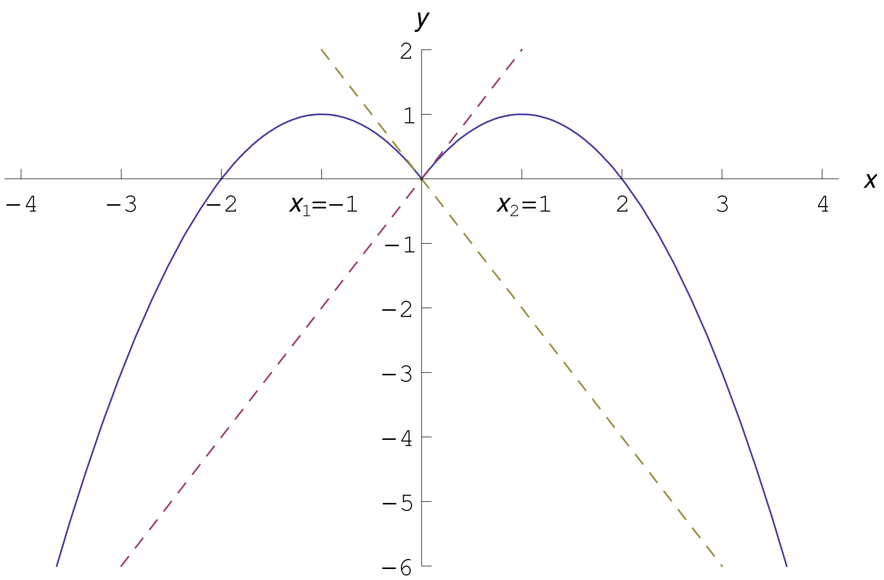
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_\Gamma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizi svolti sullo Studio della funzione

Marcello Colozzo



1 Esercizio 570

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4+3}{x}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$
Simmetrie
$f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow f$ non è nè pari e nè dispari.
Intersezioni con gli assi
Intersezione con l'asse x:

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0) \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x$$

essendo γ il diagramma cartesiano della funzione.
Intersezione con l'asse y:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x^4+3}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Comportamento agli estremi e ricerca degli asintoti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.
I limiti seguenti si calcolano immediatamente per confronto tra infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Calcoliamo:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Pertanto non esistono asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{3(x^4-1)}{x^2}$$
$$f''(x) = 6\frac{x^4+4}{x^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Determiniamo i punti estremali, che come è noto sono gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$\forall x \in X,\ f'(x) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente altrove. Ciò implica:

$$x_1 = -1 \text{ punto di massimo relativo con } f(-1) = -4$$
$$x_1 = 1 \text{ punto di massimo relativo con } f(1) = 4$$

La funzione è priva di estremi assoluti.
Concavità e punti di flesso

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0) \Longrightarrow \nexists \text{ punti di flesso}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Quindi γ è concavo verso l'alto in $(0, +\infty)$, ed è concavo verso il basso altrove.
Il grafico è riportato in figura (1).

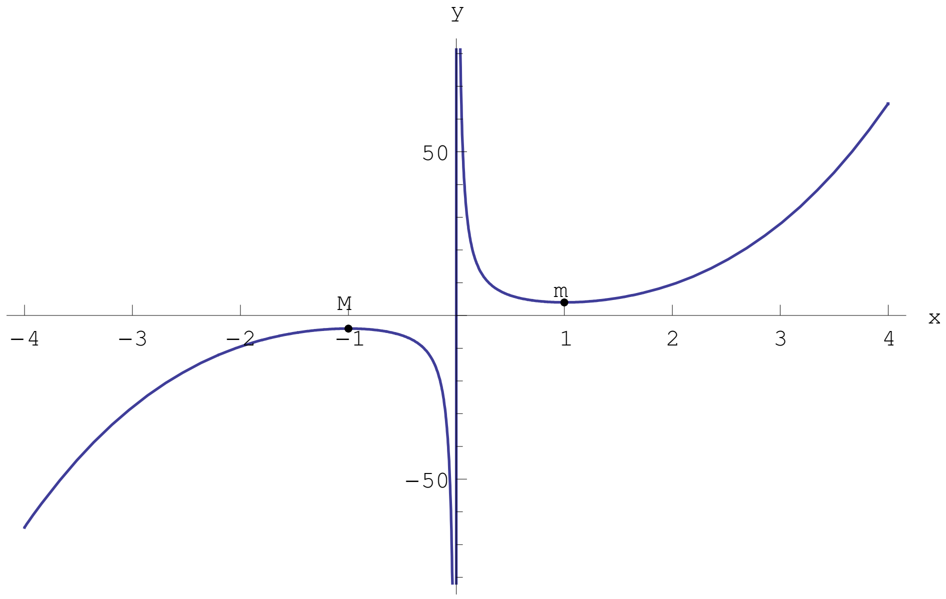


Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$

1.1 Esercizio 668

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-x}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow O(0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty),$$

per cui il diagramma giace nel sempiano $y > 0$ per $x > 0$, e nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+,$$

giacchè e^x è, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra.
Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Poniamo per definizione:

$$g(x) = |x|^{\alpha}$$

Risulta:

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$$

per cui la funzione è, per $x \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Si conclude che il diagramma cartesiano è privo di asintoto obliquo a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$
$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1,$$

quindi $x_0 = 1$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 1)$, e strettamente decrescente altrove. Ciò implica che $x_0 \overset{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f.

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Studio del segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (2, +\infty),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(2, +\infty)$ e concavo verso il basso in $(-\infty, 2)$.
In figura (2) riportiamo il grafico per $x \in [-1, 4]$.

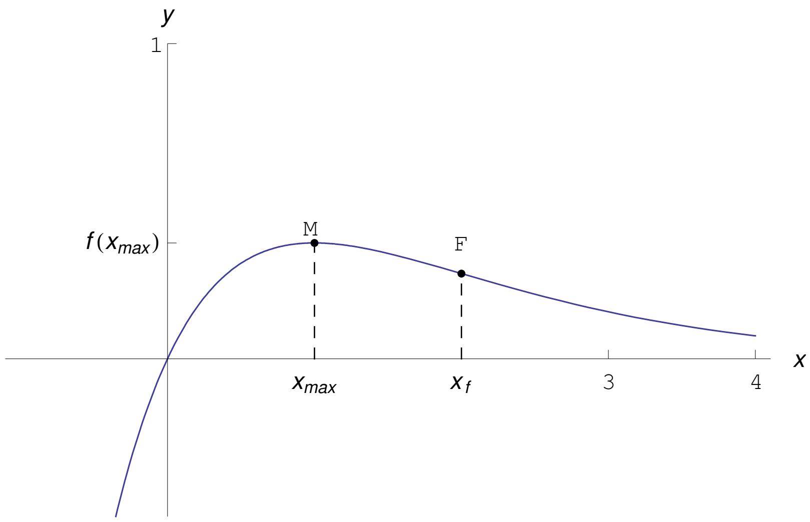


Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = xe^{-x}$per $x \in [-1, 4]$.

In figura (3) riportiamo il grafico completo.

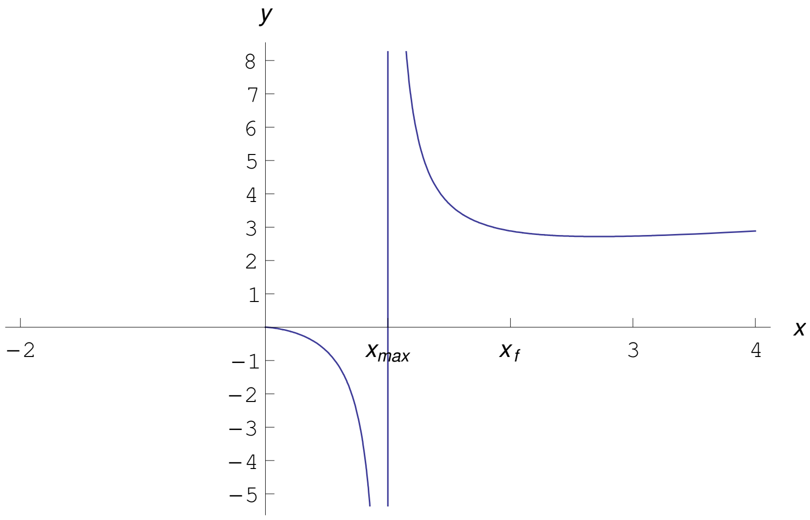


Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = xe^{-x}$

1.2 Esercizio 670

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{8x-x^2-14} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0) \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = \frac{1}{e^{14}} \Longrightarrow A\left(0, \frac{1}{e^{14}}\right) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno
Dalla (2) segue che il diagramma giace nel sempiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $|x| \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^+, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^- \tag{3}$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x-4) f(x) \\ f''(x) &= 2f(x)\left(2x^2-16x+31\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 4,$$

quindi $x_0 = 4$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 4)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 4)$, e strettamente decrescente in $(4, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 16x + 31 = 0 \Longleftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 16x + 31 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2). Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1\left(\frac{8-\sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e}\right), \; F_2\left(\frac{8+\sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (4).

1.3 Esercizio 671

Studiare la funzione

$$f(x) = \left(2 + x^2\right) e^{-x^2} \tag{5}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

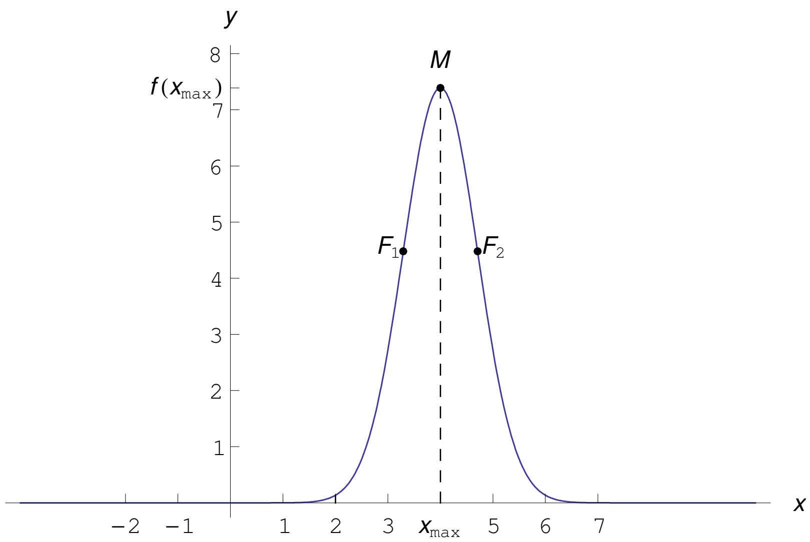


Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = e^{8x-x^2-14}$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0) \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{6}$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = 2 \Longrightarrow (0,2) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno
Dalla (6) segue che il diagramma giace nel sempiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $|x| \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + x^2\right) e^{-x^2} = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x^2}{e^{x^2}} = 0^+, \tag{7}$$

poichè e^{x^2} è - per $x \to +\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.
Dalla parità della funzione segue:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\left(x^2+1\right) e^{-x^2} \\ f''(x) &= 2\left(2x^4 - x^2 - 1\right) e^{-x^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f.

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^4 - x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Prendendo le soluzioni reali:

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 > 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2). Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1\left(-1, \frac{3}{e}\right), \; F_2\left(1, \frac{3}{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (5).

1.4 Esercizio 675

Studiare la funzione

$$f(x) = 2|x| - x^2 \tag{9}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
A causa della presenza del valore assoluto, conviene distinguere i due casi: $x \geq 0$, $x < 0$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0 \\ f_2(x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

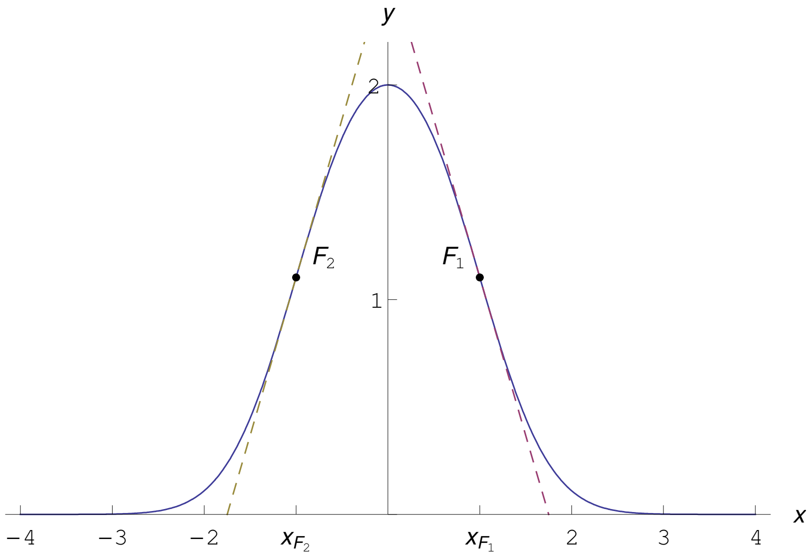


Figura 5: Grafico della funzione $f(x) = (2 + x^2)\, e^{-x^2}$

essendo:

$$f_1(x) = -2x - x^2, \quad \text{in } (-\infty, 0)$$
$$f_2(x) = 2x - x^2, \quad \text{in } (0, +\infty) \tag{11}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm 2 \Longrightarrow A(-2, 0)\,,\ B(2, 0) \in \gamma \cap x,\ O(0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.

Dalle (11) segue che il grafico di f è composto da due parabole raccordate in $(0, 0)$. Precisamente:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

essendo:

$$\gamma_1)\ y = -2x - x^2 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0)$$
$$\gamma_2)\ y = 2x - x^2 \quad \text{per } x \in (0, +\infty)$$

Il punto $(0,0)$ è un punto angoloso. La derivata prima è:

$$f(x) = \begin{cases} f_1'(x) = -2(x+1), & x < 0 \\ f_2'(x) = 2(1-x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f_-'(0) &= f_1'(0) = -2 \\ f_+'(0) &= f_2'(0) = 2 \end{aligned}$$

Possiamo perciò scrivere le equazioni delle semirette tangenti τ_- e τ_+ rispettivamente a sinistra e a destra nel punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \tau_-)\ y &= f(0) + f_-'(0)\,x \Longleftrightarrow y = -2x \\ \tau_+)\ y &= f(0) + f_+'(0)\,x \Longleftrightarrow y = 2x \end{aligned}$$

Il grafico completo è riportato in figura (6).

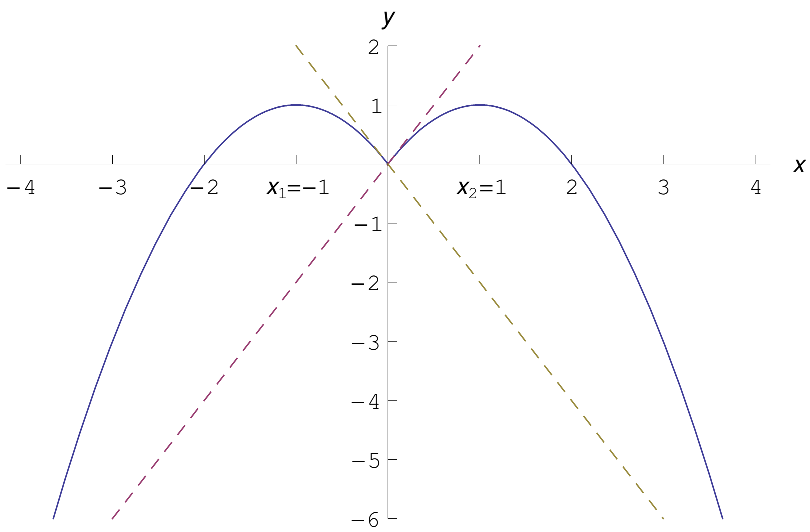


Figura 6: Grafico della funzione assegnata.

1.5 Esercizio 676

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \tag{13}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1,0) \in \gamma \cap x \tag{14}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0,1)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+, \tag{15}$$

cioè l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \tag{16}$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \\ f''(x) &= \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} \end{aligned} \tag{17}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 2 \Longleftrightarrow x = e^2,$$

quindi $x_0 = e^2$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, e^2)$, e strettamente decrescente in $(e^2, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f:

$$M\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x = e^{8/3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(e^{8/3}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(e^{8/3}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0, e^{8/3}\right)$. Da ciò segue che $e^{8/3}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (7).

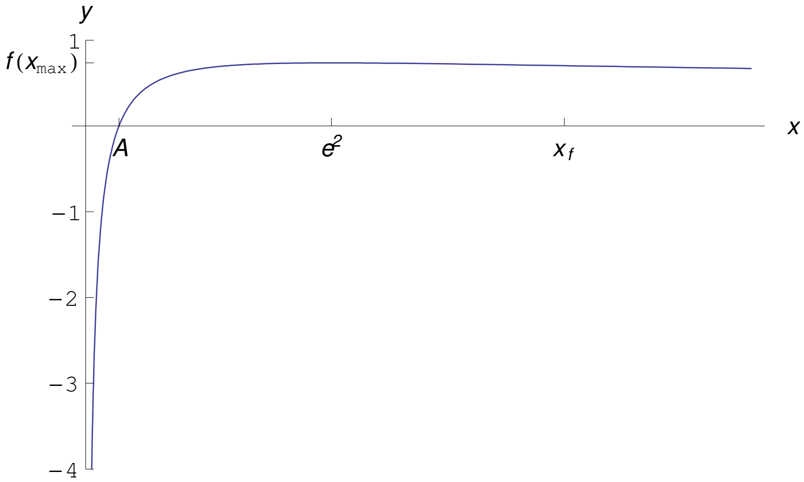


Figura 7: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1.6 Esercizio 677

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} \tag{18}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \Longrightarrow A(2,0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

Segue che per $x > 2$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 2)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \tag{19}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} = 0 \cdot \infty \tag{20}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata poniamo:

$$\ln \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2e^t,$$

cosicchè $x \longrightarrow 0^+$ implica $t \longrightarrow -\infty$, e il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \lim_{t \to -\infty} te^{2t} = 2 \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0,$$

giacché e^t è - per $t \longrightarrow -\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.
Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{x}{2} \left(1 + 2 \ln \frac{x}{2}\right) \tag{21}$$
$$f''(x) = \frac{3}{2} + \ln \frac{x}{2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2 \ln \frac{x}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{e}},$$

quindi $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f:

$$m\left(\frac{2}{\sqrt{e}}, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = e^{-3/2} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{e^{3/2}}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{2}{e^{3/2}}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{2}{e^{3/2}}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0, \frac{2}{e^{3/2}}\right)$. Da ciò segue che $\frac{2}{e^{3/2}}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(\frac{2}{e^{3/2}}, -\frac{3}{e^{3}}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (8).

1.7 Esercizio 678

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \tag{22}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $\ln x \neq 0$, cioè $X = (0,1) \cup (1, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x$$
$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

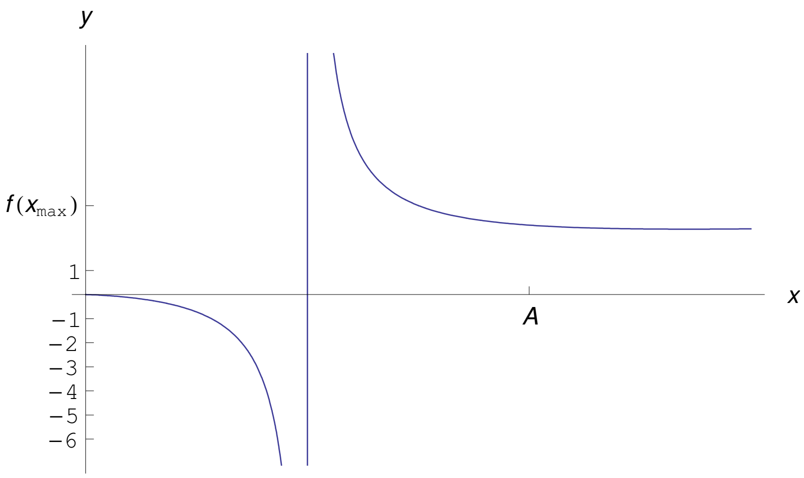


Figura 8: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2}$

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \tag{23}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0^- \tag{24}$$

Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \end{aligned} \tag{25}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e,$$

quindi $x_0 = e$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (e, +\infty)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(e, +\infty)$, e strettamente decrescente in $(0, e)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo.

$$m(e, e)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e^2$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(1, e^2\right),$$

per cui il grafico è concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$, ed è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$. Da ciò segue che e^2 è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (9).

1.8 Esercizio 679

Studiare la funzione

$$f(x) = (x + 1) \ln^2 (x + 1) \tag{26}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $x + 1 >$, cioè $X = (-1, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x + 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

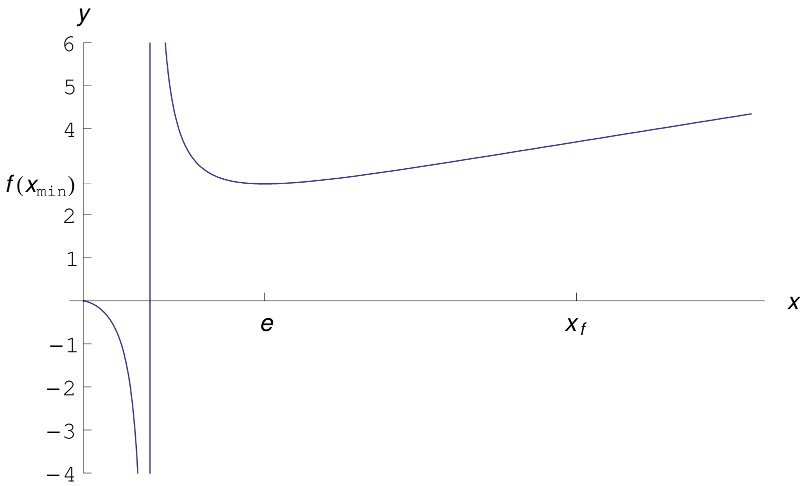


Figura 9: Grafico della funzione $f\left(x\right)=\frac{x}{\ln x}$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f\left(x\right)>0\Longleftrightarrow x+1>0,\ \ln\left(x+1\right)\neq0\Longleftrightarrow x\in X-\{0\}$$

Segue che per $x\in X-\{0\}$ il diagramma giace nel sempiano $y>0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinita per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty, \tag{27}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x\to+\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.
Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\cdot\ln^2\left(x+1\right)=1\cdot\left(+\infty\right)=+\infty\Longrightarrow\nexists\text{ asintoti obliqui}$$

Per $x\longrightarrow-1^+$:

$$\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^+}\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right)=0\cdot\infty \tag{28}$$

Per rimuovere l'indeterminazione poniamo:

$$t=\ln\left(x+1\right) \tag{29}$$

Ciò implica:

$$x+1=e^t \Longrightarrow x=e^t-1 \tag{30}$$

Dalla (30) segue che quando $x \to -1^+$, $e^t \to 0$, cioè $t \to -\infty$, perciò:

$$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\ln^2(x+1)=\lim_{t\to -\infty}t^2e^t=\lim_{t\to -\infty}\frac{t^2}{e^t}=0^+, \tag{31}$$

in quanto e^t per $t \to -\infty$, è un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi $x=1$ è una discontinuità eliminabile.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln^2(x+1)+2\ln(x+1) \\ f''(x) &= \frac{2\left[1+\ln(x+1)\right]}{1+x} \end{aligned} \tag{32}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per calcolare gli zeri della $f'(x)$ poniamo $t=\ln(x+1)$, per cui

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow t(t+2)=0 \Longleftrightarrow t=-2,0 \tag{33}$$

Cioè:

$$\left\{\begin{array}{c} \ln(x+1)=0 \\ \ln(x+1)=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=0 \\ x+1=e^{-2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=0 \\ x_1=\frac{1-e^2}{e^2}<0 \end{array}\right.$$

quindi $x_{1,2}$ sono punti estremali.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow t<-2, t>0$$

Cioè, dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni:

$$\left\{\begin{array}{c} \ln(x+1)=0 \\ \ln(x+1)=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow x \in \left(-1,\frac{1-e^2}{e^2}\right)\cup(0,+\infty)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(-1,\frac{1-e^2}{e^2}\right)\cup(0,+\infty)$, e strettamente decrescente in $\left(\frac{1-e^2}{e^2},0\right)$. Ciò implica che $x_1 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo, mentre $x_2 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di minimo relativo:

$$M\left(\frac{1-e^2}{e^2},\frac{4}{e^2}\right),\ m(0,0)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0 \Longleftrightarrow \ln(x+1)=-1 \Longleftrightarrow x+1=\frac{1}{e} \Longleftrightarrow x=\frac{1-e}{e}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff \frac{1+\ln(x+1)}{1+x} > 0 \iff x \in \left(\frac{1-e}{e}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{1-e}{e}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(-1, \frac{1-e}{e}\right)$. Da ciò segue che $\frac{1-e}{e}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(\frac{1-e}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (10).

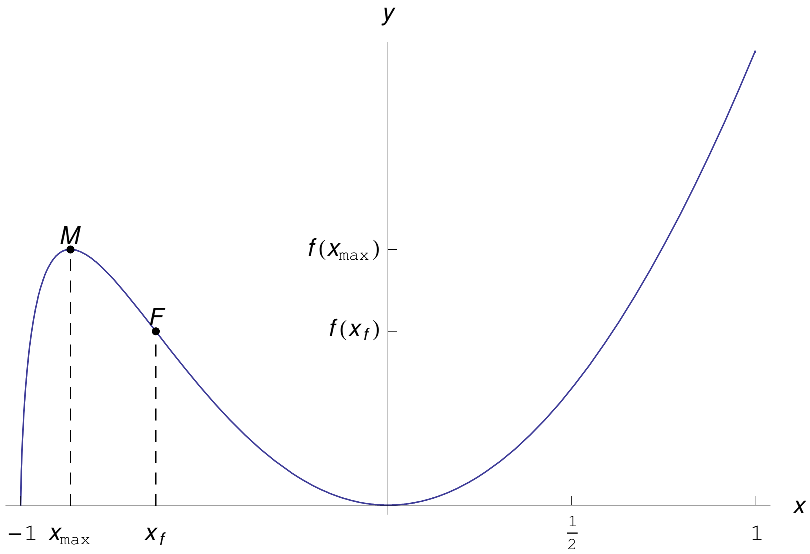


Figura 10: Grafico della funzione $f(x) = (x+1)\ln^2(x+1)$

1.9 Esercizio 680

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} \tag{34}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $x^2-1>0$, quindi $X = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, per cui il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Intersezioni con gli assi

Data l'espressione analitica della funzione, bisognerebbe ricorrere al calcolo numerico, per cui tralasciamo le intersezioni con gli assi, osservando però che non ci sono intersezioni con l'asse y, giacchè $0 = x \notin X$.

Studio del segno

Tralasciamo per le stesse ragioni di sopra.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln\left(0^+\right) + \frac{1}{0^+} = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty \tag{35}$$

Per rimuovere la forma indeterminata (35) procediamo nel seguente modo_

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2-1)\ln(x^2-1)+1}{x^2-1} \tag{36}$$

Poniamo:

$$l_1 = \lim_{x \to 1^+} \left(x^2-1\right) \ln\left(x^2-1\right) = 0 \cdot \infty$$

Poniamo:

$$\ln\left(x^2-1\right) = t \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t$$

Abbiamo:

$$x \to 1^+ \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t \to 0^+ \Longrightarrow t \to -\infty,$$

cosicchè:

$$l_1 = \lim_{t \to -\infty} te^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = 0^+,$$

in quanto e^t è per $t \to -\infty$ un infinito di ordine infinitamente grande. Ora siamo in grado di calcolare il limite (36):

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{l_1 + 1}{\lim_{x \to 1^+}(x^2-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Siccome la funzione è pari, si ha:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale.

La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \tag{37}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x}+0^+$$

Ma:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0\underset{f\text{ è pari}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Pertanto il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} \tag{38}$$
$$f''(x)=-2\frac{x^4-3x^2-2}{(x^2-1)^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di $f'(x)$:

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow\frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}=0\Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{2},0 \tag{39}$$

$0=x\notin X$, quindi gli unici punti estremali sono:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x)>0\Longleftrightarrow\frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}>0\Longleftrightarrow x\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$. Ciò implica che $x_{1,2}$ sono entrambi punti di minimo relativo

$$m_1\left(-\sqrt{2},1\right),\ m_2\left(\sqrt{2},1\right)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{(x^2-1)^3}=0\Longleftrightarrow x^4-3x^2-2=0\Longleftrightarrow x'_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{(x^2-1)^3}<0\Longleftrightarrow x\in(x'_1,-1)\cup(1,x'_2)$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(x_1', -1) \cup (1, x_2')$, ed è concavo verso il basso in $(-\infty, x_1') \cup (x_2', +\infty)$. Da ciò segue che $x_{1,2}'$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

Il grafico completo è riportato in figura (11).

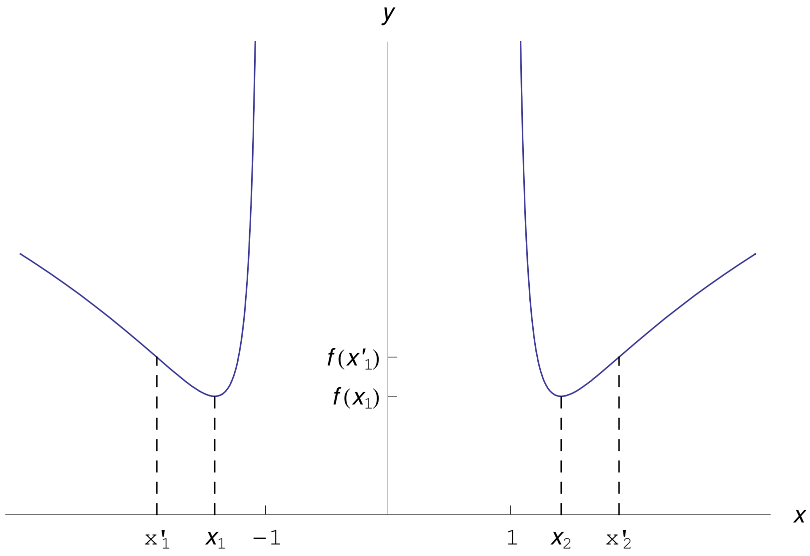


Figura 11: Grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2-1}$

1.10 Esercizio 681

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) \tag{40}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che $1 + e^{-x} > 0$, che è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi $X = \mathbb{R}$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + e^{-x} = 1 \Longleftrightarrow e^{-x} = 0 \quad \text{mai!} \quad \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x$$
$$f(0) = \ln 2 \Longrightarrow A(0, \ln 2) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) > 0,$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+, \tag{41}$$

cosicchè l'asse x è asintoto orizzontale.
La funzione è infinita per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} -\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\
&= -\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = -1 = m \\
n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right] = \infty - \infty
\end{aligned}$$

Per rimuovere la forma indeterminata poniamo $1 + e^{-x} = t$, quindi per $x \to -\infty \Longrightarrow t \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right] = \lim_{t \to +\infty} [\ln t - \ln(t - 1)] = \lim_{t \to +\infty} \ln \frac{t}{t - 1} = \ln 1 = 0$$

Pertanto il grafico ammette un asintoto obliquo a sinistra; la sua equazione è:

$$y = -x \tag{42}$$

Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{1 + e^x} \\
f''(x) &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}
\end{aligned} \tag{43}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di $f'(x)$:

$$\nexists x \in X \mid f'(x) = 0 \tag{44}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\forall x \in X, \; f'(x) < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente in X
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, \ f''(x) > 0$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto.
Il grafico completo è riportato in figura (12).

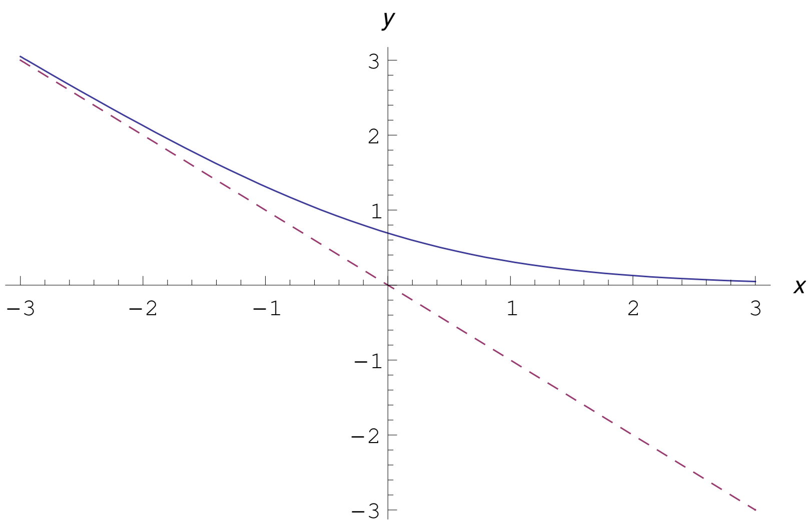


Figura 12: Grafico della funzione $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

1.11 Esercizio 682

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \tag{45}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere:

$$e+\frac{1}{x}>0 \iff \frac{ex+1}{x}>0 \iff x \in \left(-\infty,-\frac{1}{e}\right) \cup (0,+\infty)\,,$$

quindi:

$$X=\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right) \cup (0,+\infty) \tag{46}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x)=0 \iff \frac{ex+1}{x}=1 \iff ex+1=x \iff x=\frac{1}{1-e} \implies A\left(\frac{1}{1-e},0\right) \in \gamma \cap x$$
$$0=x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x)>0 \iff \frac{ex+1}{x}>1 \iff \frac{x(e-1)+1}{x}>0 \iff x \in \left(-\infty,\frac{1}{1-e}\right) \cup (0,+\infty)\,,$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y>0$ per $x \in \left(-\infty,\frac{1}{1-e}\right) \cup (0,+\infty)$ e nel semipiano $y<0$ per $x \in \left(\frac{1}{1-e},-\frac{1}{e}\right)$.
Comportamento agli estremi
La funzione diverge negativamente per $x \to -\frac{1}{e}$:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{e}^-} f(x)=\ln 0^+=-\infty,$$

e ciò implica che la retta $x=-\frac{1}{e}$ è asintoto verticale.
La funzione diverge positivamente per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\ln(+\infty)=+\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.
La funzione è convergente per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\ln\left(e+0^+\right)=\ln e^+=1^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\ln\left(e+0^-\right)=\ln e^-=1^-,$$

cosicchè la retta $y-1=0$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra. Esaminiamo se esistono intersezioni al finito con l'asintoto orizzontale:

$$f(x)=1 \iff e+\frac{1}{x}=e \iff \frac{1}{x}=0 \tag{47}$$

La (47) è priva di soluzioni al finito, donde non esistono intersezioni con l'asintoto orizzontale
Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{1}{x(ex+1)} \tag{48}$$
$$f''(x) = \frac{2ex+1}{x^2(ex+1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \; f'(x) < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente in X
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$\left. f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2e} = x \notin X \right) \Longrightarrow \nexists \text{ punti di flesso}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2ex+1 > 0 \\ x(ex+1) \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2ex+1 > 0 \\ x \in X \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(0, +\infty)$ ed è convesso verso il basso in $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$.
Il grafico completo è riportato in figura (13).

1.12 Esercizio 683

Studiare la funzione

$$f(x) = x \arctan x \tag{49}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni valore reale di x, per cui $X = (-\infty, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) = (-x)\arctan(-x) = x\arctan x$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \arctan x > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \neq 0$.

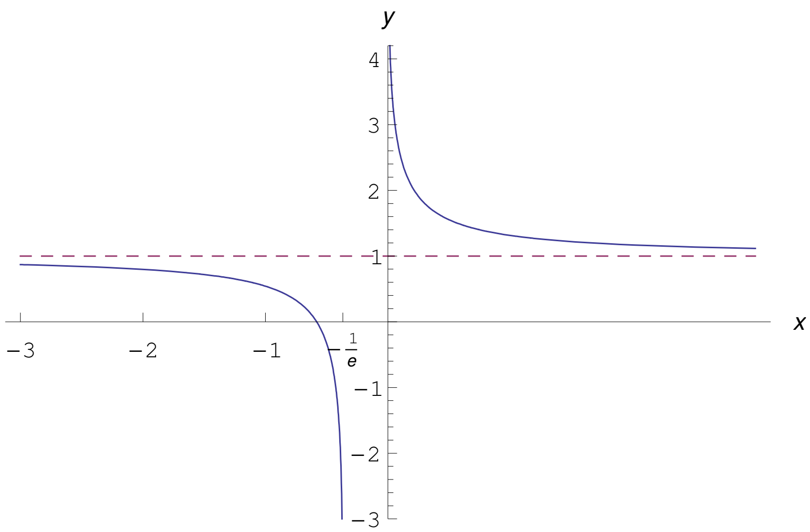


Figura 13: Grafico della funzione $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

Comportamento agli estremi

La funzione diverge positivamente per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \\ n_1 &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} - \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1, \end{aligned}$$

donde la retta $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquio a destra. Siccome il grafico è simmetrico rispetto all'asse x, necessariamente segue che la retta $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquio a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+x^2)\arctan x + x}{(1+x^2)} \qquad (50) \\ f''(x) &= \frac{2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Lo studio del segno è troppo complicato, per cui cercheremo di dedurre gli estremi relativi e monotonia dalla concavità/convessità. Osserviamo intanto che $x_0 = 0$ è punto estremale. Ci aspettiamo comunque una crescenza in senso stretto in $(0, +\infty)$, e una decrescenza in $(-\infty, 0)$, donde x_0 è punto di minimo relativo.

Concavità e punti di flesso.

$$\forall x \in X,\ f''(x) > 0$$

Quindi il grafico è concavo verso l'alto.
Osserviamo che:

$$f''(0) > 0,$$

per cui resta confermata la natura del punto estremale $x_0 = 0$.
Il grafico completo è riportato in figura (14).

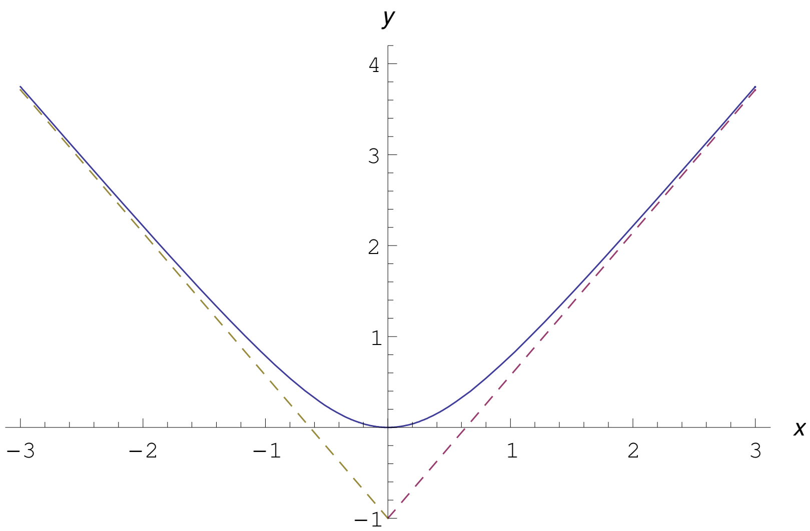


Figura 14: Grafico della funzione $f(x) = x \arctan x$

1.13 Esercizio 684

Studiare la funzione

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x} \tag{51}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, per cui $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) = (-x) \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = x \arctan \frac{1}{x}$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} \nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \\ 0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y \end{aligned} \tag{52}$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \arctan \frac{1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in X, \tag{53}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot \arctan(+\infty) = 0^+ \cdot \frac{\pi}{2} = 0^+ \tag{54}$$

Siccome la funzione è pari, deve essere:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \tag{55}$$

Cioè:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0^+ \tag{56}$$

Si conclude che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

La funzione convergente per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot \infty$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa ponendo $t = \frac{1}{x}$, donde:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\arctan t}{t} = 1 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \tag{57}$$

Ciò implica che la retta $y - 1 = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 + x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned} \tag{58}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Le semirette tangenti a sinistra e a destra, hanno equazione rispettivamente:

$$y = -\frac{\pi}{2}x \qquad (59)$$
$$y = \frac{\pi}{2}x$$

Lo studio del segno della $f'(x)$ è troppo complicato, però si deduce facilmente che la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente altrove. Pertanto il punto angoloso $x = 0$ è punto di minimo relativo.

Concavità e punti di flesso.

$$\forall x \in X, \ f''(x) < 0$$

Quindi il grafico è concavo verso il basso.

Il grafico completo è riportato in figura (15).

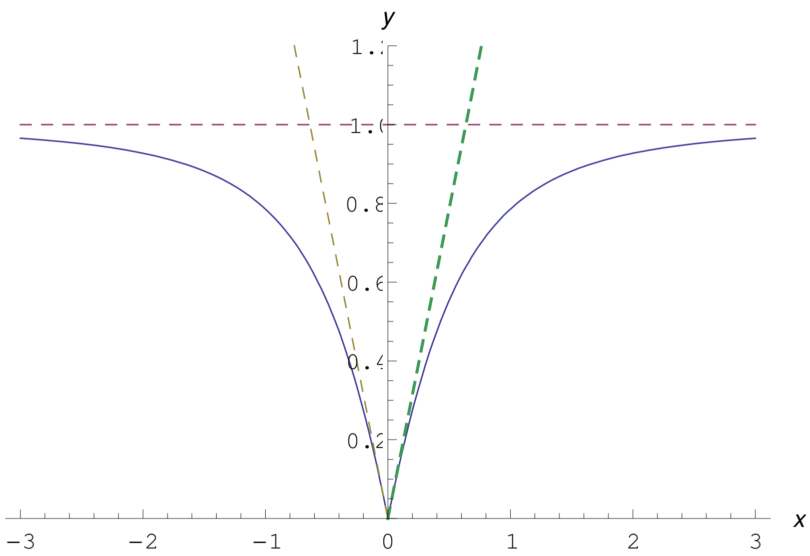


Figura 15: Grafico della funzione $f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$

1.14 Esercizio 685

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = x - 2\arctan x \tag{60}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2\arctan x \tag{61}$$

Tale equazione va risolta per via grafica tracciando il grafico di $y = x$ e di $y = 2\arctan x$, oppure per via numerica, ottenendo:

$$x = 2\arctan x \Longleftrightarrow x = \pm\alpha, \quad \text{con } \alpha \simeq 2.331 \tag{62}$$

Quindi:

$$A(-\alpha, 0), \, B(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 2\arctan x \tag{63}$$

Procedendo in maniera simile alla (62):

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\alpha, 0) \cup (0, +\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-\alpha, 0) \cup (0, +\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (-\infty, -\alpha) \cup (0, \alpha)$.
Comportamento agli estremi
Abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{64}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \tag{65}$$

Calcoliamo:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - 2\frac{\arctan x}{x}\right) = 1$$
$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_1 x] = -2 \lim_{x\to+\infty} \arctan x = -\pi$$

Quindi la retta $y = x - \pi$ è asintoto obliquo a destra. In maniera simile, si trova che $y = x + \pi$ è asintoto obliquio a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \tag{66}$$
$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) = 0 \iff x_{1,2} = \pm 1,$$

che sono punti estremali.

Studiamo il segno della $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \notin (-1, 1)$$

Ne consegue che la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Quindi $x_1 = -1$ è punto di massimo relativo, e $x_2 = 1$ è punto di minimo relativo:

$$M\left(-1, \frac{\pi}{2} - 1\right), \, m\left(1, 1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Concavità e punti di flesso.

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Inoltre:

$$f''(x) > 0 \iff x > 0$$

Quindi il grafico è concavo verso l'alto in $(0, +\infty)$, donde $x = 0$ è punto di flesso.

Il grafico completo è riportato in figura (16).

1.15 Esercizio 686

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 \arctan x \tag{67}$$

***

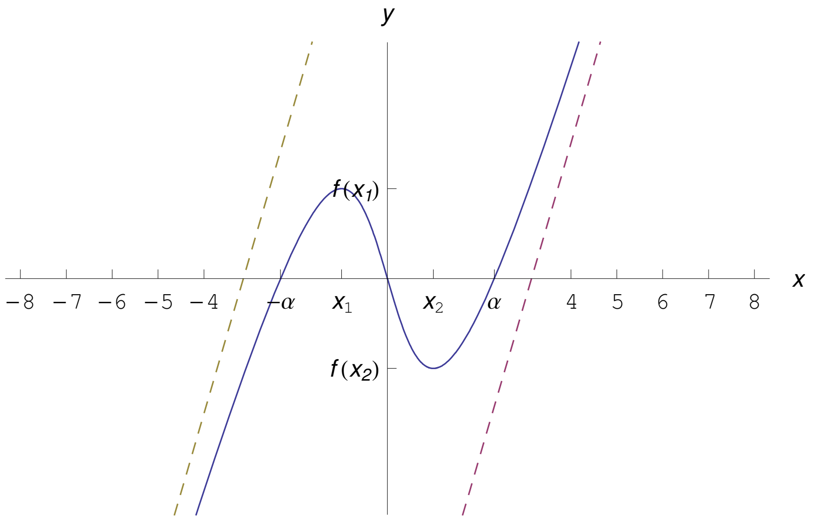


Figura 16: Grafico della funzione $f(x) = x - 2\arctan x$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è dispari: $f(-x) \equiv -f(x)$, per cui il grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi coordinati.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma, \tag{68}$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \tag{69}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è dispari}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \tag{70}$$

Calcoliamo:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \arctan x = +\infty,$$

e in forza della simmetria rispetto all'origine:

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Quindi il grafico è privo di asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = x\left(\frac{x}{1+x^2} + 2\arctan x\right) \tag{71}$$
$$f''(x) = \frac{2\left[x\left(x^2+2\right) + \left(1+x^2\right)\arctan x\right]}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$f'(0) = 0,$$

pertanto $x = 0$ è un punto estremale.
Studio della derivata seconda

$$f''(0) = 0$$

Lo studio del segno delle derivate è troppo complicato, per cui per stabilire la natura di $x = 0$, valutiamo la derivata terza in tale punto:

$$f'''(x) = -2\frac{x^2+3}{\left(x^2+1\right)^3} \Longrightarrow f'''(0) = 6,$$

donde $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.
Il grafico completo è riportato in figura (17).

1.16 Esercizio 687

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x \tag{72}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La funzione è periodica di periodo 2π, per cui consideriamo l'intervallo $[0, 2\pi]$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\cos x \tag{73}$$

Risolviamo questa equazione trigonometrica per via grafica, come riportato in figura (73).

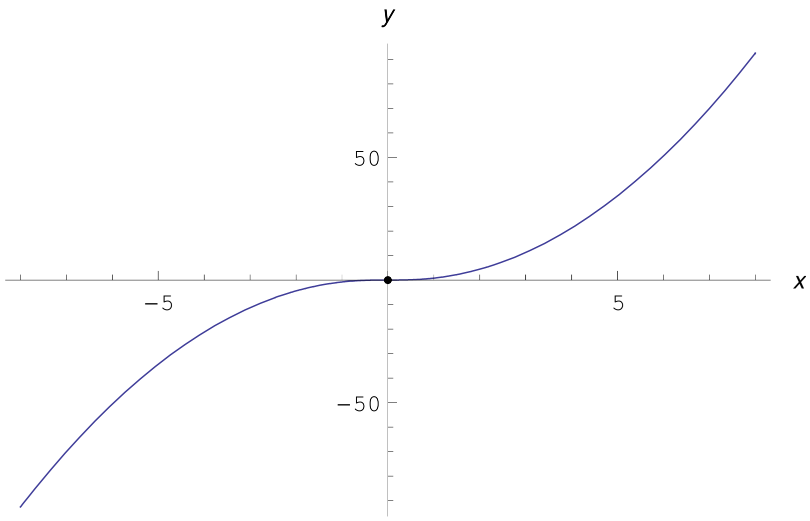


Figura 17: Grafico della funzione $f(x) = x^2 \arctan x$

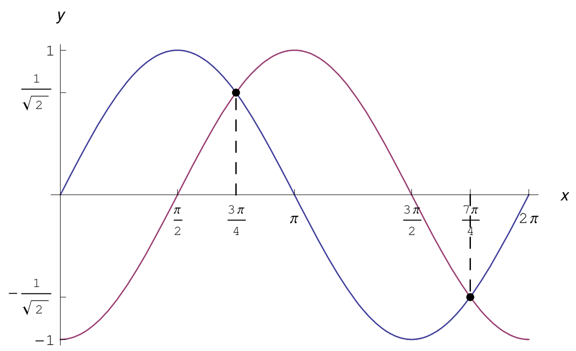


Figura 18: Grafico di $\sin x$ e $-\cos x$. Le ascisse dei punti di intersezione sono le soluzioni (in $[0, 2\pi]$) dell'equazione $\sin x = -\cos x$.

Quindi:

$$f(x) = 0 \iff x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \Longrightarrow A\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right), B\left(\frac{7}{4}\pi, 0\right) \in \gamma \cap x, \tag{74}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow C(0,1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \sin x > -\cos x \tag{75}$$

Risolviamo questa disequazione trigonometrica per via grafica, come riportato in figura (19).

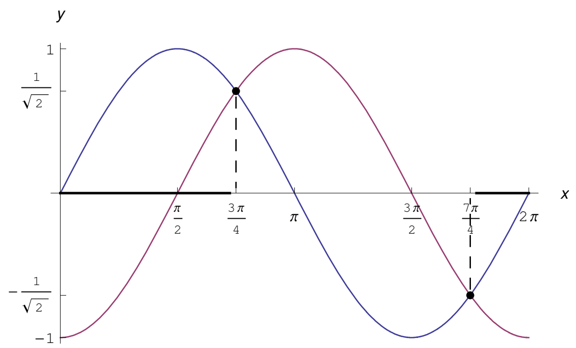


Figura 19: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > -\cos x$.

ottenendo:

$$f(x) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right] \tag{76}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre essendo periodica, non è regolare per $x \to \pm\infty$.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - \sin x \\ f''(x) &= -f(x) \end{aligned} \tag{77}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \sin x,$$

procedendo nuovamente per via grafica, come riportato in figura (20).

