



## CAPÍTULO 8

# Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares

Todo el mundo sabe lo que es una curva, hasta que estudia suficientes matemáticas y queda confundido por el gran número de posibles excepciones... Una curva es la totalidad de puntos cuyas coordenadas son funciones de un parámetro que se puede diferenciar tantas veces como se requiera.

**Felix Klein (1849-1925)**

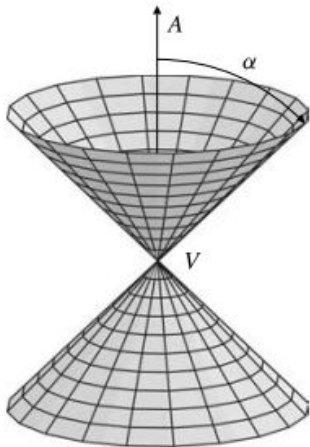
**Introducción** Hasta el momento, la mayor parte de las curvas que hemos encontrado han sido gráficas de funciones, y nos han proporcionado información visual de utilidad sobre el comportamiento de dichas funciones. En este capítulo vamos a considerar las curvas planas como objetos de interés por su propio derecho. Primero, examinaremos las secciones cónicas, que son curvas con ecuaciones cuadráticas que se obtienen como intersección de un plano con un cono circular recto. Seguidamente, consideraremos curvas descritas por dos ecuaciones paramétricas que proporcionan las coordenadas de sus puntos como funciones de un parámetro. Si este parámetro es el tiempo, entonces las curvas describen el movimiento de un punto en el plano. Finalmente, consideraremos curvas descritas por ecuaciones en un nuevo sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas polares, en el que cada punto se localiza mediante su distancia y su dirección desde el origen. En el Capítulo 11 ampliaremos nuestro estudio a las curvas en tres dimensiones.

## 8.1 Cónicas

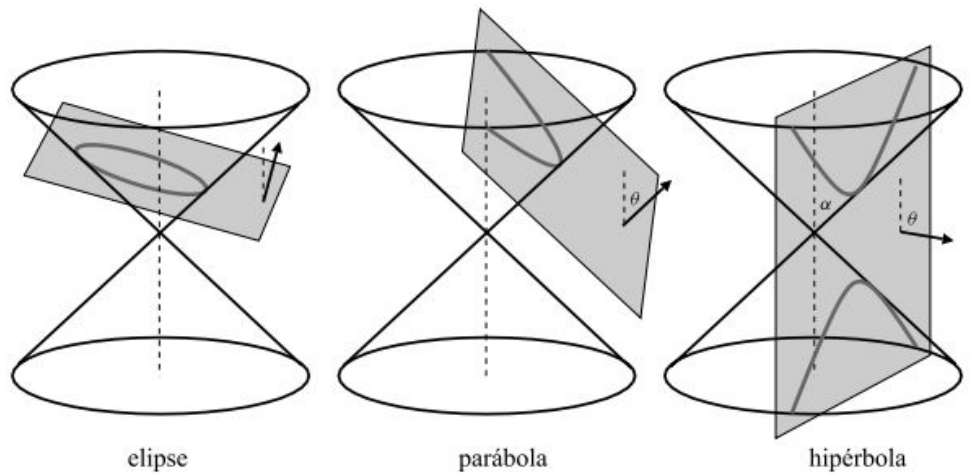
Los círculos, las elipses, las parábolas y las hipérbolas se denominan **secciones cónicas** (o, más sencillamente, **cónicas**) porque son curvas resultantes de la intersección de planos con conos circulares rectos.

Para concretar, supongamos una recta  $A$  fija en el espacio, y sea  $V$  un punto fijo de  $A$ . El **cono circular recto** de **eje**  $A$ , **vértice**  $V$  y **semiángulo vertical**  $\alpha$  es la superficie formada por todos los puntos de las rectas que pasan por  $V$  y que forman un ángulo  $\alpha$  con la recta  $A$  (véase la Figura 8.1). El cono tiene dos mitades en lados opuestos de vértice  $V$ . Todo plano  $P$  que no pase por  $V$  cortará al cono (a una de sus mitades o a las dos), formando una curva  $c$  (véase la Figura 8.2). Si una recta normal (es decir, perpendicular) a  $P$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $A$  del cono, siendo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , entonces

$c$ es una circunferencia si	$\theta = 0$
$c$ es una elipse si	$0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha$
$c$ es una parábola si	$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
$c$ es una hipérbola si	$\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}$



**Figura 8.1** Un cono de vértice  $V$ , eje  $A$  y semiángulo vertical  $\alpha$ .



**Figura 8.2** Planos que cortan a un cono formando una elipse, una parábola y una hipérbola.

En las Secciones 10.4 y 10.5 se demuestra que los planos se representan mediante ecuaciones de primer grado y los conos mediante ecuaciones de segundo grado. Por tanto, todas las cónicas se pueden representar analíticamente (respecto a un sistema de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  en el plano de la cónica) mediante una ecuación de segundo grado cuya forma general es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siendo  $A, B, \dots, F$  constantes. Sin embargo, una ecuación como ésta puede representar también el conjunto vacío, un solo punto, o una o dos rectas si los factores del miembro izquierdo son factores lineales:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Después de las líneas rectas, las secciones cónicas son las curvas planas más simples. Poseen muchas propiedades que las hacen útiles en aplicaciones de matemáticas, y por ello las incluimos aquí. Una buena parte de este material es opcional desde el punto de vista de un curso de cálculo, pero el tener familiaridad con las propiedades de las cónicas puede ser muy importante en algunas aplicaciones. La mayoría de las propiedades de las cónicas fueron descubiertas por el geómetra griego Apolonio de Perga, sobre el año 200 a. C. Resulta notable que fuera capaz de obtener estas propiedades utilizando sólo las técnicas de la geometría euclídea clásica. Actualmente, estas propiedades se expresan de forma más conveniente utilizando geometría analítica y sistemas de coordenadas específicos.

## Parábolas

### DEFINICIÓN 1 Parábolas

Una **parábola** está formada por todos los puntos del plano equidistantes de un punto dado (denominado **foco** de la parábola) y de una recta (denominada **directriz** de la parábola). La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se denomina **eje principal** (o simplemente **eje**) de la parábola. El **vértice** de la parábola es el punto donde la parábola corta a su eje principal. Se encuentra en dicho eje a medio camino entre el foco y la directriz.

**Ejemplo 1** Calcule la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto  $F = (a, 0)$  y cuya directriz es la recta  $L$  de ecuación  $x = -a$ .

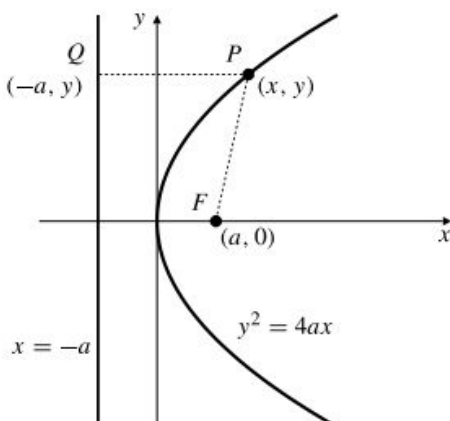
**Solución** El eje de la parábola está en el eje  $x$  y su vértice es el origen (véase la Figura 8.3). Si  $P = (x, y)$  representa a un punto de la parábola, entonces la distancia de  $P$  a  $F$  es igual a la distancia desde  $P$  al punto más cercano de  $Q$  en  $L$ . Por tanto,

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = x + a$$

o

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

o, tras simplificar,  $y^2 = 4ax$ .



**Figura 8.3**  $PF = PQ$ : propiedad de definición de la parábola.

De forma similar, se pueden obtener ecuaciones estándar de parábolas con vértices en el origen y focos en  $(-a, 0)$ ,  $(0, a)$  y  $(0, -a)$ :

**Tabla 1.** Ecuaciones estándar de parábolas

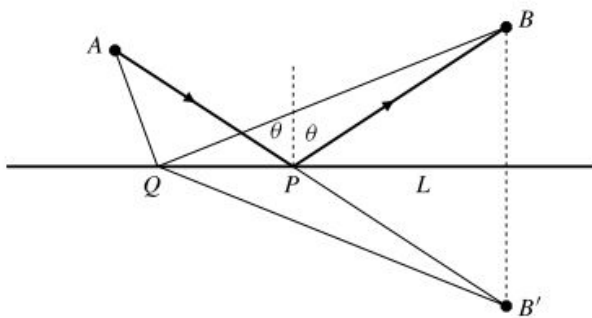
Foco	Directriz	Ecuación
$(a, 0)$	$x = -a$	$y^2 = 4ax$
$(-a, 0)$	$x = a$	$y^2 = -4ax$
$(0, a)$	$y = -a$	$x^2 = 4ay$
$(0, -a)$	$y = a$	$x^2 = -4ay$

### Propiedad focal de la parábola

Todas las secciones cónicas tienen propiedades focales interesantes y útiles, relacionadas con la forma en la que las superficies de revolución que las generan reflejan la luz si dichas superficies fueran espejos. Por ejemplo, una circunferencia reflejará claramente de vuelta y por el mismo camino cualquier rayo de luz emitida por una línea que pase por su centro. Las propiedades focales de las parábolas, elipses e hipérbolas se pueden obtener a partir de las propiedades de reflexión de una línea recta (es decir, un espejo plano) mediante argumentos geométricos elementales.

En medios con densidad óptica constante (es decir, medios donde la velocidad de la luz es constante) la luz viaja en línea recta. Esto es una consecuencia del Principio del Camino Mínimo, que dice que al viajar entre dos puntos, la luz toma el camino que requiere el mínimo tiempo de viaje. Dada una línea recta  $L$  en un plano y dos puntos  $A$  y  $B$  en el mismo plano y al mismo lado de  $L$ , el punto  $P$  de la recta  $L$  para el que la suma de las distancias  $AP + PB$  es mínima, cumple que  $AP$  y  $PB$  forman ángulos iguales con  $L$  o, de forma equivalente, con la normal a  $L$  en  $P$  (véase la Figura 8.4). Si  $B'$  es un punto tal que  $L$  corta al segmento  $BB'$  en dos mitades iguales, entonces  $P$  es la intersección de  $L$  y  $AB'$ . Como la longitud de todo lado de un triángulo debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados,

$$AP + PB = AP + PB' = AB' \leq AQ + QB' = AQ + QB$$



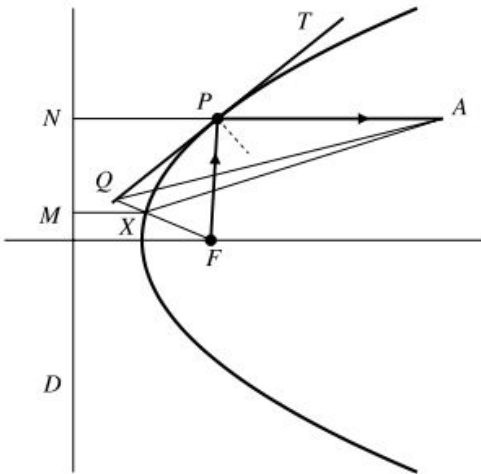
**Figura 8.4** Reflexión en una línea recta.

#### Reflexión en una línea recta

El punto  $P$  de la recta  $L$  en el que un rayo procedente de  $A$  se refleja pasando por  $B$  es el punto que minimiza la suma de las distancias  $AP + PB$ .

Consideremos ahora una parábola de foco  $F$  y directriz  $D$ . Sea  $P$  un punto de la parábola y sea  $T$  la recta tangente a la parábola en  $P$  (véase la Figura 8.5). Sea  $Q$  un punto cualquiera de la recta  $T$ . Entonces  $FQ$  cruza a la parábola en el punto  $X$  entre  $F$  y  $Q$ . Sean  $M$  y  $N$  dos puntos de  $D$  tales que  $MX$  y  $NP$  son perpendiculares a  $D$ , y sea  $A$  un punto de la recta que pasa por  $N$  y  $P$  que está al mismo lado de la parábola que  $F$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} FP + PA &= NP + PA = NA \leq MX + XA = FX + XA \\ &\leq FX + XQ + QA = FQ + QA \end{aligned}$$


**Figura 8.5** Reflexión en una parábola.

**!! ATENCIÓN !!**

Considere las ecuaciones e inecuaciones de esta cadena de una en una. ¿Por qué es cada una de ellas cierta?

Por tanto, entre todos los puntos  $Q$  de la recta  $T$ ,  $Q = P$  es el único que minimiza la suma de distancias  $FQ + QA$ . Por la observación hecha sobre las rectas anteriores,  $FP$  y  $PA$  forman ángulos iguales con  $T$  y, por tanto, también con la normal a la parábola en  $P$  (la parábola y la tangente tienen la misma normal en  $P$ ).

**Reflexión en una parábola**

Cualquier rayo que salga del foco será reflejado formando una paralela con el eje de la parábola. En otras palabras, cualquier rayo incidente paralelo al eje de la parábola se reflejará pasando por su foco.

## Elipses

**DEFINICIÓN 2 Elipses**

Una **elipse** está formada por todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.

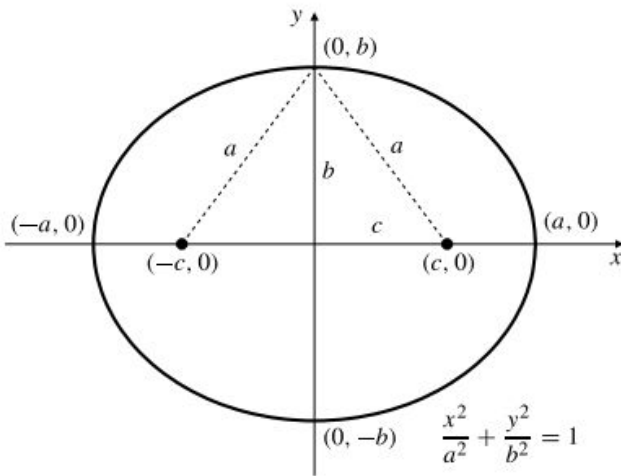
**Ejemplo 2** Obtenga la elipse cuyos focos están en los puntos  $(-c, 0)$  y  $(c, 0)$  si la suma de las distancias a los dos focos de cualquier punto  $P$  de la elipse es  $2a$ .

**Solución** La elipse pasa por los cuatro puntos  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$  y  $(0, -b)$ , siendo  $b^2 = a^2 - c^2$  (véase la Figura 8.6). Además, si  $P = (x, y)$  es un punto de la elipse, entonces

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Pasando un término del miembro izquierdo al derecho y elevando al cuadrado se obtiene

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$



**Figura 8.6** Una elipse.

Desarrollando ahora los cuadrados, simplificando términos, ordenando y elevando al cuadrado de nuevo:

$$\begin{aligned} a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx \\ a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Finalmente, se sustituye  $a^2 - c^2$  por  $b^2$  y se divide por  $a^2b^2$  para obtener la ecuación estándar de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Las siguientes cantidades describen a la elipse:

$$\begin{aligned} a &\text{ es el } \mathbf{\text{semieje mayor}} \\ b &\text{ es el } \mathbf{\text{semieje menor}} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} &\text{ es la } \mathbf{\text{semidistancia focal}} \end{aligned}$$

El punto que está en la mitad de los focos se denomina **centro** de la elipse. En el ejemplo anterior es el origen. Nótese que  $a > b$  en este ejemplo. Si  $a < b$ , entonces la elipse tiene sus focos en  $(0, c)$  y  $(0, -c)$ , siendo  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ . La recta que pasa por los focos (el **eje mayor**) y la recta que pasa por el centro perpendicular a la anterior (el **eje menor**) se denominan **ejes principales** de la elipse.

La **excentricidad** de una elipse es la razón entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Expresaremos la excentricidad como  $\varepsilon$ . En el caso de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  con  $a > b$ :

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Nótese que  $\varepsilon < 1$  para cualquier elipse; cuanto mayor es el valor de  $\varepsilon$ , más elongada (menos circular) es la elipse. Si  $\varepsilon = 0$ , de forma que  $a = b$  y  $c = 0$ , los dos focos coinciden y la elipse se convierte en una circunferencia.

## La propiedad focal de la elipse

Sea  $P$  un punto de una elipse cuyos focos son  $F_1$  y  $F_2$ . La normal a la elipse en  $P$  es la bisectriz del ángulo que forman las rectas  $F_1P$  y  $F_2P$ .

