Ejercicios 10.5

Identifique las superficies representadas por las ecuaciones de los Ejercicios 1-16 y dibuje sus gráficas.

1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

2. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$

3. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$

4. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$

5. $z = x^2 + 2y^2$

6. $z = x^2 - 2y^2$

7. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

8. $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$

9. $z = xy$

10. $x^2 + 4z^2 = 4$

11. $x^2 - 4z^2 = 4$

12. $y = z^2$

13. $x = z^2 + z$

14. $x^2 = y^2 + 2z^2$

15. $(z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$

16. $(z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4$

Describa y dibuje los objetos geométricos representados por los sistemas de ecuaciones de los Ejercicios 17-20.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$

19. $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 + x \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ y = 1 \end{cases}$

21. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

22. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el paraboloide hiperbólico $z = xy$.

23. La ecuación $2x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cilindro perpendiculares a él sean circulares.

***24.** La ecuación $z^2 = 2x^2 + y^2$ representa un cono con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cono perpendiculares a él sean circulares. *Sugerencia*: Haga primero el Ejercicio 23 y utilice el resultado.

10.6 Un poco de álgebra lineal

El cálculo diferencial es esencialmente el estudio de las aproximaciones lineales a funciones. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = x_0$ proporciona la «mejor aproximación lineal» a la función $f(x)$ en las proximidades de x_0. La diferenciación de funciones de varias variables también se puede ver como un proceso de obtener *las mejores aproximaciones lineales*. Por tanto, el lenguaje del álgebra lineal puede ser muy útil para expresar ciertos conceptos en el cálculo de varias variables.

El álgebra lineal es una materia muy amplia y generalmente se estudia de forma independiente del cálculo. Esto es desafortunado, porque la comprensión de las relaciones entre las dos materias puede mejorar grandemente el entendimiento y la apreciación de cada una de ellas. El conocimiento del álgebra lineal, y por tanto la familiaridad con el material considerado en esta sección, *no es esencial* para un estudio fructífero del resto de este libro. Sin embargo, comentaremos de vez en cuando el significado de algún aspecto del cálculo desde el punto de vista del álgebra lineal. Con este fin, necesitamos conocer al menos un poco la terminología y los contenidos de esta materia, especialmente los aspectos relacionados con el manejo de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales. En el resto de esta sección presentaremos un resumen de este material. Algunos estudiantes ya estarán familiarizados con este tema y otros lo estudiarán posteriormente. La presentación no intenta ser completa y, por tanto, referimos a los estudiantes interesados a los textos estándar de álgebra lineal, donde pueden encontrar las demostraciones de algunas afirmaciones. Los estudiantes que vayan más allá de este libro y estudien cálculo avanzado y ecuaciones diferenciales necesitarán seguro un conocimiento mucho más amplio del álgebra lineal.

Matrices

Una **matriz** $\mathcal{A}$ de dimensiones $m \times n$ es una disposición rectangular de mn números formando m filas y n columnas. Si a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j, entonces

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En algunas ocasiones, como notación abreviada, se escribe $\mathcal{A} = (a_{ij})$. En este caso se supone que i varía desde 1 hasta m y j desde 1 hasta n. Si $m = n$, se dice que $\mathcal{A}$ es una matriz cuadrada. Los elementos a_{ij} de las matrices que utilizaremos en este libro serán siempre números reales.

La **traspuesta** de una matriz $\mathcal{A}$ $m \times n$ es la matriz $\mathcal{A}^T$ $n \times m$, cuyas filas son las columnas de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz $\mathcal{A}$ se dice que es **simétrica** si $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$. Las matrices simétricas son necesariamente cuadradas. Obsérvese que $(\mathcal{A}^T)^T = \mathcal{A}$ para *toda* matriz $\mathcal{A}$. Muchas veces será conveniente considerar un vector de n componentes como una matriz $n \times 1$ con n filas y una columna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En ese caso, $\mathbf{x}$ se denomina **vector columna**. $\mathbf{x}^T$ tiene entonces una fila y n columnas, y se denomina **vector fila**:

$$\mathbf{x}^T = (x_1\, x_2 \cdots x_n)$$

Nótese que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^T$ tienen las mismas componentes, por lo que son idénticos como vectores, aunque parezcan diferentes como matrices.

La mayor parte de la utilidad de las matrices se basa en la siguiente definición de producto de matrices, que permite que las matrices se combinen en una sola, de forma que se mantengan las relaciones lineales.

DEFINICIÓN 7 Producto de matrices

Si $\mathcal{A} = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $\mathcal{B} = (b_{ij})$ es una matriz $n \times p$, entonces el producto $\mathcal{AB}$ es la matriz $m \times p$ $\mathcal{C} = (c_{ij})$, cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, p$$

Es decir, c_{ij} es el *producto escalar* de la fila i de $\mathcal{A}$ y la columna j de $\mathcal{B}$ (que son ambas vectores de n componentes).

Nótese que sólo se pueden multiplicar *algunas* parejas de matrices. El producto $\mathcal{AB}$ sólo está definido si el número de columnas de $\mathcal{A}$ es igual al número de filas de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 & 15 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El factor de la izquierda tiene 2 filas y 3 columnas, y el factor de la derecha tiene 3 filas y 4 columnas. Por lo tanto, el producto tiene 2 filas y 4 columnas. El elemento de la primera fila y la tercera columna del producto, 13, es el producto escalar de la primera fila, (1, 0, 3), del factor de la izquierda y la tercera columna, (1, 3, 4), del segundo factor:

$$1 \times 1 + 0 \times 3 + 3 \times 4 = 13$$

Con un poco de práctica podemos calcular fácilmente los elementos de un producto de matrices moviendo el dedo índice izquierdo por las filas del factor izquierdo y el dedo índice derecho por las columnas del factor derecho y realizando a la vez los productos escalares. ■

Ejemplo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y - z \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz 3×3 con un vector columna de 3 componentes es un vector columna de 3 componentes. ■

La multiplicación de matrices es *asociativa*. Esto significa que

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$$

suponiendo que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen dimensiones compatibles con la formación de los diversos productos. Por tanto, tiene sentido escribir $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$. Sin embargo, la multiplicación de matrices *no es conmutativa*. De hecho, si $\mathcal{A}$ es una matriz $m \times n$ y $\mathcal{B}$ es una matriz $n \times p$, entonces el producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ está definido, pero el producto $\mathcal{B}\mathcal{A}$ no está definido a menos que $m = p$. Incluso si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son matrices cuadradas del mismo tamaño, no es necesariamente cierto que $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Se deja como tarea al lector verificar que si el producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ está definido, entonces la traspuesta del producto es el producto de las traspuestas *en orden inverso*:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$$

Determinantes e inversos de matrices

En la Sección 10.3 presentamos los determinantes 2×2 y 3×3 como ciertas expresiones algebraicas asociadas con matrices cuadradas de dimensiones 2×2 y 3×3. En general, es posible definir el determinante $\det(\mathcal{A})$ de cualquier matriz cuadrada. Dada una matriz $\mathcal{A}$ $n \times n$, definimos

$$\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

No intentaremos aquí dar una definición formal de determinante, pero sí diremos que las propiedades de los determinantes que se establecieron para el caso 3×3 en la Sección 10.3 continúan siendo válidas. En particular, un determinante $n \times n$ se puede desarrollar en menores sobre cualquier fila o columna y, por tanto, se puede expresar como una suma de productos de determinantes $(n-1) \times (n-1)$. Continuando con este proceso, siempre se puede reducir el cálculo de cualquier determinante $n \times n$ al cálculo de (quizá muchos) determinantes 2×2 o 3×3. Es importante darse cuenta de que el método de la «diagonal» para calcular determinantes 2×2 y 3×3 no se puede aplicar a determinantes 4×4 o de orden mayor.

Ejemplo 4

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(-3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) - \left(-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ &= 3(0-1) + 2(2+1) + 1(2-3) = 2\end{aligned}$$

Se desarrolla el determinante 4×4 en menores sobre la tercera columna para obtener dos determinantes 3×3. El primero de ellos se desarrolla sobre la segunda fila y el otro sobre la segunda columna.

Además de las propiedades indicadas en la Sección 10.3, los determinantes tienen otras dos propiedades muy importantes, objeto del siguiente teorema.

TEOREMA 3 Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son matrices $n \times n$, entonces

(a) $\det(\mathscr{A}^T) = \det(\mathscr{A})$ y

(b) $\det(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \det(\mathscr{A})\det(\mathscr{B})$.

En esta sección no demostraremos ningún teorema. Se remite al lector a los textos de álgebra lineal. El apartado (a) no es muy difícil de demostrar, incluso en el caso de n general. El apartado (b) no se puede demostrar en general sin dar una definición formal de determinante. Sin embargo, se recomienda que el lector verifique (b) para el caso de matrices 2×2 por cálculo directo.

Se dice que la matriz cuadrada $\mathscr{A}$ es **singular** si $\det(\mathscr{A}) = 0$. Si $\det(\mathscr{A}) \neq 0$ se dice que $\mathscr{A}$ es **no singular** o **invertible**.

Observación Si $\mathscr{A}$ es una matriz 3×3, entonces $\det(\mathscr{A})$ es el producto escalar triple de las filas de $\mathscr{A}$ y su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo generado por dichas filas. Por tanto, $\mathscr{A}$ es no singular si y sólo si sus filas generan un paralelepípedo de volumen positivo; los vectores de las filas no pueden estar todos en el mismo plano. Lo mismo se puede decir de las columnas de $\mathscr{A}$.

En general, una matriz $n \times n$ es singular si sus filas (o columnas), consideradas como vectores, cumplen una o más ecuaciones lineales de la forma

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

donde al menos hay un coeficiente c_i distinto de cero. Un conjunto de vectores que cumplen la ecuación lineal anterior se denomina **linealmente dependiente** porque uno de dichos vectores se puede expresar siempre como combinación lineal de los otros; si $c_1 \neq 0$, entonces

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}_2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{x}_3 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{x}_n$$

Todas las combinaciones lineales de los vectores de un conjunto linealmente dependiente de n vectores en $\mathbb{R}^n$ debe estar en un **subespacio** de dimensión menor que n.

La **matriz identidad** $n \times n$ se define como

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

con un valor de 1 en todas las posiciones de su **diagonal principal** y un valor de 0 en todas las otras posiciones. Evidentemente, $\boldsymbol{I}$ conmuta con toda matriz $n \times n$: $\boldsymbol{I}\mathcal{A} = \mathcal{A}\boldsymbol{I} = \mathcal{A}$. Además $\det(\boldsymbol{I}) = 1$. La matriz identidad tiene el mismo papel en álgebra de matrices que el número 1 en aritmética.

Todo número x distinto de cero tiene un inverso x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. En el caso de matrices cuadradas se puede plantear una situación similar. La **inversa** de una matriz cuadrada *no singular* $\mathcal{A}$ es una matriz cuadrada no singular $\mathcal{A}^{-1}$ que cumple

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \boldsymbol{I}$$

TEOREMA 4 Toda matriz cuadrada no singular $\mathcal{A}$ tiene una inversa *única* $\mathcal{A}^{-1}$. Además, la inversa cumple

(a) $\det(\mathcal{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathcal{A})}$,

(b) $(\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1}$.

No necesitaremos calcular inversas muchas veces, pero hay que indicar que se puede hacer resolviendo sistemas de ecuaciones lineales, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Demuestre que la matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es no singular y calcule su inversa.

Solución $\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$. Por consiguiente, $\mathcal{A}$ es no singular e invertible. Sea $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

por lo que a, b y c deben cumplir el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

Evidentemente $a = b = d = 1/2$, $c = -1/2$, y

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En general, la inversión de matrices no se realiza mediante el método del ejemplo anterior, sino mediante un proceso de ordenamiento de ciertas operaciones sobre las filas de la matriz para transformarla en la matriz identidad. Cuando se realizan las mismas operaciones en las filas de la matriz identidad, se obtiene la inversa de la matriz original. Una descripción más detallada del método se puede encontrar en los textos de álgebra lineal. Una matriz singular no tiene inversa.