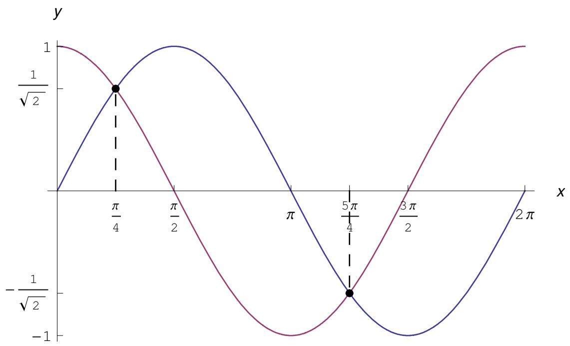


Figura 20: Ricerca delle soluzioni dell'equazione $\cos x = \sin x$

Otteniamo:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi,$$

che sono punti estremali.
Per studiare il segno della f' dobbiamo risolvere la disequazione trigonometrica:

$$\cos x > \sin x$$

Ricorriamo nuovamente al procedimento grafico, come riportato in figura (21).
Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, 2\pi\right],$$

donde la f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, 2\pi\right]$ ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$. Da ciò segue:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ è punto di massimo relativo}$$
$$x = \frac{5}{4}\pi \text{ è punto di minimo relativo}$$

Tali punti sono anche di estremo assoluto:

$$M\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), \; m\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$$

Studio della derivata seconda

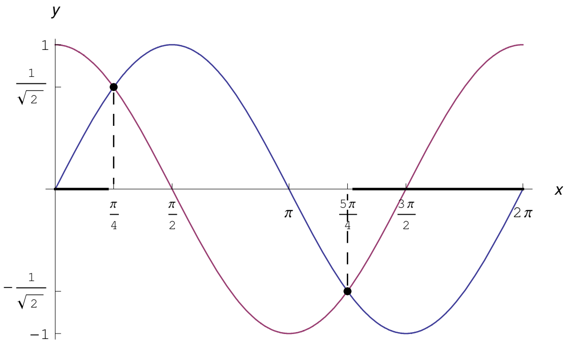


Figura 21: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\cos x > \sin x$

Dalla seconda delle (77) vediamo che gli zeri della funzioni sono anche zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

Inoltre:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$, ed è convesso verso il basso in $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$. Da ciò segue che i punti di intersezioni con l'asse x dati dalla (74) sono punti di flesso.

Il grafico completo è riportato in figura (22).

1.17 Esercizio 690

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + |x|} \tag{78}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Per la presenza del valore assoluto dobbiamo distinguere i due casi: $x \geq 0$ e $x > 0$, giacchè:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{79}$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{x^2-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{80}$$

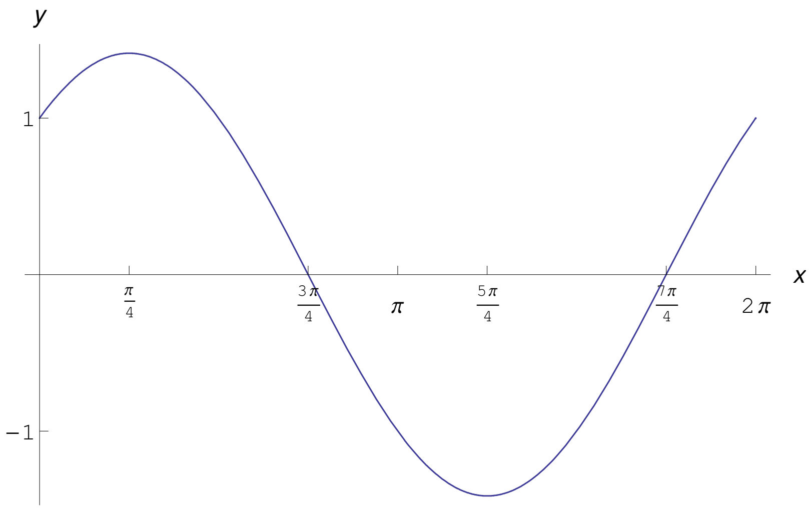


Figura 22: Grafico della funzione $f(x) = \sin x + \cos x$

N.B. Nella (80) poniamo $x > 0$ in quanto la funzione non è definita per $x = 0$.
Definiamo allora due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x^2+x}, \quad \text{per } x \in X_1 = (0, +\infty) \\ f_2(x) &= \frac{1}{x^2-x}, \quad \text{per } x \in X_2 = (-\infty, 0) \end{aligned} \tag{81}$$

Siccome la funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, quindi ci basta studiare l'andamento del grafico γ_1 di f_1, dopodichè procedendo per simmetria costruiamo il grafico γ_2 di f_2. Il grafico di f è $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Studio della f_1

Risulta:

$$\forall x \in X_1, \; f_1(x) > 0$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto verticale.

La derivata prima:

$$f_1(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

Risulta:

$$\forall x \in X_1, \ f_1'(x) < 0,$$

quindi la funzione f_1 è strettamente decrescente in X_1. Per la concavità non c'è bisogno di calcolare la derivata seconda: è facile rendersi conto che γ_1 è concavo verso l'alto.

Il grafico di f_1 è in figura (23)

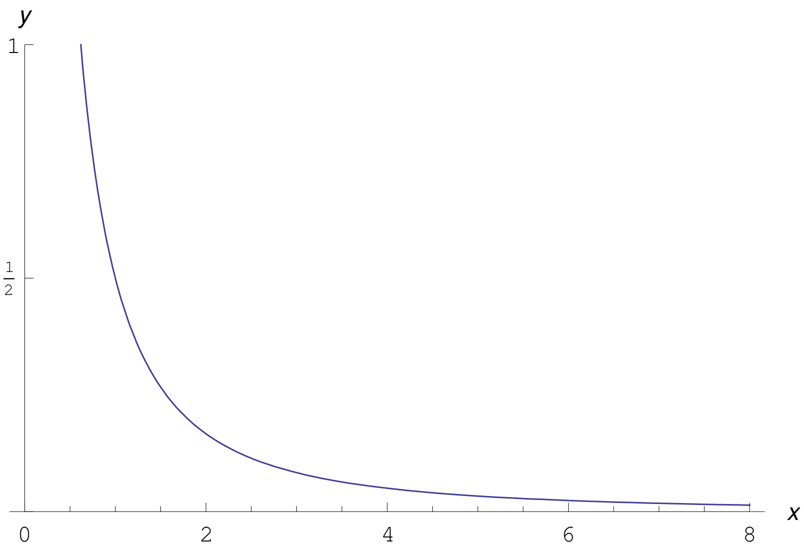


Figura 23: Grafico della funzione $f_1(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$.

Il grafico γ_2 di f_2 è il simmetrico di γ_1 rispetto all'asse y, quindi il grafico di f è riportato in in figura (24).

1.18 Esercizio 691

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \tag{82}$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.

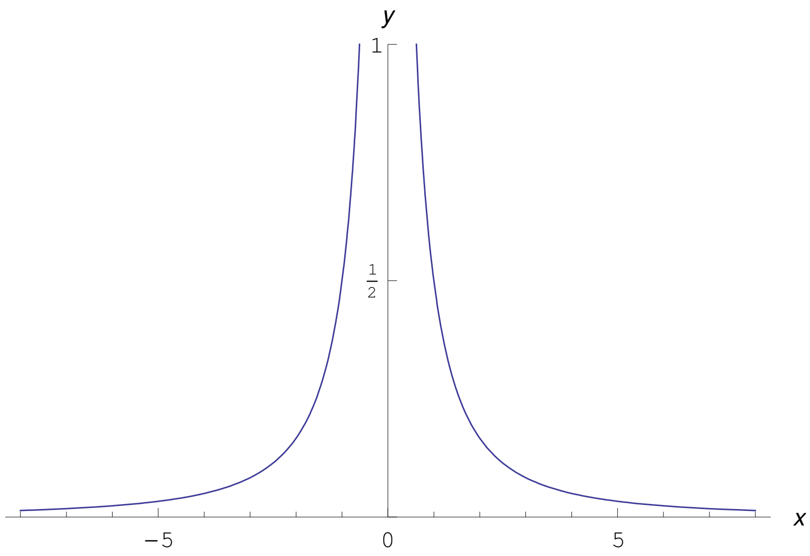


Figura 24: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+|x|}$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x = 0 \tag{83}$$

Per risolvere tale equazione poniamo:

$$t = \ln x \tag{84}$$

Quindi:

$$\frac{t^2}{2} - t = 0 \Longleftrightarrow t\left(\frac{t}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, t = 2 \tag{85}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{gathered} t = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ t = 2 \Longrightarrow \ln x = 2 \Longrightarrow x = e^2 \end{gathered}$$

Perciò:

$$A(1,0)\,,\ B\left(e^2,0\right) \in \gamma \cap x \tag{86}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x > 0 \tag{87}$$

Eseguendo nuovamente il cambio (84):

$$\frac{t^2}{2} - t > 0 \iff t < 0, t > 2$$

che corrispondono a

$$\begin{aligned} \ln x < 0 &\iff x \in (0,1) \\ \ln x > 2 &\iff x \in (2,+\infty), \end{aligned} \tag{88}$$

ciò implica:

$$f(x) > 0 \iff x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (1,2)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x\right) = \infty - \infty \tag{89}$$

Poniamo: $t = \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to -\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t\right) = \lim_{t\to -\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right) = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t\right) = +\infty,$$

Esaminiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2x} - \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} - \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

perciò:

$$m = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x} \tag{90}$$
$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Calcoliamo gli zeri di $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$$

pertanto $x = e$ è un punto estremale.
Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (e, +\infty),$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, e)$. Quindi $x = e$ è punto di minimo relativo per f. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(e, -\frac{1}{2}\right)$$

Studio della derivata seconda
Determiniamo gli zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 2 \Longleftrightarrow x = e^2$$

Il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x < 2 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2\right),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$ e concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$. Perciò $x = e^2$ è punto di flesso. Notiamo che tale punto è uno zero di $f(x)$, quindi il flesso è il punto B (eq. 86).
Il grafico completo è riportato in figura (25).

1.19 Esercizio 704

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)} \tag{91}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

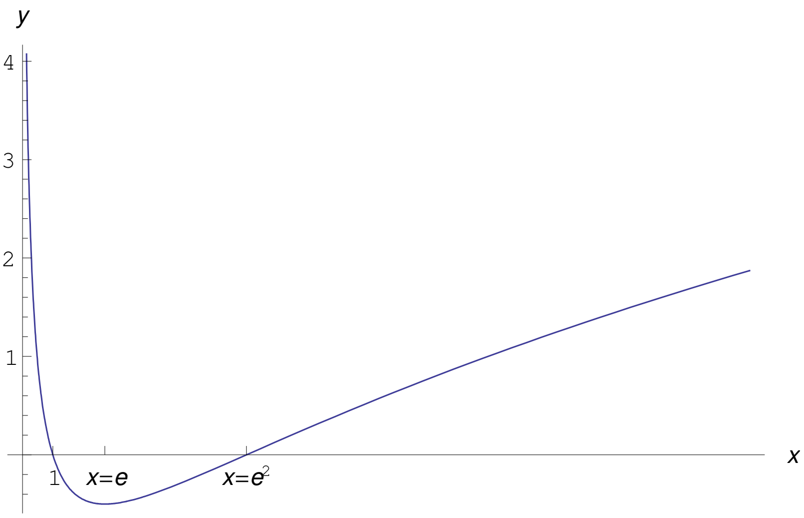


Figura 25: Grafico della funzione $f(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-\ln x$

$$\begin{cases}\arctan x+1>0\\ \arctan x+1\neq 1\end{cases}\Longrightarrow X=(-\tan 1,0)\cup(0,+\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x\in X\mid f(x)=0\Longrightarrow\quad \nexists P\in\gamma\cap x \tag{92}$$

Inoltre:

$$0=x\notin X\Longrightarrow \nexists P\in\gamma\cap y$$

Studio del segno

$$f(x)>0\Longleftrightarrow \arctan x+1>1\Longleftrightarrow x\in(0,+\infty)$$

Il grafico giace nel semipiano $y<0$ per $x\in(0,+\infty)$, e nel semipiano $y>0$ per $x\in(-\tan 1,0)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to(-\tan 1)^+} f(x)=-\frac{1}{\ln 0^+}=-\frac{1}{-\infty}=0^+,$$

cosicchè $x=-\tan 1$ è una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.

La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$$

quindi la retta $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$ è asintoto orizzontale a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \tag{93}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, \ \ f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.

Determiniamo la derivata destra in $x = -\tan 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(-\tan 1) &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \\ &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \end{aligned}$$

Il primo limite non produce indeterminazione, quindi calcoliamo il secondo ponendo $t = 1 + \arctan x$, e ciò implica $t \to 0^+$ se $x \to (-\tan 1)^+$

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t \ln^2 t}$$

Siccome $\lim_{t \to 0} t \ln^2 t = 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = +\infty,$$

donde:

$$f'_+(-\tan 1) = +\infty$$

Quindi γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto.

Concavità e punti di flesso.

Non abbiamo determinato la derivata seconda, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto, segue che esiste un flesso in $x_f \in (-\tan 1, 0)$, risultando γ concavo verso il basso in $(-\tan 1, x_f)$ e concava verso l'alto in $(x_f, 0)$. In $(0, +\infty)$ γ volge nuovamente la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (26).

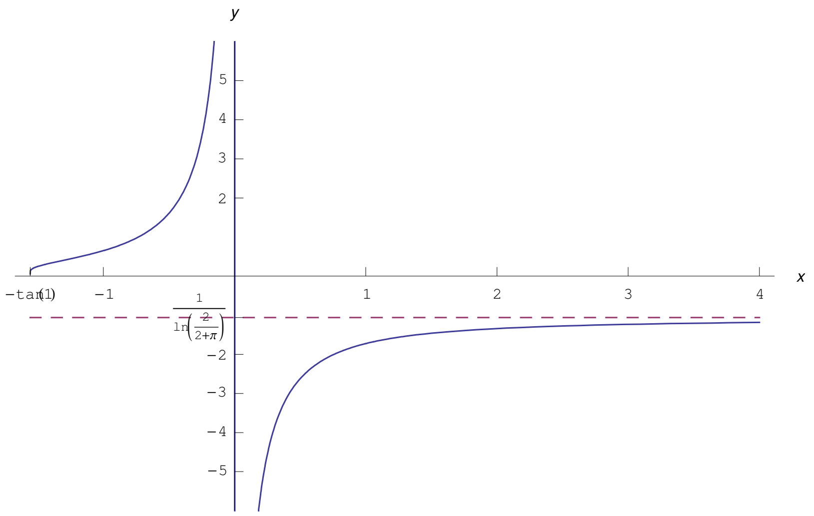


Figura 26: Grafico della funzione $f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)}$

1.20 Esercizio 691

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \tag{94}$$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x = 0 \tag{95}$$

Per risolvere tale equazione poniamo:

$$t = \ln x \tag{96}$$

Quindi:

$$\frac{t^2}{2} - t = 0 \iff t\left(\frac{t}{2} - 1\right) = 0 \iff t = 0, t = 2 \tag{97}$$

Ripristinando la variabile x:

$$t = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$$
$$t = 2 \Longrightarrow \ln x = 2 \Longrightarrow x = e^2$$

Perciò:

$$A(1,0), \ B\left(e^2, 0\right) \in \gamma \cap x \tag{98}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x > 0 \tag{99}$$

Eseguendo nuovamente il cambio (96):

$$\frac{t^2}{2} - t > 0 \Longleftrightarrow t < 0, t > 2$$

che corrispondono a

$$\begin{aligned} &\ln x < 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \\ &\ln x > 2 \Longleftrightarrow x \in (2, +\infty), \end{aligned} \tag{100}$$

ciò implica:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup (2, +\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0,1) \cup (2, +\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (1,2)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \right) = \infty - \infty \tag{101}$$

Poniamo: $t = \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = \lim_{t \to -\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right) = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = +\infty,$$

Esaminiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{2x}-\frac{\ln x}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x},
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0
$$

perciò:

$$
m=0\Longrightarrow\nexists\text{ asintoti obliqui}
$$

Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln x-1}{x}\\
f''(x) &= \frac{2-\ln x}{x^2}
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Calcoliamo gli zeri di $f'(x)$:

$$
f'(x)=0\Longleftrightarrow\ln x=1\Longleftrightarrow x=e
$$

pertanto $x=e$ è un punto estremale.
Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$
f'(x)>0\Longleftrightarrow\frac{\ln x-1}{x}>0\Longleftrightarrow x\in(e,+\infty),
$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(e,+\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0,e)$. Quindi $x=e$ è punto di minimo relativo per f. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$
m\left(e,-\frac{1}{2}\right)
$$

Studio della derivata seconda
Determiniamo gli zeri di $f''(x)$:

$$
f''(x)=0\Longleftrightarrow\ln x=2\Longleftrightarrow x=e^2
$$

Il segno della derivata seconda:

$$
f''(x)>0\Longleftrightarrow\ln x<2\Longleftrightarrow x\in\left(0,e^2\right),
$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(0,e^2)$ e concavo verso il basso in $(e^2,+\infty)$. Perciò $x=e^2$ è punto di flesso. Notiamo che tale punto è uno zero di $f(x)$, quindi il flesso è il punto B (eq. 98).

Il grafico completo è riportato in figura (27).

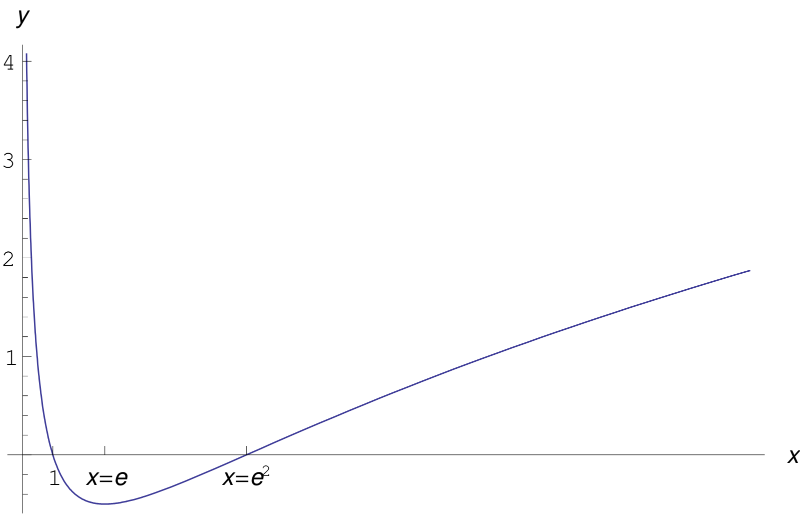


Figura 27: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x$

1.21 Esercizio 698

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan x \tag{103}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \arctan x \tag{104}$$

La (104) va risolta per grafica o numerica, ottenendo la radice $\alpha \simeq 3.69$. Quindi $A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$, essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x > \arctan x \Longleftrightarrow x \in (\alpha, +\infty),$$

giacchè $\ln x$ e $\arctan x$ sono strettamente crescenti.
Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.

Comportamento agli estremi
La funzione diverge negativamente per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = (-\infty) + 0 = -\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.
La funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) - \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\arctan x}{x} \right) = 0,$$

quindi il grafico è privo di asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{x(1 + x^2)} \\ f''(x) &= -\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 (x^2 + 1)^2} \end{aligned} \tag{105}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \;\; f'(x) > 0$$

Per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Concavità e punti di flesso.
Risulta:

$$\forall x \in X, \; f''(x) < 0$$

Quindi il grafico è concavo verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (28).

1.22 Esercizio 699

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln x) \tag{106}$$

***

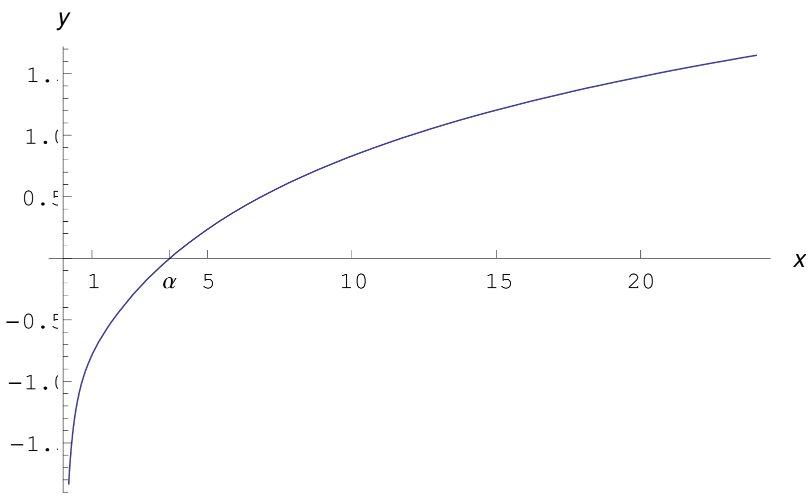


Figura 28: Grafico della funzione $f(x) = \ln x - \arctan x$

Soluzione
Insieme di definizione
Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1,0) \in \gamma \cap x \tag{107}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (1, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, 1)$.
Comportamento agli estremi
La funzione converge per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2},$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\ln x), & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Pertanto $B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \in \gamma \cap y$.

La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $2y = \pi$ è asintoto orizzontale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \\ f''(x) &= -\frac{(1+\ln x)^2}{x^2\left(\left(1+\ln^2 x\right)\right)^2} \end{aligned} \tag{108}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Esaminiamo il comportamento di $f'(x)$ nel punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{1+\ln^2 x} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \end{aligned}$$

cioè il grafico "parte" dal punto $B\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ con tangente verticale.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in X - \left\{\frac{1}{e}\right\}$$

Resta l'ambiguità sul punto $x = \frac{1}{e}$, poiché non si tratta di un punto di flesso. Determinando con un qualunque programma di calcolo le derivate fino al quarto ordine, vediamo che:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = f''\left(\frac{1}{e}\right) = f'''\left(\frac{1}{e}\right) = 0, \quad f^{IV}\left(\frac{1}{e}\right) < 0$$

Da ciò segue che nel punto $x = \frac{1}{e}$ il grafico è concavo verso il basso. Allo stesso risultato si giunge intuitivamente, poichè la funzione è ivi strettamente crescente e il grafico deve necessariamente essere concavo verso il basso, poichè è tale in ogni intorno di $x = \frac{1}{e}$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (29).

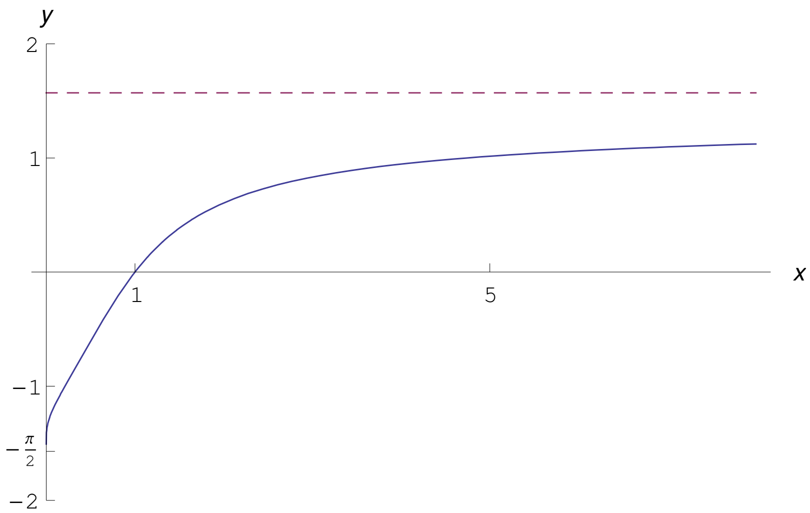


Figura 29: Grafico della funzione $f(x) = \arctan(\ln x)$

1.23 Esercizio 700

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(\arctan x) \tag{109}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \arctan x = 1 \Longleftrightarrow x = \alpha \simeq 1.56 \Longrightarrow A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan x > 1 \Longleftrightarrow x \in (\alpha, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha 1)$.
Comportamento agli estremi
La funzione diverge negativamente per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty,$$

cosicché l'asse y è asintoto verticale.
Pertanto $B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \in \gamma \cap y$.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $y = \ln \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \tag{110}$$
$$f''(x) = -\frac{1 + 2x\arctan x}{(1+x^2)^2 (\arctan x)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Concavità e punti di flesso.
Osserviamo che $x \arctan x > 0$, $\forall x \in X$. Pertanto la derivata seconda non si annulla mai in X. Più precisamente è sempre < 0, quindi γ è concavo verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (30).

1.24 Esercizio 701

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan x} \tag{111}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longleftrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

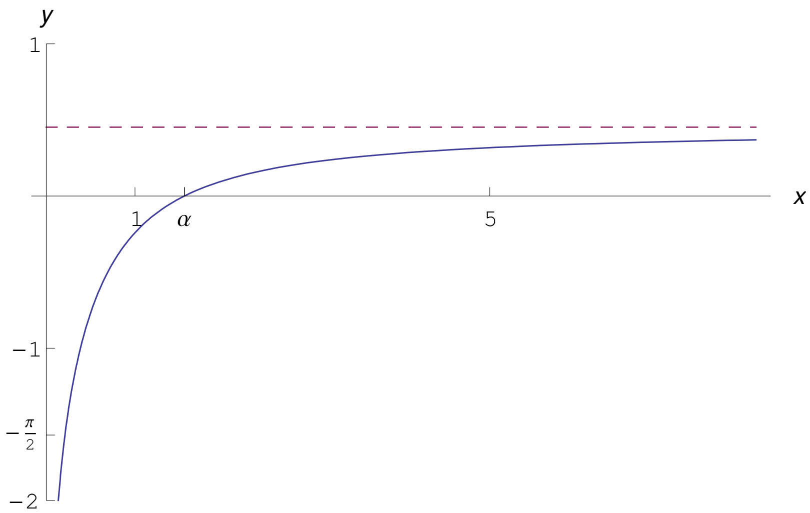


Figura 30: Grafico della funzione $f(x) = \ln(\arctan x)$

$$\forall x \in X, \quad f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$
Comportamento agli estremi
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\pi/2},$$

quindi la retta $y = e^{\pi/2}$ è asintoto orizzontale a destra.
La funzione converge per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\pi/2},$$

quindi la retta $y = e^{-\pi/2}$ è asintoto orizzontale a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{(1-2x)\, e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2} \end{aligned} \tag{112}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Concavità e punti di flesso.
Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right),$$

per cui γ è concavo veso l'alto in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ed è concavo verso il basso in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Ciò implica che $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso:

$$F\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (31).

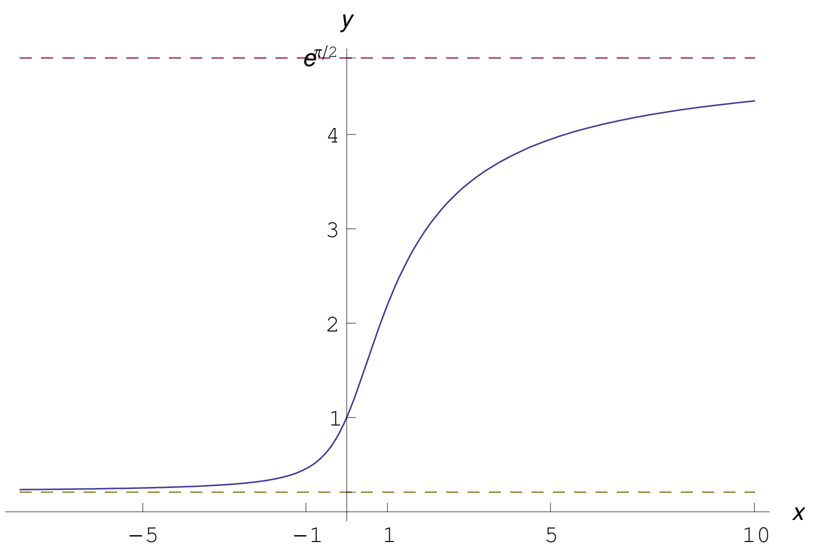


Figura 31: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan x}$

1.25 Esercizio 702

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x}} \tag{113}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longleftrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\arctan \frac{1}{x}} = e^{\pi/2}, \quad \lim_{x \to 0^-} e^{\arctan \frac{1}{x}} = e^{-\pi/2}$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s = e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}$$

Si noti che la discontinuità non è simmetrica.
La funzione converge per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\arctan \frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} e^{\arctan \frac{1}{x}} = 1$$

quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{\arctan \frac{1}{x}}}{1 + x^2} \\ f''(x) &= \frac{(1 + 2x)\, e^{\arctan \frac{1}{x}}}{(1 + x^2)^2} \end{aligned} \tag{114}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \ \ f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in X.

Determiniamo la derivata sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -e^{-\pi/2}$$
$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -e^{\pi/2}$$

Possiamo ora scrivere le equazioni delle semirette tangenti a sinistra e a destra nel punto di discontinuità $x = 0$.

$$\tau_{-})\ y = e^{-\pi/2}(1 - x)$$
$$\tau_{+})\ y = e^{\pi/2}(1 - x)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

per cui γ è concavo veso l'alto in $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ed è concavo verso il basso in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Ciò implica che $x = -\frac{1}{2}$ è punto di flesso:

$$F\left(-\frac{1}{2}, e^{\arctan 2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (32).

1.26 Esercizio 703

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{1/x}\right) \tag{115}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{1/x} = 0 \ \text{ mai!} \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

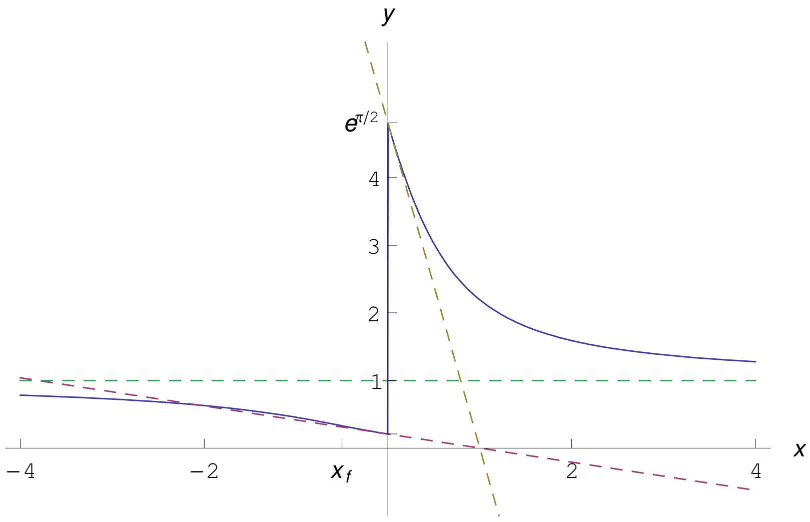


Figura 32: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x}}$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \quad f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{2}^-, \quad \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(e^{1/x}\right) = 0^+$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s = \frac{\pi}{2}$$

Si noti che la discontinuità non è simmetrica.
La funzione converge per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{4}^+, \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{4}^+$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2\left(1 + e^{2/x}\right)} \tag{116}$$

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}\left[1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1)\right]}{\left(1 + e^{2/x}\right)^2 x^4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \ \ f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in X.
Determiniamo la derivata sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

Quindi γ "arriva" in $x = 0^-$ con tangente orizzontale, e "parte" da $x = 0^+$ con tangente orizzontale

Concavità e punti di flesso.
Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) = 0$$

Risolvendo numericamente, troviamo le radici:

$$\alpha \simeq -0.48, \ \beta = -\alpha$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in (\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty),$$

per cui γ è concavo veso l'alto in $(\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty)$ ed è concavo verso il basso in $(-\infty, \alpha) \cup (0, \beta)$. Ciò implica che $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso.

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (33).

1.27 Esercizio 704

Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)} \tag{117}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow X = (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \ \ \nexists P \in \gamma \cap x$$

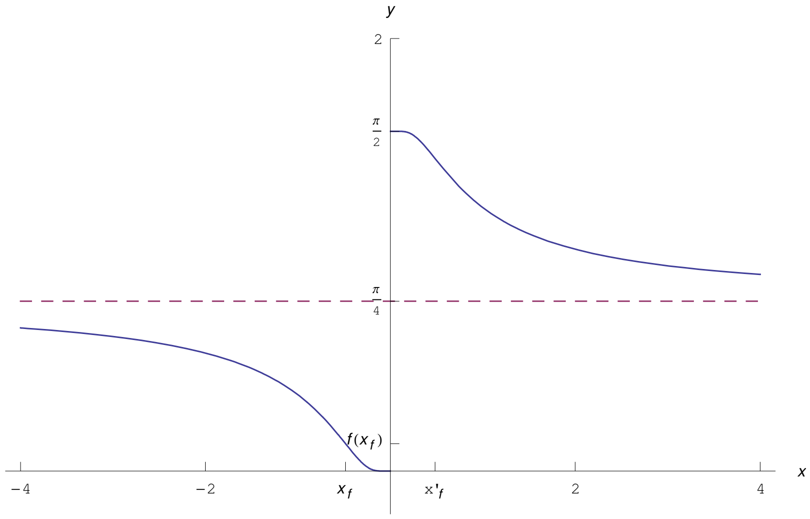


Figura 33: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\left(e^{1/x}\right)$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan x + 1 > 1 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-\tan 1, 0)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} f(x) = -\frac{1}{\ln 0^+} = -\frac{1}{-\infty} = 0^+,$$

cosicchè $x = -\tan 1$ è una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$$

quindi la retta $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$ è asintoto orizzontale a destra.

Calcolo delle derivate
Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} \tag{118}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Determiniamo la derivata destra in $x = -\tan 1$:

$$\begin{aligned}
f'_+(-\tan 1) &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} \\
&= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2}
\end{aligned}$$

Il primo limite non produce indeterminazione, quindi calcoliamo il secondo ponendo $t = 1 + \arctan x$, e ciò implica $t \to 0^+$ se $x \to (-\tan 1)^+$

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t \ln^2 t}$$

Siccome $\lim_{t \to 0} t \ln^2 t = 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} = +\infty,$$

donde:

$$f'_+(-\tan 1) = +\infty$$

Quindi γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto.
Concavità e punti di flesso.
Non abbiamo determinato la derivata seconda, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto, segue che esiste un flesso in $x_f \in (-\tan 1, 0)$, risultando γ concavo verso il basso in $(-\tan 1, x_f)$ e concava verso l'alto in $(x_f, 0)$. In $(0, +\infty)$ γ volge nuovamente la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (34).

1.28 Esercizio 705

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{1/x^2}\right) \tag{119}$$

***

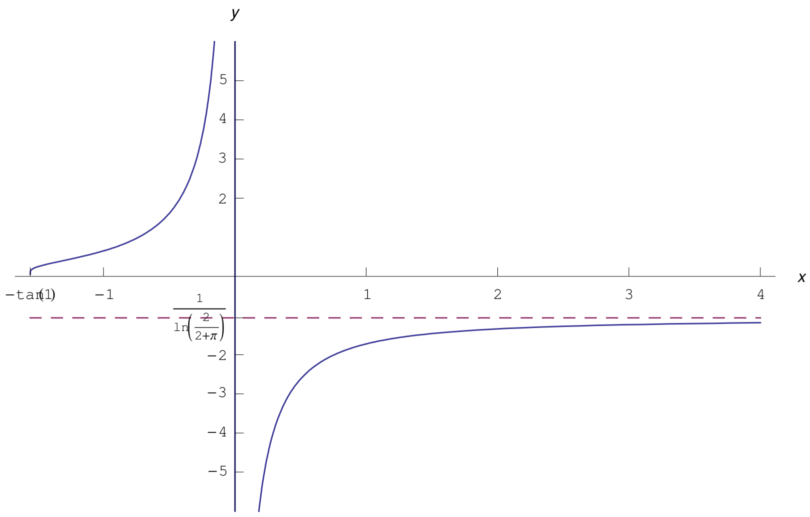


Figura 34: Grafico della funzione $f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)}$

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \; f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-, \lim_{x \to 0^-} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

cosicchè $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan\left(e^{0^+}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+,$$

e in forza della parità:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan\left(e^{0^+}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1+e^{2/x^2}\right)} \tag{120}$$

$$f''(x) = \frac{2e^{1/x^2}\left[2+3x^2+e^{2/x^2}\left(3x^2-2\right)\right]}{x^6\left(1+e^{2/x^2}\right)^2} \tag{121}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.
Determiniamo le derivata destra e sinitra in $x = 0$:

$$f'_+(0) = -\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1+e^{2/x^2}\right)} = 0$$

$$f'_-(0) = -\lim_{x\to0^-}\frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1+e^{2/x^2}\right)} = 0$$

(per il calcolo si suggerisce il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$).
Quindi γ "arriva" e "parte" da $x = 0$ con tangente orizzontale.
Concavità e punti di flesso.
Lo studio della derivata seconda è complicato, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "arriva" e "parte" da $x = 0$ con tangente orizzontale, segue che esistono due flessi simmetrici rispetto all'asse y, con $|x| \sim 2/3$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (35).

1.29 Esercizio 706

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin e^x \tag{122}$$

***

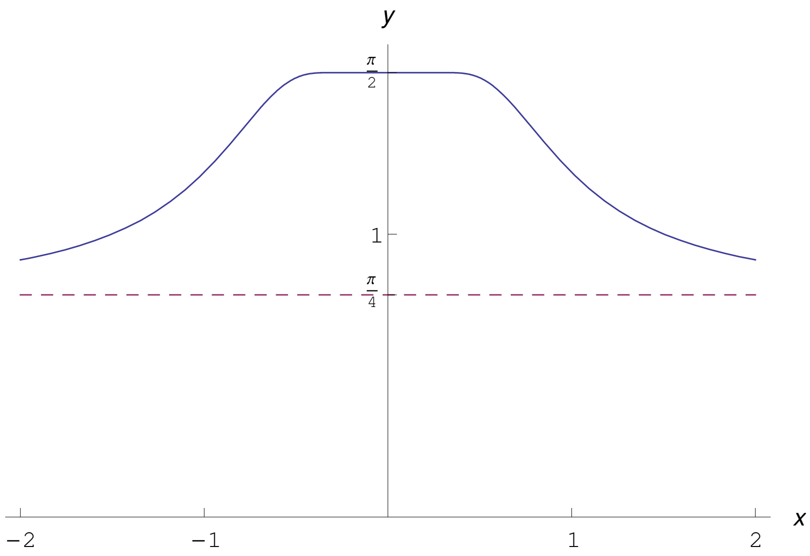


Figura 35: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\left(e^{1/x^2}\right)$

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \; f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin 0^+ = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.
Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \tag{123}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{\sqrt{(1-e^x)^3}} \tag{124}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \; f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Determiniamo le derivata sinistra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = +\infty$$

Quindi γ "arriva" a $x = 0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.
Concavità e punti di flesso.
Segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0,$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (36).

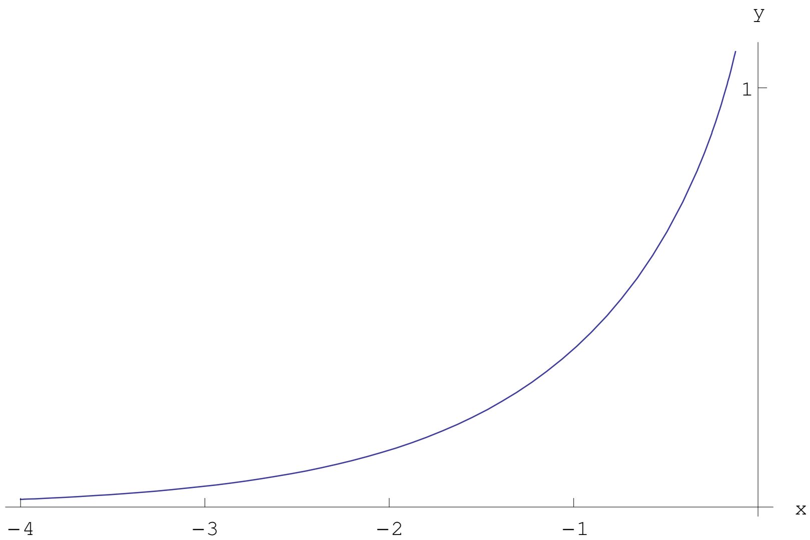


Figura 36: Grafico della funzione $f(x) = \arcsin e^x$

1.30 Esercizio 707

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2^{1/x}} \tag{125}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{126}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) < 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima in $x = 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^-}{1} = 0^- \end{aligned} \tag{127}$$

Le (127) implicano:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \tag{128}$$

per cui $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Studiamo ora il comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \end{aligned} \tag{129}$$

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Da ciò segue che il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x)=\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2} \tag{130}$$

$$f''(x)=\frac{2^{1/x}\left(1+2^{1/x}\right)\ln^2 2}{x^3\left(1-2^{1/x}\right)^3} \tag{131}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Lo studio del segno e la ricerca degli zeri della derivata prima è troppo complicato, per cui ci limitiamo a studiarne il comportamento in un intorno di $x=0$. In ogni caso, ci aspettiamo una crescenza in $(-\infty,0)$ e una decrescenza in $(0,+\infty)$.

$$\begin{aligned}
f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\\
&=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-2^{1/x}}-\ln 2\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}\\
&=1-\ln 2\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\left(1-2^{1/x}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\left(1-2^{1/x}\right)^2}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x}\underset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{2^{-t}}=0$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=0,$$

perciò:

$$f'_-(0)=1$$

La derivata sinistra:

$$\begin{aligned}
f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-2^{1/x}}-\ln 2\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}\\
&=0-\ln 2\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2} = \frac{\infty}{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x2^{1/x}\left(2^{-1/x}-1\right)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

poichè:

$$\lim_{x\to 0^+} x2^{1/x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2^t}{t} = +\infty$$

Quindi:

$$f'_+(0) = 0$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ punti di flesso}$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x\left(1-2^{1/x}\right) > 0 \quad \text{mai!}$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (37).

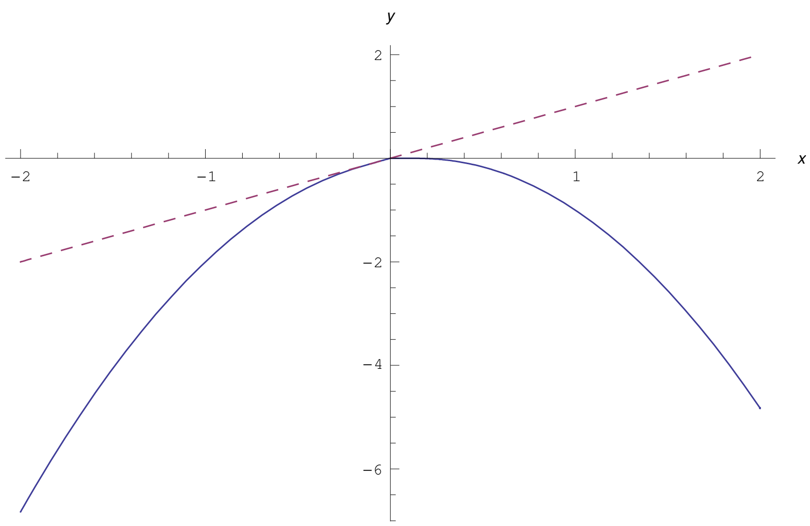


Figura 37: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{1-2^{1/x}}$

***

1.31 Esercizio 708

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^x \tag{132}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow \quad (0,0) \in \gamma \tag{133}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$ e nel semipiano $y > 0$ per $x > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0^- \end{aligned} \tag{134}$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.
Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = e^x(x+1) \tag{135}$$
$$f''(x) = e^x(x+2) \tag{136}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

Quindi abbiamo il punto estremale $x = -1$.
Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > -1,$$

donde la funzione è strettamente crescente in $(-1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$. Da ciò segue che $x = -1$ è punto minimo relativo. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow x=-2$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow x>-2,$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso in $(-\infty,-2)$ per poi volgere la concavità verso l'alto in $(-2,+\infty)$. Segue che $x=-2$ è punto di flesso:

$$F\left(-2,-\frac{2}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (38).

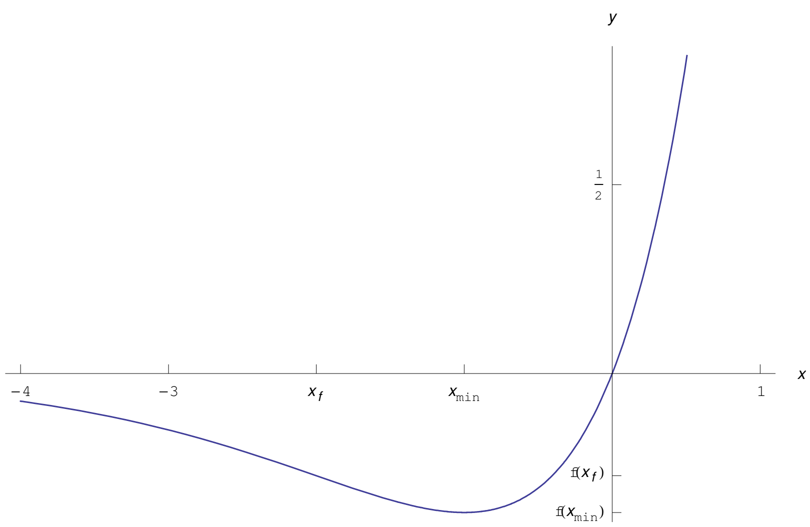


Figura 38: Grafico della funzione $f(x)=xe^x$

1.32 Esercizio 709

$$f(x)=xe^{-x} \tag{137}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow \quad (0,0) \in \gamma \tag{138}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$ e nel semipiano $y > 0$ per $x > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+ \tag{139}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.
Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1) \tag{140}$$
$$f''(x) = e^{-x}(x-2) \tag{141}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Quindi abbiamo il punto estremale $x = 1$.
Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 1,$$

donde la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Da ciò segue che $x = 1$ è punto massimo relativo.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 2,$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso in $(-\infty, 2)$ per poi volgere la concavità verso l'alto in $(2, +\infty)$. Segue che $x = 2$ è punto di flesso:

$$F\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (39).

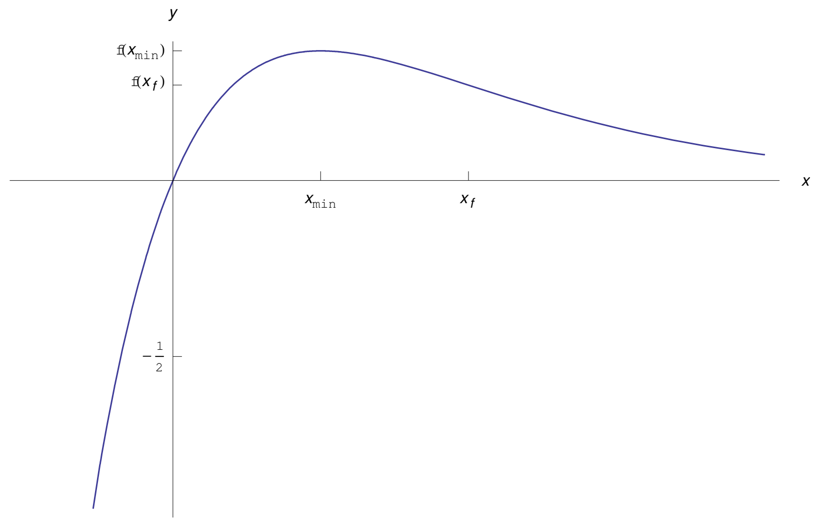


Figura 39: Grafico della funzione $f(x) = xe^{-x}$

1.33 Esercizio 710

Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \mathrm{sign}(\ln|x|) \tag{142}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ricordiamo che la funzione $\mathrm{sign}(t)$ è così definita:

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t > 0 \\ -1, \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\operatorname{sign}(\ln|x|) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ln|x| > 0 \\ -1, \text{ se } \ln|x| < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \ln|x| > 0 &\Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \ln|x| < 0 &\Longleftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \end{aligned}$$

Perciò:

$$\operatorname{sign}(\ln|x|) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -1, \text{ se } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases} \tag{143}$$

Ora siamo in grado di esplicitare l'espressione di $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -e^x, \text{ se } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases} \tag{144}$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{e} \tag{145}$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{1}{e},$$

per cui $x_0 = -1$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto di discontinuità $s(-1) = -\frac{2}{e}$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -e \tag{146}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = e,$$

per cui $x_0' = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto di discontinuità $s(1) = 2e$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \tag{147}$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \tag{148}$$

Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra, in quanto abbiamo una divergenza esponenziale.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (40).

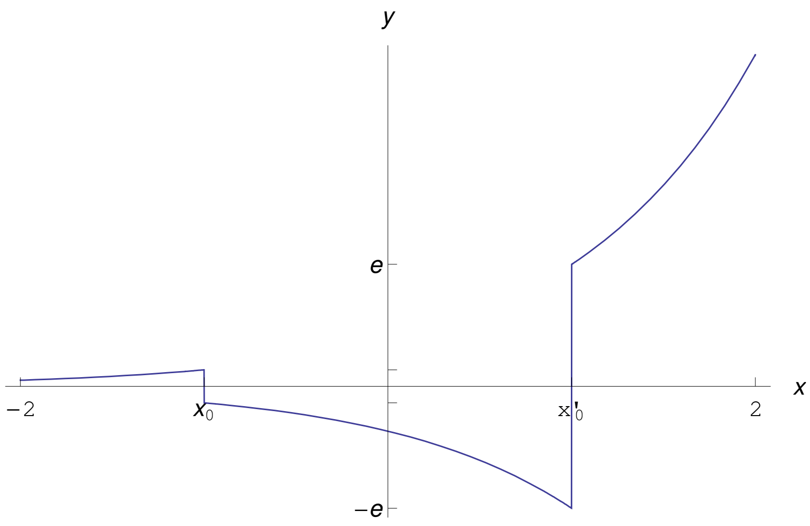


Figura 40: Grafico della funzione $f(x) = e^x \operatorname{sign}(\ln|x|)$

1.34 Esercizio 715

Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \tag{149}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x \leq 1+x^2 \\ 2x \geq -1-x^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x^2-1)^2 \geq 0 \\ (x^2+1)^2 \geq 0 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}$$

Quindi $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1 \implies \quad (1,0) \in \gamma \cap x \tag{150}$$

essendo γ il grafico della funzione.

$$f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow B\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \in \gamma \cap x$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) > 0$$

Ricordiamo che la funzione arccos è sempre positiva in figura (41).

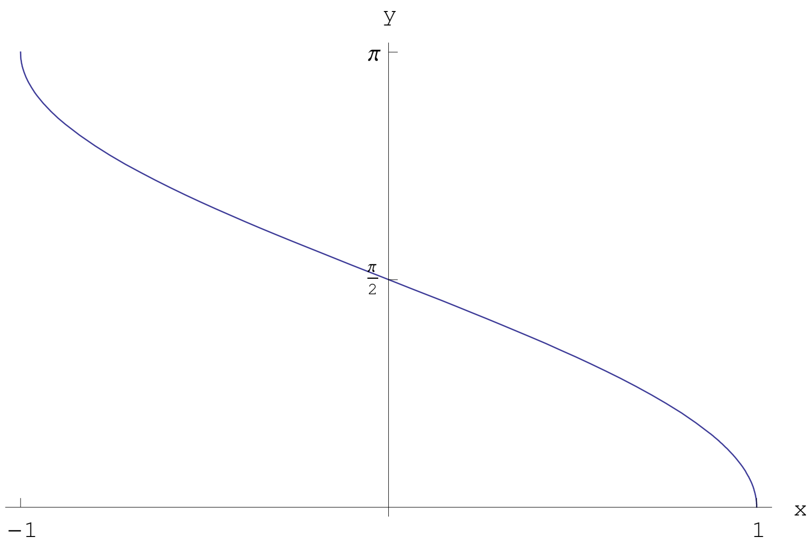


Figura 41: Grafico della funzione $\arccos x$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

Osserviamo che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0^-, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0^+$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arccos\left(0^+\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \tag{151}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arccos\left(0^-\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$$

Da ciò segue che la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{|x^2-1|}\frac{2}{x^2+1} \tag{152}$$

$$f''(x) = -\frac{|x^2-1|}{x^2-1}\frac{4x}{(x^2+1)^2} \tag{153}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Esplicitando la prima delle (152):

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1}, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -\frac{2}{x^2+1}, & \text{se } x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{154}$$

Da ciò segue che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-1, 1)$. Si osservi che $x = -1$ e $x = +1$ sono punti di estremo relativo (massimo e minimo rispettivamente), e al tempo stesso sono punti angolosi, giacchè:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1$$
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1$$

Concavità e punti di flesso.
Esplicitando la seconda delle (152):

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1),$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ per poi volgere la concavità verso il basso in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Segue che $x = 0$ è punto di flesso:

$$F\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Si osservi che i punti $x = \pm 1$ pur essendo dei punti di cambio di concavità, non sono punti di flesso, poiché la derivata seconda ha ivi una discontinuità di prima specie.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (42).