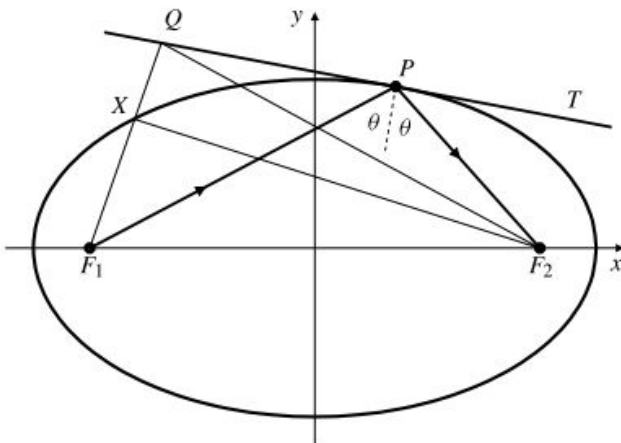
### Reflexión en una elipse

Cualquier rayo procedente de un foco de la elipse se reflejará hacia el otro foco.

Para ver que esto es así, obsérvese que si  $Q$  es un punto cualquiera de la recta  $T$  tangente a la elipse en el punto  $P$ , entonces  $F_1Q$  cruza a la elipse en un punto  $X$  entre  $F_1$  y  $Q$  (véase la Figura 8.7), de forma que

$$F_1P + PF_2 = F_1X + XF_2 \leq F_1X + XQ + QF_2 = F_1Q + QF_2$$

Entre todos los puntos de  $T$ ,  $P$  es el que minimiza la suma de las distancias a  $F_1$  y  $F_2$ . Esto implica que la normal a la elipse en  $P$  es la bisectriz del ángulo  $F_1PF_2$ .



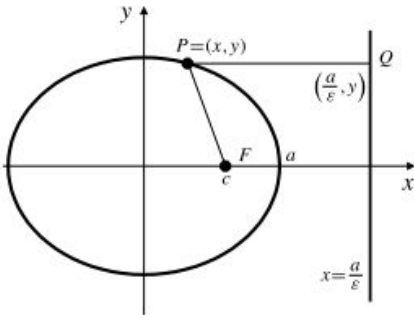
**Figura 8.7** Un rayo procedente de un foco de la elipse se refleja hacia el otro foco.

## Directrices de una elipse

Si  $a > b > 0$ , las dos rectas  $x = a/\epsilon$  y  $x = -a/\epsilon$  se denominan **directrices** de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Si  $P$  es un punto de la elipse, entonces la razón de la distancia desde  $P$  a un foco de la elipse y la correspondiente directriz es igual a la excentricidad  $\epsilon$ . Si  $P = (x, y)$ ,  $F$  es el foco  $(c, 0)$ ,  $Q$  es la correspondiente directriz  $x = a/\epsilon$  y  $PQ$  es perpendicular a la directriz, entonces (véase la Figura 8.8)

$$\begin{aligned} PF^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= x^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) - 2cx + a^2 - b^2 + b^2 \\ &= \epsilon^2 x^2 - 2\epsilon ax + a^2 \quad (\text{ya que } c = \epsilon a) \\ &= (a - \epsilon x)^2 \end{aligned}$$

Así,  $PF = a - \epsilon x$ . Además,  $QP = (a/\epsilon) - x = (a - \epsilon x)/\epsilon$ . Por tanto, se cumple  $PF/QP = \epsilon$ .



**Figura 8.8** Un foco y la correspondiente directriz de una elipse.

Una parábola puede considerarse como el caso límite de una elipse cuya excentricidad crece hasta 1. La distancia entre los focos es infinita, por lo que el centro, un foco y su correspondiente directriz se han desplazado hasta el infinito dejando únicamente en el plano finito un foco y su directriz.

### Hipérbolas

#### DEFINICIÓN 3 Hipérbolas

Una **hipérbola** está formada por todos los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.

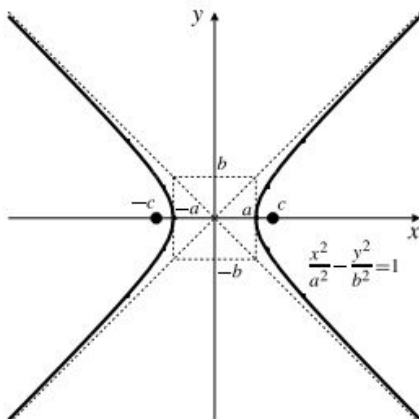
**Ejemplo 3** Si los focos de una hipérbola son  $F_1 = (c, 0)$  y  $F_2 = (-c, 0)$ , y la diferencia de las distancias de un punto  $P = (x, y)$  de la hipérbola a dichos focos es  $2a$  (siendo  $a < c$ ), entonces

$$PF_2 - PF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \begin{cases} 2a & \text{(rama derecha)} \\ -2a & \text{(rama izquierda)} \end{cases}$$

Véase la Figura 8.9. Simplificando esta ecuación elevando al cuadrado y ordenando términos, tal como se hizo en el caso de la elipse en el Ejemplo 2, se obtiene la ecuación estándar de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo  $b^2 = c^2 - a^2$ .



**Figura 8.9**



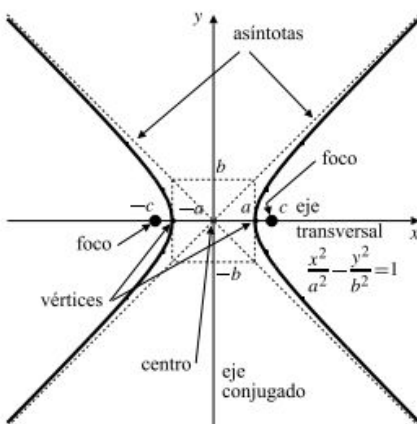
Los puntos  $(a, 0)$  y  $(-a, 0)$  (denominados **vértices**) pertenecen a la hipérbola, cada uno a una rama. Las dos ramas corresponden a las intersecciones del plano de la hipérbola con las dos partes del cono. Algunos parámetros que se utilizan para describir la hipérbola son

$$\begin{aligned} a & \text{ es el } \mathbf{\textit{semieje transversal}} \\ b & \text{ es el } \mathbf{\textit{semieje conjugado}} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{ es la } \mathbf{\textit{semidistancia focal}} \end{aligned}$$

El punto medio del segmento  $F_1F_2$  (en este caso el origen) se denomina **centro** de la hipérbola. La línea que pasa por el centro, los vértices y los focos se denomina **eje transversal**. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal se denomina **eje conjugado**. El eje conjugado no corta a la hipérbola. Si se dibuja un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ , centrado en el centro de la hipérbola y con dos de sus lados tangentes a dicha hipérbola en sus vértices, entonces las dos diagonales del rectángulo son **asíntotas** de la hipérbola. Sus ecuaciones son  $(x/a) \pm (y/b) = 0$ ; es decir, son soluciones de la ecuación degenerada

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

La hipérbola se aproxima tanto como deseemos a esas rectas a medida que nos alejamos del origen (véase la Figura 8.10). Una hipérbola **rectangular** es aquella cuyas asíntotas son rectas perpendiculares (esto se cumple si  $b = a$ ).



**Figura 8.10** Términos asociados a una hipérbola.

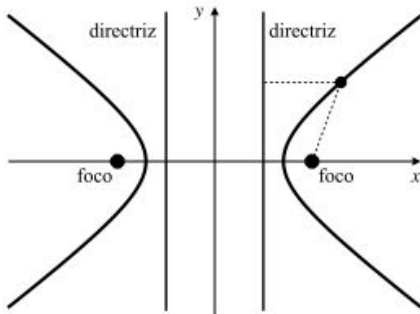
La excentricidad de la hipérbola es

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Nótese que  $\varepsilon > 1$ . Las rectas  $x = \pm(a/\varepsilon)$  reciben el nombre de **directrices** de la hipérbola  $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$  (véase la Figura 8.11). De forma similar al caso de la elipse, se puede demostrar que si  $P$  es un punto de la hipérbola, entonces

$$\frac{\text{distancia de } P \text{ a un foco}}{\text{distancia de } P \text{ a la correspondiente directriz}} = \varepsilon$$

La excentricidad de una hipérbola rectangular es  $\sqrt{2}$ .

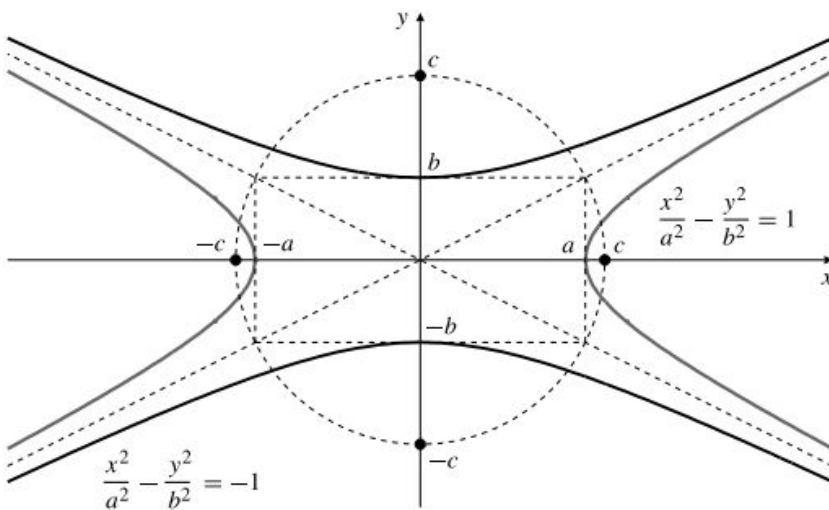


**Figura 8.11** Directrices de una hipérbola.

Una hipérbola con las mismas asíntotas que  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , pero cuyo eje transversal es el eje  $y$ , sus vértices son  $(0, b)$  y  $(0, -b)$ , y sus focos son  $(0, c)$  y  $(0, -c)$ , se representa mediante la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{en otros términos,} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Se dice que las dos hipérbolas son **conjugadas** entre sí (véase la Figura 8.12). El *eje conjugado* de una hipérbola es el *eje transversal* de su hipérbola conjugada. El eje transversal y el eje conjugado de una hipérbola se denominan en conjunto **ejes principales**.



**Figura 8.12** Dos hipérbolas conjugadas y sus asíntotas comunes.

### Propiedad focal de una hipérbola

Sea un punto  $P$  cualquiera de una hipérbola cuyos focos son  $F_1$  y  $F_2$ . Entonces la tangente a la hipérbola en el punto  $P$  es la bisectriz del ángulo que forman las rectas  $F_1P$  y  $F_2P$ .

#### Reflexión en una hipérbola

Un rayo procedente de uno de los focos de una hipérbola se refleja en dicha hipérbola de modo que parece provenir del otro foco.

Para ver que esto es así, sea  $P$  un punto de la rama derecha, sea  $T$  la recta tangente a la hipérbola en el punto  $P$ , y sea  $C$  una circunferencia de radio grande centrada en  $F_2$  (véase la Figura 8.13). Sea  $D$  el punto donde la recta  $F_2P$  corta esta circunferencia. Sea  $Q$  un punto cualquiera de  $T$ . Entonces  $QF_1$  corta a la hipérbola en un punto  $X$  situado entre  $Q$  y  $F_1$ , y  $F_2X$  corta a  $C$  en  $E$ .



La naturaleza del conjunto de puntos representados por una ecuación de segundo grado se puede determinar escribiendo la ecuación de forma que se pueda reconocer como uno de los tipos estándar. Si  $B = 0$ , esto se puede hacer completando los cuadrados en los términos en  $x$  y en  $y$ .

**Ejemplo 4** Describa la curva cuya ecuación es  $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 7 = 0$ .

**Solución** Se completan los cuadrados en los términos en  $x$  y en  $y$ , escribiendo la ecuación en la forma

$$x^2 + 6x + 9 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 + 2 - 7 = 4$$

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$$

Por tanto, representa una elipse con centro en  $(-3, 1)$ , semieje mayor  $a = 2$  y semieje menor  $b = \sqrt{2}$ . Como  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$ , los focos son  $(-3 \pm \sqrt{2}, 1)$ . Véase la Figura 8.14.

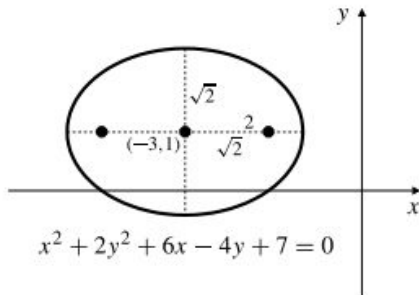


Figura 8.14

Si  $B \neq 0$ , la ecuación tiene un término  $xy$ , y no puede representar una circunferencia. Para ver lo que representa, se pueden rotar los ejes coordenados para producir una ecuación sin término  $xy$ . Sea un nuevo sistema de coordenadas (con ejes  $u$  y  $v$ ), con el mismo origen pero rotado un ángulo  $\theta$  con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  anteriores (véase la Figura 8.15). Si las coordenadas de un punto  $P$  en los ejes antiguos son  $(x, y)$  y con respecto a los ejes nuevos son  $(u, v)$ , entonces un análisis de triángulos en la figura permite demostrar que

$$x = OA - XA = OU \cos \theta - OV \sin \theta = u \cos \theta - v \sin \theta$$

$$y = XB + BP = OU \sin \theta + OV \cos \theta = u \sin \theta + v \cos \theta$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

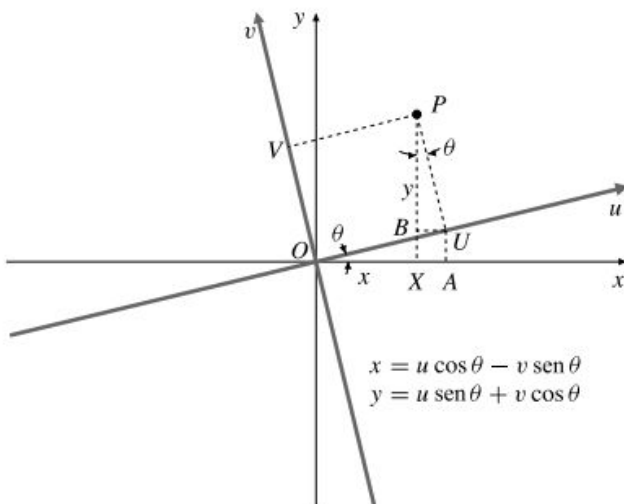


Figura 8.15 Rotación de ejes.

**!! ATENCIÓN !!** Aquí es necesario un cálculo largo y tedioso. Los detalles se han omitido.

se llega a la nueva ecuación,

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + Du + E'v + F = 0$$

siendo

$$A' = \frac{1}{2} (A(1 + \cos 2\theta) + B\sin 2\theta + C(1 - \cos 2\theta))$$

$$B' = (C - A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta$$

$$C' = \frac{1}{2} (A(1 - \cos 2\theta) - B\sin 2\theta + C(1 + \cos 2\theta))$$

$$D = D\cos \theta + E\sin \theta$$

$$E' = -D\sin \theta + E\cos \theta$$

Nótese que  $F$  no cambia. Si se escoge  $\theta$  de forma que

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ si } A = C, B \neq 0$$

entonces  $B' = 0$ , y la nueva ecuación se puede analizar como se ha descrito anteriormente.

**Ejemplo 5** Identifique la curva cuya ecuación es  $xy = 1$ .

**Solución** Es bastante probable que el lector ya sepa que la ecuación dada representa una hipérbola rectangular cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Como la ecuación dada tiene  $A = C = D = E = 0$  y  $B = 1$ , es apropiado rotar los ejes un ángulo de  $\pi/4$ , de forma que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$$

La ecuación transformada es  $u^2 - v^2 = 2$ , que es, como sospechábamos, una hipérbola rectangular con vértices en  $u = \pm\sqrt{2}, v = 0$ , focos en  $u = \pm 2, v = 0$  y asíntotas  $u = \pm v$ . Por consiguiente,  $xy = 1$  representa una hipérbola rectangular cuyas asíntotas son los ejes coordenados, sus vértices están en  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$  y sus focos están en  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

**Ejemplo 6** Demuestre que la curva  $2x^2 + xy + y^2 = 2$  es una elipse y calcule las longitudes de sus semiejes mayor y menor.

