Cursul 1

Mulţimi. Relaţii. Funcţii.
Ordinali şi cardinali

Incontestabil, fundamentarea unui sistem teoretic al oricăruia dintre domeniile ştiinţelor moderne aflate în sfera de influenţă a matematicii nu poate eluda noţiuni precum cele de mulţime, relaţie şi funcţie. Respectând un asemenea principiu, cursul de faţă face o referenţială expunere a unor astfel de noţiuni, precum şi a câtorva înrudite lor, tratând succint aspecte definitorii ale acestora. Cum, aproape în majoritate, chestiunile expuse aici sunt, într-o anumită măsură, familiare celor cărora li se adresează, prezentarea rezultatelor relative la ele nu este făcută şi cu demonstraţiile de rigoare. Lista bibliografică din final încearcă atenuarea acestei voite omisiuni, venind în sprijinul tuturor acelora dintre destinatarii prezentelor note de curs.

Mulţimi

În viziunea lui Georg Cantor, noţiunea de ***mulţime*** apare, definită în 1897, ca "un tot unitar, cu elemente distincte, în care ordinea de dispunere a elementelor nu are importanţă". O asemenea definiţie este deficitară însă, deoarece, în virtutea ei, nu orice colecţie de "obiecte" constituie o mulţime. Astfel, luând în atenţie ansamblul Ens al tuturor mulţimilor şi admiţând că acesta este o mulţime, putem susţine că şi $M = \{X \in Ens \mid X \notin X\}$ ar fi o mulţime, situaţie în care ar fi valid paradoxul lui Bertrand Russell, datat din 1899, potrivit căruia nu am putea decide dacă $M \in M$ sau $M \notin M$. Evitarea unei asemenea antinomii se poate realiza fundamentând noţiunea de mulţime pe baza sistemului de axiome propuse de E. Zermelo şi A. Fraenkel. Acestea, redate aici începând cu grupajul *ZF1* ~ *ZF3* şi terminând, după definiţia intercalată în context, cu *ZF4* ~ *ZF7*, au proprietăţile de noncontradicţie, independenţă, completitudine şi categoricitate întru consistenţa teoriei mulţimilor.

ZF1. ***Axioma determinării***: "Dacă A şi B sunt mulţimi, iar orice element al lui A este în B şi reciproc, atunci $A = B$."

ZF2. ***Axioma mulţimilor elementare***: "*i)* Există mulţimi vide, generic notate cu $\varnothing$; *ii)* Dacă a este un obiect arbitrar, atunci există mulţimea $\{a\}$ care-l conţine pe a ca unic element; *iii)* Dacă a şi b sunt "obiecte" diferite, atunci există o mulţime $\{a, b\}$ care conţine pe a şi b ca elemente unice."

ZF3. ***Axioma bazei***: "Orice mulţime nevidă X conţine măcar un element x aşa încât x şi X nu au nimic în comun. Dacă $\mathfrak{P}$ este o proprietate (sau un ansamblu de proprietăţi) pentru elementele x ale lui X, atunci există o mulţime Y care conţine toate elementele din X cu proprietatea $\mathfrak{P}$ şi nu conţine alte elemente."

Definiţia 1.1 **) O mulţime B se numeşte* ***inclusă*** *în mulţimea A, când orice element al lui B este în A şi acest fapt se consemnează prin $B \subseteq A$.*

) Prin* ***submulţime (parte) *a unei mulţimi A se înţelege o mulţime inclusă în A.*

****) Submulţimile lui A diferite de $\varnothing$ şi A se numesc* ***proprii****, pe când $\varnothing$ şi A sunt denumite* ***submulţimi improprii*** *ale lui A.*

ZF4. ***Axioma submulţimilor***: "Pentru orice mulţime A, există o mulţime $\mathcal{P}(A)$ care conţine exact submulţimile lui A."

ZF5. ***Axioma reuniunii***: "Pentru orice mulţime A de mulţimi, există o mulţime B care conţine numai elementele mulţimilor din A."

ZF6. ***Axioma alegerii***: "Pentru orice mulţime M de mulţimi nevide, mutual disjuncte, există o mulţime care conţine exact câte un element din fiecare mulţime din M."

ZF7. ***Axioma infinitului***: "Există o mulţime C care satisface condiţiile următoare:

a) $\varnothing$ este un element al lui C;

b) Dacă x este din C, atunci şi $\{ x \}$ este din C."

Observaţii:

1) Exprimată prin *ZF1* ~ *ZF7*, axiomatica lui Zermelo şi Fraenkel elimină paradoxul (antinomia) lui Russell, cu evidenţă.

2) Notată cu $\mathcal{P}(A)$, după cum se precizează în *ZF4*, mulţimea părţilor unei mulţimi A are, cu certitudine, pe $\varnothing$ ca element, adică $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$, întrucât $\varnothing \subseteq A$, oricare ar fi A.

3) În conformitate cu *ZF1*, dacă două ***mulţimi*** A şi B sunt aşa încât $A \subseteq B \subseteq A$, atunci spunem că A şi B sunt ***egale***, notând acest fapt prin: $A = B$.

Definiţia 1.2 *O* ***mulţime*** A ***de mulţimi*** *se numeşte* ***tranzitivă*** *dacă,* $\forall X \in A$, X *este din* $\mathcal{P}(A)$.

În conformitate cu această definiţie, mulţimea vidă este tranzitivă.

Relativ la "$\subseteq$", sunt de menţionat proprietăţile din cadrul următorului enunţ:

Propoziţia 1.1 *j)* $A \subseteq A$, *pentru orice mulţime* A*;*

jj) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A$ *implică* $A = B$*;*

jjj) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq C$ *implică* $A \subseteq C$.

Definiţia 1.3 *l)* ***Complementara absolută*** *a unei mulţimi* A *este, prin definiţie, mulţimea* $\{x \mid x \notin A\}$.

ll) ***Complementara relativă*** *a mulţimii* A *în raport cu o (altă) mulţime* $B \supseteq A$ *este, prin definiţie, mulţime* $B \setminus A$, *notată cu* C_A^B, *unde* $B \setminus A$ *înseamnă* ***diferenţa mulţimilor*** B *şi* A, *adică mulţimea* $\{x \in B$ *şi* $x \notin A\}$.

Când, fixată fiind, mulţimea B se subînţelege, notaţia pentru complementara relativă a unei mulţimi A, în raport cu B, se simplifică, scriind C_A în loc de C_A^B.

Definiţia 1.4 *a) Se numeşte* ***reuniune*** *a două mulţimi* A *şi* B *mulţimea* $\{x \in A$ *sau* $x \in B\}$, *notată cu* $A \cup B$.

b) ***Intersecţia*** *a două mulţimi* A *şi* B, *notată cu* $A \cap B$, *este mulţimea tuturor elementelor care aparţin simultan mulţimilor* A *şi* B, *adică:* $A \cap B = \{x \mid x \in A$ *şi* $x \in B\}$.

c) ***Diferenţa simetrică*** *a două mulţimi* A *şi* B, *notată cu* $A \Delta B$, *este, prin definiţie, mulţimea* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Propoziţia 1.2 *Operaţiile de reuniune, intersecţie, diferenţă, diferenţă simetrică şi complementariere au proprietăţile exprimate prin următoarele egalităţi, care au loc oricare ar fi mulţimile implicate* A, B *şi, acolo unde este cazul,* C:

1. $A \cup A = A \cap A = A$ *(idempotenţa);*

2. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociativitatea reuniunii);*

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativitatea intersecţiei);*

5. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitatea);*

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune);*

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie);*

8. $C_{C_A} = A$;

9. $C_{A\cup B} = C_A \cap C_B$; $C_{A\cap B} = C_A \cup C_B$ *(legile lui De Morgan);*

10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

11. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

12. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ *(absorbţia);*

13. $A\Delta A = \varnothing$; $A\Delta B = B\Delta A$; $A\Delta\varnothing = A$;

14. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie se pot extinde la cazul unei mulţimi (familii) de mulţimi. Astfel, dacă I este o mulţime de indici, iar $\{A_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi (indexată după I), atunci ***reuniunea tuturor mulţimilor*** A_i, notată cu $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, este (prin definiţie) mulţimea $\{x \mid \exists\, i \in I$, încât $x \in A_i\}$, iar ***intersecţia*** $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ este mulţimea $\{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$. Când I este finită, de exemplu $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci notaţiile pentru reuniunea şi respectiv intersecţia mulţimilor A_i ($i = \overline{1, n}$), se adaptează în mod corespunzător ($\bigcup\limits_{i-1}^{n} A_i$ şi respectiv $\bigcup\limits_{i-1}^{n} A_i$).

Definiţia 1.5 ***Produsul cartezian*** *a două mulţimi nevide A şi B, notat cu $A\times B$, este, prin definiţie, mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$, adică mulţimea $\{(a, b) \mid a \in A$ şi $b \in B\}$.*

Pentru un număr finit de mulţimi nevide $A_1, A_2, \ldots, A_n$, avem:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

În cazul în care $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coincid, având $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se notează, mai simplu, cu A^n.

Propoziţia 1.3 *Oricare ar fi mulţimile nevide A, B şi C, au loc egalităţile:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Relaţii

Definiţia 1.6 *i} O **relaţie** R de la mulţimea arbitrară $A \neq \varnothing$ la mulţimea oarecare $B \neq \varnothing$ este, prin definiţie, o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Terminologic, spunem că R este o **relaţie binară** între elemente ale lui A şi elemente ale lui B. Dacă $(x, y) \in R \subseteq A \times B$, citim că x **este în relaţia** R **cu** y (unde $x \in A$ şi $y \in B$, cu $(x, y) \in R$) şi, de cele mai multe ori, scriem xRy (în loc de $(x, y) \in R$). Mulţimea $\{x \in A \mid \exists\, y \in B$ astfel încât $(x, y) \in R\}$ se numeşte **domeniul relaţiei** R şi, notată cu $D(R)$, este, evident, submulţime (proprie sau improprie) a lui A. Mulţimea $\{y \in B \mid \exists\, x \in A$ astfel încât $(x, y) \in R\}$ poartă denumirea de **codomeniu al relaţiei** R, fiind notată, ca submulţime a lui B, cu $Im(R)$.*

*ii} În cazul în care $A = B$, o relaţie binară (pe A) este o parte a produsului cartezian A^2 şi se numeşte **omogenă**.*

*iii} **Inversa unei relaţii binare** $R \subseteq A \times B$, notată cu R^{-1}, este, prin definiţie, relaţia $\{(y, x) \mid xRy\}$.*

*iv} Dacă $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$ sunt două relaţii astfel încât $Im(R) \cap D(S) \neq \varnothing$, atunci se poate defini relaţia $S \circ R$, denumită **compusa relaţiilor** S şi R, ca fiind mulţimea $\{(x, z) \in A \times C \mid \exists\, y \in B$ astfel încât $(x, y) \in R$ şi $(y, z) \in S\}$.*

*v} Pentru o mulţime nevidă A, relaţia binară $\{(x, x) \mid x \in A\}$ se numeşte **identitate** pe A şi se notează cu 1_A.*

Definiţia 1.7 *a) O relaţie R pe o mulţime nevidă A se numeşte **reflexivă**, dacă şi numai dacă $1_A \subseteq R$.*

*b) Relaţia binară omogenă R este numită **simetrică**, dacă şi numai dacă $R^{-1} = R$.*

*c) Relaţia R , pe A, se numeşte **antisimetrică**, dacă şi numai dacă $R \cap R^{-1} = 1_A$.*

*d) Relaţia R se numeşte **tranzitivă** dacă şi numai dacă, pentru orice $(x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R$, avem $(x, z) \in R$.*

*e) Relaţia R, pe A, se numeşte **totală**, dacă şi numai dacă, $\forall\, x, y \in A$, avem $(x, y) \in R$ sau $(y, x) \in R$.*

Definiţia 1.8 *j. O relaţie R (pe o mulţime nevidă A) care este simultan reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte **relaţie de echivalenţă** (pe A).*

*jj. Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A, iar a este un element oarecare al lui A, atunci mulţimea $\{b \in A \mid (a, b) \in R\}$ se numeşte **clasa de echivalenţă** a elementului a în raport cu R şi se notează cu $[a]_R$ sau $\hat{a}_R$.*

*jjj. Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de relaţia de echivalenţă R pe A se numeşte **mulţime cât** şi se notează cu $A_{/R}$.*

Definiţia 1.9 *1) O relaţie R (pe o mulţime nevidă A) care este simultan reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă se numeşte **relaţie de parţială ordine** (pe A).*

*2) O relaţie binară omogenă care este numai reflexivă şi tranzitivă se numeşte **relaţie de preordine**.*

*3) Relaţia de ordine R, pe mulţimea nevidă A, se numeşte **totală** dacă şi numai dacă, oricare două elemente, x şi y, ale mulţimii de referinţă A sunt "comparabile", adică sau xRy sau yRx.*

*4) Dacă A este o mulţime nevidă şi R este o relaţie de preordine/parţială ordine/ordine totală pe A, atunci perechea (A, R) se numeşte, respectiv, **mulţime preordonată/parţial ordonată/total ordonată**.*

Definiţia 1.10 *l] Date fiind o mulţime parţial ordonată (A, R) şi $\varnothing \neq B \subseteq A$, se numeşte **majorant** pentru mulţimea B orice element $a \in A$, astfel încât bRa, $\forall\, b \in B$.*

*În situaţia existenţei unui majorant pentru B, **mulţimea** B se numeşte **majorată**.*

*ll] Analog, numim **minorant** pentru B un element $a \in A$ aşa încât aRb, $\forall\, b \in B$. Dacă B are cel puţin un minorant, atunci spunem că B este o **mulţime minorată** (în raport cu R).*

*lll] Când B, ca parte nevidă a mulţimii parţial ordonate (A, R), este simultan minorată şi majorată, zicem că B este o **mulţime mărginită** (în raport cu R şi A).*

*lv] Dacă $a \in A \neq \varnothing$ este un minorant pentru A, în raport cu o parţială ordine R pe A, atunci a se numeşte **cel mai mic element** al lui A, relativ la R, şi se notează cu $\min_R A$.*

*v] Când $\alpha \in A$ este un majorant pentru A, în raport cu o relaţie de parţială ordine R pe A, atunci α se numeşte **cel mai mare element al mulţimii** A şi se va nota cu $\max_R A$.*

Definiţia 1.11 *Dacă (A, R) este o mulţime parţial ordonată şi $\varnothing \neq B \subseteq A$ este majorată (în raport cu R), iar un cel mai mic majorant există pentru B, atunci acesta se numeşte **margine superioară** a mulţimii B şi se notează cu $\sup_R B$. Analog, dacă mulţimea nevidă B este minorată (în raport cu R) şi există un cel mai mare minorant pentru B, atunci acesta poartă denumirea de **margine inferioară** a lui B şi se notează cu $\inf_R B$.*

Definiţia 1.12 *a) O mulţime parţial ordonată (A, R) se numeşte **relativ completă** (sau **complet ordonată**) dacă şi numai dacă, pentru orice $\varnothing \neq B \subseteq A$, minorată, există $\inf_R B$ şi, pentru orice $\varnothing \neq C \subseteq A$, majorată, există $\sup_R C$.*

*b) O mulţime total ordonată strict este numită **bine ordonată** (altfel spus, cu ordine bună) dacă orice submulţime nevidă a ei are cel mai mic element.*

Funcţii

Definiţia 1.13 *1. Prin **funcţie** (echivalent, **relaţie funcţională**) pe o mulţime nevidă A, cu valori într-o mulţime nevidă B, se înţelege o relaţie binară $f \subseteq A \times B$ pentru care $D(f) = A$ şi, pentru orice $x \in A$, aşa încât $(x, y) \in f$ şi $(x, z) \in f$, avem (cu necesitate) $y = z$.*

2. *Domeniul relaţiei funcţionale $f \subseteq A \times B$ poartă, uzual, denumirea de **mulţime de definiţie a funcţiei** f, iar codomeniul lui f se numeşte **mulţime în care f ia valori**.*

Tot uzual, o funcţie f, definită pe o mulţime (nevidă) A şi cu valori într-o mulţime (nevidă) B, se notează prin $f : A \to B$.

Definiţia 1.14 *i) Pentru $f : A \to B$, mulţimea $G \subseteq A \times B$, egală cu $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte **graficul funcţiei** f.*

*ii) Două **funcţii** $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ se numesc **egale** dacă şi numai dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x), \forall\, x \in A = C$.*

*iii) Pentru $f : A \to B$ şi $\varnothing \neq C \subset A$, numim **restricţie** a lui f pe C, notând-o cu $f_{|C}$, funcţia de la C la B definită prin $f_{|C}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in C$.*

*iv) Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi $\varnothing \neq C \subset A$, atunci mulţimea $\{y \in B \mid \exists\, x \in C$ aşa încât $y = f(x)\}$, notată cu $f(C)$, se numeşte **imaginea lui C prin f**.*

*v) Pentru $f : A \to B$ şi $\varnothing \neq D \subseteq B$, mulţimea $\{x \in A \mid \exists\, y \in D$ aşa încât $y = f(x)\}$, notată cu $f^{-1}(D)$, se numeşte **preimaginea lui D prin f** sau **imaginea inversă a lui D prin f**.*

Definiţia 1.15 *i) O **funcţie** $f : A \to B$ se numeşte **injectivă** (sau injecţie) dacă şi numai dacă, $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

*ii) Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **surjectivă** (sau surjecţie) dacă şi numai dacă $Im(f) = B$.*

*iii) Când $f : A \to B$ este simultan injecţie şi surjecţie, atunci f se numeşte **bijecţie** (sau funcţie **bijectivă**).*

*iv) Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **inversabilă** dacă şi numai dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.*

*În cazul existenţei lui g, funcţia unică g se numeşte **inversa lui** f şi se notează, uzual, cu f^{-1}.*

Definiţia 1.16 *Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi (A, R), (B, S) sunt mulţimi parţial ordonate, atunci f se numeşte **monotonă** (în context) dacă şi numai dacă*

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \text{cu } x_1 R x_2,\ \text{avem } f(x_1) S f(x_2).$$

Noţiunea de funcţie caracteristică (indicatoare) a unei mulţimi asigură o legătură în plus între noţiunile de mulţime şi funcţie.

Definiţia 1.17 *Fie A o mulţime oarecare. Se numeşte **funcţie caracteristică (indicatoare)** a mulţimii $A \neq \varnothing$ şi se notează, de regulă, cu χ_A, funcţia dată prin:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Când $A = \varnothing$, $\chi_A \equiv 0$.

Propoziţia 1.4 *Funcţia caracteristică a unei mulţimi satisface următoarele relaţii*

$$\chi_{C_A} = 1 - \chi_A, \quad \forall A \in \mathcal{P}(E),$$

cu $C_A = E \setminus A$,

$$\chi_A \leq \chi_B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E),$$

unde E *este mulţimea (cea mai amplă) la care ne raportăm.*

Proprietăţile evidenţiate de Propoziţia 1.4 pot fi folosite la stabilirea şi demonstrarea unor relaţii relative la mulţimi, cum sunt, de exemplu, cele specificate de Propoziţia 1.2.

Ordinali şi cardinali

Una dintre noţiunile matematice cu importanţă, printre altele, în semantica limbajelor de programare este aceea de ***ordinal***, bazată pe conceptele de ***mulţime tranzitivă*** (v. Definiţia 1.2) şi de relaţie binară de ***bună-ordine*** (v. Definiţia 1.12 -b).

Definiţia 1.18 *O mulţime* X *este numită* ***ordinal*** *dacă este tranzitivă şi bine ordonată, în raport cu ordinea prin apartenenţă.*

Propoziţia 1.5 *(**Proprietăţi ale ordinalilor**)*

i) $\alpha \notin \alpha$, $\forall\, \alpha$ *ordinal.*

ii) $\alpha \in \beta$ *şi* $\beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma$ *ordinali.*

iii) Dacă $\alpha \in \beta$ *şi* β *este ordinal, atunci* α *este ordinal.*

iv) Dacă α *este ordinal,* $X \subset \alpha$ *şi* X *este tranzitivă, atunci* $X \in \alpha$.

v) Pentru oricare ordinali α *şi* β*, are loc exact una dintre relaţiile:* $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$.

vi) Dacă X *este o mulţime nevidă de ordinali, atunci* $\bigcap X$ *este ordinal şi anume cel mai mic ordinal al lui* X.

vii) O mulţime tranzitivă de ordinali este ordinal.

viii) Dacă α *este ordinal, atunci* $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ *este, de asemenea, ordinal, numit ordinalul succesor al lui* α*. Reciproc, dacă* $S(\alpha)$ *este ordinal, atunci şi* α *este ordinal.*

ix) Dacă X *este o mulţime nevidă de ordinali, atunci* $\bigcup X$ *este ordinal şi, dacă* X *are un cel mai mare element, atunci acesta este* $\bigcup X$.

Definiţia 1.19 *Se spune că ordinalul* α *este mai mic decât ordinalul* β*, notând aceasta prin* $\alpha < \beta$*, dacă* $\alpha \in \beta$.

Graţie Propoziţiei 1.4 - i) şi v), se poate afirma că orice mulţime de ordinali este total ordonată strict, prin "$<$", sau, echivalent spus, prin apartenenţă. Totodată, "$<$" este o bună-ordine pe o mulţime de ordinali.

Definiţia 1.20 *a) Un ordinal α este denumit **ordinal succesor**, dacă există un ordinal β astfel încât $\alpha = S(\beta)$. Altfel, α este numit **ordinal limită**.*

*b) α este declarat **ordinal finit**, dacă $\alpha = 0$ sau dacă α este ordinal succesor şi orice $\beta < \alpha$ este fie 0, fie ordinal succesor. Altfel, α este numit **ordinal infinit**.*

Se poate vedea că mulţimea tuturor ordinalilor finiţi este ordinal. De asemenea, se poate constata că orice ordinal limită este marginea superioară a mulţimii tuturor ordinalilor mai mici decât el. Cel mai mic ordinal infinit este notat cu ω. Clasa tuturor ordinalilor este notată, adeseori, cu Ord.

Definiţia 1.21 *Două mulţimi nevide oarecare, A şi B, se numesc **echipotente** dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă $h : A \to B$.*

Un rezultat de reţinut este cel care stipulează faptul că o mulţime oarecare poate fi bine ordonată dacă şi numai dacă este echipotentă cu un ordinal. În plus, pentru orice mulţime A, există un ordinal unic α, echipotent cu A, care nu este echipotent cu nici un alt ordinal mai mic decât el.

Definiţia 1.22 *(a unui **cardinal**)*

*a) Se numeşte **număr cardinal** al unei mulţimi A (sau **cardinalul mulţimii** A) cel mai mic ordinal α echipotent cu A.*

*b) **Număr cardinal** sau, simplu, **cardinal** este numit orice ordinal care satisface a) pentru o anumită mulţime A.*

Propoziţia 1.6 *Pentru orice ordinal α, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) α este cardinal;

ii) α nu este echipotent cu nici un ordinal $\beta < \alpha$;

iii) α este cardinalul mulţimii α.

Observaţii:

1) ω este număr cardinal.

2) Două mulţimi sunt echipotente dacă şi numai dacă cardinalele lor sunt egale.

3) Cardinalul unei mulţimi A se notează cu $card(A)$ sau $|A|$ sau $\#A$.

4) Prin convenţie, $|\varnothing| = 0$.

Definiţia 1.23 *j) Pentru două mulţimi A şi B, spunem că avem*

$$card(A) \leqslant card(B),$$

dacă există o injecţie de la mulţimea A la mulţimea B.

jj) Avem

$$card(A) < card(B),$$

dacă şi numai dacă $card(A) \leqslant card(B)$ şi $card(A) \neq card(B)$.

Observaţie: Relaţia binară introdusă prin Definiţia 1.23-j) este o relaţie de parţială ordine pe mulţimea tuturor mulţimilor, întrucât este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Mai mult, deoarece, pentru orice două mulţimi A şi B, avem fie $card(A) \leqslant card(B)$, fie $card(B) \leqslant card(A)$, relaţia "$\leqslant$" este una de totală ordine.