1.35 Esercizio 716

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \ln \left(x^2 + 1\right) \tag{155}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

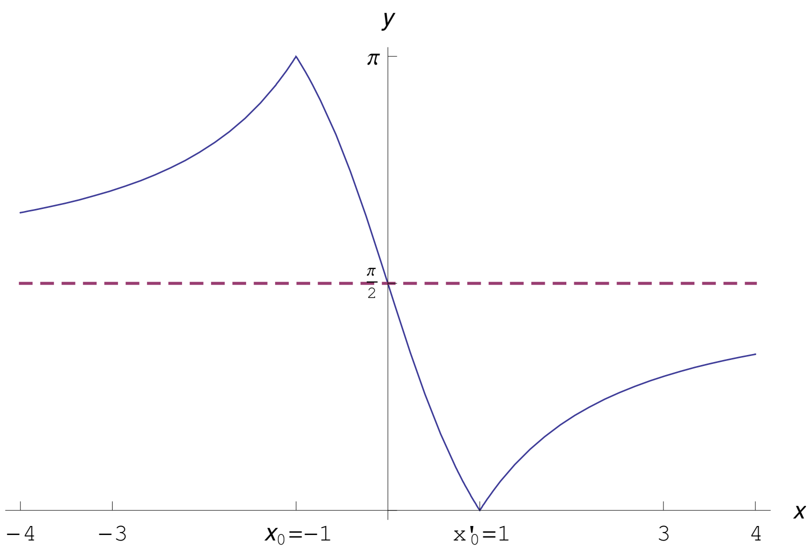


Figura 42: Grafico della funzione $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$$\begin{cases} \ln(x^2+1) \leq 1 \\ \ln(x^2+1) \geq -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - (e-1) \leq 0 \\ x^2 + \frac{e-1}{e} \geq 0 \end{cases}$$

La prima è verificata in $X_1 = \left[-\sqrt{e-1}, \sqrt{e+1}\right]$, la seconda in $X_2 = (-\infty, +\infty)$, quindi $X = X_1 \cap X_2 = X_1$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) = f(x)$, $\forall x$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow \quad (0,0) \in \gamma \tag{156}$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 + 1 = 1 > 0, \, \forall x \neq 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua, quindi:

$$f\left(\pm\sqrt{e-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-\ln(x^2+1)}} \tag{157}$$

Omettiamo il calcolo della derivata seconda in quanto troppo complicato.
Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

e

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{e-1}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\sqrt{e-1}, 0\right)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo. Siccome f è continua in un compatto, segue per il teorema di Weierstrass che f è ivi dotata di minimo e massimo assoluti. Il minimo assoluto è $(0, 0)$, mentre il massimo assoluto uno dei punti $\left(\pm\sqrt{e-1}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La derivata prima è discontinua agli estremi:

$$\lim_{x \to -\left(\sqrt{e-1}\right)^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \left(\sqrt{e-1}\right)^-} f'(x) = +\infty$$

Concavità e punti di flesso.
È evidente che il grafico è concavo verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (43).

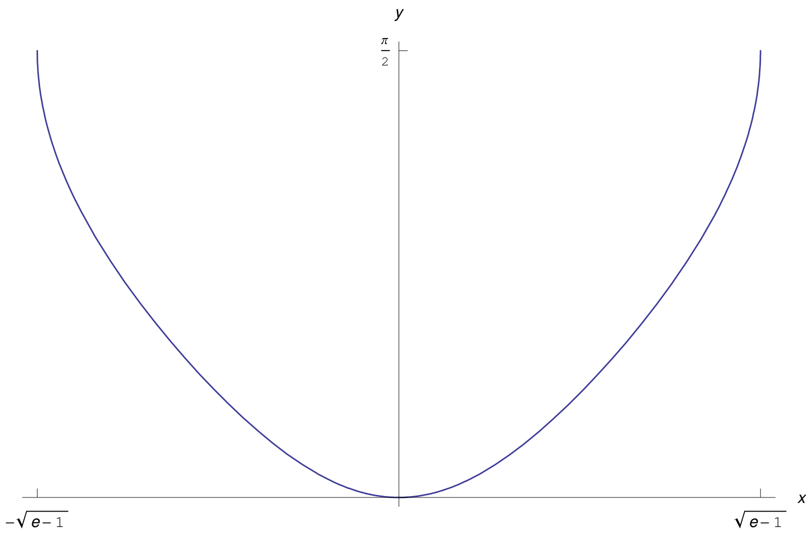


Figura 43: Grafico della funzione $\arcsin \ln \left(x^2 + 1\right)$

1.36 Esercizio 717

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \sinh x \tag{158}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$\sinh x > 0 \Longleftrightarrow x > \alpha \stackrel{def}{=} \text{arcsinh}1 \simeq 0.88$$

Quindi $X = [\alpha, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sinh x = 1 \Longleftrightarrow x = \alpha \Longrightarrow \quad (\alpha, 0) \in \gamma \cap x \tag{159}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \sinh x > 2 \Longleftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.
La funzione diverge positivamente all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \coth x = 1 \\
n &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \infty - \infty \\
&= \lim_{x \to +\infty} (\ln \sinh x - \ln e^x) \\
&= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{\sinh x}{e^x} \\
&= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} \\
&= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{2} \\
&= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2
\end{aligned}$$

Quindi la retta $y = x - \ln 2$ è asintoto obliquo.
Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \coth x$$
$$f''(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Quindi f è strettamente crescente in X
Concavità e punti di flesso.
Risulta:

$$f''(x) < 0, \forall x \in X,$$

per cui γ è concavo.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (44).

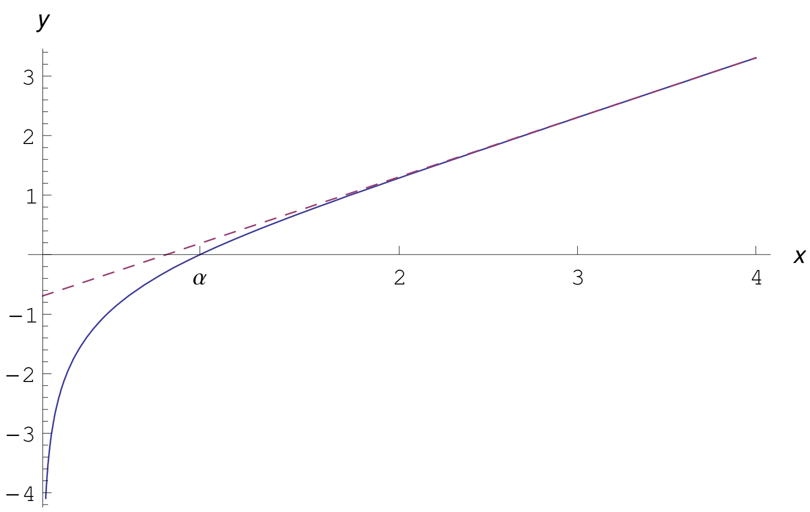


Figura 44: Grafico della funzione $f(x) = \ln \sinh x$

1.37 Esercizio 718

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x} - 1|} \tag{160}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$e^{2x} \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

Quindi

$$X = \mathbb{R} - \{0\}$$

L'espressione analitica della funzione può essere riscritta osservando che:

$$e^{2x} - 1 = e^x \left(e^x - e^{-x}\right) = 2e^x \sinh x$$

Perciò:

$$f(x) = \frac{1}{2|\sinh x|} = \begin{cases} \frac{1}{2\sinh x}, & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ -\frac{1}{2\sinh x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, per cui il grafico γ è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{161}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{1}{0^-} = -(-\infty) = +\infty,$$

cioè:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.

La funzione è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$$

Da ciò segue che l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\cosh x}{2\sinh^2 x}, & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ \frac{\cosh x}{2\sinh^2 x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.

Concavità e punti di flesso.

È facile dedurre che γ volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (45).

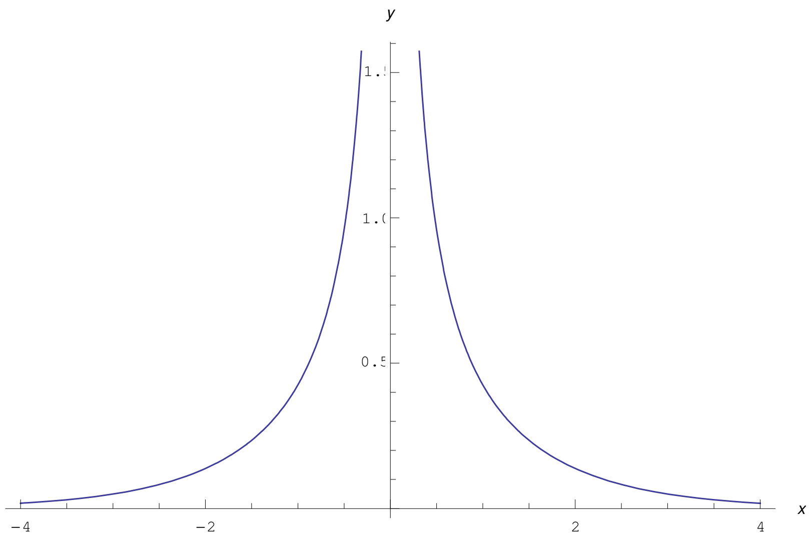


Figura 45: Grafico della funzione $f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$

1.38 Esercizio 719

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\sin x} \tag{162}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}$. Inoltre, è periodica di periodo $T = 2\pi$, per cui studiamola solo in $[0, 2\pi]$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{163}$$

Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow A(0,1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \; f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua; inoltre, essendo periodica è non regolare all'infinito.

Calcolo delle derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x} \cos x \\ f''(x) &= e^{\sin x} \left(-\sin^2 x - \sin x + 1 \right) \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \text{ è punto di massimo relativo, con } f\left(\frac{\pi}{2}, e\right) \\ x &= \frac{3\pi}{2} \text{ è punto di minimo relativo, con } f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Concavità e punti di flesso.

Poniamo $\sin x = t$, quindi:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cioè:

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{(l'altra soluzione non è accettabile in quanto } < -1)$$

Da cui:

$$x = \alpha,\ x = \pi - \alpha,$$

essendo $\alpha < \frac{\pi}{4}$, più precisamente $\alpha \simeq 0.67$. Inoltre:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow t^2 + t - 1 < 0 \Longleftrightarrow x \in [0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, 2\pi]$$

Cioè γ è concavo verso l'alto in $[0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, 2\pi]$ ed è concavo verso il basso $(\alpha, \pi - \alpha)$
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (46).

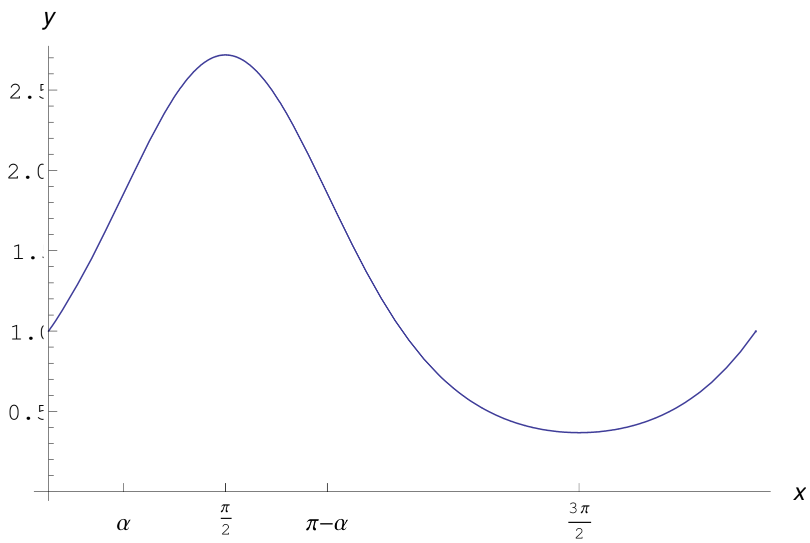


Figura 46: Grafico della funzione $f(x) = e^{\sin x}$

1.39 Esercizio 725

Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x - \cos^2 x \tag{164}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, determiniamo il periodo fondamentale:

$$\begin{array}{rl} \cos x & \text{ha periodo } T_1 = 2\pi \\ \cos^2 x & \text{ha periodo } T_2 = \pi \end{array}$$

Quindi il periodo fondamentale della funzione è $T = 2\pi$. Studiamo perciò la funzione in $[0, 2\pi]$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x (1 - \cos x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0, \cos x = 1 \tag{165}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3}{2}\pi,\ x = 0, x = 2\pi \tag{166}$$

Quindi:

$$(0,0) \in \gamma,\ A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), C(2\pi, 0) \in \gamma \cap x$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos x (1 - \cos x) > 0 \Longleftrightarrow \cos x > 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \sin x (2\cos x - 1)$$
$$f''(x) = 2\cos 2x - \cos x = 4\cos^2 x - \cos x - 2$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0,\ \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \sin x (2\cos x - 1) > 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} \;\text{ è punto di massimo relativo} \\ x &= \pi \;\text{ è punto di minimo relativo} \\ x &= \frac{5\pi}{3} \;\text{ è punto di massimo relativo} \end{aligned}$$

Le coordinate sono:

$$M_1\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right),\, M_2\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{1}{4}\right),\, m\left(\pi,-2\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della f''

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\iff 4\cos^2 x-\cos x-2=0 \\ &\iff \cos x=\frac{1-\sqrt{33}}{8},\; \cos x=\frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ &\iff x=\alpha,\; 2\pi-\alpha,\; \beta,\; 2\pi-\beta, \end{aligned}$$

essendo:

$$\alpha=\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8},\,\beta=\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

Segno della f'':

$$f''(x)>0\iff \cos x<\frac{1-\sqrt{33}}{8},\cos x>\frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

Le soluzioni di $\cos x<\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ si deducono dal grafico di fig. (47).

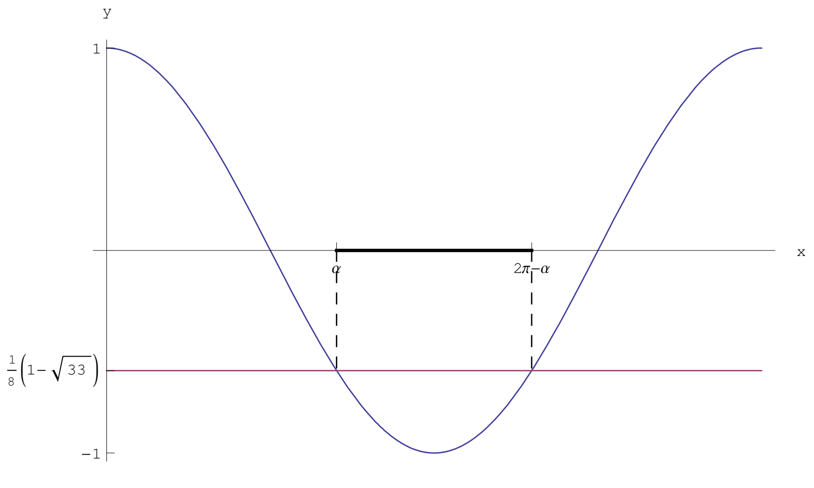


Figura 47: Ricerca delle soluzioni di $\cos x<\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

Le soluzioni dicos $x>\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ si deducono dal grafico di fig. (48).

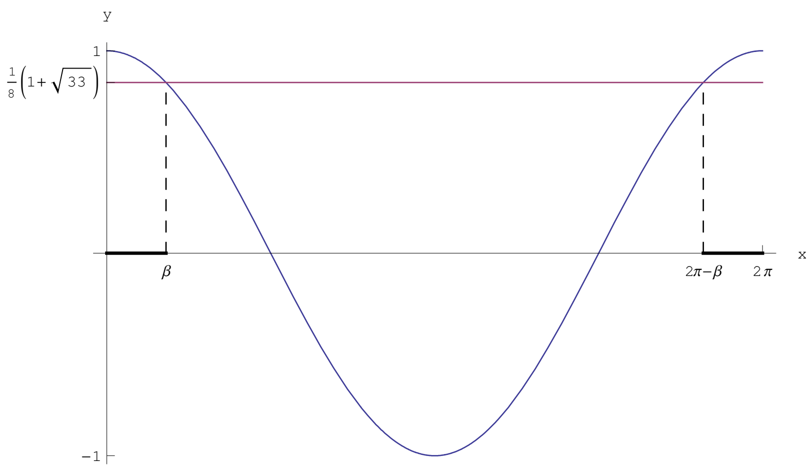


Figura 48: Ricerca delle soluzioni di $\cos x > \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

Quindi γ è concavo in $[0, \beta) \cup (\alpha, 2\pi - \alpha) \cup (2\pi - \beta, 2\pi]$. I seguenti punti sono flessi:

$$F_1\left(\beta, \frac{3\sqrt{33}-13}{32}\right), F_2\left(\alpha, -\frac{3\sqrt{33}+13}{32}\right)$$
$$F_3\left(2\pi-\alpha, -\frac{3\sqrt{33}+13}{32}\right), F_4\left(2\pi-\beta, \frac{3\sqrt{33}-13}{32}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (49).

2 Esercizio 726

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x}} \tag{167}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = [0, 1]$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid e^{\arcsin\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

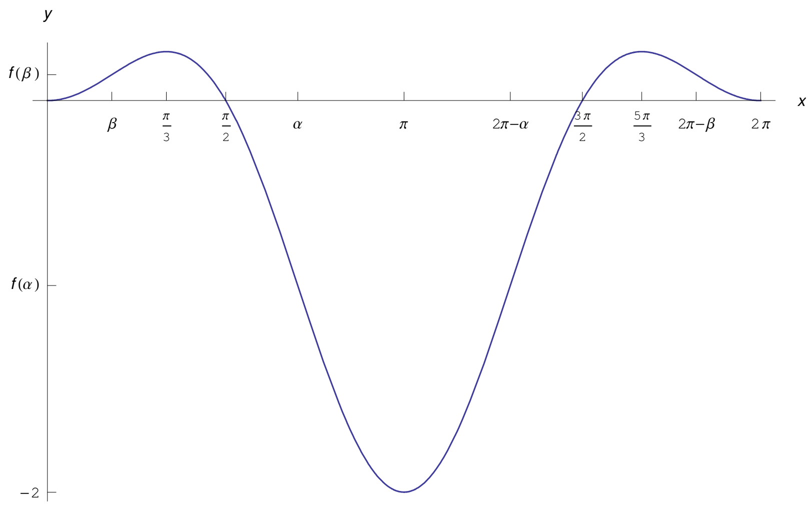


Figura 49: Grafico della funzione $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è continua agli estremi dell'intervallo X, risultando $f(1) = e^{\pi/2}$.
Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x(1-x)}}$$
$$f''(x) = f(x)\frac{\sqrt{x-x^2}+2x-1}{4\sqrt{x^3(1-x)^3}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in (0,1), \ f'(x) > 0,$$

quindi la funzione è strettamente crescente in X. La derivata non è continua agli estremi di X:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$$

per cui il grafico "parte" da $A(0,1)$ con tangente verticale e "arriva" a $B\left(1, e^{\pi/2}\right)$ con tangente verticale.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f''

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - x^2} = 1 - 2x \\ x \neq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\sqrt{x - x^2} = 1 - 2x \Longleftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

Segno della f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - x^2} > 1 - 2x \\ x \neq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione irrazionale:

$$\sqrt{x - x^2} > 1 - 2x \tag{168}$$

Se $1 - 2x \geq 0$:

$$\begin{cases} x - x^2 > (1 - 2x)^2 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 5x + 1 < 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x \in S_1 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} \right]$$

Se $1 - 2x < 0$:

$$\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in S_2 = \left(\frac{1}{2}, 1 \right]$$

Quindi le soluzioni della (168) sono:

$$x \in S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, 1 \right]$$

Perciò:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in S - \{1\} = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, 1 \right)$$

Il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, 1\right)$, concavo verso il basso in $\left(0, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$. Il punto $x_f = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ è punto di flesso a tangente obliqua.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (50).

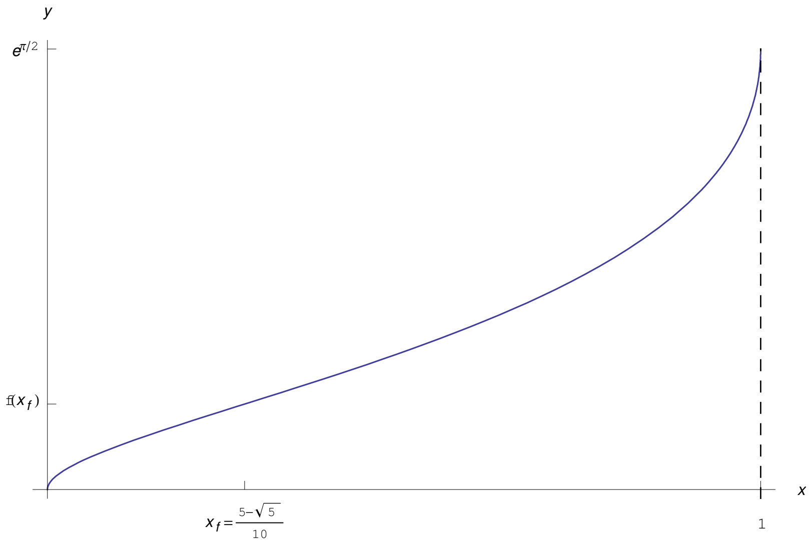


Figura 50: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x}}$

3 Esercizio 727

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x|} \tag{169}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\arctan x}, & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-\arctan x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{170}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) = f(x)$, $\forall x$. Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid e^{\arctan|x|} = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow A(0,1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione converge per $|x| \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\pi/2}, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{\pi/2}$$

Quindi la retta $2y = \pi$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.
Calcolo delle derivate
Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in (0, +\infty), \ f'(x) > 0,$$

quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si osservi che la funzione non è derivabile in tale punto, ma lo è a sinistra e a destra:

$$f'_-(0) = -1, \ \ f'_+(0) = 1$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Le equazioni delle tangenti a destra e a sinistra sono:

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

Concavità e punti di flesso.
Il grafico è concavo verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (51).

4 Esercizio 728

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\ln^2 x + 1\right) + \frac{\pi}{2} \tag{171}$$

***

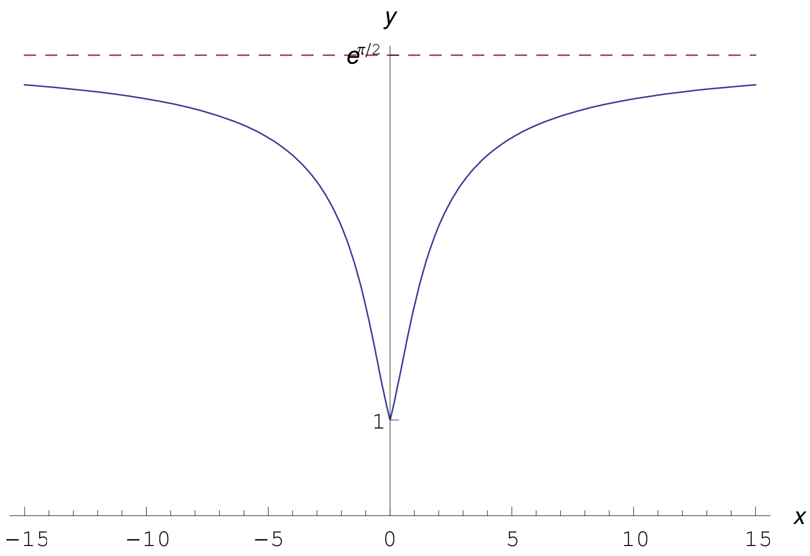


Figura 51: Grafico della funzione assegnata.

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \ln^2 x + 1 > 0 \\ \ln x + 1 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}, \tag{172}$$

quindi:

$$X = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \tag{173}$$

Intersezioni con gli assi
Per determinare le ascisse degli eventuali punti di intersezione con l'asse x andrebbe risolta l'equazione:

$$\arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\ln^2 x + 1\right) + \frac{\pi}{2} = 0,$$

non risolvibile analiticamente, per cui tralasciamo l'intersezione con l'asse x. Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno
Ci si ritrova nelle stesse condizioni per la determinazione dei punti di intersezione con l'asse x, per cui tralasciamo lo studio del segno.

Comportamento agli estremi
La funzione diverge positivamente in $x=0$. Per dimostrare ciò, calcoliamo:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)+(+\infty)+\frac{\pi}{2} \tag{174}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}=1$$

Quindi

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

Perciòl'asse y è asintoto verticale.
Inoltre:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2} \tag{175}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}=-\frac{2}{0^-}=+\infty$$

da cui:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x) = \pi+\ln\sqrt{2} \tag{176}$$

Calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\frac{\ln x-1}{\ln x+1}=-\frac{2}{0^+}=-\infty$$

da cui:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x) = \ln\sqrt{2} \tag{177}$$

Dalle (176)-(177) segue che $x=e^{-1}$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto:

$$s\left(\frac{1}{e}\right)=-\pi \tag{178}$$

Studiamo il comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln(+\infty)=+\infty, \tag{179}$$

cioè la funzione diverge positivamente. Vediamo se il grafico è dotato di asintoto obliquo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\ln^2 x+1\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0,
\end{aligned}$$

cioè γ è privo di asintoto obliquo.
Calcolo delle derivate
Poniamo:

$$f_1(x)=\arctan\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right),\quad f_2(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\ln^2 x+1\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
f_1'(x)&=\frac{1}{1+\frac{(\ln x-1)^2}{(\ln x+1)^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}(\ln x+1)-\frac{1}{x}(\ln x-1)}{(\ln x+1)^2}\\
&=\frac{1}{x\left(\ln^2 x+1\right)}\\
f_2'(x)&=\frac{1+\ln x}{x\left(\ln^2 x+1\right)}
\end{aligned}$$

La derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{\ln x+1}{x\left(\ln^2 x+1\right)}$$

La derivata seconda:

$$f''(x)=-\frac{\ln x\left(\ln^2 x+2\ln x+3\right)}{x^2\left(\ln^2 x+1\right)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f':

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow x=\frac{1}{e},$$

ma tale punto non appartiene a X.
Segno di f':

$$f'(x)>0\Longleftrightarrow\frac{\ln x+1}{x}>0\Longleftrightarrow x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right),$$

cosicché la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, ed è strettamente decrescente in $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. Il punto $x=\frac{1}{e}$ non è di estremo realtivo poiché tale punto non appartiene a X.
Inoltre:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-}f'(x)=0^-,\quad\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}f'(x)=0^+\Longrightarrow\lim_{x\to\frac{1}{e}}f(x)=0$$

Da ciò segue che γ arriva in $\left(\frac{1}{e}, \pi + \ln\sqrt{2}\right)$ e parte da $\left(\frac{1}{e}, \ln\sqrt{2}\right)$ con tangente orizzontale.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, mentre volge la concavità verso il basso in $(1, +\infty)$
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (52).

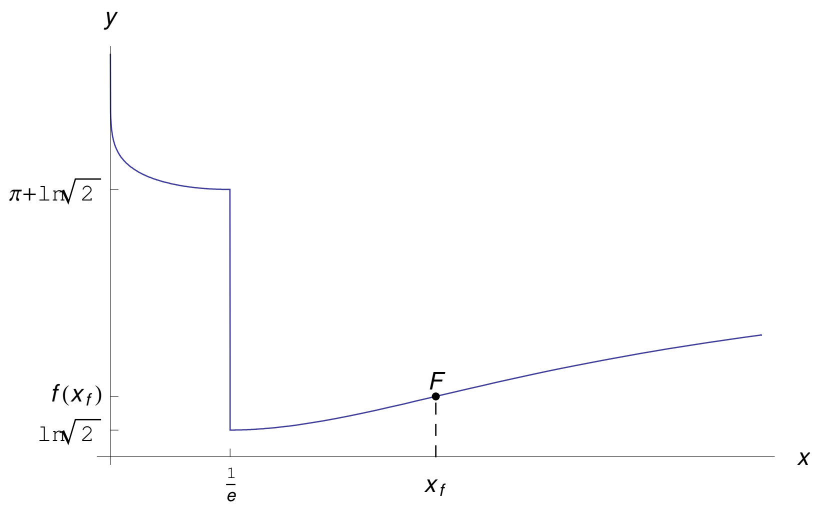


Figura 52: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\ln^2 x + 1\right) + \frac{\pi}{2}$

5 Esercizio 729

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan\frac{1+x}{1-|x|} - \frac{1}{2}\ln\left(1+|x|-x+x^2\right)} \tag{180}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} 1+|x|-x+x^2>0 \\ 1-|x|\neq 0 \end{cases}, \tag{181}$$

Risolviamo la prima delle (181):

$$\begin{aligned} & x\geq 0 \Longrightarrow x^2+1>0, \ \forall x \\ & x<0 \Longrightarrow x^2-2x+1>0 \Longleftrightarrow (x-1)^2>0 \Longrightarrow x\neq 1 \end{aligned}$$

Cioè

$$1+|x|-x+x^2>0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$$

La seconda:

$$1-|x|\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq \pm 1$$

quindi:

$$X=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty) \tag{182}$$

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} & \forall x\in X, \ f(x)>0 \\ & f(0)=e^{\pi/4} \end{aligned}$$

Studio del segno
Il grafico γ giace nel semipiano $y>0$.
Comportamento agli estremi
Conviene distinguere i casi $x\geq 0$ e $x<0$:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\arctan\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}, \text{ se } & x\in[0,1)\cup(1,+\infty) \\ -\frac{e^{\pi/4}}{x-1}, \text{ se } & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0) \end{cases}$$

Per $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 1^-} f(x)=e^{\arctan(+\infty)-\frac{1}{2}\ln 2}=\frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}} \\ & \lim_{x\to 1^+} f(x)=e^{\arctan(-\infty)-\frac{1}{2}\ln 2}=\frac{e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

cioè $x=1$ è un punto di discontinuità di prima specie con salto:

$$s(1)=-\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\pi/4} \cdot e^{-\infty} = 0^+,$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra.
Per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{e^{\pi/4}}{2},$$

cioè $x = -1$ è un punto di discontinuità eliminabile.
Comportamento per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+,$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.
Derivate
Per $x \geq 0$ poniamo:

$$f_1(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),$$

donde:

$$f'(x) = f(x)\left[f_1'(x) - f_2'(x)\right]$$

Calcoliamo

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_2'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = f(x)\frac{1-x}{1+x^2}$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)\frac{1-x}{1+x^2} + f(x)\frac{d}{dx}\frac{1-x}{1+x^2} \\ &= 2f(x)\frac{x(x-2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Per $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{e^{\pi/4}}{(x-1)^2}$$

Non calcoliamo la derivata seconda nel caso $x < 0$, perché si vede immediatamente che γ volge la concavità verso l'alto per $x < 0$.

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \geq 0$ gli zeri di f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1,$$

ma tale punto non appartiene a X.
Segno di f':

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 1,$$

cosicché la funzione è strettamente crescente in $(0,1)$, ed è strettamente decrescente in $(1,+\infty)$. Il punto $x = 1$ non è di estremo realtivo poiché tale punto non appartiene a X.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0, \ \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0$$

Da ciò segue che γ arriva in $\left(1, \frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}}\right)$ e parte da $\left(1, \frac{e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}}\right)$ con tangente orizzontale.
Concavità e punti di flesso.
Per $x \geq 0$ gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x > 0 \underset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x \in (2,+\infty)$$

Quindi per $x > 0$ γ volge la concavità verso l'alto in $(2,+\infty)$. Il punto $x = 2$ è un punto di flesso:

$$F\left(2, \frac{e^{\arctan 3}}{\sqrt{5}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (53).

6 Esercizio 730

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \tag{183}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Osserviamo che la funzione è manifestamente periodica di periodo 2π, quindi limitiamo all'intervallo $[0,2\pi]$.
Deve essere: $\sin x \neq -\cos x$, cioè $x \neq \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, quindi:

$$X = \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$$

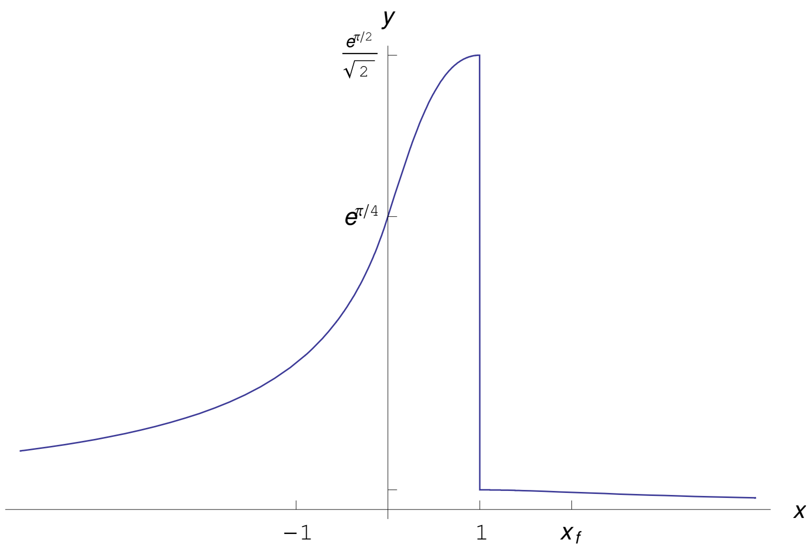


Figura 53: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan \frac{1+x}{1-|x|} - \frac{1}{2}\ln\left(1+|x|-x+x^2\right)}$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow A(0,1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \sin x > -\cos x \tag{184}$$

La (184) può essere risolta per via grafica, come riportato in figura (54).
Quindi:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right] \tag{185}$$

Il grafico γ giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Derivate

Risulta

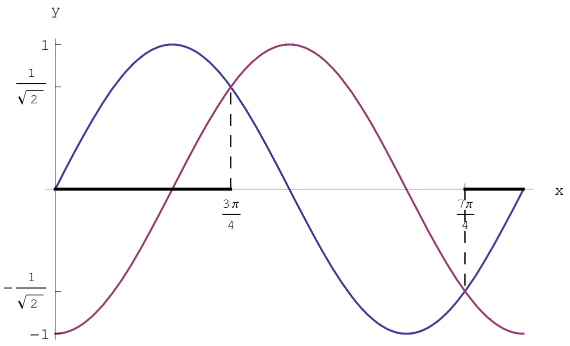


Figura 54: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > -\cos x$

$$f'(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} \tag{186}$$
$$f''(x) = \frac{3 - \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^3}$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to\left(\frac{3}{4}\pi\right)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\left(\frac{3}{4}\pi\right)^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\left(\frac{7}{4}\pi\right)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\left(\frac{7}{4}\pi\right)^+} f(x) = +\infty$$

Quindi le rette $y = \frac{3}{4}\pi$ e $y = \frac{7}{4}\pi$ sono asintoti verticali.
Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = \cos x \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi,$$

Segno di f':

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \sin x > \cos x,$$

che può essere risolta per via grafica, come riportato in figura (55).
Quindi:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$$

La funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$. I punti $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$ sono rispettivamente di minimo e massimo relativi:

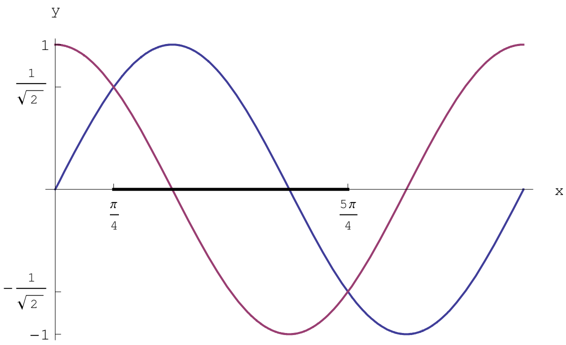


Figura 55: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > \cos x$

$$m\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ M\left(\frac{5}{4}\pi,-\frac{1}{2}\right)$$

Concavità e punti di flesso.

Non occorre studiare la derivata seconda, poichè dalla monotonia e dagli asintoti vediamo che γ volge la concavità verso l'alto in $\left[0,\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{4}\pi,2\pi\right]$, mentre volge la concavità verso il basso in $\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right)$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (56).

7 Esercizio 731

Studiare la funzione

$$f(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}} \tag{187}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x\neq -1$, quindi $X=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x\in X \mid f(x)=0\Longrightarrow \nexists P\in\gamma\cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0)=\frac{1}{e}\Longrightarrow A\left(0,\frac{1}{e}\right)\in\gamma\cap y$$

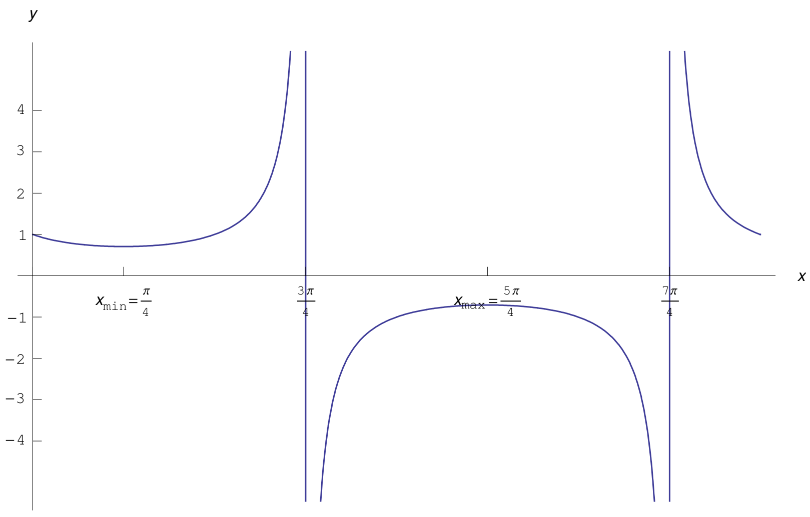


Figura 56: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \; f(x) > 0 \tag{188}$$

Quindi il grafico γ giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0^+$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale a sinistra.
Derivate
Risulta

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{(x+1)^2} \tag{189}$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\frac{f'(x)(x+1) - 2f(x)(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= 2\frac{\frac{2f(x)}{(x+1)^2}(x+1) - 2f(x)}{(x+1)^2} \\ &= -4\frac{xf(x)}{(x+1)^4} \end{aligned} \tag{190}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in X. Determiniamo il comportamento della derivata in un intorno destro della singolarità $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^2} = 0$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Studio del segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

Da cio segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, 0)$, e volge la concavità verso il basso in $(0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso:

$$F\left(0, \frac{1}{e}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (57).

8 Esercizio 733

Studiare la funzione

$$f(x) = 6\sin x - \ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}\right) \tag{191}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Osserviamo che la funzione è periodica di periodo 2π. Infatti $6\sin x$ ha periodo 2π, poi $\ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}\right)$ è periodica di periodo 2π, in quanto è data dalla somma di $\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}$ che ha periodo π e di $\sin x$, per cui $\ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}\right)$ ha periodo 2π.
Quindi limitiamo lo studio della funzione all'intervallo $[0, 2\pi]$. Deve essere:

$$\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > -\sin x \tag{192}$$

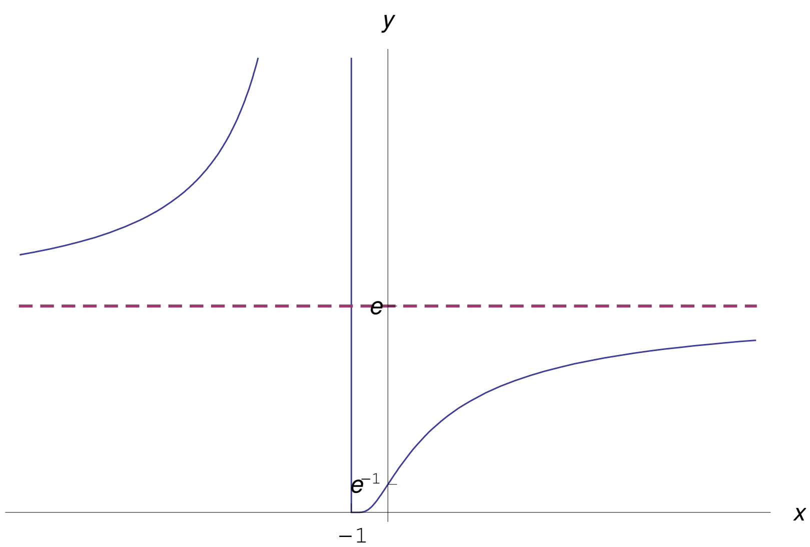


Figura 57: Grafico della funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

Poniamo $t = \sin x$, donde la (192) equivale a:

$$\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} > -t \tag{193}$$

Dobbiamo distinguere i due casi: 1) $-t \geq 0$, 2) $-t < 0$.
Nel caso 1 abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} t^2 - \frac{1}{4} > t^2 \\ t \leq 0 \end{cases} \tag{194}$$

Sia $S_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ verifica il sistema } (194)\}$. È evidente che $S_1 = \emptyset$, poichè la prima disequazione è equivalente alla disuguaglianza assurda $-\frac{1}{4} > 0$.

Nel caso 2 abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} t^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \tag{195}$$

Qui è $S_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Perciò detto $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ verifica la disequazione } 193\}$, risulta:

$$S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ripristinando la variabile x, otteniamo:

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$$

Perciò l'insieme di definizione è:

$$X=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.
Inoltre:

$$0=x\notin X\Longrightarrow\nexists P\in\gamma\cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Risulta poi

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{6}\right)&=3-\ln\frac{1}{2}=3+\ln 2\\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right)&=3+\ln 2\end{aligned}$$

Derivate
Derivata prima:

$$f'(x)=6\cos x-\frac{1}{\sin x+\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}}\left(\cos x+\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}}\right),$$

cioè:

$$f'(x)=\frac{\cos x\left(6\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}-1\right)}{\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}}\tag{196}$$

Per semplificare il calcolo della derivata seconda, scriviamo:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}},$$

essendo:

$$g(x)\overset{def}{=}\cos x\left(6\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}-1\right)\tag{197}$$

per cui:

$$f''(x)=\frac{g'(x)\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}-g(x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}}}{\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)^2}$$

Calcoliamo $g'(x)$:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -\sin x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1\right) + \cos x \frac{6\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \\
&= -6\sin x\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + \sin x + 6\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}}\left[-6\sin x\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right) + \sin x\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6\sin x\cos^2 x\right] \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}}\left(-6\sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6\cos^2 x\right)
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \times \\
&[\sin x\left(-6\sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6\cos^2 x\right) \\
&- \frac{\sin x \cos x^2\left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1\right)}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \times [\sin x\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \\
&\times \left(-6\sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6\cos^2 x\right) \\
&- \sin x\cos^2 x\left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1\right)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \times [-6\sin^3 x\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \\
&+ \frac{3}{2}\sin x\sqrt{\sin^3 x - \frac{1}{4}} + \sin x\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right) + \sin x\cos^2 x] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}}\left[2\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}\left(1 - 4\sin^2 x\right) + 1\right]
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
f''(x) = -\frac{3\sin x}{4}\frac{8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3} - 1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \tag{198}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \underset{x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]}{\Longrightarrow} \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{10}}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi i punti estremali:

$$x = \alpha,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi - \alpha,$$

essendo $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{6}$. Si noti che $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{6}$.
Segno della derivata:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1\right) > 0 \\ x \in X \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{10}}{6} \\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases},$$

cioè:

$$x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi - \alpha, \frac{5}{6}\pi\right)$$

Cioè la funzione è strettamente crescente in $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi - \alpha, \frac{5}{6}\pi\right)$, ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{6}, \alpha\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \alpha\right)$. Qundi:

$$\begin{aligned} &x = \alpha,\ \pi - \alpha \text{ sono punti di minimo} \\ &x = \frac{\pi}{2} \text{ è punto di massimo} \end{aligned}$$

$$m_1\left(\alpha, \sqrt{10} + \ln \frac{6}{1 + \sqrt{10}}\right),\ M\left(\frac{\pi}{2}, 6 + \ln \frac{2}{2 + \sqrt{3}}\right),\ m_2\left(\pi - \alpha, \sqrt{10} + \ln \frac{6}{1 + \sqrt{10}}\right)$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}^-} f'(x) = +\infty$$

Cioè il grafico parte da $A\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ con tangente verticale verso il basso, e giunge in $B\left(\frac{5\pi}{6}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ con tangente verticale verso l'alto.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3} = 1 \end{cases} \underset{\sin x > 0}{\Longrightarrow} 8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3} = 1$$

Cioè:

$$\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Longleftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \underset{\sin x > 0}{\Longrightarrow} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, gli zeri di f'':

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

Studio del segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \sin x \left[8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3} - 1 \right] < 0 \Longleftrightarrow \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\underset{x \in X}{\Longleftrightarrow} x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right)$$

Da cio segue che γ volge la concavità verso l'alto in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$, e volge la concavità verso il basso in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi\right)$. Esistono due punti di flesso:

$$F_1 \left(\frac{\pi}{4}, 3\sqrt{2} + \ln \frac{2}{1+\sqrt{2}} \right), \; F_2 \left(\frac{3}{4}\pi, 3\sqrt{2} + \ln \frac{2}{1+\sqrt{2}} \right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (58).

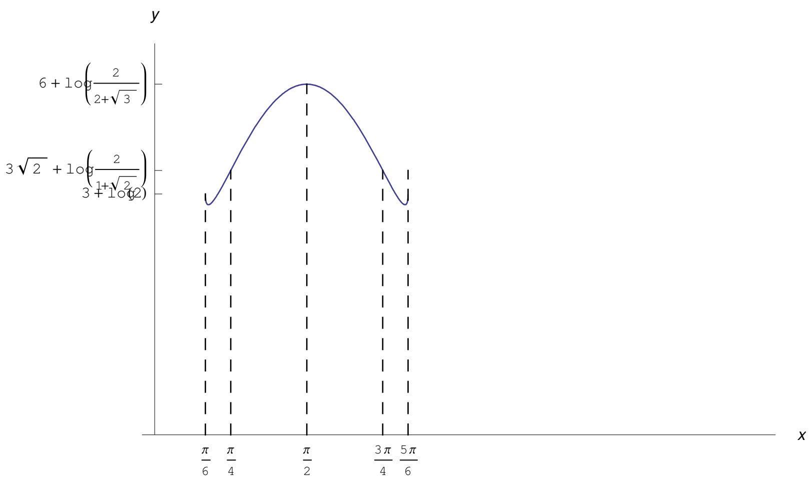


Figura 58: Grafico della funzione $f(x) = 6 \sin x - \ln \left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right)$

9 Esercizio 734

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x \tag{199}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$
Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.
Inoltre:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi
La funzione diverge all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{x} \right) = \frac{1}{2} \\ n_1 &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

quindi la retta

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

è asintoto obliquo a destra.

$$\begin{aligned} m_2 &= \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \\ n_2 &= \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

quindi la retta

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$$

è asintoto obliquo a sinistra. Osserviamo che i due asintoti sono rette parallele.
Derivate

$$f'(x) = \frac{x^2+3}{2(x^2+1)} \tag{200}$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f'(x) > 0,$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Studio del segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

Da cio segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, 0)$, e volge la concavità verso il basso in $(0, +\infty)$. Abbiamo il punto di flesso $F(0,0)$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (59).

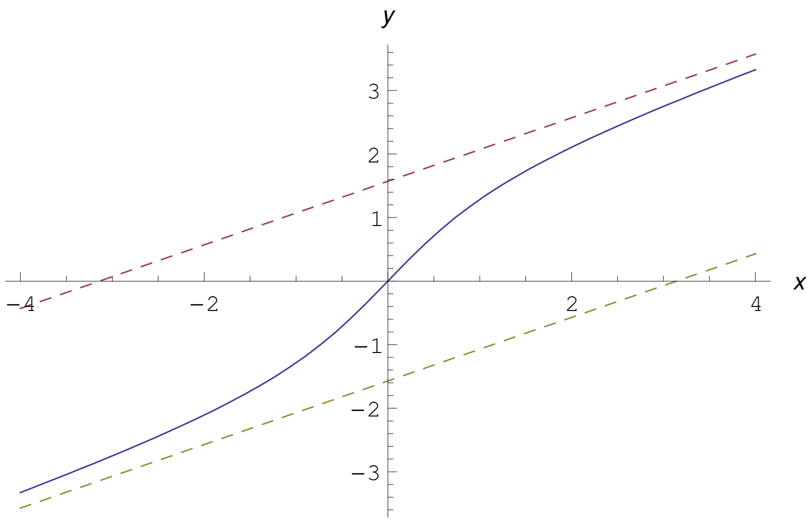


Figura 59: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x$

10 Esercizio 735

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{e^x}{3 - e^x} + \ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \frac{3}{5}x \tag{201}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che;

$$\begin{cases} \left| \frac{e^x}{3-e^x} \right| \leq 1 \\ \frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}} > 0 \end{cases} \tag{202}$$

Iniziamo a risolvere la prima delle (202), che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{e^x}{3-e^x} \leq 1 \\ \frac{e^x}{3-e^x} \geq -1 \end{cases} \tag{203}$$

La prima delle (203):

$$\frac{2e^x - 3}{3 - e^x} \leq 0 \iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2} \right] \cup (\ln 3, +\infty)$$

La seconda delle (203):

$$\frac{3}{3 - e^x} \geq 0 \iff e^x - 3 < 0 \iff x \in (-\infty, \ln 3)$$

Quindi la la prima delle (202) è verificata per:

$$x \in X_1 = x \in (-\infty, \ln 3) \cup (\ln 3, +\infty) \tag{204}$$

Passiamo alla seconda delle (202):

$$\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} > 0$$

Il segno del numeratore:

$$3 + \sqrt{9 - 6e^x} > 0 \iff \sqrt{9 - 6e^x} > -3 \iff 9 - 6e^x \geq 0$$
$$\iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2} \right]$$

Il segno denominatore

$$3 - \sqrt{9 - 6e^x} > 0 \iff \sqrt{9 - 6e^x} < 3$$
$$\iff \begin{cases} 9 - 6e^x \geq 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \iff 9 - 6e^x \geq 0$$
$$\iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2} \right]$$

Quindi

$$\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}>0 \iff x\in X_2=\left(-\infty,\ln\frac{3}{2}\right]$$

Questo risultato era prevedibile poichè per $x\leq\ln\frac{3}{2}$ è garantita la realtà di $\sqrt{9-6e^x}$ ed essendo non negativa, implica che $3+\sqrt{9-6e^x}$. Inoltre per $x\leq\ln\frac{3}{2}$ è $\sqrt{9-6e^x}<3$, per cui il denominatore è sempre maggiore di zero.

L'insieme di definizione è:

$$X=X_1\cap X_2=\left(-\infty,\ln\frac{3}{2}\right]$$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.