**Solución** En este ejemplo,  $A = 2, B = C = 1, D = E = 0$  y  $F = -2$ . Rotamos los ejes un ángulo  $\theta$ , siendo  $\tan 2\theta = B/(A - C) = 1$ . Por tanto,  $B' = 0, 2\theta = \pi/4$  y  $\sin 2\theta = \cos 2\theta = 1/\sqrt{2}$ . Tenemos que

$$A' = \frac{1}{2} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

$$C' = \frac{1}{2} \left[ 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

La ecuación transformada es  $(3 + \sqrt{2})u^2 + (3 - \sqrt{2})v^2 = 4$ , que representa una elipse cuyo semieje mayor tiene una longitud de  $2/\sqrt{3 - \sqrt{2}}$  y cuyo semieje menor tiene una longitud de  $2/\sqrt{3 + \sqrt{2}}$  (en la Sección 13.3 descubriremos otra forma de preguntar esto).

## Ejercicios 8.1

Calcule las ecuaciones de las cónicas que se especifican en los Ejercicios 1-6.

1. Elipse con focos en  $(0, \pm 2)$  y semieje mayor de longitud 3.
2. Elipse con focos en  $(0, 1)$  y  $(4, 1)$  y excentricidad  $1/2$ .
3. Parábola con foco en  $(2, 3)$  y vértice en  $(2, 4)$ .
4. Parábola que pasa por el origen, su foco está en  $(0, -1)$  y su eje está en la recta  $y = -1$ .
5. Hipérbola con focos en  $(0, \pm 2)$  y semieje transversal de longitud 1.
6. Hipérbola con focos en  $(\pm 5, 1)$  y asíntotas  $x = \pm(y - 1)$ .

En los Ejercicios 7-15, identifique y dibuje el conjunto de puntos del plano que satisfacen las ecuaciones dadas. Especifique las asíntotas de las posibles hipérbolas.

7.  $x^2 + y^2 + 2x = 1$
8.  $x^2 + 4y^2 - 4y = 0$
9.  $4x^2 + y^2 - 4y = 0$
10.  $4x^2 - y^2 - 4y = 0$
11.  $x^2 + 2x - y = 3$
12.  $x + 2y + 2y^2 = 1$
13.  $x^2 - 2y^2 + 3x + 4y = 2$
14.  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = -13$
15.  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$
16. Identifique y dibuje la curva que es la gráfica de la ecuación  $(x - y)^2 - (x + y)^2 = 1$ .
- \*17. Los rayos de luz en el plano  $xy$  procedentes del punto  $(3, 4)$  se reflejan en una parábola de manera que forman un rayo paralelo al eje  $x$ . La parábola pasa por el origen. Obtenga su ecuación (existen dos respuestas posibles).
18. Los rayos de luz en el plano  $xy$  procedentes del origen se reflejan en una elipse de forma que convergen en el punto  $(3, 0)$ . Calcule todas las posibles ecuaciones de dicha elipse.

En los Ejercicios 19-22, identifique la cónica y calcule su centro, ejes principales, focos y excentricidad. Especifique las asíntotas de las posibles hipérbolas.

19.  $xy + x - y = 2$
- \*20.  $x^2 + 2xy + y^2 = 4x - 4y + 4$
- \*21.  $8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$
- \*22.  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y = 0$

23. La *definición foco-directriz de una cónica* define ésta como un conjunto de puntos  $P$  del plano que satisface la condición

$$\frac{\text{distancia de } P \text{ a } F}{\text{distancia de } P \text{ a } D} = \varepsilon$$

siendo  $F$  un punto fijo,  $D$  una recta fija y  $\varepsilon$  un número positivo fijo. La cónica es una elipse, una parábola o una hipérbola dependiendo de si  $\varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon = 1$  o  $\varepsilon > 1$ . Calcule la ecuación de la cónica si  $F$  es el origen y  $D$  es la recta  $x = -p$ .

Otro parámetro asociado con las cónicas es el **semi-latus rectum**, que se denota generalmente como  $\ell$ . En el caso de una circunferencia es igual a su radio. Para otras cónicas, es la mitad de la longitud de la cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje (para una parábola), al eje mayor (para una elipse) o al eje transversal (para una hipérbola). Dicha cuerda se denomina **latus rectum** de la cónica.

24. Demuestre que el semi-latus rectum de la parábola es el doble de la distancia de su vértice a su foco.
25. Demuestre que el semi-latus rectum de una elipse con semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$  es  $\ell = b^2/a$ .
26. Demuestre que la fórmula del ejercicio anterior coincide con la del semi-latus rectum de una hipérbola con semieje transversal  $a$  y semieje conjugado  $b$ .
- \*27. Suponga que un plano corta a un cono circular recto formando una elipse, y que dos esferas (una en cada lado del plano), se inscriben entre el cono y el plano de forma que cada una de ellas es tangente al cono en una circunferencia y es también tangente al plano en un punto. Demuestre que los puntos donde esas dos esferas tocan al plano son los focos de la elipse. *Sugerencia:* Todas las rectas tangentes a una esfera desde un punto dado en el exterior de dicha esfera tienen la misma longitud. La distancia entre las dos circunferencias en las que las esferas cortan al cono, medidas sobre generatrices del cono (es decir, rectas en el cono), es la misma para todas las generatrices.
- \*28. Formule y demuestre un resultado análogo al del Ejercicio 27 pero con una hipérbola.
- \*29. Suponga que un plano corta a un cono circular recto formando una parábola con vértice en  $V$ . Suponga que se inscribe una esfera entre el cono y el plano, como en los ejercicios anteriores, que es tangente al plano de la parábola en el punto  $F$ . Demuestre que la cuerda a la parábola que pasa por  $F$  y que es perpendicular a la recta  $FV$  tiene una longitud igual a la del latus rectum de la parábola. Por tanto,  $F$  es el foco de la parábola.

## 8.2 Curvas paramétricas

Supongamos que un objeto se mueve por el plano  $xy$  de forma que las coordenadas de su posición en cualquier instante  $t$  son funciones continuas de la variable  $t$ :

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

El camino seguido por el objeto es una curva  $\mathcal{C}$  en el plano, especificada por las dos ecuaciones anteriores, que denominaremos *ecuaciones paramétricas* de  $\mathcal{C}$ . Una curva especificada por una pareja concreta de ecuaciones paramétricas se denomina *curva paramétrica*.

### DEFINICIÓN 4 Curvas paramétricas

Una **curva paramétrica**  $\mathcal{C}$  en el plano está formada por un par ordenado  $(f, g)$  de funciones continuas, ambas definidas en el mismo intervalo  $I$ . Las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{para } t \text{ en } I$$

se denominan **ecuaciones paramétricas** de la curva  $\mathcal{C}$ . La variable independiente  $t$  se denomina **parámetro**.

Nótese que la curva paramétrica  $\mathcal{C}$  no se define como un conjunto de puntos del plano, sino como un par ordenado de funciones cuyo rango es ese conjunto de puntos. Diferentes pares de funciones pueden producir el mismo conjunto de puntos del plano, pero puede ser conveniente considerarlas como curvas paramétricas diferentes. No obstante, denominaremos a menudo curva  $\mathcal{C}$  al conjunto de puntos seguido por  $(x, y)$  cuando  $t$  se mueve por  $I$ . El eje (recta real) del parámetro  $t$  es diferente de los ejes coordenados del plano de la curva (véase la Figura 8.16). Generalmente, denominaremos  $t$  al parámetro. En muchas aplicaciones el parámetro representa tiempo, pero no es necesario que sea así. Como  $f$  y  $g$  se suponen funciones continuas, la curva  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  no presenta saltos. Una curva paramétrica tiene una *dirección* (indicada, por ejemplo, mediante flechas), que es la dirección correspondiente a los valores crecientes del parámetro  $t$ , como se muestra en la Figura 8.16.

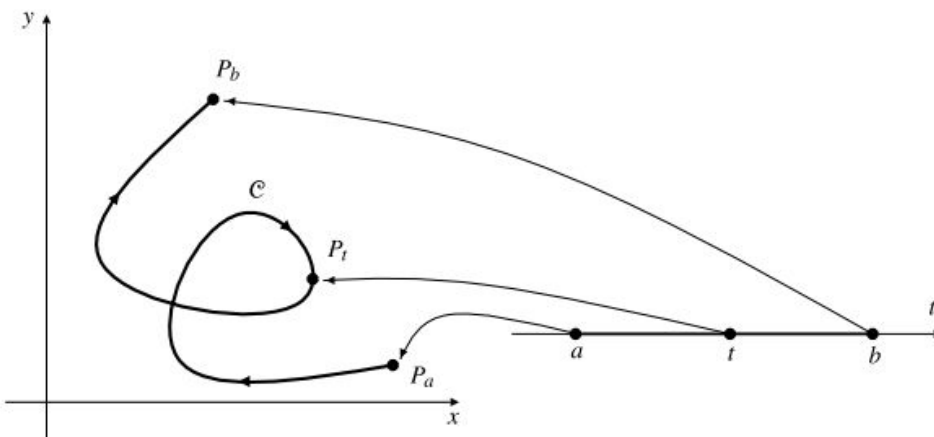


Figura 8.16 Una curva paramétrica.

**Ejemplo 1** Dibuje e identifique la curva paramétrica

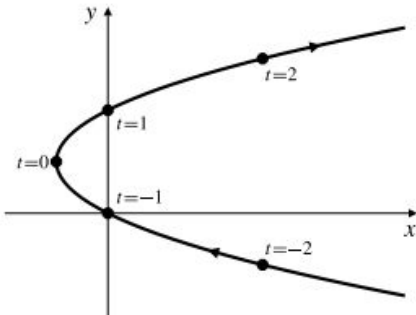
$$x = t^2 - 1, \quad y = t + 1 \quad (-\infty < t < \infty)$$

**Solución** Podríamos construir una tabla con valores de  $x$  e  $y$  en función de valores de  $t$ , con lo que se obtendrían las coordenadas de algunos puntos de la curva. Sin embargo, en este ejemplo es más fácil *elimi-*

nar el parámetro de la pareja de ecuaciones paramétricas y obtener así una única ecuación en  $x$  e  $y$  cuya gráfica es la curva deseada:

$$t = y - 1, \quad x = t^2 - 1 = (y - 1)^2 - 1 = y^2 - 2y$$

Todos los puntos de la curva están en la parábola  $x = y^2 - 2y$ . Como  $y \rightarrow \pm \infty$  cuando  $t \rightarrow \pm \infty$ , la curva paramétrica es la parábola completa (véase la Figura 8.17).



**Figura 8.17** La parábola definida paraméricamente como  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t + 1$ ,  $(-\infty < t < \infty)$ .

Aunque la curva del Ejemplo 1 se identifica más fácilmente cuando se elimina el parámetro, al pasar a la forma no paramétrica se produce una pérdida de información. Concretamente, se pierde el sentido de la curva como el camino que sigue un punto que se mueve y, por tanto, también la dirección de la curva. Si la variable  $t$  en la forma paramétrica indica el tiempo en el que un objeto está en el punto  $(x, y)$ , la ecuación no paramétrica  $x = y^2 - 2y$  ya no indica en qué punto está el objeto en el instante concreto  $t$ .

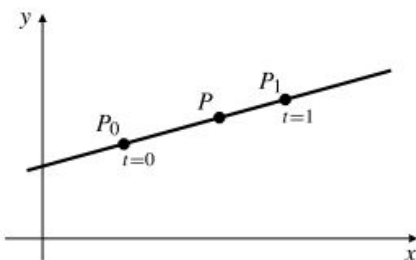
**Ejemplo 2 (Ecuaciones paramétricas de una recta)** Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $P_1 = (x_1, y_1)$  (véase la Figura 8.18) son:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

Para ver que estas ecuaciones representan una línea recta, nótese que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{constante} \quad (\text{suponiendo } x_1 \neq x_0)$$

El punto  $P = (x, y)$  está en la posición  $P_0$  cuando  $t = 0$ , y en la posición  $P_1$  cuando  $t = 1$ . Si  $t = 1/2$ , entonces  $P$  está en el punto medio entre  $P_0$  y  $P_1$ . Nótese que el segmento que va de  $P_0$  a  $P_1$  corresponde a valores de  $t$  entre 0 y 1.



**Figura 8.18**

**Ejemplo 3 (Arco de una circunferencia)** Dibuje e identifique la curva  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $(0 \leq t \leq 3\pi/2)$ .

**Solución** Como  $x^2 + y^2 = 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t = 9$ , todos los puntos de la curva están en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ . Cuando  $t$  aumenta desde 0, pasando por  $\pi/2$  y  $\pi$  hasta  $3\pi/2$ , el punto  $(x, y)$  se mueve desde  $(3, 0)$ , pasando por  $(0, 3)$  y  $(-3, 0)$ , hasta  $(0, -3)$ . La curva paramétrica corresponde a las tres cuartas partes



de una circunferencia (véase la Figura 8.19). El parámetro  $t$  tiene en este ejemplo un significado geométrico. Si  $P_t$  es el punto de la curva que corresponde a un valor del parámetro  $t$ , entonces  $t$  es el ángulo medido desde el centro de la circunferencia correspondiente al arco recorrido desde el punto inicial hasta  $P_t$ .

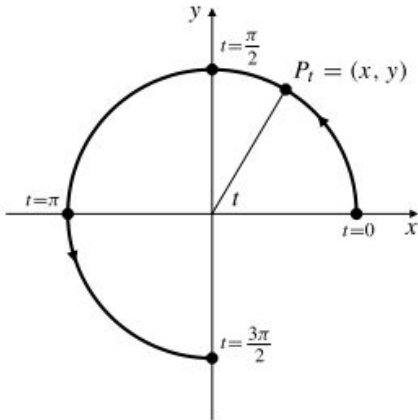


Figura 8.19

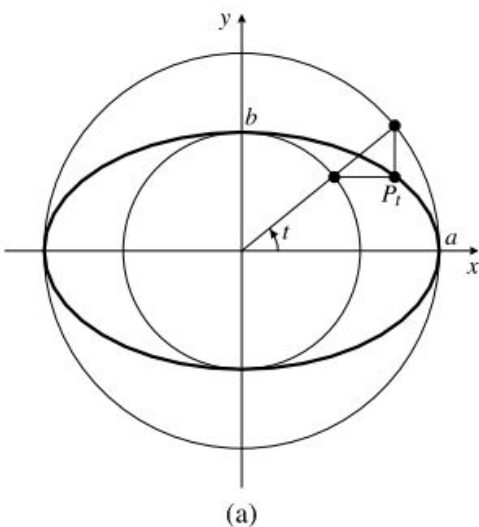
**Ejemplo 4 (Ecuaciones paramétricas de una elipse)** Dibuje e identifique la curva  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), siendo  $a > b > 0$ .

**Solución** Obsérvese que

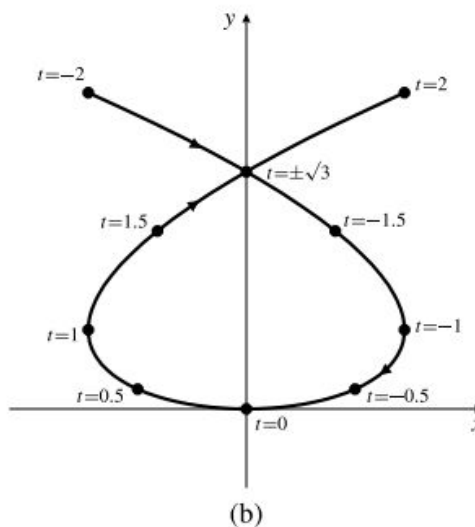
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Por tanto, la curva es una elipse parcial o completa, cuyo eje mayor va desde  $(-a, 0)$  hasta  $(a, 0)$ , y cuyo eje menor va desde  $(0, -b)$  hasta  $(0, b)$ . Cuando  $t$  aumenta desde 0 hasta  $2\pi$ , el punto  $(x, y)$  se mueve por la elipse en sentido contrario al de las agujas del reloj, empezando en  $(a, 0)$  y volviendo al mismo punto. Por tanto, la curva es la elipse completa.

La Figura 8.20(a) muestra cómo se puede interpretar el parámetro  $t$  como un ángulo, y cómo se pueden obtener los puntos de la elipse utilizando circunferencias de radios  $a$  y  $b$ . Como la curva empieza y termina en el mismo punto, se denomina **curva cerrada**.



(a)



(b)

**Figura 8.20** Elipse parametrizada en función de un ángulo y construida con la ayuda de dos circunferencias. (b) Una curva paramétrica que se cruza consigo misma.