Definiţia 1.24 *Se numeşte **număr Hartogs** asociat unei mulţimi A, notat cu $h(A)$, cel mai mic ordinal α care nu este echipotent cu nici o submulţime a lui A.*

Propoziţia 1.7 *Pentru orice mulţime A, $h(A)$ este cardinal şi $card(A) < h(A)$.*
$h(A)$ este cel mai mic cardinal mai mare decât $card(A)$.

Propoziţia 1.8 *a) Dacă $\alpha = card(A)$, atunci $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{\alpha}$.*

b) Pentru orice număr cardinal α, are loc inegalitatea:

$$\alpha < 2^{\alpha}.$$

Bibliografie selectivă

1. Marina Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Ed.Univ.Craiova, 2000.
2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Tehnopress, Iaşi, 2005.
3. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2011.
4. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.
5. V. Postolică - *Baze ale matematicii actualizate prin eficienţă*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2008.
6. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.
7. B. Poonen - *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
8. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2010.

Cursul 2

Structuri algebrice de bază. Mulţimi fundamentale de numere: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$. Operaţii cu ordinali şi cardinali. Inegalităţi numerice importante.

Inevitabil, o prezentare riguroasă a mulţimilor numerice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ invocă expunerea prealabilă a unor noţiuni de bază (precum cele de operaţie algebrică, monoid, grup, inel, corp şi morfism) din cadrul teoriei structurilor algebrice, cu măcar enumerarea unor elemente de fundament. De aceea, pentru început, ne referim la asemenea elemente, după care, pe rând şi axiomatic, ne vom ocupa de mulţimile numerice vizate. Cum unele dintre acestea pot fi, prin înzestrarea cu operaţii algebrice specifice, structurate ca o latice sau o algebră Boole, vom introduce aici şi astfel de noţiuni.În final, menţionăm câteva inegalităţi numerice (Hölder, Cauchy, Minkowski, Carleman), în $\mathbb{R}$, cu vădită importanţă în contextul prezentelor note de curs.

Operaţii algebrice. Proprietăţi. Monoizi. Morfisme.

Fie M o mulţime nevidă.

Definiţia 2.1 *Numim* ***operaţie algebrică*** *(internă) sau* ***lege de compoziţie*** *(internă)* ***pe*** M *o funcţie* $\varphi : M \times M \to M$*. Pentru* $x, y \in M$*, elementul* $\varphi(x, y) \in M$ *se numeşte* ***compusul lui*** x ***cu*** y ***prin operaţia*** φ*.*

Pentru simplificarea scrierii, de regulă, $\varphi(x, y)$ se redă prin $x \circ y$, unde, după caz, “$\circ$“ semnifică “$+$“, când operaţia φ este aditivă, sau “$\cdot$“, când φ este multiplicativă.

Definiţia 2.2 *O operaţie algebrică pe* M *(notată, generic, cu “*$\circ$*“) se numeşte*

i) ***asociativă****, dacă* $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall\, x, y, z \in M$*;*

ii) ***comutativă****, dacă* $x \circ y = y \circ x$, $\forall\, x, y \in M$*;*

iii) ***cu element neutru****, dacă există* $e \in M$*, astfel încât*

$$x \circ e = e \circ x = x, \forall\, x \in M.$$

În acest caz, e *este unic şi constituie respectivul element neutru al operaţiei “*$\circ$*“.*

Definiţia 2.3 *Un dublet* $(M, \circ)$*, unde* M *este o mulţime nevidă, iar “*$\circ$*“ este o operaţie algebrică pe* M*, se numeşte* ***semigrup*** *dacă operaţia “*$\circ$*“ este asociativă. În plus, dacă operaţia “*$\circ$*“ are şi element neutru, atunci* $(M, \circ)$ *se numeşte* ***monoid****. Dacă “*$\circ$*“ este şi comutativă,* ***monoidul*** $(M, \circ)$ *se numeşte* ***comutativ****.*

Exemple:

1) Dacă $M \neq \varnothing$, atunci $(\mathcal{P}(M), \cap)$, $(\mathcal{P}(M), \cup)$ şi $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ sunt monoizi comutativi.

2) Dacă $A \neq \varnothing$, atunci $(Hom(A), \circ)$, unde $Hom(A) = \{f : A \to A\}$, iar “$\circ$“ semnifică operaţia uzuală de compunere a funcţiilor, este un monoid necomutativ.

Definiţia 2.4 *Fie $(M, \circ)$ şi $(M', \perp)$ doi monoizi. O funcţie $f : M \to M'$ se numeşte* ***morfism de monoizi*** *dacă $f(e) = e'$ (unde e şi e' sunt elementele neutre, din M şi respectiv M', ale operaţiilor "$\circ$" şi, corespunzător, "$\perp$") şi*

$$f(x \circ y) = f(x) \perp f(y), \forall\, x, y \in M.$$

Se notează cu $Hom(M, M')$ mulţimea $\{f : M \to M' \mid f = \text{ morfism de monoizi}\}$. Se numeşte ***monomorfism de monoizi*** orice element din $Hom(M, M')$ care este funcţie injectivă. O funcţie surjectivă din $Hom(M, M')$ se numeşte ***epimorfism de monoizi***. Un morfism bijectiv de monoizi se numeşte ***izomorfism de monoizi***. Când $M' = M$, monomorfismul se numeşte ***endomorfism***, iar izomorfismul, ***automorfism***.

Definiţia 2.5 *Fie $(M, \circ)$ un monoid. Un element $x \in M$ se numeşte* ***inversabil (simetrizabil)*** *în raport cu "$\circ$", dacă există $\tilde{x} \in M$ (numit* ***inversul*** *sau* ***simetricul*** *lui x), astfel încât $x \circ \tilde{x} = \tilde{x} \circ x = e$ (unde e este elementul neutru, din M, faţă de "$\circ$").*

Se poate vedea că, dacă există simetricul $\tilde{x}$, atunci el este unic.

Când operaţia "$\circ$" este aditivă, $\tilde{x}$ se numeşte ***opusul*** lui x şi, de regulă, se notează cu $(-x)$, iar dacă operaţia este multiplicativă, ***inversul*** $\tilde{x}$ se notează cu x^{-1}.

Mulţimea tuturor elementelor simetrizabile ale unui monoid $(M, \circ)$ constituie ansamblul unităţilor lui M şi se notează cu $U(M)$. În cazul în care A este o mulţime nevidă, avem: $U((\mathcal{P}(A), \cap)) = \{A\}$, $U((\mathcal{P}(A), \cup)) = \{\varnothing\}$, $U((\mathcal{P}(A), \Delta)) = \mathcal{P}(A)$, $U((Izo(A), \circ)) = Izo(A)$, unde $Izo(A)$ este mulţimea bijecţiilor de la A la A.

Grupuri. Inele. Corpuri.

Definiţia 2.6 *Numim* ***grup*** *un monoid $(G, \circ)$ pentru care $U(G) = G$. Un grup $(G, \circ)$ se numeşte* ***abelian (comutativ)*** *dacă operaţia "$\circ$" este comutativă.*

Exemple:

1) $A \neq \varnothing \Rightarrow (\mathcal{P}(A), \Delta)$ este grup comutativ;

2) Dacă $(M, \circ)$ este monoid, atunci $(U(M), \circ)$ este grup.

Definiţia 2.7 *O funcţie $f : G \to G'$ se numeşte* ***morfism de grupuri*** *(de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(G', \star)$) dacă satisface relaţia:*

$$f(x \circ y) = f(x) \star f(y), \forall\, x, y \in G.$$

Se spune că $f : G \to G'$ este ***izomorfism de grupuri*** când f este un morfism bijectiv de grupuri. Un morfism de la un grup G la el însuşi se numeşte ***endomorfism*** al lui G şi dacă, în plus, endomorfismul este bijectiv, el se numeşte ***automorfism*** al lui G.

Teorema 2.1 ***(Malţev)*** *Fie $(M, \cdot)$ un monoid comutativ, cu proprietatea de simplificare ($\forall\, x, y \in M$, aşa încât $x \cdot z = y \cdot z$, $\forall\, z \in M$, avem $x = y$). Există atunci un grup comutativ $G(M)$ şi un monomorfism de monoizi $i_M : M \to G(M)$, astfel că, pentru orice grup abelian G şi orice morfism de monoizi $f : M \to G$, se poate defini un unic morfism de grupuri $f' : G(M) \to G$ care satisface relaţia $f' \circ i_M = f$ (adică diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"'] & G(M) \arrow[dl, "f'"'] \\ G & \end{tikzcd}$$

este comutativă).

Demonstraţie: Pe mulţimea $M \times M$ se consideră relaţia "$\sim$", definită prin: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x \cdot y' = y \cdot x'$. Se constată că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $M \times M$, fiind reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Considerăm $G(M) = M \times M/_\sim$ (mulţimea claselor de echivalenţă din $M \times M$, în raport cu "$\sim$"). Definim operaţia "$\circ$": $G(M) \to G(M)$ prin

$$[(x, y)]_\sim \circ [(x', y')]_\sim = [(x \cdot x', y \cdot y')]_\sim,\ \forall\, [(x, y)]_\sim, [(x', y')]_\sim \in G(M),$$

unde $[(x, y)]_\sim$ este notaţia pentru clasa de echivalenţă cu reprezentantul $(x, y) \in M \times M$. Se vede că operaţia "$\circ$" este bine definită pe $G(M)$, nedepinzând de reprezentanţii claselor de echivalenţă implicate. De asemenea, se constată că $(G(M), \circ)$ este monoid, cu elementul neutru $[(e, e)]_\sim$ (unde e este elementul neutru din M). Cum, pentru orice $[(x, y)]_\sim \in M$, avem

$$[(x, y)]_\sim \circ [(y, x)]_\sim = [(xy, xy)]_\sim = [(e, e)]_\sim,$$

deducem că $[(y, x)]_\sim = [(x, y)]_\sim^{-1}$. Deci $U(G(M)) = G(M)$, adică $(G(M), \circ)$ este grup. În plus, $G(M)$ este şi comutativ.

Definim acum $i_M : M \to G(M)$, prin: $i_M(x) = [(x, e)]_\sim, \forall\, x \in M$. Avem $i_M(e) = [(e, e)]_\sim \equiv e' \in G(M)$ şi

$$i_M(x) \circ i_M(y) = [(x, e)]_\sim \circ [(y, e)]_\sim = [(x \cdot y, e)]_\sim = i_M(x \cdot y),\ \forall\, x, y \in M.$$

Deci i_M este morfism de monoizi. Cum, în plus, dacă $i_M(x) = i_M(y)$, adică $[(x, e)]_\sim = [(y, e)]_\sim$, rezultă $x = y$, se poate spune că i_M este şi injectiv. Aşadar i_M este un monomorfism de monoizi. Astfel, perechea $(G(M), i_M)$ verifică proprietatea din enunţul teoremei.

În continuare, dacă $(G, \star)$ este un grup abelian oarecare şi $f : M \to G$ este un morfism de monoizi, atunci, pentru $[(x, y)]_\sim \in G(M)$, definim $f' : G(M) \to G$ prin $f'([(x, y)]_\sim) = f(x) \star (f(y))^{-1}$. Observăm că, dacă $[(x, y)]_\sim = [(x', y')]_\sim$, atunci $x \cdot y' = x' \cdot y$ şi deci $f(x) \star f(y') = f(x') \star f(y)$, adică $f(x) \star (f(y))^{-1} = f(x') \star (f(y'))^{-1}$, ceea ce înseamnă că f' este corect definită. În plus, f' este morfism de grupuri deoarece:

$$\begin{aligned} f'([(x, y)]_\sim \circ [(x', y')]_\sim) = f'([(x \cdot x', y \cdot y')]_\sim) = \\ = f(x \cdot x') \star \big(f(y \cdot y')\big)^{-1} = f(x) \star f(x') \star \big(f(y')\big)^{-1} \star (f(y))^{-1} = \\ = \Big(f(x) \star (f(y))^{-1}\Big) \star \Big(f(x') \star \big(f(y')\big)^{-1}\Big) = \\ = f'([(x, y)]_\sim) \star f'([(x', y')]_\sim),\ \forall\, [(x, y)]_\sim, [(x', y')]_\sim \in G(M). \end{aligned}$$

De asemenea, avem: $(f' \circ i_M)(x) = f'(i_M(x)) = f'([(x, e)]_\sim) = f(x) \cdot (f(e))^{-1} = f(x), \forall\, x \in M$. Deci $f' \circ i_M = f$.

În privinţa unicităţii lui f', presupunând că ar mai exista un morfism $f'' : G(M) \to G$ aşa încât $f'' \circ i_M = f$, atunci am avea $f' \circ i_M = f = f'' \circ i_M$. Adică $(f'' \circ i_M)(x) = f''([(x, e)]_\sim) = f'([(x, e)]_\sim) = (f' \circ i_M)(x)$. În consecinţă am obţine:

$$\begin{aligned} f''([(x, y)]_\sim) = f''([(x, e)]_\sim \circ [(e, y)]_\sim) = f(x) \star (f(y))^{-1} = \\ = f'([(x, y)]_\sim),\ \forall\, [(x, y)]_\sim \in G(M). \end{aligned}$$

Deci $f'' \equiv f'$. ◀

Definiţia 2.8 *Un triplet $(A, +, \cdot)$, unde A este o mulţime nevidă, iar "$+$" şi "$\cdot$" sunt operaţii algebrice pe A, se numeşte* ***inel*** *dacă:*

i) $(A, +)$ *este grup comutativ;*

ii) $(A, \cdot)$ *este semigrup;*

iii) Operaţia "$\cdot$" este distributivă faţă de "+", adică

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ şi}$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \forall\, x, y, z \in A.$$

Dacă "$\cdot$" este o operaţie comutativă, atunci inelul A se numeşte ***comutativ***. Dacă "$\cdot$" are element neutru, atunci inelul A se numeşte ***unitar***. Dacă elementul neutru în raport cu "+" coincide cu cel în raport cu "$\cdot$", atunci ***inelul*** se numeşte ***nul***. În caz contrar, el se numeşte ***inel nenul***.

Prin convenţie, se notează: $A^* = A \setminus \{0\}$ (0 fiind elementul neutru în raport cu "+"). ***Mulţimea unităţilor unui inel unitar*** A, notată cu $U(A)$, este următoarea $\{a \in A \mid \ \exists\, b \in A$ aşa încât $a \cdot b = b \cdot a = 1\}$ (1 fiind notaţia pentru elementul neutru în raport cu "$\cdot$").

Definiţia 2.9 *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel. Un element* $a \in A$ *se numeşte* ***divizor al lui zero*** (0) ***la stânga*** *(respectiv* ***la dreapta****) dacă există* $b \in A^*$*, aşa încât* $a \cdot b = 0$ *(respectiv* $b \cdot a = 0$*).*

Definiţia 2.10 *Numim* ***domeniu de integritate (inel integru)*** *un inel comutativ, nenul şi fără divizori ai lui zero, diferiţi de zero.*

Definiţia 2.11 *Fiind date două inele* $(A, +, \cdot)$ *şi* $(B, \circ, \star)$*, o funcţie* $f : A \to B$ *se numeşte* ***morfism (/monomorfism/epimorfism/izomorfism) de inele****, dacă:*

j) $f(a + b) = f(a) \circ f(b),\ \forall\, a, b \in A$ *şi*

jj) $f(a \cdot b) = f(a) \star f(b),\ \forall\, a, b \in A$

(/iar f *este injectivă/surjectivă/bijectivă respectiv).*

Definiţia 2.12 *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel comutativ şi unitar. O submulţime nevidă* $S \subseteq A$ *se numeşte* ***sistem multiplicativ*** *dacă* $1 \in S$ *şi,* $\forall\, a, b \in S$*,* $a \cdot b \in S$ *(adică* $(S, \cdot)$ *este monoid).*

Dacă un sistem multiplicativ S nu are divizori ai lui zero, atunci se poate vorbi despre inelul "fracţiilor" relative la S, notat cu A_S şi introdus după cum urmează. Pe $A \times S$ se consideră relaţia binară "$\sim$", definită prin $(a, s) \sim (a', s') \leftrightarrow a \cdot s' = a' \cdot s$. Se vede lesne că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $A \times S$. Clasa de echivalenţă corespunzătoare lui $(a, s) \in A \times S$, se notează, simbolic, cu $\frac{a}{s}$ şi se numeşte "fracţie". Mulţimea factor $A \times S/_\sim$ se notează cu A_S. Deci: $A_S = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, 0 \neq s \in S\}$ (S nu are divizori ai lui 0). Cum $\frac{a}{s} = [(a, s)]_\sim$, $\forall\, a \in A$ şi $\forall\, s \in S \setminus \{0\}$, se pot defini operaţiile de adunare şi de înmulţire a fracţiilor prin:

$$\frac{a_1}{s_1} \oplus \frac{a_2}{s_2} = [(a_1 \cdot s_2 + a_2 \cdot s_1, s_1 \cdot s_2)]_\sim \text{ şi } \frac{a_1}{s_1} \odot \frac{a_2}{s_2} = [(a_1 \cdot a_2, s_1 \cdot s_2)]_\sim,$$

$\forall\, a_1, a_2 \in A$ şi $s_1, s_2 \in S \setminus \{0\}$. Atunci $(A_S, \oplus, \odot)$ este un inel comutativ unitar şi se poate defini morfismul injectiv (monomorfismul) de inele unitare, $i_S : A \to A_S$, prin: $i_S(a) = \frac{a}{1} = [(a, 1)]_\sim \in A_S$. În plus, $i_S(s) \in U(A_S), \forall\, s \in S \setminus \{0\}$.

Definiţia 2.13 *Un inel unitar* $(K, +, \cdot)$ *se numeşte* ***corp*** *dacă* $U(K) = K^* \equiv K \setminus \{0\}$*.*

Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel integru, atunci se poate vedea că A_S, unde S este mulţimea tuturor non-divizorilor lui zero (adică A^*), este un corp numit ***corpul de fracţii*** (câturi) al lui A.

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Axiomatic, bazându-ne pe consideraţiile lui G. Peano, s-ar putea introduce mulţimea numerelor naturale atâta timp cât admitem existenţa a cel puţin unui aşa-numit triplet Peano.

Definiţia 2.14 *Entitatea matematică $(N, 0, s)$, în care N este o mulţime nevidă, $0 \in N$ şi $s : N \to N$ este o funcţie astfel încât au loc axiomele*

(P_1) $0 \notin s(N)$,

(P_2) s este injectivă,

(P_3) dacă $M \subseteq N$, $0 \in M$ şi $\forall n \in M \Rightarrow s(n) \in M$, atunci $M = N$,

se numeşte ***triplet Peano***.

Firesc, $(P_1) \sim (P_3)$ se numesc ***axiome Peano***.

Propoziţia 2.1 *Dacă $(N, 0, s)$ este un triplet Peano, atunci $N = \{0\} \cup s(N)$.*

Demonstraţie: Fie $M = \{0\} \cup s(N)$. Aşadar, $M \subseteq N$ şi, cu evidenţă, M verifică (P_3) (numită axioma inducţiei matematice). Astfel $0 \in M$ şi $\forall n \in M, s(n) \in M$. În consecinţă $M = N$. ◀

Teorema 2.2 *Orice triplet Peano este unic până la o bijecţie. Mai exact, dacă $(N, 0, s)$ este un triplet Peano, iar $(N', 0', s')$ este un alt triplet, nu numaidecât Peano, format dintr-o mulţime nevidă N', un element $0' \in N'$ şi o funcţie $s' : N' \to N'$, atunci există o funcţie unică $f : N \to N'$ aşa încât $f(0) = 0'$ şi $f \circ s = s' \circ f$, adică diagrama următoare*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N' \\ \downarrow s & & \downarrow s' \\ N & \xrightarrow{f} & N' \end{array}$$

este comutativă. Dacă $(N', 0', s')$ este chiar triplet Peano, atunci f este o bijecţie.

Demonstraţie: În prima situaţie, pentru existenţa lui f, considerăm toate relaţiile binare $R \subseteq N \times N'$ pentru care avem satisfăcute următoarele condiţii:

(I_1) $(0, 0') \in R$ şi

(I_2) dacă $(n, n') \in R$, atunci $(s(n), s'(n')) \in R$.

Mulţimea acestor relaţii nu este vidă, deoarece cel puţin $N \times N'$ este o astfel de relaţie (care verifică ambele impuneri (I_1) şi (I_2)). Fie $R_0 = \bigcap R$ (intersecţia tuturor relaţiilor ce satisfac (I_1) şi (I_2)). Se arată că R_0 este o relaţie funcţională ce defineşte pe f (funcţia cu graficul R_0). Pentru o asemenea funcţie, ţinând seama de (I_1), avem $(0, 0') \in R_0$, adică $f(0) = 0'$. Pe de altă parte, în virtutea condiţiei (I_2), dacă n este arbitrar din N şi $n' = f(n) \in N'$, adică $(n, n') \in R_0$, atunci $(s(n), s'(n')) \in R_0$, deci $f(s(n)) = s'(f(n)) = s'(n')$. Altfel spus, avem $f \circ s = s' \circ f$.

Pentru a vedea că R_0 este într-adevăr o relaţie funcţională, considerăm $M = \{n \in N \mid \exists n' \in N'$ aşa încât $(n, n') \in R_0\} \subseteq N$ şi arătăm că M satisface (P_3) (din Definiţia 2.14). În acest sens, pe baza ipotezei (I_1), avem $(0, 0') \in R_0$ şi deci $0 \in M$. Folosind (I_2), $\forall n \in M$, cu $n' \in N'$ aşa încât $(n, n') \in R_0$, avem $(s(n), s'(n')) \in R_0$. Deci $s(n) \in M$. Astfel, în virtutea axiomei (P_3), deoarece $(N, 0, s)$ este un triplet Peano, rezultă că $M = N$. Aşadar, deocamdată, R_0 este o relaţie binară între întreaga mulţime N şi mulţimea N'. În continuare, considerând mulţimea $\tilde{M} = \{n \in N \mid n', n'' \in N \text{ şi } (n, n'), (n, n'') \in R_0 \Rightarrow n' = n''\} \subseteq N$, arătăm că $\tilde{M} = N$, ceea ce ar însemna că R_0 este o relaţie funcţională de la N la N'. În acest scop, vedem mai întâi că, dacă $(0, n') \in R_0$ (cum, deja, $(0, 0') \in R_0$), atunci $n' = 0'$. Dacă însă, prin absurd, $n' \neq 0'$, atunci luăm în considerare relaţia $R_1 = R_0 \setminus \{(0, n')\} \subset N \times N'$. Cum $n' \neq 0'$, folosind (I_1), deducem că $(0, 0') \in R_1$. Dacă, pentru $m \in N'$, avem $(n, m) \in R_1$, atunci $(n, m) \in R_0$ şi $(n, m) \neq (0, n')$. Prin (I_2), deducem că $(s(n), s'(m)) \in R_0$ şi, cum $(s(n), s'(m)) \neq (0, n')$ (căci $s(n) \neq 0$, în conformitate cu (P_1)), avem: $(s(n), s'(m)) \in R_1$. Prin urmare, R_1 verifică (I_1) şi (I_2), ceea ce înseamnă că ar trebui să avem $R_0 \subseteq R_1$, contrar faptului că, în realitate, $R_1 \subset R_0$. În consecinţă, contradicţia ne asigură că $n' = 0'$.

Putem afirma acum că $0 \in \tilde{M}$, întrucât, dacă n' şi n'', din N', sunt aşa încât $(0, n')$ şi $(0, n'') \in R_0$, atunci, în mod necesar, avem $n' = n'' = 0'$.