Inoltre:

$$f(0)=\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)\Longrightarrow A\left(0,\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)\right)\in\gamma\cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{3-e^x}=0\Longrightarrow\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{e^x}{3-e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)=+\infty,$$

quindi

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty-\infty$$

Per rimuovere la forma indeterminata scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)+\frac{3}{5}x\right] \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)+\ln e^{\frac{3}{5}x}\right] \\
&= \ln \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{3}{5}x}\cdot\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right) \\
&= \ln \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{3}{5}x}\cdot\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\cdot\frac{3-\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right) \\
&= \ln \lim_{x\to-\infty}\left[e^{\frac{3}{5}x}\cdot\frac{\left(3+\sqrt{9-6e^x}\right)^2}{6e^x}\right] \\
&= \ln \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{6}e^{-\frac{2}{3}x}\cdot\left(3+\sqrt{9-6e^x}\right)^2\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{6}\cdot(+\infty)\cdot(3+0)^2\right]=+\infty,
\end{aligned}$$

per cui la funzione diverge negativamente per $x \to -\infty$.
Eventuali asintoti obliqui:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}f'(x)$$

perciò calcoliamo la derivata prima.
Derivate
Poniamo:

$$f_1(x)=\arcsin\frac{e^x}{3-e^x},\quad f_2(x)=\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)+\frac{3}{5}x \tag{205}$$

cosicchè:

$$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x) \tag{206}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{2x}}{(3-e^x)^2}}}\cdot\frac{e^x(3-e^x)+e^{2x}}{(3-e^x)^2} \\
&= \frac{3e^x}{(3-e^x)\sqrt{9-6e^x}}
\end{aligned} \tag{207}$$

$$
\begin{aligned}
f_2'(x) &= \frac{3}{5}+ \\
&+\frac{3-\sqrt{9-6e^x}}{3+\sqrt{9-6e^x}}\cdot\frac{\frac{-3e^x}{\sqrt{9-6e^x}}\cdot\left(3-\sqrt{9-6e^x}\right)-\frac{3e^x}{\sqrt{9-6e^x}}\cdot\left(3+\sqrt{9-6e^x}\right)}{\left(3-\sqrt{9-6e^x}\right)^2} \\
&=\frac{3}{5}+\frac{\frac{-3e^x}{\sqrt{9-6e^x}}\left(3-\sqrt{9-6e^x}+3\sqrt{9-6e^x}\right)}{6e^x} \\
&=\frac{3}{5}-\frac{3}{\sqrt{9-6e^x}}
\end{aligned} \tag{208}
$$

Finalmente:

$$
f'(x)=\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{9-6e^x}}{3-e^x} \tag{209}
$$

Passiamo alla derivata seconda:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{9-6e^x}}{3-e^x} \\
&= -\frac{-e^x\left(9-3e^x\right)+e^x\left(9-6e^x\right)}{\left(3-e^x\right)^2\sqrt{9-6e^x}}
\end{aligned}
$$

Semplificando:

$$
f''(x)=\frac{3e^{2x}}{\left(3-e^x\right)\sqrt{9-6e^x}} \tag{210}
$$

Asintoti obliqui:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{9-0}}{3-0}=-\frac{2}{5} \\
n &= \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)+x\right]=\infty-\infty \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right)+\ln e^x\right] \\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right) \\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\cdot\frac{3-\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right) \\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\left[e^x\cdot\frac{\left(3+\sqrt{9-6e^x}\right)^2}{6e^x}\right] \\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+\sqrt{9-6e^x}\right)^2}{6}=\ln\frac{(3+3)^2}{6}=\ln 6
\end{aligned}
$$

Quindi il grafico è dotato di asintoto obliquo che è la retta di equazione:

$$y = -\frac{2}{5}x + \ln 6$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f'

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{9-6e^x}}{3-e^x} = \frac{3}{5} \\ &\Longleftrightarrow 9e^{2x} + 96e^x - 144 = 0 \\ &\Longleftrightarrow e^x = \frac{4}{3} \text{ (l'altra soluzione non accettabile, in quanto } < 0) \\ &\Longleftrightarrow x = \ln\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Segno:

$$\begin{aligned} \forall f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{9-6e^x} < \frac{3}{5}(3-e^x) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 3-e^x > 0 \\ 9-6e^x \geq 0 \\ 9-6e^x < \frac{9}{25}(3-e^x)^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x < \ln 3 \\ x \in X \\ 9e^{2x} + 96e^x - 144 > 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x < \ln 3 \\ x \in X \\ x > \ln\frac{4}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left(\ln\frac{4}{3}, \ln\frac{3}{2}\right), \end{aligned}$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $\left(\ln\frac{4}{3}, \ln\frac{3}{2}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \ln\frac{4}{3}\right)$. Il punto $x = \ln\frac{4}{3}$ è di minimo relativo, anzi assoluto:

$$m\left(\ln\frac{4}{3}, \arcsin\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{3} + \ln 2\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Studio del segno di f'':

$$f''(x) > 0, \forall x \in X$$

Da cio segue che γ volge sempre la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (60).

11 Esercizio 737

Studiare la funzione

$$f(x) = x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1 \tag{211}$$

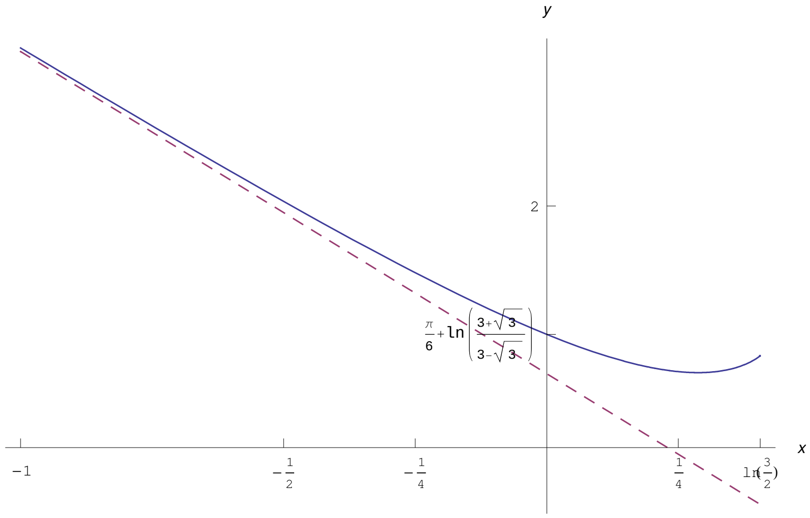


Figura 60: Grafico della funzione $f(x) = \arcsin \frac{e^x}{3-e^x} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}}\right) + \frac{3}{5}x$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$ poichè l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di zero.

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'interesezione con l'asse x, perchè c'è un'equazione che va risolta numericamente o per via grafica.

Intersezione con l'asse y

$$f(0) = \ln \cosh 0 + 1 = 1$$

Quindi:

$$A(0,1) \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

Ricordiamo che:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= (+\infty)+(+\infty)-2+1=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= (-\infty)+(+\infty)+2^-+1=\infty-\infty\end{aligned}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, procediamo in questo modo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3^- + l,$$

essendo:

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x\to-\infty}(x+\ln\cosh x) \\ &= \lim_{x\to-\infty}(\ln e^x+\ln\cosh x) \\ &= \ln \lim_{x\to-\infty} e^x\cosh x \\ &= \ln \lim_{x\to-\infty} e^x\frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ &= \ln \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}^+\right) = (-\ln 2)^+ = -(\ln 2)^-\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3^- - (\ln 2)^- = (3-\ln 2)^-,$$

perciò la retta $y=3-\ln 2$ è asintoto orizzontale a sinistra. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo a destra, calcoliamo:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\cosh x}{x}-2\frac{\tanh x}{x}+\frac{1}{x}\right) \\ &= 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\cosh x}{x}-2\lim_{x\to+\infty}\frac{\tanh x}{x}\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\cosh x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\tanh x = 1 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\tanh x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cosh^2 x} = 0,\end{aligned}$$

Quindi:

$$m = 2 \tag{212}$$

L'ordinata all'orgine:

$$
\begin{aligned}
n = n &= \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^{-x} + \ln\cosh x\right) - 1 = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\cosh x}{e^{x}}\right) - 1
\end{aligned}
$$

Calcoliamo a parte:

$$
\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\cosh x}{e^{x}}\right) = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1+e^{2x}\right)}{2e^{x}} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2
$$

Finalmente:

$$
n = -\left(1 + \ln 2\right)
$$

Perciò la retta di equazione:

$$
y = 2x - \left(1 + \ln 2\right), \tag{213}
$$

è asintoto obliquo a destra.
Derivate

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2\tanh^2 x + \tanh x - 1 \\
f''(x) &= \left(1 - \tanh^2 x\right)\left(4\tanh x + 1\right)
\end{aligned}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f'

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \tanh^2 x + \tanh x - 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \tanh x = -1 \\ \tanh x = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\tanh x = -1$ è inaccettabile poichè $\lim_{x\to-\infty}\tanh x = -1$, e $\forall x$, $\tanh x > -1$, quindi:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \\
e^{2x} &= 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}
$$

Segno:

$$
f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \tanh x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln 3
$$

Qundi la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{2}\ln 3, +\infty\right)$, ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right)$. Il punto $x = \frac{1}{2}\ln 3$ è pertanto di minimo relativo.
Concavità e punti di flesso.

Zeri di f'':

$$f''(x) = 0 \iff \tanh x = -\frac{1}{4}$$
$$\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -\frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$$

Studio del segno di f'':

$$f''(x) > 0 \iff \tanh x > -\frac{1}{4} \iff x > \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$$

Da cio segue che γ volgela concavità verso l'alto in $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}, +\infty\right)$. Il punto $x_f = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$ è di flesso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato nelle figure (61)-(62).

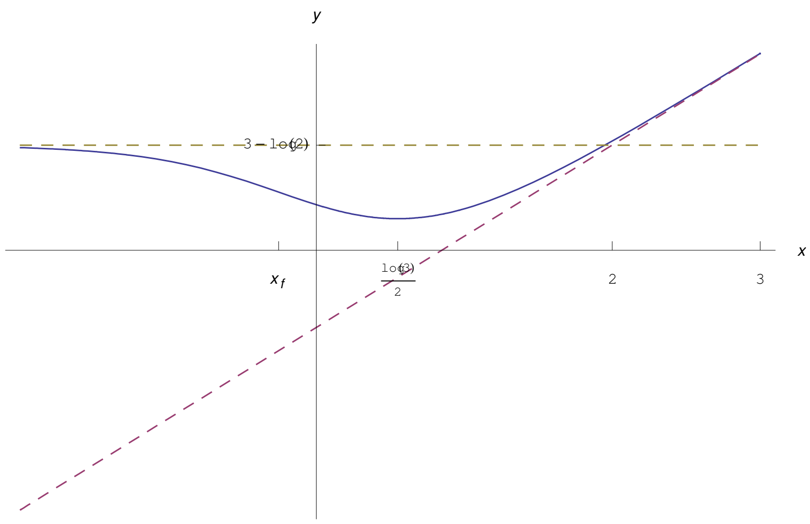


Figura 61: Grafico della funzione $f(x) = x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1$

12 Esercizio 738

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{214}$$

***

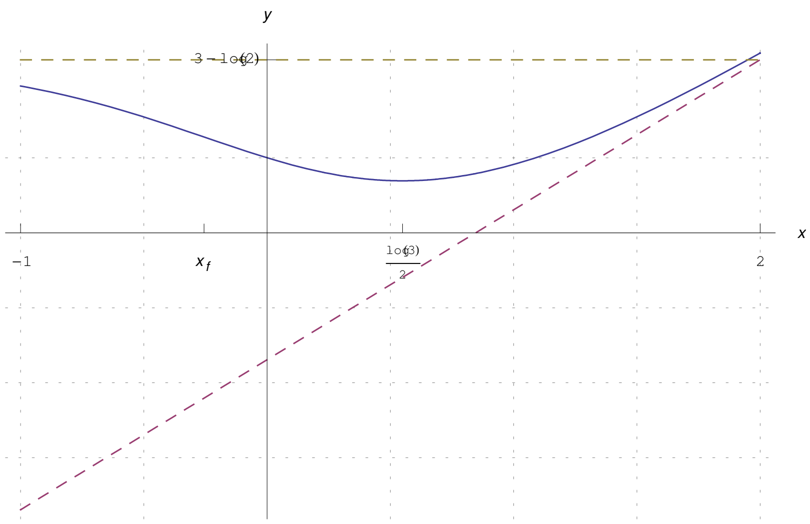


Figura 62: Grafico particolareggiato della funzione $f(x) = x + \ln \cosh x - 2 \tanh x + 1$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \iff x \in (-1, 1),$$

per cui $X = (-1, 1)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \arcsin x = 0 \iff x = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

Segno

$$f(x) > 0 \iff x \in (0, 1)$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, 1)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (-1, 0)$.
Comportamento agli estremi
Ricordiamo che:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = +\infty$$

cosicchè le rette $y = \pm 1$ sono asintoti verticali.
Derivate

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$f''(x) = \frac{3x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2x^2 \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Osserviamo che $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x > 0$, $\forall x \in X$, e analogo comportamento per il denominatore $(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$, quindi è $f'(x) > 0$ per ogni x. Segue che la funzione è strettamente crescente.

Segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \tanh x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln 3$$

Concavità e punti di flesso.
Tralasciamo lo studio della derivata seconda, poichè si intuisce che γ volge la concavità verso l'alto in $(0,1)$. Il punto $x = 0$ è punto di flesso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (63).

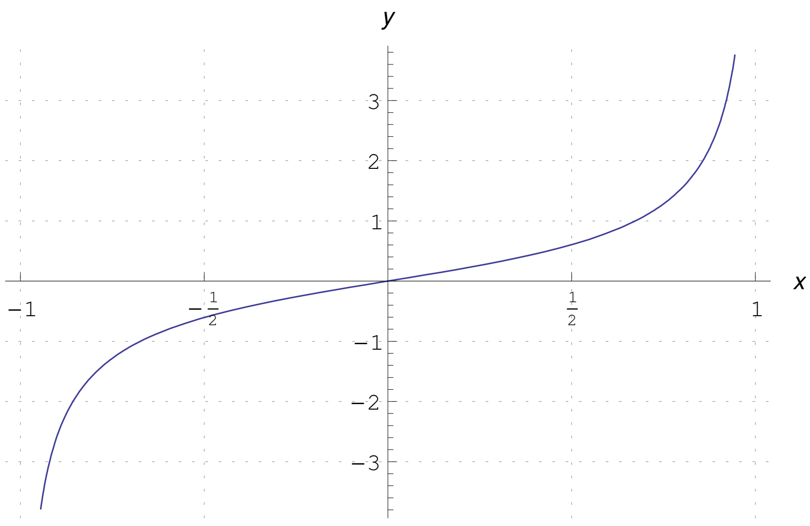


Figura 63: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

12.1 Esercizio 740

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} \tag{215}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, quindi $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Per quanto visto la funzione è sempre positiva, per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= 1 \cdot e^{\arctan(+\infty)} = e^{\pi/2} \\
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= 1 \cdot e^{\arctan(-\infty)} = e^{-\pi/2},
\end{aligned}$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(0) = e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} = 2 \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \frac{e^{\arctan 0^+}}{+\infty} = \frac{1^+}{+\infty} = 0^+ \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \frac{e^{\arctan 0^-}}{-\infty} = \frac{1^-}{-\infty} = 0^+,
\end{aligned}$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale.cosicchè le rette $y = \pm 1$ sono asintoti verticali.
Derivate
Derivata prima:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\arctan\frac{1}{\sinh x}}}{\cosh x}\right) \qquad (216)\\
&= \frac{e^{\arctan\frac{1}{\sinh x}}\cdot\left[\frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x+1}\cdot\left(-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}\right)\right]\cosh x-\sinh x\cdot e^{\arctan\frac{1}{\sinh x}}}{\cosh^2 x}\\
&\underset{\sinh^2 x+1=\cosh^2 x}{=} \frac{-e^{\arctan\frac{1}{\sinh x}}-\sinh x\cdot e^{\arctan\frac{1}{\sinh x}}}{\cosh^2 x}\\
&= -f(x)\frac{1+\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}
$$

Derivata seconda:

$$
f''(x) = -f'(x)\frac{1+\sinh x}{\cosh x}-f(x)\frac{d}{dx}\frac{1+\sinh x}{\cosh x}
$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{1+\sinh x}{\cosh x} &= \frac{\cosh^2 x-\sinh x\,(1+\sinh x)}{\cosh^2 x}\\
&= \frac{1-\sinh x}{\cosh^2 x},
\end{aligned}
$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= f(x)\frac{(1+\sinh x)}{\cosh^2 x}-f(x)\frac{1-\sinh x}{\cosh^2 x}\\
&= f(x)\frac{3+\sinh x}{\cosh^2 x}\sinh x
\end{aligned}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della f':

$$
f'(x)=0 \Longleftrightarrow \sinh x=-1 \Longleftrightarrow e^x-e^{-x}=2
$$

Poniamo $e^x=t$:

$$
t^2+2t-1=0 \Longleftrightarrow t=-1\pm\sqrt{2}
$$

Scartando la soluzione <0:

$$
t=\sqrt{2}-1 \Longrightarrow x=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)
$$

Studio del segno:

$$
f'(x)>0 \Longleftrightarrow \sinh x<-1 \Longleftrightarrow x<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)
$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty,\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right),+\infty\right)-\{0\}$. Il punto $x=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$ è di massimo relativo:

$$M\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}e^{-\pi/4}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri di f':

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow\sinh x\,(3+\sinh x)=0\underset{x\neq0}{\Longleftrightarrow}\sinh x=-3\Longleftrightarrow e^x-e^{-x}=-6$$

Poniamo $t=e^x$:

$$t^2+6t-1=0\Longrightarrow t=-3\pm\sqrt{10}$$

Scartando la radice <0:

$$e^x=\sqrt{10}-3\Longrightarrow x=\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Segno della f'':

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow\sinh x\,(3+\sinh x)>0\Longleftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup\left(\ln\left(\sqrt{10}-3\right),+\infty\right)$$

Quindi γ è concavo in $(-\infty,0)\cup\left(\ln\left(\sqrt{10}-3\right),+\infty\right)$. Il punto $x_f=\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$ è di flesso.

$$F\left(\ln\left(\sqrt{10}-3\right),\frac{(3-\sqrt{10})}{3\sqrt{10}-10}e^{\arctan\frac{1}{3}}\right)$$

Determiniamo infine il comportamento della derivata prima in un intorno di $x=0$:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=-\left[\lim_{x\to0^+}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to0^+}\frac{1+\sinh x}{\cosh x}\right]=-e^{\pi/2}$$
$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=-\left[\lim_{x\to0^-}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to0^+}\frac{1+\sinh x}{\cosh x}\right]=-e^{-\pi/2}$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (64).

12.2 Esercizio 741

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x)=x-\ln(1+x)\qquad(217)$$

***

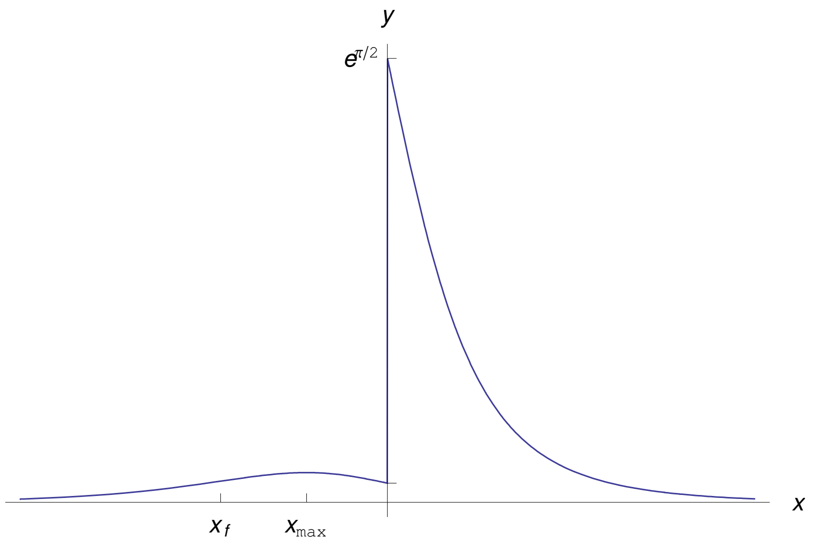


Figura 64: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}}$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per $x > -1$, quindi $X = (-1, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 - \ln 0^+ = -(-\infty) = +\infty,$$

cosicché la retta $x = -1$ è asintoto verticale a sinistra.
Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \infty - \infty = \\
&= \lim_{x \to +\infty} [\ln e^x - \ln(1 + x)] \\
&= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + x} \\
&= \ln(+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Vediamo se esiste un asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = 1$$
$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{1+x} = -\infty,$$

per cui γ è privo di asintoto obliquo a destra.
Derivate

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo.
Concavità e punti di flesso.
Risulta:

$$\forall x \in X, \, f''(x) > 0,$$

pertanto γ è concavo verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (65).

13 Esercizio 742

Studiare la funzione

$$f(x) = x \ln \ln x \tag{218}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per x tale che $\ln x > 0$, cioè $x > 1$, per cui

$$X = (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

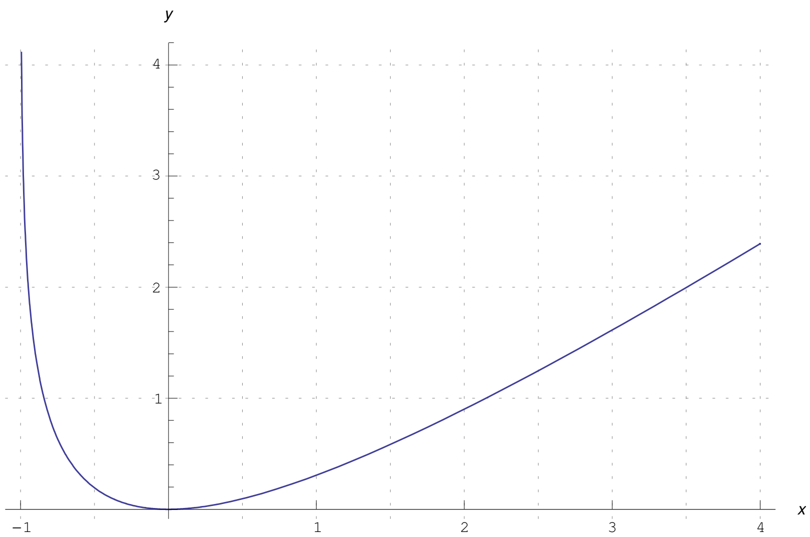


Figura 65: Grafico della funzione $f(x) = x - \ln(1+x)$

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e \implies (1,0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^+ \cdot \ln 0^+ = -\infty,$$

cosicché la retta $x = 1$ è asintoto verticale a sinistra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Vediamo se esiste un asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln x = +\infty$$

per cui γ è privo di asintoto obliquo a destra.
Derivate

$$f'(x)=\frac{\ln x\cdot\ln\ln x+1}{\ln x}$$
$$f''(x)=\frac{\ln x-1}{x\ln^2 x}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x\in X,\ f'(x)>0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso.

Zeri di f'':

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow x=e$$

Segno di f'':

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow x\in(e,+\infty),$$

pertanto γ è concavo verso l'alto in $(e,+\infty)$
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (66).

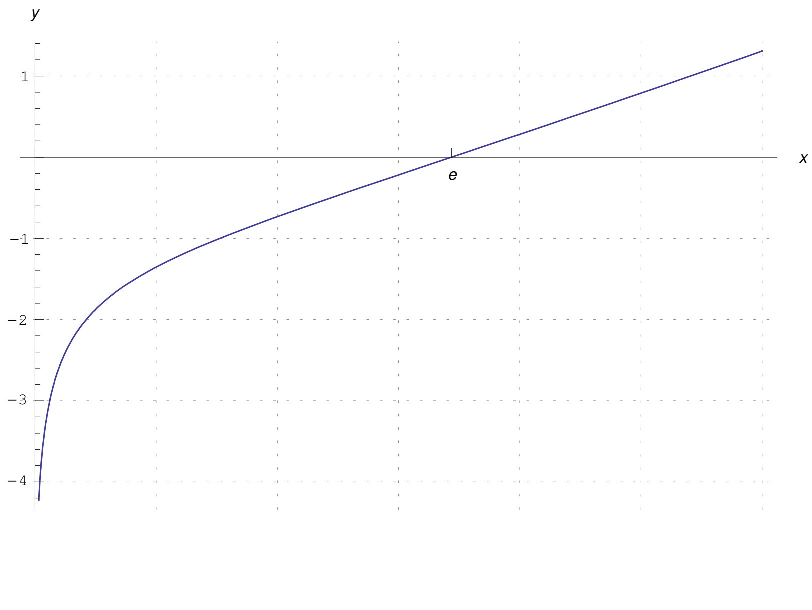


Figura 66: Grafico della funzione $f(x)=x\ln\ln x$

14 Esercizio 743

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} - 2\arctan(x - 1) \tag{219}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per x tale che

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \tag{220}$$

La prima delle (220) è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui:

$$X = \mathbb{R} - \{1\} \tag{221}$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.
L'intersezione con l'asse y:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \ln 2 \Longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2} - \ln 2\right) \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} \\ &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} 2 \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2\frac{\pi}{2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\pi$$

Cioè la retta $y = -\pi$ è asintoto orizzonatale a destra.
Procedendo in maniera simile per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pi,$$

da cui segue che la retta $y = \pi$ è asintoto orizzontale a sinistra.

Derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2(x-2)}{x^2-2x+2}(x-1) - \ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} - \frac{2}{1+(x-1)^2} \\ &= -\frac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

La derivata prima può essere scritta come:

$$f'(x) = -\frac{\ln\left[1+(x-1)^2\right]}{(x-1)^2}$$

Osserviamo che:

$$\forall x \in X, \quad 1+(x-1)^2 > 1 \Longrightarrow \ln\left[1+(x-1)^2\right] > 0,$$

cosicchè:

$$\forall x \in X, \quad \frac{\ln\left[1+(x-1)^2\right]}{(x-1)^2} > 0 \Longrightarrow \forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente decrescente.

Studiamo il comportamento della derivata intorno al punto $x = 1$:

$$\lim_{x\to1} f'(x) = -\lim_{x\to1} \frac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} -\lim_{x\to1} \frac{2x-2}{2(x-1)} = -1$$

Quindi se prolunghiamo la funzione per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x-1} - 2\arctan(x-1), & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \tag{222}$$

la funzione risulta derivabile in $x = 1$, avendosi: $f'(1) = -1$.

Concavità e punti di flesso.

Si deduce immediatamente che γ è concavo in $(1, +\infty)$. Pertanto $x = 1$ è un punto di flesso per la funzione ridefinita con la (222)

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (67).

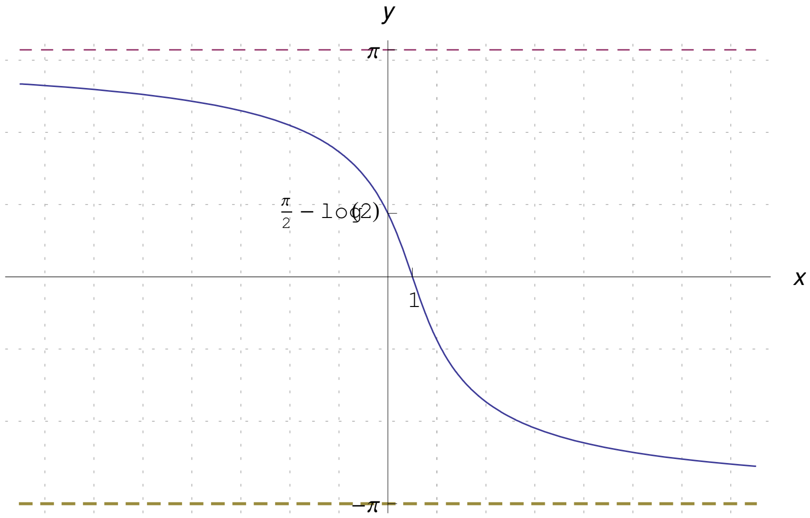


Figura 67: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} - 2\arctan(x-1)$

15 Esercizio 744

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2x + 2\ln|x-3| \tag{223}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 3$, quindi:

$$X = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \tag{224}$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.
L'intersezione con l'asse y:

$$f(0) = 2 + \ln 9 \Longrightarrow (0, 2 + \ln 9) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{2} + 6 + 2\ln 0^+ = -\infty,$$

cosicché la retta $x = 3$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Meno immediato è il limite:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-2)^2 &= \frac{1}{2}\ln e^{(x-2)^2} = \ln \sqrt{e^{(x-2)^2}} \\ x &= \ln e^x, \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2x + 2\ln|x-3|\right] \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left[\ln \sqrt{e^{(x-2)^2}} + 2\ln \frac{|x-3|}{e^{-x}}\right] \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left[\ln \sqrt{e^{(x-2)^2}} + \ln \frac{(x-3)^2}{e^{-2x}}\right] \\ &= \lim_{x \to -\infty} \ln \left[\frac{(x-3)^2 \sqrt{e^{(x-2)^2}}}{e^{-2x}}\right] \\ &= \ln \lim_{x \to -\infty} \left[(x-3)^2 \sqrt{e^{x^2+4}}\right] \\ &= \ln(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Per il calcolo di eventuale asintoti, conviene determinare il coefficiente angolare con la derivata prima.

Derivate

Osserviamo che la (223) può essere scritta come:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \ln(x-3)^2$$

E da tale espressione è più facile il calcolo del limite per $x \to \pm\infty$.
La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + \frac{2}{(x-3)^2} \cdot (x-3) \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-3)(x-3) - x^2 + 3x - 2}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$$

Non esistono asintoti obliqui, poichè:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{x} = \pm\infty$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1, 2$$

Segno di f':

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(1, 2) \cup (3, +\infty)$. I punti $x = 1$ e $x = 2$ sono rispettivamente di minimo e di massimo relativo.

$$m\left(1, \frac{5}{2} + \ln 4\right), \ M(2, 4)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri di f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, 3 - \sqrt{2}\right) \cup \left(3 + \sqrt{2}, +\infty\right)$$

Si deduce immediatamente che γ è concavo in $\left(-\infty, 3 - \sqrt{2}\right) \cup \left(3 + \sqrt{2}, +\infty\right)$. Pertanto i punti $x = 3 - \sqrt{2}$ e $x = 3 + \sqrt{2}$ sono punti di flesso.

$$F_1\left(3 - \sqrt{2}, \frac{150}{2} - 3\sqrt{2} + \ln 2\right), \ F_2\left(3 + \sqrt{2}, \frac{150}{2} + 3\sqrt{2} + \ln 2\right)$$

Si osservi che i flessi sono simmetrici rispetto all'asintoto verticale.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (68).

16 Esercizio 745

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + |x^2 - x|}} \tag{225}$$

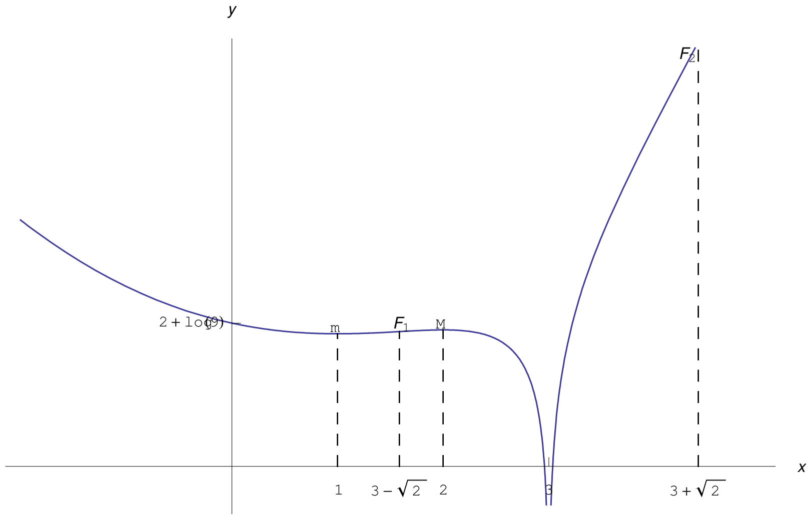


Figura 68: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2x + 2\ln|x-3|$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$x + \left|x^2 - x\right| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ 2x - x^2, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Osserviamo poi che deve essere $x \neq 0$, quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \\ \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases} \tag{226}$$

La funzione è perciò definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\begin{gathered} \forall x \in X,\ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \\ 0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y \end{gathered} \tag{227}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno
Dalla (227) segue che γ giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty,$$

cosicché l'asse y è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.
Derivate
Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x \in [1, +\infty) \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$. Non esistono punti di estremo relativo. Determiniamo il comportamento della derivata prima in un intorno del punto di raccordo $x = 1$:

$$f'_-(1) = 0, \quad f'_+(1) = -1,$$

cioè $P(1, 1)$ è un punto angoloso del diagramma. Le equazioni delle rette tangenti a destra e a sinistra in $x = 1$, sono:

$$\tau_+) \ y = 2 - x$$
$$\tau_-) \ y = 1$$

Concavità e punti di flesso.
È facile dedurre che γ è volge sempre la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (69).

17 Esercizio 746

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = 1 + |x| - \frac{1}{2} \ln \cosh x - \tanh x \tag{228}$$

***

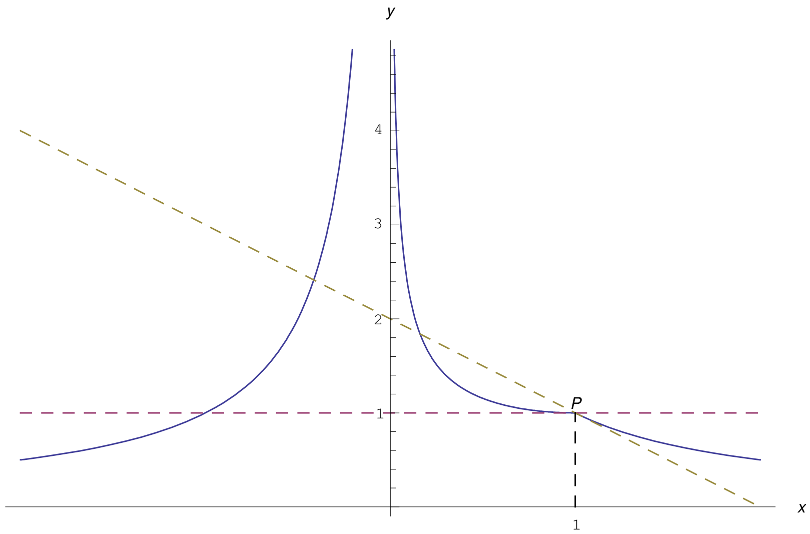


Figura 69: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$

Soluzione
Insieme di definizione
Siccome $\cosh x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, segue che $X = (-\infty, \infty)$. Per semplificare lo studio della funzione esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - \frac{1}{2}\ln\cosh x - \tanh x & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ 1 - x - \frac{1}{2}\ln\cosh x - \tanh x & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.
Risulta:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1) \in \gamma \cap y \tag{229}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata spezziamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(1 - \tanh x)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2}\ln\cosh x\right)}_{=\infty-\infty}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\ln\cosh x\right)\underset{x=\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}\ln e^{2x}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^{2x}-\ln\cosh x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2x}}{\cosh x}=\frac{1}{2}\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{e^{x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\frac{1}{2}\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{1+e^{-2x}}=+\infty$$

Quindi la funzione è divergente positivamente per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$$

Comportamento per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty-\infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata spezziamo il limite:

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\tanh x\right)}_{=2}-\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\ln\cosh x\right)}_{=\infty-\infty}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\ln\cosh x\right)\underset{x=\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}\ln e^{2x}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\ln e^{2x}+\ln\cosh x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}\cosh x\right)=\frac{1}{2}\ln\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2e^{-2x}}=\frac{1}{2}\ln\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{2e^{-x}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln 0^{+}=-\infty$$

Quindi la funzione è divergente positivamente per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=2-\left(-\infty\right)=+\infty$$

Asintoti obliqui:

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1-\frac{\tanh x}{x}\right)}_{=1}-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\cosh x}{x}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\cosh x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\tanh x=1$$

Quindi:

$$m_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

L'ordinata all'origine:

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\cosh x - \tanh x\right)$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(1-\tanh x)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(x - \ln\cosh x)}_{=\infty-\infty}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x) &= \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x - \ln\cosh x)\\ &= \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\cosh x}\\ &= \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(1+e^{-2x})} = \ln 2\end{aligned}$$

Perciò:

$$n_1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Si conclude che la retta di equazione:

$$y = \frac{1}{2}(x + \ln 2), \tag{230}$$

è asintoto obliquo a destra.
Passiamo a $x \to -\infty$:

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{\tanh x}{x}\right)}_{=-1} - \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\cosh x}{x}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\cosh x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\tanh x = -1$$

Quindi:

$$m_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

L'ordinata all'origine:

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\cosh x - \tanh x\right)$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}(1-\tanh x)}_{=2} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to-\infty}(x + \ln\cosh x)}_{=\infty-\infty}$$

Calcoliamo a parte:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x+\ln\cosh x) &= \lim_{x\to-\infty}(\ln e^x+\ln\cosh x)\\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\cosh x}\\
&= \ln\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+e^{-2x}}=\ln 2
\end{aligned}
$$

Perciò:

$$
n_2 = 2+\frac{1}{2}\ln 2
$$

Si conclude che la retta di equazione:

$$
y=-\frac{1}{2}x+\left(2+\frac{1}{2}\ln 2\right), \tag{231}
$$

è asintoto obliquo a sinistra.
Derivate
Calcoliamo la derivata prima:

$$
f'(x)=\begin{cases}\tanh^2 x-\frac{1}{2}\tanh x, & \text{se } x\geq 0\\ \tanh^2 x-\frac{1}{2}\tanh x-2, & \text{se } x<0\end{cases} \tag{232}
$$

Calcolo della derivata seconda: osserviamo che le due espressioni (232) defferiscono per una costante, per cui:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\tanh^2 x-\frac{1}{2}\tanh x \qquad (233)\\
&= \frac{4\tanh x-1}{2\cosh^2 x}
\end{aligned}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta per $x\geq 0$

$$
f'(x)=0\Longleftrightarrow \tanh x=0,\frac{1}{2}
$$

Cioè

$$
x=0,\ \tanh x=\frac{1}{2}
$$

Abbiamo l'equazione esponenziale:

$$
\tanh x=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}
$$

che si risolve con la posizione $e^x=t$:

$$
t^2-3=0\Longrightarrow t=\pm\sqrt{3}
$$

Scartando la soluzione negativa:

$$x = \frac{1}{2} \ln 3$$

Quindi per $x \geq 0$ abbiamo i punti estremali:

$$x = 0, \ \ x = \frac{1}{2} \ln 3$$

Segno per $x \geq 0$:

$$f'(x \geq 0) > 0 \Longleftrightarrow \tanh x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2} \ln 3,$$

cioè in $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{2} \ln 3, +\infty\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{1}{2} \ln 3\right)$. Pertanto $x = \frac{1}{2} \ln 3$ è di minimo relativo.

Passiamo ora a $x < 0$, dove l'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = \tanh^2 x - \frac{1}{2} \tanh x - 2,$$

Eventuali zeri:

$$f'(x < 0) = 0 \Longleftrightarrow \tanh^2 x - \frac{1}{2} \tanh x - 2 = 0 \Longleftrightarrow \tanh x = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{33}\right) < -1 \ \text{ mai!}$$

per cui non esistono zeri in $(-\infty, 0)$. Più precisamente è ivi $f'(x < 0) < 0$, donde la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

Osserviamo inoltre che il punto $P(0, 1)$ è un punto angoloso, giacché:

$$f'_{-}(0) = 0, \ \ f'_{+}(0) = -2$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri di f''

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \tanh x = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{4}$$

con la solita posizione $t = e^x$:

$$t = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Scartando la soluzione < 0

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \tanh x > \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}, +\infty\right)$ e il punto $x = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$ è di flesso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (70).

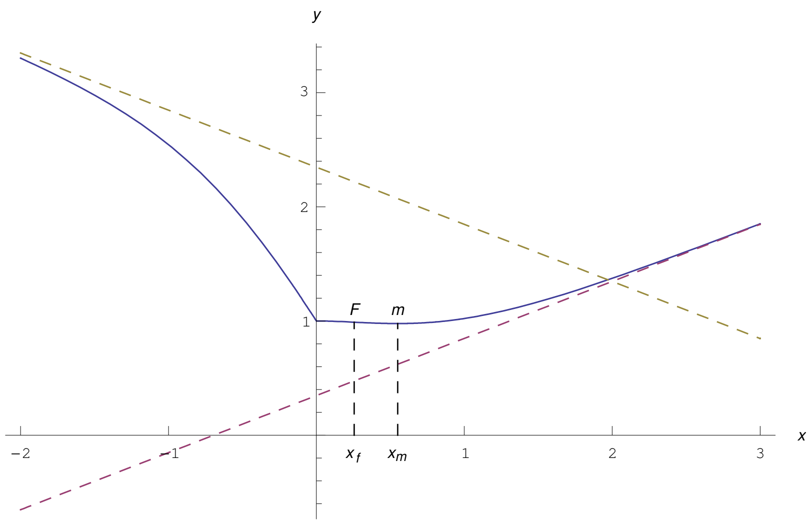


Figura 70: Grafico della funzione $f(x) = 1 + |x| - \frac{1}{2}\ln\cosh x - \tanh x$

18 Esercizio 747

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - 2\frac{x+1}{|x+1|} \tag{234}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in:

$$X = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - 2, & x \in (-1, +\infty) \\ \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + 2, & x \in (-\infty, -1) \end{cases} \tag{235}$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x.

Risulta:

$$f(0) = -2 \Longrightarrow A(0, -2) \in \gamma \cap y \tag{236}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

per cui $x = -1$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s(-1) = -4$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Comportamento per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underbrace{2 \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}_{=-1} - \ln \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}_{=\infty - \infty} - 2$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{-1}{-\infty} = 0^+ \\
&\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
&= \ln\left(0^+\right) = -\infty
\end{aligned}$$

per cui:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4 - (-\infty) = +\infty,$$

Eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{x} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{2}{x}\right] \\
&= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{2}{x}\right)}_{=0} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0,$$

per cui il diagramma è privo di asintoto obliquo a destra. Vediamo ora per $x\to-\infty$:

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{2}{x}\right]$$

Eseguendo passaggi simili a quelli per il calcolo di m_1, segue:

$$m_2=0$$

Si conclude che il grafico è privo di asintoti obliqui.

Derivate

Osserviamo che le due espressioni (235) defferiscono per una costante, per cui:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]\\&=\frac{d}{dx}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{1-x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\end{aligned}\tag{237}$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(x^2+1\right)^{-3/2}\right]\\&=-2x\left(x^2+1\right)^{-3/2}-3x\left(1-x^2\right)\left(x^2+1\right)^{-5/2}\\&=x\left(x^2+1\right)^{-5/2}\left(x^2-5\right)\\&=\frac{x\left(x^2-5\right)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}\end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f':

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow x=\pm1$$

Quindi abbiamo i punti estremali $x=1$ e $x=-1$

Segno di f':

$$f'(x)>0\Longleftrightarrow x\in(-1,1),$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(-1,1)$, mentre è strettamente decrescente in $\mathbb{R}-(-1,1)$. Pertanto $x=1$ è di massimo relativo:

$$M\left(1, \sqrt{2}-2-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

Determiniamo il comportamento della derivata prima in un intorno del punto di discontinuità $x = 1$:

$$f'_-(-1) = 0, \quad f'_+(1) = 0,$$

pertanto la curva "arriva" in $x = 1$ e "parte" da $x = 1$ con tangente orizzontale.
Concavità e punti di flesso.
Zeri di f''

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{5}$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\sqrt{5}, 0\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $\left(-\sqrt{5}, 0\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$. Abbiamo i punti di flesso:

$$\begin{aligned}
&F_1\left(-\sqrt{5}, 2-\sqrt{\frac{10}{3}}-\ln\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\right)\\
&A(0,-2)\\
&F_2\left(-\sqrt{5}, -2+\sqrt{\frac{10}{3}}-\ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\right)
\end{aligned}$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (71).

19 Esercizio 748

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x|\ln x|}{(\ln x - 1)^2} \tag{238}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in:

$$X = (0, e) \cup (e, +\infty)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{(\ln x-1)^2}, & x \in (+1, +\infty) \\ -\frac{x\ln x}{(\ln x-1)^2}, & x \in (0,1) \end{cases} \tag{239}$$

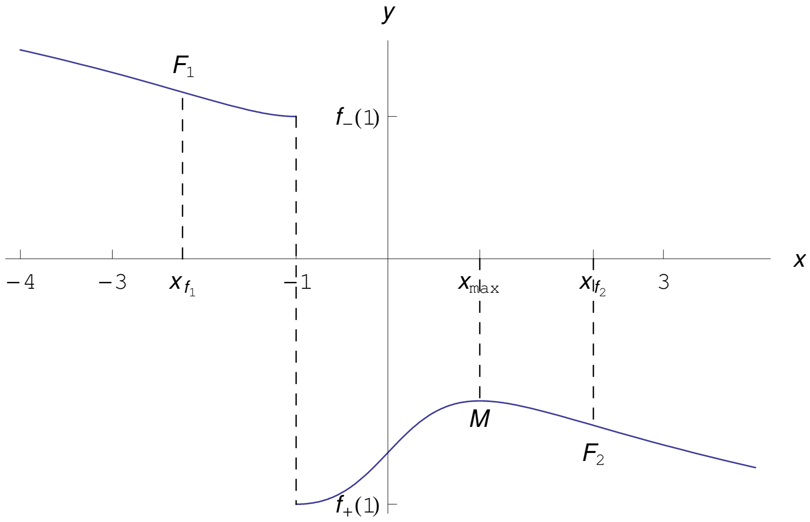


Figura 71: Grafico della funzione $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - 2\frac{x+1}{|x+1|}$

Intersezioni con gli assi
Il numeratore si annulla per $x = 1 \notin X$, per cui $\nexists P \in \gamma \cap y$. Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to e} f(x) = +\infty,$$

per cui $x = e$ è un punto di discontinuità di seconda specie.
Per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = - \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{(\ln x - 1)^2}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \to 0^+} x = 0^-$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{0^-}{+\infty} = 0^+,$$

cosicchè $x = 0$ è una discontinuità di prima specie.

comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{(\ln x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\ln x}}\right)$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\ln x}}\right)}_{=1}\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

perciò la funzione diverge positivamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Eventuali asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{(\ln x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)} = 0,$$

ciò implica che non esiste asintoto obliquo.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x-2\ln x-1}{(\ln x-1)^3}, & x\in(1,+\infty)\\ \frac{-\ln^2 x+2\ln x+1}{(\ln x-1)^3}, & x\in(0,1)\end{cases}$$
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-\ln^2 x-2\ln x-5}{x(\ln x-1)^4}, & x\in(1,+\infty)\\ \frac{\ln^2 x-2\ln x-5}{(\ln x-1)^3}, & x\in(0,1)\end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f'. Per $x\in(1,+\infty)$

$$f'(x>1)=0 \Longleftrightarrow \ln^2 x-2\ln x-1=0$$
$$\underset{x>1}{\Longleftrightarrow} \ln x = 1+\sqrt{2} \Longrightarrow x = e^{1+\sqrt{2}}$$

Per $x\in(0,1)$:

$$f'(x<1)=0 \Longleftrightarrow -\ln^2 x+2\ln x+1=0$$
$$\underset{x<1}{\Longleftrightarrow} \ln x = 1-\sqrt{2} \Longrightarrow x = e^{1-\sqrt{2}}$$

Segno:

$$f'(x>1)>0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x-2\ln x-1}{(\ln x-1)^3}>0$$
$$\underset{x>1}{\Longleftrightarrow} \ln x > 1+\sqrt{2} \Longleftrightarrow x > e^{1+\sqrt{2}}$$

Quindi in $(1,+\infty)$ la funzione è crescente in $\left(e^{1+\sqrt{2}},+\infty\right)$, perciò $x=e^{1+\sqrt{2}}$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(e^{1+\sqrt{2}},\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{1+\sqrt{2}}\right)$$

Per $x<1$:

$$f'(x<1)>0 \Longleftrightarrow \frac{-\ln^2 x+2\ln x+1}{(\ln x-1)^3}>0$$
$$\underset{x<1}{\Longleftrightarrow} \ln x<1-\sqrt{2} \Longleftrightarrow x\in\left(0,e^{1-\sqrt{2}}\right)$$

Quindi in $(0,1)$ la funzione è crescente in $\left(0,e^{1-\sqrt{2}}\right)$, perciò $x=e^{1-\sqrt{2}}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(e^{1-\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{e^{1-\sqrt{2}}}\right)$$

Vediamo in $x=0$:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$$

Cioè il grafico parte da $x=0$ con tangente orizzontale.
Il punto $(1,0)$ è un punto angoloso: $f'_-(1)=-1$, $f'_+(1)=1$.
Concavità e punti di flesso.
Zeri di f''. Per $x\in(1,+\infty)$

$$f''(x>1)=0 \Longleftrightarrow -\ln^2 x+2\ln x+5=0$$
$$\underset{x>1}{\Longleftrightarrow} \ln x=1+\sqrt{6} \Longrightarrow x=e^{1+\sqrt{6}}$$

Per $x\in(0,1)$:

$$f'(x<1)=0 \Longleftrightarrow -\ln^2 x-2\ln x-5=0$$
$$\underset{x<1}{\Longleftrightarrow} \ln x=1-\sqrt{6} \Longrightarrow x=e^{1-\sqrt{6}}$$

Segno:

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow \frac{-\ln^2 x+2\ln x+5}{(\ln x-1)^4}>0$$
$$\underset{x>1}{\Longleftrightarrow} 1<\ln x<1+\sqrt{6}, \Longleftrightarrow x\in\left(e,e^{1+\sqrt{6}}\right)$$

Quindi in $(1,+\infty)$ γ è concavo verso l'alto in $\left(e,e^{1+\sqrt{6}}\right)$, mentre è concavo verso il basso in $\left(e^{1+\sqrt{6}},+\infty\right)$

Per $x < 1$:

$$f''(x<1) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x - 2\ln x - 5}{(\ln x - 1)^4} > 0$$
$$\underset{x<1}{\Longleftrightarrow} \ln x < 1 - \sqrt{6} \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^{1-\sqrt{6}}\right)$$

Quindi in $(0,1)$ γ è concavo verso l'alto in $\left(0, e^{1-\sqrt{6}}\right)$ ed è concavo verso il basso in $\left(e^{1-\sqrt{6}}, 1\right)$. Abbiamo perciò i flessi:

$$F_1\left(e^{1-\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}-1}{6}e^{1-\sqrt{6}}\right)$$
$$F_2\left(e^{1+\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}+1}{6}e^{1+\sqrt{6}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato nelle figure (72)-(73).