**Ejemplo 5** Dibuje la curva paramétrica

$$x = t^3 - 3t, \quad y = t^2, \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

**Solución** Eliminando el parámetro se obtiene

$$x^2 = t^2(t^2 - 3)^2 = y(y - 3)^2$$

pero esto no resulta de mucha ayuda ya que no podemos reconocer esta curva a partir de su ecuación en coordenadas cartesianas. Lo que haremos será calcular las coordenadas de algunos puntos:

**Tabla 2.** Coordenadas de algunos puntos de la curva del Ejemplo 5

$t$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$x$	-2	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{11}{8}$	0	$-\frac{11}{8}$	-2	$-\frac{9}{8}$	2
$y$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Nótese que la curva es simétrica respecto al eje  $y$  ya que  $x$  es una función impar de  $t$  e  $y$  es una función par de  $t$  (en  $t$  y  $-t$ ,  $x$  tiene valores de signo contrario, e  $y$  tiene el mismo valor).

La curva se cruza consigo misma en el eje  $y$  (véase la Figura 8.20(b)). Para encontrar el punto de intersección, se hace  $x = 0$ :

$$0 = x = t^3 - 3t = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$$

Para  $t = 0$ , la curva está en  $(0, 0)$ , pero para  $t = \pm\sqrt{3}$ , la curva está en  $(0, 3)$ . El punto de intersección consigo misma se produce porque la curva pasa por el mismo punto para dos valores diferentes del parámetro.



**Observación** He aquí cómo conseguir que Maple dibuje la curva paramétrica del ejemplo anterior. Nótese los corchetes que rodean a las dos funciones  $t^3 - 3t$  y  $t^2$ , y el intervalo de valor del parámetro, seguido por los rangos de  $x$  e  $y$  en la gráfica.

```
> plot([t^3-3*t, t^2, t=-2..2], x=-3..3, y=-1..5);
```

## Curvas planas generales y parametrizaciones

De acuerdo con la Definición 4, una curva paramétrica siempre está definida mediante un conjunto particular de ecuaciones paramétricas; no es sólo un conjunto de puntos del plano. Cuando estamos interesados en considerar una curva únicamente como un conjunto de puntos (un *objeto geométrico*), no es necesario preocuparse por la pareja de ecuaciones en concreto que representa a la curva. En este caso la curva es simplemente una *curva plana*.

### DEFINICIÓN 5 Curvas planas

Una **curva plana** es un conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  para algún valor de  $t$  en el intervalo  $I$ , siendo  $f$  y  $g$  funciones continuas definidas en  $I$ . A dicho intervalo  $I$  y al par de funciones  $(f, g)$  que generan los puntos de  $\mathcal{C}$  se los denomina **parametrización** de  $\mathcal{C}$ .

Como una curva plana no está ligada a una parametrización específica, tampoco tiene una dirección específica.

**Ejemplo 6** La circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  es una curva plana. A continuación se presentan algunas posibles parametrizaciones de dicha circunferencia:

- (i)  $x = \cos t, y = \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
- (ii)  $x = \sin s^2, y = \cos s^2, \quad (0 \leq s \leq \sqrt{2\pi})$
- (iii)  $x = \cos(\pi u + 1), y = \sin(\pi u + 1), \quad (-1 \leq u \leq 1)$
- (iv)  $x = 1 - t^2, y = t\sqrt{2 - t^2}, \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$

Para verificar que cualquiera de ellas representa a la circunferencia se pueden sustituir las funciones de  $x$  e  $y$  en la expresión  $x^2 + y^2$  y demostrar que el resultado se simplifica al valor de 1. Esto demuestra que la curva paramétrica es una circunferencia. Después se pueden examinar los rangos de  $x$  e  $y$  a medida que el parámetro varía en su dominio. Por ejemplo, en el caso (iv) tenemos

$$x^2 + y^2 = (1 - t^2)^2 + (t\sqrt{2 - t^2})^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 2t^2 - t^4 = 1$$

y  $(x, y)$  va desde  $(-1, 0)$  pasando por  $(0, -1)$  hasta  $(1, 0)$  cuando  $t$  se incrementa desde  $-\sqrt{2}$ , pasando por  $-1$ , hasta 0, y después continúa por  $(0, 1)$  y vuelve a  $(-1, 0)$  cuando  $t$  va desde 0, pasando por 1, hasta  $\sqrt{2}$ .

Existen, por supuesto, otras infinitas posibles parametrizaciones de esta curva.

**Ejemplo 7** Si  $f$  es una función continua en un intervalo  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  es una curva plana. Una posible parametrización obvia de esta curva es

$$x = t, \quad y = f(t), \quad (t \text{ en } I)$$

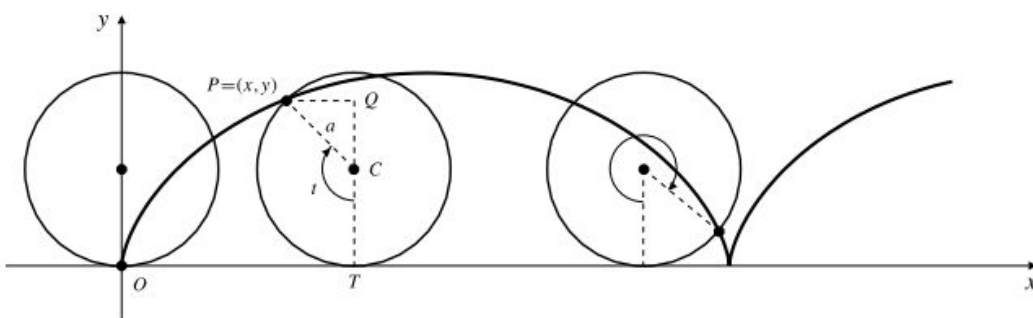
## Algunas curvas planas de interés

Completaremos esta sección parametrizando dos curvas que aparecen en el mundo físico.

**Ejemplo 8 (Cicloide)** Si una circunferencia rueda sin deslizamiento por una línea recta, calcule el camino que sigue un punto fijo del círculo. Ese camino se denomina **cicloide**.

**Solución** Supongamos que la recta sobre la que rueda la circunferencia es el eje  $x$ , que la circunferencia tiene radio  $a$  y está sobre dicha recta y que el punto cuyo movimiento vamos a seguir está inicialmente en el origen  $O$  (véase la Figura 8.21). Después de que el círculo haya rodado un ángulo  $t$ , es tangente a la recta en  $T$ , y el punto cuya trayectoria estamos siguiendo se habrá movido hasta la posición  $P$ , como muestra la citada figura. Como no hay deslizamiento,

$$\text{segmento } OT = \text{arco } PT = at$$



**Figura 8.21** El punto  $P$  traza los arcos de la cicloide a medida que la rueda realiza una revolución completa.

Sea  $PQ$  perpendicular a  $TC$ , como se muestra la figura. Si las coordenadas de  $P$  son  $(x, y)$ , entonces

$$x = OT - PQ = at - a \operatorname{sen}(\pi - t) = at - a \operatorname{sen} t$$

$$y = TC + CQ = a + a \cos(\pi - t) = a - a \cos t$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

Obsérvese que la cicloide presenta un vértice en los puntos donde vuelve al eje  $x$ , es decir, en los puntos correspondientes a  $t = 2n\pi$ , siendo  $n$  un entero. Aunque las funciones  $x$  e  $y$  son funciones diferenciables en  $t$ , la curva no es suave en todas partes. En la sección siguiente consideraremos estos aspectos.

### Los problemas de la braquistócrona y de la tautócrona

Suponga que se dobla un alambre desde un punto  $A$  hasta un punto más bajo  $B$  y que una pequeña cuenta puede deslizarse sin rozamiento por dicho alambre. Si la cuenta se suelta en el punto  $A$ , se deslizará hasta el punto  $B$ . ¿Qué curva se debería utilizar para minimizar el tiempo que tarda en ir desde  $A$  hasta  $B$ ? Este problema, denominado de la *braquistócrona* (del griego «tiempo mínimo»). Tiene como solución parte de un arco de cicloide puesto boca abajo. Es más, la cuenta emplea la misma cantidad de tiempo en deslizarse desde cualquier punto de la curva al punto más bajo  $B$ , por lo que la cicloide es también la solución del problema de la *tautócrona* («mismo tiempo»). Examinaremos estos aspectos posteriormente, en los Problemas Avanzados del final del Capítulo 11.

**Ejemplo 9 (Involución de una circunferencia)** Se enrolla una cuerda alrededor de una circunferencia fija. Uno de sus extremos se desenrolla de forma que la parte de la cuerda que no está en la circunferencia se extiende en forma de línea recta. La curva que sigue este extremo libre de la cuerda se denomina **involución** de la circunferencia (la involución de cualquier curva es el camino que sigue un extremo de dicha curva cuando se desenrolla empezando por ese extremo).

Suponga que la ecuación de la circunferencia es  $x^2 + y^2 = a^2$ , y que el extremo de la cuerda que se desenrolla empieza en el punto  $A = (a, 0)$ . En algún instante posterior mientras se desenrolla, denominaremos  $P$  a la posición del extremo de la cuerda, y  $T$  al punto donde la cuerda deja a la circunferencia. La recta  $PT$  debe ser tangente a la circunferencia en  $T$ .

Parametrizaremos a continuación el camino que sigue  $P$  en función del ángulo  $AOT$ , que denominaremos  $t$ . Sean los puntos  $R$  en  $OA$  y  $S$  en  $TR$ , como se muestra en la Figura 8.22.  $TR$  es perpendicular a  $OA$  y a  $PS$ . Nótese que

$$OR = OT \cos t = a \cos t, \quad RT = OT \operatorname{sen} t = a \operatorname{sen} t$$

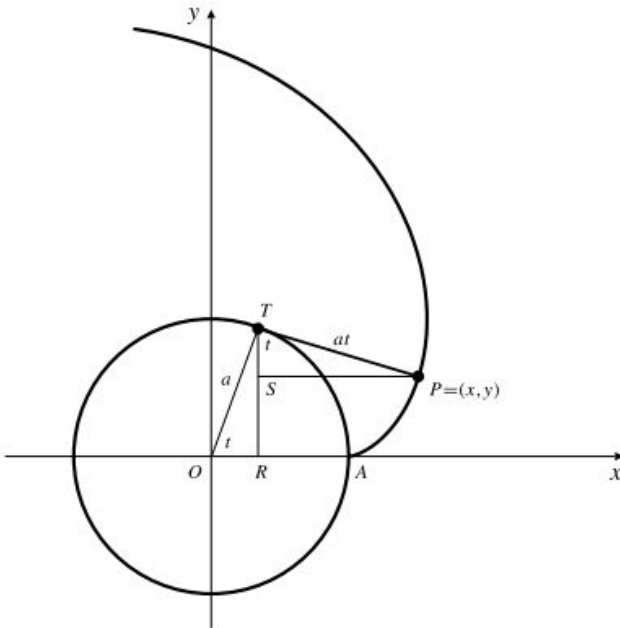
Como el ángulo  $OTP$  es de  $90^\circ$ , el ángulo  $STP = t$ . Como  $PT = \operatorname{arc} AT = at$  (ya que la cuerda no se enrolla ni se desliza en la circunferencia), tenemos que

$$SP = TP \operatorname{sen} t = at \operatorname{sen} t, \quad ST = TP \cos t = at \cos t$$

Si  $P$  tiene coordenadas a  $(x, y)$ , entonces  $x = OR + SP$  e  $y = RT - ST$ :

$$x = a \cos t + at \operatorname{sen} t, \quad y = a \operatorname{sen} t - at \cos t, \quad (t \geq 0)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la involución.


**Figura 8.22** Involución de una circunferencia.

## Ejercicios 8.2

En los Ejercicios 1-10, dibuje las curvas paramétricas dadas, mostrando su dirección con una flecha. Elimine el parámetro para obtener una ecuación cartesiana en  $x$  e  $y$  cuya gráfica sea la curva paramétrica.

1.  $x = 1 + 2t, y = t^2, (-\infty < t < \infty)$
2.  $x = 2 - t, y = t + 1, (0 \leq t < \infty)$
3.  $x = \frac{1}{t}, y = t - 1, (0 < t < 4)$
4.  $x = \frac{1}{1 + t^2}, y = \frac{t}{1 + t^2}, (-\infty < t < \infty)$
5.  $x = 3 \operatorname{sen} 2t, y = 3 \cos 2t, (0 \leq t \leq \frac{\pi}{3})$
6.  $x = a \sec t, y = b \tan t, (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$
7.  $x = 3 \operatorname{sen} \pi t, y = 4 \cos \pi t, (-1 \leq t \leq 1)$
8.  $x = \operatorname{coss} s, y = \operatorname{sens} s, (-\infty < s < \infty)$
9.  $x = \cos^3 t, y = \operatorname{sen}^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$
10.  $x = 1 - \sqrt{4 - t^2}, y = 2 + t, (-2 \leq t \leq 2)$
11. Describa la curva paramétrica  $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$ , y calcule su ecuación en cartesianas.
12. Describa la curva paramétrica  $x = 2 - 3 \cosh t, y = -1 + 2 \operatorname{senh} t$
13. Describa la curva  $x = t \cos t, y = t \operatorname{sen} t, (0 \leq t \leq 4\pi)$ .

14. Demuestre que cada uno de los siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas representa un arco diferente de la parábola cuya ecuación es  $2(x + y) = 1 + (x - y)^2$ .
  - (a)  $x = \cos^4 t, y = \operatorname{sen}^4 t$
  - (b)  $x = \sec^4 t, y = \tan^4 t$
  - (c)  $x = \tan^4 t, y = \sec^4 t$
15. Calcule una parametrización de la parábola  $y = x^2$ , utilizando como parámetro la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera.
16. Calcule una parametrización de la circunferencia  $x^2 + y^2 = R^2$ , utilizando como parámetro la pendiente  $m$  de la recta que une un punto cualquiera con el punto  $(R, 0)$ . ¿Falla la parametrización en la obtención de algún punto de la circunferencia?
17. Una circunferencia de radio  $a$  está centrada en el origen  $O$ .  $T$  es un punto de la circunferencia tal que  $OT$  forma un ángulo  $t$  con el eje  $x$  positivo. La tangente a la circunferencia en  $T$  cruza al eje  $x$  en el punto  $X$ . El punto  $P = (x, y)$  es la intersección de la recta vertical que pasa por  $X$  y de la recta horizontal que pasa por  $T$ . Calcule, en función del parámetro  $t$ , ecuaciones paramétricas de la curva  $c$  que describe el punto  $P$  a medida que el punto  $T$  se mueve por la circunferencia. Elimine  $t$  y calcule una ecuación de  $c$  en función de  $x$  e  $y$ . Dibuje  $c$ .
18. Repita el Ejercicio 17 con la siguiente modificación:  $OT$  cruza una segunda circunferencia de radio  $b$  centrada en  $O$  en el punto  $Y$ .  $P = (x, y)$  es la intersección de la recta vertical que pasa por  $X$  y la recta horizontal que pasa por  $Y$ .

- \*19. **(El folium de Descartes)** Elimine el parámetro de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \quad (t \neq -1)$$

y obtenga una ecuación ordinaria en  $x$  e  $y$  de esta curva. El parámetro  $t$  se puede interpretar como la pendiente de la recta que une el punto general  $(x, y)$  con el origen. Dibuje la curva y demuestre que la recta  $x + y = -1$  es una asíntota.

- \*20. **(Una cicloide prolada)** Una rueda de ferrocarril tiene una pestaña que se extiende por debajo del nivel de la vía sobre la que se mueve la rueda. Si el radio de la rueda es  $a$  y el de la pestaña es  $b > a$ , calcule las ecuaciones paramétricas del camino que sigue un punto  $P$  en la circunferencia de la pestaña a medida que la rueda se mueve por la vía (nótese que, durante una parte de cada revolución de la rueda,  $P$  se mueve hacia atrás). Intente dibujar la gráfica de esta cicloide prolada.

- \*21. **(Hipocicloides)** Si una circunferencia de radio  $b$  rueda, sin deslizarse, por el interior de una circunferencia fija de radio  $a > b$ , un punto de la circunferencia que rueda traza una curva denominada hipocicloide. Si la circunferencia fija está centrada en el origen y el punto que traza la curva empieza en  $(a, 0)$ , demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \left( \frac{a - b}{b} t \right)$$

$$y = (a - b) \sin t - b \sin \left( \frac{a - b}{b} t \right)$$

siendo  $t$  el ángulo entre el eje  $x$  positivo y la línea que va del origen al punto en el cual la circunferencia que rueda toca a la circunferencia fija.

Si  $a = 2$  y  $b = 1$ , demuestre que la hipocicloide se convierte en un segmento de recta.

Si  $a = 4$  y  $b = 1$ , demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se simplifican en la forma  $x = 4 \cos^3 t$ ,  $y = 4 \sin^3 t$ . Esta curva se denomina hipocicloide de cuatro vértices o **astroide** (véase la Figura 8.23). Su ecuación en cartesianas es  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$ .