Transformaciones lineales

Una función $\mathbf{F}$ cuyo dominio sea el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$ y cuyo rango esté contenido en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ se denomina **transformación lineal de** $\mathbb{R}^m$ **en** $\mathbb{R}^n$ si cumple

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(\mathbf{y})$$

para todos los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^m$ y todos los números reales λ y μ. A esa transformación lineal $\mathbf{F}$ le corresponde una matriz $\mathcal{F}$ $n \times m$ tal que para todo $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\mathbf{x}$$

o, expresado en función de los componentes de $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es la **representación matricial** de la transformación lineal $\mathbf{F}$. Si $m = n$, de modo que $\mathbf{F}$ transforma $\mathbb{R}^m$ en sí mismo, entonces $\mathcal{F}$ es una matriz cuadrada. En este caso $\mathcal{F}$ es no singular si y sólo si $\mathbf{F}$ es uno a uno y su rango es el espacio $\mathbb{R}^m$ completo.

Una composición de transformaciones lineales sigue siendo una transformación lineal, y por tanto tendrá una representación matricial. La motivación real que subyace en la definición del producto de matrices es que la representación matricial de una *composición* de transformaciones lineales es el *producto* de las representaciones matriciales individuales de cada una de las transformaciones que se componen.

TEOREMA 5 Si $\mathbf{F}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz $\mathcal{F}$ de dimensiones $n \times m$ y si $\mathbf{G}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ representada por la matriz $\mathcal{G}$ de dimensiones $p \times n$, entonces la composición $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ definida como

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

es asimismo una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^p$ representada por la matriz $\mathcal{G}\mathcal{F}$ de dimensiones $p \times m$. Es decir,

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}\mathcal{F}\mathbf{x}$$

Ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

se puede escribir en forma compacta como una única ecuación matricial,

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

siendo

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x^1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Compárese la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ con la ecuación $ax=b$ para una sola incógnita x. La ecuación $ax=b$ tiene solución única $x=a^{-1}b$ siempre que $a\neq 0$. Por analogía, el sistema lineal $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x}=\mathscr{A}^{-1}\mathbf{b}$$

siempre que $\mathscr{A}$ sea no singular. Para ver que esto es así, basta con multiplicar por la izquierda los dos miembros de la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ por $\mathscr{A}^{-1}$; $\mathbf{x}=\mathscr{I}\mathbf{x}=\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathscr{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Si $\mathscr{A}$ es singular, entonces el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ puede tener o no tener solución, y si existe solución no será única. Considérese el caso $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ (el vector cero). Entonces, cualquier vector $\mathbf{x}$ perpendicular a todas las filas de $\mathscr{A}$ cumplirá el sistema. Como las filas de $\mathscr{A}$ están en un subespacio de dimensión menor que n (porque $\det(\mathscr{A})=0$), habrá al menos una recta de tales vectores $\mathbf{x}$. Por tanto, el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ no tendrá solución única si $\mathscr{A}$ es singular. Lo mismo se puede decir del sistema $\mathscr{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}$; existirán vectores distintos de cero $\mathbf{y}$ que lo cumplirán si $\mathscr{A}$ es singular. Pero entonces, si el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{x}$, debe cumplirse

$$(\mathbf{y}\bullet\mathbf{b})=\mathbf{y}^T\mathbf{b}=\mathbf{y}^T\mathscr{A}\mathbf{x}=(\mathbf{x}^T\mathscr{A}^T\mathbf{y})^T=(\mathbf{x}^T\mathbf{0})^T=(0)$$

Por consiguiente, $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ sólo puede tener soluciones para aquellos vectores $\mathbf{b}$ que sean perpendiculares a *toda* solución $\mathbf{y}$ de $\mathscr{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede tener o no tener soluciones si $n<m$. Tendrá soluciones si algún número $m-n$ de las ecuaciones del sistema son *combinaciones lineales* (sumas de múltiplos) de las otras n ecuaciones. Si $n>m$, entonces podemos intentar despejar m variables de las m ecuaciones, con lo que obtenemos una solución que dependerá de las otras $n-m$ variables. Esta solución existirá si el determinante de los coeficientes de las m variables que despejamos no es cero. Éste es un caso especial del **Teorema de la Función Implícita**, que presentaremos en la Sección 12.8.

Ejemplo 6 Resuelva $\begin{cases} 2x+y-3z=4 \\ x+2y+6z=5 \end{cases}$ expresando x e y en función de z.

Solución El sistema se puede expresar de la forma

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3z \\ 5-6z \end{pmatrix}, \qquad \text{siendo} \qquad \mathscr{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de $\mathscr{A}$ es 3 y su inversa $\mathscr{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathscr{A}^{-1}\begin{pmatrix} 4+3z \\ 5-6z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4+3z \\ 5-6z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+4z \\ 2-5z \end{pmatrix}$$

La solución es $x=1+4z$, $y=2-5z$ (por supuesto, esta solución se podría haber obtenido eliminando la variable x o la variable y de las ecuaciones dadas, sin necesidad de utilizar métodos matriciales).

El siguiente teorema establece un resultado de cierta importancia teórica, que expresa en función de determinantes la solución del sistema $\mathscr{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ cuando $\mathscr{A}$ es no singular.

TEOREMA 6 **Regla de Cramer**

Sea $\mathscr{A}$ una matriz $n \times n$ no singular. Entonces, las componentes del vector solución $\mathbf{x}$ del sistema

$$\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

son

$$x_1 = \frac{\det(\mathscr{A}_1)}{\det(\mathscr{A})}, \qquad x_2 = \frac{\det(\mathscr{A}_2)}{\det(\mathscr{A})}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(\mathscr{A}_n)}{\det(\mathscr{A})}$$

siendo $\mathscr{A}_j$ la matriz $\mathscr{A}$ donde se ha sustituido su columna j por el vector columna $\mathbf{b}$. Es decir,

$$\det(\mathscr{A}_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El siguiente ejemplo ilustra de forma concreta el uso de la Regla de Cramer para resolver un sistema lineal específico. Sin embargo, la Regla de Cramer se usa principalmente en un contexto más general (teórico); no es eficiente utilizar determinantes para calcular soluciones de sistemas lineales.

Ejemplo 7 Calcule el punto de intersección de los planos

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 6y - z &= 0 \\ x - y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

Solución La solución del sistema lineal anterior proporcionará las coordenadas del punto de intersección. El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es

$$\det(\mathscr{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

por lo que el sistema tiene solución única. Tenemos que

$$x = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-64}{-32} = 2$$

$$y = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{32}{-32} = -1$$

$$z = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{0}{-32} = 0$$

El punto de intersección es $(2, -1, 0)$.

Formas cuadráticas, autovalores y autovectores

Si $\mathbf{x}$ es un vector columna en $\mathbb{R}^n$ y $\mathscr{A} = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, real y simétrica (es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n$), entonces la expresión

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathscr{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

se denomina **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^n$ correspondiente a la matriz $\mathscr{A}$. Obsérvese que $Q(\mathbf{x})$ es un número real para todo vector $\mathbf{x}$ de n componentes.

Se dice que $\mathscr{A}$ es **definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero. De forma similar, se dice que $\mathscr{A}$ es **definida negativa** si $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero. Se dice que $\mathscr{A}$ es **semidefinida positiva** (o **semidefinida negativa**) si $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ o $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero.

Si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para algunos vectores $\mathbf{x}$ distintos de cero y $Q(\mathbf{x}) < 0$ para otros vectores $\mathbf{x}$ (es decir, si $\mathscr{A}$ no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa), se dice que $\mathscr{A}$ es **indefinida**.

Ejemplo 8 La expresión $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ correspondiente a la matriz simétrica

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Obsérvese cómo se obtienen los elementos de la matriz a partir de los coeficientes de Q. Los coeficientes de x^2, y^2 y z^2 forman los elementos de la diagonal principal, y los coeficientes de los términos producto se sitúan divididos por dos en los términos simétricos correspondientes de las otras posiciones de la matriz.

La matriz $\mathscr{A}$ es definida positiva ya que $Q(x, y, z)$ se puede escribir de la forma

$$Q(x, y, z) = x^2 + (x - y)^2 + (x + 2z)^2 + (y + z)^2$$

de donde se puede ver que $Q(x, y, z) \geqslant 0$ para todo (x, y, z) y $Q(x, y, z) = 0$ sólo si $x = y = z = 0$. ■

En la Sección 13.1 utilizaremos la definición positiva o negativa de ciertas matrices para clasificar como máximos y mínimos locales los puntos críticos de funciones de varias variables. Existen criterios útiles para encontrar la definición de una matriz $\mathscr{A}$ que se pueden expresar en función de los *autovalores* de dicha matriz.

Se dice que λ es un **autovalor** de la matriz cuadrada $n \times n$ $\mathscr{A} = (a_{ij})$ si existe un vector columna $\mathbf{x}$ *distinto de cero* tal que $\mathscr{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ o, en otros términos,

$$(\mathscr{A} - \lambda \boldsymbol{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. El vector $\mathbf{x}$ distinto de cero se denomina **autovector** de $\mathscr{A}$ correspondiente al autovalor λ y sólo puede existir si $\mathscr{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ es una matriz singular, es decir, si

$$\det(\mathscr{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Los autovalores de $\mathscr{A}$ deben satisfacer esta ecuación polinómica de grado n, por lo que pueden ser reales o complejos. Los siguientes teoremas se demuestran en textos estándar de álgebra lineal.

TEOREMA 7 Si $\mathscr{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ es una matriz real y simétrica, entonces

(a) Todos los autovalores de $\mathscr{A}$ son reales.
(b) Todos los autovalores de $\mathscr{A}$ son distintos de cero si $\det(\mathscr{A}) \neq 0$.
(c) $\mathscr{A}$ es definida positiva si todos sus autovalores son positivos.
(d) $\mathscr{A}$ es definida negativa si todos sus autovalores son negativos.
(e) $\mathscr{A}$ es semidefinida positiva si todos sus autovalores son no negativos.
(f) $\mathscr{A}$ es semidefinida negativa si todos sus autovalores son no positivos.
(g) $\mathscr{A}$ es indefinida si tiene al menos un autovalor positivo y al menos un autovalor negativo.

TEOREMA 8 Sea $\mathscr{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz real simétrica y considérense los determinantes

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Así, $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, etc.

(a) Si $D_i > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $\mathscr{A}$ es definida positiva.
(b) Si $D_i > 0$ para los números pares i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $D_i < 0$ para los números impares i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\mathscr{A}$ es definida negativa.
(c) Si $\det(\mathscr{A}) = D_n \neq 0$ pero no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, entonces $Q(\mathbf{x})$ es indefinida.
(d) Si $\det(\mathscr{A}) = 0$, entonces $\mathscr{A}$ no es definida positiva ni definida negativa y puede ser semidefinida o indefinida.

Ejemplo 9 Dada la matriz $\mathscr{A}$ del Ejemplo 8, tenemos que

$$D_1 = 3 > 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

lo que vuelve a confirmar que la forma cuadrática de ese ejercicio es definida positiva.

Ejercicios 10.6

Calcule los productos de matrices en los Ejercicios 1-4.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

5. Calcule $\mathscr{A}\mathscr{A}^T$ y $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}\mathscr{A}$, siendo

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calcule $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^T\mathscr{A}\mathbf{x}$, siendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$$

En los Ejercicios 7 y 8, calcule los determinantes.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

9. Demuestre que si $\mathscr{A} = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ para la que $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$, entonces $\det(\mathscr{A}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$, el producto de los elementos de la diagonal principal de $\mathscr{A}$.

10. Demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$, y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$$

Intente generalizar este resultado al caso $n \times n$.

11. Verifique la propiedad asociativa $(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})$ mediante cálculo directo para el caso de tres matrices 2×2 arbitrarias.

12. Demuestre que $\det(\mathscr{A}^T) = \det(\mathscr{A})$ para matrices $n \times n$ mediante inducción en n. Comience con el caso 2×2.

13. Verifique por cálculo directo que $\det(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \det(\mathscr{A})\det(\mathscr{B})$ se cumple para dos matrices arbitrarias 2×2.

14. Sea $\mathscr{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Demuestre que

$$(\mathscr{A}_\theta)^T = (\mathscr{A}_\theta)^{-1} = \mathscr{A}_{-\theta}$$

Calcule las inversas de las matrices de los Ejercicios 15 y 16.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

17. Utilice el resultado del Ejercicio 16 para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$$

18. Resuelva el sistema del Ejercicio 17 utilizando la Regla de Cramer.

19. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

20. Verifique el Teorema 5 para el caso especial en el que **F** y **G** son transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

En los Ejercicios 21-26, clasifique las matrices simétricas dadas como definidas positivas o negativas, semidefinidas positivas o negativas o indefinidas.

21. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10.7 Uso de Maple para cálculos con vectores y matrices

El uso de un sistema de álgebra por computador puede facilitar muchas tareas tediosas necesarias en el cálculo. Esto es especialmente cierto en el caso del cálculo multivariable y vectorial, ya que las operaciones pueden volverse rápidamente inmanejables cuando el número de variables crece. El Doctor Robert Israel, colega del autor de este libro, ha escrito un libro excelente, *Calculus, the Maple Way*, que muestra cómo utilizar Maple de forma efectiva en la realización de operaciones de cálculo con una variable y con varias variables.

En este libro presentamos algunas veces la potencia de Maple para realizar cálculos con funciones de varias variables y funciones vectoriales de una o más variables. Esta sección ilustra algunas características básicas del cálculo con vectores y matrices. Los ejemplos se han realizado utilizando Maple 9, pero Maple 6 o posterior producirá un resultado similar.

Las capacidades de operación de Maple con vectores y matrices no están en su núcleo, sino que se encuentran incluidas en un paquete de procedimientos denominado **LinearAlgebra**

Por tanto, es imprescindible cargar este paquete al comienzo de la sesión donde se va a necesitar:

```
> with(LinearAlgebra) :
```

Los comandos de Maple se finalizan en general con un punto y coma, en vez de con dos puntos. Al utilizar los dos puntos se suprime la salida. Si hubiéramos usado un punto y coma para finalizar el comando anterior, se hubiera producido una lista de todos los procedimientos definidos en el paquete LinearAlgebra.

Maple incluye también un segundo paquete de álgebra lineal denominado **linalg** pero es inferior a LinearAlgebra, especialmente para la realización de cálculos numéricos de alto coste computacional, utilizando matrices grandes; además es algo más difícil de usar. Sin embargo, el paquete linalg ya estaba presente en versiones de Maple anteriores a la 6, y todavía está presente en la versión 9. No utilizaremos aquí linalg, pero se utilizó en vez de LinearAlgebra en la quinta edición de este libro.

Vectores

Hay varias formas de definir vectores en Maple; la más fácil es utilizar las construcciones `Vector([,])` o `<,>`, donde se incluye una lista de los componentes del vector separadas por comas dentro de los corchetes o de los paréntesis angulares. Ambas construcciones producen vectores columna:

```
> Uc := Vector([1, 2, 3]) ; Vc := <a, b, c> ;
```

$$Uc := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Vc := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Para producir un vector fila se puede utilizar `Vector[row]([,])`; también se puede definir un vector fila utilizando «|» para separar sus componentes:

```
> Ur := Vector[row] ([1, 2, 3]) ; Vr := <a|b|c> ;
```

$$Ur := [1, 2, 3]$$

$$Vr := [a, b, c]$$

Los vectores pueden tener cualquier dimensión; basta con incluir el número apropiado de comas o de componentes separadas por |. También se puede usar la construcción `Vector()` con dos argumentos, el primero de ellos un entero positivo que indica la dimensión del vector y el segundo, o bien una lista de componentes encerradas entre corchetes, o bien una regla de asignación que permita obtener el valor de la componente *i*-ésima:

```
> <5|-2|3|x>; W := Vector[row] (5, i -> i^2) ;
```

$$[5, -2, 3, x]$$

$$W := [1, 4, 9, 16, 25]$$

También es posible construir un vector con componentes arbitrarias como éste:

```
> X := Vector(2, symbol=x) ;
  Y := Vector[row] (4, symbol=y) ;
```

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Y := [y_1, y_2, y_3, y_4]$$

Las componentes de un vector se pueden referenciar añadiendo el índice de la componente, encerrado entre corchetes, al nombre o constructor del vector. La cuarta componente del vector `W` anterior es `W[4]`:

```
> W[4] ; Vector(16, i -> 3*i - 1) [10] ; X[2]+Y[3] ;
```

$$16$$

$$29$$

$$x_2 + y_3$$

Los vectores de la misma dimensión y tipo (fila o columna) se pueden sumar, restar y multiplicarse por escalares utilizando los operadores ordinarios +, − y *:

```
> Uc + Vc; Vc - 3*Uc ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 + a \\ 2 + b \\ 3 + c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a - 3 \\ b - 6 \\ c - 9 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los cálculos con vectores no importa si consideramos los vectores como fila o como columna, pero en algunos operadores de LinearAlgebra hay que considerar la diferencia; si se intenta sumar un vector fila con un vector columna, o dos vectores de diferentes dimensiones, obtendremos un mensaje de error.

El paquete LinearAlgebra define también las funciones producto escalar `DotProduct` y producto vectorial `CrossProduct`, cuyos argumentos de entrada son dos vectores. En el caso de DotProduct los argumentos de entrada deben ser de la misma dimensión. En el caso de CrossProduct, ambos argumentos deben ser de dimensión 3. Sin embargo, ninguna de las dos funciones exige que los argumentos sean del mismo tipo (fila o columna). El producto vectorial dará como resultado un vector columna a menos que ambos argumentos sean vectores fila.

Tal como está definido en el paquete LinearAlgebra, DotProduct puede producir algunos resultados extraños. Consideremos, por ejemplo:

```
> DotProduct(Uc, Vc) ; DotProduct(Vc, Uc) ;
  DotProduct(Ur, Vr) ;
```

$$a + 2b + 3c$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$$

¿Qué está pasando aquí? Las barras sobre las cantidades desconocidas a, b y c indican los complejos conjugados de esas cantidades; el paquete LinearAlgebra está diseñado para satisfacer las necesidades de un gran número de usuarios del álgebra lineal, no sólo los estudiantes de cálculo para los que todos los vectores se supone que tienen componentes reales. En realidad, `DotProduct(U, V)` suma los productos de los complejos conjugados de las componentes de `U` con los componentes de `V` sin conjugar si ambos vectores son vectores columna, y viceversa si ambos vectores son fila. En el primer ejemplo anterior, las componentes de `Uc` son números reales, por lo que no aparece la barra que indica conjugado sobre ellos; en los otros casos las componentes de `Vc` o `Vr` requieren conjugación, y como Maple no sabe si son reales, pone las barras. Para evitar esta dificultad cuando se utilizan vectores reales, se incluye el argumento `"conjugate=false"` como tercera entrada de la función DotProduct en el paquete LinearAlgebra:

```
> DotProduct(Ur, Vr, conjugate=false) ;
```

$$a + 2b + 3c$$

También es posible utilizar el punto "." como operador binario para calcular un producto escalar. Sin embargo, el punto también representa multiplicación de matrices, por lo que hay que usar un vector fila a la izquierda del punto y un vector columna a la derecha para asegurarse de obtener un producto escalar.

```
> <a|b|c>.<x, y, z>; <a, b, c>.<x|y|z> ;
```

$$a + 2b + 3c$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}$$

LinearAlgebra tiene también una función CrossProduct, que sólo se aplica a vectores tridimensionales. No importa si sus argumentos son vectores fila o columna. La forma de llamar esta función es `CrossProduct(U, V)` o `U &x V`.

```
> CrossProduct(Uc, Vc) ; Ur &x Vr;
```

$$\begin{bmatrix} 2c - 3b \\ 3a - c \\ b - 2a \end{bmatrix}$$

$$[2c - 3b, 3a - c, b - 2a]$$

LinearAlgebra tiene una función denominada `Norm()` para calcular la longitud de un vector. Desafortunadamente, Maple conoce muchas definiciones diferentes de longitud de un vector. La que utilizaremos es la longitud euclídea. La longitud euclídea de un vector `V` se obtiene como `Norm(V,Euclidean)` o `Norm (V,2)` (en el último caso el 2 indica el hecho de que para calcular la longitud se utiliza la *raíz cuadrada* de la suma de los *cuadrados* de las componentes).

```
> Norm(Ur, Euclidean) ; Norm(<1, -1, 2, -3, 1>, 2) ;
```

$$\sqrt{14}$$

$$4$$

Las funciones `Normalize(U,Euclidean)` o `Normalize(U,2)` se pueden utilizar para obtener un vector unitario en la misma dirección que `U`. Por supuesto, siempre se puede multiplicar `U` por un escalar que sea el inverso de su longitud:

```
> Normalize(<2|-2|1>, 2) ; (1/Norm(Uc, 2))*Uc;
```

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{14}\sqrt{14} \\ \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

LinearAlgebra tiene una función denominada `VectorAngle` que devuelve el ángulo entre dos vectores. No importa si los vectores son fila o columna. El resultado está en radianes, por lo que tendremos que multiplicarlo por $180/\pi$ para obtener el ángulo en grados.

```
> VectorAngle(<2, 2, 1>, <1, -2, 2>) ;
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

Para ilustrar algo más estas ideas, hagamos que Maple calcule una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, -1)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $2x + 3y + z = 5$ y $3x - 2y - 4z = 1$.

```
> (<2|3|1> &x <3|-2|-4>) . (<x, y, z>-<2, 1, -1>) = 0 ;
```

$$-10x - 4 + 11y - 13z = 0$$

que también podríamos haber escrito como $10x - 11y + 13z = -4$. Nótese cómo, para calcular el producto escalar, hemos utilizado el producto vectorial de dos vectores fila (que es, por tanto, otro vector fila) a la izquierda del ''.'' y una diferencia de dos vectores columna (que es, por tanto, un vector columna) a la derecha del ''.''.

Finalmente, utilicemos Maple para verificar la identidad

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W} = (\mathbf{W} \bullet \mathbf{U})\mathbf{V} - (\mathbf{W} \bullet \mathbf{V})\mathbf{U}$$

En primer lugar, definimos **U**, **V** y **W** como vectores con componentes arbitrarias. En vista de los dos productos escalares del miembro derecho de la identidad, haremos que **W** sea un vector fila y los otros dos, vectores columna:

```
> U := Vector(3, symbol=u) ;
  V := Vector(3, symbol=v) ;
  W := Vector[row] (3, symbol=w) ;
```

$$U := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$W := [w_1, w_2, w_3]$$

Ahora sólo necesitamos restar el miembro derecho de la identidad del miembro izquierdo y simplificar el resultado:

```
> simplify((U &x V) &x W - (W . U) *V + (W . V) *U) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado es el vector cero, lo que confirma la identidad.

Observación Maple 8 y versiones posteriores disponen de un nuevo paquete denominado VectorCalculus, que dispone de más funcionalidades que el paquete LinearAlgebra para operar con funciones vectoriales y funciones de variables vectoriales. Ilustraremos el uso de este paquete en capítulos posteriores, pero nótese aquí que también define las operaciones sobre vectores consideradas anteriormente, pero no todas las funciones matriciales consideradas más adelante. VectorCalculus devuelve vectores en forma de combinaciones lineales de vectores de una base, en vez de como matrices fila o columna. Las bases por defecto que utiliza están formadas por los vectores e_x, e_y, e_z (en vez de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) para vectores de dimensión menor o igual que 3, pero e_{x1}, e_{x2}, ... para dimensiones superiores a 3. No obstante, aunque no sea claro por la forma en la que VectorCalculus muestra los vectores, mantiene todavía la distinción entre vectores fila y columna, y por tanto no nos dejará sumar un vector fila con un vector columna. Una gran ventaja del paquete VectorCalculus sobre LinearAlgebra es que VectorCalculus utiliza la definición habitual de producto escalar (incluso cuando utiliza la notación ''.''), por lo que el orden de los factores en un producto escalar es irrelevante y no se utiliza la conjugación compleja. Si se desea utilizar el paquete VectorCalculus y tener todavía acceso a todas las operaciones sobre matrices que proporciona el paquete LinearAlgebra, basta con cargar el paquete VectorCalculus *después* de cargar el paquete LinearAlgebra, con lo que se sustituirán las definiciones de operaciones sobre vectores del paquete LinearAlgebra con las nuevas definiciones del paquete VectorCalculus.

```
> with(LinearAlgebra) :
  with(VectorCalculus) :
```

Incluso con la salida suprimida, el segundo `with` anterior producirá unas cuantas líneas de avisos debidas principalmente al cambio en las definiciones de algunas operaciones sobre vectores.