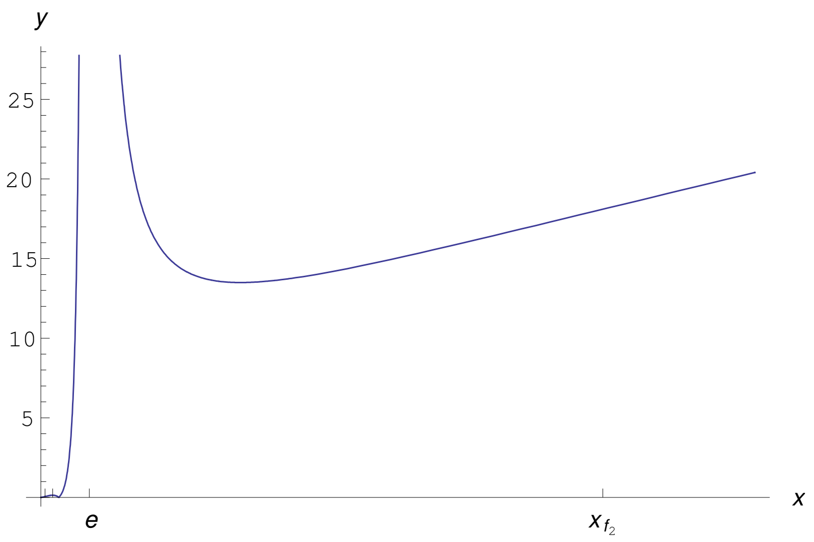


Figura 72: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x|\ln x|}{(\ln x - 1)^2}$

20 Esercizio 749

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

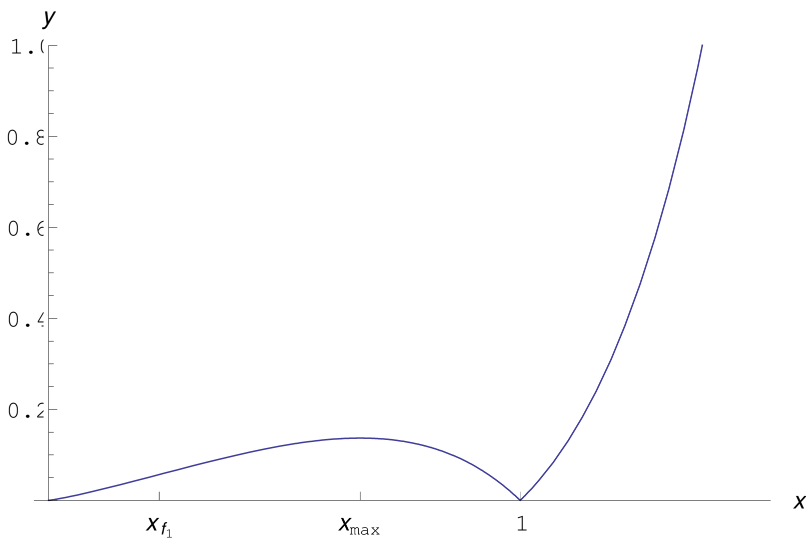


Figura 73: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x|\ln x|}{(\ln x - 1)^2}$ in $(0,1)$.

Studiare la funzione

$$f(x) = x|\ln|x|| - 2|x| - \ln^2|x| \tag{240}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in:

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto. Osserviamo che:

$$|\ln|x|| = \begin{cases} \ln|x|, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -\ln|x|, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

Tenendo poi conto di $|x|$, si ottiene:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x - 2x\ln^2 x, & x \in [1, +\infty) \\ x\ln(-x) + 2x\ln^2(-x), & x \in (-\infty, -1] \\ -x\ln x - 2x\ln^2 x, & x \in (0, 1) \\ -x\ln(-x) + 2x\ln^2(-x), & x \in (-1, 0) \end{cases} \tag{241}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(\pm 1) = 0 \Longrightarrow (\pm 1, 0) \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x + 2x\ln^2 x\right)\\ &= -\lim_{x\to 0^+} x\ln x - 2\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x,\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} -\lim_{x\to 0^+} x = 0^-\\ \lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x &= 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} -2\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^+\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-, \tag{242}$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x) + 2\lim_{x\to 0^-} x\ln^2(-x)$$

Ponendo $x = -t$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x) &= -\lim_{t\to 0^+} t\ln t = -0^- = 0^+\\ \lim_{x\to 0^-} x\ln^2(-x) &= -\lim_{t\to 0^+} t\ln^2 t = -0^+ = 0^-\end{aligned}$$

Perciò:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^- \tag{243}$$

Le (242)-(243) implicano:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0^-$$

cosicchè $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\ln x\,(1 - 2x\ln x) = -\infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\ln(-x)\,[1 - 2x\ln(-x)] = -\infty\end{aligned}$$

Eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x(1-2x\ln x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(-x)+2\ln^2(-x)=+\infty,$$

ciò implica che il grafico è privo di asintoti obliqui.
Derivate

$$f'(x)=\begin{cases}-2\ln^2 x-3\ln x+1, & x\in[1,+\infty)\\ 2\ln^2(-x)+5\ln(-x)+1, & x\in(-\infty,-1]\\ -2\ln^2 x-5\ln x-1, & x\in(0,1)\\ -2\ln^2(-x)+3\ln(-x)-1, & x\in(-1,0)\end{cases}$$
$$f''(x)=\begin{cases}-\frac{4\ln x+3}{x}, & x\in[1,+\infty)\\ \frac{4\ln(-x)+5}{x}, & x\in(-\infty,-1]\\ -\frac{4\ln x+5}{x}, & x\in(0,1)\\ \frac{4\ln(-x)+3}{x}, & x\in(-1,0)\end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f'. Per $x\in[1,+\infty)$

$$f'(x\geq1)=0\Longleftrightarrow 2\ln^2 x+3\ln x-1=0$$
$$\Longleftrightarrow \ln x=\frac{-3-\sqrt{17}}{4},\ln x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

Cioè:

$$x=e^{-\frac{\sqrt{17}+3}{4}},e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}$$

La soluzione accettabile (in quanto >1) è

$$x_0=e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}$$

Il segno è:

$$f'(x\geq1)>0\Longleftrightarrow \ln x<\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\Longleftrightarrow x<x_0$$

Quindi in $[1,+\infty)$ la funzione è crescente in $\left(1,e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}\right)$, pertanto $e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}$ è punto di massimo relativo:

$$M_1\left(e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}},\left(\sqrt{17}-4\right)e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}\right)$$

Per $x<-1$:

$$f'(x<-1)=0\Longleftrightarrow 2\ln^2(-x)+5\ln(-x)+1=0$$
$$\Longleftrightarrow \ln(-x)=-\frac{\sqrt{17}+5}{4},\ln(-x)=\frac{\sqrt{17}-5}{4}$$

da cui:

$$x_1 = -e^{-\frac{\sqrt{17}+5}{4}}, \ x_2 = -e^{\frac{\sqrt{17}-5}{4}}$$

Risulta $x_1 > -1$ e $x_2 > -1$, per cui la derivata prima non si annulla mai in $(-\infty, -1)$. Il segno in tale intervallo è:

$$\begin{aligned} f'(x < -1) > 0 &\Longleftrightarrow 2\ln^2(-x) + 5\ln(-x) + 1 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln(-x) < -\frac{\sqrt{17}+5}{4}, \ln(-x) > \frac{\sqrt{17}-5}{4} \end{aligned}$$

che è sempre verificato in $(-\infty, -1)$. Quindi f è ivi strettamente crescente.

Per $x \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 2\ln^2 x + 5\ln x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x = -\frac{\sqrt{17}+5}{4}, \ln x = \frac{\sqrt{17}-5}{4} \end{aligned}$$

da cui:

$$x_1' = e^{-\frac{\sqrt{17}+5}{4}}, \ x_2' = e^{\frac{\sqrt{17}-5}{4}}$$

Risulta $x_1', x_2' \in (0,1)$. Quindi abbiamo due punti estremali. Studiamo il segno di f' in $(0,1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow 2\ln^2 x + 5\ln x + 1 < 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x > \ln x_1', \ \ln x < \ln x_2' \\ &\Longleftrightarrow x \in (x_1', x_2') \end{aligned}$$

Quindi in $(0,1)$ la funzione è strettamente crescente in (x_1', x_2'), perciò x_1', x_2' sono rispettivamente punto di minimo e massimo relativi:

$$\begin{aligned} &m_1\left(e^{-\frac{\sqrt{17}+5}{4}}, -\left(\sqrt{17}+4\right)e^{-\frac{\sqrt{17}+5}{4}}\right) \\ &M_2\left(e^{-\frac{\sqrt{17}-5}{4}}, -\left(\sqrt{17}-4\right)e^{\frac{\sqrt{17}-5}{4}}\right) \end{aligned}$$

Per $x \in (-1,0)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 2\ln^2(-x) + 3\ln(-x) - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln(-x) = -\frac{\sqrt{17}+3}{4}, \ln(-x) = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \end{aligned}$$

da cui:

$$x_1'' = e^{-\frac{\sqrt{17}+3}{4}}, \ x_2'' = e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}$$

Risulta $x_1'' \in (-1,0)\,, x_2'' \notin (-1,0)$. Quindi abbiamo un punto estremale. Studiamo il segno di f' in $(-1,0)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow 2\ln^2(-x) + 3\ln(-x) - 1 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \ln(-x) < -\frac{\sqrt{17}+3}{4},\ \ln(-x) < \frac{\sqrt{17}-3}{4} \\
&\underset{x\in(-1,0)}{\Longleftrightarrow} x \in (-x_1'', 0)
\end{aligned}
$$

Quindi in $(-1,0)$ la funzione è strettamente crescente in $(-x_1'', 0)$, perciò x_1'' è punto di minimo relativo:

$$
m_2\left(e^{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}, \left(\sqrt{17}-4\right)e^{-\frac{\sqrt{17}+3}{4}}\right)
$$

Vediamo in $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty,
\end{aligned}
$$

cioè l'origine delle coordinate è un punto cuspidale per il grafico della funzione. I punti $(\pm 1, 0)$ sono invece punti angolosi:

$$
\begin{aligned}
f'_-(-1,0) = 1,\ f'_+(-1,0) = -1 \\
f'_-(-1,0) = -1,\ f'_+(-1,0) = +1
\end{aligned}
$$

Cioè il grafico parte da $x = 0$ con tangente orizzontale.
Il punto $(1,0)$ è un punto angoloso: $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (74).

21 Esercizio 750

Studiare la funzione

$$
f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} \tag{244}
$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in:

$$
X = (1, +\infty)
$$

Intersezioni con gli assi

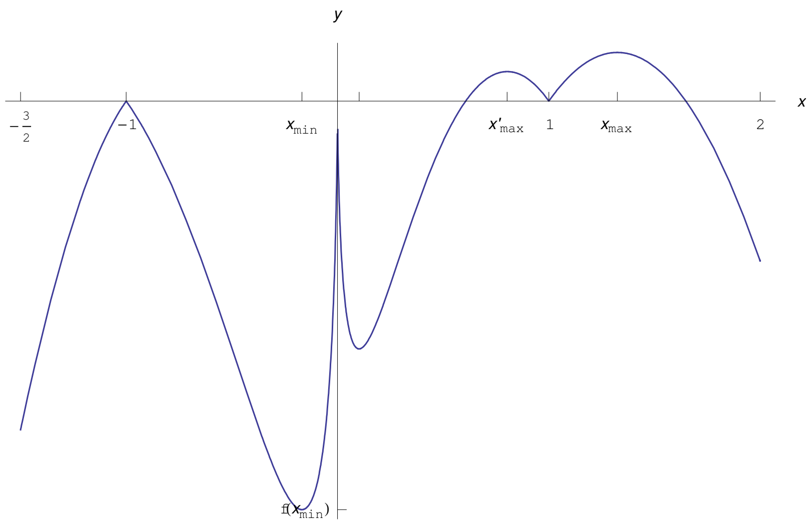


Figura 74: Grafico della funzione $f(x) = x|\ln|x|| - 2|x| - \ln^2|x|$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2, 0) \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\ln 0^+}{0^+} = -\infty,$$

cosicché la retta $x = 1$ è asintoto verticale a destra.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} = 0$$

Il limite è pari a zero, poiché per $x \to +\infty$ la funzione $\ln(x-1)$ è un infinitesimo di ordine infinitamente piccolo. Segue che l'asse x è asintoto orizzontale.

Derivate

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$
$$f''(x) = \frac{3\ln(x-1) - 8}{4\sqrt{(x-1)^5}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x-1) = 2 \Longleftrightarrow x = e^2 + 1$$

Il segno è:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2 + 1\right)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, e^2 + 1)$, ed è strettamente decrescente in $(e^2 + 1, +\infty)$. Quindi $e^2 + 1$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(e^2 + 1, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso
Zeri di f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 3\ln(x-1) - 8 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 + e^2\sqrt[3]{e^2}$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(1 + e^2\sqrt[3]{e^2}, +\infty\right)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $\left(1 + e^2\sqrt[3]{e^2}, +\infty\right)$, mentre in $\left(0, 1 + e^2\sqrt[3]{e^2}\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x_f = 1 + e^2\sqrt[3]{e^2}$ è punto di flesso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (75).

22 Esercizio 751

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\frac{e^x - 1}{e^x - 2} + 2|x| + \frac{\pi}{2} \tag{245}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere $e^x \neq 2$, quindi:

$$X = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$$

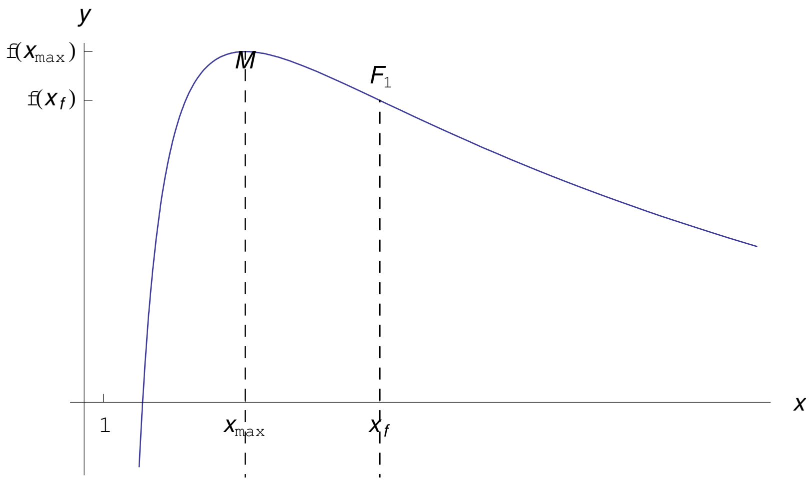


Figura 75: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$

Esplicitando il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{e^x-1}{e^x-2} + 2x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty) \\ \arctan \frac{e^x-1}{e^x-2} - 2x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (246)$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciando l'intersezione con l'asse x, abbiamo

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to (\ln 2)^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 2\ln 2 + \frac{\pi}{2} = 2\ln 2$$
$$\lim_{x \to (\ln 2)^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\ln 2 + \frac{\pi}{2} = \pi + 2\ln 2,$$

cosicché $x_0 = \ln 2$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità della funzione è

$$s(\ln 2) = 2\ln 2$$

Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \arctan \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x-2} + 2(+\infty) + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} + (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\frac{\pi}{4} - 2(-\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty
\end{aligned}$$

Quindi la funzione diverge positivamente per $x \to \pm\infty$.
Eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \\
n_1 &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\arctan \frac{e^x-1}{e^x-2} + 2x + \frac{\pi}{2} - 2x \right) \\
&= \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

Quindi la retta di equazione:

$$y = 2x + \frac{3}{4}\pi,$$

è asintoto obliquo a destra.
Per $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
m_2 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \\
n_2 &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) + 2x] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\arctan \frac{e^x-1}{e^x-2} - 2x + \frac{\pi}{2} + 2x \right) \\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Quindi la retta di equazione:

$$y = -2x + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2},$$

è asintoto obliquo a sinistra.
Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^x}{2e^{2x}-6e^x+5} + 2, & x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty) \\ -\frac{e^x}{2e^{2x}-6e^x+5} - 2, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{247}$$

Cioè:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4e^{2x}-13e^x+10}{2e^{2x}-6e^x+5}, & x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty) \\ \frac{-4e^{2x}+11e^x-10}{2e^{2x}-6e^x+5}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{248}$$

Per il calcolo della derivata seconda, utilizziamo le (247) ottenendo:

$$f''(x) = \frac{e^x (2e^{2x} - 5)}{(2e^{2x} - 6e^x + 5)^2} \tag{249}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$:

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 13t + 10}{2t^2 - 6t + 5},$$

avendo posto $t = e^x$.

$$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{5}{4}, 2$$

Inoltre

$$f'(t) > 0 \Longleftrightarrow 4t^2 - 13t + 10 > 0,$$

gicché $2t^2 - 6t + 5 > 0, \ \forall t$. Quindi:

$$f'(t) > 0 \Longleftrightarrow t \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup (2, +\infty)$$

ricordando che $t = e^x$ e che $x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$, segue che

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \ln \frac{5}{4}\right) \cup (\ln 2, +\infty)$$

Pertanto in $[0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \ln \frac{5}{4}\right) \cup (\ln 2, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $\left(\ln \frac{5}{4}, \ln 2\right)$. Quindi $\ln \frac{5}{4}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(\ln \frac{5}{4}, \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3} + 2 \ln \frac{5}{4}\right)$$

Determiniamo la derivata a sinistra e a destra del punto di discontinuità $x_0 = \ln 2$. Vediamo che ivi la derivata è continua, avendosi:

$$f'(\ln 2) = 0 \Longrightarrow \left(f'_-(\ln 2) = f'_+(\ln 2) = 0\right),$$

per cui la curva γ arriva in $(\ln 2, 2 \ln 2)$ con tangente orizzontale, e parte da $(\ln 2, \pi + 2 \ln 2)$ a tangente orizzontale. In altri termini, il grafico conserva l'orientazione della retta tangente nell'attraversare il punto di discontinuità.

Studiamo ora la derivata nell'intervallo $(-\infty, 0)$. È facile verificare che è ivi $f'(x) < 0$, per cui la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

Esaminiamo il comportamento della derivata prima in un intorno del punto di raccordo $x = 0$. Abbiamo:

$$f'_-(0) = -3, \quad f'_+(0) = 1$$

Cioè $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è un punto angoloso del grafico.

Concavità e punti di flesso
Zeri di f'':

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}, \ln 2\right) \cup (\ln 2, +\infty)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $\left(\frac{1}{2}\ln 5, \ln 2\right) \cup (\ln 2, +\infty)$, mentre in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x_f = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ è punto di flesso

$$F\left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}, \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{10}+4} + \ln\frac{5}{2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (76)-(77).

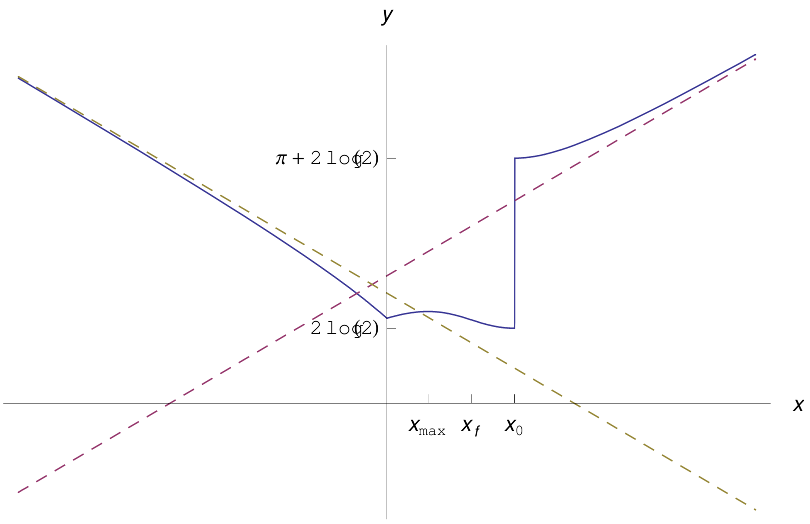


Figura 76: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\frac{e^x-1}{e^x-2} + 2|x| + \frac{\pi}{2}$

23 Esercizio 752

Studiare la funzione

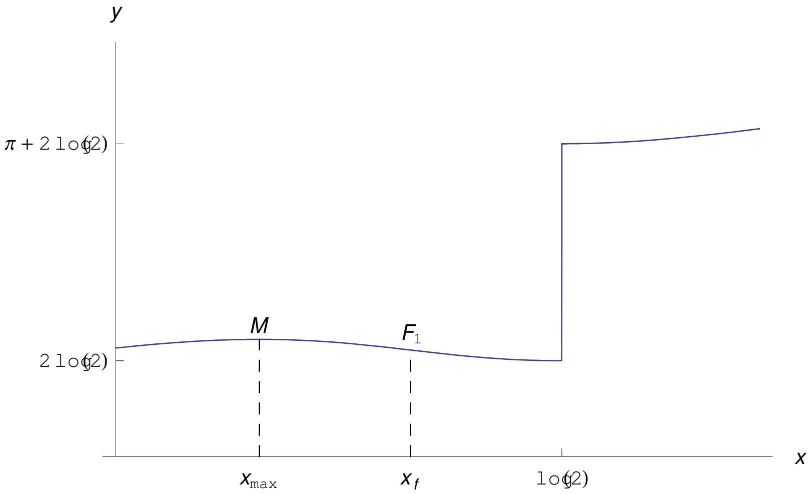


Figura 77: Grafico particolareggiato della funzione $f(x) = \arctan \frac{e^x-1}{e^x-2} + 2|x| + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\left(2 - \frac{1}{\ln x}\right) \tag{250}$$
$$= \frac{2\ln x - 1}{\ln x\sqrt{|\ln x|}}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere $|\ln x| \neq 0$, per cui:

$$X = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{e} \Longrightarrow \left(\sqrt{e}, 0\right) \in \gamma \cap x$$

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup \left(\sqrt{e}, +\infty\right),$$

per cui γ giace nel sempiano $y > 0$ se $x \in (0,1) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$. Per $x \in (1, \sqrt{e})$ γ giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{|\ln x|}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{|\ln x|}} &= \lim_{t \to -\infty} \frac{2t - 1}{t \sqrt{|t|}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t - 1}{t \left(-t\right)^{1/2}}, \\ &= \lim_{t \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{t}}{\left(-t\right)^{1/2}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

cosicché $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

per cui la retta $x = 1$ è asintoto verticale.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{|\ln x|}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ponendo nuovamente $t = \ln x$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{|\ln x|}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t - 1}{t \sqrt{|t|}} = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale.
Per i calcoli successivi conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{\ln x}}, & x \in (1, +\infty) \\ \frac{2 \ln x - 1}{\ln x \sqrt{-\ln x}}, & x \in (0,1) \end{cases} \tag{251}$$

Derivate
Iniziamo a calcolare la derivata prima per $x \in (0,1)$. Per facilitare i calcoli, determiniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\ln x \sqrt{-\ln x} \right) &= \frac{\sqrt{-\ln x}}{x} + \ln x \frac{1}{2\sqrt{-\ln x}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{3 \ln x}{2x\sqrt{-\ln x}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} x \in (0,1) \Longrightarrow f'(x) &= \frac{\frac{2}{x} \ln x \sqrt{-\ln x} + \frac{3 \ln x}{2x\sqrt{-\ln x}} \left(2 \ln x - 1\right)}{-\ln^3 x} \\ &= \frac{3 - 2 \ln x}{2x \ln^2 x \sqrt{-\ln x}} \end{aligned}$$

Per $x>1$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\ln x\sqrt{\ln x}-\frac{3\ln x}{2x\sqrt{\ln x}}\left(2\ln x-1\right)}{\ln^3 x}$$
$$=\frac{3-2\ln x}{2x\ln^2 x\sqrt{\ln x}}$$

Riassumendo:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3-2\ln x}{2x\ln^2 x\sqrt{-\ln x}}, & x\in(0,1)\\ \frac{3-2\ln x}{2x\ln^2 x\sqrt{\ln x}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases} \tag{252}$$

Per la derivata seconda in $(0,1)$, calcoliamo dapprima:

$$\frac{d}{dx}\left(2x\ln^2 x\sqrt{-\ln x}\right)=2\ln^2 x\sqrt{-\ln x}+4\ln x\sqrt{-\ln x}+\ln^2 x\cdot\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}$$
$$=-\frac{2\ln^3 x+5\ln^2 x}{\sqrt{-\ln x}}$$

Da ciò segue:

$$x\in(0,1)\Longrightarrow f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}\cdot 2x\ln^2 x\sqrt{-\ln x}+(3-2\ln x)\frac{2\ln^3 x+5\ln^2 x}{\sqrt{-\ln x}}}{4x^2\ln^2 x\left(-\ln x\right)}$$
$$=\frac{(2\ln x-3)(2\ln x+5)-4\ln x}{4x^2\ln^3 x\sqrt{-\ln x}}$$
$$=\frac{4\ln^2 x-15}{4x^2\ln^3 x\sqrt{-\ln x}}$$

Procedendo in maniera simile per $x>1$, e riassumendo i risultati, otteniamo:
Cioè:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{4\ln^2 x-15}{4x^2\ln^3 x\sqrt{-\ln x}}, & x\in(0,1)\\ \frac{4\ln^2 x-15}{4x^2\ln^3 x\sqrt{\ln x}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases} \tag{253}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x\in(0,1)$:

$$f'(x)>0,\ \forall x\in(0,1)$$

Quindi in $(0,1)$ la funzione è strettamente crescente.
Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{3-2\ln x}{2x\ln^2 x\sqrt{-\ln x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Poniamo $t=-\ln x$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3-2\ln x}{2x\ln^2 x\sqrt{-\ln x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t(3+27)}{t^2\sqrt{t}}=+\infty$$

Quindi la curva γ parte da $x=0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.
Per $x>1$

$$f'(x)=0 \iff x=e\sqrt{e}$$

Segno:

$$f'(x)>0 \iff x<e\sqrt{e},$$

cosicchè in $(1,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(1,e\sqrt{e})$ ed è strettamente decrescente in $(e\sqrt{e},+\infty)$. Da ciò segue che $x=e\sqrt{e}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(e\sqrt{e},\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

Concavità e punti di flesso
In $x\in(0,1)$ calcoliamo gli zeri di f'':

$$f''(x)=0 \iff 4\ln^2 x-15=0 \underset{x\in(0,1)}{\iff} x=e^{-\sqrt{15}/2}$$

Segno di f'' per $x\in(0,1)$

$$f''(x)>0 \iff \frac{4\ln^2 x-15}{\ln^3 x}>0 \underset{x\in(0,1)}{\iff} x\in\left(e^{-\sqrt{15}/2},1\right)$$

Quindi nell'intervallo $(0,1)$ γ volge la concavità verso l'alto in $\left(e^{-\sqrt{15}/2},1\right)$, mentre in $\left(0,e^{-\sqrt{15}/2}\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x_{f_1}=e^{-\sqrt{15}/2}$ è punto di flesso

$$F_1\left(e^{-\sqrt{15}/2},\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{15}+1\right)}{15^{3/4}}\right)$$

Passiamo ora a $(1,+\infty)$. Zeri di f''

$$f''(x)=0 \iff 4\ln^2 x-15=0 \underset{x\in(1,+\infty)}{\iff} x=e^{\sqrt{15}/2}$$

Segno di f'' per $x\in(0,1)$

$$f''(x)>0 \iff \frac{4\ln^2 x-15}{\ln^3 x}>0 \underset{x\in(1,+\infty)}{\iff} x\in\left(e^{\sqrt{15}/2},+\infty\right)$$

Quindi nell'intervallo $(1,+\infty)$ γ volge la concavità verso l'alto in $\left(e^{\sqrt{15}/2},+\infty\right)$, mentre in $\left(1,e^{\sqrt{15}/2}\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x_{f_2}=e^{\sqrt{15}/2}$ è punto di flesso

$$F_2\left(e^{\sqrt{15}/2},\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{15}-1\right)}{15^{3/4}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (78)-(79).

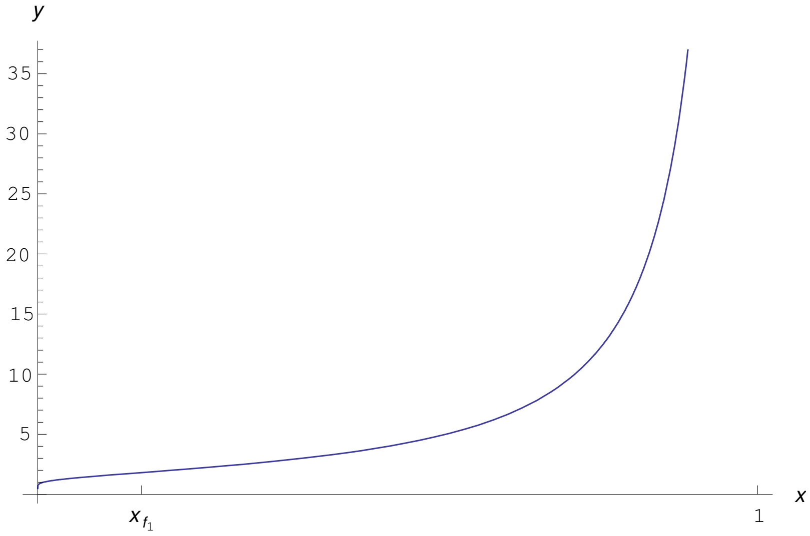


Figura 78: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\left(2 - \frac{1}{\ln x}\right)$ in $(0, 1)$.

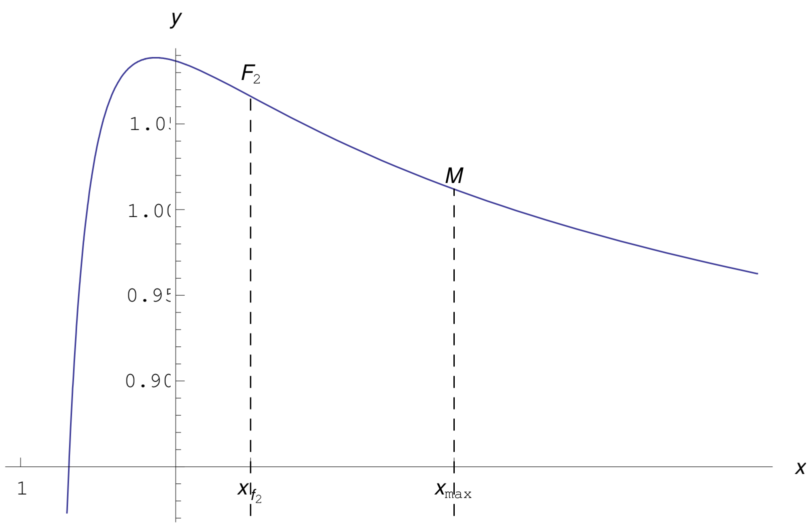


Figura 79: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\left(2 - \frac{1}{\ln x}\right)$ per $x > 1$

24 Esercizio 753

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(3x+1) - \sqrt{2x+1} \tag{254}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$X = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'intersezione con l'asse x, poichè ciò richiede la soluzione dell'equazione:

$$\ln(3x+1) = \sqrt{2x+1} \Longleftrightarrow 3x+1 = e^{\sqrt{2x+1}},$$

che si risolve numericamente o per via grafica.
Intersezione con l'asse y:

$$f(0) = -1 \Longrightarrow (0,-1) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} f(x) = -\infty$$

cosicché la retta $3x+1=0$ è asintoto verticale.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Per rimuovere la forma indeterminata, scriviamo $\sqrt{2x+1} = \ln e^{\sqrt{2x+1}}$, donde:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{3x+1}{e^{\sqrt{2x+1}}} = \ln 0^+ = -\infty$$

quindi la funzione diverge negativamente all'infinito. Determiniamo l'eventuale asintoto obliquo con il metodo della derivata.
Derivate

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{1+2x} - 1 - 3x}{(1+3x)\sqrt{1+2x}}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2+6x+1-9\sqrt{(1+2x)^3}}{(1+3x)^2\sqrt{(1+2x)^3}}$$

Per l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0,$$

per cui il grafico è privo di asintoto obliquo.
Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f'

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}\right),$$

cosicchè la funzione è strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}, +\infty\right)$. Da ciò segue che $x = \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}, \ln\left(3+2\sqrt{3}\right) - \sqrt{\frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}}\right)$$

Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f''(x) < 0$$

quindi γ volge sempre la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (80).

25 Esercizio 754

Studiare la funzione

$$f(x) = 3x - 2x\sqrt{5\left|\ln x\right| - 4\ln x} \tag{255}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere

$$5\left|\ln x\right| - 4\ln x \geq 0$$

Poniamo $t = \ln x$, per cui la disequazione precedente diventa:

$$5\left|t\right| - 4t \geq 0$$

Distinguiamo i due casi: $t \geq 0$, $t < 0$

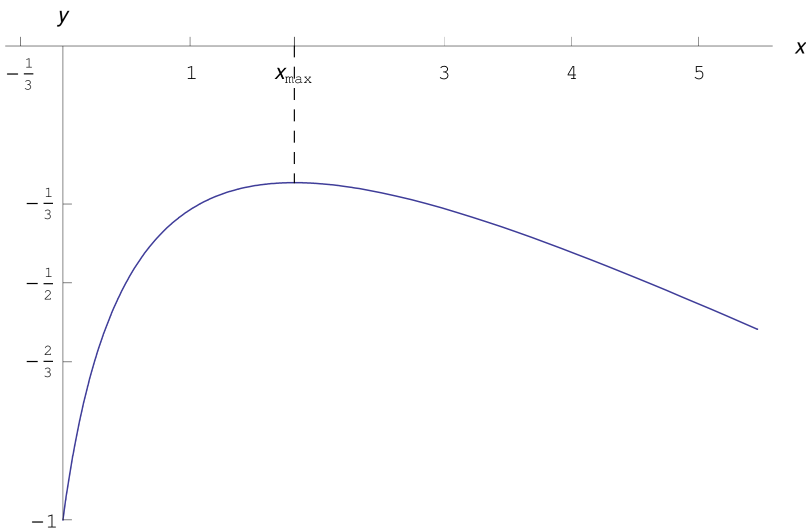


Figura 80: Grafico della funzione $f(x) = \ln(3x+1) - \sqrt{2x+1}$

$$t \geq 0 \Longrightarrow 5t - 4t \geq 0 \Longrightarrow t \geq 0$$
$$t < 0 \Longrightarrow -9t \geq 0 \Longrightarrow t < 0$$

Allo stesso risultato si perviene graficamente definendo la funzione della variabile ausiliaria t:

$$g(t) = 5|t| - 4t,$$

il cui grafico è riportato in figura (81). Da tale grafico vediamo che $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, $g(t) \geq 0$.

Ripristinando la variabile x tale che $\ln x = t$, vediamo che deve essere $x > 0$, perciò l'insieme di definizione è:

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(3 - 2\sqrt{\ln x}\right), & \text{se } x \in [1, +\infty) \\ 3x\left(1 - 2\sqrt{-\ln x}\right), & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Per $x \in (0, 1)$:

$$f(x) = 0 \underset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} 1 - 2\sqrt{-\ln x} = 0 \underset{t = -\ln x}{\Longleftrightarrow} t = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

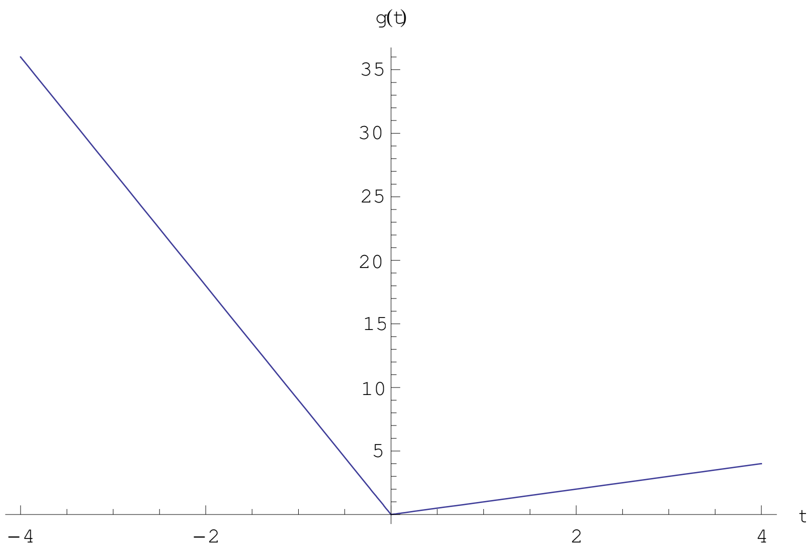


Figura 81: Grafico di $g(t) = 5|t| - 4t$

Perciò:

$$A\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0\right) \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Per $x \in [1, +\infty)$:

$$f(x) = 0 \underset{x \neq 0}{\iff} 3 - 2\sqrt{\ln x} = 0 \iff x = e\sqrt[4]{e^5}$$

Perciò:

$$B\left(e\sqrt[4]{e^5}, 0\right) \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Per $x \in (0, 1)$:

$$f(x) > 0 \iff 1 - 2\sqrt{-\ln x} > 0 \underset{t = -\ln x}{\iff} 2\sqrt{t} < 1 \iff t < \frac{1}{4}$$
$$\underset{x \in (0,1)}{\iff} x \in \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 1\right)$$

Per $x \in [1, +\infty)$:

$$f(x) > 0 \iff 3 - 2\sqrt{\ln x} > 0 \iff \ln x < \frac{9}{4}$$
$$\underset{x \geq 1}{\iff} x \in \left[1, e\sqrt[4]{e^5}\right)$$

Si conclude che per $x \in \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, e\sqrt[4]{e^5}\right)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$. Per $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) \cup \left(e\sqrt[4]{e^5}, +\infty\right)$, la curva giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -6 \lim_{x \to 0^+} x\sqrt{-\ln x}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = -\ln x$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -6 \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = -6 \cdot 0^+ = 0^-$$

per il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\sqrt{-\ln x}\right) = -\infty$$

quindi la funzione diverge negativamente all'infinito. Determiniamo l'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \lim_{x \to +\infty} \left(1 - 2\sqrt{-\ln x}\right) = -\infty,$$

perciò γ è privo di asintoto obliquo.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{\ln x} - 2\ln x - 1}{\sqrt{\ln x}}, & \text{se } x \in [1, +\infty) \\ \frac{3\left(\sqrt{-\ln x} + 2\ln x + 1\right)}{\sqrt{-\ln x}}, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2\ln x}{2x\ln x\sqrt{\ln x}}, & \text{se } x \in [1, +\infty) \\ \frac{-6\ln x + 3}{2x\ln x\sqrt{-\ln x}}, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \in (0, 1)$, poniamo $t = -\ln x$, per cui

$$f'(t) = \frac{3\left(\sqrt{t} - 2t + 1\right)}{\sqrt{t}}$$

Zeri:

$$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{t} = 2t - 1 \Longleftrightarrow t = 1, \frac{1}{4}$$

Segno:

$$f'(t) > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{t} - 2t + 1 > 0, \ t \neq 0$$

Risolviamo $\sqrt{t} - 2t + 1 > 0$, cioè:

$$\sqrt{t} > 2t - 1$$

Applichiamo il procedimento standard di soluzione di una disequazione irrazionale:

1. $2t-1 \geq 0$

$$\begin{cases} t > (2t-1)^2 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 5t + 1 < 0 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow t \in S_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

2. $2t-1 < 0$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t < \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow t \in S_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi:

$$\sqrt{t} > 2t - 1 \Longleftrightarrow t \in S_1 \cup S_2 = [0,1)$$

Ricordando che deve essere $t \neq 0$:

$$f'(t) > 0 \Longleftrightarrow t \in (0,1)$$

Ripristiniamo la variabile x tale che $\ln x = -t$

$$0 < t < 1 \Longleftrightarrow -\ln x > 0, \quad -\ln x < 1$$

$-\ln x > 0$ è sempre verificata perchè siamo in $x \in (0,1)$, perciò rimane la seconda

$$-\ln x < 1 \Longleftrightarrow \ln x > -1 \underset{x \in (0,1)}{\Longleftrightarrow} x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

Ciò implica che in $(0,1)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, ed è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Perciò $\frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo: $\left(\frac{1}{e}, -\frac{3}{e}\right)$.

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

Cioè la curva γ parte da $x=0$ con tangente verticale.

Passiamo ora a $x \in [1, +\infty)$. Qui è:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{\ln x} - 2\ln x - 1}{\sqrt{\ln x}}$$

Cambio di variabile: $t = \ln x$, donde:

$$f'(t) = \frac{3\sqrt{t} - 2t - 1}{\sqrt{t}}$$

Zeri:

$$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow 3\sqrt{t} = 2t + 1, \; t \neq 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{4}, 1$$

Segno:

$$f'(t) > 0 \Longleftrightarrow 3\sqrt{t} > 2t + 1$$

Applichiamo il procedimento standard di soluzione di una disequazione irrazionale:

1. $2t+1 \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} 9t > (2t+1)^2 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} t \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \\ t \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\iff t \in S_1 = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

2. $2t+1 < 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} t \geq 0 \\ t < -\frac{1}{2} \end{array} \right. \iff t \in S_2 = \emptyset$$

Quindi:

$$3\sqrt{t} > 2t+1 \iff t \in S_1 \cup \emptyset = S_1 = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

Ripristiniamo la variabile x tale che $\ln x = t$

$$\frac{1}{4} < t < 1 \iff x > e^{1/4}, \ \ x < e$$

$x > e^{1/4}$ è sempre verificata perchè siamo in $x \geq 1$, perciò rimane la seconda

$$f'(x) > 0 \underset{x \geq 1}{\iff} x \in [1, e)$$

Ciò implica che in $[1, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $[1, e)$, ed è strettamente decrescente in $(e, +\infty)$. Perciò e è punto di massimo relativo: (e, e).

Calcoliamo ora la derivata in $x = 1$. In tale punto la funzione non è derivabile:

$$f_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$$
$$f_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

Quindi $P(1, 3)$ è un punto cuspidale.

Concavità e punti di flesso

Il grafico ha un flesso per $x = \sqrt{e}$, risultando concavo verso l'alto in $(0, \sqrt{e})$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (82)-(83).

26 Esercizio 755

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \tag{256}$$

***

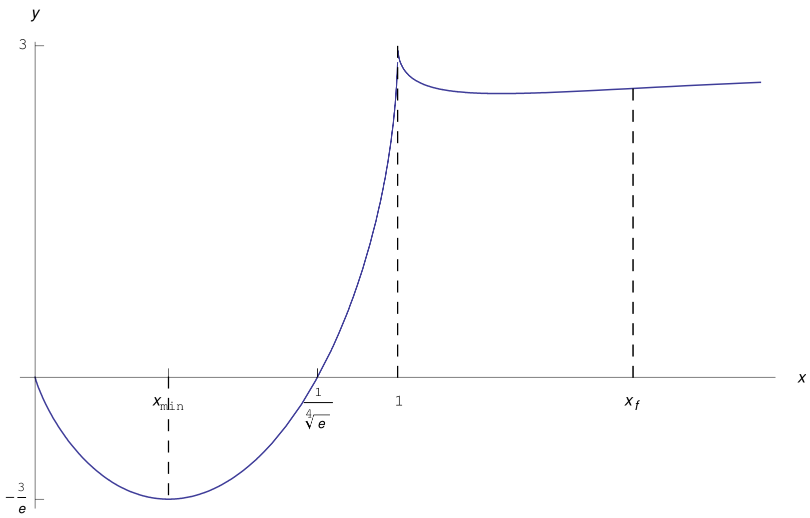


Figura 82: Grafico della funzione $f(x) = 3x - 2x\sqrt{5|\ln x| - 4\ln x}$

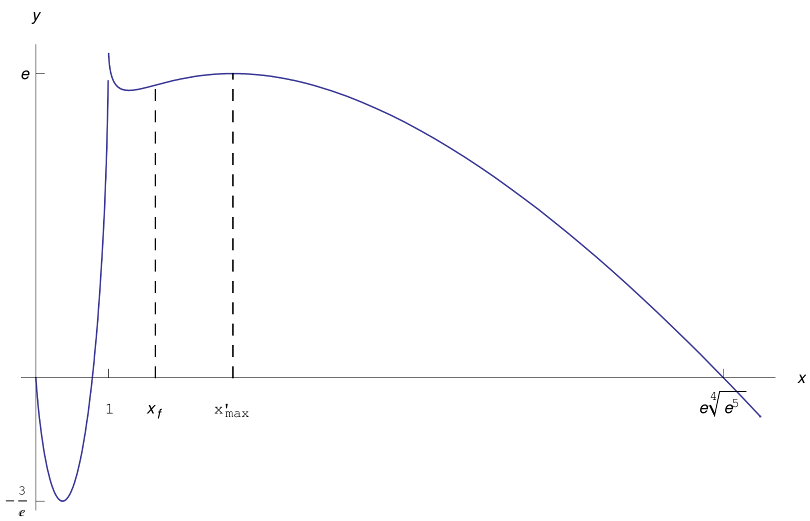


Figura 83: Grafico della funzione $f(x) = 3x - 2x\sqrt{5|\ln x| - 4\ln x}$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Tralasciamo eventuali intersezioni con l'asse x per $x \neq 0$
Simmetrie
La funzione è dispari, avendosi $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a destra}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = -\frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a sinistra}$$

Derivate

$$f'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = -\frac{4x(x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f'

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremale $x = 0$.
Segno di f'

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

Da ciò segue che $x = 0$ non è punto estremante, giacché la funzione risulta crescente in X.
Concavità e punti di flesso
Zeri di f''

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm 1$$

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \notin (-1, 1)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, mentre il $(-1, 1)$ volge la concavità verso il basso. I punti

$$x = 0,\ x = -1, x = 1$$

sono punti di flesso.

$$F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\ O\left(0, 0\right),\ F_2\left(1, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

In particolare, $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale, poiché per quanto visto, tale punto è uno zero della derivata prima.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (84).

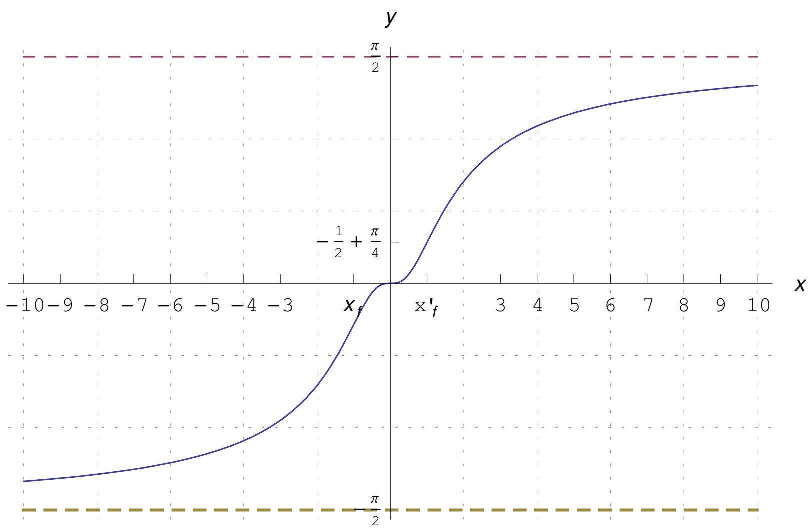


Figura 84: Grafico della funzione $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$

27 Esercizio 756

Studiare la funzione

$$f(x) = x \tanh x \tag{257}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.

Simmetrie

La funzione è pari, avendosi $f(-x) = f(x)$, $\forall x$. Perciò il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ n_1 &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{-2x} + 1} = 0 \end{aligned}$$

Quindi la retta:

$$y = x,$$

è asisntoto abliquo a destra. Siccome il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, segue che la retta

$$y = -x,$$

è asintoto obliquo a sinistra.

Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tanh x + \frac{x}{\cosh^2 x} \\ f''(x) &= \frac{2}{\cosh^2 x} (1 - x \tanh x) \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Riscriviamo la derivata prima nella forma:

$$f'(x) = \frac{\sinh x \cosh x + x}{\cosh^2 x}$$

Vediamo che $f'(0) = 0$, inoltre per $x > 0$ è $\sinh x \cosh x + x > 0$, per cui la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$. Siccome il

il grafico è simmetrico rispetto all'asse y segue che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, quindi il punto $x = 0$ è di minimo relativo.

Concavità e punti di flesso

Segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 - x\tanh x > 0$$

In forza della parità della funzione, consideriamo l'intervallo $(0, +\infty)$. Definiamo:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \tanh x$$

Per quanto detto:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{1}{x} - \tanh x\right) > 0 \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \phi(x) > 0$$

Possiamo procedere per via grafica osservando che $\phi(x)$ ha uno zero per $x > 1$, come possiamo vedere dal grafico di figura (85).

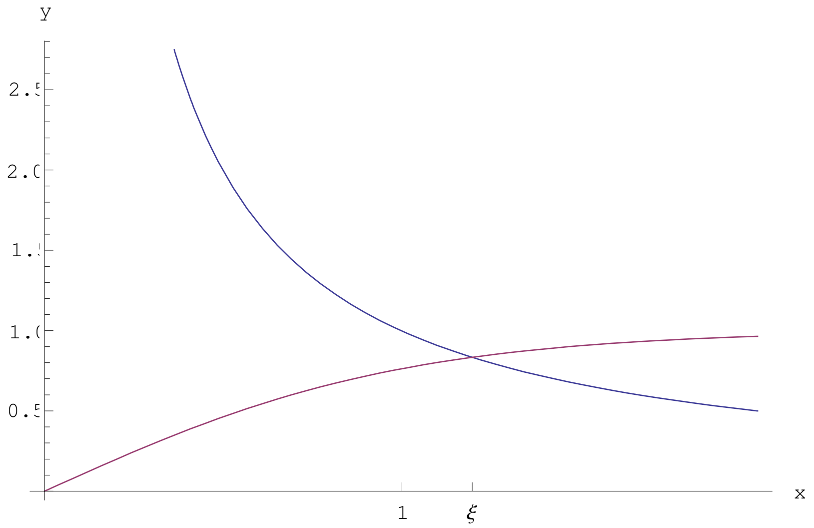


Figura 85: Ricerca delle soluzioni di $\frac{1}{x} = \tanh x$ per $x > 0$.

Risolvendo numericamente, si ottiene

$$\phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \xi \simeq 1.12$$

Inoltre

$$\phi(x) > 0 \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} x \in (0, \xi)$$

Perciò in $(0, \xi)$ è $f''(x) > 0$. Tenendo conto della simmetria rispetto all'asse y, segue che γ è concavo verso l'alto in $(-\xi, \xi)$. Pertanto $\pm\xi$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (86).