Mai departe, fie $n \in \tilde{M}$ şi $n' \in N'$ aşa încât $(n, n') \in R_0$. Arătăm că, dacă avem $(s(n), n'') \in R_0$ (cu $n'' \in N'$), atunci $n'' = s'(n')$. Să admitem, prin absurd, că $n'' \neq s'(n')$. Considerând atunci relaţia $R_2 = R_0 \setminus \{(s(n), n'')\}$, vedem că R_2 satisface (I_1) şi (I_2). Într-adevăr, $(0, 0') \in R_2$ (căci $0 \neq s(n)$) (adică are loc (I_1)), iar dacă $(p, p') \in R_2$, atunci $(p, p') \in R_0$ şi $(p, p') \neq (s(n), n'')$. Prin (I_2), deducem că $(s(p), s'(p')) \in R_0$. Dacă presupunem că $(s(p), s'(p')) = (s(n), n'')$, am avea $s(p) = s(n)$, adică $p = n$, şi $s'(p') = n''$. Atunci, cum $(n, n') \in R_0$ şi $(n, p') = (p, p') \in R_0$, iar $n \in \tilde{M}$, găsim $n' = p'$. Astfel, am găsi că $n'' = s'(p') = s'(n')$, ceea ce contrazice presupunerea $n'' \neq s'(n')$. Prin urmare, avem $(s(p), s'(p')) \neq (s(n), n'')$, adică $(s(p), s'(p')) \in R_2$. Cu alte cuvinte, R_2 satisface (I_1) şi (I_2) şi ar trebui ca $R_0 \subseteq R_2$, contrazicând realitatea considerată ($R_2 \subsetneq R_0$). În consecinţă, $(s(n), n'') \in R_0$ implică $n'' = s'(n')$, aşa că, dacă $r, t \in N'$ şi $(s(r), r), (s(t), t) \in R_0$, atunci $r = t = s'(n')$. Aşadar $\tilde{M} = N$, adică R_0 este de tip funcţional.

Pentru a arăta că f este unică, admitem prin absurd că mai există o funcţie $f' : N \to N'$ aşa încât $f'(0) = 0'$ şi $s'(f'(n)) = f'(s(n))$, $\forall\, n \in N$. Considerăm mulţimea $\hat{M} = \{n \in N \mid f(n) = f'(n)\} \subseteq N$. Observăm că $0 \in \hat{M}$ (întrucât $f(0) = f'(0) = 0'$). În plus, dacă $n \in \hat{M}$, adică $f(n) = f'(n)$, atunci $s'(f(n)) = s'(f'(n))$, de unde: $f(s(n)) = f'(s(n))$. Deci $s(n) \in \hat{M}$. Aşadar, prin (P_3), avem $\hat{M} = N$. Altfel spus, $f = f'$ (peste tot pe N).

Finalmente, arătăm că dacă $(N', 0', s')$ este un triplet Peano, atunci f este o bijecţie. Mai întâi, fie $P = \{n \in N \mid \text{dacă } m \in N \text{ şi } f(m) = f(n), \text{ atunci } m = n\} \subseteq N$. Sesizăm că $0 \in P$, întrucât, dacă $m \in N$ este aşa încât $f(m) = f(0)$, atunci $m = 0$. Altfel, dacă $m \neq 0$, atunci, în conformitate cu Propoziţia 2.1, există $n \in N$ aşa încât $m = s(n)$ şi $f(s(n)) = f(0) = 0'$, adică $s'(f(n)) = 0'$, ceea ce nu se poate, deoarece, prin ipoteză, $(N', 0', s')$ este un triplet Peano şi deci, prin (P_1), $0'$ nu este "succesorul" niciunui element din N'.

Fie acum $n \in P$, arbitrar. Să arătăm că $s(n) \in P$. Luăm atunci $m \in N$, aşa încât $f(m) = f(s(n))$. Este clar că $m \neq 0$. Altfel, ar rezulta că $0' = f(0) = f(s(n)) = s'(f(n))$, ceea ce ar fi contrar axiomei (P_1), verificată de tripletul Peano $(N', s', 0')$. Deci $m \neq 0$ şi atunci, aplicând Propoziţia 2.1, există $u \in N$ aşa încât $m = s(u)$. Astfel, avem $f(m) = f(s(u)) = f(s(n))$, adică $s'(f(u)) = s'(f(n))$, ceea ce implică $f(u) = f(n)$. Cum $n \in P$, reiese că $u = n$, de unde $m = s(u) = s(n)$. În concluzie, $P = N$ şi f este injectivă.

Pentru a arăta surjectivitatea lui f, considerăm mulţimea $Q = \{n' \in N' \mid \exists\, n \in N \text{ aşa încât } n' = f(n)\}$. Cum $f(0) = 0'$, deducem că $0' \in Q$. În plus, dacă $n' \in Q$, atunci $\exists\, n \in N$, aşa încât $n' = f(n)$. Astfel, $s'(n') = s'(f(n)) = f(s(n'))$, adică $s'(n') \in Q$. Concluzia este că avem $Q = N'$, întrucât $(N', s', 0')$ este triplet Peano. Aşadar, f este şi surjectivă. ◀

Pe baza Teoremei 2.2, putem considera că, în definitiv, esenţial este un reprezentant al tuturor tripletelor Peano existente. Mulţimea dintr-un asemenea triplet se numeşte, prin convenţie, ***mulţime a numerelor naturale*** şi se notează cu $\mathbb{N}$. Elementul 0 se va numi ***prim element*** al lui $\mathbb{N}$, iar funcţia s - ***funcţie de succesiune***. Drept urmare, elementul $s(n)$ se va numi ***succesorul*** lui $n \in \mathbb{N}$.

Tot axiomatic, se pot introduce operaţiile algebrice de ***adunare*** şi de ***înmulţire a numerelor naturale***, în raport cu care, atât $(\mathbb{N}, +)$ cât şi $(\mathbb{N}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.

Teorema 2.3 ***(Axiomele adunării numerelor naturale)*** *Există o unică operaţie algebrică pe* $\mathbb{N}$, *notată cu "+" şi denumită adunare a numerelor naturale, astfel încât să avem:*

(A₁) $0 + m = m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$ *şi*

(A₂) $s(n) + m = s(n + m)$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie: Fie $m \in \mathbb{N}$, arbitrar fixat. Considerăm tripletul Peano $(\mathbb{N}, m, s)$. Potrivit Teoremei 2.2, există o funcţie bijectivă unică $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel ca $f_m(0) = m$ şi $s(f_m(n)) = f_m(s(n))$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, arbitrar fixat, definim operaţia "+" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prin $n + m = f_m(n)$. Atunci, $0 + m = f_m(0) = m$ şi $s(n) + m = f_m(s(n)) = s(f_m(n)) = s(n + m)$. Deci au loc (A_1) şi (A_2). ◀

Propoziţia 2.2 *Au loc relaţiile:*

a) $m + 0 = m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$,

b) $n + s(m) = s(n + m)$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$

Demonstraţie: Pentru m fixat arbitar în $\mathbb{N}$, considerăm mulţimile $L = \{m \in \mathbb{N} \mid m + 0 = m\} \subseteq \mathbb{N}$ şi $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n + s(m) = s(n+m)\} \subseteq \mathbb{N}$. Arătăm că L şi S se supun axiomei (P_3) din definiţia unui triplet Peano. În acest fel, obţinem faptul că $L = \mathbb{N}$ şi $S = \mathbb{N}$, ceea ce asigură valabilitatea relaţiilor a) şi b) din enunţul acestei propoziţii.

Într-adevăr, cum, în $\mathbb{N}$, are loc (A_1) din Teorema 2.3, luând acolo $m = 0$, avem: $0 + 0 = 0$. Deci $0 \in L$. Apoi, dacă $m \in L$, atunci $m + 0 = m$ şi $s(m) + 0 = s(m + 0) = s(m)$, adică: $s(m) \in L$. Aşadar, $L = \mathbb{N}$ (prin (P_3)), adică a).

Pentru b), observăm că $0 \in S$, deoarece: $0 + s(m) = s(0 + m) = s(m)$. De asemenea, dacă $n \in S$, atunci $n + s(m) = s(n + m)$ şi, mai departe, $s(n) + s(m) = s(n + s(m))$. Deci $s(n) \in S$, adică $S = \mathbb{N}$. Astfel, are loc b). ◀

Propoziţia 2.3 $(\mathbb{N}, +)$ *este un monoid (aditiv) comutativ, cu proprietatea de simplificare (dacă* $m, n \in \mathbb{N}$ *sunt aşa încât* $m + p = n + p$, *cu* $p \in \mathbb{N}$, *atunci* $m = n$*).*

Demonstraţie: În conformitate cu (A_1) din Teorema 2.3 şi cu a) din Propoziţia 2.2, reiese că 0 este element neutru pentru adunarea numerelor naturale.

Pentru a demonstra asociativitatea adunării numerelor naturale, considerăm mulţimea $B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n + m) + p = n + (m + p), \forall\, m, p \in \mathbb{N}\}$. Evident $0 \in B$. Totodată, dacă $n \in B$, avem $s(n) \in B$, deoarece: $(s(n) + m) + p = s((n + m) + p) = s(n + (m + p)) = s(n) + m + p$, $\forall\, m, p \in \mathbb{N}$. Aşadar, B satisface (P_3) din Definiţia 2.14 şi deci $B = \mathbb{N}$.

Comutativitatea adunării numerelor naturale se dovedeşte în mod asemănător, arătând că mulţimea $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n+m = m+n, \forall\, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ satisface (P_3). În acest sens, constatăm că $0 \in D$ (deoarece $0 + m = m = m + 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$) şi că, dacă $n \in D$, atunci şi $s(n) \in D$, întrucât avem:

$$s(n) + m = s(n + m) = s(m + n) = m + s(n), \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

În consecinţă, $D = \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că operaţia de adunare este într-adevăr comutativă pe $\mathbb{N}$.

Pentru final, privitor la "simplificare", fie $m, n \in \mathbb{N}$ (fixate arbitrar) şi $H = \{p \in \mathbb{N} \mid n + p = m + p \Rightarrow m = n\} \subseteq \mathbb{N}$. Vedem că $0 \in H$, întrucât $n + 0 = m + 0 \Rightarrow n = m$. De asemenea, deducem că dacă $p \in H$, atunci şi $s(p) \in H$, deoarece avem:

$$n + s(p) = m + s(p) \Leftrightarrow s(n + p) = s(m + p) \Rightarrow n + p = m + p \Rightarrow n = m.$$

Deci $H = \mathbb{N}$. ◀

Convenind să notăm cu 1 succesorul lui 0 ($1 = s(0)$), avem: $s(n) = s(n+0) = n + s(0) = n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. În felul acesta, reiese că $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, unde, tot convenţional, am adoptat notaţiile $2 = s(1), 3 = s(2)$ etc.

Se poate arăta că, dacă m şi n sunt din $\mathbb{N}$, aşa încât $m + n = 0$, atunci, în mod necesar, avem: $m = n = 0$.

Teorema 2.4 *(**Axiomele înmulţirii numerelor naturale**) Există o unică operaţie algebrică pe $\mathbb{N}$, notată cu "$\cdot$" şi denumită **înmulţire a numerelor naturale**, astfel încât au loc relaţiile:*

I_1) $m \cdot 0 = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$;

I_2) $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie: Fie $m \in \mathbb{N}$, fixat arbitrar, şi tripletul Peano $(\mathbb{N}, 0, f_m)$, unde $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este definită prin $f_m(n) = n + m$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci, potrivit Teoremei 2.2, există o funcţie unică, $g_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aşa încât $g_m(0) = 0$ şi $f_m \circ g_m = g_m \circ s$. Definim atunci operaţia de înmulţire "$\cdot$" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to N$, prin: $m \cdot n = g_m(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Astfel, avem: $m \cdot 0 = g_m(0) = 0$ (adică I_1)) şi $m \cdot s(n) = g_m(s(n)) = (g_m \circ s)(n) = (f_m \circ g_m)(n) = f_m(g_m(n)) = f_m(m \cdot n) = m \cdot n + m$ (adică I_2)) ◀

Ca şi în cazul adunării numerelor naturale, se poate demonstra, în mod cu totul analog, că au loc relaţiile:

c) $0 \cdot m = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$;

d) $s(n) \cdot m = n \cdot m + m$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2.4 *Înmulţirea numerelor naturale este distributivă, la stânga, faţă de adunarea numerelor naturale.*

Demonstraţie: Fie $M = \{p \in \mathbb{N} \mid m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall\, m, n \in \mathbb{N}\}$. Avem $0 \in M$, deoarece $m \cdot (n + 0) = m \cdot n = m \cdot n + 0 = m \cdot n + m \cdot 0$. De asemenea, dacă $p \in M$ şi $m, n \in \mathbb{N}$, avem:

$$m \cdot (n + s(p)) = m \cdot s(n + p) = m \cdot (n + p) + m = m \cdot n + m \cdot p + m = m \cdot n + m \cdot s(p).$$

Deci $s(p) \in M$. Astfel, în conformitate cu (P_3) din Definiţia 2.14, deducem că $M = N$. Altfel spus, distributivitatea la stânga a înmulţirii faţă de adunare, are loc peste tot pe $\mathbb{N}$. ◀

Teorema 2.5 *Dubletul $(\mathbb{N}, \cdot)$ este monoid (multiplicativ) comutativ, în care, dacă $m, n \in \mathbb{N}$ şi $m \cdot n = 0$, atunci $m = 0$ sau $n = 0$.*

Demonstraţie: Asociativitatea înmulţirii pe $\mathbb{N}$ se arată considerând mulţimea $P = \{p \in \mathbb{N} \mid (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p), \forall\, m, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Cu evidenţă, $0 \in P$, deoarece: $(m \cdot n) \cdot 0 = 0 = m \cdot 0 = m \cdot (n \cdot 0)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$. În plus, dacă $p \in P$, avem şi $s(p) \in P$, întrucât:

$$(m \cdot n) \cdot s(p) = (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n = m \cdot (n \cdot p + n) = m \cdot (n \cdot s(p)), \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

Deci P satisface (P_3) din Definiţia 2.14 şi, în consecinţă, $P = N$.

Cum, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, avem $n \cdot 1 = n \cdot s(0) = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$, iar $1 \cdot n = s(0) \cdot n = 0 + n = n$, deducem că 1 (adică $s(0)$) este elementul neutru al înmulţirii numerelor naturale.

Pentru a vedea că înmulţirea este comutativă, luăm în considerare mulţimea $Q = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot m = m \cdot n, \forall\, m \in \mathbb{N}\}$. Vedem că $0 \in Q$, deoarece $0 \cdot m = 0 = m \cdot 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. De asemenea, dacă $n \in Q$, avem:

$$s(n) \cdot m = n \cdot m + m = m \cdot n + m = m \cdot s(n), \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Deci $s(n) \in Q$ şi, prin (P_3), $Q = \mathbb{N}$.

În fine, dacă $m, n \in \mathbb{N}$ sunt aşa încât $m \cdot n = 0$ şi $m \neq 0$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ încât $m = s(k)$ şi avem:

$$0 = m \cdot n = s(k) \cdot n = k \cdot n + n.$$

De aici, rezultă că $n = 0$ şi $k \cdot n = 0$, cu necesitate. ◀

Definiţia 2.15 *Pentru $m, n \in \mathbb{N}$, scriem $m \leq n$ şi spunem că m este* ***mai mic sau egal decât*** *n (sau, echivalent, că n este* ***mai mare sau egal decât*** *m), dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m + p = n$.*

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ sunt aşa încât $m \leq n$ şi $m \neq n$, atunci scriem $m < n$ şi spunem că m este ***strict mai mic decât*** *n. În acest caz, există $p \in \mathbb{N}^* = s(\mathbb{N})$, aşa încât $m + p = n$.*

Propoziţia 2.5 *Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ şi $m < n$, atunci $s(m) \leqslant n$.*

Demonstraţie: Fie $m, n \in \mathbb{N}$, încât $m < n$. Atunci $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m + p = n$. Cum $p \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N}$ încât $p = s(k)$. Prin urmare, avem: $m + p = n \Leftrightarrow m + s(k) = n \Leftrightarrow s(m + k) = n \Leftrightarrow s(m) + k = n \Rightarrow s(m) \leq n$. ◀

Se poate, relativ uşor, vedea că $n < s(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.6 *Dubletul $(\mathbb{N}, \leqslant)$ este o mulţime total şi bine ordonată, adică relaţia "$\leqslant$" este una de totală ordine pe $\mathbb{N}$ şi orice submulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element.*

Demonstraţie: Pentru început, deoarece $n + 0 = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, vedem că $n \leq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Deci relaţia "$\leq$" este reflexivă pe $\mathbb{N}$. Luând apoi $m, n \in \mathbb{N}$ aşa încât $m \leq n$ şi $n \leq m$, vor exista p şi q din $\mathbb{N}$ aşa încât $m + p = n$ şi $n + q = m$. Deducem de aici că $m + (p + q) = m$, de unde reiese că $p + q = 0$. Deci $p = q = 0$. Astfel, rezultă că $m = n$. Altfel spus, relaţia "$\leq$" este antisimetrică. În fine, dacă $m, n, p \in \mathbb{N}$ sunt aşa încât $m \leq n$ şi $n \leq p$, atunci există r şi $s \in \mathbb{N}$ ca să avem $m + r = n$ şi $n + s = p$. Deducem că $m + (r + s) = p$, adică $m \leq p$. Aşadar, relaţia "$\leq$" este şi tranzitivă, fiind de fapt o relaţie de parţială ordine pe $\mathbb{N}$.

În scopul demonstrării faptului ca "$\leq$" este o relaţie de ordine totală (numită ***ordinea naturală***) pe $\mathbb{N}$, considerăm $m \in \mathbb{N}$, arbitrar fixat şi, faţă de acesta, mulţimea $P_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \text{ sau } m \leq n\} \subseteq \mathbb{N}$. Observăm că $0 \in P_m$, deoarece $0 \leq m$, cu evidenţă. Luând acum un n oarecare din P_m, deducem că, dacă $n = m$, atunci, întrucât $n < s(n)$, avem $m < s(n)$, adică $s(n) \in P_m$. Dacă $n < m$, atunci, în conformitate cu Propoziţia 2.5, avem $s(n) \leq m$ şi deci, iarăşi, $s(n) \in P_m$. Dacă $m < n$, cum $n < s(n)$ şi "$\leq$" este o relaţie tranzitivă, avem $m < s(n)$ şi deci $s(n) \in P_m$. Prin (P_3), rezultă aşadar că $P_m = \mathbb{N}$. Cum m este oarecare în $\mathbb{N}$, reiese că ordinea "$\leq$" este totală pe $\mathbb{N}$.

Arătăm acum că $(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată. Fie, în acest scop, o mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{N}$ şi $Q = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a, \forall\, a \in A\}$. Evident, $0 \in Q$. Dacă, pe lângă asta, $\forall\, n \in Q$, ar rezulta că $s(n) \in Q$, atunci am avea, prin (P_3), $Q = \mathbb{N}$. În consecinţă, alegând un $a \in A \subseteq \mathbb{N} = Q$, am putea spune că $s(a) \in Q$. Or, acest lucru ar însemna că $s(a) \leq a$, ceea ce ar fi absurd. Deducem astfel că, de fapt, avem $Q \subsetneq \mathbb{N}$. Există deci $r \in Q$ aşa încât $s(r) \notin Q$. Arătăm că $r \in A$ şi că r este cel mai mic element al lui A. Dacă r nu ar aparţine lui A, atunci, fiind din Q, am avea $r < a$, $\forall\, a \in A$. De aici ar reieşi că $s(r) \leq a$, $\forall\, a \in A$. Deci $s(r) \in Q$ (absurd). Aşadar, $r \in A$ şi, cum $r \in Q$, avem $r \leq a$, $\forall\, a \in A$. Deci r este cel mai mic element al lui A. ◀

Observaţii

1) În virtutea Definiţiei 1.20-b, se poate vedea că $\mathbb{N}$ este un ordinal infinit şi anume chiar cel mai mic, adică ω.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, mulţimea $\{0, 1, \ldots, n\}$ este, de asemenea, un ordinal şi anume un ordinal finit.

3) Un ordinal defineşte un număr natural, dacă şi numai dacă orice submulţime nevidă a sa are cel mai mare element.

4) Intuitiv, un ordinal desemnează poziţii într-un şir bine ordonat de entităţi şi, de aceea, prin analogie cu elementele lui $\mathbb{N}$ i se mai spune ***număr ordinal***.

Principiul inducţiei transfinite

Varianta I: Fie $P(x)$ o proprietate astfel încât, pentru orice ordinal α, avem:

$$\forall\, \beta\ (\beta < \alpha \Longrightarrow P(\beta)) \Longrightarrow P(\alpha)$$

Atunci P este satisfăcută de orice ordinal.

Varianta II: Fie $P(x)$ o proprietate astfel încât:

j) $P(0)$ are loc;

jj) pentru orice ordinal α, $P(\alpha)$ implică $P(S(\alpha))$;

jjj) pentru orice ordinal limită $\alpha \neq 0$, dacă $P(\beta)$ are loc pentru orice $\beta < \alpha$, atunci şi $P(\alpha)$ are loc.

Atunci P este satisfăcută de toţi ordinalii.

Principiul recursiei transfinite

Fie γ un ordinal, adică un element al mulţimii Ord, A o mulţime oarecare şi $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor (inclusiv cea vidă) cu valori în A şi definite pe $\{\beta \in Ord \mid \beta < \gamma\}$. De asemenea, fie $H : \mathcal{F} \to A$. Atunci există o funcţie unică G, cu domeniul $\{\alpha \in Ord \mid \alpha < \gamma\}$, astfel încât, pentru orice $\alpha < \gamma$, are loc relaţia:

$$G(\alpha) = H\left(G|_{\{\beta \in Ord\ \mid\ \beta < \alpha\}}\right).$$

Aritmetica ordinalilor

Pe baza principiului recursiei transfinite, se pot defini operaţiile de adunare, înmulţire şi exponenţiere a numerelor ordinale. Prin folosirea unor notaţii similare celor de la aritmetica numerelor naturale, succesorul unui ordinal α (adică $S(\alpha)$) va fi redat prin $\alpha + 1$ şi operaţiile cu ordinale specificate mai sus se pot exprima mai lesne, fiind introduse, împreună cu proprietăţile lor definitorii, după cum urmează.

Propoziţia 2.6 *1° Există "+": $Ord \times Ord \to Ord$, astfel încât:*

(a) $\alpha + 0 = \alpha$, $\forall\, \alpha \in Ord$,

(b) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$, $\forall\, \alpha, \beta \in Ord$,

(c) $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$, $\forall\, \alpha, \beta \in Ord$, $\beta =$ *ordinal limită,* $\beta \neq 0$.

2° Există "·": $Ord \times Ord \to Ord$, astfel încât:

(a) $\alpha \cdot 0 = 0, \forall \alpha \in Ord,$

(b) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha, \forall \alpha, \beta \in Ord,$

(c) $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}, \forall \alpha, \beta \in Ord,$ $\beta =$ *ordinal limită,* $\beta \neq 0.$

3° Există "^": $Ord \times Ord \to Ord$, astfel încât:

(a) $\alpha\hat{}0 = 1, \forall \alpha \in Ord,$

(b) $\alpha\hat{}(\beta + 1) = (\alpha\hat{}\beta) \cdot \alpha, \forall \alpha, \beta \in Ord,$

(c) $\alpha\hat{}\beta = \sup \{\alpha\hat{}\gamma \mid \gamma < \beta\}, \forall \alpha, \beta \in Ord,$ $\beta =$ *ordinal limită,* $\beta \neq 0.$

Se poate vedea că adunarea ordinalilor şi înmulţirea ordinalilor sunt asociative, dar nu şi comutative. De asemenea, înmulţirea ordinalilor se dovedeşte a fi distributivă faţă de adunare.

Observaţii

1) O mulţime A care este echipotentă cu o mulţime de numere naturale de forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) se numeşte ***mulţime finită*** şi are cardinalul egal cu n.

2) O mulţime care nu este finită se numeşte ***mulţime infinită***.

3) Cardinalul unei mulţimi finite se numeşte ***cardinal finit***, iar cardinalul unei mulţimi infinite se numeşte ***cardinal transfinit***.

4) O mulţime echipotentă cu $\mathbb{N}$ se numeşte ***mulţime numărabilă***, cardinalul său fiind notat cu $\aleph_0$ (alef zero).

5) O mulţime care este finită sau numărabilă se numeşte ***cel mult numărabilă***.