Las hipocicloides recuerdan a las curvas producidas por unos juguetes de niños muy populares denominados espirógrafos, pero las curvas de los espirógrafos resultan de seguir un punto en el interior del círculo que gira en lugar de en la circunferencia, y por tanto no tienen vértices agudos.

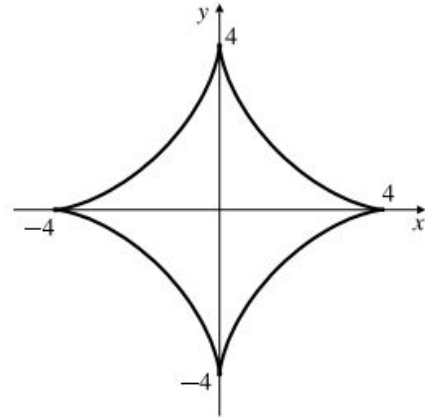


Figura 8.23 El astroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$ .

- \*22. **(La bruja de Agnesi)**

- Demuestre que la curva que traza un punto  $P$  obtenido a partir de una circunferencia, como se muestra en la Figura 8.24, tiene como ecuaciones paramétricas  $x = \tan t$ ,  $y = \cos^2 t$  en función del ángulo  $t$  que se muestra en dicha figura (Sugerencia: Será necesario hacer un uso intensivo de la similitud de triángulos).
- Utilice una igualdad trigonométrica para eliminar  $t$  de las ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación ordinaria en cartesianas de dicha curva.

Esta curva toma su nombre de la matemática italiana María Agnesi (1718-1799), una de las mujeres más brillantes de su siglo y autora de un importante libro de cálculo. El término *bruja* se debe a una traducción errónea de la palabra italiana *versiera* («curva que gira»), utilizada para describir la curva. Dicha palabra es similar a *aversiera* («esposa del diablo» o «bruja»).

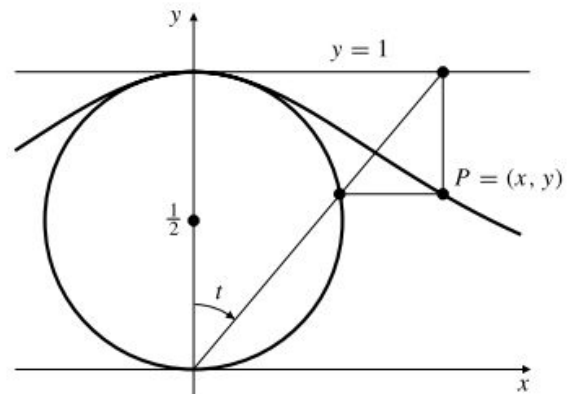





Figura 8.24 La bruja de Agnesi.


En los Ejercicios 23-26, obtenga las gráficas de las curvas  $x = \sin(mt)$ ,  $y = \sin(nt)$  para los valores dados de  $m$  y  $n$ . Estas curvas se denominan **figuras de Lissajous**. Aparecen cuando se analizan señales eléctricas utilizando un osciloscopio. Una señal de frecuencia fija, pero desconocida,

se aplica a la entrada vertical, y una señal de control se aplica a la entrada horizontal. La frecuencia horizontal se modifica hasta que se observa una figura de Lissajous estable. La frecuencia (conocida) de la señal de control y la forma de la figura permiten determinar la frecuencia desconocida.

**23.**  $m = 1, n = 2$  

**24.**  $m = 1, n = 3$  

**25.**  $m = 2, n = 3$  

**26.**  $m = 2, n = 5$  

**27. (Epicicloides)** Utilizando una calculadora gráfica o un programa de gráficos por ordenador, investigue el comportamiento de las curvas cuyas ecuaciones son de la forma

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos t - \frac{1}{n} \cos(nt)$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin t - \frac{1}{n} \sin(nt)$$

para varios valores enteros y fraccionarios de  $n \geq 3$ . ¿Se pueden formular principios que gobiernan el comportamiento de estas curvas?

**28. (Más hipocicloides)** Utilice una calculadora gráfica o un programa de gráficos por ordenador para investigar el comportamiento de las curvas cuyas ecuaciones son de la forma

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos t + \frac{1}{n} \cos((n-1)t)$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin t + \frac{1}{n} \sin((n-1)t)$$

para varios valores enteros y fraccionarios de  $n \geq 3$ . ¿Se pueden formular principios que gobiernan el comportamiento de estas curvas?

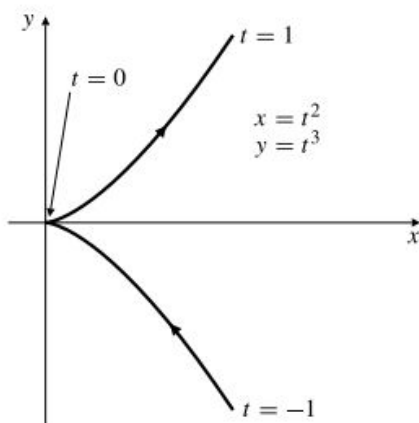
### 8.3 Curvas paramétricas suaves y sus pendientes

Se dice que una curva plana es suave si existe tangente en todo punto  $P$  de dicha curva, y dicha tangente evoluciona de una forma continua a medida que  $P$  recorre la curva (es decir, el ángulo que forman la tangente en  $P$  y otra recta fija, por ejemplo el eje  $x$ , es una función continua de la posición de  $P$ ).

Si la curva  $c$  es la gráfica de una función  $f$ , entonces  $c$  será suave en cualquier intervalo donde exista la derivada  $f'(x)$  y ésta sea una función continua de  $x$ . Puede ser también suave en intervalos que contengan puntos singulares aislados; por ejemplo, la curva  $y = x^{1/3}$  es suave en todas partes, aunque  $dy/dx$  no exista en  $x = 0$ .

En el caso de curvas paramétricas  $x = f(t), y = g(t)$ , la situación es más complicada. Aunque  $f$  y  $g$  tengan derivadas continuas en todas partes, esas curvas pueden no ser suaves en ciertos puntos, concretamente los puntos donde  $f'(t) = g'(t) = 0$ .

**Ejemplo 1** Considere la curva paramétrica  $x = f(t) = t^2, y = g(t) = t^3$ . Eliminando  $t$  se llega a la curva en cartesianas  $y^2 = x^3$  o  $x = y^{2/3}$ , que no es suave en el origen, incluso aunque  $f'(t) = 2t$  y  $g'(t) = 3t^2$  sean continuas para todo  $t$  (véase la Figura 8.25). Obsérvese que tanto  $f'$  como  $g'$  se anulan en  $t = 0$ :  $f'(0) = g'(0) = 0$ . Si vemos las ecuaciones paramétricas como una forma de especificar la posición de un



**Figura 8.25** Esta curva no es suave en el origen y presenta allí un vértice.

punto móvil  $P$  en el instante  $t$ , entonces la velocidad horizontal es  $f'(t)$  y la velocidad vertical es  $g'(t)$ . Ambas velocidades son 0 en  $t = 0$ , por lo que  $P$  se detiene en ese instante. Cuando empieza a moverse de nuevo, no necesita hacerlo en la misma dirección en la que iba cuando se detuvo. La cicloide del Ejemplo 8 de la Sección 8.2 es otro ejemplo en el que una curva paramétrica no es suave en puntos donde  $dx/dt$  y  $dy/dt$  se anulan.

## Pendiente de una curva paramétrica

El teorema que sigue confirma que una curva paramétrica es suave en los puntos donde las derivadas de las funciones de sus coordenadas son continuas y no se anulan simultáneamente.

**TEOREMA 1** Sea  $c$  la curva paramétrica  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , donde  $f'(t)$  y  $g'(t)$  son continuas en un intervalo  $I$ . Si  $f'(t) \neq 0$  en  $I$ , entonces  $c$  es suave y tiene en cada valor de  $t$  una tangente cuya pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Si  $g'(t) \neq 0$  en  $I$ , entonces  $c$  es suave y tiene en cada valor de  $t$  una normal cuya pendiente es

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Por tanto,  $c$  es suave excepto, posiblemente, en aquellos puntos donde  $f'(t)$  y  $g'(t)$  sean simultáneamente 0.

**DEMOSTRACIÓN** Si  $f'(t) \neq 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es o bien creciente o bien decreciente en  $I$ , y por tanto es uno a uno e invertible. La parte de  $c$  correspondiente a los valores de  $t$  en  $I$  tiene como ecuación ordinaria  $y = g(f^{-1}(x))$ , y por tanto su pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = g'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Donde hemos utilizado la fórmula

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

para expresar la derivada de una función inversa, que se obtuvo en la Sección 3.1. Esta pendiente es una función continua de  $t$ , por lo que la tangente a  $c$  evoluciona de forma continua con  $t$  en  $I$ . La demostración para  $g'(t) \neq 0$  es similar. En este caso, la pendiente de la normal es una función continua de  $t$ , por lo que la normal evoluciona de forma continua, y así lo hace también la tangente.

Si  $f'$  y  $g'$  son continuas, y ambas se anulan en algún punto  $t_0$ , entonces la curva  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , puede ser o no ser continua alrededor de  $t_0$ . En el Ejemplo 1 se ha presentado un ejemplo de una curva que no es suave en un punto de ese tipo.

**Ejemplo 2** La curva cuya parametrización es  $x = t^3$ ,  $y = t^6$  corresponde a la parábola  $y = x^2$ , por lo que es suave en todas partes, aunque  $dx/dt = 3t^2$  y  $dy/dt = 6t^5$  se anulen simultáneamente en  $t = 0$ .



**Tangentes y normales a curvas paramétricas**

Si  $f'$  y  $g'$  son continuas y no se anulan simultáneamente en  $t_0$ , entonces las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

representan la tangente a la curva paramétrica  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  en el punto  $(f(t_0), g(t_0))$ . Las ecuaciones paramétricas a la normal en ese punto son

$$\begin{cases} x = f(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

Ambas rectas pasan por  $(f(t_0), g(t_0))$  cuando  $t = t_0$ .

**Ejemplo 3** Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva paramétrica  $x = t^2 - t$ ,  $y = t^2 + t$  en el punto donde  $t = 2$ .

**Solución** En  $t = 2$  tenemos que  $x = 2$ ,  $y = 6$  y

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 1 = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 1 = 5$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente y normal son

$$\begin{aligned} \text{Tangente: } & \begin{cases} x = 2 + 3(t - 2) = 3t - 4 \\ y = 6 + 5(t - 2) = 5t - 4 \end{cases} \\ \text{Normal: } & \begin{cases} x = 2 + 5(t - 2) = 5t - 8 \\ y = 6 - 3(t - 2) = -3t + 12 \end{cases} \end{aligned}$$

La concavidad de una curva paramétrica se puede determinar utilizando las segundas derivadas de las ecuaciones paramétricas. El procedimiento consiste en calcular  $d^2y/dx^2$  utilizando la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{g'(t)}{f'(t)} \right) \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^2} \frac{1}{f'(t)} \end{aligned}$$

**Concavidad de una curva paramétrica**

En un intervalo donde  $f'(t) \neq 0$ , la concavidad de la curva paramétrica  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  está determinada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

**Dibujo de curvas paramétricas**

Como en el caso del dibujo de gráficas de funciones, las derivadas proporcionan información de utilidad sobre la forma de una curva paramétrica. En los puntos donde  $dy/dt = 0$  pero  $dx/dt \neq 0$ , la tangente es horizontal; en los puntos donde  $dx/dt = 0$  pero  $dy/dt \neq 0$ , la tangente es vertical.

En los puntos donde  $dx/dt = dy/dt = 0$  puede ocurrir cualquier cosa; es conveniente calcular los límites por la derecha y por la izquierda de la pendiente  $dy/dx$  cuando el parámetro  $t$  se aproxima a uno de esos puntos. La concavidad se puede determinar utilizando la fórmula obtenida anteriormente. Ilustraremos estas ideas reconsiderando una curva paramétrica que encontramos en la sección anterior.

**Ejemplo 4** Utilice información de pendiente y de concavidad para dibujar la gráfica de la curva paramétrica

$$x = f(t) = t^3 - 3t, \quad y = g(t) = t^2, \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

que encontramos previamente en el Ejemplo 5 de la Sección 8.2.

**Solución** Tenemos que

$$f'(t) = 3(t^2 - 1) = 3(t - 1)(t + 1), \quad g'(t) = 2t$$

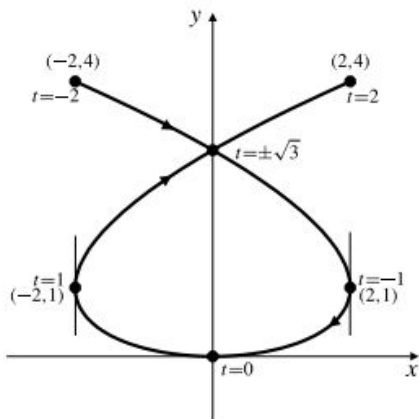
La curva tiene tangente horizontal en  $t = 0$ , es decir, en  $(0, 0)$ , y tangentes verticales en  $t = \pm 1$ , es decir, en  $(2, 1)$  y  $(-2, 1)$ . La tabla que sigue resume la información direccional de la curva entre esos puntos.

$t$	-2	-1	0	1	2	
$f'(t)$	+	0	-	-	0	+
$g'(t)$	-	-	0	+	+	+
$x$	→	·	←	←	·	→
$y$	↓	↓	·	↑	↑	↑
curva	↘	↓	↙	←	↖	↗

Para estudiar la concavidad se calcula la segunda derivada  $d^2y/dx^2$  mediante la fórmula obtenida anteriormente. Como  $f''(t) = 6t$  y  $g''(t) = 2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3} \\ &= \frac{3(t^2 - 1)(2) - 2t(6t)}{[3(t^2 - 1)]^3} = -\frac{2}{9} \frac{t^2 + 1}{(t^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

que nunca se anula pero que no está definida en  $t = \pm 1$ . Evidentemente la curva es convexa para  $-1 < t < 1$  y cóncava en el resto. La Figura 8.26 muestra la curva.



**Figura 8.26**

### Ejercicios 8.3

En los Ejercicios 1-8, calcule las coordenadas de los puntos en los que las curvas paramétricas dadas tienen (a) una tangente horizontal y (b) una tangente vertical.

1.  $x = t^2 + 1, y = 2t - 4$       2.  $x = t^2 - 2t, y = t^2 + 2t$   
 3.  $x = t^2 - 2t, y = t^3 - 12t$   
 4.  $x = t^3 - 3t, y = 2t^3 + 3t^2$   
 5.  $x = te^{-t/2}, y = e^{-t}$   
 6.  $x = \sin t, y = \sin t - t \cos t$   
 7.  $x = \sin 2t, y = \sin t$       8.  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

Calcule las pendientes de las curvas de los Ejercicios 9-12 en los puntos que se indican.

9.  $x = t^3 + t, y = 1 - t^3$ , en  $t = 1$   
 10.  $x = t^4 - t^2, y = t^3 + 2t$ , en  $t = -1$   
 11.  $x = \cos 2t, y = \sin t$ , en  $t = \pi/6$   
 12.  $x = e^{2t}, y = te^{2t}$ , en  $t = -2$

Calcule las ecuaciones paramétricas de las tangentes a las curvas de los Ejercicios 13 y 14 en los puntos indicados.

13.  $x = t^3 - 2t, y = t + t^3$ , en  $t = 1$   
 14.  $x = t - \cos t, y = 1 - \sin t$ , en  $t = \pi/4$

15. Demuestre que la curva  $x = t^3 - t, y = t^2$  tiene dos tangentes diferentes en el punto  $(0, 1)$  y calcule sus pendientes.

16. Calcule las pendientes de dos rectas que sean tangentes a  $x = \sin t, y = \sin 2t$  en el origen.

¿Dónde dejan de ser suaves las curvas de los Ejercicios 17-20, si es que lo hacen?

17.  $x = t^3, y = t^2$   
 18.  $x = (t - 1)^4, y = (t - 1)^3$   
 19.  $x = t \sin t, y = t^3$       20.  $x = t^3, y = t - \sin t$

En los Ejercicios 21-25, dibuje las gráficas de las curvas paramétricas dadas, haciendo uso de la información de las dos primeras derivadas. A menos que se indique lo contrario, el intervalo del parámetro en cada curva es toda la recta real.

