación integral se obtiene $f'(x) = 3f(x)$, la ecuación diferencial del crecimiento exponencial $f(x) = Ce^{3x}$. Sustituyendo ahora $x = 4$ en la ecuación integral se obtiene $f(4) = 2$. Así, $2 = Ce^{12}$, por lo que $C = 2e^{-12}$. Por tanto, la solución de la ecuación integral es $f(x) = 2e^{3x-12}$. ∎

Concluiremos con un ejemplo que muestra cómo se puede utilizar el Teorema Fundamental para calcular límites de sumas de Riemann.

Ejemplo 9 Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.

Solución En la suma aparecen valores de $\cos x$ en los extremos derechos de los n subintervalos de la partición

$$0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{n\pi}{2n}$$

del intervalo $[0, \pi/2]$. Como cada uno de los subintervalos de esta partición tiene longitud $\pi/(2n)$, y como $\cos x$ es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$, tenemos, expresando el límite de una suma de Riemann como una integral (*véase* la Figura 5.26),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

La suma obtenida difiere de la suma de Riemann sólo en que no está el factor $\pi/2$. Por tanto,

$$\lim_{\pi\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}$$

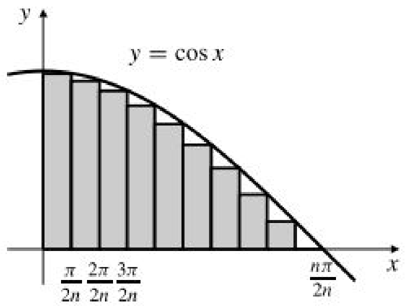


Figura 5.26

Ejercicios 5.5

Calcule las integrales definidas en los Ejercicios 1-20.

1. $\int_0^2 x^3\, dx$

2. $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

3. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

4. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

5. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 2)\, dx$

6. $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\right) dx$

7. $\int_{-2}^2 (x^2 + 3)^2\, dx$

8. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

9. $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cos x\, dx$

10. $\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta\, d\theta$

11. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

12. $\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} u)\, du$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\, dx$

14. $\int_{-2}^2 (e^x - e^{-x})\, dx$

15. $\int_0^e a^x\, dx \quad (a > 0)$

16. $\int_{-1}^1 2^x\, dx$

17. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

18. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

*19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

*20. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

Calcule el área de la región R especificada en los Ejercicios 21-32. Es útil realizar un dibujo de la región.

21. Limitada por $y = x^4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

22. Limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$.

23. Por encima de $y = x^2 - 4x$ y por debajo del eje x.

24. Limitada por $y = 5 - 2x - 3x^2$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

25. Limitada por $y = x^2 - 3x + 3$ y $y = 1$.

26. Por debajo de $y = \sqrt{x}$ y por encima de $y = \dfrac{x}{2}$.

27. Por encima de $y = x^2$ y a la derecha de $x = y^2$.

28. Por encima de $y = |x|$ y por debajo de $y = 12 - x^2$.

29. Limitada por $y = x^{1/3} - x^{1/2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

30. Por debajo de $y = e^{-x}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = -a$ hasta $x = 0$.

31. Por debajo de $y = 1 - \cos x$ y por encima de $y = 0$, entre dos intersecciones consecutivas de estas gráficas.

32. Por debajo de $y = x^{-1/3}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 27$.

Calcule las integrales de funciones continuas por tramos en los Ejercicios 33 y 34.

33. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/2} |\cos x|\, dx$

34. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2}\, dx$

En los Ejercicios 35-38, calcule los valores medios de las funciones dadas en los intervalos especificados.

35. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ en $[0, 2]$

36. $f(x) = e^{3x}$ en $[-2, 2]$

37. $f(x) = 2^x$ en $[0, 1/\ln 2]$

38. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } \ 1 < t \leqslant 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

Calcule las derivadas indicadas en los Ejercicios 39-46.

39. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

40. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{t}^{3} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

41. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

42. $\displaystyle\frac{d}{dx} x^2 \int_{0}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$

43. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy$

44. $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx$

45. $\displaystyle\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$, si $F(t) = \displaystyle\int_{0}^{t} \cos(x^2)\, dx$.

46. $H'(2)$, si $H(x) = 3x \displaystyle\int_{4}^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\, dt$

47. Resuelva la ecuación integral $f(x) = \pi\left(1 + \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\, dt\right)$.

48. Resuelva la ecuación integral $f(x) = 1 - \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\, dt$.

*49. Critique el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

¿Dónde ocurre exactamente el error? ¿Por qué no es -2 un valor razonable de la integral?

*50. Utilice una integral definida para definir una función $F(x)$ cuya derivada sea $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$ para todo x y que cumpla $F(17) = 0$.

*51. ¿Tiene la función $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ un valor máximo o mínimo? Justifique su respuesta.

Calcule los límites en los Ejercicios 52-54.

*52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)$.

*53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

*54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{2n^2}\right)$.

5.6 El método de sustitución

Como hemos visto, el cálculo de integrales definidas se realiza más fácilmente si se puede obtener una primitiva del integrando. En esta sección y en las Secciones 6.1-6.4 presentaremos algunas *técnicas de integración*, es decir, métodos para obtener primitivas de funciones. Aunque las técnicas que desarrollaremos se pueden utilizar para una amplia clase de funciones, no funcionarán con todas las funciones que podríamos desear integrar. Si la integral definida tiene un inte-