1. Se poate arăta că orice mulţime infinită A conţine o submulţime numărabilă, ceea ce, formulat altfel, înseamnă că, pentru A, are loc relaţia:

$$\aleph_0 \leqslant card(A).$$

Operaţii aritmetice cu numere cardinale

Pentru $\alpha = card(A)$ şi $\beta = card(B)$, se pot defini următoarele operaţii (cu numere cardinale):

$$\alpha + \beta = card(A \cup B), \text{ dacă } A \cap B = \varnothing,$$

$$\alpha \cdot \beta = card(A \times B)$$

$$\alpha^\beta = card(\{f : B \to A\})$$

Observaţii

1) Adunarea, înmulţirea şi exponenţierea numerelor cardinale, restricţionate la cardinali finiţi, coincid cu operaţiile corespunzătoare pe $\mathbb{N}$.

2) Pentru orice cardinal α, avem $\alpha + 1 = \alpha$ dacă şi numai dacă α este un cardinal infinit.

Mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$

Definiţia 2.16 *Fie monoidul* $(\mathbb{N}, +)$. *Prin tehnica din Teorema 2.1 (Malţev), mulţimea ce corespunde grupului aditiv* $(G(\mathbb{N}), +)$ *se notează cu* $\mathbb{Z}$ *şi poartă denumirea de* ***mulţime a numerelor întregi****. Corespunzător,* $(\mathbb{Z}, +)$ *este grupul aditiv, abelian, al numerelor întregi.*

Potrivit respectivei Teoreme 2.1, există monomorfismul de monoizi $i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definit prin $i_{\mathbb{N}}(n) = [(n, 0)]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. În virtutea acestuia, "identificăm" fiecare număr natural n cu "întregul" $[(n, 0)]$. Astfel, putem spune că avem: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Totodată, clasa $[(n, n)]$ se notează cu 0 ($\in \mathbb{Z}$), pe când elementul $[(0, p)] = -[(p, 0)]$ se identifică cu numărul întreg $-p$ ($p \in \mathbb{N}$). Ţinând cont de acestea, putem scrie: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^*)$, cu $(-\mathbb{N}^*) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Deci: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Pe $\mathbb{Z} \cong G(\mathbb{N})$, se mai poate defini şi înmulţirea (numerelor întregi), prin:

$$(*) \quad \alpha \cdot \beta = [(xz + yt, xt + yz)],\ \forall\, \alpha = [(x, y)], \beta = [(z, t)] \in \mathbb{Z}.$$

Propoziţia 2.7 *Dubletul* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *este un monoid (multiplicativ) comutativ, în care operaţia "$\cdot$" este distributivă faţă de "$+$" şi, dacă* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ *sunt aşa încât* $\alpha \cdot \beta = 0$*, atunci* $\alpha = 0$ *sau* $\beta = 0$.

Demonstraţie: Se arată simplu că înmulţirea numerelor întregi, în sensul relaţiei de definiţie $(*)$, este asociativă, are elementul neutru $1 = [(1, 0)]$, este comutativă şi distributivă faţă de adunarea numerelor întregi. Se vede apoi că, dacă $\alpha = [(x, y)], \beta = [(x', y')] \in \mathbb{Z}$ sunt astfel încât $\alpha \cdot \beta = 0$ şi $\alpha \neq 0$, adică $[(x, y)] \cdot [(x', y')] = [(0, 0)]$ şi $x \neq y$, atunci $x' = y'$, adică $\beta = 0$. La fel, dacă $\beta \neq 0$, rezultă $\alpha = 0$. ◀

Se poate afirma acum că $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este un inel integru, în care $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este un sistem multiplicativ maximal.

Definiţia 2.17 *Pentru* $x, y \in \mathbb{Z}$*, spunem că* $x \leqslant y$*, dacă şi numai dacă* $y - x \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2.8 *Dubletul* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *este o mulţime total ordonată.*

Demonstraţie: Se arată lesne că "$\leqslant$" este o relaţie binară reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă pe $\mathbb{Z}$. Faptul că avem $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}^*) \cup \mathbb{N}$ ne spune că relaţia de ordine "$\leqslant$" este şi totală pe $\mathbb{Z}$. ◀

În sensul definirii corpului total de fracţii al unui inel integru, putem spune acum că, relativ la $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, corpul corespunzător este tocmai mulţimea $\mathbb{Q}$ a ***numerelor raţionale***. În plus, prin existenţa monomorfismului $i_{\mathbb{Z}^*} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, putem conta pe relaţia $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. De asemenea, prin extensie, se poate vorbi de o relaţie totală de ordine pe $\mathbb{Q}$, definită prin:

$$u, v \in \mathbb{Q}, u \leq v \Longleftrightarrow \exists\, w \in \mathbb{Q}_+ = i_{\mathbb{Z}_+^*}(\mathbb{Z}_+) = i_{\mathbb{N}_+^*}(\mathbb{N}_+) \text{ cu } u + w = v.$$

Deci $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ este un corp total ordonat, cu ordinea compatibilă cu "$+$" şi, pentru elemente din $\mathbb{Q}_+$, chiar cu "$\cdot$".

Analizând mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}$, observăm că ea este majorată în $\mathbb{Q}$, dar $\sup A \notin \mathbb{Q}$. Prin urmare există submulţimi ale lui $\mathbb{Q}$ care, majorate fiind, nu-şi au marginea superioară în $\mathbb{Q}$. Dintr-un astfel de punct de vedere, spunem că mulţimea $\mathbb{Q}$ nu-i completă, în sens Cantor-Dedekind. Mulţimea care satisface, pe lângă axiomele îndeplinite de $\mathbb{Q}$, şi ***axioma de completitudine a lui Cantor-Dedekind***, potrivit căreia, orice submulţime nevidă şi majorată a ei are cel puţin o margine superioară (în mulţimea de referinţă) este ***mulţimea numerelor reale***, notată cu $\mathbb{R}$.

Mulţimile $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

Faptul că mulţimea $\mathbb{R}$, cu caracteristicile deja menţionate, există într-adevăr se poate arăta în câteva moduri, între care specificăm aici, metoda lui Dedekind, bazată pe aşa-numita noţiune de tăietură, metoda lui Weierstrass, sprijinită pe noţiunea de fracţie zecimală şi metoda lui Cantor, axată pe noţiunea de şir fundamental (Cauchy) de numere raţionale. Aceasta din urmă, neeludând principiul teoremei lui Malţev, va fi prezentată, preferenţial, în secţiunea ce urmează celei de faţă şi se referă la şiruri de elemente din inele şi corpuri ordonate, precum $\mathbb{Q}$.

Deocamdată, din cele spuse până aici, se impune atenţiei următoarea definiţie axiomatică a ***mulţimii*** $\mathbb{R}$ ***a numerelor reale***.

Definiţia 2.18 $\mathbb{R}$ *este o mulţime cu cel puţin două elemente, înzestrată cu două operaţii algebrice – una numită adunare, notată cu "+" şi cealaltă numită înmulţire, notată cu "·" – precum şi cu o relaţie de ordine, notată cu "≤", în raport cu care sunt îndeplinite următoarele axiome:*

AR1. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

AR2. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, *astfel încât* $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

AR3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, (-x) \in \mathbb{R}$ *aşa încât* $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

AR4. $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

AR5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

AR6. $\exists\, 1 \in R$, *astfel încât* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

AR7. $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ *aşa încât* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

AR8. $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

AR9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

AR10. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *avem* $x \leq y$ *sau* $y \leq x$;

AR11. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, *dacă* $x \leq y$ *şi* $y \leq x$, *atunci* $x = y$;

AR12. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ *cu* $x \leq y$ *şi* $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$;

AR13. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *cu* $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$;

AR14. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ *cu* $x \leq y$ *şi* $0 \leq z \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$;

AR15. Orice submulţime nevidă şi majorată a lui $\mathbb{R}$ *are o margine superioară în* $\mathbb{R}$.

Altfel spus, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ este un corp comutativ şi total ordonat, care satisface axioma lui Cantor-Dedekind (de completitudine) AR15.

După cum ne vom convinge în secţiunea următoare, mulţimea $\mathbb{R}$, introdusă axiomatic prin Definiţia 2.18, este unică până la un izomorfism de corpuri comutative, total ordonate. În $\mathbb{R}$, apar submulţimile remarcabile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$, unice şi ele până la un izomorfism (de monoizi/inele/corpuri), aflate în relaţia:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Printre proprietăţile lui $\mathbb{R}$ figurează şi acelea cuprinse în următorul enunţ, lipsit aici de demonstraţie.

Propoziţia 2.9 *a) Mulţimea numerelor reale din intervalul* $[0, 1]$ *este nenumărabilă. Cardinalul ei se numeşte* ***puterea continuului*** *şi notat, prin tradiţie, cu c, este egal cu* $2^{\aleph_0}$.

b) Următoarele mulţimi sunt de ***puterea continuului:***

(1) mulţimea $\mathbb{R}$*;*

(2) orice interval din $\mathbb{R}$*, de forma* $[a,b]$*,* $[a,b)$*,* (a,b)*,* $(a,b]$*, unde* $a<b$*;*

(3) mulţimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *a numerelor iraţionale;*

(4) orice submulţime a lui $\mathbb{R}$ *care conţine un interval deschis;*

(5) mulţimea lui Cantor, adică mulţimea C *a tuturor numerelor din intervalul* $[0,1]$ *care au reprezentarea, în baza* 3*, numai cu cifrele* 0 *şi* 2*.*

Ipoteza continuului.

Pe baza Propoziţiei 1.7, putem vorbi despre suita de numere cardinale:

$$\aleph_0 \leqslant h(\aleph_0) \overset{def}{=} \aleph_1 \leqslant h(\aleph_1) \overset{def}{=} \aleph_2 \leqslant \ldots$$

Întrebarea firească este aceea asupra poziţiei pe care o are, în această suită, cardinalul $c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. În acest sens, există ***ipoteza continuului***, potrivit căreia, am avea: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Cu alte cuvinte, Cantor, cel care a emis o asemenea ipoteză, a presupus că nu există nici o mulţime al cărei cardinal este cuprins strict între cardinalul lui $\mathbb{N}$ şi cardinalul lui $\mathbb{R}$. Un asemenea postulat este, în teoria mulţimilor, analog axiomei paralelelor din geometria plană euclidiană.

Deoarece între mulţimea $\mathbb{R}$ şi mulţimea punctelor de pe o dreaptă (pe care s-a stabilit un punct numit origine, un sens – o orientare – şi o unitate de măsură) se poate pune în evidenţă o corespondenţă biunivocă (bijecţie), se ajunge de cele mai multe ori la identificarea mulţimii numerelor reale cu punctele dreptei respective, numită (pe bună dreptate) ***dreapta reală***. Astfel, adoptând un limbaj geometric, vom folosi termenul de "punct" (pe acea dreaptă) în locul celui de număr real, după cum şi termenul de "dreaptă reală" în loc de $\mathbb{R}$.

Cum, pentru o mulţime $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, nemajorată, nu mai avem asigurat faptul că $\sup A$ (în sensul ordinei totale pe $\mathbb{R}$) aparţine lui $\mathbb{R}$, iar pentru o mulţime nevidă şi neminorată $B \subset \mathbb{R}$ nu putem spune că $\inf B \in \mathbb{R}$, se iau în consideraţie două simboluri (elemente), numite ***plus infinit*** – notat cu $+\infty$ (sau, pe scurt, ∞) şi respectiv ***minus infinit*** – notat cu $-\infty$, astfel încât, pe mulţimea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – numită ***dreapta reală extinsă*** (sau ***încheiată***), în virtutea convenţiei prin care $-\infty < +\infty$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$, se pot extinde operaţiile "$+$" şi "$\cdot$" de pe $\mathbb{R}$, precum şi relaţia de ordine naturală, luând, prin definiţie: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$; $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$, $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$; $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$, dacă $0 < x$ şi $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$, dacă $x < 0$; $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$, dacă $0 < x$ şi $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$, dacă $x < 0$; $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se consideră lipsite de sens, fiind nedeterminate, operaţiile următoare: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ (pe scurt $(\infty) - (\infty)$); $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$ (pe scurt $0 \cdot \infty$) şi $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ (pe scurt $\dfrac{\infty}{\infty}$). Elucidarea sensului acestor operaţii are loc, de regulă, pe seama expresiilor din care provin.

Prin extensia menţionată, mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ este total ordonată, iar elementele $+\infty$ şi $-\infty$ – numite (acum) ***numere reale infinite*** (punctele de la infinit ale dreptei reale) sunt ***cel mai mare*** şi respectiv ***cel mai mic*** dintre elementele sale. Într-un asemenea context, elementele mulţimii $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ se numesc ***numere reale finite***.

Cum, cu privire la aspectele de ordin algebric ale mulţimilor numerice $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$, ar putea fi făcute şi consideraţii din domeniul laticelor sau al algebrelor Boole, iată aici câteva elemente de referinţă.

Latici şi algebre Boole

Definiţia 2.19 *O mulţime nevidă L, împreună cu două operaţii interne "$\vee$" $: L \times L \to L$ şi "$\wedge$" $: L \times L \to L$, este numită* ***latice*** *dacă ambele legi, "$\vee$" şi "$\wedge$", sunt asociative, comutative, idempotente şi absorbante, adică:*

(L_1) *(a)* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\ \forall\, x, y, z \in L,$
(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ \forall\, x, y, z \in L,$

(L_2) *(a)* $x \vee y = y \vee x,\ \forall\, x, y \in L,$
(b) $x \wedge y = y \wedge x,\ \forall\, x, y \in L,$

(L_3) *(a)* $x \vee x = x,\ \forall\, x \in L,$
(b) $x \wedge x = x,\ \forall\, x \in L,$

(L_4) *(a)* $x \vee (x \wedge y) = x,\ \forall\, x, y \in L,$
(b) $x \wedge (x \vee y) = x,\ \forall\, x, y \in L.$

Caracterul algebric al Definiţiei 2.19 este evident. Pe baza acestei definiţii, se poate introduce o relaţie de ordine parţială pe laticea L (prin "$x \leq y$", dacă şi numai dacă "$x = x \wedge y$"), în raport cu care $(L, \leq)$ reprezintă o structură parţial ordonată.

Reciproc, dacă $(A, \leq)$ este o mulţime (nevidă) parţial ordonată, atunci se pot defini operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ (pe A), prin:

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \text{ (în sensul dat în cursul 1) şi respectiv}$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \text{ (vezi cursul 1)},\ \forall\, x, y \in A,$$

observându-se faptul că, în felul acesta, $(A, \vee, \wedge)$ constituie o latice, în sensul Definiţiei 2.19. În virtutea unei astfel de observaţii, noţiunea de latice se poate baza şi pe următoarea definiţie, echivalentă cu cea de mai sus:

Definiţia 2.20 *O mulţime parţial ordonată $(L, \leqslant)$ este numită latice dacă şi numai dacă, pentru orice x şi y din L, atât $\sup\{x, y\}$, cât şi $\inf\{x, y\}$, există şi sunt (ambele) din L.*

Un exemplu elementar de latice îl constituie mulţimea numerelor naturale, înzestrată cu relaţia de ordine uzuală, prin intermediul căreia se pot defini operaţiile: $n_1 \wedge n_2 = \min\{n_1, n_2\}$, $n_1 \vee n_2 = \max\{n_1, n_2\}$, $\forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Este satisfăcută atunci, cu evidenţă, Definiţia 2.19.

Definiţia 2.21 *În general, o* ***latice*** $(L, \vee, \wedge)$ *este* ***denumită****:*

i) ***distributivă***, când oricare dintre operaţiile "$\vee$" şi "$\wedge$" este distributivă faţă de cealaltă, adică

(a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ şi
(b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),\ \forall\, x, y, z \in L.$

ii) ***modulară***, când
$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z)\ ,\ \forall\, x, y, z \in L.$

ii) ***completă***, când, prin prisma Definiţiei 2.20, pentru orice submulţime $\tilde{L} \subseteq L$, există atât $\sup \tilde{L}$, cât şi $\inf \tilde{L}$, în L.

Definiţia 2.22 *Două* ***latici*** *L_1 şi L_2 se numesc* ***izomorfe*** *dacă există o bijecţie $\phi : L_1 \to L_2$ astfel încât:*

$$\phi(x \vee_{L_1} y) = \phi(x) \vee_{L_2} \phi(y), \forall\, x, y \in L_1 \text{ şi}$$

$$\phi(x \wedge_{L_1} y) = \phi(x) \wedge_{L_2} \phi(y), \forall\, x, y \in L_1.$$

Definiţia 2.23 *O submulţime $L' \neq \varnothing$ a unei latice $(L, \vee, \wedge)$ se numeşte* ***sublatice*** *(a lui L) dacă $(L', \vee, \wedge)$ este o latice în sine.*

Alături de noţiunea de latice, un alt concept de importanţă certă pe tărâmul informaticii, ca disciplină teoretică, este acela de ***algebră Boole***, definit după cum urmează.

Definiţia 2.24 *O mulţime nevidă B, înzestrată cu două operaţii binare, "$\vee$" şi "$\wedge$", o operaţie unară (de complementariere), notată cu "$'$" şi două elemente "neutre", "0" şi "1", se numeşte* ***algebră Boole*** *dacă:*

(B_1) $(B, \vee, \wedge)$ este o latice distributivă,

(B_2) $x \wedge 0 = 0$ şi $x \vee 1 = 1$, $\forall\, x \in B$,

(B_3) $x \wedge x' = 0$ şi $x \vee x' = 1$, $\forall\, x \in B$.

Un exemplu clar de algebră Boole îl constituie mulţimea $\mathcal{P}(X)$, a tuturor submulţimilor unei mulţimi X, în raport cu operaţiile de reuniune şi de intersecţie, alături de care şi cea de complementariere uzuală (la mulţimi), având mulţimea vidă în rolul lui "0" şi mulţimea X în rolul lui "1".

Alte aspecte de ordin algebric (sau de altă natură) privitoare la $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$ vor fi relevate în următoarele capitole. Deocamdată, de trebuinţă ulterioară, sunt de semnalat câteva inegalităţi numerice mai importante, între care aceea a lui Hölder şi aceea a lui Minkowski.

Inegalităţi cu elemente din $\mathbb{R}$

Propoziţia 2.10 ***(Inegalitatea lui Hölder, cu ponderi)*** *Fie $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Atunci:*

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstraţie: Se consideră mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât are loc } (*)\} \subseteq \mathbb{N}$ şi se arată că M satisface condiţia (axioma) (P_3) (Peano) din Definiţia 2.14. Rezultă atunci că $M = N$, ceea ce înseamnă că $(*)$ are loc într-adevăr, pentru orice număr natural real n, cu datele din enunţ.

Satisfacerea axiomei (P_3) de către M reiese din faptul că $0 \in M$, în mod evident, iar dacă $n \in M$, atunci, pentru $s(n)$ (adică pentru $n + 1$), avem:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i b_i + \lambda_{n+1} a_{n+1} b_{n+1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} + \lambda_{n+1} a_{n+1} b_{n+1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p + \lambda_{n+1} a_{n+1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^q + \lambda_{n+1} b_{n+1}^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Prima inegalitate are loc deoarece $n \in M$ (şi, ca atare, $(*)$ are loc pentru n), iar cea de-a doua este de fapt inegalitatea $(*)$ din cazul $n = 2$, cu ponderile 1 şi λ_{n+1} în rolurile lui λ_1 şi λ_2, cu $\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ şi a_{n+1} în rolurile lui a_1 şi respectiv a_2, precum şi cu $\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ şi b_{n+1} în rolurile lui b_1 şi respectiv b_2. Aşa încât, este suficient să ne convingem de faptul că este adevărată inegalitatea:

$$(\bullet) \quad \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 \leq (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\lambda_1 b_1^q + \lambda_2 b_2^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Acest lucru decurge din faptul că, pentru funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\lambda_1 b_1^q + \lambda_2 x^q)^{\frac{1}{q}} - \lambda_1 a_1 b_1 - \lambda_2 a_2 x$, există punctul de minim global $x_0 = b_1 (a_2/a_1)^{\frac{p}{q}}$ (când $a_1 \neq 0$) şi, studiind variaţia lui f, găsim: $f(b_2) \geq f(x_0) = 0$. Când $a_1 = 0$, inegalitatea (de fapt, egalitatea) $(\bullet)$ este evidentă.

În fine, este de menţionat că, în $(*)$, egalitatea are loc dacă şi numai dacă n-uplele $(a_0^p, a_1^p, \ldots, a_n^p)$ şi $(b_0^p, b_1^p, \ldots, b_n^p)$ sunt proporţionale. ◀

Folosind un raţionament asemănător, se poate demonstra şi că este adevărată propoziţia ce urmează. În prealabil, precizăm că, atunci când $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, relaţia $(*)$ reprezintă *inegalitatea lui Hölder fără ponderi.* De asemenea, specificăm că, pentru $p = q = 2$ şi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, inegalitatea $(*)$ capătă forma

$$(**) \quad \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

fiind cunoscută atunci sub denumirea de ***inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz***. În $(**)$, egalitatea are loc, în concordanţă cu ce am precizat în legătura cu $(*)$, dacă şi numai dacă există $u, v \in \mathbb{R}$, cu $u^2 + v^2 \neq 0$, aşa încât $ua_i + vb_i = 0$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2, ...n\}$.

Propoziţia 2.11 ***(Inegalitatea lui Minkowski, cu ponderi)*** *Pentru* $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ *şi* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ *din* $\mathbb{R}_+^*$, *are loc inegalitatea*

$$(***) \quad \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

În cazul $0 < p < 1$, *inegalitatea* $(***)$ *are loc cu sensul schimbat. În* $(***)$, *are loc egalitatea dacă şi numai dacă n-uplele* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *şi* $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *sunt proporţionale.*

Demonstraţie: Ca şi în situaţia inegalităţii lui Hölder, considerând mulţimea L a tuturor acelor $n \in \mathbb{N}$ pentru care, fie în cazul $p \geq 1$, fie în cazul $0 < p < 1$,are loc inegalitatea $(***)$, se vede că $0 \in L$ şi că dacă $n \in L$, atunci $n + 1 = s(n) \in L$. Acest din urmă lucru revine, ca şi în demonstrarea inegalităţii $(*)$, la a arăta că $(***)$ este adevărată, de fapt, pentru $n = 2$, ceea ce se poate dovedi pe seama studiului variaţiei unei funcţii potrivit alese în context. Astfel, prin (P_3), rezultă că $L = \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $(***)$ are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu datele şi în situaţiile din enunţ. ◀

Propoziţia 2.12 ***(Inegalitatea lui Carleman)*** *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea*

$$(\,!\,) \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

egalitatea având loc doar când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Demonstraţie: Considerând n arbitrar din $\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ din $\mathbb{R}_+$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, pe baza inegalităţii mediilor, adică a inegalităţii

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

(adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$), avem

$$(b_1 a_1 b_2 a_2 \ldots b_k a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_k a_k}{k}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

şi, prin aceasta, putem scrie:

$$(\,!!\,) \sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_1 a_1 b_2 a_2 \ldots b_k a_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \right)^{\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{n} (b_1 b_2 \ldots b_k)^{-\frac{1}{k}} (b_1 a_1 b_2 a_2 \ldots b_k a_k)^{\frac{1}{k}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left((b_1 b_2 \ldots b_k)^{-\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} b_l a_l \right) = \sum_{l=1}^{n} b_l a_l \cdot \sum_{k=l}^{n} \frac{(b_1 b_2 \ldots b_k)^{-\frac{1}{k}}}{k}.$$

Luând $b_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $b_1 b_2 \ldots b_k = (k+1)^k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\sum_{k=l}^{n} \frac{(b_1 b_2 \ldots b_k)^{-\frac{1}{k}}}{k} = \sum_{k=l}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=l}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{l} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{l}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Astfel, din (!!) obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \sum_{l=1}^{n} \frac{b_l}{l} a_l = \sum_{l=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l a_l \leq e \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

adică tocmai (!).

Întrucât $\left(1 + \dfrac{1}{l}\right)^l < e$, $\forall\, l \in \mathbb{N}^*$, relaţia (!) devine egalitate doar când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. ◀

Bibliografie selectivă

1. D. Buşneag, D. Piciu - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
3. Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
4. S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.
5. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.
6. T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar in algebra superioară*, Matrix Rom Bucureşti, 2012.