28 Esercizio 757

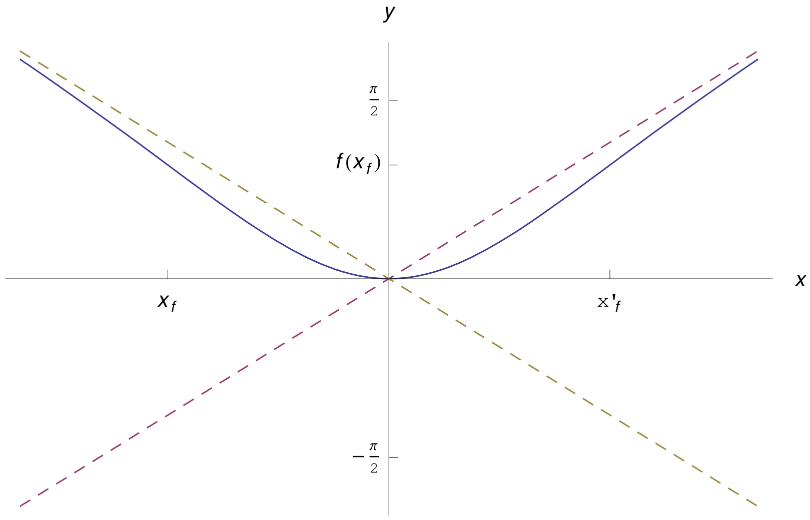


Figura 86: Grafico della funzione $f(x) = x \tanh x$

Studiare la funzione

$$f(x) = \left| x^2 - 2x \right| e^x \tag{258}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x)\, e^x, & x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ -(x^2 - 2x)\, e^x, & x \in (0, 2) \end{cases} \tag{259}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0, 2$$
$$\implies (0,0) \in \gamma, (0,2) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno

$$\forall x \in X, \;\; f(x) \geq 0$$

Quindi γ giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi la funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$. La divergenza esponenziale implica l'inesistenza di asintoti obliqui.

Inoltre la funzione è infinitesima per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - x^2}{e^{-x}} = 0^+$$

Da ciò segue che l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2 - 2)\, e^x, & x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ (2 - x^2)\, e^x, & x \in (0, 2) \end{cases} \tag{260}$$
$$f''(x) = \begin{cases} (x^2 + 2x - 2)\, e^x, & x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ (-x^2 - 2x + 2)\, e^x, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ determiniamo gli zeri di f'

$$f'(x) = 0 \underset{x \notin (0,2)}{\Longleftrightarrow} x = -\sqrt{2}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x \notin (0,2)}{\Longleftrightarrow} x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$$

Quindi per $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$. Segue che $\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo: $\left(\sqrt{2}, \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{\sqrt{2}}\right)$.

Per $x \in (0, 2)$ determiniamo gli zeri di f'

$$f'(x) = 0 \underset{x \in (0,2)}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{2}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x \in (0,2)}{\Longleftrightarrow} x \in \left(0, \sqrt{2}\right)$$

Quindi per $x \in (0, 2)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{2}\right)$, ed è strettamente decrescente in $\left(\sqrt{2}, 2\right)$. Segue che $\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo.

Riassumendo, abbiamo due punti di massimo relativo:

$$M_1\left(-\sqrt{2},\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}}\right)$$
$$M_2\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}}\right)$$

Determiniamo il comportamento della derivata nei punti di raccordo $x=0$ e $x=2$.

$$f'_-\left(0\right)=-2,\, f'_+\left(0\right)=2$$

Quindi $(0,0)$ è un punto angoloso. Sia τ_- la retta tangente a sinistra in $(0,0)$ e τ_+ la retta tangente a destra in $(0,0)$. Le loro equazioni sono rispettivamente:

$$y=-2x$$
$$y=2x$$

Anche il punto $(2,0)$ è punto angoloso per γ:

$$f'_-\left(2\right)=-2e^2,\ f'_+\left(2\right)=2e^2$$

Denotiamo con τ'_- e τ'_+ rispettivamente la retta tangente a sinistra e a destra in $(2,0)$. Le loro equazioni sono:

$$y=-2e^2\left(x-2\right)$$
$$y=2e^2\left(x-2\right)$$

Concavità e punti di flesso

Per $x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ determiniamo gli zeri di f''

$$f''\left(x\right)=0\Longleftrightarrow x^2+2x-2=0\underset{x\notin(0,2)}{\Longleftrightarrow} x=-\sqrt{3}-1$$

Segno:

$$f''\left(x\right)>0\underset{x\notin(0,2)}{\Longleftrightarrow} x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}-1\right)\cup(2,+\infty)$$

Quindi per $x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $\left(-\infty,-\sqrt{3}-1\right)\cup(2,+\infty)$, mentre in $\left(-\sqrt{3}-1,0\right)$ volge la concavità verso il basso. Perciò $x=-\sqrt{3}-1$ è un punto di flesso: $\left(-\sqrt{3}-1,2\left(2\sqrt{3}+3\right)e^{-\sqrt{3}-1}\right)$.

Per $x\in(0,2)$ determiniamo gli zeri di f''

$$f''\left(x\right)=0\Longleftrightarrow x^2+2x-2=0\underset{x\in(0,2)}{\Longleftrightarrow} x=\sqrt{3}-1$$

Segno:

$$f''\left(x\right)>0\underset{x\in(0,2)}{\Longleftrightarrow} x\in\left(0,\sqrt{3}-1\right)$$

Quindi per $x \in (0,2)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $\left(0, \sqrt{3}-1\right)$, mentre in $\left(0, \sqrt{3}-1\right)$ volge la concavità verso il basso. Perciò $x = \sqrt{3}-1$ è un punto di flesso: $\left(\sqrt{3}-1, 2\left(2\sqrt{3}-3\right)e^{\sqrt{3}-1}\right)$.

Riassumendo, i punti di flesso sono:

$$F_1\left(-\sqrt{3}-1, 2\left(2\sqrt{3}+3\right)e^{-\sqrt{3}-1}\right)$$
$$F_2\left(\sqrt{3}-1, 2\left(2\sqrt{3}-3\right)e^{\sqrt{3}-1}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (87).

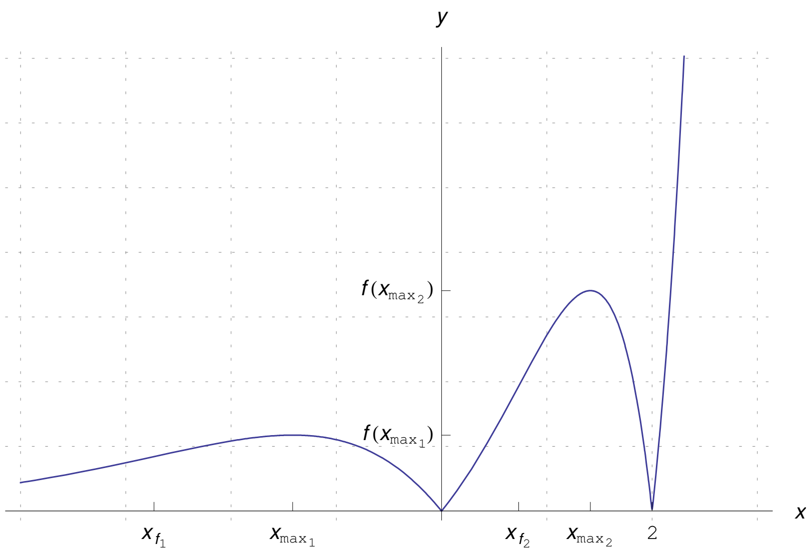


Figura 87: Grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 2x| e^x$

29 Esercizio 758

Studiare la funzione

$$f(x) = |x| e^{\arctan x} \tag{261}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione

La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\arctan x}, & x \in [0, +\infty) \\ -xe^{\arctan x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{262}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno

$$\forall x \in X, \ \ f(x) \geq 0$$

Quindi γ giace nel semipiano $y \geq 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi la funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$.
Ricerca degli asintoti:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\arctan(+\infty)} = e^{\pi/2} \\ n_1 &= \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - e^{\pi/2}x\right] = -e^{\pi/2} \\ m_2 &= \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -e^{-\pi/2} \\ n_2 &= \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + e^{-\pi/2}x\right] = e^{\pi/2} \end{aligned}$$

La retta di equazione:

$$y = e^{\pi/2}x - e^{\pi/2}$$

è asintoto obliquo a destra.
La retta di equazione:

$$y = e^{-\pi/2}x - e^{-\pi/2}$$

è asintoto obliquo a sinistra.
Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{1+x^2}e^{\arctan x}, & x \in [0, +\infty) \\ -\frac{x^2+x+1}{1+x^2}e^{\arctan x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{263}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{(1+x^2)^2}e^{\arctan x}, & x \in [0, +\infty) \\ -\frac{x+2}{(1+x^2)^2}e^{\arctan x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in [0, +\infty)$ determiniamo gli zeri di f'

$$\nexists x \mid x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow \nexists x \mid f'(x) = 0$$

Segno:

$$\forall\, x \in [0, +\infty)\,,\ f'(x) > 0$$

Quindi per $x \in [0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente.
Per $x \in (-\infty, 0)$ determiniamo gli zeri di f'

$$\nexists x \mid x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow \nexists x \mid f'(x) = 0$$

Segno:

$$\forall\, x \in (-\infty, 0)\,,\ f'(x) < 0$$

Quindi per $x \in (-\infty, 0)$ la funzione è strettamente decrescente.
Il punto $(0, 0)$ è un punto angoloso, poichè:

$$f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (88).

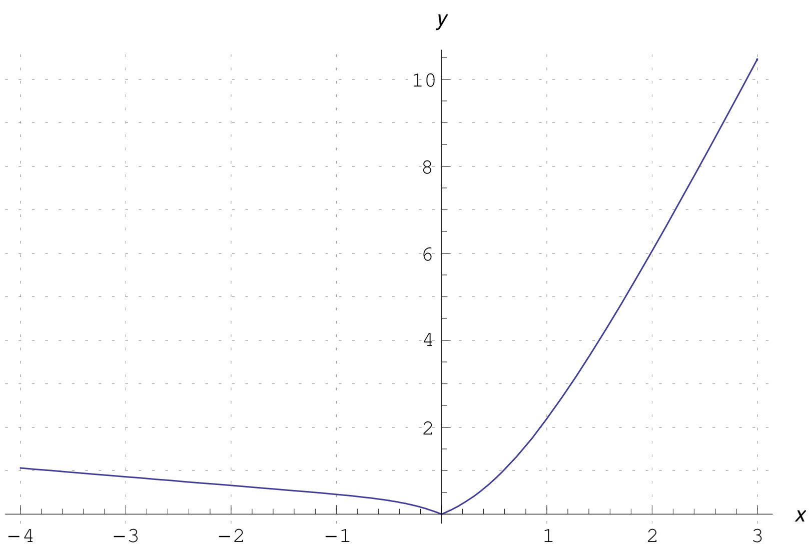


Figura 88: Grafico della funzione $f(x) = |x| e^{\arctan x}$

30 Esercizio 759

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\left|x^2-1\right|} \tag{264}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ e^{-\left(x^2-1\right)}, & x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{265}$$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x, y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno
Dal risultato precedente segue che γ giace nel semipiano $y > 0$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(x) = -f(-x)$, quindi γ è simmetrico rispetto all'asse y.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi la funzione diverge positivamente per $x \to \pm\infty$. La divergenza esponenziale implica l'inesistenza di asintoti obliqui.
Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -2xe^{x^2-1}, & x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{266}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(4x^2+2\right) e^{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2\left(2x^2-1\right) e^{x^2-1}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ la derivata prima non si annulla mai, ed è maggiore di zero per $x > 1$, segue che è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, e procedendo per simmetria rispetto all'asse y (la funzione è pari), risulta decrescente per $x < -1$.
Per $x \in (-1, 1)$ la derivata si annulla in $x = 0$ ed è positiva in $(-1, 0)$. Segue che è crescente in $(-1, 0)$, decrescente in $(0, 1)$, perciò $x = 0$ è punto di massimo relativo: $M(0, e)$.
I punto $(\pm 1, 1)$ sono punti angolosi, poichè:

$$f'_{-}(-1) = 2, f'_{+}(-1) = -2$$
$$f'_{-}(1) = -2, f'_{+}(1) = 2$$

Concavità e punti di flesso
Per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, per cui γ volge ivi la concavità verso l'alto.
Per $x \in (-1, 1)$,

$$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

Perciò per $x \in (-1, 1)$ il grafico è concavo in $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. I punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di flesso:

$$F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$
$$F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (89).

31 Esercizio 760

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} - \arcsin\frac{x-1}{|x|+1} \tag{267}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni x appartenente all'insieme X soluzione del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{|x|+1} \leq 1 \\ \frac{x-1}{|x|+1} \geq -1 \end{cases} \tag{268}$$

Iniziamo a risolvere la prima delle (268) separando i due casi: $x \geq 0$ e $x < 0$:

$$x \geq 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 1,$$

che è sempre verificata.

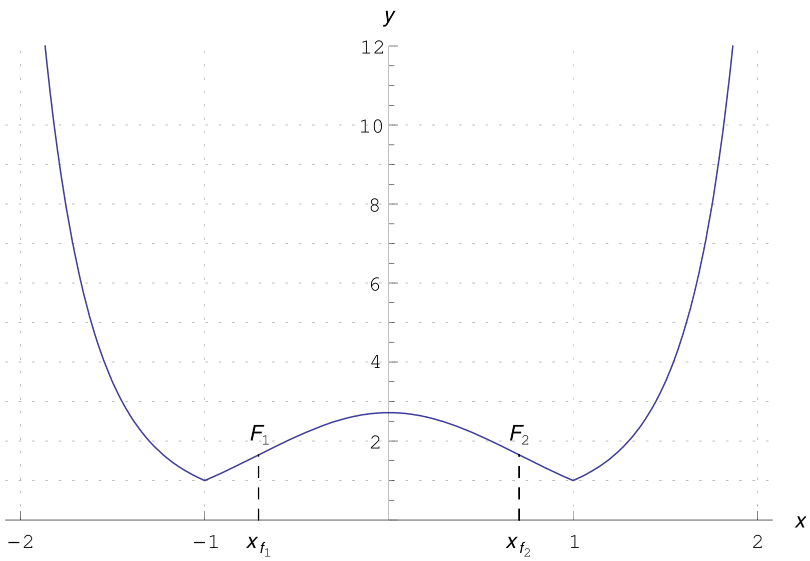


Figura 89: Grafico della funzione $f(x) = e^{\left|x^2-1\right|}$

$$x < 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{-x+1} = -1 \leq 1$$

Perciò la prima è verificata in $(-\infty, +\infty)$. Passiamo alla seconda delle (268) separando i due casi: $x \geq 0$ e $x < 0$:

$$x \geq 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq -1,$$

che è sempre verificata.

$$x < 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{-x+1} = -1 \geq -1$$

Perciò anche la seconda delle (268) è verificata in $(-\infty, +\infty)$. Si conclude che l'insieme di definizione della funzione è:

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Per i calcoli successivi è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right), & x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{-x} + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{269}$$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x, in quanto richiederebbe una ricerca di soluzioni per via grafica o numerica.

Intersezione con l'asse y:

$$f(0)=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\in\gamma\cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Simmetrie

La funzione non ha una parità definita, avendosi $f(-x)\neq\pm f(x)$. Perciò il grafico non esibisce simmetrie.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

Asintoti obliqui:

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=0}-\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\arcsin\frac{x-1}{x+1}\right)}_{=0}=0$$

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{-x}}}_{=0}+\frac{\pi}{2x}=0$$

Ciò implica la non esistenza di asintoti obliqui.

Derivate

La derivata prima è:

$$x\geq0\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{|x+1|}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\underset{|x+1|=x+1}{=}\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

$$x<0\Longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

Riassumendo:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)}, & x\in[0,+\infty)\\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x\in(-\infty,0)\end{cases}\tag{270}$$

Calcolo della derivata seconda:

$$
\begin{aligned}
x \geq 0 \Longrightarrow f''(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x(x+1)-(x-1)\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)+\sqrt{x}\right]}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{2x(x+1)-(x-1)(3x+1)}{\sqrt{x^3}(x+1)^3} \\
&= \frac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^3} \\
x < 0 \Longrightarrow f''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(-x)^{-1/2} = -\frac{1}{4\sqrt{-x^3}}
\end{aligned}
$$

Riassumendo:

$$
f''(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^3}, & x \in [0,+\infty) \\ -\frac{1}{4\sqrt{-x^3}}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{271}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \tanh x + \frac{x}{\cosh^2 x} \\
f''(x) &= \frac{2}{\cosh^2 x}(1 - x\tanh x)
\end{aligned}
$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in [0,+\infty)$, gli zeri di f' sono:

$$
f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1
$$

Il segno:

$$
f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1
$$

Quindi per $x \in [0,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(1,+\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0,1)$. Ciò implica che $x = 1$ è punto di minimo relativo: $m(1,1)$.

Studiamo il comportamento della derivata in un intorno destro di $x = 0$, giacchè non è ivi definita. Abbiamo:

$$
\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty
$$

Per $x \in (-\infty, 0)$ la derivata è priva di zeri ed è sempre negativa. Si conclude che in $(-\infty, 0)$ la funzione è strettamente decrescente. Studiamo il comportamento della derivata in un intorno sinistro di $x = 0$:

$$
\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty
$$

Cioè:

$$
\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty
$$

Come è noto, in tal caso possiamo porre:

$$f'(0) = -\infty,$$

dicendo che la funzione ha in $x = 0$ derivata infinita. Da un punto di vista geometrico il punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è un **flesso a tangente verticale.**

Concavità e punti di flesso

Per $x \in [0, +\infty)$, gli zeri di f'' sono:

$$f''(x) = 0 \underset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x = 2 + \sqrt{5}$$

Il segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x \in \left[0, 2 + \sqrt{5}\right)$$

Pertanto per $x \in [0, +\infty)$ il diagramma volge la concavità verso l'alto in $\left[0, 2 + \sqrt{5}\right)$, mentre in $\left(2 + \sqrt{5}, +\infty\right)$ volge la concavità verso il basso. Ciò implica che $x = 2 + \sqrt{5}$ è un punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(2 + \sqrt{5}, \sqrt{1 + \sqrt{5}} - \arcsin \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}\right)$$

Infine, per $x < 0$, è sempre $f''(x) < 0$, per cui il diagramma volge la concavità verso il basso su tutto $(-\infty, 0)$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (90).

32 Esercizio 761

Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} \tag{272}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, quindi:

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Per i calcoli successivi è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\frac{x-1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ x^2 e^{-\frac{x+1}{x}}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{273}$$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X,\ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{274}$$

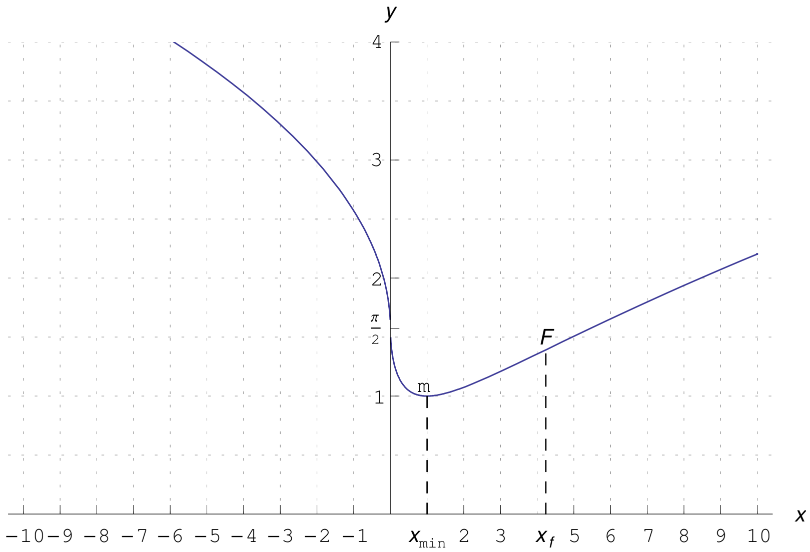


Figura 90: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x|} - \arcsin \frac{x-1}{|x|+1}$

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Segno

Dalla (274) segue che γ giace nel semipiano $y > 0$.

Simmetrie

La funzione non ha una parità definita, avendosi $f(-x) \neq \pm f(x)$. Perciò il grafico non è simmetrico nè rispetto all'asse y e nè rispetto all'origine delle coordinate.

Comportamento agli estremi

Nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot e^{-\infty} = 0^+$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 e^{-\frac{x+1}{x}} = 0 \cdot \infty$$

Per rimuovere la forma indeterminata, poniamo:

$$t = \frac{x+1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

Inoltre: $x \to 0^+ \Longrightarrow t \to -\infty$, perciò il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 e^{-\frac{x+1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{-t}}{(t-1)} = +\infty,$$

in quanto e^{-t} è per $t \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Si conclude che $x = 0$ è una singolarità.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot e = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (+\infty) \cdot e^{-1} = +\infty$$

Asintoti obliqui:

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty$$
$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{-\frac{x+1}{x}} = -\infty$$

Ciò implica la non esistenza di asintoti obliqui.

Derivate

La derivata prima è:

$$\begin{aligned} x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) &= 2xe^{\frac{x-1}{x}} + x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \frac{d}{dx} \frac{x-1}{x} \\ &= 2xe^{\frac{x-1}{x}} + x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= (2x+1) e^{\frac{x-1}{x}} \\ x < 0 \Longrightarrow f'(x) &= 2xe^{-\frac{x+1}{x}} - x^2 e^{-\frac{x+1}{x}} \frac{d}{dx} \frac{x+1}{x} \\ &= 2xe^{-\frac{x+1}{x}} - x^2 e^{-\frac{x+1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= (2x+1) e^{-\frac{x+1}{x}} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1) e^{\frac{x-1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ (2x+1) e^{-\frac{x+1}{x}}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{275}$$

Calcolo della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x > 0) &= 2e^{\frac{x-1}{x}} + (2x+1) e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= e^{\frac{x-1}{x}} \left(2x^2 + 2x + 1\right) \\ f''(x < 0) &= 2e^{-\frac{x+1}{x}} - (2x+1) e^{-\frac{x+1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{x+1}{x}} \left(2x^2 + 2x + 1\right) \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}} (2x^2 + 2x + 1), & x \in (0, +\infty) \\ e^{-\frac{x+1}{x}} (2x^2 + 2x + 1), & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{276}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in (0, +\infty)$ risulta

$$\forall x \in (0, +\infty)\,,\ f'(x) > 0,$$

per cui nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente. Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0^+ \cdot e^{-\infty} = 0^+,$$

cioè la curva γ parte dal punto $x = 0$ con tangente orizzontale.
Per $x \in (-\infty, 0)$ la derivata si annulla in $x = -\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Cioè in $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Ciò implica che $x = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(-\frac{1}{2}, \frac{e}{4}\right)$$

Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X,\ f''(x) > 0,$$

per cui γ è privo di flessi, volgendo la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (91).

33 Esercizio 762

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln^3 |x|}{x\,|x|} \tag{277}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, quindi:

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

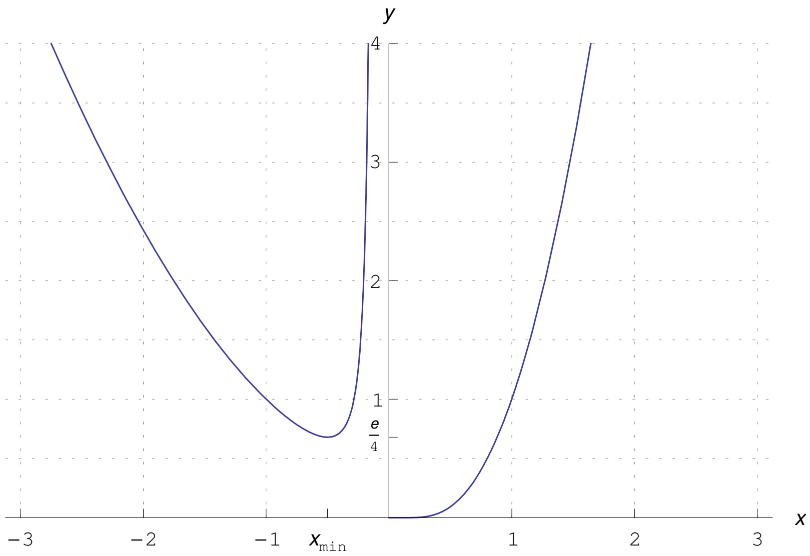


Figura 91: Grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}}$

Per i calcoli successivi è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln^3 x}{x^2}, & x \in (0, +\infty) \\ -\frac{\ln^3(-x)}{x^2}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (278)$$

Intersezioni con gli assi
Intersezione con l'asse x

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow |x| = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (\pm 1, 0) \in \gamma \cap x, \quad (279)$$

essendo γ il grafico della funzione.
L'insieme dei punti di intersezione con l'asse y è l'insieme vuoto[1], giacché:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Abbiamo:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln|x|}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Mentre per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ il grafico giace nel semipiano $y < 0$.
Simmetrie

[1] In generale, tale insieme contiene al più un solo elemento, in quanto stiamo studiando funzioni ad un sol valore.

La funzione è dispari: $f(-x) = -f(x)$. Perciò il grafico è simmetrico rispetto all'origine delle coordinate.

Comportamento agli estremi

Nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^3 x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Evidentemente:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \underset{f \text{ è dispari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

Si conclude che il punto $x = 0$ è un punto d'infinito per la funzione. Geometricamente abbiamo che l'asse y è asintoto verticale per il diagramma cartesiano della funzione.

Studiamo ora il comportamento all'infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Anzichè applicare la regola di De L'Hospital, poniamo $x = e^t$, per cui:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^3}{e^{2t}} = 0^+,$$

giacchè e^t è - per $x \to +\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande. Per simmetria segue:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \underset{f \text{ è dispari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$$

Si conclude che la funzione è infinitesima per $x \to \pm\infty$. Geometricamente segue che l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Derivate

La derivata prima è:

$$\begin{aligned}
x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) &= \frac{3x^2 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - 2x \ln^3 x}{x^4} \\
&= \frac{3 \ln^2 x - 2 \ln^3 x}{x^3} \\
&= \frac{\ln^2 x \, (3 - 2 \ln x)}{x^3} \\
x < 0 \Longrightarrow f'(x) &= -\frac{3x^2 \ln^2 (-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (-1) - 2x \ln^3 (-x)}{x^4} \\
&= -\frac{3 \ln^2 (-x) - 2 \ln^3 (-x)}{x^3} \\
&= \frac{\ln^2 (-x) \, [2 \ln (-x) - 3]}{x^3}
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x (3 - 2 \ln x)}{x^3}, & x \in (0, +\infty) \\ \frac{\ln^2 (-x) [2 \ln (-x) - 3]}{x^3}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{280}$$

Calcolo della derivata seconda:

$$\begin{aligned}
f''(x>0) &= \frac{\left(6\ln x\cdot\frac{1}{x}-6\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)x^3-3x^2\left(3\ln^2 x-2\ln^3 x\right)}{x^6}\\
&= \frac{6\ln x-6\ln^2 x-9\ln^2 x+\ln^3 x}{x^4}\\
&= \frac{3\ln x\left(2\ln^2 x-5\ln x+2\right)}{x^4}\\
f''(x<0) &= \frac{3\ln x\left(-2\ln^2 x+5\ln x-2\right)}{x^4}
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{3\ln x\left(2\ln^2 x-5\ln x+2\right)}{x^4}, & x\in(0,+\infty)\\ \frac{3\ln(-x)\left[-2\ln^2(-x)+5\ln(-x)-2\right]}{x^4}, & x\in(-\infty,0)\end{cases}\tag{281}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x\in(0,+\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow \ln x=0,\ \ln x=\frac{3}{2}\Longleftrightarrow x=1,e\sqrt{e}$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x=1,\ x=e\sqrt{e}$$

Studiamo il segno di f' nell'intervallo $(0,+\infty)$:

$$f'(x)>0\Longleftrightarrow x\in\left(0,e\sqrt{e}\right)$$

Quindi in $(0,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(0,e\sqrt{e})$, ed è strettamente decrescente in $(e\sqrt{e},+\infty)$. Segue che $x=e\sqrt{e}$ è punto di massimo relativo: $M\left(e\sqrt{e},\frac{27}{8e^3}\right)$. Resta in sospeso il punto $x=1$. Si noti che esiste un intorno sinistro e un intorno destro di tale punto in cui la funzione è strettamente crescente, per cui $x=1$ non è punto di estremo relativo.

Passiamo ora a $(-\infty,0)$. Qui è:

$$f'(x)=\frac{\ln^2(-x)\left[2\ln(-x)-3\right]}{x^3}$$

Calcoliamo gli zeri:

$$\begin{aligned}
f'(x)=0 &\Longleftrightarrow \ln^2(-x)\left[2\ln(-x)-3\right]=0\\
&\Longleftrightarrow \ln(-x)=0,\ \ln(-x)=\frac{3}{2}\\
\ln(-x)=0 &\Longrightarrow x=1\\
\ln(-x)=\frac{3}{2} &\Longrightarrow x=-e^{3/2}
\end{aligned}$$

Abbiamo perciò i punti estremali:

$$x = 1, \; x = -e^{3/2}$$

Studiamo il segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2(-x)\left[2\ln(-x) - 3\right]}{x} > 0$$

Studiamo il segno del numeratore, ponendo $t = -x$:

$$\ln^2 t\,(2\ln t - 3) > 0 \Longleftrightarrow t > e\sqrt{e}$$

Ripristiniamo x:

$$t = -x > e\sqrt{e} \Longleftrightarrow x < -e\sqrt{e}$$

Da ciò segue, tenendo conto che il denominatore di $\frac{\ln^2(-x)[2\ln(-x)-3]}{x}$ è sempre minore di zero in $(-\infty, 0)$:

$$f'(x) > 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x \in \left(-e\sqrt{e}, 0\right)$$

Si conclude che in $(-\infty, 0)$ la funzione è strettamente crescente in $(-e\sqrt{e}, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -e\sqrt{e})$. Quindi $x = -e\sqrt{e}$ è punto di minimo relativo: $m\left(-e\sqrt{e}, -\frac{27}{8e^3}\right)$. Resta in sospeso il punto $x = -1$, che è di monotonia per la funzione.

Si noti che alle stesse conclusioni si giunge tenendo conto della simmetria rispetto all'origine.

Concavità e punti di flesso

Per $x \in (0, +\infty)$ calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Longleftrightarrow \ln x\left(2\ln^2 x - 5\ln x + 2\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x = 0, \ln x = \frac{1}{2}, \; \ln x = 2 \\ x = 1, x &= \sqrt{e}, x = e^2 \end{aligned}$$

Studiamo il segno in $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x\left(2\ln^2 x - 5\ln x + 2\right) > 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(1, \sqrt{e}\right) \cup \left(e^2, +\infty\right) \end{aligned}$$

Quindi in $(0, +\infty)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $(1, \sqrt{e}) \cup (e^2, +\infty)$; pertanto $x = 1, x = \sqrt{e}, x = e^2$ sono punti di flesso. In particolare $x = 1$ è un **flesso a tangente orizzontale**, poiché per quanto visto si annulla ivi la derivata prima.

$$(1, 0), \left(\sqrt{e}, \frac{1}{8e}\right), \; \left(e^2, \frac{8}{e^4}\right)$$

Per $x \in (-\infty, 0)$ procediamo per simmetria rispetto all'origine, ottenendo i flessi:

$$(-1, 0), \left(-\sqrt{e}, -\frac{1}{8e}\right), \; \left(-e^2, -\frac{8}{e^4}\right)$$

In particolare, per $x \in (-\infty, 0)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $(-e^2, -\sqrt{e}) \cup (-1, 0)$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (92).

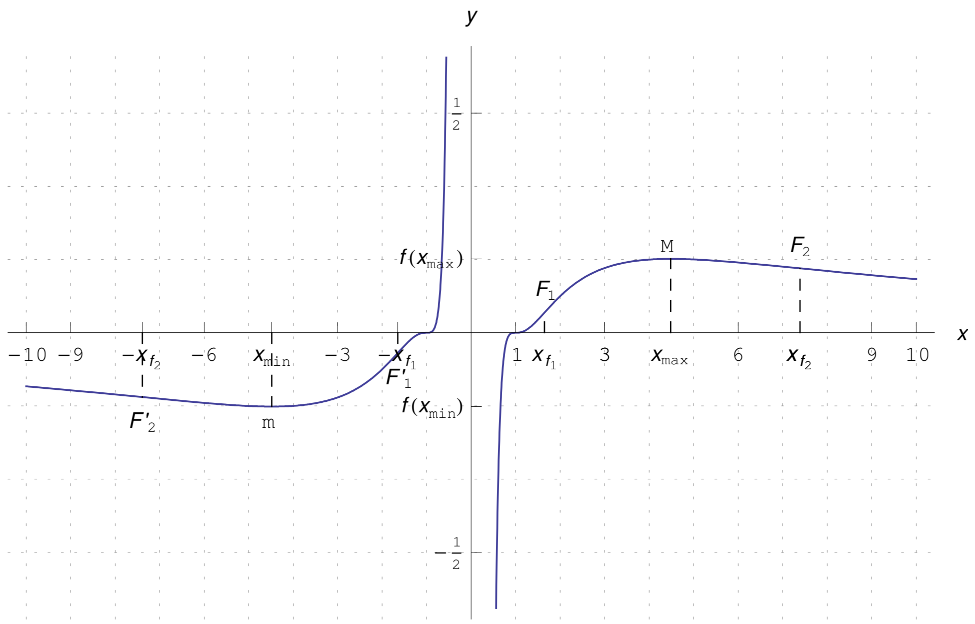


Figura 92: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln^3 |x|}{x|x|}$

34 Esercizio 763

Studiare la funzione

$$f(x) = 3^{-\arcsin x} \tag{282}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione esponenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$, per cui l'insieme di definizione della funzione proposta è quello di $\arcsin x$, cioè:

$$X = [-1, 1]$$

Intersezioni con gli assi
Il grafico è privo di intersezioni con l'asse x, poichè

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \tag{283}$$

Intersezione con l'asse y:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0,1) \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno
Per la (**??**) il grafico si dispone nel semipiano $y > 0$.
Simmetrie
La funzione non ha parità definita, perciò il grafico è privo di simmetria (rispetto all'asse y o rispetto all'origine).
Comportamento agli estremi
Gli estremi del campo di esistenza appartengono a X, risultando:

$$f(-1) = 3^{\pi/2}, f(1) = 3^{-\pi/2}$$

Derivate
Calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3^{-\arcsin x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{d}{dx}(-\arcsin x) \\ &= -\frac{3^{-\arcsin x} \ln 3}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{\ln 3 \cdot f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\ln 3 \frac{f'(x)\sqrt{1-x^2} - f(x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= -\ln 3 \frac{3^{-\arcsin x} \ln 3 \cdot \sqrt{1-x^2} + 3^{-\arcsin x} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \\ &= \ln 3 \cdot f(x) \frac{\sqrt{1-x^2} \ln 3 - x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\ln 3 \cdot f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= \ln 3 \cdot f(x) \frac{\sqrt{1-x^2} \ln 3 - x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{aligned} \tag{284}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \ \ f'(x) < 0$$

Si conclude che la funzione è strettamente decrescente. Si osservi che la funzione non è derivabile negli estremi del campo di esistenza. Più precisamente ha ivi derivata infinita, risultando:

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty \tag{285}$$

Le (285) hanno la seguente interpretazione geometrica: la curva $\gamma)y = f(x)$ "parte" dal punto $x = -1$ con tangente verticale orientata verso il basso, e "arriva" in $x = 1$ conservando l'orientamento della retta tangente.

Concavità e punti di flesso
Calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2}\ln 3 - x = 0$$

Tale equazione irrazionale ha l'unica radice:

$$x_f = \frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3 + 1}}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2}\ln 3 - x > 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} > \frac{x}{\ln 3} \end{aligned}$$

Applichiamo il procedimento standard di ricerca delle soluzioni di una disequazione irrazionale.

1. $x \geq 0$

$$\begin{cases} 1 - x^2 > \frac{x^2}{\ln^2 3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in S_1 = [0, x_f)$$

2. $x < 0$

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in S_2 = [-1, 0)$$

Pertanto la disequazione $\sqrt{1-x^2} > \frac{x}{\ln 3}$ è verificata per ogni $x \in S = S_1 \cup S_2 = [-1, x_f)$. Ciò implica che il grafico volge la concavità verso l'alto per $x \in S$, mentre per $x \in (x_f, 1]$ volge la concavità verso il basso. Quindi x_f è punto di flesso.

$$F\left(\frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3 + 1}}, 3^{-\arcsin \frac{\ln 3}{\sqrt{\ln^2 3+1}}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (93).

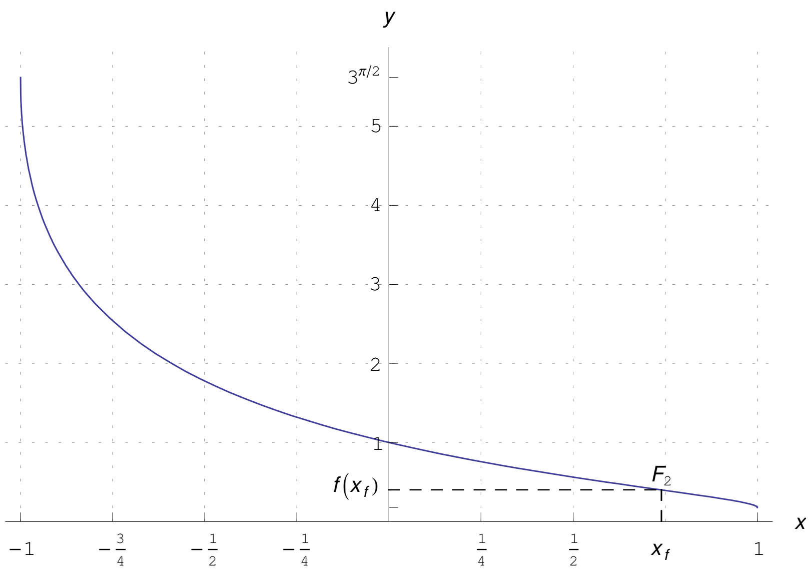


Figura 93: Grafico della funzione $f(x) = 3^{-\arcsin x}$

35 Esercizio 764

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \tag{286}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Il grafico è privo di intersezioni con l'asse x, poichè

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \tag{287}$$

Intersezione con l'asse y:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
L'insieme dei punti di intersezione con l'asse y è l'insieme vuoto, giacché:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Per la (287) il grafico si dispone nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
Risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale. A causa della divergenza esponenziale, non esistono asintoti obliqui.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x^3}} \\ f''(x) &= \frac{e^{\sqrt{x}}(3-3\sqrt{x}+x)}{4\sqrt{x^5}} \end{aligned} \tag{288}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Segno di f':

$$f'(x) > 0 \iff x > 1 \tag{289}$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$. Ciò implica che $x = 1$ è punto di minimo relativo:

$$m(1, e)$$

Concavità e punti di flesso
Studiamo direttamente il segno della derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff 3 - 3\sqrt{x} + x > 0 \iff -\left(3\sqrt{x} - x - 3\right) > 0 \\ &\iff \sqrt{x} < \frac{x+3}{3} \end{aligned}$$

È facile verificare che $\sqrt{x} < \frac{x+3}{3}$ è sempre verificata in $(0, +\infty)$, per cui il grafico volge sempre la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (94).

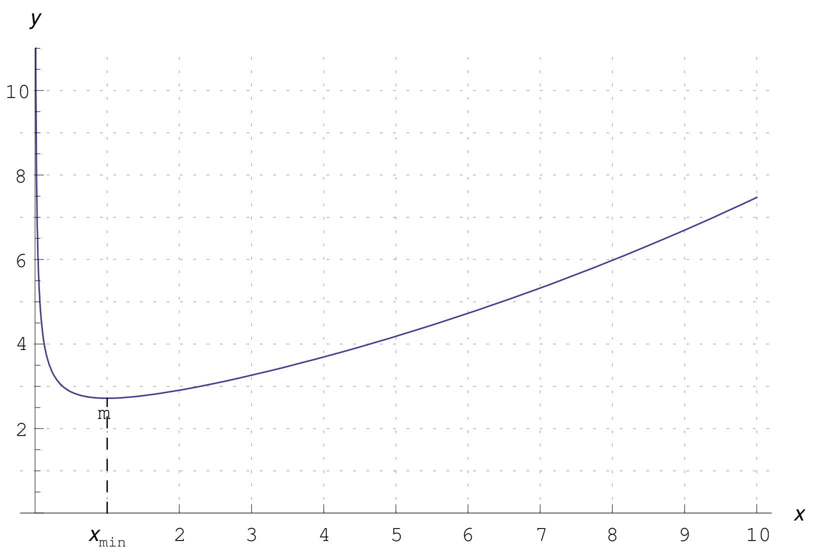


Figura 94: Grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

36 Esercizio 765

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + |\ln x|}{1 - |\ln x|} \tag{290}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per x tale che

$$|\ln x| \neq 1 \Longleftrightarrow x > 0,\, x \neq e,\, \frac{1}{e}$$

quindi:

$$X = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup (e, +\infty)$$

Per i calcoli successivi è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)}, & x \in X_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \\ g(x), & x \in X_2 = [1, e) \cup (e, +\infty) \end{cases}, \tag{291}$$

essendo per definizione:

$$g(x) \stackrel{def}{=} \frac{1+\ln x}{1-\ln x} \tag{292}$$

Intersezioni con gli assi
Intersezione con l'asse x

$$\nexists x \mid |\ln x| = -1 \Longrightarrow \nexists x \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x, \tag{293}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Intersezione con l'asse y:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Osserviamo che:

$$g(x) > 0, \ \frac{1}{g(x)} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1+\ln x}{1-\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in J_1 = \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

Abbiamo:

$$J_1 \cap X_1 = \left(\frac{1}{e}, 1\right), \ \ J_1 \cap X_2 = [1, e)$$

Quindi:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (J_1 \cap X_1) \cup (J_1 \cap X_2) = \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

Si conclude che il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$. Mentre per $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$ il grafico giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
Nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{\frac{1}{\ln x} + 1} = -1^-$$

Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile. Prolunghiamo per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+|\ln x|}{1-|\ln x|}, & x \in X \\ -1, & x \in X \cup \{0\} \end{cases}$$

Nel punto $x = \frac{1}{e}$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^-} \frac{1-\ln x}{1+\ln x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} \frac{1-\ln x}{1+\ln x} = +\infty$$

Perciò la retta $x = e^{-1}$ è asintoto verticale.

Nel punto $x = e$

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = -\infty$$

La retta $x = e$ è asintoto verticale.
Studiamo ora il comportamento all'infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{\frac{1}{\ln x} + 1} = -1^-$$

Si conclude che la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale a destra.
Derivate
La derivata prima è:

$$\begin{aligned} x \in X_2 \Longrightarrow f'(x) &= g'(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) + \frac{1}{x}(1 + \ln x)}{(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{2}{x(1 - \ln x)^2} \\ x \in X_1 \Longrightarrow f'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)} \\ &= -\frac{2}{x(1 + \ln x)^2} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}, & x \in X_1 \\ \frac{2}{x(1-\ln x)^2}, & x \in X_2 \end{cases} \tag{294}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(3+\ln x)}{x^2(1+\ln x)^3}, & x \in X_1 \\ -\frac{2(1+\ln x)}{x^2(\ln x-1)^3}, & x \in X_2 \end{cases} \tag{295}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Osserviamo subito che $\forall x \in X_2$, $f'(x) > 0$, per cui la funzione è strettamente crescente in X_2. Passiamo quindi a X_1. Qui è $f'(x) < 0\ \forall x$, donde la funzione è strettamente decrescente in X_1. Vediamo la derivata destra nel punto di discontinuità eliminabile $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -2 \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1 + \ln x)^2} = -2 \cdot \frac{1}{0 \cdot \infty},$$

onde calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \to 0^+} x(1 + \ln x)^2 = \lim_{x \to 0^+} x + \underbrace{2 \lim_{x \to 0^+} x \ln x}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x}_{=0} = 0^+,$$

perciò:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

Allo stesso risultato si perviene per confronto tra infiniti. Infatti, qui abbiamo le funzioni:

$$v(x) = \frac{1}{x},$$

che è l'infinito di riferimento per $x \to 0^+$. La funzione $\phi(x) = (1+\ln x)^2$ è un infinito per $x \to 0^+$. Più precisamente è un infinito di ordine infinitamente piccolo, a causa della presenza del $\log x$:

$$\forall \alpha > 0, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{v(x)^\alpha} = 0^+$$

Perciò per $\alpha = 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{v(x)} = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{v(x)}{\phi(x)} = \lim_{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(1+\ln x)^2} = +\infty$$

Concludendo:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

Geometricamente significa che la curva "parte" da $x = 0$ con tangente verticale orientata verso il basso.

Il punto di raccordo $x = 1$ è di continuità per la funzione, ma non lo è per la derivata prima. Infatti:

$$f'_-(1) = -2, \ f'_+(1) = 2$$

Si conclude che $P(1,1)$ è un punto angoloso del diagramma cartesiano. Osservando la monotonia a destra e a sinistra di $x = 1$, segue che si tratta di un punto di minimo relativo. Quindi P oltre ad essere punto angoloso è un minimo relativo per $f(x)$.

Concavità e punti di flesso

Per $x \in X_1$ calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \underset{x\in X_1}{\Longleftrightarrow} \ln x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e^3}$$

Studiamo il segno in X_1

$$f''(x) > 0 \underset{x\in X_1}{\Longleftrightarrow} \frac{\ln x + 3}{1+\ln x} > 0 \underset{x\in X_1}{\Longleftrightarrow} x \in \left(0, \frac{1}{e^3}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

Quindi in X_1 il grafico volge la concavità verso l'alto in $\left(0, \frac{1}{e^3}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$; pertanto $x = \frac{1}{e^3}$ è punto di flesso.

$$F\left(\frac{1}{e^3}, -2\right)$$

Per $x \in X_2$

$$\nexists x \in X_2 \mid f''(x) = 0$$

Qundi non ci sono flessi.

Segno:

$$f''(x) > 0 \underset{x \in X_2}{\iff} \frac{\ln x + 1}{-1 + \ln x} < 0 \underset{x \in X_2}{\iff} x \in (1, e)$$

Quindi in X_2 il grafico volge la concavità verso l'alto in $(1, e)$, mentre in $(e, +\infty)$ volge la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (95)-(96)-(97).

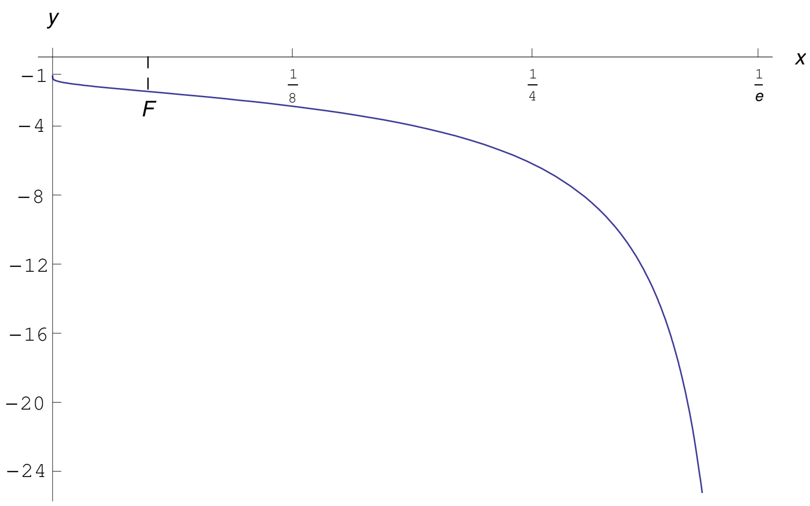


Figura 95: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1+|\ln x|}{1-|\ln x|}$ nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. La curva "parte" da $x = 0$ con tangente verticale orientata verso il basso. Ha un flesso in $F\left(\frac{1}{e^3}, -2\right)$, e un asintoto verticale in $x = e$, poichè ivi la funzione esplode in singolarità.

37 Esercizio 766

Studiare la funzione

$$f(x) = x + e^x \tag{296}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

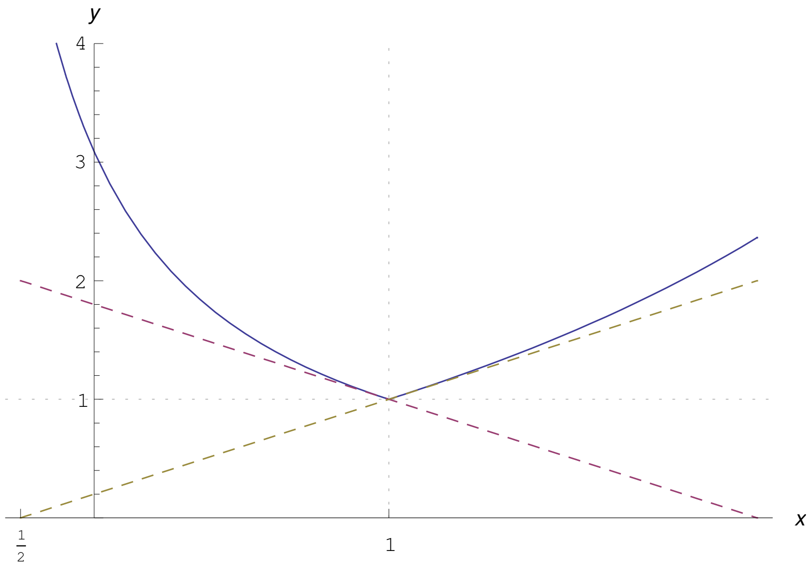


Figura 96: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1+|\ln x|}{1-|\ln x|}$ nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Si noti il punto angoloso $P(1,1)$. In tratteggio le rette tangenti a sinistra e a destra.

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Intersezione con l'asse x

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = -x \tag{297}$$

Questa equazione si risolve per via grafica o per via numerica. Si ottiene un'unica radice:

$$x = \alpha \simeq -0.567$$

Quindi:

$$P(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Intersezione con l'asse y:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0,1) \in \gamma \cap y$$

Segno
Risulta:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow e^x > -x \Longleftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$$

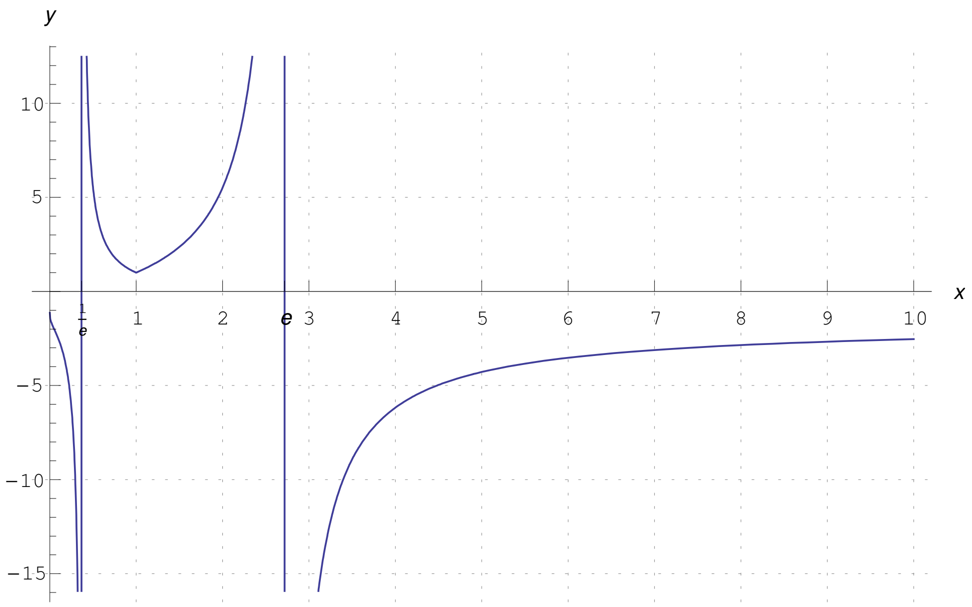


Figura 97: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1+|\ln x|}{1-|\ln x|}$ nell'intervallo $(0, 10)$.