```
> V1 := <2, -3, 4>; V2 := <a|b|c>; V3 := <2, -3, 4, -5, 6>;
```

$$V1 := 2e_x - 3e_y + 4e_z$$

$$V2 := ae_x + be_y + ce_z$$

$$V_3 := 2e_{x1} - 3e_{x2} + 4e_{x3} - 5e_{x4} + 6e_{x5}$$

```
> V1.V2; V2.V1;
```

$$2a - 3b + 4c$$
$$2a - 3b + 4c$$

Como `V1` es un vector columna y `V2` es un vector fila, cualquier intento de calcular una combinación lineal de estos vectores generará un error, como también los intentos de calcular `M.V2` o `V1.M` siendo `M` una matriz 3 × 3. Por supuesto, `M.V1` funcionará bien, como `V2.M`, aunque el resultado será una matriz de una fila en vez de un vector. En capítulos posteriores volveremos a utilizar VectorCalculus.

Matrices

El paquete LinearAlgebra proporciona también diversas formas de definir y manejar matrices. Una matriz se puede definir como un vector columna cuyos elementos son vectores fila, o como un vector fila cuyos elementos son vectores columna:

```
> <<1|1|1>, <2|1|3>>; <<1, 2>|<1, 1>|<1, 3>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Las matrices también se pueden definir utilizando la función `Matrix`. Esta función puede aceptar una lista de datos que especifican las filas de la matriz, o bien dos enteros positivos (el número de filas y de columnas, respectivamente), junto con una regla para calcular los elementos de la fila i y la columna j.

```
> L := Matrix([[1, 1, 1], [2, 1, 3]]) ;
  M := Matrix(3, 3, (i, j) -> i-j) ;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz P con 2 filas y 4 columnas con elementos arbitrarios $p_{i,j}$ se puede construir de la siguiente forma:

```
> P := Matrix(2, 4, symbol=p) ;
```

$$P := \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \end{bmatrix}$$

Como en el caso de vectores, se accede a los elementos de una matriz encerrando los índices de fila y columna entre corchetes, precedidos por el nombre de la matriz.

```
> P[1, 2] := Pi; P[1, 4]+P[2, 4] ; P ;
```

$$P_{1,2} := \pi$$

$$p_{1,4} + p_{2,4}$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & \pi & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \end{bmatrix}$$

Existen también construcciones abreviadas para tipos especiales de matrices, como las matrices todo unos o todo ceros, las matrices identidad (cuadradas) y las matrices diagonales:

```
> Matrix(2, 3) ; IdentityMatrix(3) ;
  DiagonalMatrix([a, b, c]) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

La traspuesta T de una matriz se obtiene utilizando la función `Transpose`.

```
> T := Transpose(L) ;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El producto AB de dos matrices A y B se calcula utilizando el operador binario .; es decir, se calcula `A.B`. Por supuesto, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.

```
> L.T; T.L;
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

El determinante y la inversa de una matriz cuadrada se calculan mediante las funciones `Determinant` y `MatrixInverse`.

```
> A := <<1|1|1>>, <2|1|3>, <1|1|2>>;
  DetA :=Determinant(A) ; Ainv := MatrixInverse(A) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$DetA := -1$$

$$Ainv := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A.Ainv = Ainv.A;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones en n variables se puede expresar de la forma $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, siendo A una matriz $n \times n$, y $\mathbf{X}$ y $\mathbf{B}$ vectores columna de n componentes. Por tanto, la solución se expresa como $\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B}$. Por ejemplo, el sistema

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + 3z = 9, \qquad x + y + 2z = 1$$

tiene como matriz de coeficientes la matriz A definida anteriormente, y $\mathbf{B}$ es el vector columna `<2, 9, 1>`. La solución del sistema es:

```
> X : = Ainv.<2, 9, 1>;
```

$$X := \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es decir, $x = 9$, $y = -6$, $z = -1$. LinearAlgebra proporciona una forma sencilla de resolver el sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$; sólo necesitamos utilizar la función `LinearSolve(A,B)`:

```
> X := linsolve(A, [2, 9, 1]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales es mejor usar `LinearSolve` que inversión de matrices, ya que LinearSolve puede resolver algunos sistemas en los que la matriz es singular o no es cuadrada. Consideremos los sistemas

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

El primer sistema tiene una familia de soluciones dependientes de un parámetro, $x = 1 - t$, $y = t$, para valores de t arbitrarios. El segundo sistema es incoherente y no tiene soluciones.

```
> L := Matrix([[1, 1], [2, 2]]) ; B1 := <1, 2>; B2 := <1, 1>;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> X := LinearSolve(L, B1, freee=t) ;
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 - t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Se ha incluido el argumento extra `free=t` para obligar a LinearSolve a utilizar la variable t con subíndices para indicar los parámetros. Es más seguro utilizar siempre un argumento de entrada de este tipo, ya que omitirlo puede hacer que la salida tenga un aspecto extraño (pruébelo para verlo). Si el sistema tiene solución única, el argumento `free=t` simplemente se ignora.

```
> X := LinearSolve(L, B2, free=t);
```

```
Error, (in LinearSolve) inconsistent system
```

Autovectores y autofunciones

El paquete LinearAlgebra tiene procedimientos para calcular los autovectores y autovalores de matrices. En el caso de una matriz real y simétrica, los autovalores son siempre reales.

```
> K := Matrix([[3, 1, -1], [1, 4, 1], [-1, 1, 3]]) ;
```

$$K := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues (K) ;
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

La función `Eigenvalues` produce un vector columna con los autovalores de la matriz cuadrada que se introduce como argumento. En este ejemplo, los tres autovalores son positivos, por lo que K es una matriz definida positiva. La principal utilidad que tendrán para nosotros los autovalores será la de clasificar los puntos críticos de funciones de varias variables. Para este uso, no es necesario conocer los correspondientes autovectores, pero si necesitáramos conocerlos, se puede utilizar la función `Eigenvectors(K)`. La salida habría consistido entonces en dos elementos separados por una coma. El primer elemento es un vector columna que contiene los autovalores de K; el segundo elemento es una matriz cuadrada cuyas columnas son los autovectores correspondientes a dichos autovalores (si un autovalor tuviera multiplicidad m, habría m columnas linealmente independientes en la matriz).

```
> Eigenvectors (K) ;
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} & -\dfrac{(-2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{-3-2\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{-3+\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} & -\dfrac{-3-\sqrt{3}}{-3-2\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple no siempre realiza perfectamente las simplificaciones. Si utilizamos el comando `simplify(%[2])` sobre la salida anterior, veremos que la fila superior de la matriz de autovectores es, en realidad, más simple de lo que parece.

Observación Todas las matrices y vectores utilizados en los ejemplos de esta sección son de dimensiones muy pequeñas. El paquete LinearAlgebra es capaz de manejar matrices grandes con cientos de filas y columnas, pero en ese caso es mejor evitar las expresiones simples como `2*M-3*N` o `M.N` para realizar combinaciones lineales o productos escalares, y utilizar en cambio `MatrixAdd(M,N,2,-3)` y `MatrixMatrixMultiply(M,N)`, que realizan los cálculos de forma mucho más eficiente. De forma similar, es conveniente utilizar `MatrixVectorMultiply(M,X)` en vez de `M.X` si `X` es un vector columna y `ScalarMutiply(M,c)` en vez de `c*M` si `c` es un número.

Ejercicios 10.7

Utilice Maple para calcular las magnitudes de los Ejercicios 1 y 2.

1. La distancia entre la recta paralela al vector (3, 0, 2) que pasa por $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y la recta paralela al vector (1, 2, 4) que pasa por el punto $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

2. El ángulo (en grados) entre el vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y el plano que pasa por el origen y contiene a los vectores $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Utilice Maple para verificar las identidades de los Ejercicios 3 y 4.

3. $\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{V} \bullet (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) = \mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \times \mathbf{V})$

4. $(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times (\mathbf{U} \times \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \times \mathbf{W}))\mathbf{U}$

En los Ejercicios 5-10, defina funciones de Maple que permitan obtener los resultados indicados. Puede utilizar funciones ya definidas en **LinearAlgebra**.

5. Una función `sp(U, V)` que produzca la proyección escalar del vector **U** sobre el vector distinto de cero **V**.

6. Una función `vp(U, V)` que produzca el vector proyección del vector **U** sobre el vector distinto de cero **V**.

7. Una función `ang(U, V)` que produzca el ángulo que forman los vectores distintos de cero **U** y **V**, en grados y como número decimal.

8. Una función `unitn(U, V)` que produzca un vector unitario normal a los dos vectores no paralelos **U** y **V** en el espacio tridimensional.

9. Una función `VolT(U, V, W)` que produzca el volumen del tetraedro del espacio tridimensional generado por los vectores **U**, **V** y **W**.

10. Una función `dist(A, B)` que produzca la distancia entre dos puntos cuyos vectores de posición son **A** y **B**. Utilice esta función para calcular la distancia entre [1, 1, 1, 1] y [3, −1, 2, 5].

En los Ejercicios 11 y 12, utilice `LinearSolve` para resolver los sistemas dados.

11. $$\begin{cases} u + 2v + 3x + 4y + 5z = 20 \\ 6u - v + 6x + 2y - 3z = 0 \\ 2u + 8v - 8x - 2y + z = 6 \\ u + v + x + y + z = 5 \\ 10u - 3v + 3x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} u + v + x + y = 10 \\ u + y + z = 10 \\ u + x + y = 8 \\ u + v + x + z = 11 \\ v + y - z = 1 \end{cases}$$

13. Calcule el determinante de la matriz de coeficientes del sistema del Ejercicio 11.

14. Calcule los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema del Ejercicio 12. Exprese sus respuestas en forma decimal, con cinco decimales de precisión (utilice `evalf`). ¿Piensa que algunos de ellos son realmente complejos?

15. Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

16. Calcule, en forma decimal (utilizando `evalf(Eigenvals(A))`), los autovalores de la matriz A del Ejercicio 15 y los autovalores de su inversa. Utilice `Digits := 10`. ¿Cómo explica el hecho de que algunos autovalores parecen ser complejos? ¿Qué relación parece haber entre los autovalores de A y los autovalores de su inversa?

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significa lo siguiente?**
  - ◇ Entorno
  - ◇ Conjunto abierto
  - ◇ Conjunto cerrado
  - ◇ Frontera de un conjunto
  - ◇ Interior de un conjunto
  - ◇ Vector en el espacio tridimensional
  - ◇ Producto escalar de dos vectores
  - ◇ Producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$
  - ◇ Producto escalar triple
  - ◇ Producto vectorial triple
  - ◇ Matriz
  - ◇ Determinante

- ◇ Plano
- ◇ Recta
- ◇ Cono
- ◇ Cilindro
- ◇ Elipsoide
- ◇ Paraboloide
- ◇ Hiperboloide de una hoja
- ◇ Hiperboloide de dos hojas
- ◇ Traspuesta de una matriz
- ◇ Inversa de una matriz
- ◇ Transformación lineal
- ◇ Autovalor de una matriz

- **¿Qué es el ángulo que forman los vectores u y v?**
- **¿Cómo se calcula u × v dadas los componentes de u y v?**
- **¿Cuál es la ecuación del plano que pasa por P_0 y es normal al vector N?**
- **¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector a?**
- **Dadas dos matrices A y B de 3×3, ¿cómo se calcula AB?**
- **¿Qué es la distancia desde P_0 al plano $Ax+By+Cz+D=0$?**
- **¿Qué es la Regla de Cramer, y cómo se usa?**

Ejercicios de repaso

Describa los conjuntos de puntos en el espacio tridimensional que cumplen las ecuaciones o inecuaciones dadas en los Ejercicios 1-18.

1. $x + 3z = 3$

2. $y - z \geqslant 1$

3. $x + y + z \geqslant 0$

4. $x - 2y - 4z = 8$

5. $y = 1 + x^2 + z^2$

6. $y = z^2$

7. $x = y^2 - z^2$

8. $z = xy$

9. $x^2 + y^2 + 4z^2 < 4$

10. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

11. $x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$

12. $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$

***13.** $(x - z)^2 + y^2 = 1$

***14.** $(x - z)^2 + y^2 = z^2$

15. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant 1 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$

Calcule las ecuaciones de los planos y rectas especificados en los Ejercicios 19-28.

19. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

20. El plano que pasa por el punto $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ y es paralelo a la recta del Ejercicio 19.