Cursul 3

Şiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat. Construcţia corpului $\mathbb{R}$. Şiruri de numere reale.

În ideea construirii lui $\mathbb{R}$ prin metoda lui Cantor, prezentăm aici, mai întâi, noţiunea de şir dintr-un inel sau corp ordonat oarecare, în mod special dintr-un domeniu de integritate sau un corp comutativ cu ordonare. După construcţia corpului $\mathbb{R}$, expunem, prin particularizare, câteva adevăruri de bază cu privire la şiruri numerice reale.

Şiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat

Relaţiile de ordine de pe inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ se înscriu într-un context mai general, relativ la ordinea (în abstract) pe un inel, domeniu de integritate sau corp.

Definiţia 3.1 *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Prin* ***ordonare*** *pe A înţelegem o submulţime nevidă P a lui A, astfel încât $0 \notin P$ şi sunt satisfăcute condiţiile:*

O_1) $\forall\, x \in A$, avem $x \in P$ sau $x = 0$ (elementul neutru în raport cu "+") sau $(-x) \in P$ (opusul lui x);

O_2) $\forall\, x, y \in P$, avem $x + y \in P$ şi $x \cdot y \in P$.

P se numeşte (în acest context) ***mulţimea elementelor pozitive*** ale lui A (sau ***corpul pozitiv*** al lui A). Despre A se spune că este ***inel ordonat de*** P. Un element $x \in P \subseteq A$ se numeşte ***pozitiv***, iar un element $x \in A \setminus (P \cup \{0\})$ se numeşte ***negativ***.

Observaţii:

1) $\mathbb{N}^*$ este o ordonare pe $\mathbb{Z}$.

2) Când A este un inel unitar şi nenul (având elementul neutru, faţă de "$\cdot$", notat cu 1, diferit de 0), iar P este o ordonare pe A, deducem că, întrucât $1 \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot (-1)$, avem $1 \in P$. În plus, ţinând seama de O_2), vedem că $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-ori}} \in P$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3) Dacă $x, y \in A$ sunt negative (în sensul Definiţiei 3.1), atunci $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \in P$, pentru că $(-x) \in P$ şi $(-y) \in P$, iar P satisface O_2).

   De asemenea, dacă $x \in A$ este negativ, iar $y \in A$ este pozitiv (adică $y \in P$), atunci $x \cdot y$ este negativ, deoarece $x \cdot y = (-(-x)) \cdot y = -((-x) \cdot y) \notin P$.

4) Când $(A, +, \cdot)$ este corp, inversul oricărui element dintr-o ordonare P pe A este tot în P, deoarece, $\forall\, x \in P$, avem $x \cdot x^{-1} = 1 \in P$.

Definiţia 3.2 *Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', +', \cdot')$ două inele ordonate de $P \subseteq A$ şi respectiv $P' \subseteq A'$. O funcţie $f : A \to A'$ se numeşte* ***izotonică*** *dacă "păstrează ordinea" (de la A la A'), adică dacă, pentru orice $x \in P$, avem $f(x) \in P'$.*

Definiţia 3.3 *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel ordonat de o submulţime a sa, nevidă, P. Se spune că un element $x \in A$* ***este mai mic decât un altul****, $y \in A$,* ***în sensul lui*** *P, şi se scrie $x <_P y$ (sau, când nu există posibilitatea vreunei confuzii, pur şi simplu $x < y$) dacă şi numai dacă $y + (-x) \in P$. În acelaşi timp, se spune că y este* ***mai mare (în sensul lui*** *P***) decât*** *x.*

În virtutea acestei definiţii, un element x al lui A este P-pozitiv (adică $x \in P$) dacă $0 <_P x$. De asemenea, x din A este P-negativ, dacă $(-x)$ este P-pozitiv. Pentru x şi y din A, prin $x \leq_P y$ vom înţelege una din situaţiile $x <_P y$ sau $x = y$.

Propoziţia 3.1 *Fie $(A, +, \cdot, <_P)$ un inel ordonat. Atunci:*

i) $\forall\, x, y, z \in A$, *cu* $x <_P y$ *şi* $y <_P z \Longrightarrow x <_P z$;

ii) $\forall\, x, y, z \in A$, *cu* $x <_P y$ *şi* $0 <_P z \Longrightarrow x \cdot z <_P y \cdot z$;

iii) $\forall\, x, y \in A$, *cu* $x <_P y \Longrightarrow x + z <_P y + z$, $\forall\, z \in A$.

Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un corp ordonat, atunci, în plus, avem:

iv) $0 <_P x$, $0 <_P y$ *şi* $x <_P y \Longrightarrow y^{-1} <_P x^{-1}$.

Propoziţia 3.2 *Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ, unitar şi fără divizori ai lui zero), ordonat de $P \subseteq A$, K este corpul său total de fracţii, iar P_K este mulţimea $\{a \cdot b^{-1} \mid\ 0 <_P a, 0 <_P b\}$, atunci P_K este o ordonare pe K.*

Demonstraţie: Observăm că, pentru orice $0 \neq x = a \cdot b^{-1}$ (convenţional, $\dfrac{a}{b}$) din K, putem presupune că $0 <_P b$ (adică $b \in P$), întrucât $\dfrac{a}{b} = \dfrac{(-a)}{(-b)}$. Când $0 <_P a$, atunci, cum $0 <_P b$, avem $x = \dfrac{a}{b} \in P_K$. Dacă $0 <_P (-a)$, atunci $(-x) \in P_K$.

Este evident că $0 \notin P_K$ şi că, neputând avea simultan x şi $(-x)$ (ca elemente ale lui K) în P_K (căci, dacă ar fi aşa, atunci $x = \dfrac{a}{b}$, iar $-x = \dfrac{c}{d}$, cu $0 <_P a, b, c, d$ şi deci am avea $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, adică $-a \cdot d = c \cdot b \in P$, ceea ce ar fi absurd), se poate spune că P_K satisface O_1) din Definiţia 3.1.

De asemenea, P_K satisface şi O_2) din aceeaşi definiţie. Într-adevăr, pentru orice $x = \dfrac{a}{b}$ şi $y = \dfrac{c}{d}$ (cu a, b, c, d P-pozitive), avem $a \cdot c$ şi $b \cdot d$ P-pozitive, adică $x \cdot y = \frac{ac}{bd} \in P_K$. Totodată, $x + y = \frac{ad+bc}{bd} \in P_K$, căci $0 <_P ad + bc$ şi $0 <_P bd$.

În concluzie, P_K este o ordonare pe K. ◀

Definiţia 3.4 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat şi $x \in A$. Se numeşte* ***valoarea absolută*** *a lui x (sau* ***modulul*** *lui x) şi se notează cu $|x|$, acel element din A dat prin*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{dacă } 0 < x \textit{ (adică } x \in P\textit{) sau } x = 0, \\ -x, & \textit{dacă } x < 0 \textit{ (adică } x \notin P\textit{).} \end{cases}.$$

Propoziţia 3.3 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Atunci $|x|$ este unicul element, y, din A, astfel încât $0 \leq y$ şi $y \cdot y = x \cdot x$. Totodată, $y = |x| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. În plus, avem:*

j) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, $\forall\, u, v \in A$ *şi*

jj) $|u + v| \leqslant |u| + |v|$, $\forall\, u, v \in A$.

Simplă fiind, demonstraţia acestei propoziţii, la fel ca aceea a Propoziţiei 3.1, este lăsată pe seama tratării ei, ca un exerciţiu de soluţionat, de către destinatarii acestor note de curs.

Teorema 3.1 *Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat şi corpul $(Q, +, \cdot)$ al numerelor raţionale, ordonat în raport cu submulţimea sa $\mathbb{Q}_+^* = \left\{\dfrac{a}{b} \mid\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$. Există atunci un monomorfism de corpuri, unic şi izotonic, de la $\mathbb{Q}$ la K.*

Demonstraţie: Fie 1_K elementul neutru faţă de înmulţirea din K şi $f : \mathbb{Q} \to K$, funcţia definită prin
$$f(x) = f(a) \cdot (b \cdot 1_K)^{-1},\ \forall\, x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*),$$
unde prin $b \cdot 1_K$ înţelegem $\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{\text{de } b \text{ ori}}$, iar $f(a)$ înseamnă $a \cdot 1_K$, dacă $a \in \mathbb{N}^*$, $f(a) = 0$, dacă $a = 0$ şi $f(a) = (-a) \cdot 1_K$, dacă $a \in (-\mathbb{N}^*)$. Se verifică lesne că f este un morfism injectiv de corpuri, de la $\mathbb{Q}$ la K, bine determinat prin modul în care este definit. În plus, $\forall\, x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (cu $a, c \in \mathbb{Z}$ şi $b, d \in \mathbb{N}^*$), aşa încât $x \le y$ (adică $ad \le bc$), avem $(bc - ad) \cdot 1_K \ge 0$, ceea ce înseamnă că $a \cdot (b \cdot 1_K)^{-1} \le c \cdot (d \cdot 1_K)^{-1}$, adică $f(x) \le f(y)$, când a şi $c \in \mathbb{N}$. La fel şi în celelalte cazuri. Deci f este izotonică, potrivit Definiţiei 3.2. ◄

Definiţia 3.5 *i) Un inel $(A, +, \cdot, <)$, ordonat şi cu unitate (în raport cu "$\cdot$"), se numeşte **inel arhimedian** dacă, pentru orice pereche de elemente pozitive x, y din A, există un număr natural n astfel încât $y < n \cdot x$ (unde $n \cdot x$ înseamnă $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n-\text{ ori}}$).*

*ii) Un **corp** ordonat se numeşte **arhimedian** dacă, privit ca inel, este un inel arhimedian.*

Observaţie. În situaţia ii) din cadrul Definiţiei 3.5, întrucât $y < nx$ echivalează cu $y \cdot x^{-1} < n \cdot 1_K$, unde 1_K este unitatea corpului K în cauză, putem spune că acel corp ordonat K se numeşte arhimedian dacă, pentru orice $u \in K$, există $n \in \mathbb{N}$, aşa încât $u < n \cdot 1_K$.

Definiţia 3.6 *Fie B o mulţime nevidă. Se numeşte **şir de elemente din** B o funcţie h definită pe $\mathbb{N}$ şi cu valori în B.*

Se notează cu x_n valoarea funcţiei h în punctul $n \in \mathbb{N}$ şi se numeşte termen general al şirului $h : \mathbb{N} \to B$. De regulă, în loc de $h : \mathbb{N} \to B$, şirul se notează prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = h(n)$ este termenul general al respectivului şir. Mulţimea termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ se notează, uzual, cu $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiţia 3.7 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **majorat** (respectiv **minorat**) dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime majorată (respectiv minorată). Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **mărginit** dacă este simultan majorat şi minorat, adică dacă există a şi b din A, astfel încât $a \le x_n \le b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dacă nu este mărginit , şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **nemărginit**.*

Definiţia 3.8 *Un şir $h : \mathbb{N} \to A$ de elemente ale unui inel ordonat $(A, +, \cdot, <)$ se numeşte **monoton** dacă h sau $-h$ este o funcţie izotonică. Şirul $(h(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **crescător** dacă h este izotonică şi respectiv **descrescător** când $-h$ este o funcţie izotonică.*

Definiţia 3.9 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ un şir cu elemente dintr-o mulţime nevidă B şi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ un şir crescător strict (în sensul ordonării induse de $\mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{N}$). Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$ se numeşte atunci **subşir** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definiţia 3.10 *Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat (în sensul Definiţiei 3.1). Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ se numeşte convergent (în K) dacă există un element $x \in K$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε, aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \ge n_\varepsilon$, să avem:*
$$|x_n - x| < \varepsilon.$$
*În acest context, spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, numindu-l pe x **limita şirului** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Propoziţia 3.4 *Limita unui şir convergent de elemente dintr-un corp ordonat este unică.*

Demonstraţie: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ un şir presupus a fi convergent la două elemente, x şi y, din corpul ordonat K. Atunci, în conformitate cu Definiţia 3.10, $\forall\,\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - y| < \varepsilon$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'_\varepsilon$. În consecinţă, $\forall\,\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ încât avem:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $|x - y| = 0_K$, adică $x = y$. Altfel, dacă $|x - y| > 0$, pentru $\varepsilon = |x - y| \cdot \lambda$, cu $0 < \lambda < (2 \cdot 1_k)^{-1}$ am avea

$$|x - y| < (2\lambda)|x - y|,$$

de unde $1_K < 2\lambda < 2(2 \cdot 1_K)^{-1} = 1_K$ (absurd). ◀

Definiţia 3.11 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente dintr-un corp ordonat K se numeşte* ***şir Cauchy*** *(sau* ***fundamental****) dacă pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall\,n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Propoziţia 3.5 *Orice şir convergent dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$ este şir Cauchy.*

Demonstraţie: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ un şir convergent, cu limita $x \in K$. Atunci, $\forall\,\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, $\exists\,n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, cu n şi $m \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ceea ce ne dă dreptul să afirmăm că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy.

Observaţie. Reciproca afirmaţiei din Propoziţia 3.5 nu are loc decât în anumite cazuri, nu pentru orice corp ordonat K. Astfel, în situaţia în care K este corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, definit recurent prin relaţia

$$x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n},\ \forall\,n \in \mathbb{N}$$

şi cu $x_0 = 1$, este şir Cauchy, fiind unul cu limită (deoarece este crescător şi mărginit), dar nu are limită în $\mathbb{Q}$. Deci nu este convergent în $(\mathbb{Q})$.

Valabilitatea reciprocei Propoziţiei 3.5 este legată de noţiunea de completitudine a corpului K, în sensul următoarei definiţii. ◀

Definiţia 3.12 *Un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$, în care orice şir Cauchy de elemente din K este convergent la un element din K, se numeşte* ***complet****.*

În virtutea observaţiei de mai sus, putem afirma că $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ nu este un corp ordonat complet. Vom vedea că $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ este un corp ordonat complet. Acest rezultat se bazează pe faptul că este adevărat următorul cuplu de afirmaţii din enunţul propoziţiei ce urmează.

Propoziţia 3.6 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir Cauchy dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$. Atunci:*

i) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit;*

ii) *în situaţia în care $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent la un element x din K, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la x.*

Demonstraţie: i) Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy din K, pentru $\varepsilon = 1_K$, va exista un număr natural n_1 aşa încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n_1$, avem $|x_n - x_m| < 1_K$. Luând $m = n_1$, deducem de aici că $|x_n - x_{n_1}| < 1_K$, $\forall\, n \geq n_1, n \in \mathbb{N}$. Mai mult, rezultă că $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1_K + |x_{n_1}|$, $\forall\, n \geq n_1$. Astfel, pentru $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1_K + |x_{n_1}|\}$, găsim:

$$|x_n| \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

ii) Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, rezultă că, pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$$

În acelaşi timp, pentru că subşirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la un element x din K, reiese că, pentru orice $\varepsilon \in K$,$\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon$$

Aşadar, luând în continuare $n'_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, avem

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pentru orice $n \geq n'_\varepsilon$, când $k \geq n'_\varepsilon$ (ceea ce implică $n_k \geq n'_\varepsilon$). ◀

Observaţie. În cazul în care K este $\mathbb{R}$ (corpul ordonat al numerelor reale), Propoziţia 3.6, în asociere cu teorema lui Cesàro, potrivit căreia orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent, ne conduce la concluzia de completitudine a lui $\mathbb{R}$ (în sensul Definiţiei 3.12). Ţinând seama şi de Propoziţia 3.5, putem afirma că, ***în*** $\mathbb{R}$***, un şir*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy***.

Construcţia corpului numerelor reale cu ajutorul şirurilor Cauchy de numere raţionale

Fie $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ corpul ordonat al numerelor raţionale şi $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ mulţimea tuturor şirurilor Cauchy cu elemente din $\mathbb{Q}$. Pe lângă faptul că, în acest caz particular (în care corpul K este $\mathbb{Q}$), rezultatele prezentate până aici sunt aplicabile, despre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ vedem că este o mulţime care poate fi structurată algebric ca un inel unitar comutativ.

Propoziţia 3.7 *Mulţimea* $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$*, înzestrată cu operaţiile de adunare şi de înmulţire a două şiruri, este un inel unitar, comutativ.*

Demonstraţie: Pentru oricare două elemente din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, $\alpha = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\beta = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vedem, pentru început, că $\alpha + \beta = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\alpha \cdot \beta = (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt tot din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Aceasta întrucât, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n'_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, iar, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n''_\varepsilon$, avem $|y_m - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Deci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} = n_\varepsilon$, avem

$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şi

$$|x_m y_m - x_n y_n| \leq |y_m(x_m - x_n) + x_n(y_m - y_n)| \leq |y_m||x_m - x_n| + |x_n|\,|y_m - y_n| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon,$$

dacă ţinem seama aici de Propoziţia 3.6 i). În consecinţă, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, avem $\alpha + \beta \in \mathcal{C}(Q)$ şi $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}(Q)$. Evident, operaţiile de adunare şi înmulţire în $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ sunt asociative şi comutative, pe baza asociativităţii şi comutativităţii operaţiilor de adunare şi înmulţire în $\mathbb{Q}$. În plus, este uşor de văzut că şirurile constante $\overline{0} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ şi $\overline{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ sunt şiruri Cauchy şi constituie elementul 0 şi respectiv 1 din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. În fine, se vede că operaţia de înmulţire este distributivă faţă de adunarea pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, rezultă că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel comutativ şi unitar. ◀

Se ia acum în consideraţie mulţimea $\mathcal{N}(\mathbb{Q}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$, în legătură cu care se poate constata că $(\mathcal{N}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel în sine, subinel al lui $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

În plus, se poate deduce că, $\forall\, \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $n_a \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_a$, să avem $|a_n| \geq a$. Dacă, prin reducere la absurd, nu ar fi aşa, atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, ar exista o infinitate de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ astfel încât $|a_{n_i}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$. Cum $\alpha \in \mathcal{C}(Q)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$. Atunci, pentru $m = n_i \geq n_\varepsilon$, am avea:

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\alpha \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, în contradicţie cu faptul că $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$.

Fie acum, în $\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, relaţia binară "$\sim$", definită prin: $\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$. Se poate vedea, fără prea mare dificultate, că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, se poate vorbi despre mulţimea cât $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Înzestrând această mulţime cu operaţiile de adunare şi de înmulţire a claselor de echivalenţă corespunzătoare, constatăm că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ şi unitar. Într-adevăr, mai întâi, vedem că, în raport cu operaţiile "$+$" şi "$\cdot$", definite prin $]\alpha[\ +]\beta[=]\alpha+\beta[$ şi respectiv $]\alpha[\ \cdot]\beta[=]\alpha\cdot\beta[$, $\forall]\alpha[,]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un inel unitar, comutativ. În plus, $\forall\ ]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $\exists\ ]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ aşa încât $]\alpha[\ \cdot]\beta[=]\overline{1}[$. Aceasta întrucât, după cum am constatat deja, $\forall\, \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $n_a \in \mathbb{N}$ aşa încât $|a_n| \geq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_a$. Se ia atunci în consideraţie $\beta = \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_a}$ şi se vede că $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, întrucât $\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_m}\right| = \dfrac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leq \dfrac{1}{a^2} \cdot a^2\varepsilon = \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n_a$. Totodată, avem $a_n \cdot \dfrac{1}{a_n} = 1$, $\forall\, n \geq n_a$, ceea ce înseamnă că $\alpha \cdot \beta - 1 \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, adică $]\alpha[\ \cdot]\beta[= 1$ în $\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Drept urmare, putem conchide că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Apelând acum la funcţia $i_\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, definită prin $i_\mathbb{Q}(a) =](a, a, \ldots, a, \ldots)[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$, vedem lesne că $i_\mathbb{Q}$ este un morfism injectiv de corpuri. În virtutea sa, îl putem privi pe $\mathbb{Q}$ ca pe un subcorp al corpului $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Cum mulţimea $\tilde{P} = \{]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim \mid \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q}), \exists\, a \in \mathbb{Q}_+^*$, şi $n_a \in \mathbb{N}$, încât $a_n \geq a, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_a\}$ constituie o ordonare pentru $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ (în sensul Definiţiei 3.1), se poate vorbi de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ ca despre o mulţime ordonată în raport cu relaţia de ordine $'' <''$, definită prin : $]\alpha[<]\beta[\Leftrightarrow]\beta[-]\alpha[\in \tilde{P}$.

Desemnând pe $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot, <)$ ca fiind, prin definiţie, corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, vedem că, prin teorema lui Malţev, $\mathbb{R}$ este unic până la un izomorfism de corpuri comutative şi ordonate. Totodată, acest $\mathbb{R}$ satisface, cu siguranţă, axiomele AR1 - AR14 din Definiţia 2.18. În ceea ce priveşte axioma AR15, se poate vedea că, prin construcţia de faţă, $\mathbb{R}$ se arată a fi un corp arhimedian. Într-adevăr, pentru orice $r =]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim \equiv \mathbb{R}$, există $m \in \mathbb{N}$ aşa încât $]\alpha[\leq]\overline{m}[=](m, m, \ldots, m, \ldots)[$. Aceasta întrucât, potrivit Propoziţiei 3.6, i), şirul $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ este mărginit şi, aşadar, există $M \in \mathbb{Q}_+^*$ aşa încât $|a_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Se poate lua atunci $m = [M] + 1$, unde $[M]$este partea întreagă a lui M. Amintindu-ne acum că $\mathbb{R}$ este un corp complet (în sensul Definiţiei 3.12), se poate conta (în virtutea Propoziţiei 3.6, ii) şi a deja menţionatei teoreme a lui Cesàro) pe faptul că $\mathbb{R}$ este un corp arhimedian complet. Finalmente, prin aplicarea teoremei care stipulează că, ***într-un corp arhimedian complet, orice mulţime nevidă şi majorată a respectivului corp are margine superioară care aparţine corpului în cauză***, putem spune că $\mathbb{R}$, realizat prin procedeul expus mai sus, satisface şi axioma AR15 din cadrul Definiţiei 2.18. Prin urmare, un astfel de $\mathbb{R}$ îşi merită denumirea conferită de respectiva definiţie.

În ceea ce priveşte demonstraţia teoremei al cărei enunţ este scos în evidenţă imediat mai sus, aceasta decurge după cum arătăm în continuare.

Fie K un corp arhimedian complet şi $S \subseteq K$ o submulţime nevidă şi majorată a sa. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$(arbitrar fixat), fie $T_n = \{y \in K \mid \ n \cdot x \leq y, \forall x \in S\}$. Mulţimea T_n este nevidă, întrucât, dacă $b \in K$ este un majorant al lui S, atunci orice element $y \in K$, pentru care $n \cdot b \leq y$, aparţine lui T_n. De asemenea T_n are majoranţi de forma $n \cdot x$, cu $x \in S$. Luăm atunci $y_n \in T_n$ pentru care există $x_n \in S$, aşa încât $y_n - 1_K < n \cdot x_n \leq y_n$. Altfel spus: $\dfrac{y_n}{n} - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \dfrac{y_n}{n}$. Notând cu z_n elementul $\dfrac{y_n}{n}$din K, constatăm că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy în K. În acest sens, vedem că $|z_n - z_m| < \dfrac{1}{m}$, întrucât, dacă $z_n \leq z_m$, atunci $z_m - \dfrac{1}{m} \leq z_n \leq z_m$. Dacă nu ar fi aşa, am avea $z_n \leq z_m - \dfrac{1}{m}$şi deci $z_m - \dfrac{1}{m} \in K$ ar fi majorant al lui S, ceea ce ar fi absurd, deoarece x_n $(\in S)$ este mai mare decât $z_m - \dfrac{1}{m}$. Când $z_m < z_n$, am deduce că $z_n - z_m = |z_n - z_m| < \dfrac{1}{m}$, întrucât, altfel, am avea $z_n - z_m \geq \dfrac{1}{m}$, adică $z_n - \dfrac{1}{m}$ ar fi majorant al lui S şi deci, pentru $x_n = \dfrac{y_n}{n} = z_n > z_n - \dfrac{1}{n}$, ar rezulta că $z_n - \dfrac{1}{m} \leq z_n - \dfrac{1}{n}$, adică $m \leq n$, indiferent de cum sunt m şi n din $\mathbb{N}$, ceea ce ar fi absurd. Ca atare, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy din K. Cum, prin ipoteză, K este complet (în sensul Definiţiei 3.12), se poate spune că $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent. Fie $w = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in K$.