Si conclude che il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$. Mentre per $x \in (-\infty, 0)$ il grafico giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ m_2 &= \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ n_2 &= \lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{aligned}$$

Quindi il diagramma è privo di asintoti obliqui a destra, mentre è dotato di un asintoto obliquo a sinistra, che è la retta di equazione:

$$y = x$$

Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^x \\ f''(x) &= e^x \end{aligned} \tag{298}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, \; f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.

Concavità e punti di flesso

Risulta

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0$$

Si conclude che il grafico volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (98).

38 Esercizio 767

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{x^2 - 1} \theta \left(x^2 - 1 \right), \tag{299}$$

essendo $\theta(t)$ la funzione gradino unitario:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

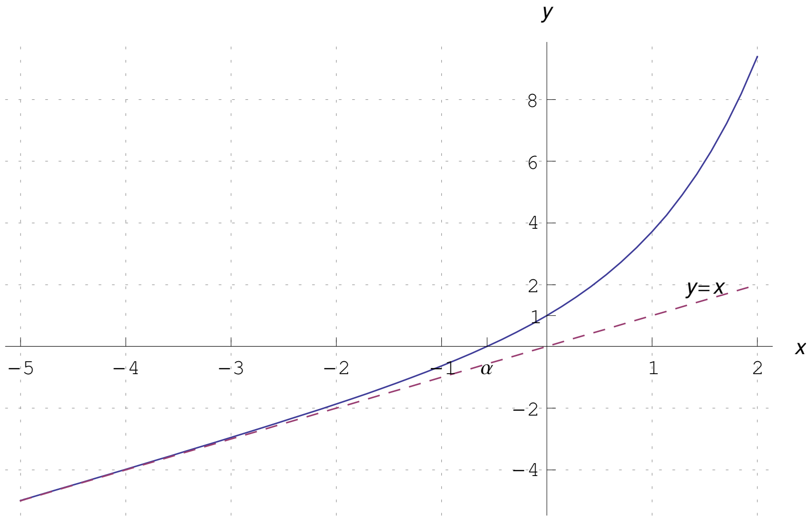


Figura 98: Grafico della funzione $f(x) = x + e^x$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Esplicitiamo il gradino unitario:

$$\theta\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1, & x^2 - 1 \geq 0 \\ 0, & x^2 - 1 < 0 \end{cases},$$

cioè:

$$\theta\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1, & x \in X_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 0, & x \in X_2 = (-1, 1) \end{cases},$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-1}, & x \in X_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 0, & x \in X_2 = (-1, 1) \end{cases}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(x) \equiv f(-x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse x.
Comportamento agli estremi
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

A causa della divergenza esponenziale il grafico è privo di asintoti obliqui.
I punti $x = \pm 1$ sono di discontinuità di prima specie:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = 1$$

Il salto di discontinuità è:

$$s(-1) = -1, \quad s(1) = 1$$

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1}, & x \in X_1 \\ 0, & x \in X_2 \end{cases} \tag{300}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2e^{x^2-1}\left(1+2x^2\right), & x \in X_1 \\ 0, & x \in X_2 \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \; f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Risulta

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0$$

Si conclude che il grafico volge la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (99).

39 Esercizio 768

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x\theta(\sin x), \tag{301}$$

essendo $\theta(t)$ la funzione gradino unitario:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

***

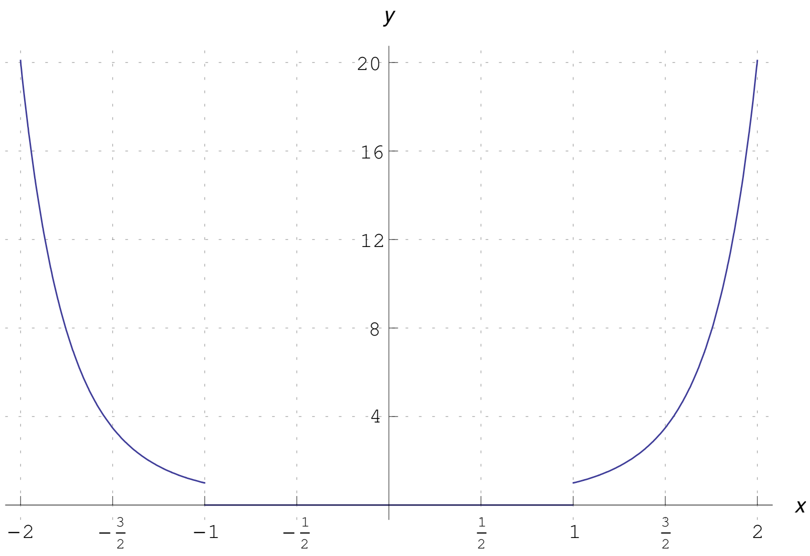


Figura 99: Grafico della funzione $f(x) = e^{x^2-1}\theta(x^2-1)$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Osserviamo che la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$, per cui ci limitiamo all'intervallo $[0, 2\pi]$.

Esplicitiamo il gradino unitario:

$$\theta(\sin x) = \begin{cases} 1, & \sin x \geq 0 \\ 0, & \sin x < 0 \end{cases},$$

cioè:

$$\theta(\sin x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases},$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figura (100)-(101).

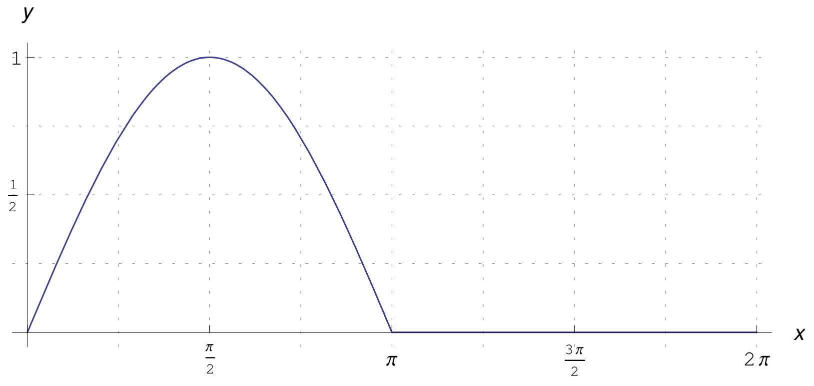


Figura 100: Grafico della funzione $f(x) = \sin x \theta(\sin x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$

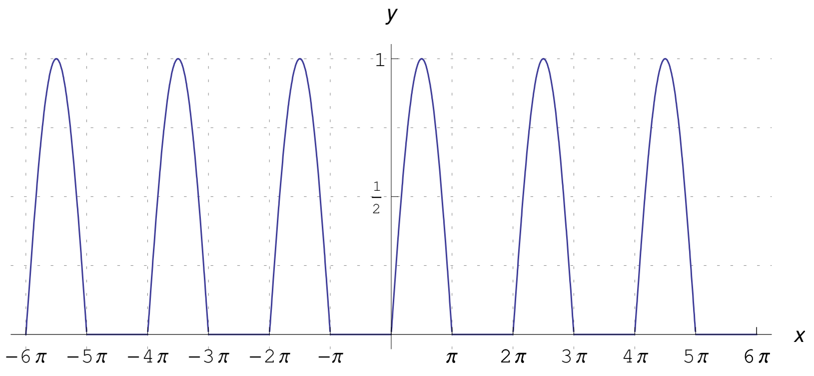


Figura 101: Grafico della funzione $f(x) = \sin x \theta(\sin x)$ nell'intervallo $[-6\pi, 6\pi]$

40 Esercizio 769

Studiare la funzione

$$f(x) = |x| e^{1/|x|} \tag{302}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Per semplificare i calcoli successivi sviluppiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & x \in (0, +\infty) \\ -xe^{1/x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{303}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(x) \equiv f(-x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi
Intersezione con l'asse x

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x, \tag{304}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Intersezione con l'asse y:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Dalla (304) segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0} |x| e^{1/|x|} = 0 \cdot \infty \underset{t=|x|^{-1}}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è una singolarità. L'asse y è un asintoto verticale per il grafico della funzione.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{0^+} = 1^+ \\ n_1 &= \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{1/x} - x \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right) = 0 \cdot \infty \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{t \to 0^+} e^t = 1^+ \end{aligned}$$

Da ciò segue che la retta di equazione:

$$y = x + 1$$

è asintoto obliquo a destra. Dalla simmetria del grafico rispetto all'asse y, segue che la retta:

$$y = -x + 1,$$

è asintoto obliquo a sinistra.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}(x-1)}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ -\frac{e^{-1/x}(x+1)}{x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{305}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{x^3}, & x \in (0, +\infty) \\ -\frac{e^{1/x}}{x^3}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x > 0$ determiniamo gli zeri:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Segno

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$$

Quindi per $x > 0$ la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$, quindi il punto $x = 1$ è di minimo relativo:

$$m(1, e)$$

Procedendo per simmetria, segue che per $x < 0$ la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$ ed è strettamente crescente in $(-1, 0)$, con $x = -1$ punto di minimo relativo:

$$m'(-1, e)$$

Concavità e punti di flesso

Risulta

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0$$

Si conclude che il grafico volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (102).

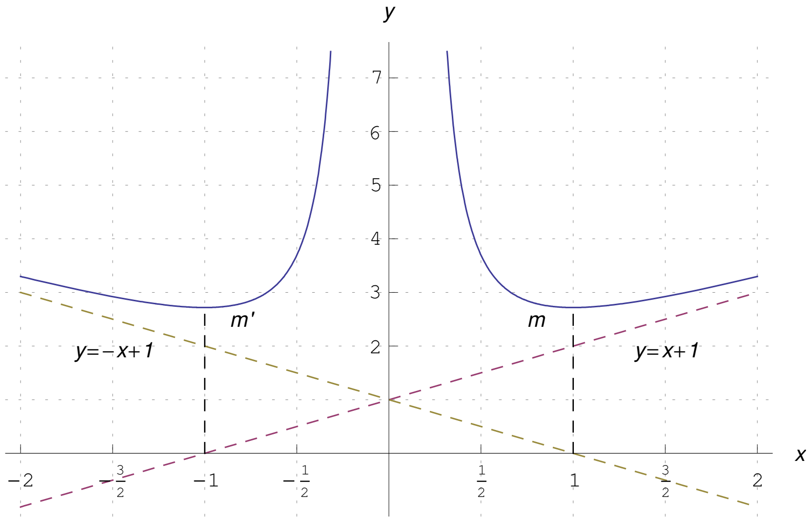


Figura 102: Grafico della funzione $f(x) = |x| e^{1/|x|}$.

41 Esercizio 770

Studiare la funzione

$$f(x) = |x| e^{x} \tag{306}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty, +\infty)$$

Per semplificare i calcoli successivi esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x}, & x \in [0, +\infty) \\ -xe^{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{307}$$

Simmetrie
La funzione non ha parità definita, per cui il grafico non è simmetrico nè rispetto all'asse y e né rispetto all'origine delle coordinate.
Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.

Segno

Risulta:

$$\forall x,\ f(x) \geq 0$$

Segue che il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \cdot \infty = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0,$$

poiché per $x \to -\infty$, e^{-x} è un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Osserviamo che a causa della divergenza esponenziale per $x \to +\infty$, il grafico è privo di asintoto obliquo a destra.

Derivate

$$f'(x) = \begin{cases} e^x (x+1), & x \in [0, +\infty) \\ -e^x (x+1), & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{308}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^x (x+2), & x \in [0, +\infty) \\ -e^x (x+2), & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in [0, +\infty),\ f'(x) > 0$$

Quindi in $[0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente.

Per $x \in (-\infty, 0)$ determiniamo gli zeri di f':

$$f'(x) = 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x = -1$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x \in (-\infty, -1)$$

Quindi in $(-\infty, 0)$ la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ ed è strettamente crescente in $(-1, 0)$. Quindi $x = -1$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(-1, \frac{1}{e}\right)$$

Si osservi che il punto $(0, 0)$ è un punto angoloso del grafico, poiché:

$$f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = 1$$

I due rami del grafico (per $x < 0$ e per $x > 0$) si raccordano in $x = 0$. Tale punto è di continuità per la funzione ma non per la derivata prima.

Concavità e punti di flesso

Per $x > 0$ risulta

$$\forall x \in (0, +\infty) \, , \, f''(x) > 0,$$

donde il grafico volge la concavità verso l'alto in $(0, +\infty)$.

Per $x < 0$, determiniamo prima gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x = -2$$

Il segno è:

$$f''(x) = 0 \underset{x<0}{\Longleftrightarrow} x = x \in (-\infty, -2)$$

Quindi nell'intervallo $(-\infty, 0)$ il grafico volge la concavità verso l'alto per $x \in (-\infty, -2)$, mentre per $x \in (-2, 0)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x = -2$ è un punto di flesso:

$$F\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$$

Si conclude che il grafico volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (103)-(104).

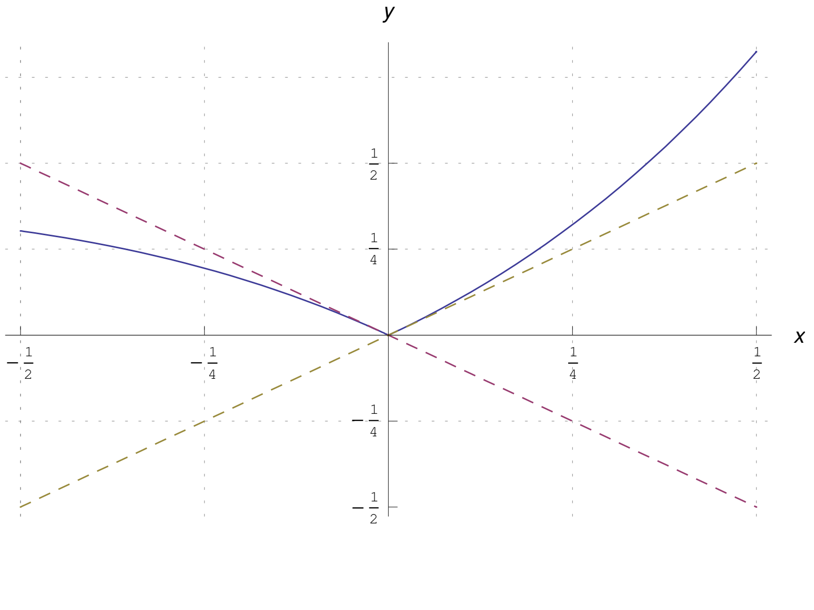


Figura 103: Grafico della funzione $f(x) = |x| e^x$ nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

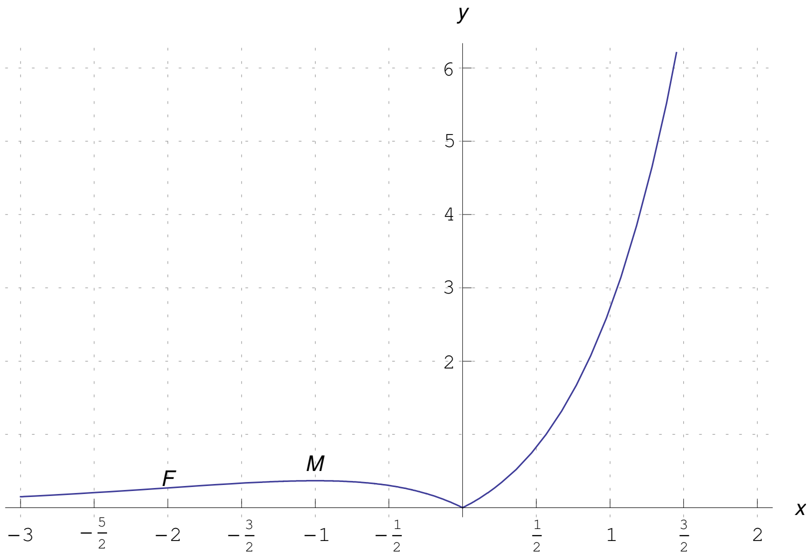


Figura 104: Grafico della funzione $f(x) = |x| e^x$.

42 Esercizio 771

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left(x^2 + x \right) \tag{309}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in x tale che $x^2 + x > 0 \iff x \notin (-1, 0)$, cioè:

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$f(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Quindi:

$$A\left(x_a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0\right), \ B\left(x_b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno
Risulta:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x \notin (x_a, x_b)$$

Segue che per $x \in (-\infty, x_a) \cup (x_b, +\infty)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (x_a, -1) \cup (0, x_b)$ il grafico giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty \Longrightarrow x = -1 \text{ è asintoto verticale a sinistra}$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty \Longrightarrow \text{l'asse } y \text{ è asintoto verticale a destra}$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Derivate

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} \tag{310}$$
$$f''(x) = -\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Dalla prima delle (310) vediamo che la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$.

Concavità e punti di flesso
Riusulta:

$$\nexists x \mid 2x^2 + 2x + 1 = 0,$$

per cui la derivata seconda è priva di zeri. Il segno della derivata seconda è:

$$\forall x \in X, \; f''(x) < 0$$

Quindi il grafico volge sempre la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (105).

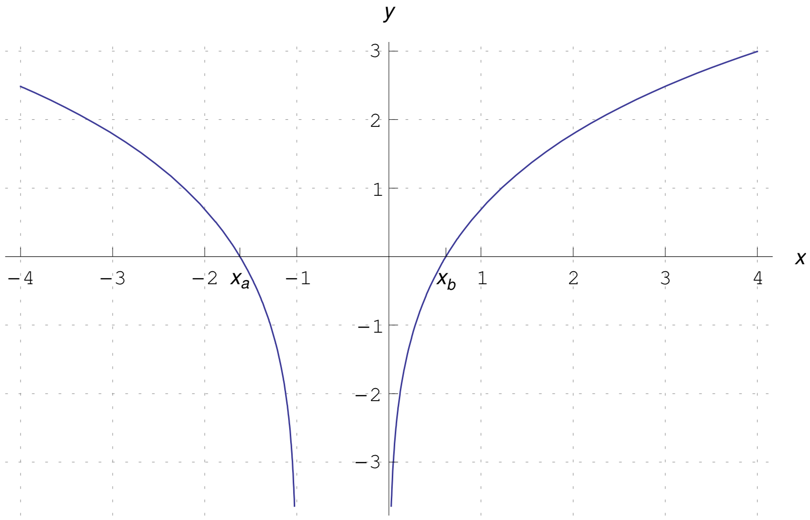


Figura 105: Grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 + x)$

43 Esercizio 772

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 2e^{-2x}}{3} \tag{311}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi
La funzione può essere scritta come:

$$f(x) = \frac{e^{3x} + 2}{3e^{2x}} \tag{312}$$

cioè:

$$\forall x \in X,\ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x, \tag{313}$$

Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow (0,1) \in \gamma \cap y$$

Segno

Dalla (313) segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

A causa della divergenza esponenziale il grafico è privo di asintoti obliqui.
Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - 4e^{-2x}}{3} = \frac{e^{3x} - 4}{3e^{2x}} \\ f''(x) &= \frac{1}{3}\left(8e^{-2x} + e^x\right) = \frac{e^{3x} + 8}{3e^{2x}} \end{aligned} \tag{314}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di f':

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{3x} - 4 = 0 \Longleftrightarrow 3x = 2\ln 2 \Longleftrightarrow x = \frac{2}{3}\ln 2$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}\ln 2, +\infty\right)$$

Quindi la funzione è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\ln 2\right)$ ed è strettamente crescente in $\left(\frac{2}{3}\ln 2, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{2}{3}\ln 2$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(\frac{2}{3}\ln 2, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

Concavità e punti di flesso
Riusulta:

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0$$

Quindi il grafico volge sempre la concavità versol'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (106).

44 Esercizio 773

Studiare la funzione

$$f(x) = 2\sinh\ln|\ln x| + 2(1 - \ln x)\left[1 + sign(\ln x)\right], \tag{315}$$

essendo

$$sign(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

***

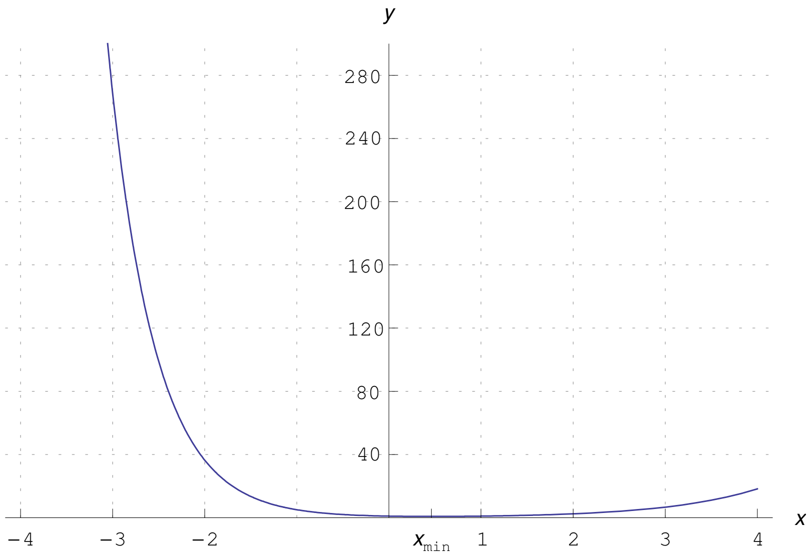


Figura 106: Grafico della funzione $f(x) = \frac{e^x + 2e^{-2x}}{3}$

Soluzione
Insieme di definizione
Esplicitiamo $sign(\ln x)$

$$sign(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, +\infty) \\ -1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Quindi:

$$1 + sign(\ln x) = \begin{cases} 2, & x \in (1, +\infty) \\ 0, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Esplicitiamo ora $\sinh \ln |\ln x|$. A tale scopo poniamo $t = |\ln x|$:

$$\sinh \ln t = \frac{1}{2}\left(e^{\ln t} - e^{-\ln t}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

Quindi:

$$\sinh \ln |\ln x| = \frac{\ln^2 x - 1}{2|\ln x|} = \begin{cases} \frac{1-\ln^2 x}{2\ln x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{1-\ln^2 x}{2\ln x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Perciò la (315) si scrive:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\ln^2 x}{\ln x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{-3\ln^2 x + 4\ln x - 1}{\ln x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

La funzione è definita in $X = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
Intersezioni con gli assi
Per $x \in (0,1)$

$$f(x) = 0 \underset{x \in (0,1)}{\Longleftrightarrow} \ln x = \pm 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Quindi

$$A\left(\frac{1}{e}, 0\right) \in \gamma \cap x, \tag{316}$$

essendo γ il diagramma cartesiano della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Per $x \in (1,+\infty)$

$$f(x) = 0 \underset{x<1}{\Longleftrightarrow} 3\ln^2 x - 4\ln x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{e}, e$$

da ciò segue:

$$B\left(\sqrt[3]{e}, 0\right), C(e,0) \in \gamma \cap x \tag{317}$$

Segno
Per $x \in (0,1)$

$$f(x) > 0 \underset{x \in (0,1)}{\Longleftrightarrow} \frac{1-\ln^2 x}{\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

Quindi in $(0,1)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, mentre per $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Per $x \in (1,+\infty)$

$$f(x) > 0 \underset{x>1}{\Longleftrightarrow} 3\ln^2 x - 4\ln x + 1 < 0 \Longleftrightarrow \ln x > \frac{1}{3}, \ln x < 1 \Longleftrightarrow x \in \left(\sqrt[3]{e}, e\right)$$

Quindi in $(1,+\infty)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\sqrt[3]{e}, e)$, mentre per $x \in (1, \sqrt[3]{e}) \cup (e,+\infty)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln^2 x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \left(\frac{1}{\ln^2 x} - 1\right) = (-\infty)\cdot(-1) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale a destra.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\ln^2 x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3\ln^2 x + 4\ln x - 1}{\ln x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Cioè:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

Perciò il punto $x = 1$ è una singolarità, e la retta $x = 1$ è asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\ln^2 x + 4\ln x - 1}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} -\ln x \left(3 - \frac{4}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui a causa della divergenza logaritmica:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x \left(3 - \frac{4}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}\right)}{x} = -3 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Derivate

Per $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2\ln x}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x}\left(\ln^2 x - 1\right)}{\ln^2 x} \\ &= -\frac{1+\ln^2 x}{x\ln^2 x} \end{aligned}$$

Per $x \in (1,+\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(-6\frac{\ln x}{x} + \frac{4}{x}\right)\ln x - \frac{1}{x}\left(-3\ln^2 x + 4\ln x - 1\right)}{\ln^2 x} \\ &= \frac{1 - 3\ln^2 x}{x\ln^2 x} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1+\ln^2 x}{x\ln^2 x}, & x \in (0,1) \\ \frac{1-3\ln^2 x}{x\ln^2 x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} \tag{318}$$

Passiamo alla derivata seconda. Calcoliamo a parte:

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln^2 x\right) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x$$

Per $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{-2\ln x}{x} \cdot x\ln^2 x - \left(1+\ln^2 x\right) \cdot \left(\ln^2 x + 2\ln x\right)}{x^2\ln^4 x} \\ &= \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{x^2\ln^3 x} \end{aligned}$$

Per $x \in (1,+\infty)$

$$f''(x) = \frac{-6\frac{\ln x}{x} \cdot x \ln^2 x + (1 + 3\ln x)\left(\ln^2 x + \ln x\right)}{x^2 \ln^4 x}$$
$$= \frac{3\ln^3 x - \ln x - 2}{x^2 \ln^3 x}$$

Riassumendo:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}, & x \in (0,1) \\ \frac{3\ln^3 x - \ln x - 2}{x^2 \ln^3 x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \tag{319}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in (0,1)$

$$\forall x \in (0,1), \quad f'(x) < 0,$$

donde la funzione è strettamente decrescente in $(0,1)$.
Per $x \in (1, +\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \underset{x>1}{\Longleftrightarrow} \ln x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow x = e^{1/\sqrt{3}}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \underset{x>1}{\Longleftrightarrow} 3\ln^2 x - 1 < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(1, e^{1/\sqrt{3}}\right)$$

Quindi per $x \in (1, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $\left(1, e^{1/\sqrt{3}}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(e^{1/\sqrt{3}}, +\infty\right)$. Ciò implica che $x = e^{1/\sqrt{3}}$ è punto di massimo relativo:

$$M\left(e^{1/\sqrt{3}}, 4 - 2\sqrt{3}\right)$$

Concavità e punti di flesso
Per $x \in (0,1)$ determiniamo gli zeri della derivata seconda

$$f''(x) = 0 \underset{x\in(0,1)}{\Longleftrightarrow} \ln^3 x + \ln x + 2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\ln^2 x - \ln x + 2\right)(\ln x + 1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \ln x = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e},$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \underset{x\in(0,1)}{\Longleftrightarrow} \frac{\ln^3 x + \ln x + 2}{\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

donde per $x \in (0,1)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, mentre in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x = \frac{1}{e}$ è punto di flesso, onde ridefiniamo il punto (316):

$$F\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

Per $x \in (1, +\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \underset{x>1}{\iff} 3\ln^3 x - \ln x - 2 = 0 \iff \left(3\ln^2 x + 3\ln x + 2\right)(\ln x - 1) = 0$$
$$\ln x = 1 \iff x = e$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \underset{x>1}{\iff} \ln x - 1 > 0 \iff x \in (e, +\infty)$$

Quindi per $x \in (1, +\infty)$ il grafico volge la concavità verso l'alto in $(e, +\infty)$, mentre volge la concavità verso il basso in $(1, e)$.

il punto $x = e$ è punto di flesso, onde ridefiniamo il punto C (eq. 317).

$$F'(e, 0)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (107).

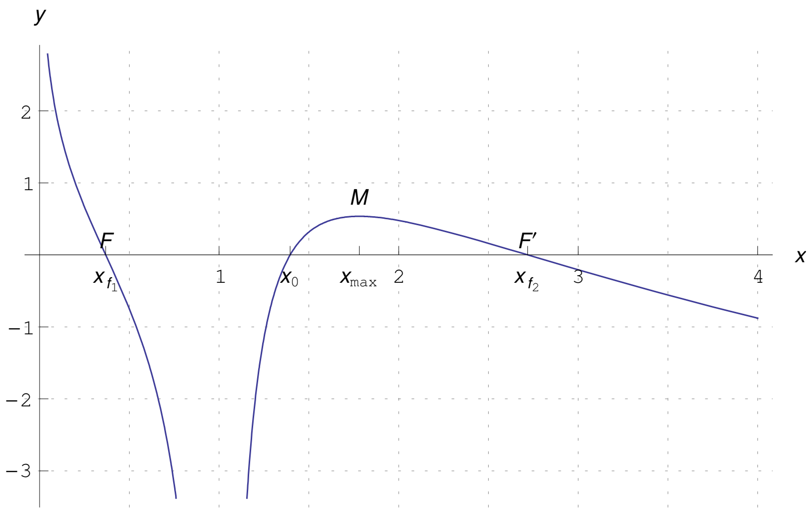


Figura 107: Grafico della funzione $f(x) = 2\sinh \ln|\ln x| + 2(1 - \ln x)[1 + sign(\ln x)]$

45 Esercizio 774

Studiare la funzione

$$f(x) = |\ln|x|| \tag{320}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Esplicitiamo il valore assoluto della funzione $\log |x|$:

$$f(x) = \ln |x| \Longleftrightarrow \ln |x| \geq 0 \Longleftrightarrow |x| \geq 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$
$$f(x) = -\ln |x| \Longleftrightarrow \ln |x| < 0 \Longleftrightarrow |x| < 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1)$$

Cioè:

$$f(x) = \begin{cases} \ln |x|, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -\ln |x|, & x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{321}$$

Esplicitiamo $\ln |x|$:

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, +\infty) \\ \ln(-x), & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{322}$$

Tenendo conto delle (322), l'espressione analitica (321) diviene:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & [1, +\infty) \\ \ln(-x), & x \in (-\infty, -1] \\ -\ln x, & x \in (0, 1) \\ -\ln(-x), & x \in (-1, 0) \end{cases} \tag{323}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(x) \equiv f(-x) \Longrightarrow$ il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln |x| = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow A(-1, 0), B(1, 0) \in \gamma \cap x, \tag{324}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno

$$\forall x \in X, f(x) \geq 0$$

Quindi γ giace nel semipiano $y \geq 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\lim_{x \to 0^+} \ln x = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

Cioè:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale a sinistra e a destra.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln |x| = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui a causa della divergenza logaritmica:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Derivate
Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup [1, +\infty) \\ -\frac{1}{x}, & x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
La funzione è strettamente crescente in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

$$\begin{aligned} x &= -1 \text{ è punto di minimo relativo} \\ x &= 1 \text{ è punto di minimo relativo} \end{aligned}$$

Si noti che in $x = \pm 1$ la funzione non è derivabile, risultando:

$$\begin{aligned} f_-(-1) = -1, \ \ f'_+(-1) = 1 \\ f_-(1) = -1, \ \ f'_+(1) = 1 \end{aligned}$$

Quindi i punti A e B (eq. 324) sono punti angolosi.
Concavità e punti di flesso
Il grafico volge sempre la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (108).

46 Esercizio 775

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left(e^x - e^{-x} \right) \tag{325}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per $x \in \mathbb{R} \mid e^x - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x > 0$, quindi:

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

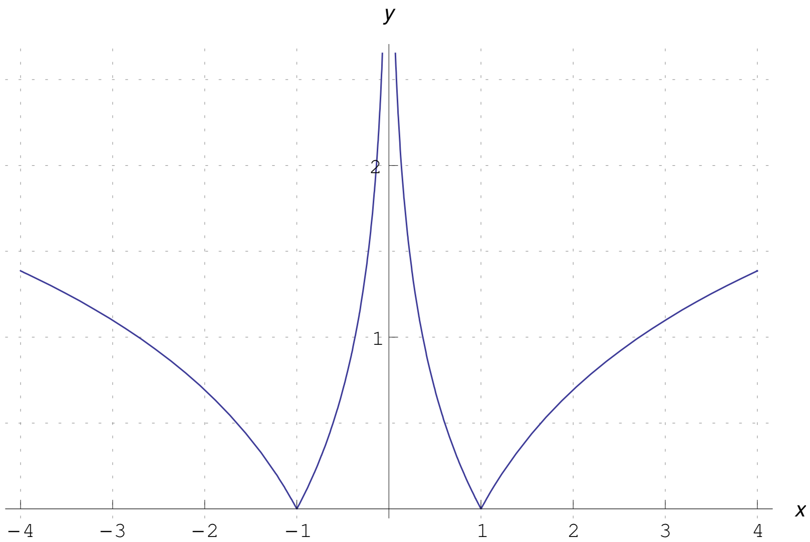


Figura 108: Grafico della funzione $f(x) = |\ln|x||$

$$f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} - 1 = 0 \iff \frac{e^{2x} - e^x - 1}{e^x} = 0$$
$$\iff e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\implies A\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno

$$f(x) > 0 \iff e^{2x} - e^x - 1 > 0 \iff x \in \left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

Quindi per $x \in \left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ γ giace nel semipiano $y \geq 0$, mentre per $x \in \left(0, \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale a destra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ricerca degli asintoti obliqui

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \\
n &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(e^x - e^{-x}\right) - \ln e^x\right] \\
&= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} = \ln 1 = 0
\end{aligned}$$

Perciò la retta di equazione:

$$y = x$$

è asintoto obliquo a destra.
Derivate

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \tag{326}$$

$$f''(x) = -\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x} - 1\right)^2} \tag{327}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f''(x) < 0$$

Il grafico volge sempre la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (109).

47 Esercizio 776

Studiare la funzione

$$f(x) = \tan(\arcsin x) \tag{328}$$

***

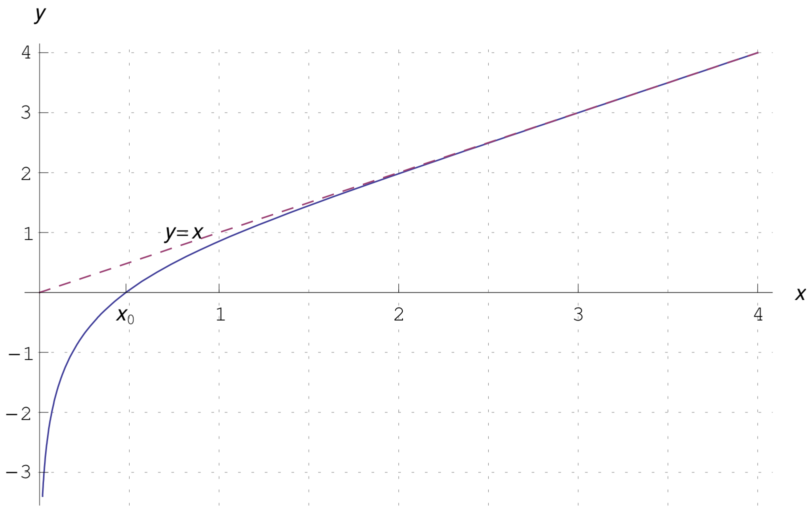


Figura 109: Grafico della funzione $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere:

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ \arcsin x \neq \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$X = (-1, 1)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \arcsin x = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arcsin x > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, 1)$$

Quindi per $x \in (0, 1)$ γ giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (-1, 0)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = +\infty$$

Abbiamo perciò due asintoti verticali: $x = -1$ e $x = 1$.
Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(\arcsin x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \\ f''(x) &= \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}} \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X,\ f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Il grafico volge sempre la concavità verso l'alto per $x \in (0,1)$, mentre per $x \in (-1,0)$ volge la concavità verso il basso. Il punto $x = 0$ è punto di flesso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (110).

48 Esercizio 777

Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in [0,+\infty) \\ |1+x| - 1, & x \in (-\infty,0) \end{cases} \tag{329}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (-\infty,+\infty)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto. Osserviamo che:

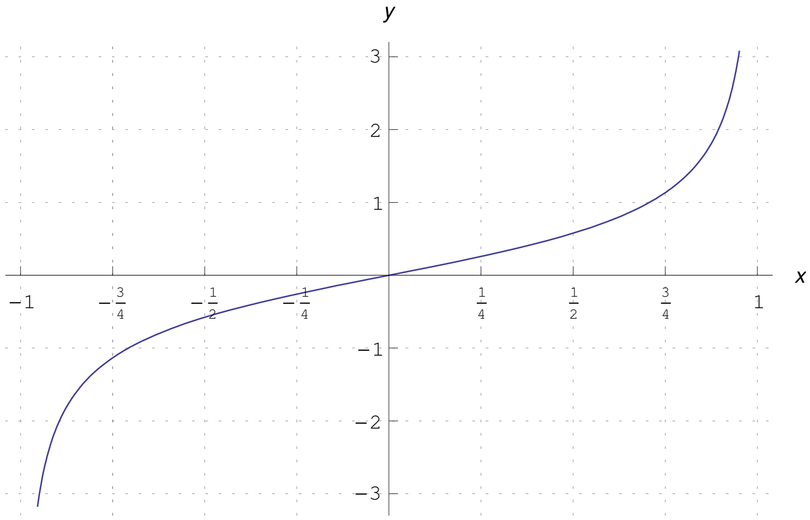


Figura 110: Grafico della funzione $f(x) = \tan(\arcsin x)$

$$|1+x| - 1 = \begin{cases} x, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in [0, +\infty) \\ x, & x \in [-1, 0) \\ -(x+2), & x \in (-\infty, 1) \end{cases} \tag{330}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Quindi per $x \in (0, +\infty)$ γ giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (-\infty, 0)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
Studiamo la funzione solo in $[0, +\infty)$, giacchè per $x < 0$ si tratta di un andamento lineare.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui

Derivate

$$x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$x \geq 0 \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
In $(0,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente. Il punto $(-1,1)$ è un punto angoloso:

$$f'_{-}(-1) = -1, \ f'_{+}(-1) = 1$$

Si noti che l'altro punto di raccordo $x = 0$ non è angoloso:

$$f'_{-}(1) = f'_{+}(1) = 1$$

Concavità e punti di flesso
In $(0,+\infty)$ il grafico volge la concavità verso l'alto
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (111).

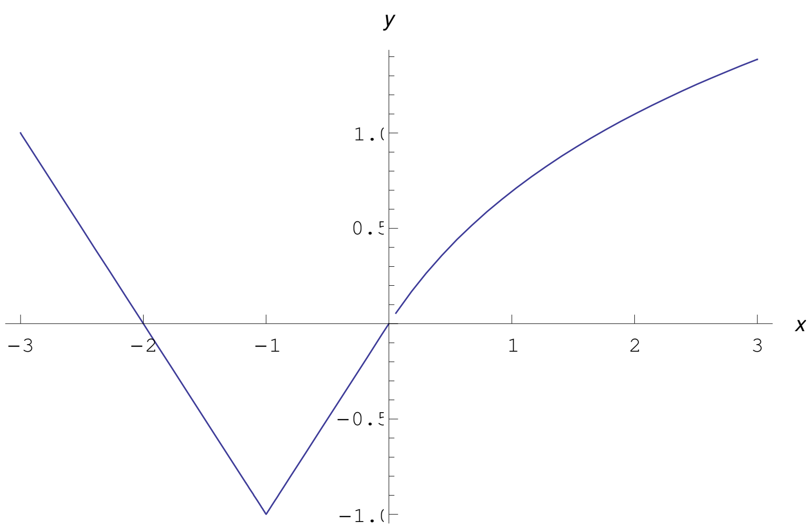


Figura 111: Grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in [0,+\infty) \\ |1+x|-1, & x \in (-\infty,0) \end{cases}$

49 Esercizio 778

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \tag{331}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

Conviene riscrivere la funzione nella forma:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \tag{332}$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1, 0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, 1)$$

Quindi per $x \in (0, 1)$ γ giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (1, +\infty)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Perciò l'asse y è asintoto verticale a sinistra.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

Quindi la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale a destra.
Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \\ f''(x) &= \frac{3}{4\sqrt{x^5}} \end{aligned} \tag{333}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f''(x) > 0$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato in figura (112).

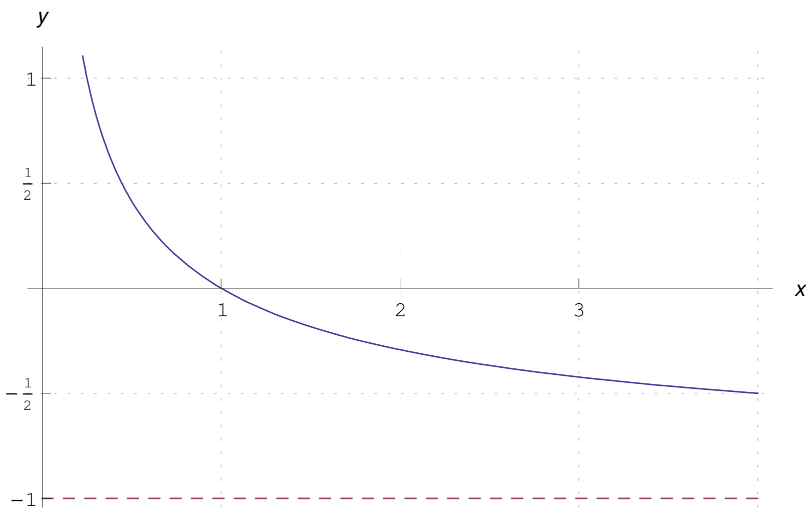


Figura 112: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

50 Esercizio 779

Studiare la funzione

$$f(x) = (2x - 1) \ln |2x - 1| + 2x \ln x - 4x + 4 \tag{334}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere:

$$\begin{cases} |2x-1| \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$X = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1)\ln(1-2x) + 2x\ln x - 4x + 4, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ (2x-1)\ln(2x-1) + 2x\ln x - 4x + 4, & x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \tag{335}$$

Intersezioni con gli assi
Tralasciamo l'eventuale interesezione con l'asse x.

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left[(2x-1)\ln(1-2x) + 2x\ln x - 4x + 4\right] \\ &= -1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}_{=0} + 4 = 4, \end{aligned}$$

quindi il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \left[(2x-1)\ln(2x-1)\right]}_{=l} + 2 - \ln 2$$

Calcoliamo:

$$l = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \left[(2x-1)\ln|2x-1|\right],$$

eseguendo il cambio di variabile:

$$t = 2x - 1$$

Quindi:

$$l = \lim_{x\to 0^+} t\ln t = \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = 0, \tag{336}$$

giacchè $\ln t$ è, per $x \to 0^+$, un infinito di ordine infinitamente piccolo. Il risultato (336) implica:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = 2 - \ln 2$$

Passiamo all'altro limite:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \left[(2x-1)\ln(1-2x)\right]}_{=l'} + 2 - \ln 2$$

Calcoliamo:

$$l' = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2x-1)\ln(1-2x) = 0,$$

procedendo come sopra tramite cambio di variabile

$$t' = 1 - 2x$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 2 - \ln 2$$

Cioè il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di disconinuità eliminabile.
Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left[(2x-1)\ln(2x-1) + 2x\ln x - 4x + 4\right] = \infty - \infty \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2x-1}{x}\ln(2x-1) + 2\ln x - 4 + \frac{4}{x}\right] \\
&= (+\infty)\left[1\cdot(+\infty) + (+\infty) - 4 + 0\right] = +\infty
\end{aligned}$$

Eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x-1}{x}\ln(2x-1) + 2\ln x - 4 + \frac{4}{x}\right] = +\infty,$$

per cui non esiste asintoto obliquo.
Derivate

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} 2\left[\ln(2x-1) + \ln x\right], & x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ 2\left[\ln(1-2x) + \ln x\right], & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \\
f''(x) &= 2\frac{1-4x}{x-2x^2}
\end{aligned} \tag{337}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln\left(x - 2x^2\right) = 0 \Longleftrightarrow -2x^2 + x - 1 = 0$$

Ma $-2x^2+x-1 = 0$ è priva di soluzioni nel campo reale, per cui $f'(x) \neq 0$. In particolare per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ è $f'(x) < 0$, per cui la funzione è ivi strettamente decrescente.

Per $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$:

$$f'(x) = 2\ln[x(2x-1)] = 2\ln\left(2x^2 - x\right)$$

Determiniamo gli zeri:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \underset{x>\frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} x = 1$$

Segno di f'

$$f'(x) > 0 \underset{x>\frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} x > 1,$$

donde per $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Il punto $x = 1$ è punto di minimo relativo:

$$m(1, 0)$$

Comportamento della derivata intorno alle discontinuità eliminabili.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f'(x) = 2 \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} [\ln(2x-1) + \ln x] = -\infty$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f'(x) = 2 \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} [\ln(1-2x) + \ln x] = -\infty$$

Ciò implica:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Pertanto $P\left(\frac{1}{2}, 2 - \ln 2\right)$ è un punto cuspidale.
Passiamo a $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2 \lim_{x \to 0^+} [\ln(1-2x) + \ln x] = -\infty$$

La curva $y = f(x)$ "parte" dal punto $x = 0$ con tangente verticale orientata verso il basso.

Concavità e punti di flesso

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se e solo se $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Viceversa, per $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ il grafico volge la concavità verso il basso. Il punto $x = \frac{1}{4}$ è di flesso:

$$F\left(\frac{1}{4}, 3 - \ln\sqrt{2}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato in figura (113).

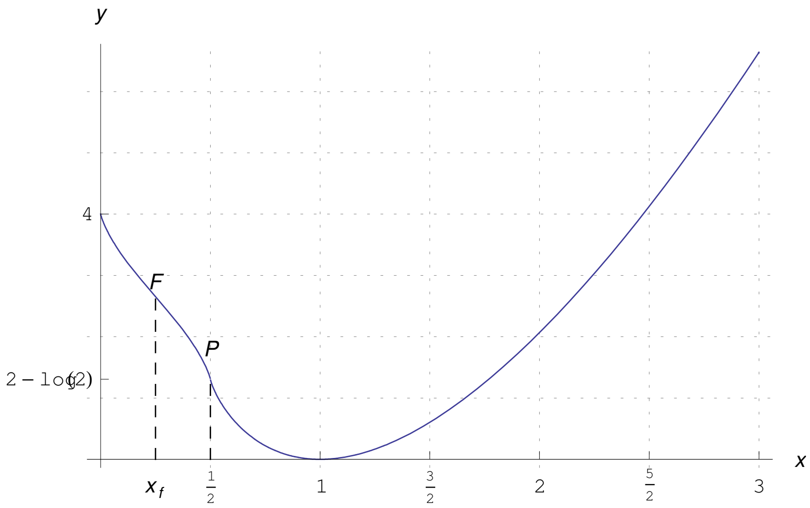


Figura 113: Grafico della funzione $f(x) = (2x-1)\ln|2x-1| + 2x\ln x - 4x + 4$

51 Esercizio 781

Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \tag{338}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Deve essere:

$$\frac{1-x}{1+x} \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1,$$

per cui:

$$X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} = -1 \\ \frac{1-x}{1+x} = -1 \end{cases}$$

La prima ci dà:

$$\frac{x}{x+1}=0\Longrightarrow x=0$$

La seconda è priva di soluzioni:

$$\frac{1-x}{1+x}=-1\Longleftrightarrow\frac{2}{1+x}=0$$

Quindi:

$$(0,0)\in\gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Segno della funzione

$$\begin{aligned}f(x)>0&\Longleftrightarrow\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>0\\&\Longleftrightarrow\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1-x}{1+x}>1\\\frac{1-x}{1+x}<-1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{1-x}{1+x}>1\Longleftrightarrow\frac{x}{1+x}<0\Longleftrightarrow x\in S_1=(-1,0)$$

Risolviamo la seconda:

$$\frac{1-x}{1+x}<-1\Longleftrightarrow 1+x<0\underset{x\in X}{\Longleftrightarrow}x\in S_2=(-\infty,-1)\cup(-1,0)$$

Quindi:

$$f(x)>0\Longleftrightarrow x\in S=S_1\cup S_2=(-\infty,-1)\cup(-1,0)$$

Da ciò segue che per $x\in S$ il grafico giace nel semipiano $y<0$, mentre per $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, il grafico giace nel semipiano $y>0$.

Comportamento agli estremi

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1-x}{1+x}, & x\in(-1,1]\\\frac{x-1}{x+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{array}\right.$$

Quindi, ricordando che deve essere $x\neq-1$:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{x-1}{x+1}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right), & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\\frac{1-x}{1+x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right), & x\in(-1,1)\end{array}\right.$$

Comportamento in un intorno del punto di accumulazione $x=1$:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{-2}{0^-}\ln\left(\frac{-2}{0^-}\right)=(+\infty)\ln(+\infty)=+\infty\tag{339}$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=(+\infty)\ln(+\infty)=+\infty$$

Le (339) implicano:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \tag{340}$$

La (340) implica che $x = -1$ è un punto di discontinuità di seconda specie (punto di infinito). Geometricamente si ha che la retta $x + 1 = 0$ è asintoto verticale del grafico $y = f(x)$ sia a sinistra che a destra.

Studiamo ora il comportamento in un intorno del punto di accumulazione $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \cdot \infty$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$1 - x = t \Longrightarrow \left(x \to 1^- \Longrightarrow \begin{cases} t \to 0^+ \\ \frac{1-x}{1+x} = \frac{t}{2-t} \end{cases} \right)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t-2} \ln \frac{t}{t-2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t-2} \left[\ln t - \ln(2-t) \right] \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{t \ln t}{t-2} - \lim_{t \to 0^+} \frac{t \ln(2-t)}{2-t} = 0, \end{aligned}$$

giacchè:

$$\lim_{t \to 0^+} t \ln t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = 0 \quad \text{(confronto tra infiniti)}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t \ln(2-t)}{2-t} = \frac{0^+ \cdot \ln 2}{2^-} = 0^-$$

In maniera simile:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \lim_{x \to 1^+} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0^-$$

Precisamente, eseguendo il cambio di variabile:

$$x - 1 = t \Longrightarrow \left(x \to 1^+ \Longrightarrow \begin{cases} t \to 0^+ \\ \lim_{x \to 1^+} = \frac{t}{2+t} \end{cases} \right)$$

Da ciò segue:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0^-$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Comportamento all'infinito: la funzione è manifestamente infinitesima all'infinito, poiché:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

Tenendo conto del segno della funzione:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$$

Si conclude che l'asse x è asintoto orizzontale.