21. El plano que pasa por el punto $(2, -1, 1)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$.

22. El plano que pasa por los puntos $(-1, 1, 0)$, $(0, 4, -1)$ y $(2, 0, 0)$.

23. El plano que contiene a la recta intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$ y pasa por el punto $(2, 0, 1)$.

24. El plano que contiene a la recta intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$ y es perpendicular al plano $x - 2y - 5z = 17$.

25. La ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto $(2, 1, -1)$ y $(-1, 0, 1)$.

26. La ecuación en forma estándar de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralela a los planos $x - y = 3$ y $x + 2y + z = 1$.

27. La ecuación paramétrica escalar de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z = 5$.

28. La ecuación paramétrica vectorial de la recta que une puntos de las dos rectas

$$\mathbf{r} = (1 + t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} - (2 + 2t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j} - (1 + 3t)\mathbf{k}$$

y es perpendicular a ambas rectas.

Exprese las condiciones o cantidades dadas en los Ejercicios 29 y 30 en función de productos escalares y vectoriales.

29. Los tres puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ están en la misma recta.

30. Los cuatro puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$ no están en el mismo plano.

31. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$ y $(3, 4, -2)$.

32. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$, $(3, 4, -2)$ y $(2, 2, 2)$.

33. Demuestre que la matriz

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y calcule su inversa $\mathscr{A}^{-1}$.

34. Sea $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Qué condición debe cumplir el vector $\mathbf{b}$ para que la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga soluciones $\mathbf{x}$? ¿Cuáles son las soluciones $\mathbf{x}$ si $\mathbf{b}$ cumple la condición?

35. ¿Es la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ definida positiva, negativa o ninguna de las dos cosas?

Problemas avanzados

1. Demuestre que la distancia d desde el punto P hasta la recta AB se puede expresar en términos de los vectores de posición de P, A y B mediante la expresión

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}$$

2. Dados vectores cualesquiera $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{x}$, demuestre que

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{x})\mathbf{w} - ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w})\mathbf{x} \\ &= ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{u})\mathbf{v} - ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v})\mathbf{u}\end{aligned}$$

En particular, demuestre que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{u}$$

3. Demuestre que el área A del triángulo cuyos vértices son $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ y $(x_3, y_3, 0)$ en el plano xy se expresa como

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

4. (a) Si L_1 y L_2 son dos rectas que no son paralelas ni se cruzan, demuestre que existe una pareja de planos paralelos P_1 y P_2 tales que L_1 está en P_1 y L_2 está en P_2.

(b) Obtenga planos paralelos que contengan las siguientes rectas: L_1 que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(2, 0, 1)$ y L_2 que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, 2, 2)$.

5. ¿Qué condición deben cumplir los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para asegurar que la ecuación $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene soluciones? Si se cumple esa condición, calcule todas las soluciones de la ecuación. Describa el conjunto de soluciones.

CAPÍTULO 11

Funciones vectoriales y curvas

La filosofía está escrita en este gran libro, el universo, que está continuamente abierto a nuestra observación, pero que no se puede entender a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje e interprete los caracteres en los que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra de ese libro; sin ellos, uno simplemente está vagando por un laberinto oscuro.

Galileo Galilei (1564-1642)

Introducción Este capítulo trata de funciones de una sola variable real cuyo valor es un *vector*. Estas funciones se pueden ver como representaciones paramétricas de curvas, y las examinaremos desde un punto de vista *cinemático* (considerando la posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento) y desde un punto de vista *geométrico* (considerando tangentes, normales, curvatura y torsión). Finalmente presentaremos un desarrollo simple de las leyes de Kepler del movimiento planetario.

11.1 Funciones vectoriales de una variable

En esta sección vamos a examinar varios aspectos de cálculo diferencial e integral aplicado a **funciones vectoriales** de una sola variable real. Estas funciones se utilizarán para representar curvas paramétricamente. Es natural interpretar una función vectorial de la variable real t como una posición, en el instante t, de un punto o «partícula» que se mueve en el espacio. Las derivadas de este *vector de posición* serán entonces otra función vectorial que dará la velocidad y la aceleración de la partícula. Para motivar el estudio de funciones vectoriales, las consideraremos una descripción vectorial del movimiento en el espacio tridimensional. Algunos de los ejemplos que presentaremos serán de movimiento en el plano; en este caso la tercera componente de los vectores será 0 y se omitirá.

Si una partícula se mueve en el espacio tridimensional, su movimiento se puede describir dando las tres coordenadas de su posición en función del tiempo t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad \text{y} \qquad z = z(t)$$

Sin embargo, es más conveniente sustituir estas tres ecuaciones por una única ecuación vectorial,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

que expresa el vector de posición de la partícula en movimiento en función de t (recuérdese que el vector de posición de un punto es el vector que va desde el origen hasta dicho punto). En función de los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, el vector de posición de la partícula en el instante t es

$$\text{posición:} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

A medida que t aumenta, la partícula se mueve por un *camino*, una curva $\mathcal{C}$ en el espacio tridimensional. Si $z(t) = 0$, entonces $\mathcal{C}$ es una curva plana en el plano xy. Supondremos que $\mathcal{C}$ es una *curva continua*; la partícula no puede saltar instantáneamente de un punto a otro punto distante. Esto equivale a requerir que las funciones de las componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ sean funciones continuas de t, y diremos, por tanto, que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial continua de t.

En el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$, la partícula se mueve desde la posición $\mathbf{r}(t)$ hasta la posición $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Por tanto, su **velocidad media** es

$$\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

que es un vector paralelo al vector secante que va desde $\mathbf{r}(t)$ hasta $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Si la velocidad media tiene límite cuando $\Delta t \to 0$, se dice que $\mathbf{r}$ es **diferenciable** en t, y denominaremos al límite **vector velocidad** (instantánea) de la partícula en el instante t. Llamaremos $\mathbf{v}(t)$ al vector velocidad:

$$\text{vector velocidad:} \quad \mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dr}\mathbf{r}(t)$$

El vector velocidad tiene una dirección tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{r}(t)$ (*véase* la Figura 11.1), y apunta en la dirección del movimiento. La longitud del vector velocidad $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ se denomina **velocidad** de la partícula:

$$\text{velocidad:} \quad v(t) = |\mathbf{v}(t)|$$

Siempre que exista el vector velocidad, sea continuo y no se anule, la curva $\mathcal{C}$ es una curva **suave**, es decir, tiene tangentes que varían de forma continua. La curva puede no ser suave en puntos donde la velocidad sea cero, aunque las componentes del vector velocidad sean funciones suaves de t.

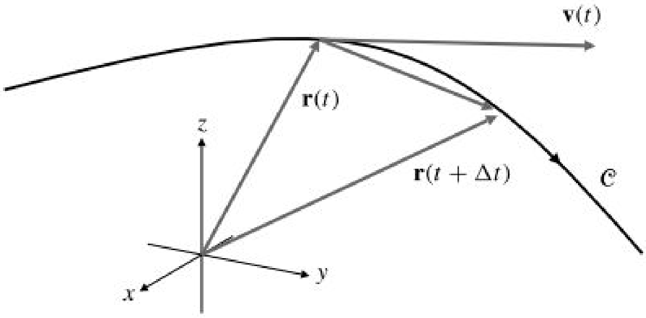

Figura 11.1 El vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ es la derivada de la posición $\mathbf{r}(t)$ y es tangente a la curva del movimiento en el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 1 Considere la curva plana $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$. Sus funciones componentes t^3 y t^2 tienen derivadas continuas de todos los órdenes. Sin embargo, la curva no es suave en el origen ($t = 0$), donde su velocidad $\mathbf{v} = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} = \mathbf{0}$ (*véase* la Figura 11.2). La curva sí es suave en todos los demás puntos donde $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$.

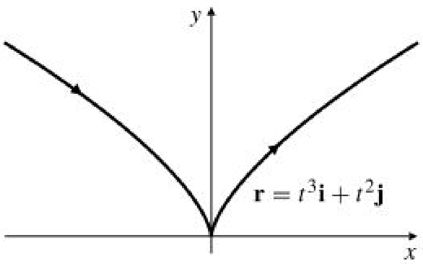

Figura 11.2 Las componentes de $\mathbf{r}(t)$ son funciones suaves de t, pero la curva no es suave en el origen, donde $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Las reglas de la suma y la multiplicación por escalares de vectores implican que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \right) \\
&= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Por tanto, la función vectorial $\mathbf{r}$ es diferenciable en t si y sólo si sus tres componentes escalares, x, y y z, son diferenciables en t. En general, las funciones vectoriales se pueden diferenciar (o integrar) diferenciando (integrando) sus funciones componentes, suponiendo que los vectores de la base con respecto a los que se expresan dichas componentes son fijos en el espacio y no cambian con el tiempo.

Continuando con nuestro análisis de la partícula móvil, se define la **aceleración** de dicha partícula como la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad:

$$\text{aceleración:} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que esta aceleración es proporcional a la fuerza $\mathbf{F}$ que produce el movimiento y *en su misma dirección*: si la masa de la partícula es m, entonces dicha ley se expresa mediante la *ecuación vectorial* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Ejemplo 2 Describa la curva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Calcule los vectores velocidad y aceleración de esta curva en (1, 1, 1).

Solución Como las ecuaciones paramétricas escalares de la curva son

$$x = t, \qquad y = t^2 \qquad \text{y} \qquad z = t^3$$

que cumplen $y = x^2$ y $z = x^3$, la curva es la intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En cualquier instante t los vectores velocidad y aceleración se expresan como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

El punto (1, 1, 1) de la curva corresponde a $t = 1$, por lo que la velocidad y la aceleración en ese punto son $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, respectivamente.

Ejemplo 3 Calcule el vector velocidad, la velocidad y la aceleración, y describa el movimiento de una partícula cuya posición en el instante t es

$$\mathbf{r} = 3\cos\omega t\mathbf{i} + 4\cos\omega t\mathbf{j} + 5\operatorname{sen}\omega t\mathbf{k}$$

Solución El vector velocidad, la velocidad y la aceleración se pueden calcular inmediatamente:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\omega\operatorname{sen}\omega t\mathbf{i} - 4\omega\operatorname{sen}\omega t\mathbf{j} + 5\omega\cos\omega t\mathbf{k}$$

$$v = |\mathbf{v}| = 5\omega$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3\omega^2\cos\omega t\mathbf{i} - 4\omega^2\cos\omega\mathbf{j} - 5\omega^2\operatorname{sen}\omega t\mathbf{k} = -\omega^2\mathbf{r}$$

Obsérvese que $|\mathbf{r}| = 5$. Por tanto, la curva que describe la partícula está en una esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Como $x = 3\cos\omega t$ e $y = 4\cos\omega t$, dicha curva también está en el plano vertical $4x = 3y$. Es decir, la partícula se mueve siguiendo una circunferencia de radio 5 centrada en el origen y que está en el plano $4x = 3y$. Obsérvese también que $\mathbf{r}$ es periódico, con periodo $2\pi/\omega$. Por consiguiente, la partícula tarda un tiempo $2\pi/\omega$ en realizar una revolución sobre dicha circunferencia. La aceleración está siempre en la dirección de $-\mathbf{r}$, es decir, hacia el origen. Para describir esa aceleración «que busca el centro» se utiliza la expresión **aceleración centrípeta**.

Ejemplo 4 **(El problema del proyectil)** Describa el camino que sigue una partícula que experimenta una aceleración constante hacia abajo, $-g\mathbf{k}$, debida a la gravedad. Suponga que en el instante $t = 0$ la posición de la partícula es $\mathbf{r}_0$ y su velocidad es $\mathbf{v}_0$.

Solución Si la posición de la partícula en el instante t es $\mathbf{r}(t)$, entonces su aceleración es $d^2\mathbf{r}/dt^2$. La posición de la partícula se puede obtener resolviendo el *problema de valor inicial*

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k}, \qquad \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

Se integra la ecuación diferencial dos veces. Esta integración introduce un vector constante de integración que se puede determinar a partir de los datos proporcionados, evaluando en $t = 0$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = -\frac{gt^2}{2}\mathbf{k} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Esta última ecuación representa una parábola en el plano vertical que pasa por el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$ y contiene al vector $\mathbf{v}_0$ (*véase* la Figura 11.3). Las ecuaciones paramétricas escalares de la parábola son

$$x = u_0 t + x_0$$
$$y = v_0 t + y_0$$
$$z = -\frac{gt^2}{2} + w_0 t + z_0$$

siendo $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_0 = u_0\mathbf{i} + v_0\mathbf{j} + w_0\mathbf{k}$.