21.  $x = t^2 - 2t, y = t^2 - 4t$       22.  $x = t^3, y = 3t^2 - 1$   
 23.  $x = t^3 - 3t, y = \frac{2}{1+t^2}$   
 24.  $x = t^3 - 3t - 2, y = t^2 - t - 2$   
 25.  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$  ( $t \geq 0$ ) (véase el Ejemplo 9 de la Sección 8.2).

### 8.4 Longitudes de arco y áreas de curvas paramétricas

Esta sección está dedicada a los problemas del cálculo de longitudes de curvas definidas paramétricamente, de áreas de superficies de revolución obtenidas rotando curvas paramétricas y de áreas de regiones planas limitadas por curvas paramétricas.

#### Longitudes de arco y áreas de superficie

Sea  $C$  una curva paramétrica suave con ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

Se supone que  $f'(t)$  y  $g'(t)$  son continuas en el intervalo  $[a, b]$  y que nunca valen cero simultáneamente. A partir del triángulo diferencial con catetos  $dx$  y  $dy$  e hipotenusa  $ds$  (véase la Figura 8.27) se obtiene  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ , por lo que tenemos

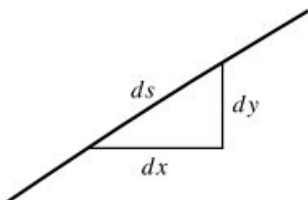


Figura 8.27 Un triángulo diferencial.

**Elemento de longitud de arco de una curva paramétrica**

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

La longitud de la curva  $C$  se expresa como

$$s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

**Ejemplo 1** Calcule la longitud de la curva paramétrica

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2)$$

**Solución** Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = e^t (\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t (\sin t + \cos t)$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores, sumando y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 \\ &= e^{2t} (\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) \\ &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud de la curva es

$$s = \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^2 e^t dt = \sqrt{2} (e^2 - 1) \text{ unidades}$$

Las curvas paramétricas se pueden rotar alrededor de diversos ejes para generar superficies de revolución. Las áreas de estas superficies se pueden calcular mediante el mismo procedimiento utilizado para gráficas de funciones, con la versión apropiada de  $ds$ . Si la curva

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

se rota alrededor del eje  $x$ , el área  $S$  de la superficie generada se expresa como

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{t=b} |y| ds = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Si la rotación es respecto al eje  $y$ , entonces el área es

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{t=b} |x| ds = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

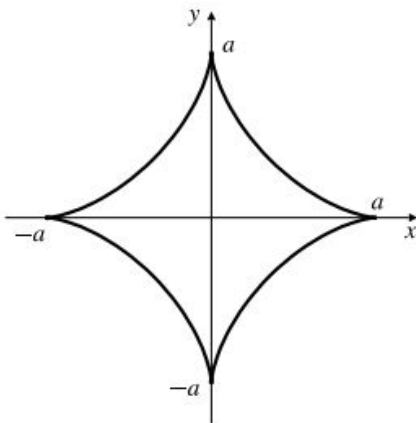
**Ejemplo 2** Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene rotando la curva astroide

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

con  $a > 0$ , alrededor del eje  $x$ .

**Solución** La curva es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados (véase la Figura 8.28). La superficie completa se generará rotando la mitad superior de la curva; de hecho, sólo es necesario rotar la parte del primer cuadrante y multiplicar después por 2. La parte del primer cuadrante de la curva corresponde a  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Tenemos entonces

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$



**Figura 8.28**

De acuerdo con esto, la longitud del elemento de arco es

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 3a \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= 3a \cos t \sin t dt \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la superficie pedida es

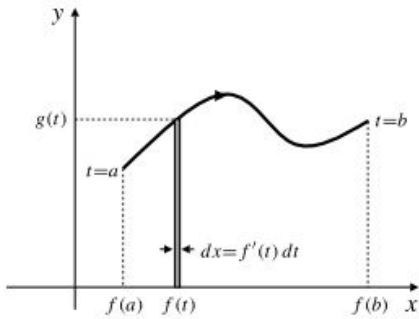
$$\begin{aligned} S &= 2 \times 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt \quad \text{Sea } u = \sin t, \\ &\quad \quad \quad du = \cos t dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^1 u^4 du = \frac{12\pi a^2}{5} \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

## Áreas limitadas por curvas paramétricas

Considere la curva paramétrica  $c$  con ecuaciones  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , ( $a \leq t \leq b$ ), siendo  $f$  diferenciable y  $g$  continua en el intervalo  $[a, b]$ . Por el momento, supongamos también que  $f'(t) \geq 0$  y  $g(t) \geq 0$  en  $[a, b]$ , por lo que  $c$  no tiene puntos por debajo del eje  $x$  y se recorre de izquierda a derecha cuando  $t$  va desde  $a$  hasta  $b$ .

El elemento de área de la región bajo la curva  $c$  y por encima del eje  $x$  es  $dA = y dx = g(t) f'(t) dt$ , por lo que su área (véase la Figura 8.29) es

$$A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$$



**Figura 8.29**

En los otros tres casos se pueden dar argumentos similares:

Si  $f'(t) \geq 0$  y  $g(t) \leq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $A = - \int_a^b g(t) f'(t) dt$ ,

Si  $f'(t) \leq 0$  y  $g(t) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $A = - \int_a^b g(t) f'(t) dt$ ,

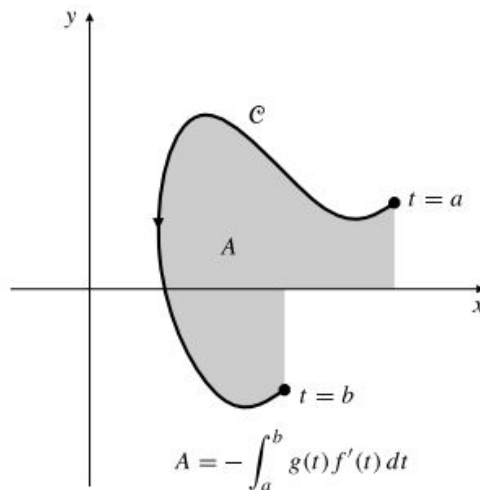
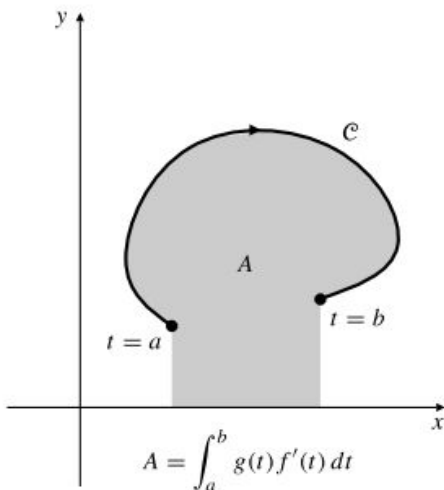
Si  $f'(t) \leq 0$  y  $g(t) \leq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$ ,

siendo  $A$  el área (positiva) limitada por  $c$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = f(a)$  y  $x = f(b)$ . Combinando estos resultados podemos ver que

$$\int_a^b g(t) f'(t) dt = A_1 - A_2$$

siendo  $A_1$  el área dispuesta verticalmente entre  $c$  y la parte del eje  $x$  formada por los puntos  $x = f(t)$  tales que  $g(t) f'(t) \geq 0$ , y  $A_2$  un área similar correspondiente a los puntos donde  $g(t) f'(t) < 0$ . Esta fórmula es válida para funciones arbitrarias  $g$  continuas y  $f$  diferenciables. Véase la Figura 8.30 donde se presentan ejemplos genéricos. En particular, si  $c$  es una curva cerrada que no se cruza consigo misma, entonces el área de la región limitada por  $c$  se expresa como

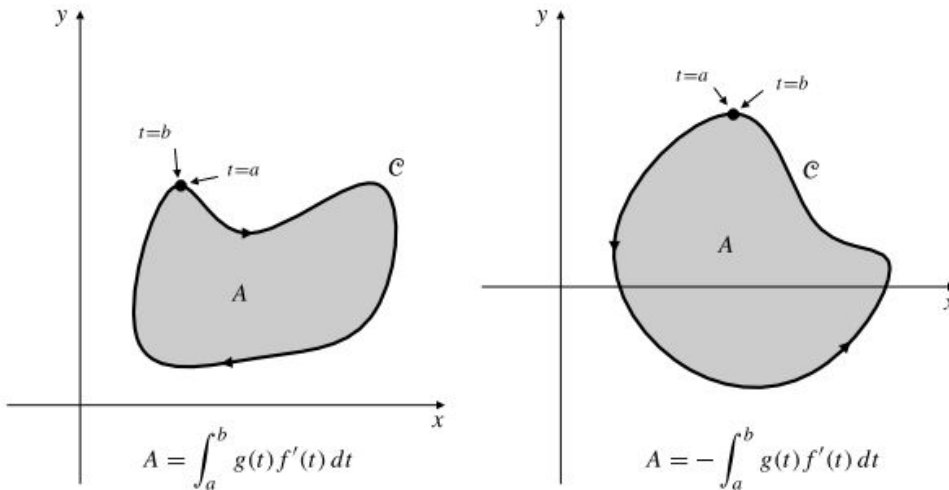
$$A = \int_a^b g(t) f'(t) dt \quad \text{si } c \text{ se recorre en el sentido de las agujas del reloj cuando } t \text{ crece}$$



**Figura 8.30** Áreas definidas por curvas paramétricas.

$$A = - \int_a^b g(t) f'(t) dt \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj}$$

Ambos casos se ilustran en la Figura 8.31.



**Figura 8.31** Áreas limitadas por curvas paramétricas cerradas.

**Ejemplo 3** Calcule el área limitada por la elipse  $x = a \cos s$ ,  $y = b \sin s$ .

**Solución** Esta elipse se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj (véase el Ejemplo 4 de la Sección 8.2). El área encerrada es

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^{2\pi} b \sin s (-a \sin s) ds \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2s) ds \\ &= \frac{ab}{2} s \Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{4} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} = \pi ab \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4** Calcule el área comprendida por encima del eje  $x$  y por debajo de un arco de la cicloide  $x = at - a \sin t$ ,  $y = a - a \cos t$ .

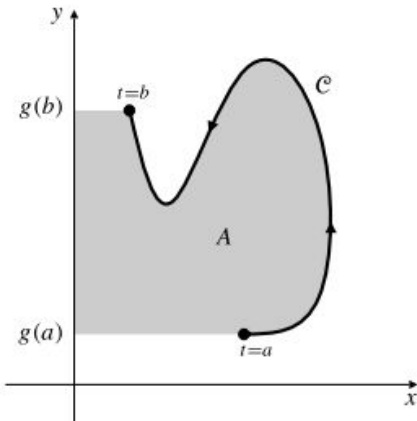
**Solución** Parte de la cicloide se muestra en la Figura 8.21 en la Sección 8.2. Un arco corresponde al intervalo de valores del parámetro  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $y = a(1 - \cos t) \geq 0$  y  $dx/dt = a(1 - \cos t) \geq 0$ , el área bajo un arco es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= a^2 \left( t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Argumentos similares a los usados anteriormente permiten demostrar que si  $f$  es continua y  $g$  es diferenciable, entonces también podemos interpretar

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \int_{t=a}^{t=b} x dy = A_1 - A_2$$

siendo  $A_1$  el área de la región dispuesta *horizontalmente* entre la curva paramétrica  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , ( $a \leq t \leq b$ ) y la parte del eje  $y$  formada por los puntos  $y = g(t)$  tales que  $f(t)g'(t) \geq 0$ , y  $A_2$  el área de una región similar correspondiente a  $f(t)g'(t) < 0$ . Por ejemplo, el área de la región sombreada en la Figura 8.32 es  $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ . El Teorema de Green de la Sección 16.3 proporcionará un enfoque más coherente para el cálculo de estas áreas.



**Figura 8.32** El área sombreada es  $A = \int_a^b f(t)g'(t) dt$ .

### Ejercicios 8.4

Calcule las longitudes de las curvas en los Ejercicios 1-8.

1.  $x = 3t^2, y = 2t^3, (0 \leq t \leq 1)$
2.  $x = 1 + t^3, y = 1 - t^2, (-1 \leq t \leq 2)$
3.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$
4.  $x = \ln(1 + t^2), y = 2 \tan^{-1} t, (0 \leq t \leq 1)$
5.  $x = t^2 \sin t, y = t^2 \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi)$
6.  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi)$
7.  $x = t + \sin t, y = \cos t, (0 \leq t \leq \pi)$
8.  $x = \sin^2 t, y = 2 \cos t, (0 \leq t \leq \pi/2)$
9. Calcule la longitud de un arco de la cicloide  $x = at - a \sin t, y = a - a \cos t$  (un arco corresponde a  $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
10. Calcule el área de la superficie que se obtiene al rotar un arco de la cicloide del Ejercicio 9 alrededor de (a) el eje  $x$ , (b) el eje  $y$ .
11. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, (0 \leq t \leq \pi/2)$  alrededor del eje  $x$ .
12. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva del Ejercicio 11 alrededor del eje  $y$ .
13. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva  $x = 3t^2, y = 2t^3, (0 \leq t \leq 1)$  alrededor del eje  $y$ .
14. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva  $x = 3t^2, y = 2t^3, (0 \leq t \leq 1)$  alrededor del eje  $x$ .

En los Ejercicios 15-20, dibuje y calcule el área de la región  $R$  descrita en función de las curvas paramétricas dadas.

15.  $R$  es la región cerrada limitada por  $x = t^3 - 4t, y = t^2, (-2 \leq t \leq 2)$ .
16.  $R$  está limitada por la astroide  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$ .
17.  $R$  está limitada por los ejes coordenados y el arco parabólico  $x = \sin^4 t, y = \cos^4 t$ .
18.  $R$  está limitada por  $x = \cos s \sin s, y = \sin^2 s, (0 \leq s \leq \pi/2)$ , y el eje  $y$ .
19.  $R$  está limitada por el óvalo  $x = (2 + \sin t) \cos t, y = (2 + \sin t) \sin t$ .
- \*20.  $R$  está limitada por el eje  $x$ , la hipérbola  $x = \sec t, y = \tan t$ , y el rayo que une el origen con el punto  $(\sec t_0, \tan t_0)$ .
21. Demuestre que la región limitada por el eje  $x$ , la hipérbola  $x = \cosh t, y = \sinh t$  (siendo  $t > 0$ ) y el rayo que une el origen con el punto  $(\cosh t_0, \sinh t_0)$  tiene un área de  $t_0/2$  unidades al cuadrado. Esto ilustra la afirmación hecha al principio de la Sección 3.6.
22. Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor del eje  $x$  la región limitada por dicho eje y un arco de la cicloide  $x = at - a \sin t, y = a - a \cos t$  (véase el Ejemplo 8 de la Sección 8.2).
23. Calcule el volumen generado al rotar alrededor del eje  $x$  la región bajo la astroide  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  y por encima del eje  $x$ .

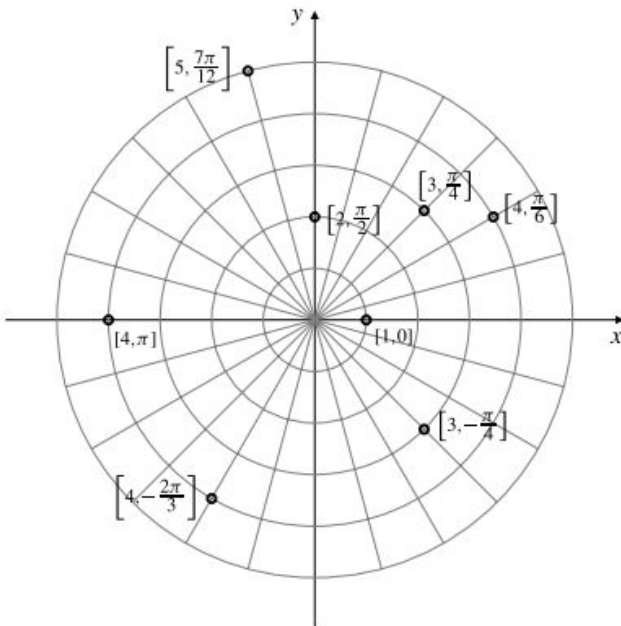


## 8.5 Coordenadas polares y curvas en polares

El **sistema de coordenadas polares** es una alternativa al sistema de coordenadas rectangulares (cartesianas) para indicar la posición de puntos en el plano. Algunas veces es más importante conocer la distancia y la dirección de un punto respecto al origen que conocer sus coordenadas cartesianas. En el sistema de coordenadas polares hay un origen (o **polo**),  $O$ , y un **eje polar**, que es un rayo (es decir, una semirrecta) cuyo origen es  $O$  y que se extiende horizontalmente hacia la derecha. La posición de un punto cualquiera  $P$  en el plano queda determinada por sus coordenadas polares  $[r, \theta]$ , siendo

- (i)  $r$  la distancia de  $O$  a  $P$ , y
- (ii)  $\theta$  el ángulo que forma el rayo  $OP$  con el eje polar (los ángulos positivos se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj).