Derivate

Per facilitare i calcoli, poniamo:

$$\phi(x) = \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow \phi'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x)\ln[\phi(x)], & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ -\phi(x)\ln[-\phi(x)], & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Per $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \phi'(x)\ln[\phi(x)] + \phi(x)\frac{d}{dx}\ln[\phi(x)] \\ &= \frac{2}{(x+1)}\left[1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] \end{aligned}$$

Per $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\phi'(x)\ln[-\phi(x)] - \phi(x)\frac{d}{dx}\ln[-\phi(x)] \\ &= -\phi'(x)\ln[-\phi(x)] - \phi(x)\left(-\frac{1}{\phi(x)}\right)(-\phi'(x))\cdot(-1) \\ &= -\frac{2}{(x+1)^2}\left[1+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)}\left[1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right], & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ -\frac{2}{(x+1)^2}\left[1+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right], & x \in (-1,1) \end{cases} \tag{341}$$

Procedendo in maniera simile per la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -4\frac{\left[x-2+(x-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]}{(x-1)(x+1)^3}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ 4\frac{\left[x-2+(x-1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]}{(x-1)(x+1)^3}, & x \in (-1,1) \end{cases} \tag{342}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \in X_1 = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -1 \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{e} \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{e+1}{e-1} \end{aligned}$$

Segno

$$f'(x)>0 \underset{x\in X_1}{\iff} \frac{x-1}{x+1}>\frac{1}{e} \underset{x\in X_1}{\iff} x>\frac{e+1}{e-1}$$

Da ciò segue che per $x\in X_1$ la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{e+1}{e-1},+\infty\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(1,\frac{e+1}{e-1}\right)$. Quindi $x_{\min}=\frac{e+1}{e-1}$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(\frac{e+1}{e-1},-\frac{1}{e}\right)$$

Per $x\in X_2=(-1,1)$ determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\iff \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-1\iff\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{e}\\ &\iff x=\frac{e-1}{e+1}=\frac{1}{x_{\min}}\end{aligned}$$

Segno

$$f'(x)>0 \underset{x\in X_2}{\iff} \frac{1-x}{1+x}>\frac{1}{e}\iff x\in\left(-1,\frac{1}{x_{\min}}\right)$$

Da ciò segue che per $x\in X_2$ la funzione è strettamente crescente in $\left(-1,\frac{1}{x_{\min}}\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{x_{\min}},1\right)$. Quindi $x'_{\min}=x_{\min}^{-1}$ è punto di minimo relativo:

$$m'\left(\frac{e-1}{e+1},-\frac{1}{e}\right)$$

Ora studiamo il comportamento della derivata in un intorno della discontinuità eliminabile $x=1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-}f'(x)&=\lim_{x\to-1^-}\frac{2}{(x+1)}\left[1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty\\ \lim_{x\to-1^+}f'(x)&=\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{(x+1)}\left[1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty\end{aligned}$$

Ciò implica che se prolunghiamo per continuità la funzione nel punto $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|, & x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\{-1\}\end{cases},$$

la funzione risulta comunque non derivabile nel punto $x=0$, poichè

$$f'_-(-1)=+\infty,\quad f'_+(-1)=-\infty$$

Pertanto $P(1,0)$ è un punto cuspidale.

Concavità e punti di flesso

La determinazione degli zeri della derivata seconda richiede una soluzione per via grafica o numerica.

Per $x\in X_1$

$$f''(x) = 0 \underset{x \in X_1}{\iff} x = \alpha \simeq 3.4643$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \underset{x \in X_1}{\iff} x \in (-\infty, -1) \cup (\alpha, +\infty)$$

Quindi per $x \in X_1$ il grafico volge la concavità verso l'alto se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (\alpha, +\infty)$. Viceversa, per $x \in (0, \alpha)$ il grafico volge la concavità verso il basso. Il punto $x = \alpha$ è di flesso:

$$F(\alpha, f(\alpha))$$

Per $x \in X_2$ procedendo in maniera simile, vediamo che $f''(x) > 0$ donde il grafico è ivi concavo verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (114)-(115).

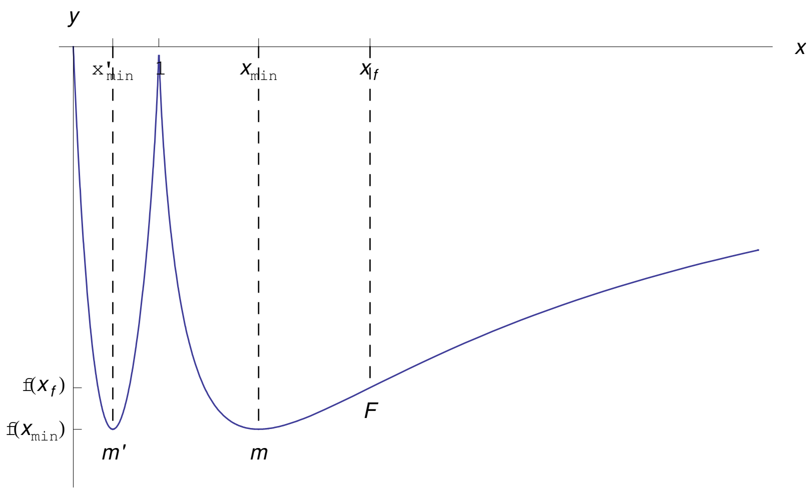


Figura 114: Grafico della funzione $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ in $(0, 8)$.

52 Esercizio 783

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan x^x \tag{343}$$

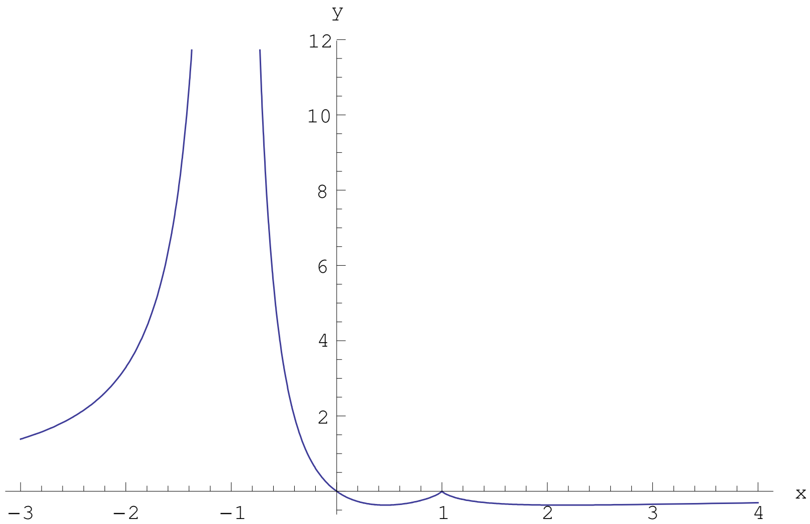


Figura 115: Grafico della funzione $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \ln \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \tag{344}$$

Quindi:

$$\nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno della funzione
In forza della (360) segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^0 \tag{345}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, calcoliamo dapprima $\lim_{x\to 0^+} x^x$, scrivendo:

$$x^x = e^{x\ln x},$$

quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0^-,$$

per cui:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1^- \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \arctan 1^- = \frac{\pi}{4}^-$$

Ciò implica che $x=0$ è una discontinuità eliminabile. Possiamo prolungare per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x^x, & x>0 \\ \frac{\pi}{4}, & x=0 \end{cases} \tag{346}$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x^x = \arctan\left(\lim_{x\to+\infty} x^x\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-$$

Pertanto la retta di equazione $2y-\pi=0$ è asintoto orizzontale a destra.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^x(\ln x+1)}{1+x^{2x}} \\ f''(x) &= \frac{x^{x-1}\left[1+x+x^{2x}-x^{1+2x}-2x\left(x^{2x}-1\right)\ln x - x\left(x^{2x}-1\right)\ln^2 x\right]}{\left(1+x^{2x}\right)^2} \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \ln x+1=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Segno

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. Quindi $x_{\min}=\frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(\frac{1}{e}, \arctan\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$$

Ora studiamo il comportamento della derivata in un intorno destro di $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

Cioè la curva $y = f(x)$ parte dal punto $x = 0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.

Concavità e punti di flesso

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = \alpha \simeq 1.3785$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (0, \alpha)$$

donde il grafico volge la concavità verso l'alto in $(0, \alpha)$, mentre in $(\alpha, +\infty)$ volge la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (116)

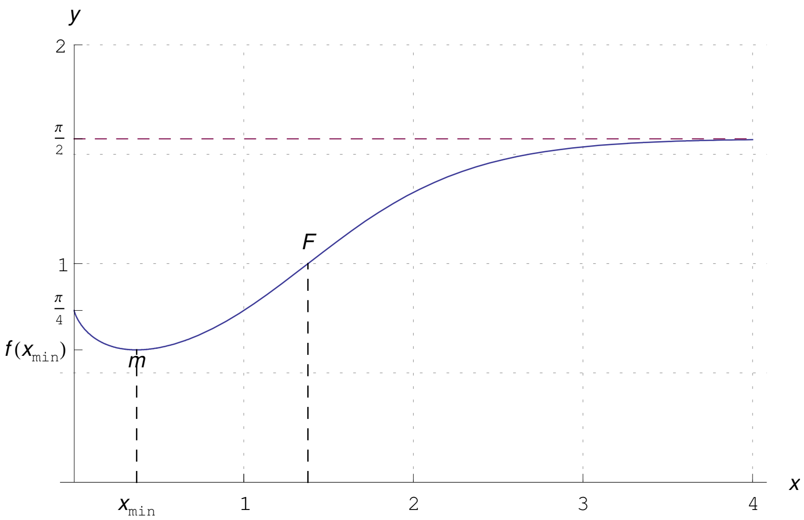


Figura 116: Grafico della funzione $f(x) = \arctan x^x$

53 Esercizio 784

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x^x \tag{347}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

La funzione non è periodica:

$$f(x + 2k\pi) \neq f(x)$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^x = k\pi \quad (348)$$

Questa equazione va risolta per via grafica, ricercando le ascisse dei punti di intersezione della curva $y = x^x$ con le rette $y = k\pi$, con $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, come riportato in figura 117.

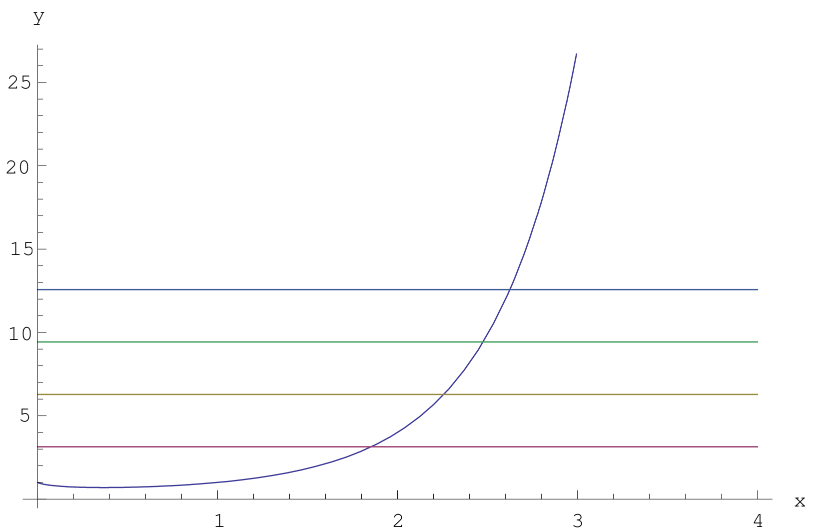


Figura 117: Intersezione della curva $y = x^x$ con le rette $y = k\pi$ per alcuni valori di k.

Le radici sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico della funzione con l'asse x.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^0 \quad (349)$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, calcoliamo dapprima $\lim_{x \to 0^+} x^x$, scrivendo:

$$x^x = e^{x \ln x},$$

quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0^-,$$

per cui:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1^- \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = (\sin 1)^-$$

Ciò implica che $x = 1$ è una discontinuità eliminabile. Possiamo prolungare per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x^x, & x > 0 \\ \sin 1, & x = 0 \end{cases} \tag{350}$$

Comportamento all'infinito:

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Cioè la funzione è non regolare all'infinito.
Pertanto la retta di equazione $2y - \pi = 0$ è asintoto orizzontale a destra.
Derivate
Derivata prima

$$f'(x) = x^x \cos(x^x)(1 + \ln x)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Un punto di estremo relativo si ottiene risolvendo l'equazione (ricerca degli zeri di f'):

$$1 + \ln x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Lo studio del segno di f' implica che $x = e^{-1}$ è un punto di minimo relativo.
I rimanenti punti di estremi si ottengono dall'andamento della funzione sin. Precisamente:i punti di massimo relativo sono le soluzioni dell'equazione:

$$x^x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{N},$$

che va risolta per via grafica o numerica.
I punti di minimo relativo sono invece le radici dell'equazione:

$$x^x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

e anche questa va risolta per via grafica, con lo stesso procedimento riportato in figura 117, in cui vediamo che nel caso degli zeri, le soluzioni si addensano al crescere di x.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (118)

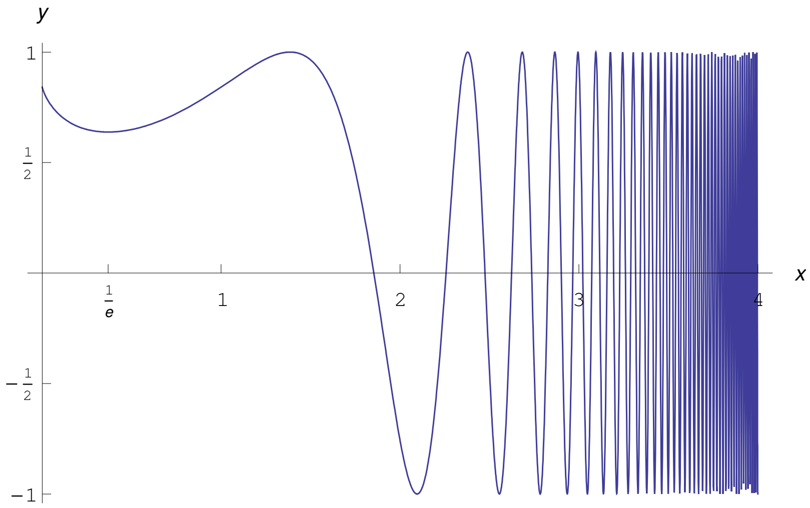


Figura 118: Grafico della funzione $f(x) = \sin x^x$

54 Esercizio 785

Studiare la funzione

$$f(x) = x^{1/x} \tag{351}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0 \tag{352}$$

Quindi:

$$\nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno della funzione
In forza della (352) segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/x} = 0^+ \tag{353}$$

Ciò implica che $x = 0$ è una discontinuità eliminabile. Possiamo prolungare per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{354}$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = \infty^0$$

Per rimuovere tale forma indeterminata scriviamo:

$$f(x) = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Perciò cacoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Pertanto la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -x^{\frac{1-2x}{x}} (\ln x - 1)$$
$$f''(x) = x^{\frac{1-4x}{x}} \left(1 - 3x + 2(x-1)\ln x + \ln^2 x\right)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = e$$

Segno

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, e)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(0, e)$, mentre è strettamente decrescente in $(e, +\infty)$. Quindi $x_{\max} = e$ è punto di minimo relativo:

$$m\left(e, e^{1/e}\right)$$

Ora studiamo il comportamento della derivata in un intorno destro di $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1-2x}{x}} (\ln x - 1) = 0^+$$

Cioè la curva $y = f(x)$ parte dal punto $x = 0$ con tangente orizzontale.

Concavità e punti di flesso

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha \simeq 0.5819$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \alpha)$$

donde il grafico volge la concavità verso l'alto in $(0, \alpha)$, mentre in $(\alpha, +\infty)$ volge la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (119)

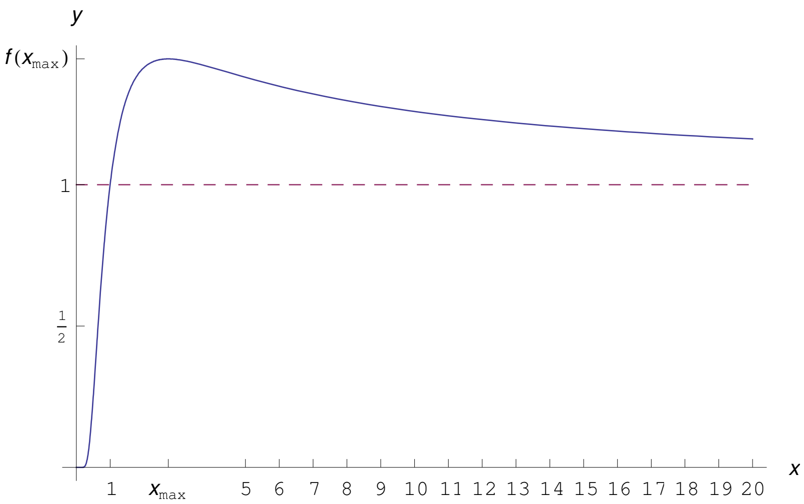


Figura 119: Grafico della funzione $f(x) = x^{1/x}$

55 Esercizio 786

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + |x^2 - x|}} \tag{355}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Conviene esplicitare subito il valore assoluto:

$$\left|x^2-x\right| = \begin{cases} x^2-x, & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty) \\ x-x^2, & x\in(0,1) \end{cases}$$

Quindi:

$$\sqrt{x+|x^2-x|} = \begin{cases} \sqrt{x^2}=|x|\,, & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty) \\ \sqrt{2x-x^2}, & x\in(0,1) \end{cases} \tag{356}$$

Esplicitiamo il valore assoluto in (356):

$$\sqrt{x+|x^2-x|} = \begin{cases} -x, & x\in(-\infty,0] \\ x, & x\in[1,+\infty) \\ \sqrt{2x-x^2}, & x\in(0,1) \end{cases} \tag{357}$$

A questo punto dobbiamo imporre $x\neq 0$, quindi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x\in(-\infty,0) \\ \frac{1}{x}, & x\in(0,+\infty) \\ \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, & x\in(0,1) \end{cases} \tag{358}$$

Da ciò segue che l'insieme di definizione è:

$$X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \tag{359}$$

Intersezioni con gli assi
Risulta:

$$\forall x\in X,\ f(x)>0 \tag{360}$$

Quindi:

$$\nexists P\in\gamma\cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0=x\notin X \Longrightarrow \nexists P\in\gamma\cap y$$

Segno della funzione
In forza della (360) segue che il grafico giace nel semipiano $y>0$.
Comportamento agli estremi
Siccome il grafico di $\pm x^{-1}$ è banale, studiamo la funzione in $(0,1)$:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}},\ \ x\in(0,1)$$

Comportamento in un intorno destro di $x=0$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty, \tag{361}$$

per cui l'asse y è asintoto verticale sia a destra che a sinistra, giacché per $x \to 0^-$, si ha $-\frac{1}{x} \to +\infty$. Il punto $x = 1$ è di continuità sia a sinistra che a destra:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \tag{362}$$

Derivate
Per quanto detto, ci limitiamo all'intervallo aperto $(0, 1)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x - x^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(2x - x^2\right)^{-3/2}(2 - 2x) \\
&= \frac{x - 1}{\sqrt{\left(2x - x^2\right)^3}} \\
f''(x) &= \frac{d}{dx}\frac{x - 1}{\left(2x - x^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\left(2x - x^2\right)^{3/2} - (x - 1) \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(2x - x^2\right)^{1/2}(2 - 2x)}{\left(2x - x^2\right)^3} \\
&= \left(2x - x^2\right)^{3/2} \frac{2x - x^2 + 3(x - 1)^2}{\left(2x - x^2\right)^3} \\
&= \frac{2x^2 - 4x + 3}{\sqrt{\left(2x - x^2\right)^5}}
\end{aligned}$$

Riassumendo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x - 1}{\sqrt{\left(2x - x^2\right)^3}} \\
f''(x) &= \frac{2x^2 - 4x + 3}{\sqrt{\left(2x - x^2\right)^5}}
\end{aligned} \tag{363}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in (0, 1), \quad f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in $(0, 1)$.
Ora studiamo il comportamento della derivata in un intorno di $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{\left(2x - x^2\right)^3}} = 0^-$$

Per $x > 1$ è $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, quindi:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2} = -1$$

Si conclude che il punto $x = 1$ è di raccordo per la funzione, cioè è di continuità per la funzione, ma non lo è per la derivata prima. Più precisamente, la funzione non è derivabile in $x = 1$ ma lo è a sinistra e a destra, risultando:

$$f'_-(-1) = 0, \quad f'_+(1) = -1$$

Quindi il punto $P(1,1)$ del diagramma cartesiano è un punto angoloso. Scriviamo le equazioni delle semirette tangenti τ_- e τ_+ a sinistra e a destra in $x = 1$:

$$\begin{aligned} \tau_-) &\quad y = 1 \\ \tau_+) &\quad \tau = -x + 2 \end{aligned}$$

Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in (0,1), \quad f''(x) > 0,$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto in $(0,1)$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (120)- (121)

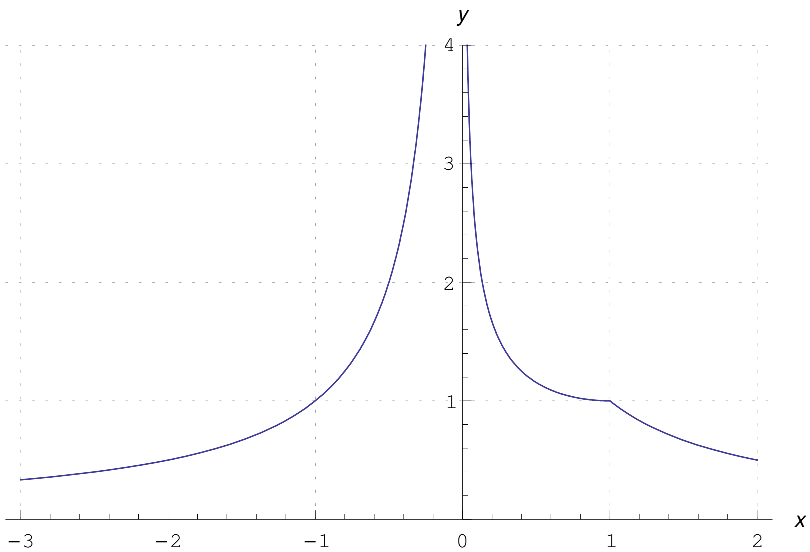


Figura 120: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$

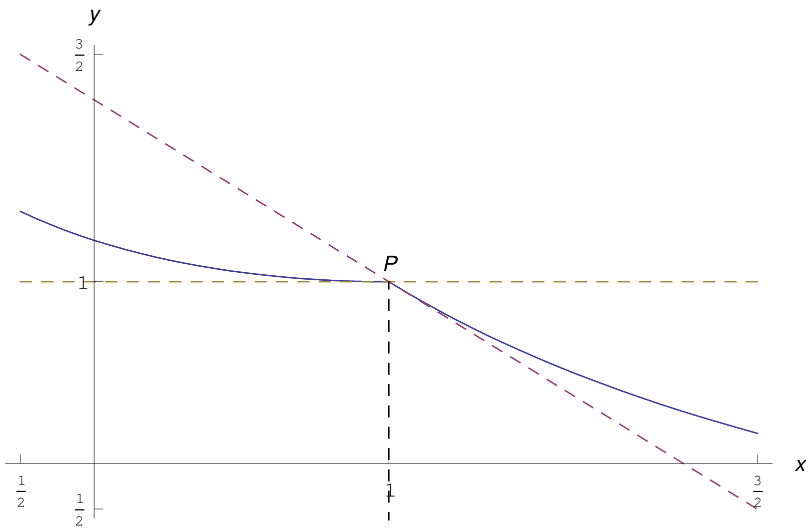


Figura 121: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$ in un intorno di $x = 1$. Le rette in tratteggio sono le rette tangenti nel punto angoloso $P(1,1)$.

56 Esercizio 787

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \tag{364}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$; trattandosi di una funzione periodica conviene studiare la funzione nell'intervallo $[0, T]$, essendo T il periodo della funzione. Osserviamo che $\sin 2x$ ha periodo π, mentre $\sin x$ ha periodo 2π, per cui è $T = 2\pi$.

Intersezioni con gli assi

Osserviamo che la funzione può essere scritta come:

$$f(x) = \sin x\,(1 + \cos x) \tag{365}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow \sin x = 0, \cos x = -1 \\ &\Longleftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi \end{aligned}$$

Le interesezioni sono:

$$(0,0) \in \gamma, \ (\pi, 0), (2\pi, 0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.

Segno della funzione

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Longleftrightarrow \sin x\,(1 + \cos x) > 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Cioè per $x \in (0, \pi)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (\pi, 2\pi)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ f''(x) &= -\sin x\,(4\cos x + 1) \end{aligned} \tag{366}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -1, \frac{1}{2}$$

$$\underset{x\in[0,2\pi]}{\Longleftrightarrow} x = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

Studiamo il segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \pi\right],$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \pi\right]$, mentre è strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$. Da ciò segue:

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ è punto di massimo relativo: } M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$x = \frac{5\pi}{3} \text{ è punto di minimo relativo: } M\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Si osservi che il punto estremale $x = \pi$, non è un punto estremante, probabilmente è un punto di flesso a tangente orizzontale. Ciò verrà chiarito dallo studio della derivata seconda.

Concavità e punti di flesso

Ricerca degli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0, \ \cos x = -\frac{1}{4}$$

$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi$. Per $\cos x = -\frac{1}{4}$ si può risolvere per via grafica. Ciò è mostrato in figura 122.

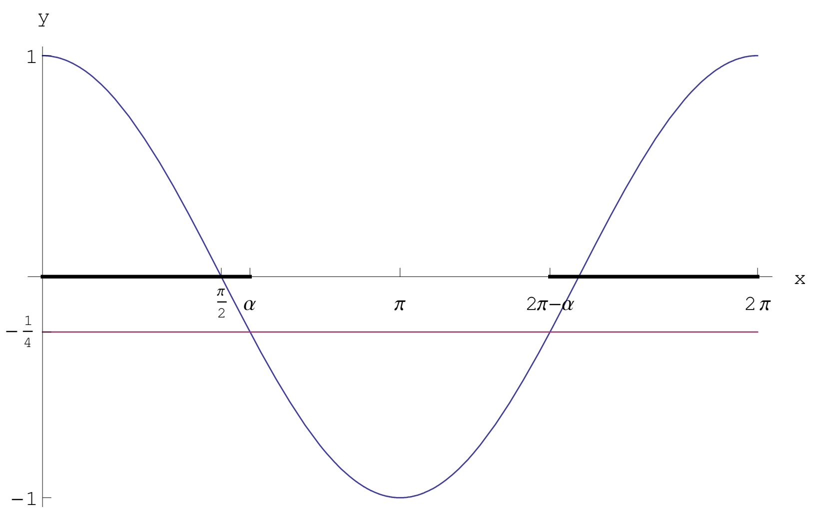


Figura 122: Ricerca delle soluzioni dell'equazione trigonometrica $4\cos x + 1 = 0$ e della disequazione $4\cos x + 1 > 0$.

Qui vediamo che

$$\cos x = -\frac{1}{4} = 0 \underset{x\in[0,\pi]}{\Longleftrightarrow} x = \alpha,\ 2\pi - \alpha, \text{ essendo } \alpha \simeq 1.823$$
$$\cos x > -\frac{1}{4} \underset{x\in[0,\pi]}{\Longleftrightarrow} x \in [0,\alpha) \cup (2\pi-\alpha, 0]$$

Studio del segno:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x\,(4\cos x + 1) < 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in (\alpha,\pi) \cup (2\pi-\alpha, 2\pi)$$

Si conclude che per $x \in (\alpha,\pi) \cup (2\pi-\alpha,2\pi)$ il grafico volge la concavità verso l'alto, mentre per $x \in (0,\alpha) \cup (\pi, 2\pi-\alpha)$ volge la concavità verso il basso. Abbiamo perciò i punti di flesso:

$$F_1\,(\alpha, f(\alpha))\,,\ F_2\,(\pi,0)\,,\ F_3\,(2\pi-\alpha, f(2\pi-\alpha))$$

Come anticipato, $x = \pi$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (123)

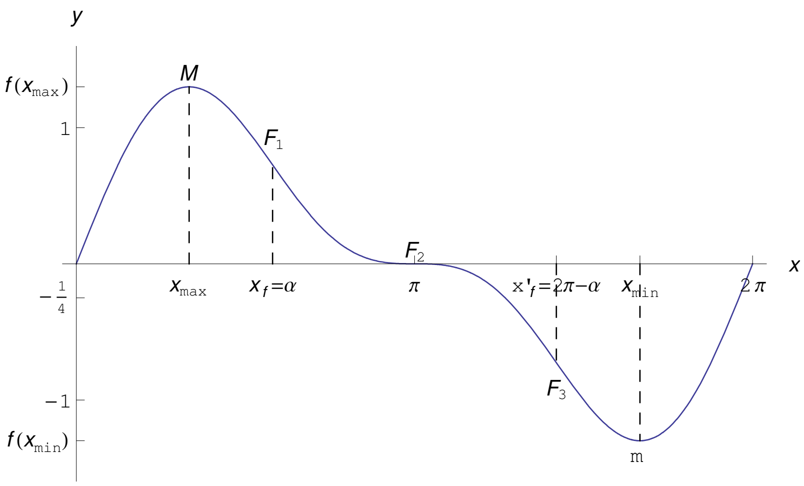


Figura 123: Grafico della funzione $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

57 Esercizio 788

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) \tag{367}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per x tale che $\sqrt{x} - 1 > 0$, cioè per $x > 1$, quindi

$$X = (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 1 \Longleftrightarrow x = 4 \Longrightarrow (4, 0) \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 1 \Longleftrightarrow x > 4$$

Cioè per $x \in (4, +\infty)$ il grafico giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 4)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale a sinistra.
Comportamente all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Il grafico è privo di asintoti obliqui a causa della divergenza logaritmica. Infatti, calcolando il limite del rapporto $f(x)/x$ si trova:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{1}{2\left(x - \sqrt{x}\right)} \tag{368}$$

Omettiamo il calcolo della derivata seconda, poiché la concavità si deduce facilmente.
Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

La derivata prima è manifestamente priva di zeri, per cui non esistono punti estremali. Passiamo allo studio del segno:

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt{x} < x \tag{369}$$

Anziché applicare il procedimento standard di risoluzione di una disequazione irrazionale, vediamo a "occhio" che la (369) è verificata per ogni $x \in X$, donde la funzione è ivi strettamente crescente.

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (124)

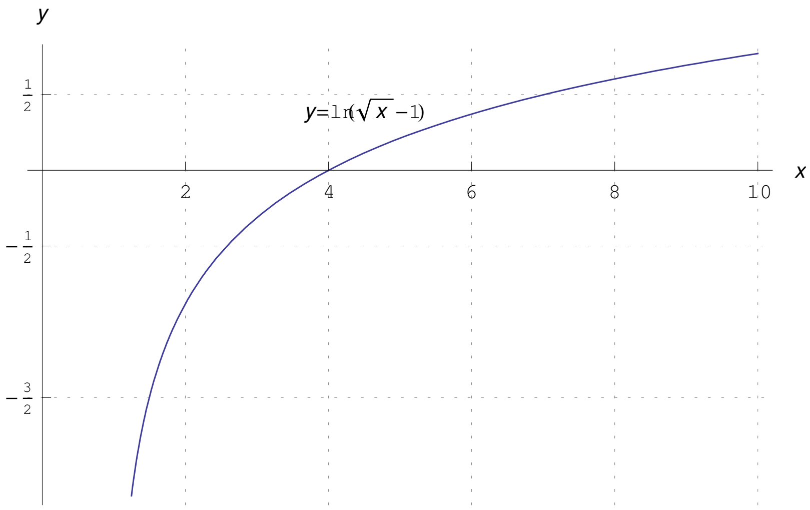


Figura 124: Grafico della funzione $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

58 Esercizio 789

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \tag{370}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per x tale che $1 - x^2 \neq 0$, quindi

$$X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X,\ f(x) > 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{371}$$

$$f(0) = e \Longrightarrow (0, e) \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Segno della funzione
Dalla (371) vediamo che il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} f(x) &= e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+ \end{aligned} \tag{372}$$

Dalle (372) segue che il diagramma situato nel semipiano $x > -1$ è asintotico alla retta verticale $x = -1$, mentre il diagramma situato nel semipiano $x < -1$ ha, per $x = -1$, un *punto di arresto*.

Per calcolare i limiti per $x \to 1^{\pm}$, sfruttiamo la simmetria del diagramma rispetto all'asse y, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= 0^+ \end{aligned} \tag{373}$$

Dalle (373) segue che il diagramma situato nel semipiano $x < 1$ è asintotico alla retta verticale $x = 1$.

Comportamente all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2f(x) \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \\ f''(x) &= -2f(x) \frac{3x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^4} \end{aligned} \tag{374}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Ricerca degli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremale $x = 0$.
Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(0,1) \cup (1,+\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$. Da ciò segue che $x = 0$ è punto di minimo relativo: $m(0,2e)$.

Determiniamo ora il comportamento della derivata prima in un intorno sinistro di $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0$$

Quindi il ramo del diagramma uscente dal punto $(1,0)$ è ivi tangente all'asse x.
Procedendo per simmetria rispetto all'asse y:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$$

Cioè la curva si arresta in $x = -1$ tangente all'asse x.
Concavità e punti di flesso
Ricerca degli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}, \sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}$$

Studio del segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \\ |x| \neq 1 \end{cases}$$
$$x \in (x_{f_1},-1) \cup (-1,1) \cup (1,x_{f_2}),$$

essendo:

$$x_{f_1} = -\sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}, x_{f_2} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}$$

Il diagramma volge la concavità verso l'alto per $x \in (x_{f_1},-1) \cup (-1,1) \cup (1,x_{f_2})$, mentre volge la concavità verso il basso per $x \in (-\infty,x_{f_1}) \cup (x_{f_1},+\infty)$. Quindi abbiamo i due punti di flesso x_{f_1}, x_{f_2}:

$$F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}, e^{-\frac{3}{\sqrt{7}-1}}\right), F_2\left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)}, e^{-\frac{3}{\sqrt{7}-1}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (125)

59 Esercizio 790

Studiare la funzione

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \tag{375}$$

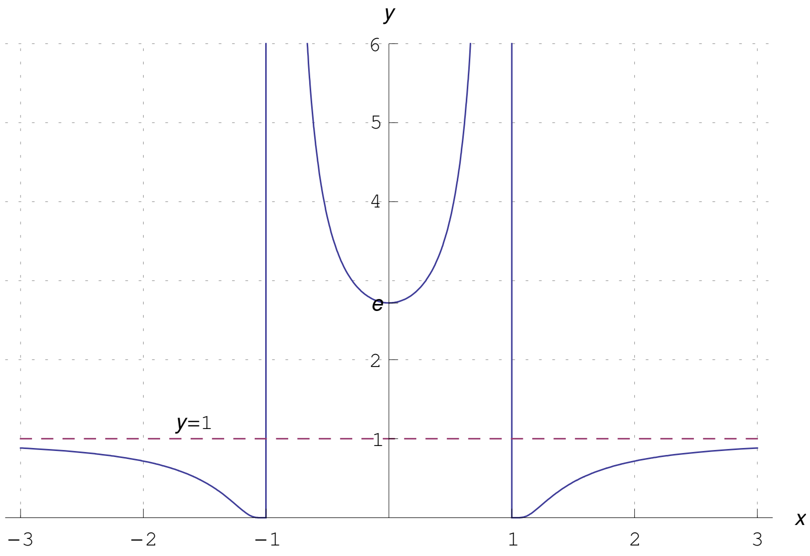


Figura 125: Grafico della funzione $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{1-x^2}}$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$X=(-\infty,+\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f\left(x\right)=0\Longleftrightarrow x=0\Longrightarrow(0,0)\in\gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Simmetrie
La funzione non ha parità definita, per cui il grafico non presenta simmetrie.
Segno della funzione
Risulta:

$$\forall x\in X,\quad \arctan x<\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\frac{\pi}{2}-\arctan x>0$$

Quindi:

$$f\left(x\right)>0\Longleftrightarrow x>0$$

Da ciò segue che il grafico giace nel semipiano $y>0$ per $x>0$, mentre per $x<0$ giace nel semipiano $y<0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\cdot\infty \tag{376}$$

Per risolvere la (376) utilizziamo il seguente cambio di variabile:

$$t = \arctan x \tag{377}$$

Ciò implica:

$$x\to+\infty \Longrightarrow t\to\frac{\pi}{2}^-$$

per cui:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{\cot t} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\sin^2 t = 1^-$$

segue che la retta $y=1$ è asintoto orizzontale a destra.
Per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

Quindi la funzione diverge negativamente. Vediamo se esiste un asintoto obliquo a sinistra:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \pi \\ n &= \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\pi x\right] = -\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right) = 0\cdot\infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata eseguiamo il cambio di variabile (377), osservando che:

$$x\to-\infty \Longrightarrow t\to-\frac{\pi}{2}^+$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{\pi}{2}+t}{\cot t} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} -\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}\sin^2 t = -1$$

Da ciò segue:

$$n = -\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right) = 1$$

Pertanto la retta di equazione:

$$y = \pi x + 1,$$

è asintoto obliquo a sinistra.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2}{(1+x^2)^2} \end{aligned} \tag{378}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Per lo studio della derivata prima, poniamo:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\stackrel{def}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan x \\ \phi(x) &\stackrel{def}{=} \frac{x}{1+x^2}, \end{aligned}$$

onde:

$$f'(x) = \psi(x) - \phi(x)$$

Osserviamo che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \psi(x) > 0$$

Quindi dobbiamo cercare eventuali intersezioni tra le due curve:

$$\gamma_1) \ \ y = \psi(x), \qquad \gamma_2) \ y = \phi(x)$$

La prima si traccia facilmente, tenendo presente l'andamento di $-\arctan x$, per poi traslare di $\pi/2$ nel verso positivo dell'asse y. Riguardo a γ_2 si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \phi(x) = 0, \ \phi'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

Quindi $\phi(x)$ presenta un minimo relativo in $(-1, -1/2)$ e un massimo relativo in $(1, 1/2)$. Siccome è infinitesima all'infinito ed è ovunque continua, i suddetti estremi realtivi sono anche estremi assoluti, onde $|\phi(x)| \leq \frac{1}{2}$. Inoltre

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}$$

Da ciò segue che $\psi(x) > \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, come vediamo dal grafico di figura (126).
Si conclude che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, onde la funzione è strettamente crescente.
Concavità e punti di flesso
Risulta:

$$\forall x \in X, \ f''(x) < 0,$$

per cui il grafico volge sempre la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (127)

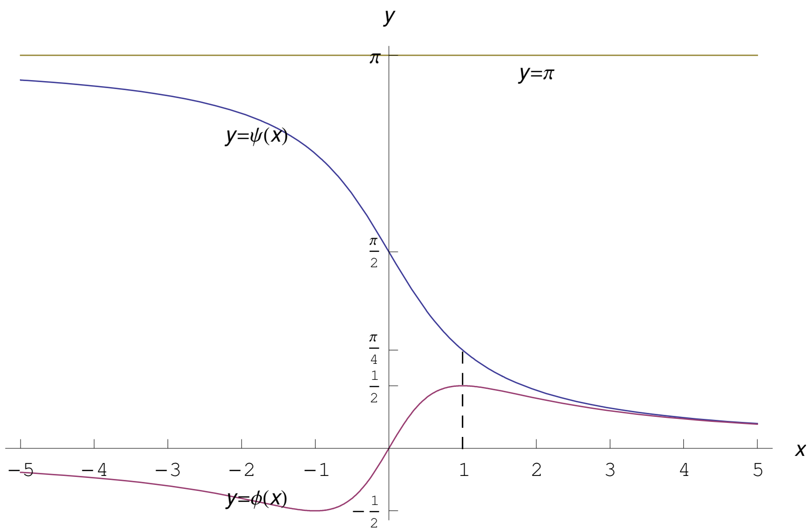


Figura 126: Andamento delle curve $\gamma_1)$ $y = \psi(x)$, $\gamma_2)$ $y = \phi(x)$

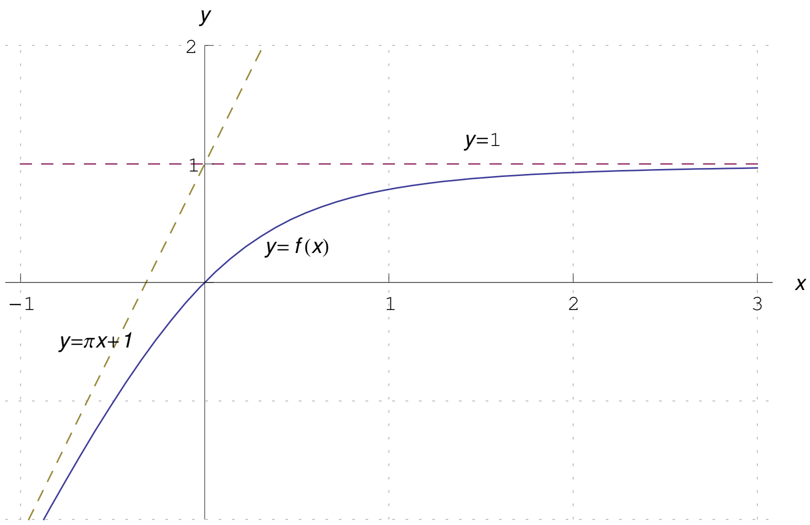


Figura 127: Grafico della funzione $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

60 Esercizio 791

Studiare la funzione

$$f(x) = x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} \tag{379}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 1$

$$X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Simmetrie
La funzione non ha parità definita, per cui il grafico non è simmetrico nè rispetto all'asse y e nè rispetto all'origine delle coordinate.
Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

Segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$ se e solo se $x > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^- \cdot 2^{+\infty} = +\infty \tag{380}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^+ \cdot 2^{-\infty} = 0^+$$

Dalle (380) segue che il diagramma situato nel semipiano $x < 1$ è asintotico alla retta verticale $x = 1$, mentre il diagramma situato nel semipiano $x > 1$ ha, per $x = 1$, un *punto di arresto*.

Per calcolare i limiti per $x \to 1^\pm$, sfruttiamo la simmetria del diagramma rispetto all'asse y, ottenendo:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \tag{381}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0^+$$

Dalle (373) segue che il diagramma situato nel semipiano $x < 1$ è asintotico alla retta verticale $x = 1$.

Comportamente all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 2^{-1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot 2^{-1} = -\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}$$
$$n_1 = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \to +\infty} x \left(2^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2} \right) = 0 \cdot \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \left(2^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} \left(2^{\frac{2}{1-x}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1-x} \cdot \frac{x}{2} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x} \right)}_{=-1} \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} \right)
\end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{\frac{2}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} = \frac{0}{0} \tag{382}$$

Eseguendo il cambio di variabile:

$$t = \frac{2}{1-x},$$

riconduciamo il limite (382) al limite notevole:

$$\lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2$$

Finalmente:

$$n_1 = -\ln 2$$

Pertanto la retta di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x - \ln 2 \tag{383}$$

È asintoto obliquo a destra.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo a sinistra, perveniamo agli stessi risultati:

$$m_2 = \frac{1}{2}, n_2 = -\ln 2$$

onde la retta (383) è asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.
Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = 2^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1}{(1-x)^2} \tag{384}$$
$$f''(x) = 2^{\frac{-3+x}{-1+x}} \frac{\ln 2 [x(\ln 2 - 1) + 1]}{(1-x)^4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Ricerca degli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0$$

Osserviamo che il discriminante di $x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0$ è:

$$\Delta = \ln 2 (\ln 2 - 2) < 0,$$

onde $x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1 = 0 > 0$, $\forall x \implies f'(x) > 0$, cioè la funzione è strettamente crescente.

Determiniamo ora il comportamento della derivata prima in un intorno destro di $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1^+} \left[x^2 + 2x(\ln 2 - 1) + 1\right]}_{2+2\ln 2} \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\frac{1+x}{1-x} = t \implies 1 - x = \frac{2}{t+1}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{t \to -\infty} \frac{(t+1)^2}{2^{-t}} = 0$$

Perciò:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0$$

Si conclude che il ramo del diagramma uscente dal punto $(1, 0)$ è ivi tangente all'asse x.
Concavità e punti di flesso
Ricerca degli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x(\ln 2 - 1) + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{1 - \ln 2}$$

Studio del segno:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, x_f),$$

essendo:

$$x_f = \frac{1}{1 - \ln 2}$$

Il diagramma volge la concavità verso l'alto per $x \in (-\infty, 1) \cup (1, x_f)$, mentre volge la concavità verso il basso per $x \in (x_f, +\infty)$. Quindi abbiamoil punto di flesso x_f:

$$F_1 \left(\frac{1}{1 - \ln 2}, \frac{2}{e^2 (1 - \ln 2)} \right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (128)

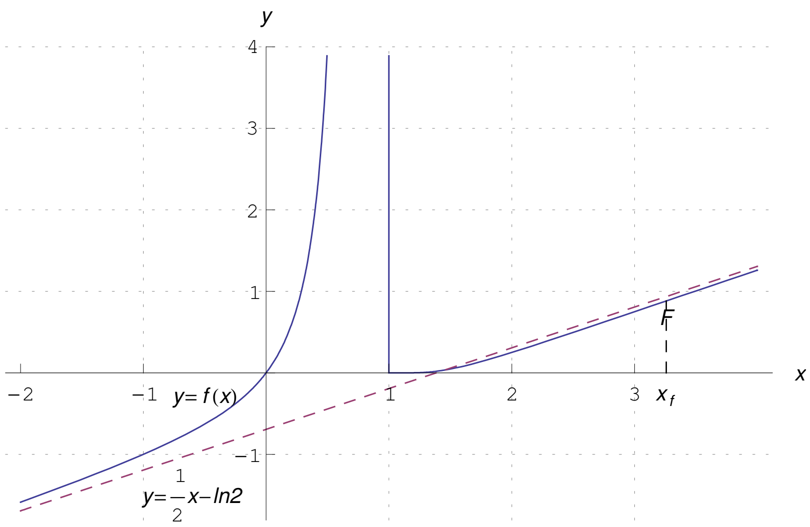


Figura 128: Grafico della funzione $f(x) = x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}}$

61 Esercizio 792

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin^3 x \tag{385}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$X = (-\infty, +\infty)$$

La funzione è periodica di periodo 2π, quindi studiamo la funzione in $[0, 2\pi]$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Longrightarrow (0,0) \in \gamma, \ (\pi, 0), (2\pi, 0) \in \gamma \cap x$$

essendo γ il grafico della funzione.
Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \pi)$$

Segue che il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, \pi)$, mentre per $x \in (\pi, 2\pi)$ il grafico giace nel semipiano $y < 0$.
Derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2 x \cos x \\ f''(x) &= 3\sin x \left(3\cos^2 x - 1\right) \end{aligned} \tag{386}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Ricerca degli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$$

onde la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, mentre è strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \text{ è punto di massimo relativo: } M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \\ x &= \frac{3}{2}\pi \text{ è punto di minimo relativo: } m\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right) \end{aligned}$$

Si osservi che il punto estremale $x = \pi$ non è punto estremante. Probabilmente è un punto di flesso a tangente orizzontale. Ciò apparirà chiaro nello studio della derivata seconda.
Concavità e punti di flesso
Ricerca degli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \alpha, 2\pi - \alpha, \beta, 2\pi - \beta,$$

essendo:

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ con } a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ con } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Per lo studio del segno iniziamo ad osservare che:

$$3\cos^2 x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x \in [0, \alpha) \cup (\beta, 2\pi - \beta) \cup (2\pi - \alpha, 2\pi]$$

Il segno della derivata seconda è quello del prodotto $\sin x\,(3\cos^2 x - 1)$, quindi:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in [0, \alpha) \cup (\beta, \pi) \cup (2\pi - \beta, 2\pi - \alpha)$$

Quindi il grafico è concavo in $[0, \alpha) \cup (\beta, \pi) \cup (2\pi - \beta, 2\pi - \alpha)$, ed è convesso in $(\alpha, \beta) \cup (\pi, 2\pi - \beta) \cup (2\pi - \alpha, 2\pi)$. Abbiamo perciò i punti di flesso:

$$F_1\left(\alpha, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right), F_1\left(\beta, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right), F_3(\pi, 0), F_4\left(2\pi - \beta, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right), F_5\left(2\pi - \alpha, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Tracciamento del grafico.
Il grafico è riportato nelle figure (129)

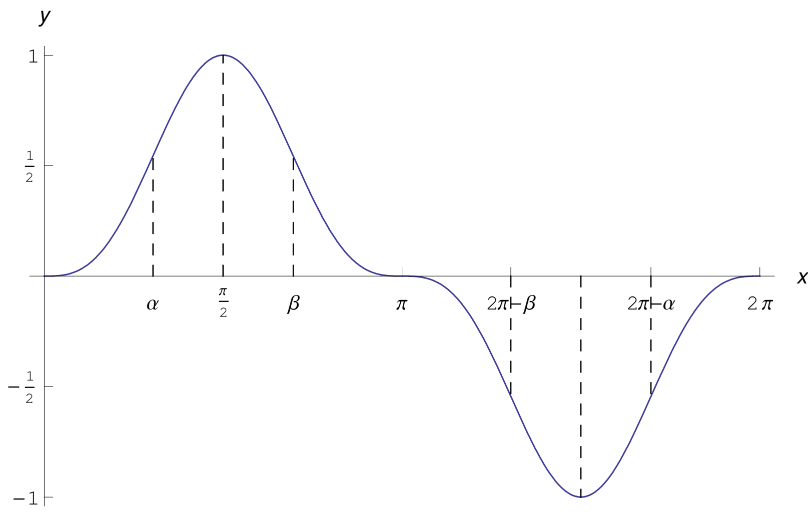


Figura 129: Grafico della funzione $f(x) = \sin^3 x$

62 Esercizio 793

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin|x| \tag{387}$$

***

Soluzione

Lo studio di questa funzione è immediato, poichè:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases} \tag{388}$$

Quindi il ramo del diagramma nel semipiano $x < 0$ è il simmetrico rispetto all'asse y del ramo del diagramma nel semipiano $x > 0$. L'origine delle coordinate è un punto angoloso:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico è riportato nelle figure (130)

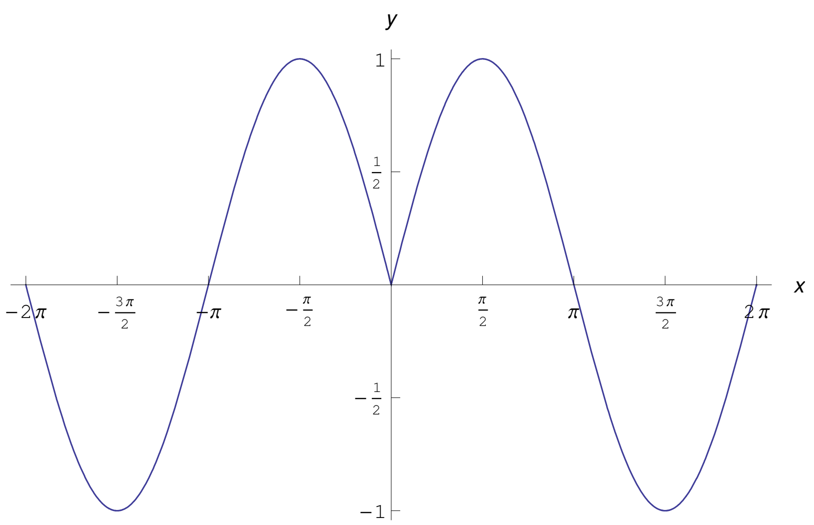


Figura 130: Grafico della funzione $f(x) = \sin|x|$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.