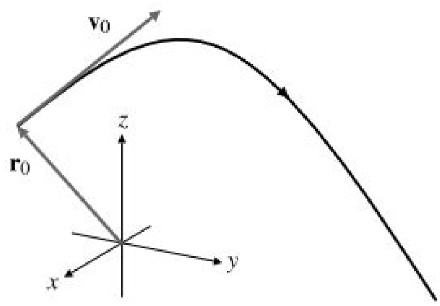

Figura 11.3 La curva que sigue un proyectil disparado desde la posición $\mathbf{r}_0$ con velocidad $\mathbf{v}_0$.

Ejemplo 5 Un objeto se mueve a la derecha siguiendo la curva plana $y = x^2$, con velocidad constante $v = 5$. Calcule el vector velocidad y la aceleración de dicho objeto cuando está en el punto $(1, 1)$.

Solución La posición del objeto en el instante t es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$$

siendo x la coordenada x de la posición del objeto en función de t. El vector velocidad, la velocidad y la aceleración en el instante t se expresan como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + 2x\frac{dx}{dt}\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}(\mathbf{i} + 2x\mathbf{j})$$

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1 + (2x)^2} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + 4x^2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}(\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}) + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\mathbf{j}$$

En el cálculo de la velocidad se ha utilizado $|dx/dt| = dx/dt$, ya que el objeto se mueve hacia la derecha. Tenemos el dato de que la velocidad es constante: $v = 5$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Cuando $x = 1$, tenemos que $dx/dt = 5/\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, por lo que la velocidad del objeto en ese punto es $\mathbf{v} = \sqrt{5}\mathbf{i} + 2\sqrt{5}\mathbf{j}$. Ahora podemos calcular

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}} = \left(\frac{d}{dx}\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{5}{2(1 + 4x^2)^{3/2}}(8x)\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}} = -\frac{100x}{(1 + 4x^2)^2}$$

En $x=1$, tenemos que $d^2x/dt^2 = -4$. Así, la aceleración en ese punto es $\mathbf{a} = -4(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) + 10\mathbf{j} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Observación Nótese que en el ejemplo anterior hemos usado x como parámetro de la curva, por lo que podríamos haber utilizado t para el tiempo. Si se desea analizar el movimiento por una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, siendo t un parámetro, no necesariamente tiempo, entonces habrá que utilizar un símbolo diferente, por ejemplo τ (letra griega «tau»), para indicar el tiempo. En ese caso, la *velocidad* y la *aceleración* físicas de una partícula que se mueve por la curva son

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Hay que tener cuidado con la forma de interpretar t en problemas donde el tiempo sea relevante.

Diferenciación de combinaciones de vectores

Los vectores y los escalares se pueden combinar de varias formas para formar otros vectores o escalares. Los vectores se pueden sumar y multiplicar por escalares, y también pueden ser factores en productos escalares y vectoriales. Se pueden aplicar las reglas de diferenciación apropiadas a todas esas combinaciones de funciones vectoriales y escalares; se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 1 **Reglas de diferenciación de funciones vectoriales**

Sean $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ funciones vectoriales diferenciables, y sea $\lambda(t)$ una función escalar diferenciable. Entonces $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{u}(\lambda(t))$ son diferenciables, y

(a) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

(b) $$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(\mathrm{t})) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

(c) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}'(t)$$

(d) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

(e) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

Además, en todo punto donde $\mathbf{u}(t) \neq 0$,

(f) $$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$$

Observación Las fórmulas (b), (c) y (d) son versiones de la Regla del Producto. La fórmula (e) es una versión de la Regla de la Cadena. La fórmula (f) es también un caso de la Regla de la Cadena aplicada a $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$. Todas ellas tienen la forma obvia. Nótese que el orden de los factores es el mismo en los términos de los dos miembros de la fórmula del producto vectorial (d). Es esencial conservar el orden ya que, a diferencia del producto escalar o del producto de un vector por un escalar, el producto vectorial *no es conmutativo*.

Observación La fórmula de la derivada de un producto vectorial es un caso especial del de la derivada de un determinante 3×3 (*véase* la Sección 10.3). Como todos los términos del desarrollo de un determinante de cualquier orden son un producto en el que interviene un elemento de cada fila (o columna), la Regla del Producto general implica que la derivada de un determinante $n \times n$ cuyos elementos sean funciones será una suma de n determinantes $n \times n$, y en cada uno de ellos los elementos de una de las filas (o columnas) estarán diferenciados. Para el caso 3×3 tenemos que

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6 Demuestre que la velocidad de una partícula móvil permanece constante durante un intervalo de tiempo si y sólo si la aceleración es perpendicular al vector velocidad durante dicho intervalo.

Solución Como $(v(t))^2 = \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{v}(t)$, tenemos que

$$2v(t)\,\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,(v(t))^2 = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{v}(t) \bullet v(t))$$

$$= \mathbf{a}(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{a}(t) = 2\mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{a}(t)$$

Si suponemos que $v(t) \neq 0$, se deduce que $dv/dt = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = 0$. La velocidad es constante si y sólo si el vector velocidad es perpendicular a la aceleración.

Ejemplo 7 Si $\mathbf{u}$ es tres veces diferenciable, calcule y simplifique la derivada del producto triple

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$$

Solución Utilizando varias versiones de la Regla del Producto, se calcula

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$$

$$= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right)$$

$$= 0 + 0 + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right) = \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right)$$

El primer término se anula porque $d\mathbf{u}/dt$ es perpendicular a su producto vectorial con otro vector; el segundo término se anula porque es el producto vectorial de vectores idénticos.

Ejercicios 11.1

En los Ejercicios 1-14, calcule el vector velocidad, la velocidad y la aceleración en el instante t de la partícula cuya posición es $\mathbf{r}(t)$. Describa la curva que sigue la partícula.

1. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$

2. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

6. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r} = a\cos \omega t\mathbf{i} + b\mathbf{j} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + 5\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r} = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r} = at\cos \omega t\mathbf{i} + at\,\mathrm{sen}\,\omega t\mathbf{j} + b\ln t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r} = e^{-1}\cos(e^t)\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^2 t\mathbf{j} + a\cos t\mathbf{k}$

15. Una partícula se mueve por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ a velocidad constante, realizando una revolución en 2 s. Calcule su aceleración cuando está en el punto (3, 4).

16. Una partícula se mueve hacia la derecha por la curva $y = 3/x$. Si su velocidad es 10 cuando pasa por el punto $(2, \frac{3}{2})$, ¿cuál es su velocidad en ese instante?

17. Un punto P se mueve por la curva de intersección del cilindro $z = x^2$ y el plano $x + y = 2$ en la dirección de valores de y crecientes, con velocidad constante $v = 3$. Calcule la velocidad de P cuando está en el punto (1, 1, 1).

18. Un objeto se mueve por la curva $y = x^2$, $z = x^3$ con velocidad vertical constante $dz/dt = 3$. Calcule el vector velocidad y la aceleración del objeto cuando está en el punto (2, 4, 8).

19. Una partícula se mueve por la curva $\mathbf{r} = 3u\mathbf{i} + 3u^2\mathbf{j} + 2u^3\mathbf{k}$ en la dirección correspondiente a valores de u crecientes, con una velocidad constante de 6. Calcule el vector velocidad y la aceleración de la partícula cuando está en el punto (3, 3, 2).

20. Una partícula se mueve por la curva intersección de los cilindros $y = -x^2$ y $z = x^2$ en la dirección en la que x crece (todas las distancias están en centímetros). En el instante en el que la partícula está en el punto $(1, -1, 1)$, su velocidad es de 9 cm/s, y está creciendo a razón de 3 cm/s^2. Calcule el vector velocidad y la aceleración de la partícula en ese instante.

21. Demuestre que si el producto escalar de la velocidad y la aceleración de una partícula móvil es positivo (negativo), entonces la velocidad de la partícula es creciente (o decreciente).

22. Verifique la fórmula de la derivada del producto escalar dada en el Teorema 1(c).

23. Verifique la fórmula de la derivada de un determinante 3×3, que se presenta en la segunda observación que sigue al Teorema 1. Utilice esta fórmula para verificar la fórmula de la derivada del producto vectorial del Teorema 1.

24. Si los vectores de posición y de velocidad de una partícula móvil son siempre perpendiculares, demuestre que la curva que sigue la partícula está en una esfera.

25. Generalice el Ejercicio 24 al caso en el que el vector velocidad de la partícula es siempre perpendicular a la recta que une la partícula con un punto fijo P_0.

26. ¿Qué se puede decir sobre el movimiento de una partícula en un determinado instante cuando sus vectores de posición y de velocidad cumplen $\mathbf{r} \bullet \mathbf{v} > 0$? ¿Qué se puede decir cuando $\mathbf{r} \bullet \mathbf{v} < 0$?

En los Ejercicios 27-32, suponga que las funciones vectoriales que aparecen tienen derivadas continuas de todos los órdenes necesarios.

27. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times \dfrac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}$.

28. Exprese la Regla del Producto para $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))$.

29. Exprese la Regla del Producto para $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))$.

30. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \times \left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$.

31. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}((\mathbf{u} + \mathbf{u}'') \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{u}'))$.

32. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}((\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \bullet (\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''))$.

33. Si en todos los instantes t los vectores de posición y velocidad de una partícula móvil cumplen $\mathbf{v}(t) = 2\mathbf{r}(t)$, y si $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, calcule $\mathbf{r}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$. ¿Cuál es la curva del movimiento?

◆34. Verifique que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\cos(\omega t) + (\mathbf{v}_0/\omega)\mathrm{sen}(\omega t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

Es la única solución. Describa la curva $\mathbf{r}(t)$. ¿Cuál es la curva si $\mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{v}_0$?

◆**35. (Caída libre con resistencia del aire)** La posición de un proyectil que cae bajo la acción de la gravedad y es frenado por la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, cumple

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} - c\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

siendo c una constante positiva. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y $d\mathbf{r}/dt = v_0$ en el instante $t = 0$, calcule $\mathbf{r}(t)$ (*Sugerencia*: Sea $\mathbf{w} = e^{ct}(d\mathbf{r}/dt)$. Demuestre que la solución tiende a la del problema del proyectil presentado en esta sección cuando $c \to 0$.

11.2 Algunas aplicaciones de la diferenciación vectorial

En muchos problemas interesantes de mecánica interviene la diferenciación de funciones vectoriales. En esta sección se realiza una breve presentación de algunos de ellos.

Movimiento de una masa variable

El **momento p** de un objeto en movimiento es el producto de su masa m (un escalar) y su velocidad (un vector) $\mathbf{v}$: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que la velocidad de cambio del *momento* es igual a la fuerza externa que actúa sobre el objeto:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Sólo en el caso de que la masa del objeto permanezca constante esta ley se reduce a su forma más familiar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Cuando la masa cambia debe considerarse el momento en vez de la aceleración.

Ejemplo 1 **(Cambio en la velocidad de un cohete)** Un cohete acelera quemando el combustible que transporta. Si los gases de la combustión se expulsan del cohete con una velocidad constante $\mathbf{v}_e$ *relativa al cohete*, y si el cohete expulsa p% de su masa inicial mientras sus motores están funcionando, ¿cuánto cambiará la velocidad del cohete? Suponga que el cohete está en el espacio profundo, de forma que se puede despreciar la fuerza gravitatoria y cualquier otra fuerza externa que pudiera actuar sobre él.