Representaremos entre corchetes las coordenadas polares de un punto para distinguirlas de sus coordenadas rectangulares (cartesianas). La Figura 8.33 muestra algunos puntos y sus coordenadas polares. En una gráfica en polares se suelen mostrar también los ejes de coordenadas rectangulares  $x$  e  $y$ . El eje polar coincide con el eje  $x$  positivo.



**Figura 8.33** Coordenadas polares de algunos puntos en el plano  $xy$ .

A diferencia de las coordenadas rectangulares, las coordenadas polares de un punto no son únicas. Las coordenadas polares  $[r, \theta_1]$  y  $[r, \theta_2]$  representan el mismo punto siempre que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se diferencien en un múltiplo entero de  $2\pi$ :

$$\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi, \quad \text{donde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por ejemplo, las coordenadas polares

$$\left[3, \frac{\pi}{4}\right], \left[3, \frac{9\pi}{4}\right] \text{ y } \left[3, -\frac{7\pi}{4}\right]$$

representan el mismo punto en coordenadas cartesianas:  $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ . Análogamente,  $[4, \pi]$  y  $[4, -\pi]$  representan el mismo punto de coordenadas cartesianas  $(-4, 0)$ , y  $[1, 0]$  y  $[1, 2\pi]$  representan el punto de coordenadas cartesianas  $(1, 0)$ . Además, las coordenadas polares del origen  $O$

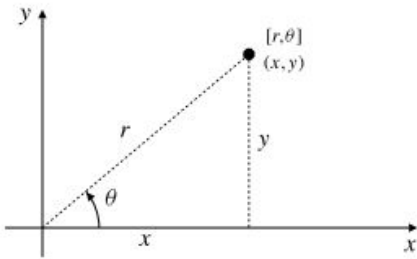
son  $[0, \theta]$  para cualquier valor de  $\theta$  (si nos desplazamos una distancia cero desde el origen, no importa en qué dirección lo hagamos).

Algunas veces es necesario interpretar las coordenadas polares  $[r, \theta]$  cuando  $r < 0$ . La interpretación adecuada de esta «distancia negativa»  $r$  es que representa una distancia positiva  $-r$  medida en la *dirección opuesta* (es decir, en la dirección  $\theta + \pi$ ):

$$[r, \theta] = [-r, \theta + \pi]$$

Por ejemplo,  $[-1, \pi/4] = [1, 5\pi/4]$ . Si se permite que  $r < 0$ , aumenta el número de conjuntos de coordenadas polares diferentes que representan al mismo punto.

Si se desea considerar sistemas de coordenadas polares y rectangulares en el mismo plano, y se escoge como eje polar la dirección positiva del eje  $x$ , entonces las relaciones entre las coordenadas rectangulares de un punto y sus correspondientes coordenadas polares se muestran en la Figura 8.34.



**Figura 8.34** Relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto.

**Conversión polar-rectangular**

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= r \operatorname{sen} \theta & \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Una ecuación en  $x$  e  $y$  representa en general una curva en el plano respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. De forma similar, una ecuación en  $r$  y  $\theta$  representa en general una curva con respecto a un sistema de coordenadas polares. Las fórmulas de conversión anteriores se pueden emplear para transformar una representación de una curva en la otra.

**Ejemplo 1** La ecuación en polares de la recta  $2x - 3y = 5$  es  $r(2 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta) = 5$  o

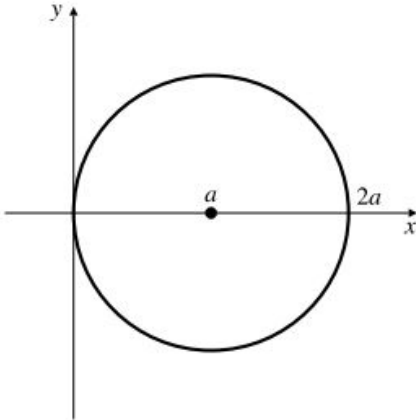
$$r = \frac{5}{2 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta}$$

**Ejemplo 2** Calcule la ecuación en cartesianas de la curva cuya ecuación en polares es  $r = 2a \cos \theta$ , e identifique dicha curva.

**Solución** La ecuación en polares se puede transformar a coordenadas cartesianas multiplicando primero por  $r$ :

$$\begin{aligned} r^2 &= 2ar \cos \theta \\ x^2 + y^2 &= 2ax \\ (x - a)^2 + y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

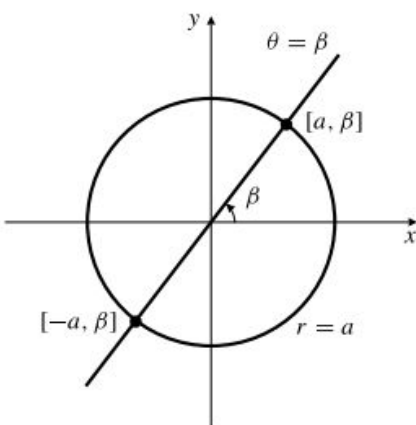
La ecuación en polares dada  $r = 2a \cos \theta$  representa, por tanto, una circunferencia con centro en  $(a, 0)$  y radio  $a$ , como se muestra en la Figura 8.35. Obsérvese en la ecuación que  $r \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \pm \pi/2$ . En la figura, esto corresponde al hecho de que la circunferencia se aproxima al origen en la dirección vertical.



**Figura 8.35** La circunferencia  $r = 2a \cos \theta$ .

## Algunas curvas en polares

La Figura 8.36 muestra las gráficas de las ecuaciones en polares  $r = a$  y  $\theta = \beta$ , siendo  $a$  y  $\beta$  (la letra griega «beta») constantes. Son, respectivamente, una circunferencia de radio  $|a|$  centrada en el origen, y una recta que pasa por el origen y forma un ángulo  $\beta$  con el eje polar. Nótese que la recta y la circunferencia se cruzan en dos puntos, cuyas coordenadas en polares son  $[a, \beta]$  y  $[-a, \beta]$ . Las «curvas coordenadas» en coordenadas polares, es decir, las curvas cuyas ecuaciones son  $r = \text{constante}$  y  $\theta = \text{constante}$  son, respectivamente, circunferencias centradas en el origen y rectas que pasan por el origen. Las «curvas coordenadas» en coordenadas cartesianas,  $x = \text{constante}$  e  $y = \text{constante}$  son rectas verticales y horizontales. El papel para dibujar gráficas en cartesianas se encuentra regulado mediante divisiones horizontales y verticales, y el papel para dibujar gráficas en polares se encuentra regulado con circunferencias concéntricas y rectas radiales que salen del origen, como se muestra en las Figuras 8.33 y 8.38.



**Figura 8.36** Curvas coordenadas del sistema de coordenadas polares.

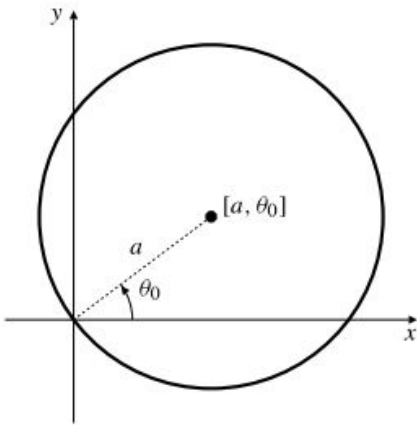
La gráfica de una ecuación de la forma  $r = f(\theta)$  se denomina **gráfica en polares** de la función  $f$ . Algunas gráficas en polares se pueden reconocer fácilmente si la ecuación en polares se transforma en su forma rectangular. En otros casos, esta transformación no sirve de ayuda; la ecuación en coordenadas rectangulares puede ser demasiado complicada como para ser reconocible. En estos casos hay que utilizar el recurso de construir una tabla de valores y dibujar los puntos.

**Ejemplo 3** Dibuje e identifique la curva  $r = 2a \cos(\theta - \theta_0)$ .

**Solución** Procedemos como en el Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} r^2 &= 2a \cos(\theta - \theta_0) = 2a \cos \theta_0 \cos \theta + 2a \sin \theta_0 \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= 2a \cos \theta_0 x + 2a \sin \theta_0 y \\ x^2 - 2a \cos \theta_0 x + a^2 \cos^2 \theta_0 + y^2 - 2a \sin \theta_0 y + a^2 \sin^2 \theta_0 &= a^2 \\ (x - a \cos \theta_0)^2 + (y - a \sin \theta_0)^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Se trata de una circunferencia de radio  $a$  que pasa por el origen en la dirección  $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$ , que hace  $r = 0$  (véase la Figura 8.37). Las coordenadas cartesianas de su centro son  $(a \cos \theta_0, a \sin \theta_0)$ , que en polares son  $[a, \theta_0]$ . Para  $\theta_0 = \pi/2$  tenemos que  $r = 2a \sin \theta$  corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio  $a$  centrada en el eje  $y$ .



**Figura 8.37** La circunferencia  $r = 2a \cos(\theta - \theta_0)$ .

Comparando los Ejemplos 2 y 3, podemos formular el siguiente principio:

**Rotación de una gráfica en polares**

La gráfica en polares de ecuación  $r = f(\theta - \theta_0)$  corresponde a la gráfica en polares de ecuación  $r = f(\theta)$  rotada un ángulo  $\theta_0$  alrededor del origen.

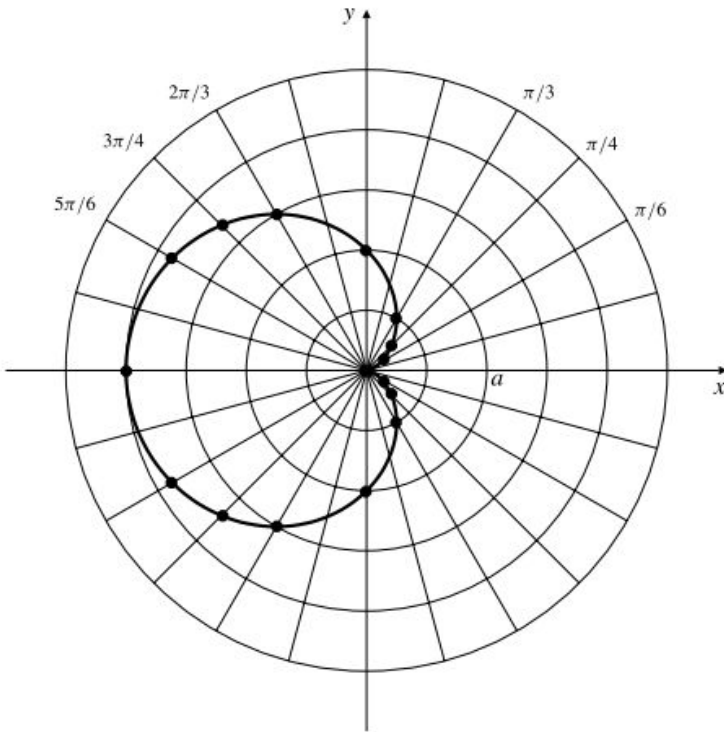
**Ejemplo 4** Dibuje la curva en polares  $r = a(1 - \cos \theta)$  siendo  $a > 0$ .

**Solución** La transformación a coordenadas rectangulares no sirve aquí de mucha ayuda. La ecuación resultante es  $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$  (verifíquese), que no podemos reconocer. Por tanto, construiremos una tabla de valores y dibujaremos algunos puntos.

**Tabla 3**

$\theta$	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{2\pi}{3}$	$\pm \frac{3\pi}{4}$	$\pm \frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$r$	0	$0.13a$	$0.29a$	$0.5a$	$a$	$1.5a$	$1.71a$	$1.87a$	$2a$

Como tiene forma de corazón, esta curva se denomina **cardioide**. Obsérvese en la Figura 8.38 el vértice en el origen. Como en el ejemplo anterior, la curva llega al origen en las direcciones  $\theta$  que hacen  $r = f(\theta) = 0$ . En este caso, la única dirección que lo cumple es  $\theta = 0$ . Es importante, al dibujar gráficas en polares, mostrar claramente en qué dirección se aproximan al origen.



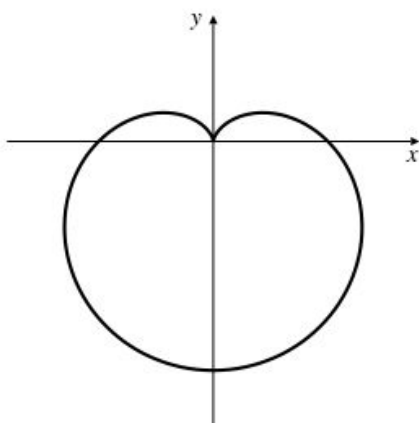
**Figura 8.38** La cardioide  $r = a(1 - \cos \theta)$ .

**Dirección de una gráfica en polares en el origen**

Una gráfica en polares  $r = f(\theta)$  se aproxima al origen siguiendo la dirección  $\theta$  para la que  $f(\theta) = 0$ .

La ecuación  $r = a(1 - \cos(\theta - \theta_0))$  representa una cardioide del mismo tamaño y forma que la de la Figura 8.38, pero rotada un ángulo  $\theta_0$  en sentido contrario al de las agujas del reloj. Su vértice está en la dirección  $\theta = \theta_0$ . En particular,  $r = a(1 - \sin \theta)$  tiene un vértice vertical, como se muestra en la Figura 8.39.

En general, no es necesario construir una tabla detallada de valores a la hora de dibujar una curva en polares de una ecuación simple de la forma  $r = f(\theta)$ . Es esencial determinar aquellos valores de  $\theta$  para los que  $r = 0$ , e indicarlos en la gráfica mediante rayos. También es de utilidad determinar los puntos en los que la gráfica se encuentra más alejada del origen (¿serán donde  $f(\theta)$  sea máxima o mínima?). Con la posibilidad de una excepción en el origen, las curvas en polares serán suaves siempre que  $f(\theta)$  sea diferenciable con respecto a  $\theta$ .

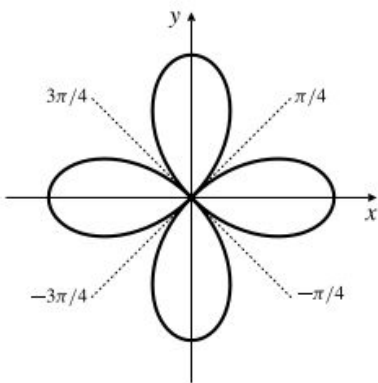


**Figura 8.39** La cardioide  $r = a(1 - \sin \theta)$ .

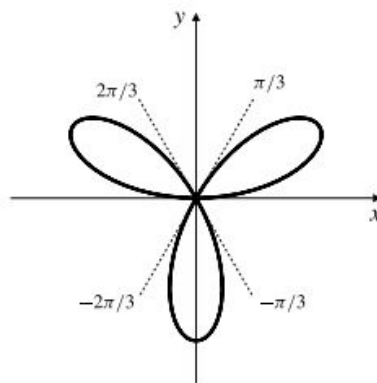
**Ejemplo 5** Dibuje la gráfica en polares (a)  $r = \cos(2\theta)$ , (b)  $r = \sin(3\theta)$  y (c)  $r^2 = \cos(2\theta)$ .

**Solución** Las gráficas se muestran en las Figuras 8.40-8.42. Obsérvese cómo las curvas (a) y (c) se acercan al origen en las direcciones  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$  y  $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$  y cómo la curva (b) se acerca al origen en las direcciones  $\theta = 0, \pi, \pm \frac{\pi}{3}$  y  $\pm \frac{2\pi}{3}$ . La curva se traza dos veces cuando  $\theta$  pasa de  $-\pi$  a  $\pi$ . También lo hace la curva (c) si admitimos los dos valores de la raíz cuadrada  $r = \pm \sqrt{\cos(2\theta)}$ . Nótese que la curva (c) no tiene puntos entre  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$  y  $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$  ya que  $r^2$  no puede ser negativo.