Să arătăm acum că w este un majorant al lui S. Presupunând, prin absurd, că nu-i aşa, ar exista $x \in S$ astfel încât $w < x$. Atunci, deoarece $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la w, pentru $\varepsilon = \dfrac{x-w}{2}$, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, penru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, să avem $|z_n - w| \leq \dfrac{x-w}{2}$. În consecinţă, rezultă că, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$x - z_n = x - w + w - z_n \geq x - w - |z_n - w| \geq x - w - \frac{x-w}{2} = \frac{x-w}{2} > 0.$$

Deci $x > z_n$, adică $x > \dfrac{y_n}{n}$ sau, altfel, $n \cdot x > y_n$, în contradicţie cu faptul că $y_n \in T_n$. Deci w este într-adevăr un majorant al lui S. Mai mult chiar, w este $\sup S$, căci altfel, ar exista u, majorant al lui S, încât $u < w$. Atunci, reinterpretând faptul că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la w, am avea, pentru $\varepsilon = \dfrac{w-u}{4}$, existenţa unui $n_0 \in \mathbb{N}$, aşa încât $|z_n - w| \leq \dfrac{w-u}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. În consecinţă, am avea:

$$z_n - u = z_n - w + w - u \geq w - u - |z_n - w| \geq \frac{3(w-u)}{4} > 0,$$

ceea ce ar implica $z_n > u$, în contradicţie cu faptul că u este majorant al lui S.

În concluzie, mulţimea S are marginea superioară w din K.

Şiruri de numere reale

Am văzut deja că, în $\mathbb{R}$, un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy. În plus, toate celelalte rezultate stabilite pentru şiruri dintr-un corp comutativ ordonat sunt valabile şi pentru şiruri din $\mathbb{R}$. Pe lângă ele, mai sunt şi alte rezultate, specifice şirurilor de numere reale, dintre care, în acest paragraf, prezentăm câteva.

Teorema 3.2 *(de convergenţă a şirurilor reale monotone)*

i) *Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este crescător şi majorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$.*

ii) *Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este descrescător şi minorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea inferioară a mulţimii $\{x_n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstraţie: i) Se poate vedea că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, crescător şi majorat fiind, este un şir Cauchy. În caz contrar, ar exista $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, aşa ıncât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, k$ şi $m \in \mathbb{N}$, cu $k, m \geq n$, astfel ca $|x_k - x_m| \geq \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este crescător, ar reieşi atunci că, pentru $m = n$ şi $k \geq n$, am avea $x_k - x_n \geq \varepsilon$. Astfel, pentru $n = 1$, ar exista $n_1 > 1$, aşa încât $x_{n_1} \geq x_1 + \varepsilon$. La fel, pentru $n = n_1$, ar exista $n_2 > n_1$, aşa încât $x_{n_2} \geq x_{n_1} + \varepsilon \geq x_1 + 2\varepsilon$. Prin recurenţă, s-ar putea construi, în acest fel, un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \geq x_1 + k\varepsilon$, ceea ce ar contrazice faptul că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir mărginit. Ca atare, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, este într-adevăr un şir Cauchy. Deci, în virtutea rezultatului menţionat la începutul acestui paragraf, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Cum $x_n \leqslant x_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$, prin fixarea arbitrară a lui n şi trecerea la limită după m, obţinem că $x_n \leqslant x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Astfel x este un majorant al mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă x n-ar fi marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, atunci ar exista un alt majorant al acesteia, să-l numim y, care să fie mai mic decât x. Aşadar, am avea

$$x_n \leqslant y < x, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De aici, ar reieşi că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant y < x$, ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, x este chiar marginea superioară a mulţimii termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Este suficient să considerăm şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi să ne folosim de i). Atunci şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fiind crescător şi majorat, va fi convergent la marginea superioară a mulţimii $\{-x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi convergent la $-\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$. ◀

Firesc, urmează:

Teorema 3.3 *i) Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este un şir crescător şi nemărginit, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este un şir descrescător şi nemărginit, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Aşadar, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este, în oricare dintre cele două situaţii, divergent în* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: i) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir crescător şi nemărginit. Atunci muţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este doar minorată (de x_1), nu şi majorată. Prin urmare, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. De aici, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $n \geqslant n_\varepsilon$, am avea $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Se demonstrează aplicând i) asupra şirului $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◀

În concluzie, orice şir monoton din $\mathbb{R}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Puncte limită. Limite extreme ale unui şir de numere reale

Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se poate vorbi despre mulţimea notată cu $L(x_n)$ şi denumită ***mulţimea punctelor limită*** corespunzătoare şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În conformitate cu Teorema 3.3, $L(x_n) \neq \varnothing$, $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definiţia 3.13 *Se numeşte* ***punct limită al unui şir*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, un element din* $\overline{\mathbb{R}}$ *care este limita unui subşir* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 3.14 *a) Se numeşte* ***limită inferioară a şirului*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *(şi se notează cu* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *sau cu* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$*) marginea inferioară a mulţimii* $L(x_n)$.

b) Se numeşte ***limită superioară a şirului*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *(şi se notează cu* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *sau cu* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$*) marginea superioară a mulţimii* $L(x_n)$.

Observaţii

1) Evident, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, avem:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir convergent la un element $x \in \mathbb{R}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ şi, în acest caz, avem:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = x.$$

Se poate arăta că, şi reciproc, dacă, pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, are loc relaţia $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, aceasta fiind valoarea comună a ***limitelor sale extreme*** $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

De asemenea, se mai poate arăta că, pentru orice şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, există un subşir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi, totodată, un subşir monoton crescător care să conveargă la $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bibliografie orientativă

1. D. Buşneag, D. Piciu - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. G. Păltineanu - *Analiză matematică.Calcul diferenţial*, Editura AGIR, Bucureşti, 2002.
3. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.
4. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică.Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
5. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Edit. "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

Cursul 4

Serii de numere reale

O altă modalitate de construcţie a mulţimii $\mathbb{R}$, care pleacă de la corpul comutativ şi ordonat al numerelor raţionale, este şi aceea bazată pe noţiunea de serie (de elemente din $\mathbb{Q}$), după cum dezvăluie Arnold şi John Knopfmacher, în lucrarea lor cu titlul *"Two constructions of real numbers via alternating series"* (Internat. J. Math. & Math. Sci., vol 12, No 3, 1989, pp 603-613). Prin folosirea unui algoritm datorat lui Oppenheim, în virtutea căruia orice număr real r poate fi redat sub forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{b_1}{c_1}\frac{1}{a_2} + \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2}\frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{b_1 \ldots b_{k-1}}{c_1 \ldots c_{k-1}} r_k,$$

unde $a_0 = [r]$ (partea întreagă a lui r), $r_1 = r - a_0$, $a_1 = \left[\frac{1}{r_1}\right]$ (dacă $r_1 \neq 0$) şi, recursiv, $a_m = \left[\frac{1}{r_m}\right]$ (când $r_m > 0$), $r_{m+1} = \left(\frac{1}{a_m} - r_m\right)\frac{c_m}{b_m}$, cu b_m şi c_m numere pozitive (în general, întregi) dependente de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\forall\, m \in \{1, 2, \ldots, l\}$ ($l \leq k-1$) - când $r_1, r_2, \ldots, r_l$ diferă de 0 - sau $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ ($k \in \mathbb{N}^*$), când $\forall\, r_m \neq 0$, cei doi iau în consideraţie cazurile particulare în care fie $b_m = c_m = 1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, fie $b_m = 1$ şi $c_m = a_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, referindu-se, în mod special, la mulţimea de reprezentări de tip Sylvester

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{a_n} + \ldots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, aşa încât $a_{i+1} \geq a_i(a_i + 1)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ şi respectiv la mulţimea tuturor reprezentărilor de tip Engel

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, aşa încât $a_{i+1} \geq a_i + 1$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$. Înzestrând fiecare din cele două mulţimi cu adecvate operaţii algebrice de adunare şi înmulţire şi definind câte o relaţie de totală ordine pe ambele, autorii menţionaţi dovedesc în lucrarea lor că, atât prima mulţime, cât şi a cealaltă, satisface axiomele $AR1 \sim AR15$ (v. cursul 2), având pe $\mathbb{Q}$ ca submulţime proprie (a tuturor reprezentărilor Sylvester, respectiv Engel, cu număr finit de termeni). Evident, în prealabil, se acordă atenţie cuvenită acelor situaţii în care reprezentările Sylvester şi Engel au un număr infinit de termeni, supunându-se teoriei seriilor numerice reale. Întru familiarizarea cu aspectele de bază ale unei astfel de teorii, prezentăm aici, în cele ce urmează, noţiuni şi rezultate din sfera seriilor de numere reale. Importanţa cunoaşterii unor asemenea lucruri reiese şi din dezvăluirile şi preocupările unor lucrări de specialitate de dată recentă, între care este de menţionat cea semnată de G. Bagni, relativ la impactul ***seriei lui Guido Grandi*** (1703)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

atât în trecut, cât şi în prezent ("Infinite Series from History to Mathematics Education", 2005).

Serii în $\mathbb{R}$. Fundamente

Cum, cu excepţia situaţiilor care se referă la $\mathbb{Q}$, atât reprezentările Engel, cât şi reprezentările Sylvester constituie, de fapt, sume (infinite) ale elementelor unui şir (de numere raţionale), este normal să ne întrebăm asupra semnificaţiei unor astfel de entităţi matematice în contextul "trecerii" de la un proces finit (cum este acela al calculului sumei unui număr finit de numere) la "extensia" sa infinită. În acest sens, iată câteva definiţii, exemple şi rezultate de ordin general.

Definiţia 4.1 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de numere reale, căruia îi asociem şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$*, cu termenul general*

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Perechea $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$ *se numeşte* ***serie de numere reale*** *(sau* ***serie în*** $\mathbb{R}$*) şi se notează, convenţional, prin*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \ \textit{sau} \ \sum_{n\geq 1} x_n \ \textit{sau} \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \textit{sau} \ : x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte* ***şirul sumelor parţiale ataşat seriei*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*. Termenul general al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, adică* x_n*, poartă denumirea de* ***termen general al seriei*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*.*

Observaţie: Uneori, când mulţimea indicilor şirului de referinţă (x_n) este $\mathbb{N}$, seria $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ se notează, în mod corespunzător, prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (sau $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ sau $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$). Dacă mulţimea respectivă este $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ (unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un anumit număr natural), atunci seria în cauză va fi notată cu $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ (sau $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$ sau $x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_n + \ldots$).

Definiţia 4.2 *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***convergentă,*** *şi acest fapt se notează prin* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (C)$*, dacă şi numai dacă există* $S \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *(adică şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent în* $\mathbb{R}$*, cu limita* S*). Numărul real* S *se numeşte* ***suma seriei*** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi putem scrie:* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*.*

Dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *nu are limită în* $\mathbb{R}$ *(adică* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *nu există sau, dacă există, este* $-\infty$ *sau* $+\infty$*), atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***divergentă*** *şi acest fapt se notează prin* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (D)$*.*

Exemple:

a) Fie $r \in \mathbb{R}$, arbitrar fixat. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, în care $x_n = r^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, se numeşte ***seria geometrică cu raţia*** r. Şirul sumelor parţiale ataşat ei are termenul general S_n dat prin

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \begin{cases} \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1 \\ n + 1, & r = 1 \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ există şi este finită doar dacă $|r| < 1$, putem spune că avem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n (C)$, când $|r| < 1$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n (D)$, când $|r| \geq 1$.

Aşadar, seria lui Grandi $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$, care este seria geometrică cu raţia $r = -1$, are statutul de serie divergentă. Ca atare, suma ei nu este nici 0, nici 1 şi nici 1/2, după cum a existat (şi mai există încă, pe alocuri, şi în prezent), în mod eronat, impresia că aşa ar fi, ci nu există, pur şi simplu (în sensul Definiţiei 4.2).

b) Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă, deoarece avem: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$ şi $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

c) Seria $\sum_{n\geq 2} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$ este convergentă şi are suma $S = \sqrt{2}-1$, întrucât:
$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi există $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \sqrt{2}-1 \in \mathbb{R}$.

d) Seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergentă, deoarece şirul sumelor parţiale corespunzător ei, adică şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este monoton (strict) crescător, în virtutea faptului că $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi, totodată, este majorat (mărginit superior) căci avem:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Astfel, potrivit Teoremei 3.2 (v. cursul 3), şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Definiţia 4.3 *Prin* ***natura*** *seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *înţelegem calitatea ei de a fi convergentă sau divergentă.*

Definiţia 4.4 *Se numeşte* ***criteriu de convergenţă*** *(sau* ***criteriu de divergenţă*** *sau* ***criteriu de stabilire a naturii****), pentru o serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, o anumită condiţie (sau un anumit set de condiţii) care, prin satisfacerea ei (a lui) de către* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, ne permite să stabilim convergenţa (respectiv divergenţa sau natura) seriei cu termenul general* x_n*.*

Definiţia 4.5 *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie de numere reale. Dacă* $x_n \geq 0$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* ***seria*** $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***cu termeni nenegativi****; dacă* $x_n > 0$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***serie cu termeni pozitivi****, iar dacă* $x_n < 0$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***serie cu termeni negativi****. Atunci când* x_n *nu are acelaşi semn pentru orice valoare a indicelui* $n \in \mathbb{N}^*$*, seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***serie cu termeni oarecari****. În cazul în care* $x_n \cdot x_{n+1} < 0$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***alternată****.*

Observaţie: Reprezentările Sylvester şi Engel ale unui număr real sunt serii alternate, cu elemente din $\mathbb{Q}$.

Definiţia 4.6 *Fie seria de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $p \in \mathbb{N}^*$. *Se numeşte* ***rest de ordinul*** p *al seriei considerate (şi se notează cu* R_p*) seria* $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} x_n$.

Definiţia 4.7 *O serie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi în care* x_n *se poate pune sub forma* $y_n - y_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir cu comportare cunoscută, se numeşte* ***serie telescopică.***

Observaţie: Seriile de la punctele b) şi c) ale exemplului de mai sus sunt, desigur, telescopice.

Definiţia 4.8 *a) Două serii de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ *se numesc* ***egale*** *dacă şi numai dacă* $u_n = v_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *În acest caz, scriem:* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$.

b) Seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ *se numesc* ***de aceeaşi natură*** *dacă şi numai dacă sunt, simultan, convergente sau divergente.*

De pildă, seriile de la punctele c) şi d) ale exemplului de mai înainte sunt de aceeaşi natură (fiind, ambele, convergente), pe când seriile de la b) şi d) sunt serii de naturi diferite (prima fiind divergentă, iar cealaltă convergentă).

Teorema 4.1 ***(Criteriul general - al lui Cauchy - de convergenţă a unei serii de numere reale)*** *Fie, în* $\mathbb{R}$, *o serie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. *Aceasta este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât, oricare ar fi* n *şi* p *din* $\mathbb{N}^*$, *cu* $n \geq n_\varepsilon$, *avem:*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie: În conformitate cu Definiţia 4.2, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă (în $\mathbb{R}$), dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale corespunzător ei, adică $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este un şir convergent. Dar, în $\mathbb{R}$, orice şir este convergent, dacă şi numai dacă este şir Cauchy. Aşadar, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy, adică, potrivit Definiţiei 3.11 (v. cursul 3), dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ avem: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Altfel spus, cum $S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem: $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$. ◀

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ este convergentă deoarece şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este convergent, fiind şir Cauchy. Într-adevăr, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1, \text{ când } \epsilon \in (0,1] \\ 1, \text{ când } \epsilon > 1 \end{cases} \in \mathbb{N}^*$, cu $\left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ partea întreagă a lui $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon + 1} < \varepsilon.$$

Prin negare, enunţul Teoremei 4.1 devine:

Propoziţia 4.1 ***(Criteriul general de divergenţă pentru o serie în*** $\mathbb{R}$***)*** *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă dacă şi numai dacă există* $\varepsilon_0 > 0$ *cu proprietatea că, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\exists\, k_n \geq n$ *şi* $\exists\, p_n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $|x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon_0$.

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, numită ***armonică simplă*** (întrucât fiecare termen al ei, cu excepţia primului, este media armonică a celor care îl încadrează, adică $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}^{-1} + x_{n+1}^{-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$), este divergentă. Astfel, pentru $k, p \in \mathbb{N}^*$ şi $p \geq k$, avem:

$$x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+p} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+p} > \frac{p}{k+p} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce înseamnă că există $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0$ aşa încât are loc condiţia din enunţul Propoziţiei 4.1.

Propoziţia 4.2 ***(Criteriu de divergenţă)*** *Fie seria de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*. Dacă şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *nu este convergent la* 0*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: Presupunând, prin absurd, că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ ar fi convergentă, ar rezulta atunci că, potrivit Teoremei 4.1, pentru n trecut în rolul lui $n+1$ şi cu $p = 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, contrar ipotezei din enunţ. Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (D)$. ◀

Observaţie: În mod necesar, pentru orice serie convergentă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, trebuie să avem convergenţa la zero a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pe de altă parte, dacă, pentru o serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ de numere reale, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent la zero, nu înseamnă că seria respectivă este convergentă neapărat. *Condiţia* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *este numai* ***necesară*** *pentru convergenţa seriei cu termenul general* x_n (din $\mathbb{R}$), ***nu şi suficientă***.

Astfel, de exemplu, în cazul seriei armonice simple, chiar dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ este, după cum deja am văzut, divergentă.

În ceea ce priveşte seria lui Grandi, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n$, se vede, odată în plus, că, întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nu există, seria respectivă este divergentă.

Definiţia 4.9 *a) O serie de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***absolut convergentă*** *dacă şi numai dacă seria valorilor absolute ale termenilor săi, adică seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$ *este convergentă. În acest caz, notăm* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (AC)$ *.*

b) Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***semiconvergentă*** *şi notăm acest fapt prin* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (SC)$*, dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, dar nu şi absolut convergentă.*

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ este semiconvergentă întrucât, după cum am văzut deja, ea este convergentă, dar nu şi absolut convergentă, căci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$, adică seria armonică simplă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n}$, este divergentă.

Teorema 4.2 *Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.*

Demonstraţie: Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$, cu $x_n\in\mathbb{R}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, aşa încât $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|x_n|(C)$. Prin urmare, potrivit Teoremei 4.1, putem afirma că, $\forall\,\varepsilon>0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$||x_{n+1}|+|x_{n+2}|+\ldots+|x_{n+p}||<\varepsilon, \forall\, n\in\mathbb{N}^*, n\geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\, p\in\mathbb{N}^*.$$

Altfel spus, avem $|x_{n+1}|+|x_{n+2}|+\ldots+|x_{n+p}|<\varepsilon$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ şi $p\in\mathbb{N}^*$. De aici, folosind faptul că $|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}|\leq|x_{n+1}|+|x_{n+2}|+\ldots+|x_{n+p}|$, deducem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă, pe baza aceleiaşi Teoreme 4.1. ◀

Exemplu: Seria alternată $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ este convergentă pentru că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^2}$ este, după cum am arătat la punctul d) al primului exemplu de aici, convergentă.

Teorema 4.3 ***(Criteriul restului)*** *O serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\lim\limits_{p\to\infty}R_p=0$ (unde R_p este restul de ordin p al seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$).*

Demonstraţie: Cum $R_p=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n-S_p$, $\forall\, p\in\mathbb{N}^*$, dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă şi are suma S, atunci $R_p=S-S_p$ şi $\lim\limits_{p\to\infty}R_p=S-\lim\limits_{p\to\infty}S_p=0$, deoarece $\lim\limits_{p\to\infty}S_p=S$. Reciproc, dacă $\exists\lim\limits_{p\to\infty}R_p=0$, atunci seria $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty}x_n$ este convergentă, ceea ce înseamnă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă. ◀

Observaţie: Din demonstraţia Teoremei 4.3 desprindem faptul că, dacă unei serii numerice din $\mathbb{R}$ i se adaugă sau i se înlătură un număr finit de termeni, atunci natura respectivei serii nu se schimbă.

Teorema 4.4 ***(Adunarea a două serii convergente din R şi înmulţirea unei serii din R cu un scalar (număr) real nenul)***

i) Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ converge şi are suma S' (în $\mathbb{R}$), iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$ converge şi are suma S'' (în $\mathbb{R}$), atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n+y_n)$ este convergentă, având suma $S'+S''$.

ii) Dacă $\lambda\in\mathbb{R}^*$, atunci seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ au aceeaşi natură.

Demonstraţie: i) Cum există $\lim_{n\to\infty}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=S'$ şi $\lim_{n\to\infty}(y_1+y_2+\ldots+y_n)=S''$, este evident că există $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=S'+S''$. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ este convergentă şi are suma $S'+S''$.

ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor ei parţiale este convergent (în $\mathbb{R}$). În consecinţă, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, şi şirul cu termenul general $\lambda\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, adică $\lambda x_1+\lambda x_2+\ldots+\lambda x_n$ este convergent, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ este convergentă. Când seria $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă, atunci şirul $((x_1+x_2+\ldots+x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent, şi deci şi şirul $(\lambda\,(x_1+x_2+\ldots+x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, ceea ce revine la faptul că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ este divergentă. Reciproc, dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, unde $\lambda\in\mathbb{R}^*$, este convergentă, atunci, potrivit primei părţi a acestei demonstraţii a punctului ii), şi seria $\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă. Analog, dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ este divergentă, atunci şi seria $\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este divergentă. Aşadar, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ au aceeaşi natură. ◀

Observaţie: Afirmaţia de la i) nu are loc şi atunci când seriile implicate sunt simultan divergente, întrucât, este posibil ca, uneori, seria sumă să fie convergentă. Astfel, de exemplu, seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}$ sunt divergente, pe când seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]$, având şirul sumelor parţiale constant, este convergentă.

Teorema 4.5 *Dacă, într-o serie convergentă de numere reale, se asociază termenii seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor, atunci se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă.*

Demonstraţie: Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n(C)$, cu $x_n\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Există deci $S\in\mathbb{R}$, aşa încât $S=\lim_{n\to\infty}S_n$. Fie acum seria $(x_1+x_2+\ldots+x_{n_1})+(x_{n_1+1}+\ldots+x_{n_2})+\ldots+\left(x_{n_{k-1}+1}+\ldots+x_{n_k}\right)+\ldots$, obţinută din seria iniţială prin asocierea termenilor ei în grupe finite, cu păstrarea ordinii. Fie $y_k=x_{n_{k-1}+1}+\ldots+x_{n_k}$, $\forall\,k\in\mathbb{N}^*$. Atunci $y_1+y_2+\ldots+y_k=S_{n_k}$ şi deci $\lim_{k\to\infty}(y_1+\ldots+y_k)=\lim_{k\to\infty}S_{n_k}=S$, ceea ce înseamnă că seria nou-obţinută este convergentă, având suma identică cu aceea a seriei iniţiale. ◀

Observaţii: 1) Prin asocierea în grupe finite a termenilor unei serii divergente din $\mathbb{R}$, cu păstrarea ordinii, se pot obţine serii convergente. Astfel, în cazul seriei lui G. Grandi, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$, care este divergentă, putem să ne gândim la asocierea $(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots$, obţinând astfel o serie convergentă, cu suma 0.

2) Dacă seria convergentă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ are termenul general x_n de forma unei sume finite, atunci, prin disociere se poate obţine o serie divergentă. De exemplu, din seria convergentă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]$,

prin disociere, ajungem la seria divergentă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$.

Serii cu termeni din $\mathbb{R}_+$. Criterii de stabilire a naturii unei serii de numere reale pozitive.