Solución Como no actúan fuerzas externas sobre el cohete (es decir, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$), la ley de Newton implica que el momento total del cohete y de los gases que expulsa permanecerá constante. En el instante t, la masa del cohete es $m(t)$ y su velocidad es $\mathbf{v}(t)$. En el instante $t + \Delta t$ la masa del cohete es $m + \Delta m$ (siendo $\Delta m < 0$), su velocidad es $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, y la masa $-\Delta m$ de los gases expulsados ha escapado con velocidad $\mathbf{v} + \mathbf{v}_e$ (relativa a un sistema de coordenadas fijo en el espacio). Igualando los momentos totales en t y en $t + \Delta t$ se obtiene

$$(m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta m)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_e) = m\mathbf{v}$$

Simplificando esta ecuación y dividiendo por Δt resulta

$$(m + \Delta m)\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\mathbf{v}_e$$

y, tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$,

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

Supongamos que el motor se enciende desde $t = 0$ hasta $t = T$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la variación de la velocidad del cohete será

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}(0) &= \int_0^T \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt = \left(\int_0^T \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\,dt\right)\mathbf{v}_e \\ &= (\ln m(T) - \ln m(0))\mathbf{v}_e = -\ln\left(\frac{m(0)}{m(T)}\right)\mathbf{v}_e\end{aligned}$$

Como $m(0) > m(T)$, tenemos que $\ln(m(0)/m(T)) > 0$ y, tal como se esperaba, la variación de la velocidad del cohete se producirá en la dirección opuesta a la velocidad de expulsión $\mathbf{v}_e$. Si p% de la masa del cohete se expulsa durante la ignición, entonces su velocidad cambiará en la cantidad $-\mathbf{v}_e \ln(100/(100-p))$.

Observación Es interesante advertir que este modelo no impone restricciones en la magnitud que puede alcanzar la velocidad del cohete, suponiendo que un porcentaje suficientemente grande de su masa inicial es de combustible. *Véase* el Ejercicio 1 al final de la sección.

Movimiento circular

La velocidad angular Ω de un cuerpo en rotación es su velocidad de rotación medida en radianes por unidad de tiempo. Por ejemplo, la lámpara de un faro que gira con una velocidad de 3 revoluciones por minuto tiene una velocidad angular de $\Omega = 6\pi$ radianes por minuto. Es útil representar la velocidad de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje en función de un vector **velocidad angular** en vez de representarla simplemente respecto a la velocidad angular escalar. El vector velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ tiene un módulo igual a la velocidad angular Ω y su dirección coincide con el eje de rotación, de forma que si el pulgar extendido apunta en la dirección de $\mathbf{\Omega}$, entonces los demás dedos rodean al eje en la dirección de la rotación.

Si el origen del sistema de coordenadas está en el eje de rotación, y si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el vector de posición en el instante t de un punto P del cuerpo en rotación, entonces dicho punto se mueve siguiendo una circunferencia de radio $D = |\mathbf{r}(t)| \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo (constante) entre $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{r}(t)$ (*véase* la Figura 11.4). Por tanto, P recorre una distancia $2\pi D$ en un tiempo $2\pi/\Omega$ y su velocidad lineal es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi/D}{2\pi/\Omega} = \Omega D = |\mathbf{\Omega}|\,|\mathbf{r}(t)| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)|$$

Como la dirección de $\mathbf{\Omega}$ se define de forma que $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)$ apunte en la dirección del movimiento de P, la velocidad lineal de P en el instante t se expresa como

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)}$$

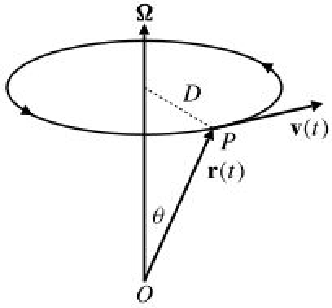

Figura 11.4 Rotación con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$.

Ejemplo 2 El vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de una partícula P en movimiento satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} \times \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \end{cases}$$

Calcule $\mathbf{r}(t)$ y describa el movimiento de P.

Solución Hay dos formas de resolver este problema. Lo haremos de ambas.

MÉTODO I. Teniendo en cuenta la presentación anterior, la ecuación diferencial dada es compatible con una rotación alrededor del eje x con un vector de velocidad angular $2\mathbf{i}$, de forma que la velocidad angular es 2, y el movimiento se produce en sentido contrario al de las agujas del reloj visto de lejos desde el eje x positivo. Por tanto, la partícula P se mueve siguiendo una circunferencia en un plano $x =$ constante y centrada en el eje x. Como P está en $(1, 3, 0)$ en el instante $t = 0$, el plano de movimiento es $x = 1$, y el radio de la circunferencia es 3. Por consiguiente, la ecuación paramétrica de la circunferencia es de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(\lambda t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}\,(\lambda t)\mathbf{k}$$

P recorre una vez la circunferencia (2π radianes) en un tiempo $t = 2\pi/\lambda$, por lo que la velocidad angular es λ. Por consiguiente, $\lambda = 2$ y el movimiento de la partícula se expresa como

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(2t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}(2t)\mathbf{k}$$

MÉTODO II. Se descompone la ecuación diferencial vectorial dada en sus componentes:

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = 2\mathbf{i} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -2z, \qquad \frac{dz}{dt} = 2y$$

La primera ecuación implica que $x =$ constante. Como $x(0) = 1$, tenemos que $x(t) = 1$ para todo t. Diferenciando la segunda ecuación con respecto a t y sustituyendo en la tercera ecuación, se llega a la ecuación del movimiento armónico simple en y:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\,\frac{dz}{dt} = -4y$$

Una solución general de esta ecuación es

$$y = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}\,(2t)$$

Entonces, $z = -\frac{1}{2}(dy/dt) = A\,\mathrm{sen}\,(2t) - B\cos(2t)$. Como $y(0) = 3$ y $z(0) = 0$, tenemos que $A = 3$ y $B = 0$. Por consiguiente, la partícula P se mueve en sentido contrario al de las agujas del reloj siguiendo el camino circular

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(2t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}\,(2t)\mathbf{k}$$

en el plano $x = 1$ con velocidad angular 2.

Observación La Segunda Ley de Newton establece que $\mathbf{F} = (d/dt)(m\mathbf{v}) = d\mathbf{p}/dt$, siendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ el momento (lineal) de una partícula de masa m que se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$. Esta ley se puede reformular de forma apropiada para describir el movimiento rotacional. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t, entonces, como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})) = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Las magnitudes $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ y $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ son, respectivamente, el **momento angular** de la partícula respecto al origen y el **torque** de $\mathbf{F}$ respecto al origen. Hemos demostrado que

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

El torque de las fuerzas externas es igual a la velocidad de cambio del momento angular de una partícula. Esta expresión es la análoga de $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para el caso de movimiento rotacional.

Sistemas en rotación y el efecto de Coriolis

El procedimiento de diferenciar una función vectorial diferenciando sus componentes sólo es válido si los actores de la base no dependen de las variables de diferenciación. Éste no es el caso en algunas situaciones en mecánica. Por ejemplo, al modelar fenómenos meteorológicos a gran escala, el análisis está afectado por el hecho de que un sistema de coordenadas fijo con respecto a la tierra es de hecho un sistema en rotación (con la tierra) con respecto a direcciones fijas en el espacio.

Para entender el efecto que tiene la rotación del sistema de coordenadas en la representación de la velocidad y de la aceleración, consideremos dos sistemas de coordenadas cartesianas (es decir, sistemas de ejes con los correspondientes vectores unitarios de la base), un sistema (fijo) cuya base es $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$, que no rota con la tierra, y un sistema en rotación cuya base es $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, unido a la tierra y, por lo tanto, en rotación con su misma velocidad angular, concretamente, $\pi/12$ radianes/hora. Supongamos que el origen del sistema de coordenadas fijo es el centro de la tierra, y que $\mathbf{K}$ apunta al norte. Entonces la velocidad angular de la tierra es $\mathbf{\Omega} = (\pi/12)\mathbf{K}$. El sistema fijo se mueve con la tierra en su órbita alrededor del Sol, pero no rota con la tierra y, como la rotación orbital de la tierra alrededor del Sol tiene una velocidad angular de 1/365 de la velocidad angular de rotación alrededor de su eje, podemos despreciar este efecto, mucho menor de la rotación de la tierra debido a su órbita alrededor del Sol.

Tomemos el origen del sistema de coordenadas que rota en la posición del observador en la superficie de la tierra, por ejemplo, en un punto P_0 cuyo vector de posición es $\mathbf{R}_0$ con respecto al sistema de coordenadas fijo[1]. Supongamos que P_0 tiene una colatitud de ϕ (ángulo entre $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{K}$), que cumple $0 < \phi < \pi$, de forma que P_0 no está en el polo norte ni en el polo sur. Supongamos que $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ apuntan, respectivamente, al este y al norte de P_0. Entonces, $\mathbf{k}$ debe apuntar directamente hacia arriba (*véase* la Figura 11.5).

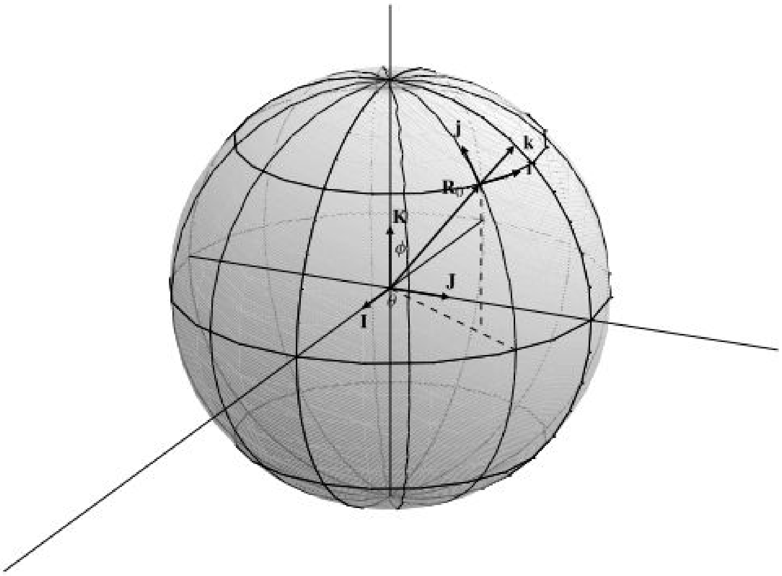

Figura 11.5 Los sistemas de coordenadas fijo y local.

Como los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}_0$ están rotando con la tierra (con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$), tenemos, como se ha demostrado anteriormente en esta sección,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_0$$

[1] El autor desea agradecer a su colega, el Profesor Lon Rosen, la sugerencia de este enfoque en el análisis de un sistema de coordenadas en rotación.

Toda función vectorial se puede expresar en función de cualquier base. Sean $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ la posición, velocidad y aceleración de un objeto en movimiento con respecto al sistema de coordenadas fijo, y $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ las mismas magnitudes con respecto al sistema de coordenadas en rotación. Entonces,

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = \frac{dX}{dt}\mathbf{I} + \frac{dY}{dt}\mathbf{J} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{K} \qquad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = \frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\mathbf{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\mathbf{K} \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

¿Qué relación guardan los valores de estos vectores en el sistema de coordenadas en rotación con los valores en el sistema de coordenadas fijo? Como el origen del sistema de coordenadas en rotación es $\mathbf{R}_0$, tenemos que (*véase* la Figura 11.6)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$$

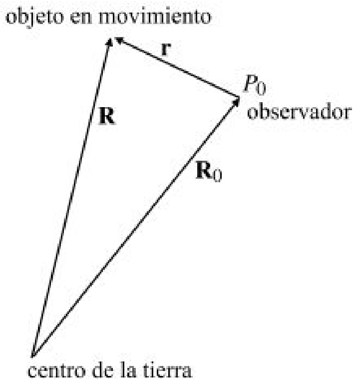

Figura 11.6 Vectores de posición respecto a los sistemas de coordenadas fijo y en rotación.

Cuando se diferencia con respecto al tiempo, hay que recordar que $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ dependen del tiempo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\\
&= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}_0 + x\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{i} + y\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{j} + z\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{k}\\
&= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\\
&= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\\
&= \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt}\\
&= \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{V})\\
&= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\end{aligned}$$

El término $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}$ se denomina **aceleración de Coriolis**, y el término $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})$ se denomina **aceleración centrípeta**.

Supongamos que nuestro objeto móvil tiene una masa m y que actúa sobre él una fuerza externa $\mathbf{F}$. Por la Segunda Ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} = m\mathbf{a} + 2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} + m\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$$

o, en otros términos,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} - \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$$

Para un observador situado en la superficie de la tierra, el objeto parece estar sujeto a $\mathbf{F}$ y a dos fuerzas adicionales, la **fuerza de Coriolis**, cuyo valor por unidad de masa es $-2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}$, y la **fuerza centrífuga**, cuyo valor por unidad de masa es $-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$. Las fuerzas centrífuga y de Coriolis no son fuerzas «reales» actuando sobre el objeto. Son fuerzas ficticias que compensan el hecho de que estamos midiendo la aceleración con respecto a un sistema que estamos considerando fijo, aunque en realidad está en rotación y, por tanto, tiene aceleración.