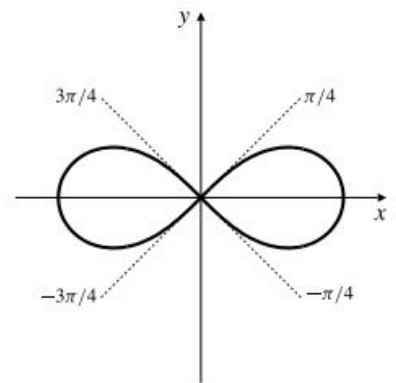
La curva (c) se denomina **lemniscata**. Las lemniscatas son curvas formadas por puntos  $P$  tales que el producto de las distancias de dichos puntos a ciertos puntos fijos es constante. En el caso de la curva (c), esos puntos son  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ .



**Figura 8.40** Curva (a): la curva en polares  $r = \cos(2\theta)$ .



**Figura 8.41** Curva (b): la curva en polares  $r = \sin(3\theta)$ .

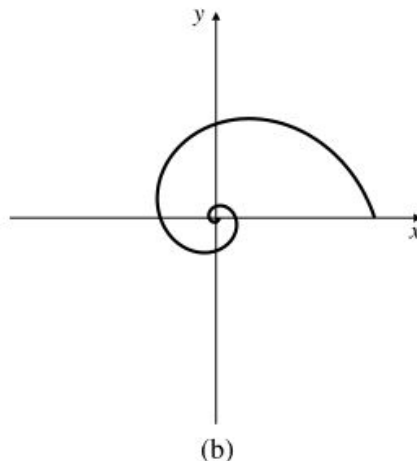
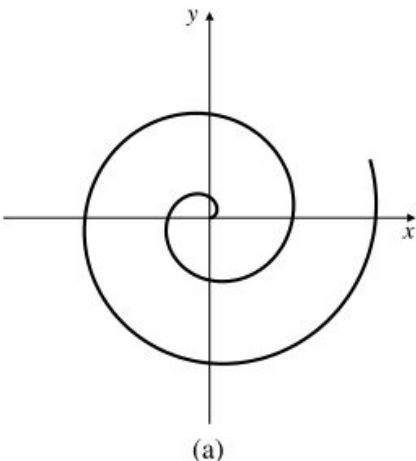


**Figura 8.42** Curva (c): la lemniscata  $r^2 = \cos(2\theta)$ .

En todos los ejemplos anteriores, las funciones  $f(\theta)$  son periódicas de periodo  $2\pi$ , de forma que cualquier recta que pasa por el origen puede cortar a la gráfica en polares como máximo dos veces ( $\theta$  y  $\theta + \pi$  determinan la misma recta). Si  $f(\theta)$  no es de periodo  $2\pi$ , entonces la curva puede enrollarse muchas veces alrededor del origen. La Figura 8.43 muestra dos *espirales* de este tipo, la **espiral equiangular**  $r = \theta$  y la **espiral exponencial**  $r = e^{-\theta/3}$ , las dos dibujadas para valores positivos de  $\theta$ .

**Observación** Maple incorpora la rutina `polarplot` como parte de su paquete «plots», que se debe cargar antes de utilizar dicha rutina. He aquí la forma en la que Maple dibuja en la misma gráfica las curvas en polares  $r = 1$  y  $r = 2 \sin(3\theta)$  para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ :

```
> with (plots) :
> polarplot ([1, 2*sin(3*t)], t=0..2*Pi, scaling=constrained)
```



**Figura 8.43**

(a) La espiral equiangular  $r = \theta$ .  
 (b) La espiral exponencial  $r = e^{-\theta/3}$ .

La opción `scaling=constrained` es necesaria en curvas en polares para que Maple utilice las mismas unidades de distancia en los dos ejes (de forma que una circunferencia tenga forma circular).

## Intersecciones de curvas en polares

Como las coordenadas polares de los puntos no son únicas, el cálculo de los puntos de intersección de dos puntos en polares puede ser más complicado que el mismo problema en coordenadas cartesianas. Por supuesto, las curvas en polares  $r = f(\theta)$  y  $r = g(\theta)$  se cortarán en los puntos  $[r_0, \theta_0]$  para los que

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) \quad \text{y} \quad r_0 = f(\theta_0)$$

pero pueden existir muchas otras intersecciones. En particular, si ambas curvas pasan por el origen, entonces el origen será un punto de intersección, que puede no aparecer al resolver la ecuación  $f(\theta) = g(\theta)$ , ya que las curvas pueden pasar por el origen con diferentes valores de  $\theta$ . Por ejemplo, las circunferencias  $r = \cos \theta$  y  $r = \sin \theta$  se cortan en el origen y también en el punto  $[1/\sqrt{2}, \pi/4]$ . Pero sólo se obtiene este último punto al resolver la ecuación  $\cos \theta = \sin \theta$  (véase la Figura 8.44).

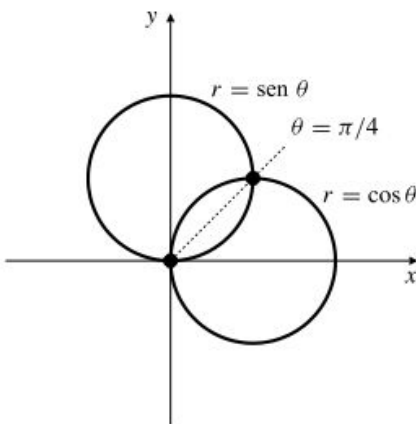


Figura 8.44

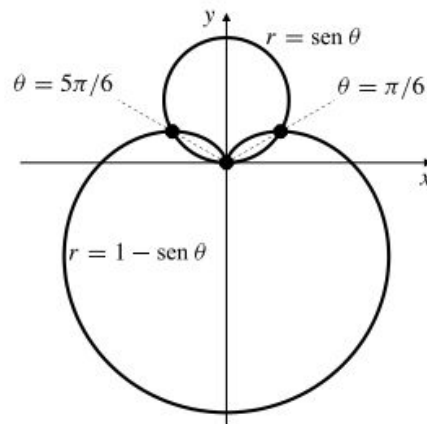


Figura 8.45

**Ejemplo 6** Calcule la intersección de las curvas  $r = \sin \theta$  y  $r = 1 - \sin \theta$ .

**Solución** Como las dos funciones de  $\theta$  son periódicas de periodo  $2\pi$ , sólo es necesario buscar las soluciones que cumplan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Resolviendo la ecuación

$$\sin \theta = 1 - \sin \theta$$

se obtiene  $\sin \theta = 1/2$ , por lo que  $\theta = \pi/6$  o  $\theta = 5\pi/6$ . Ambas curvas tienen  $r = 1/2$  en esos puntos, por lo que las dos curvas se cruzan en  $[1/2, \pi/6]$  y  $[1/2, 5\pi/6]$ . Además, el origen pertenece a la curva  $r = \sin \theta$  (para  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ ) y también a la curva  $r = 1 - \sin \theta$  (para  $\theta = \pi/2$ ). Por consiguiente, el origen es también un punto de intersección de las curvas (véase la Figura 8.45).

Finalmente, si se admiten valores de  $r$  negativos, entonces las curvas  $r = f(\theta)$  e  $r = g(\theta)$  se cortarán también en  $[r_1, \theta_1] = [r_2, \theta_2]$  si, para algún entero  $k$ ,

$$\theta_1 = \theta_2 + (2k + 1)\pi \quad \text{y} \quad r_1 = f(\theta_1) = -g(\theta_2) = -r_2$$

El Ejercicio 28 plantea un ejemplo.

### Cónicas en polares

Sea  $D$  la recta vertical  $x = -p$ , y sea  $\epsilon$  un número real positivo. El conjunto de puntos  $P$  del plano que cumplen la ecuación

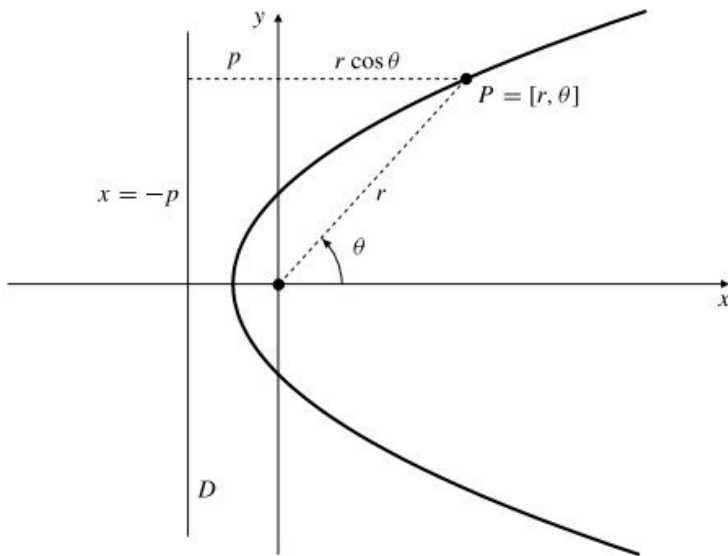
$$\frac{\text{distancia de } P \text{ al origen}}{\text{distancia perpendicular de } P \text{ a } D} = \epsilon$$

es una sección cónica de excentricidad  $\epsilon$ , foco en el origen y directriz  $D$ , como se vio en la Sección 8.1 (será una elipse si  $\epsilon < 1$ , una parábola si  $\epsilon = 1$  y una hipérbola si  $\epsilon > 1$ ). Si las coordenadas polares de  $P$  son  $[r, \theta]$ , entonces la condición anterior se convierte en (véase la Figura 8.46)

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = \epsilon$$

o, despejando  $r$ ,

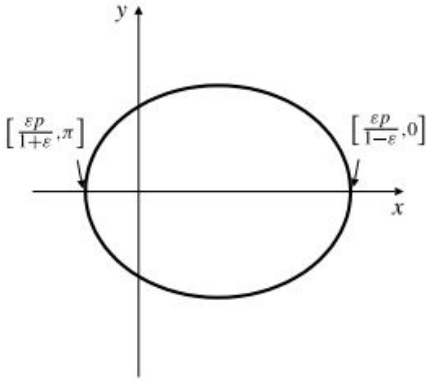
$$r = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon \cos \theta}$$



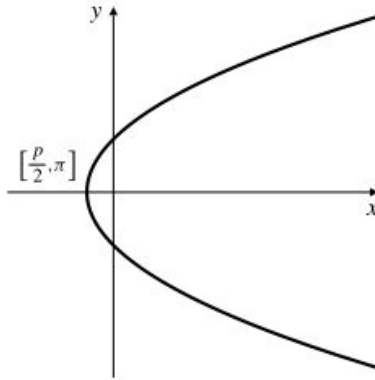
**Figura 8.46** Una curva cónica con excentricidad  $\epsilon$ , foco en el origen y directriz  $x = -p$ .

Las Figuras 8.47-8.49 muestran un ejemplo de las tres posibilidades (elipse, parábola e hipérbola). Nótese que, en el caso de la hipérbola, las direcciones de las asíntotas son los ángulos que hacen que el denominador sea  $1 - \epsilon \cos \theta = 0$ . En la Sección 11.6 tendremos más cosas que decir sobre las ecuaciones en polares de las cónicas, especialmente de las elipses.

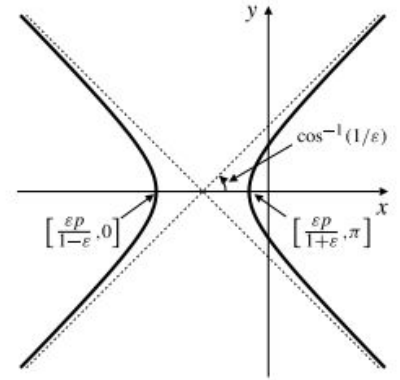




**Figura 8.47** Elipse:  $\epsilon < 1$ .



**Figura 8.48** Parábola:  $\epsilon = 1$ .



**Figura 8.49** Hipérbola:  $\epsilon > 1$ .

### Ejercicios 8.5

En los Ejercicios 1-12, transforme las ecuaciones dadas en polares a coordenadas rectangulares, e identifique la curva representada.

- |   |  |
|---|--|
| <b>1.</b> $r = 3 \sec \theta$                           | <b>2.</b> $r = -2 \csc \theta$                                   |
| <b>3.</b> $r = \frac{5}{3 \sin \theta - 4 \cos \theta}$ | <b>4.</b> $r = \sin \theta + \cos \theta$                        |
| <b>5.</b> $r^2 = \csc 2\theta$                          | <b>6.</b> $r = \sec \theta \tan \theta$                          |
| <b>7.</b> $r = \sec \theta(1 + \tan \theta)$            | <b>8.</b> $r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}}$ |
| <b>9.</b> $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$               | <b>10.</b> $r = \frac{2}{2 - \cos \theta}$                       |
| <b>11.</b> $r = \frac{2}{1 - 2 \sin \theta}$            | <b>12.</b> $r = \frac{2}{1 + \sin \theta}$                       |

En los Ejercicios 13-24, dibuje las gráficas en polares de las ecuaciones dadas.

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| <b>13.</b> $r = 1 + \sin \theta$   | <b>14.</b> $r = 1 - \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ |
| <b>15.</b> $r = 1 + 2 \cos \theta$ | <b>16.</b> $r = 1 - 2 \sin \theta$                |
| <b>17.</b> $r = 2 + \cos \theta$   | <b>18.</b> $r = 2 \sin 2\theta$                   |
| <b>19.</b> $r = \cos 3\theta$      | <b>20.</b> $r = 2 \cos 4\theta$                   |
| <b>21.</b> $r^2 = 4 \sin 2\theta$  | <b>22.</b> $r^2 = 4 \cos 3\theta$                 |
| <b>23.</b> $r^2 = \sin 3\theta$    | <b>24.</b> $r = \ln \theta$                       |

Calcule todas las intersecciones de las parejas de curvas de los Ejercicios 25-28.

- 25.**  $r = \sqrt{3} \cos \theta, \quad r = \sin \theta$   
**26.**  $r^2 = 2 \cos(2\theta), \quad r = 1$   
**27.**  $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 3 \cos \theta$

**\*28.**  $r = \theta, \quad r = \theta + \pi$

**29.** Dibuje la gráfica de la ecuación  $r = 1/\theta, \theta > 0$ . Demuestre que dicha curva tiene una asíntota horizontal. ¿Tiene  $r = 1/(\theta - \alpha)$  una asíntota?

- 30.** ¿Cuántas hojas tiene la curva  $r = \cos n\theta$ ? ¿Y la curva  $r^2 = \cos n\theta$ ? Distinga los casos de  $n$  par e impar.  
**31.** Demuestre que la gráfica en polares  $r = f(\theta)$  (siendo  $f$  continua) se puede expresar como una curva paramétrica con parámetro  $\theta$ .

En los Ejercicios 32-37, utilice un programa de gráficos por computador o una calculadora gráfica para dibujar algunos miembros de las familias dadas de curvas en polares, e intente descubrir pautas que le permitan adivinar el comportamiento de otras curvas que sean miembros de la misma familia.

- 32.**  $r = \cos \theta \cos(m\theta), \quad m = 1, 2, 3, \dots$
- 33.**  $r = 1 + \cos \theta \cos(m\theta), \quad m = 1, 2, 3, \dots$
- 34.**  $r = \sin(2\theta) \sin(m\theta), \quad m = 2, 3, 4, 5, \dots$
- 35.**  $r = 1 + \sin(2\theta) \sin(m\theta), \quad m = 2, 3, 4, 5, \dots$
- 36.**  $r = C + \cos \theta \cos(2\theta)$  para  $C = 0, C = 1$ , valores de  $C$  entre 0 y 1, y valores de  $C$  mayores que 1.
- 37.**  $r = C + \cos \theta \sin(3\theta)$  para  $C = 0, C = 1$ , valores de  $C$  entre 0 y 1, valores de  $C$  menores que 0 y valores de  $C$  mayores que 1.
- 38.** Dibuje la curva  $r = \ln \theta$  para  $0 < \theta \leq 2\pi$ . Esta gráfica se cruza consigo misma en el punto  $P$ . Por tanto, existen dos valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  entre 0 y  $2\pi$  para los que  $[f(\theta_1), \theta_1] = [f(\theta_2), \theta_2]$ . ¿Qué ecuaciones deben cumplir  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ? Calcule  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y obtenga las coordenadas cartesianas de  $P$  con una precisión de 6 cifras decimales.
- 39.** Dibuje simultáneamente las dos curvas  $r = \ln \theta$  y  $r = 1/\theta$  para  $0 < \theta \leq 2\pi$ . Las curvas se cortan en dos puntos. ¿Qué ecuaciones deben cumplir los valores de  $\theta$  de esos puntos? ¿Qué valor tienen sus coordenadas cartesianas con una precisión de 6 cifras decimales?