Cum investigarea absolutei convergenţe a unei serii de numere reale revine la analiza convergenţei unei serii cu termeni din $\mathbb{R}_+$, este firesc să ne referim, în mod aparte, la serii de tipul $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 4.3 *O serie de numere reale nenegative* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *(cu* $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*) este convergentă dacă şi numai dacă şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, al sumelor sale parţiale, este majorat.*

Demonstraţie: Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ este convergentă, atunci $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi deci mărginit (în $\mathbb{R}$), adică şi majorat.

Reciproc, cum $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător. Fiind şi majorat, prin aplicarea Teoremei 3.2 , şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Deci : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$. ◀

Teorema 4.6 ***(Criteriile de comparaţie I, II şi III)***

(CC I) Fie seriile cu termeni reali pozitivi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$*, aşa încât* $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$*;*

b) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC II) Fie seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$*, cu* $x_n > 0, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, astfel încât* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$*;*

b) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC III) Fie seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$*, cu* $x_n > 0, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, aşa încât există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ $(\in [0, +\infty])$.

a) Dacă $l \in (0, +\infty)$*, atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *au aceeaşi natură;*

b) Dacă $l = 0$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C) \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D) \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

c) Dacă $l = +\infty$*, atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C) \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D) \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$.

Demonstraţie: (CC I) $x_n \le y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S'_n = x_1 + \ldots + x_n \le y_1 + \ldots + y_n = S''_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Când $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n (C)$, şirul $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este majorat, coform Propoziţiei 4.3. Atunci şi şirul $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este majorat. Dar şi monoton crescător, întrucât $S'_n - S'_{n-1} = x_n \ge 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$. Prin urmare, potrivit aceleiaşi propoziţii 4.3, $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi deci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Astfel, are loc a).

Pentru b), dacă avem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (D)$, atunci $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S'_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este un şir nemărginit de numere nenegative şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$. În consecinţă, deoarece $S'_n \le S''_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = +\infty$, ceea ce înseamnă că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n (D)$.

Pentru (CC II), înmulţind relaţiile $\dfrac{x_2}{x_1} \le \dfrac{y_2}{y_1}$, $\dfrac{x_3}{x_2} \le \dfrac{y_3}{y_2}$, $\ldots$, $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} \le \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$, găsim : $\dfrac{x_n}{x_1} \le \dfrac{y_n}{y_1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Altfel spus, avem: $x_n \le \dfrac{x_1}{y_1} y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, ţinând seama de (CC I) şi de Teorema 4.4, rezultă ambele concluzii de la (CC II).

Pentru (CC III), dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ există şi este finită ($l \in [0, \infty)$), atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât

$$(*) \quad l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_\varepsilon.$$

Pentru a), când $l > 0$, luăm $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ şi vom avea $\dfrac{l}{2} < \dfrac{x_n}{y_n} < \dfrac{3l}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_\varepsilon$. Astfel, prin aplicarea criteriului (CC I) şi a Teoremei 4.4, rezultă concluzia cerută, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ fiind de aceeaşi natură.

Pentru b), când $l = 0$, din (*) putem conta numai pe partea dreaptă, adică pe relaţia $x_n < \varepsilon y_n$, $\forall\, n \ge n_\varepsilon$. Atunci, iarăşi prin folosirea Teoremei 4.4 şi a criteriului (CC I), se ajunge la concluzia din enunţ.

Pentru c), când $l = \infty$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge \tilde{n}_\varepsilon$, are loc relaţia $\dfrac{x_n}{y_n} > \varepsilon$. Altfel spus, $\dfrac{y_n}{x_n} < \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\forall\, n \ge \tilde{n}_\varepsilon$. Se aplică acum (CC III, b), cu x_n şi y_n în roluri inversate. ◀

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin \dfrac{1}{n^2+1}$ are termeni pozitivi. Luând în consideraţie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2} (C)$ şi observând că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = 1 \in (0, +\infty)$, putem spune, prin aplicarea criteriului (CC III, a), că seria dată este de aceeaşi natură cu seria (de comparaţie) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$.

Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin \dfrac{1}{n^2+1} (C)$.

Teorema 4.7 ***(Criteriul general de condensare al lui Cauchy)*** *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie cu termeni reali pozitivi, aşa încât şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este descrescător. Dacă există un şir* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de numere naturale, strict crescător şi divergent, astfel încât şirul* $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ *este mărginit, atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}$ *sunt de aceeaşi natură.*

Demonstraţie: Fie $y_n = x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_{n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir descrescător, avem:

$$(k_{n+1} - k_n)\, x_{k_{n+1}} \le y_n \le (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici, întrucât şirul $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ este mărginit şi cu elemente pozitive, adică există $M > 0$, aşa încât

$$0 < \frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} < M, \forall\, n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},$$

avem, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, relaţia

$$\frac{1}{M}\,(k_{n+2} - k_{n+1})\, x_{k_{n+1}} < \frac{k_{n+1} - k_n}{k_{n+2} - k_{n+1}}\,(k_{n+2} - k_{n+1})\, x_{k_{n+1}} =$$

$$= (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_{n+1}} \le y_n \le (k_{n+1} - k_n)\, x_n.$$

Pe baza acesteia, conform criteriului (CC I) şi a Teoremei 4.4, rezultă că seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeaşi natură. Dar cum, potrivit Teoremei 4.5, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeaşi natură, putem conchide că are loc concluzia prezentei teoreme. ◀

Observaţie: De regulă, în aplicaţii, se ia $k_n = 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Evident că, în acest caz, şirul $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător şi divergent în $\mathbb{N}$, iar $\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} = \dfrac{2^{n+1} - 2^n}{2^n - 2^{n-1}} = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar şirul $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\{1\}}$ este mărginit. Atunci, particularizând aplicarea Teoremei 4.7, putem afirma că seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ (unde $x_n \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir descrescător) şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n x_{2^n}$ (unde $2^n = k_{n+1} - k_n = 2^{n+1} - 2^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$) sunt de aceeaşi natură. Acesta este, de fapt, ***criteriul simplu de condensare al lui Cauchy***.

Exemplu: Pentru aşa-numita ***serie armonică generalizată***, adică pentru seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$, unde α este un parametru real , aplicarea criteriului simplu de condensare al lui Cauchy ne conduce la concluzia că natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este aceeaşi cu a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^\alpha$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu raţia $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Cum aceasta din urmă este convergentă când $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ şi divergentă în rest, adică pentru $0 \le \alpha \le 1$, concluzionăm că seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă când $\alpha \le 1$ (pentru $\alpha < 0$ seria este evident divergentă, termenul ei general nefiind convergent la 0).

Odată în plus, vedem astfel că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind una armonică generalizată, cu $\alpha = 2 > 1$.

Teorema 4.8 *(**Criteriul rădăcinii** - al lui Cauchy, **cu limită**) Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, cu* $x_n \ge 0$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, aşa încât există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$*. Atunci:*

i) dacă $l < 1$*, seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

ii) dacă $l>1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

iii) dacă $l=1$, *nu putem decide natura seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Demonstraţie: Întrucât există $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\in[0,+\infty)$, avem: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_\varepsilon$, are loc relaţia

$$(\bullet)\quad l-\varepsilon<\sqrt[n]{x_n}<l+\varepsilon.$$

În cazul i), deoarece $l<1$, putem lua $\varepsilon\in(0,1-l)$ şi atunci rezultă că $x_n<(l+\varepsilon)^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_\varepsilon$, cu $0<l+\varepsilon<1$. Prin aplicarea criteriului (CC I), pe baza faptului că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(l+\varepsilon)^n$ este convergentă, ca serie geometrică cu raţia subunitară, rezultă că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.

În cazul ii), cum $l>1$, putem lua $\varepsilon\in(0,l-1)$ şi atunci, din $(\bullet)$ rezultă că $1<(l-\varepsilon)^n<x_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ cu $n\geq n_\varepsilon$. Pe baza aceluiaşi criteriu, (CC I), întrucât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(l-\varepsilon)^n$, în care $l-\varepsilon>1$, este divergentă, rezultă că avem: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(D)$.

În fine, când $l=1$, adică în cazul iii), nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, după cum reiese din exemplele în care $x_n=\dfrac{1}{n}$ sau $x_n=\dfrac{1}{n^2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. În ambele situaţii, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}$, dar $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n}\,(D)$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^2}\,(C)$. ◀

Observaţie: Atunci când nu există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$, o variantă mai "slabă" a criteriului rădăcinii are loc cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$ în rolul lui l, la i) şi cu $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$, la ii).

Teorema 4.9 *(**Criteriul lui Kummer**) Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n>0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. *Dacă există şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}_+^*$, *astfel încât şirul* $\left(a_n\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-a_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *are limită, fie ea notată cu* l, *atunci:*

i) când $l>0$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

ii) când $l<0$, *iar seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{a_n}$ *este divergentă, rezultă că seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

iii) când $l=0$, *nu putem stabili natura seriei date.*

Demonstraţie: În cazul i), cum $l>0$, obţinem: $\forall\,\varepsilon\in(0,l)$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$,

$$0<l-\varepsilon<a_n\frac{x_n}{x_{n+1}}-a_{n+1}<l+\varepsilon.$$

De aici, reiese că:

$$(\bullet\bullet)\quad 0<x_{n+1}<\frac{a_nx_n-a_{n+1}x_{n+1}}{l-\varepsilon},\forall\, n\in\mathbb{N}^*,n\geq n_\varepsilon.$$

În consecinţă, şirul $(a_n x_n)_{n\geq n_\varepsilon}$ este descrescător. Cum, în plus, $0 < a_n x_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, se poate spune că şirul $(a_n x_n)_{n\geq n_\varepsilon}$ este convergent. Deci există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = \lambda$. Atunci:

$$\sum_{n\geq n_\varepsilon} \frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right) = \frac{1}{l-\varepsilon}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=n_\varepsilon}^{k}\left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{l-\varepsilon}\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon} - a_{k+1}x_{k+1}\right) = \frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_{n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon} - \lambda\right).$$

Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right)$ este convergentă. În virtutea acestui fapt, ţinând seama de relaţia (••), rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, conform criteriului (CC I).

În cazul ii), cum $l<0$, găsim că, pentru orice $\varepsilon\in(0,-l)$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, aşa încât:

$$a_n\frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < l+\varepsilon < 0, \forall\, n\in\mathbb{N}^*, n\geq n_\varepsilon.$$

Altfel spus, avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}, \forall\, n\geq n_\varepsilon$. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a_n}$ fiind divergentă prin ipoteză, reiese atunci, prin aplicarea criteriului (CC II), că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă.

În cazul în care $l=0$, nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. Astfel, pentru $x_n = \frac{1}{n}$ şi $a_n = n$, avem $a_n\frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, iar $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(D)$. Pe când, pentru $x_n = \frac{1}{n^2}$ şi $a_n = n^2$, avem $a_n\frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, cu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(C)$. ◀

Observaţii:

j) Luând $a_n = 1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, pe baza Teoremei 4.9, obţinem următorul ***criteriu*** (***al raportului*** sau ***al lui D'Alembert***) de stabilire a naturii seriei cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$:

"*Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n>0$, $\forall\, n\in N^*$, *pentru care există limita* $L = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Dacă* $L<1$, *atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(C)$, *în timp ce, dacă* $L>1$, *atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(D)$, *iar dacă* $L=1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

jj) În cazul în care $a_n = n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, Teorema 4.9 furnizează aşa-numitul ***criteriu al lui Raabe-Duhamel***, cu următorul enunţ:

"*Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n>0$, $\forall\, n\in N^*$, *aşa încât există limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\right] = \rho$. *Dacă* $\rho>1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\rho<1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă. Dacă* $\rho=1$, *nu putem stabili, cu certitudine, natura seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

jjj) Dacă, în Teorema 4.9, luăm $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci obţinem aşa-numitul ***criteriu al lui Bertrand***, cu enunţul următor:

"*Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *unde* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. *Presupunem că există următoarea limită:* $\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1)\ln(n+1)\right)$. *Atunci, dacă* $\mu > 0$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\mu < 0$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă. Când* $\mu = 0$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

Teorema 4.10 ***(Criteriul lui Gauss)*** *Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă raportul* $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ *se poate exprima sub forma*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, *iar şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit, atunci:*

a) când $\alpha > 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

b) când $\alpha < 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

c) când $\alpha = 1$ *şi* $\beta > 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

d) când $\alpha = 1$ *şi* $\beta \le 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: a) În ipotezele din enunţ, vedem că există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}$ şi această limită este egală cu α. Altfel spus, există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\alpha}$. Atunci, prin aplicarea criteriului raportului, putem spune că, pentru $\frac{1}{\alpha} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Tot astfel, când $\alpha < 1$, seria care ne interesează este, întru concluzia de la b), divergentă. Când $\alpha = 1$, nu ne putem pronunţa, prin criteriul lui D'Alembert, asupra naturii seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. În acest caz însă, vedem că avem:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{y_n}{n^\gamma}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Astfel, prin aplicarea criteriului lui Raabe-Duhamel, găsim că, atunci când $\beta > 1$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar când $\beta < 1$, ea este divergentă. Avem aşadar atinse concluzia de la c) şi, cu excepţia cazului $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$, concluzia de la d).

În fine, când $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$, întru aplicarea criteriului lui Bertrand, constatăm că:

$$n \ln n \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = n \ln n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}\right) -$$

$$-(n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln\frac{n}{n+1} + y_n\frac{\ln n}{n^\gamma} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 < 0.$$

Aceasta deoarece $\dfrac{\ln n}{n^\gamma} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ şi $\left[(n+1)\ln\dfrac{n}{n+1}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln e = -1$. Prin urmare, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. ◀

Criterii de convergenţă pentru serii de numere reale cu termeni oarecari.

Teorema 4.11 *(**Criteriul lui Dirichlet**) Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi are forma $x_n = y_n z_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă şirul sumelor parţiale ce corespunde seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ este mărginit şi dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.*

Demonstraţie: Deoarece, prin ipoteză, şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit, există $M > 0$, astfel încât $|S_n| \le M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În acelaşi timp, întrucât şirul de numere reale pozitive $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent la 0, avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ aşa încât}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_\varepsilon : z_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Atunci, în intenţia aplicării criteriului general al lui Cauchy de convergenţă pentru seria cu termenul general $x_n = y_n z_n$, obţinem faptul că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există n_ε de mai sus, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \ge n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| = |y_{n+1}z_{n+1} + \ldots + y_{n+p}z_{n+p}| = \\
&= |(S_{n+1} - S_n)\, z_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})\, z_{n+2} + \ldots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})\, z_{n+p}| = \\
&= |-S_n z_{n+1} + S_{n+1}(z_{n+1} - z_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + S_{n+p}z_{n+p}| \le \\
&\le M z_{n+1} + M(z_{n+1} - z_{n+2}) + \ldots + M(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + M z_{n+p} = 2M z_{n+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aşadar, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, este convergentă. ◀

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ este convergentă, deoarece se aplică Teorema 4.11, cu $y_n = \cos n$ şi $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Avem: $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n = \dfrac{\cos\dfrac{n}{2}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deci $|S_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{1}{2}\right|} = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În acelaşi timp, şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0. În consecinţă, seria din acest exemplu este convergentă.

Teorema 4.12 ***(Criteriul lui Abel)*** *Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, unde* $x_n \in \mathbb{R}$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $x_n = u_n v_n$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*. Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *, din* $\mathbb{R}$*, este convergentă, iar şirul* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ *este unul monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$ *(adică* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*) este convergentă.*

Demonstraţie: Să zicem că $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător şi mărginit. Atunci, el este convergent (în $\mathbb{R}$). Fie $l = \lim_{n\to\infty} v_n$. Evident, $v_n - l \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Scriind $u_n v_n$ sub forma $u_n v_n = u_n(v_n - l) + lu_n = -u_n(l - v_n) + lu_n$, vedem că, atunci când $l = 0$, putem aplica direct Teorema 4.11 (criteriul lui Dirichlet) asupra seriei cu termenul general $(-u_n)(-v_n)$, şirul $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fiind cu toate elementele nenegative, descrescător şi convergent la 0, pe când şirul sumelor parţiale corespunzător seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-u_n)$ este mărginit, întrucât seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este, prin ipoteză, convergentă. Alternativ, când $l \neq 0$, în virtutea Teoremei 4.4, pe baza ipotezei de convergenţă a seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$, reiese că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} lu_n$ este convergentă, iar, în acelaşi timp, prin aplicarea criteriului lui Dirichlet (Teorema 4.11) asupra seriei cu termenul general $u_n(l - v_n)$, vedem că şirul $(l - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are toate elementele pozitive, este descrescător şi convergent la 0, iar şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este mărginit, deoarece seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este, prin ipoteză, convergentă. Ca atare, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(l - v_n)$ este convergentă şi ea. Rezultă atunci că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$, ca diferenţă a două serii convergente, este convergentă şi în acest caz. În situaţia în care $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător şi mărginit, se raţionează asupra seriei cu termenul general $u_n(-v_n)$, deducându-se, la fel, convergenţa acesteia. Finalmente, se aplică Teorema 4.4, pentru $\lambda = -1$. ◀

Teorema 4.13 ***(Criteriul lui Leibniz, pentru serii alternate)*** *Dacă şirul* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de numere reale pozitive este descrescător şi convergent la* 0*, atunci seria alternată* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie: Aplicăm criteriul lui Dirichlet, luând $y_n = (-1)^n$ şi $z_n = w_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \begin{cases} 1, & \text{când } n \text{ este par} \\ 0, & \text{când } n \text{ este impar} \end{cases}$, se vede că $|S_n| \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, cum şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0, ipotezele criteriului lui Dirichlet sunt îndeplinite. Astfel, prin utilizarea acestui criteriu, rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$, este convergentă. ◀

Alte rezultate relative la serii de numere reale (fără demonstraţii)

Teorema 4.14 ***(Riemann)***

Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie semiconvergentă de numere reale. Atunci:*

i) există o bijecţie $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *pentru care seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\tau(n)}$ *este divergentă;*

ii) pentru orice $r \in \mathbb{R}$, există o bijecţie $\varphi_r : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, astfel încât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\varphi_r(n)}$ este convergentă şi are suma egală cu r.

Definiţia 4.10 *O serie de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ se numeşte **necondiţionat convergentă** dacă şi numai dacă, oricare ar fi bijecţia $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\psi(n)}$ este convergentă.*

Teorema 4.15 *Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea este necondiţionat convergentă şi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\psi(n)},$$

oricare ar fi bijecţia $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Definiţia 4.11 *Se numeşte **produs Cauchy al seriilor** de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$, unde $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 4.16 ***(Mertens)***

Dacă două serii de numere reale sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy al celor două serii este convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor celor două serii.

Propoziţia 4.4 *Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă, cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Teorema 4.17 ***(asupra dezvoltării p-adice a unui număr a, real, pozitiv şi subunitar)***

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, cu $p > 1$. Dacă $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere naturale, aşa încât $0 \le a_k < p$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$ este convergentă, iar suma sa este un număr real $a \in [0, 1]$.

Teorema 4.18 ***(de dezvoltare p-adică a unui număr real $a \in (0, 1]$)***

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, cu $p > 1$ şi $a \in (0, 1]$. Atunci există un şir de numere naturale $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, neconstant nul de la un rang înainte, aşa încât $0 \le a_k \le p - 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $a = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$

Teorema 4.19 ***(de aproximare a sumei unei serii alternate)***

Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n x_n$, cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ descrescător şi convergent la 0. De asemenea, fie S suma acestei serii şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul corespunzător al sumelor parţiale .

Atunci:

$$|S - S_n| < x_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 4.20 ***(de aproximare a sumei unei serii absolut convergente)*** *Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ o serie absolut convergentă de numere reale, S suma sa şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul corespunzător al sumelor parţiale . Atunci, dacă există $\lambda \in (0, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât* *i)* $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \lambda,\ \forall\, n \geq n_0,$ *avem:* $|S - S_n| \leq \dfrac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda},\ \forall\, n \geq n_0$

sau

ii) $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \lambda,\ \forall\, n \geq n_0,$ *avem:* $|S - S_n| < \dfrac{|x_{n+1}|}{1-\lambda},\ \forall\, n \geq n_0.$

Bibliografie

1. A. Knopfmacher, J. Knopfmacher - *Two Constructions of the Real Numbers via Alternating Series*, Iternat. J. Math & Math. Sci., Vol. 12, no. 3 (1989), pp 603-613.

2. J. Galambos - *The Representation of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Math., 502, Springer, 1976.

3. C. Badea - *A theorem of irrationality of infinte series and applications*, Acta Arithmetica, LXIII, 4 (1993).

4. G. Bagni - *Infinite Series from History to Mathematics Education*, 2005.

5. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 3)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

6. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul Diferenţial. (Cap. 2)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

7. Elena Macovei, F. Iacob - *Matematică (pentru anul I, info, ID)*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2006.

8. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 2)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

9. Marina Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Reprografia Univ. Craiova, 2000.

10. Rodica Mihaela Dăneţ ş.a. - *Curs modern de analiză matematică. Volumul I (Cap. 1)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2009.

Cursul 5

Spaţiul liniar real $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Aspecte algebrice.

În perspectiva abordării unor elemente privitoare la funcţii de mai multe variabile reale, prezentăm aici câteva ***aspecte algebrice*** şi ***topologice*** care, în particular, sunt de interes ***pentru mulţimea*** $\mathbb{R}^n$ $(= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{R}$ fiind corpul numerelor reale. Circumstanţial, respectivele aspecte se raportează la ***dreapta reală*** când $n = 1$, la ***planul real*** când $n = 2$, la ***spaţiul real*** când $n = 3$ sau, în general, la ***hiperspaţiul real*** când $n \geq 4$.

Cadru algebric pentru $\mathbb{R}^n$

Definiţia 5.1 *Fie V o mulţime nevidă şi K un corp comutativ. Se spune că, pe V, este definită o* ***structură algebrică de spaţiu liniar peste corpul*** *K dacă şi numai dacă există o lege internă (dată, de regulă, în notaţie aditivă) "+" : $V \times V \to V$ şi o lege de compoziţie (operaţie) externă (notată, de obicei, multiplicativ) " $\cdot$ " $K \times V \to V$, aşa încât sunt îndeplinite următoarele cerinţe (axiome):*

SL1) $(V, +)$ *este un grup comutativ;*

SL2) $\alpha \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \alpha \cdot \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{y}$, $\forall\, \alpha \in K$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$;

SL3) $(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{x} \in V$;

SL4) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{x} \in V$;

SL5) $\mathbf{1} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ *(unde* $\mathbf{1}$ *este elementul unitate din* K*).*

Ansamblul $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte ***spaţiu liniar*** (sau ***vectorial***) peste K (sau ***K-spaţiu liniar***). Elementele K-spaţiului liniar V se numesc ***vectori***, iar elementele lui K se numesc, într-un astfel de context, ***scalari***. Legea de compoziţie internă " + " poartă denumirea de ***adunare a vectorilor***, iar legea de compoziţie externă " $\cdot$ " se numeşte ***înmulţire cu scalari***. Când K este corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, atunci ***spaţiul liniar*** în cauză se numeşte ***real***. Elementul neutru (din V) în raport cu operaţia internă " + " se numeşte ***vector nul*** şi se notează, uzual, cu $\mathbf{0}$. Simetricul unui element $u \in V$, relativ la " + ", se numeşte ***vectorul opus*** lui u şi se notează cu $-u$.

Propoziţia 5.1 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar. Atunci:*

i) $0 \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall\, x \in V, \alpha \in K$;

ii) $(-\alpha) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot (-\mathrm{x}) = -\alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$;

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathrm{x}) = \alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$;

iv) $\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *sau/şi* $\mathrm{x} = \mathbf{0}$.