Obsérvese que la fuerza centrífuga apunta directamente hacia el exterior del eje polar de la tierra. Representa el efecto correspondiente a que el objeto móvil desea continuar moviéndose en línea recta y «despegar» de la tierra, en vez de continuar su rotación con el observador. Esta fuerza tiene su máximo en el ecuador (donde $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{R}$), pero su magnitud es muy pequeña: $|\mathbf{\Omega}|^2|\mathbf{R}_0| \approx 0.003g$.

La fuerza de Coriolis es de una naturaleza muy diferente a la fuerza centrífuga. En particular, es cero si el observador percibe que el objeto está en reposo. Es perpendicular a la velocidad del objeto y al eje polar de la tierra, y su magnitud puede alcanzar un valor de $2|\mathbf{\Omega}|\,|\mathbf{v}|$ y, en particular, puede ser mayor que la de la fuerza centrífuga si $|\mathbf{v}|$ es suficientemente grande.

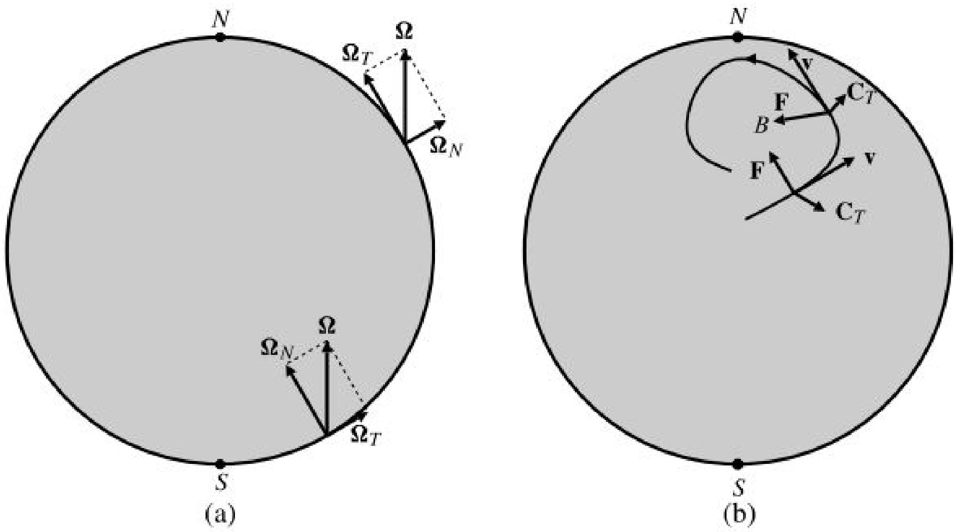

Figura 11.7
(a) Componentes tangencial y normal de la velocidad angular de la tierra en los hemisferios norte y sur.
(b) En el hemisferio norte, la fuerza tangencial de Coriolis modifica la dirección de los vientos hacia la derecha cuando se dirigen hacia el área de bajas presiones B, por lo que los vientos se mueven en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del centro de B.

Ejemplo 3 **(Vientos que giran alrededor del ojo de una tormenta)** La circulación de los vientos alrededor del centro de una tormenta es un ejemplo del efecto de Coriolis. El ojo de una tormenta es un área de bajas presiones que absorbe aire hacia ella. La dirección de rotación de la tierra es tal que la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ apunta al norte y es paralela a su eje de rotación. En cualquier punto P de la superficie de la tierra, podemos expresar $\mathbf{\Omega}$ como una suma de una componente tangencial (a la superficie de la tierra) y una componente normal (*véase* la Figura 11.7(a)),

$$\mathbf{\Omega}(P) = \mathbf{\Omega}_T(P) + \mathbf{\Omega}_N(P)$$

Si P está en el hemisferio norte, $\mathbf{\Omega}_N(P)$ apunta hacia arriba (en sentido contrario al centro de la tierra). En ese punto la «fuerza» de Coriolis $\mathbf{C} = -2\mathbf{\Omega}(P)\times\mathbf{v}$ que actúa sobre una partícula de aire moviéndose con la velocidad horizontal $\mathbf{v}$ tiene componentes horizontal y normal

$$\mathbf{C} = -2\mathbf{\Omega}_T\times\mathbf{v} - 2\mathbf{\Omega}_N\times\mathbf{v} = \mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T$$

El efecto de la componente normal de la fuerza de Coriolis se puede despreciar, ya que el aire no es libre de viajar grandes distancias en sentido vertical. Sin embargo, la componente tangencial de la fuerza de Coriolis, $\mathbf{C}_T = -2\mathbf{\Omega}_N \times \mathbf{v}$, está orientada a 90° a la derecha de $\mathbf{v}$ (en el sentido de las agujas del reloj respecto a $\mathbf{v}$). Por tanto, las partículas de aire que están siendo absorbidas hacia el ojo de la tormenta experimentan una desviación de Coriolis hacia la derecha y realmente recorren una espiral hacia el ojo en sentido contrario al de las agujas del reloj. En el hemisferio sur, donde la componente normal $\mathbf{\Omega}_N$ está dirigida hacia el centro de la tierra, ocurre lo contrario. La fuerza de succión $\mathbf{F}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la componente tangencial a la superficie de la tierra de la fuerza de Coriolis, $\mathbf{C}_T$, de una partícula de aire en dos posiciones de su camino alrededor de un área de bajas presiones en el hemisferio norte se muestran en la Figura 11.7(b). ■

Observación Los fuertes vientos que se mueven en espiral hacia dentro alrededor de un área de bajas presiones se denominan **ciclones**. Los fuertes vientos que se mueven en espiral hacia fuera alrededor de un área de altas presiones se denominan **anticiclones**. Estos últimos se mueven en espiral en sentido contrario al de las agujas del reloj en el hemisferio sur y en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio norte. El efecto de Coriolis es también la causa de la alta velocidad del flujo hacia el este de las corrientes en chorro de las capas altas de la atmósfera en latitudes medias en ambos hemisferios, cuya energía es suministrada por la subida de aire tropical caliente y su posterior movimiento hacia los polos.

Las relaciones entre los vectores de la base en los sistemas de coordenadas fijo y móvil se pueden utilizar para analizar muchos fenómenos. Recuérdese que $\mathbf{R}_0$ forma un ángulo ϕ con $\mathbf{K}$. Supongamos que la proyección de $\mathbf{R}_0$ en el plano ecuatorial (que contiene a $\mathbf{I}$ y a $\mathbf{J}$) forma un ángulo θ con $\mathbf{I}$ como se muestra en la Figura 11.5. Una observación cuidadosa de dicha figura debería convencernos de que

$$\mathbf{i} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{I} + \cos\theta\mathbf{J}$$

$$\mathbf{j} = -\cos\phi\cos\theta\mathbf{I} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{J} + \operatorname{sen}\phi\mathbf{K}$$

$$\mathbf{k} = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\mathbf{I} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{J} + \cos\phi\mathbf{K}$$

De forma similar, o despejando $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ y $\mathbf{K}$ de las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{I} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} - \cos\phi\cos\theta\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = \cos\theta\mathbf{i} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{K} = \operatorname{sen}\phi\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$

Nótese que cuando la tierra rota alrededor de su eje, ϕ permanece constante, pero θ se incrementa a razón de $(\pi/12)$ radianes/hora.

Ejemplo 4 Suponga que la dirección al sol está en el plano de $\mathbf{I}$ y $\mathbf{K}$, y que forma un ángulo σ con $\mathbf{I}$. Por tanto, el sol está en la dirección del vector

$$\mathbf{S} = \cos\sigma\mathbf{I} + \operatorname{sen}\sigma\mathbf{K}$$

$\sigma = 0$ en los equinoccios de marzo y septiembre, y $\sigma \approx 23.5°$ y $-23.5°$ en los solsticios de junio y diciembre. Calcule la longitud del día (el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del sol) para un observador situado en una colatitud de ϕ.

Solución El sol será visible para el observador si el ángulo entre $\mathbf{S}$ y $\mathbf{K}$ no es superior a $\pi/2$, es decir, si $\mathbf{S} \cdot \mathbf{k} \geqslant 0$. Por tanto, el tiempo que dura el día corresponde a

$$\cos\sigma\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\phi \geqslant 0$$

o, en otros términos, $\cos\theta \geqslant -\dfrac{\tan\sigma}{\tan\phi}$. La salida y la puesta del sol se producen cuando se alcanza la igualdad. Concretamente, cuando

$$\theta = \theta_0 = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{\tan\sigma}{\tan\phi}\right)$$

si tal valor existe (existirá si $\phi \geqslant \sigma \geqslant 0$ o si $\pi - \phi \geqslant -\sigma \geqslant 0$). En este caso, el tiempo que dura el día para el observador es

$$\frac{2\theta_0}{2\pi} \times 24 = \frac{24}{\pi}\cos^{-1}\left(-\frac{\tan\sigma}{\tan\phi}\right) \text{ horas}$$

Por ejemplo, el 21 de junio en el círculo polar ártico (donde $\phi = \sigma$) el día tendrá una duración de $(24/\pi)\cos^{-1}(-1) = 24$ horas.

Ejercicios 11.2

1. ¿Qué fracción de su masa total inicial deberá quemar como combustible el cohete considerado en el Ejemplo 1 para acelerar en línea recta desde el reposo hasta la velocidad de expulsión de sus propios gases? ¿Y hasta el doble de esa velocidad?

*__2.__ Cuando actúa con su máxima potencia, el motor de un vehículo autopropulsado puede acelerar dicho vehículo (cuya masa es de M kg) en una pista horizontal a razón de a m/s^2. El tanque de combustible está lleno en el instante cero, pero su contenido se pierde por un agujero en su fondo con una velocidad de k kg/s desde el instante inicial. Si el coche está en reposo en el instante cero y se aplica toda la potencia a partir de ese instante, ¿con qué velocidad se estará moviendo en un instante t antes de que el tanque se vacíe?

◆**3.** Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}\times\mathbf{k}$$

Describa la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

◆**4.** Un objeto se mueve de forma que su vector de posición $\mathbf{r}(t)$ satisface

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}\times(\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$$

y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{r}_0$ son vectores constantes dados, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Describa la curva que sigue el objeto en su movimiento.

El efecto Coriolis

*__5.__ Un satélite describe una órbita baja, circular y polar alrededor de la tierra (es decir, pasa sobre los polos norte y sur). Realiza una revolución cada dos horas. Un observador situado sobre la tierra en el ecuador ve pasar al satélite directamente por encima de él. ¿En qué dirección le parece al observador que se mueve? Desde el punto de vista del observador, ¿cuál es el valor aproximado de la fuerza de Coriolis que actúa sobre el satélite?

*__6.__ Repita el Ejercicio 5 para un observador situado a una latitud de 45° en el hemisferio norte.

*__7.__ Describa las componentes tangencial y normal de la fuerza de Coriolis que actúa sobre una partícula que se mueve con velocidad horizontal $\mathbf{v}$ en (a) el polo norte, (b) el polo sur, (c) el ecuador. En general, ¿cuál es el efecto de la componente normal de la fuerza de Coriolis en las proximidades del ojo de una tormenta?

*__8.__ **(Localización de la salida y puesta del sol)** Amplíe el argumento del Ejemplo 4 para determinar dónde saldrá y se pondrá el sol en el horizonte de un observador situado en P_0. Concretamente, si μ es el ángulo que forman $\mathbf{j}$ y $\mathbf{S}$ (la dirección al sol) en la salida o en la puesta del sol, demuestre que

$$\cos\mu = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\phi}$$

Por ejemplo, si $\sigma = 0$ (los equinoccios), entonces $\mu = \pi/2$ en todas las colatitudes ϕ: el sol se levanta exactamente por el este y se pone exactamente por el oeste en esos días.

9. Vancouver, Canadá, está a una latitud de 49.2° N, por lo que su colatitud es de 40.8°. ¿Cuánto tiempo estará el sol visible en Vancouver el 21 de junio? O, de otra manera, ¿cuánto tiempo sería visible si no estuviera lloviendo y no hubiera montañas alrededor? ¿A qué ángulos respecto al norte sale y se pone el sol?

10. Repita el Ejercicio 9 para Umeå, Suecia (latitud 63.5° N).