Demonstraţie: i) $0\cdot \mathrm{x}=(0+0)\cdot \mathrm{x}=0\cdot \mathrm{x}+0\cdot \mathrm{x}, \forall\, \mathrm{x}\in V \Rightarrow 0\cdot \mathrm{x}+(-0\cdot \mathrm{x})=(0\cdot \mathrm{x}+0\cdot \mathrm{x})+(-0\cdot \mathrm{x}) \Rightarrow$ $\mathbf{0}=0\cdot \mathrm{x}+((0\cdot \mathrm{x}+(-0\cdot \mathrm{x}))) \Rightarrow \mathbf{0}=0\cdot \mathrm{x}+\mathbf{0}=0\cdot \mathrm{x}$. Totodată, avem: $\alpha\cdot\mathbf{0}=\alpha\cdot(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\alpha\cdot\mathbf{0}+\alpha\cdot\mathbf{0}$ $\Rightarrow \alpha\cdot\mathbf{0}+(-\alpha\cdot\mathbf{0})=(\alpha\cdot\mathbf{0}+\alpha\cdot\mathbf{0})+(-\alpha\cdot\mathbf{0})=\alpha\cdot\mathbf{0}+(\alpha\cdot\mathbf{0}+(-\alpha\cdot\mathbf{0}))=\alpha\cdot\mathbf{0}+\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0}=\alpha\cdot\mathbf{0}$, $\forall\,\alpha\in K$.

ii) $\mathbf{0}=0\cdot \mathrm{x}=(\alpha-\alpha)\cdot \mathrm{x}=\alpha\cdot \mathrm{x}+(-\alpha)\cdot \mathrm{x} \Rightarrow (-\alpha)\cdot \mathrm{x}=-\alpha\cdot \mathrm{x}$ şi $\mathbf{0}=\alpha\cdot\mathbf{0}=\alpha\cdot(-\mathrm{x}+\mathrm{x})=\alpha\cdot(-\mathrm{x})+\alpha\cdot \mathrm{x}$ $\Rightarrow \alpha\cdot(-\mathrm{x})=-\alpha\cdot \mathrm{x}, \forall\,\alpha\in K, \mathrm{x}\in V$.

iii) $(-\alpha)\cdot(-\mathrm{x})=-\alpha\cdot(-\mathrm{x})=-(-(\alpha\cdot \mathrm{x}))=\alpha\cdot \mathrm{x}, \forall\,\alpha\in K, \mathrm{x}\in V$.

iv) Dacă $\alpha\neq 0$ şi $\alpha\cdot \mathrm{x}=\mathbf{0}$, atunci: $\mathrm{x}=\mathbf{1}\cdot \mathrm{x}=\left(\alpha^{-1}\cdot\alpha\right)\cdot \mathrm{x}=\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot \mathrm{x})=\alpha^{-1}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Altfel, $\alpha=0$ şi x este arbitrar în V. ◀

Propoziţia 5.2 *Mulţimea $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) are structură de spaţiu liniar real în raport cu operaţia algebrică internă de adunare a n-uplelor, definită prin*

$$(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

şi legea de înmulţire a unui n-uplu oarecare cu un scalar real arbitrar, definită prin

$$(\alpha,\mathrm{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \alpha\cdot \mathrm{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n),$$

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie: Asociativitatea şi comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}$ implică, evident, asociativitatea şi respectiv comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}^n$. Totodată, se vede că $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ este vectorul nul, adică elementul neutru al adunării pe $\mathbb{R}^n$ şi, pentru orice $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, există opusul $-\mathrm{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\in\mathbb{R}^n$. Prin urmare, în raport cu adunarea n-uplelor reale, $(\mathbb{R}^n,+)$ este grup (aditiv) comutativ, fiind satisfăcută astfel axioma *SL1)* din Definiţia 5.1. În ceea ce priveşte îndeplinirea axiomelor *SL2)-SL5)* constatăm, pe rând, că avem:

$$\alpha\cdot(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\alpha\cdot(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=(\alpha(x_1+y_1),\alpha(x_2+y_2),\ldots,\alpha(x_n+y_n))=$$

$$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\ldots,\alpha x_n+\alpha y_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\ldots,\alpha y_n)=\alpha\cdot \mathrm{x}+\alpha\cdot \mathrm{y},$$
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{x}=(\alpha+\beta)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2,\ldots,(\alpha+\beta)x_n)=$$

$$=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,\ldots,\alpha x_n+\beta x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)+(\beta x_1,\beta x_2,\ldots,\beta x_n)=$$

$$=\alpha\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\beta\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\alpha\cdot \mathrm{x}+\beta\cdot \mathrm{x},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot \mathrm{x})=\alpha\cdot(\beta\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n))=\alpha\cdot(\beta x_1,\beta x_2,\ldots,\beta x_n)=$$

$$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2,\ldots,(\alpha\beta)x_n)=(\alpha\beta)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\alpha\beta)\cdot \mathrm{x},$$

$$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ şi}$$

$$\mathbf{1}\cdot \mathrm{x}=\mathbf{1}\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(1\cdot x_1,1\cdot x_2,\ldots,1\cdot x_n)=$$

$$=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathrm{x},\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}.$$

În concluzie, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este un spaţiu liniar real. ◀

Alte exemple de spaţii liniare: Fie X o mulţime nevidă, K un corp comutativ, $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste K şi $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \to V\}$. Se poate vedea că $\mathcal{F}(X, V)$ are o structură algebrică de spaţiu liniar în raport cu adunarea funcţiilor, definită în mod obişnuit prin

$$(*) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in V, \forall\, f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

şi înmulţirea funcţiilor cu scalari din K, definită prin

$$(**) \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in V, \forall\, f \in \mathcal{F}(X, V).$$

Aceasta deoarece, în virtutea faptului că V este un K-spaţiu liniar, $\mathcal{F}(X, V)$ satisface, în raport cu operaţiile algebrice menţionate, axiomele *SL1)-SL5)* din Definiţia 5.1.

Particularizând X, K, şi V, obţinem diverse exemple de spaţii vectoriale. Astfel, dacă m şi n sunt numere naturale proprii, iar $X = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F}(X, V)$ se identifică cu mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a tuturor matricilor de tip $m \times n$ şi cu elemente din $\mathbb{R}$, mulţime care, în raport cu adunarea matricilor şi cu înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ este, aşadar, un spaţiu liniar real.

În situaţia în care $X \subseteq \mathbb{R}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, se obţine $\mathbb{R}$-spaţiul liniar $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ al funcţiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X.

Dacă X este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\mathcal{F}(X, V)$ reprezintă, în raport cu adunarea $(*)$ şi înmulţirea $(**)$, spaţiul liniar real al funcţiilor de n-variabile reale, definite pe X şi cu valori vectoriale, de câte m componente reale.

Atunci când $X = \mathbb{N}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, mulţimea $\mathcal{F}(X, V)$ este, în raport cu operaţiile $(*)$ şi $(**)$, spaţiul liniar real al şirurilor de numere reale.

Definiţia 5.2 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste un corp comutativ K şi W o submulţime nevidă a lui V. Dacă, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$, rezultă că $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ şi, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in W$, reiese că $\alpha \cdot \mathrm{x} \in W$, atunci $(W, K, +, \cdot)$ este numit **subspaţiu liniar** al lui $(V, K, +, \cdot)$.*

Exemple:

1) Mulţimea $\{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea n-uplelor din $\mathbb{R}^n$ şi înmulţirea acestora cu scalari din $\mathbb{R}$, un subspaţiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +\cdot)$.

2) Mulţimea $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ a funcţiilor reale, scalare şi pare este, după cum lesne se poate vedea, un subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

3) Mulţimea $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ a şirurilor Cauchy de numere raţionale este un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Definiţia 5.3 *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt elemente ale unui spaţiu liniar V peste un corp comutativ K, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt scalari din K, atunci elementul*

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$$

*se numeşte **combinaţie liniară** a elementelor $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$.*

Observaţie: Ţinând seama de Definiţia 5.3, un enunţ echivalent al Definiţiei 5.2 este următorul: "*O submulţime nevidă W a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte subspaţiu liniar al lui V dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară de oricare două elemente ale lui W aparţine lui W, adică*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W \Rightarrow \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W.$$

Definiţia 5.4 *Fie U o submulţime nevidă a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare (cu scalari din K) de elemente din U se numeşte* ***acoperire liniară*** *a lui U şi se notează cu $Lin(U)$.*

Se poate constata uşor că $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui $(V, K, +, \cdot)$ care o include pe U.

Propoziţia 5.3 *Intersecţia oricăror două subspaţii, W_1 şi W_2, ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ este un subspaţiu liniar al lui V. Reuniunea a două subspaţii liniare ale lui V nu este întotdeauna un subspaţiu liniar al lui V.*

Demonstraţie: Ţinând seama de Propoziţia 5.1 şi de Definiţia 5.2, putem afirma că orice subspaţiu liniar al lui V conţine vectorul nul $\mathbf{0}$. Aşadar $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$. Prin prisma observaţiei de mai sus, luăm două elemente arbitrare din $W_1 \cap W_2$, fie acestea x şi y. Ca atare, x şi y aparţin atât lui W_1 , cât şi lui W_2. Cum W_1 şi W_2 sunt subspaţii liniare ale lui $(V, K, +, \cdot)$, reiese că, pentru oricare scalari α şi β din K, avem $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1$ şi, totodată, $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_2$. Deci $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, adică $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu liniar al lui V.

În ceea ce priveşte partea secundă a concluziei din enunţul prezentei propoziţii, vedem că, de exemplu, deşi mulţimile $V_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathbb{R}^n$, iar vectorii $(1, 0, \ldots, 0)$, din V_1 şi $(0, 0, \ldots, 1)$, din V_2, aparţin reuniunii $V_1 \cup V_2$, suma lor, adică vectorul $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, nu mai aparţine acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspaţiilor liniare V_1 şi V_2 nu este un subspaţiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^n$. ◀

Observaţie: Procedând ca în demonstraţia primei părţi a Propoziţiei 5.3, se poate arăta că, de fapt, intersecţia oricâtor subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar este, de asemenea, un subspaţiu liniar al aceluiaşi spaţiu liniar, ceea ce ne îngăduie să validăm următoarea definiţie.

Definiţia 5.5 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi U o submulţime nevidă a sa. Cum mulţimea subspaţiilor liniare ale lui V care includ submulţimea U este nevidă, cel puţin V făcând parte din ea, numim* ***subspaţiu generat de submulţimea*** *U tocmai intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V care conţin elementele lui U. Notăm acest subspaţiu liniar al lui V cu $Sp(U)$.*

Propoziţia 5.4 *Oricare ar fi submulţimea nevidă U a unui subspaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, avem:*

$$Lin(U) = Sp(U) = \{\mathrm{x} \in V \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in K, \mathrm{x}_i \in U, 1 \leqslant i \leqslant n, \ \textit{aşa încât}\ \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i\}.$$

Demonstraţie: Întrucât $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui V care include pe U, intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V cu proprietatea că o includ pe U, cu alte cuvinte $Sp(U)$, este inclusă în $Lin(U)$, adică $Sp(U) \subseteq Lin(U)$. Reciproc, orice subspaţiu liniar al lui V, care conţine pe U, conţine şi orice combinaţie liniară de elemente din U (cu scalari din K), adică include subspaţiul liniar $Lin(U)$. Prin considerarea intersecţiei tuturor acestor subspaţii, găsim că avem şi incluziunea $Lin(U) \subseteq Sp(U)$. Aşadar, obţinem $Lin(U) = Sp(U)$, ultima mulţime specificată în egalitatea din enunţ fiind de fapt exprimarea relaţională a subspaţiului $Lin(U)$. ◀

Definiţia 5.6 *a) Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ din V. Elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ se numesc* ***liniar dependente*** *dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, dintre care cel puţin unul nenul, astfel încât combinaţia liniară $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$ să fie vectorul nul $\mathbf{0}$ ($\in V$).*

În caz contrar, dacă nu există astfel de scalari, nu toţi nuli, aşa încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$*, altfel spus, dacă relaţia* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$ *are loc necesarmente numai când* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$*, atunci elementele* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *se numesc* ***liniar independente****.*

b) *O* ***submulţime*** *nevidă* U *a unui subspaţiu liniar* V *se numeşte* ***liniar independentă*** *dacă oricare* n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *elemente distincte* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *ale lui* U *sunt liniar independente, în sensul de la a). Altminteri, dacă există* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi nişte elemente* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *din* U *ce sunt liniar dependente, atunci* ***mulţimea*** U *se numeşte* ***liniar dependentă****.*

Observaţii:

1. O submulţime liniar independentă a unui spaţiu liniar nu conţine vectorul nul $\mathbf{0}$.

2. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca n elemente $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ ale unui spaţiu liniar să fie liniar dependente este aceea ca măcar unul dintre elementele în cauză să fie o combinaţie liniară de celelalte. Într-adevăr, dacă $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt liniar dependente, atunci, în conformitate cu Definiţia 5.6, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$. Admiţând, de exemplu, că $\alpha_1 \neq 0$, ar reieşi atunci că avem: $\mathrm{x}_1 = -\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_k\right) x_k$. Deci, unul dintre elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, aici x_1, ar fi o combinaţie liniară de celelalte. Reciproc, dacă $\mathrm{x}_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\beta_k \mathrm{x}_k$, atunci $\mathrm{x}_j - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\beta_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că, pentru elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, există scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n$, evident nu toţi nuli, aşa încât se poate vorbi despre o combinaţie liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul.

Definiţia 5.7 *Fie* $(V, K, +, \cdot)$ *un spaţiu liniar. Se numeşte* ***dimensiune (algebrică)*** *a spaţiului liniar* V *(şi se notează cu* $dim(V)$*) numărul maxim de elemente liniar independente din* V*.*

Spaţiul liniar V *este numit* ***infinit-dimensional*** *dacă există cel puţin o submulţime infinită şi liniar independentă a lui* V*. În caz contrar,* V *este numit* ***spaţiu liniar finit-dimensional****.*

Dacă, într-un spaţiu liniar finit-dimensional există n $(n \in \mathbb{N})$ *elemente liniar independente şi oricare* $n+1$ *elemente din acel spaţiu sunt liniar dependente, atunci spunem că respectivul spaţiu este* n***-dimensional*** *(sau, echivalent,* ***de dimensiune*** n*).*

Definiţia 5.8 *O mulţime* $B \neq \varnothing$*, dintr-un spaţiu liniar* $(V, K, +, \cdot)$*, se numeşte* ***bază algebrică*** *(sau* ***bază Hamel****) a lui* V *dacă* B *este liniar independentă (în sensul Definiţiei 5.6 b)) şi* $Sp(B) = V$*, adică subspaţiul liniar generat de* B *este* V*.*

În cazul unui spaţiu liniar n-dimensional V, o bază a lui V este o mulţime B alcătuită din n elemente, $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$, liniar independente, din V. Fiecare element $\mathrm{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \mathrm{b}_k,$$

K-scalarii $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ numindu-se ***coordonatele lui*** x ***în baza*** B .

Orice bază a unui spaţiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V. Altfel spus, $dim(V)$ nu depinde de baza lui V.

Propoziţia 5.5 *Spaţiul liniar* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *este* n*-dimensional. O mulţime de* m $(m \leqslant n)$ *elemente din* $\mathbb{R}^n$ *este liniar independentă dacă şi numai dacă matricea având drept coloane cele* m n*-uple reale corespunzătoare elementelor în cauză are rangul egal cu* m.

Demonstraţie: În $\mathbb{R}^n$ există elementele $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ care alcătuiesc o bază, numită ***baza canonică a lui*** $\mathbb{R}^n$. Într-adevăr, mulţimea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ este liniar independentă în $\mathbb{R}$, întrucât avem $\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. În plus, $Sp(B) = \mathbb{R}^n$, deoarece orice element $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se exprimă (în mod unic) prin $\mathrm{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$. Aşadar, $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

În al doilea rând, dacă $\mathrm{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathrm{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, ... şi $\mathrm{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ (cu $m \leqslant n$) sunt m elemente din $\mathbb{R}^n$, atunci acestea sunt liniar independente dacă şi numai dacă relaţia $\alpha_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{x}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \mathrm{x}_m = \mathbf{0}$ este posibilă doar când $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Altfel spus, dacă şi numai dacă sistemul liniar algebric (de n ecuaţii, cu m necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$) şi omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{m1} & = & 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{m2} & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_m x_{mn} & = & 0 \end{cases}$$

are numai soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, lucru care se petrece dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului, ale cărei coloane sunt tocmai n-uplele celor m elemente $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$ din $\mathbb{R}^n$, este exact m. ◀

Observaţie: O mulţime $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$, parte nevidă a unui spaţiu liniar finit dimensional $(V, K, +, \cdot)$, este o bază a lui V dacă şi numai dacă orice vector $\mathrm{x} \in V$ se exprimă, în mod unic, sub forma $\mathrm{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$, scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din K fiind coordonatele lui x în baza B.

Notând cu X_B matricea coloană

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a coordonatelor vectorului x în baza B şi cu $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n]$ matricea linie a vectorilor bazei B, relaţia $\mathrm{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$ se poate reda, matriceal, sub forma:

$$\mathrm{x} = \tilde{B} \cdot X_B.$$

Definiţia 5.9 *Se numeşte* ***rang al unei mulţimi*** U *de vectori din spaţiul vectorial* $(V, K, +, \cdot)$ *dimensiunea subspaţiului generat de* U*, adică* $dim\,(Sp(U))$ *şi se notează cu* $rang(U)$.

Observaţie: Dacă V este un K-spaţiu liniar n-dimensional, atunci orice mulţime de n vectori liniar independenţi din V este o bază a lui V şi, de asemenea, orice sistem de n vectori din V care generează spaţiul liniar V alcătuieşte o bază a lui V.

Definiţia 5.10 *Fie* $(V, K, +, \cdot)$ *un spaţiu liniar cu* $dim(V) = n$, $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ *o bază a sa şi* $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_m\}$ *o mulţime de* m *elemente ale lui* V*. Se numeşte* ***matrice de trecere (schimbare) de la baza*** B ***la sistemul de vectori*** B' *matricea* $S = (s_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$

care are, pe coloane, coordonatele vectorilor din B' în baza B, adică

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{m1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $s_{ij} \in K$ sunt aşa încât

$$\begin{cases} \mathrm{b}'_1 & = & s_{11}\mathrm{b}_1 + s_{12}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{1n}\mathrm{b}_n \\ \mathrm{b}'_2 & = & s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{2n}\mathrm{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{b}'_m & = & s_{m1}\mathrm{b}_1 + s_{m2}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{mn}\mathrm{b}_n \end{cases}.$$

Altfel spus, matricial, avem $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, unde $\tilde{B}' = [\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_m]$ şi $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n]$.

Observaţie: Când $m = n$, sistemul de vectori B' este o bază pentru V dacă şi numai dacă matricea S, adică matricea $\tilde{B}^{-1}\tilde{B}'$, de trecere de la B la B', este nesingulară (adică cu determinantul diferit de 0).

Propoziţia 5.6 *Fie B şi B' două baze distincte ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, finit-dimensional şi* x *un element oarecare din V. Dacă X_B şi $X_{B'}$ sunt matricile coloane ale coordonatelor lui* x *în baza B şi respectiv în baza B', iar S este matricea de trecere de la B la B', atunci formula de transformare a coordonatelor lui* x *la schimbarea bazei de la B la B' este următoarea:*

$$X_{B'} = S^{-1}X_B.$$

Demonstraţie: Întrucât $\mathrm{x} = \tilde{B}X_B = \tilde{B}'X_{B'}$ şi $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, avem: $\tilde{B}X_B = \tilde{B}SX_{B'}$. De aici, cum $\tilde{B}$ este nesingulară, prin înmulţirea la stânga cu $\tilde{B}^{-1}$, rezultă: $X_B = SX_{B'}$. În fine, deoarece S este nesingulară, reiese că are loc formula $X_{B'} = S^{-1}X_B$. ◀

Definiţia 5.11 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, finit-dimensional şi două baze ale sale, B şi B'. Spunem că **bazele** B şi B' sunt **la fel orientate** dacă determinantul matricii S de trecere de la B la B' este pozitiv. Bazele B şi B' se numesc **contrar orientate** dacă $det(S) < 0$.*

Spaţiul $\mathbb{R}^n$ poate fi privit, în urma înzestrării sale cu o a doua operaţie algebrică internă, şi ca o algebră (reală), asociativă şi cu unitate, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 5.12 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste un corp comutativ K şi "$\times$" $: V \times V \to V$ o operaţie algebrică internă pe V, cu următoarele proprietăţi:*

$$(\alpha \cdot \mathrm{u} + \beta \cdot \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + \beta \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) \text{ şi}$$

$$\mathrm{u} \times (\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot \mathrm{w}) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + \beta \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}),$$

*$\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V$. Atunci ansamblul $(V, K, +, \cdot, \times)$ se numeşte **algebră** peste K. Când operaţia "$\times$" este asociativă, **algebra** $(V, K, +, \cdot, \times)$ este **asociativă**, iar când "$\times$" are element neutru, **algebra** se numeşte **cu unitate**.*

Într-adevăr, spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, înzestrat cu o a doua operaţie internă, " $\times$ ", definită prin

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{x} \times \mathrm{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n),$$

$$\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este, după cum am spus deja, o algebră asociativă şi cu unitate, peste $\mathbb{R}$, deoarece avem:

$$(\alpha \cdot \mathrm{u} + \beta \cdot \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) \times (w_1, w_2, \ldots, w_n) =$$

$$= ((\alpha u_1 + \beta v_1) w_1, (\alpha u_2 + \beta v_2) w_2, \ldots, (\alpha u_n + \beta v_n) w_n) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_n w_n) + \beta \cdot (v_1 w_1, v_2 w_2, \ldots, v_n w_n) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + \beta \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) \text{ şi}$$

$$\mathrm{u} \times (\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot \mathrm{w}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \times (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \ldots, \alpha v_n + \beta w_n) =$$

$$= (u_1(\alpha v_1 + \beta w_1), u_2(\alpha v_2 + \beta w_2), \ldots, u_n(\alpha v_n + \beta w_n)) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1 v_1, u_2 v_2, \ldots, u_n v_n) + \beta \cdot (u_1 w_1, u_2 w_2, \ldots, u_n w_n) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + \beta \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}),$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathrm{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Totodată, vedem că, în $\mathbb{R}^n$, avem $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \times \mathrm{w}$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ şi că $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ este elementul neutru în raport cu operaţia " $\times$ ". Mai mult, ***algebra*** $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot, \times)$ este şi ***comutativă***, deoarece, în $\mathbb{R}^n$, operaţia multiplicativă " $\times$ " este, evident, comutativă.

Definiţia 5.13 *a) Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ şi ordonat K. Se numeşte **produs scalar** pe V o aplicaţie de la $V \times V$ la K, notată prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$, care satisface următoarele proprietăţi (axiome):*

*PS1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **pozitiv definită**, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ şi

ii. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle = 0$, dacă şi numai dacă $\mathrm{x} = \mathbf{0} \in V$;

*PS2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **simetrică**, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$;

*PS3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este **biliniară**, adică*

i. $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle + \beta \langle \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle$, şi

ii. $\langle \mathrm{x}, \alpha \cdot \mathrm{y} + \beta \cdot \mathrm{z} \rangle = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \beta \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle$, $\forall\, \alpha, \beta \in K, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$.

*b) Perechea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, în care V este un spaţiu liniar peste un corp comutativ şi ordonat, iar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe V se numeşte **spaţiu prehilbertian**.*

*c) Un spaţiu prehilbertian pentru care $K = \mathbb{R}$ se numeşte **spaţiu euclidian**.*

Propoziţia 5.7 *Spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, dotat cu produsul scalar canonic, definit prin*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu euclidian.

Demonstraţie: Se verifică uşor că aplicaţia

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R},$$

unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, satisface axiomele *PS1)-PS3)* din Definiţia 5.13 a), fiind într-adevăr un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Astfel, pentru *PS1)*, avem $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $< \mathrm{x}, \mathrm{x} >_c = 0$, adică $\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 = 0$, dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ceea ce înseamnă $\mathrm{x} = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Pentru *PS2)*, vedem că $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} y_i x_i = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle_c$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$. În fine, pentru *PS3)*, avem: $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} y_i z_i = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle_c + \beta \langle \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle_c$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$. Analog şi pentru cea de-a doua relaţie din *PS3)*. Prin urmare, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_c)$ este un spaţiu euclidian. ◀

Observaţie: Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ pe $\mathbb{R}^n$ se mai numeşte şi ***produs scalar euclidian***.

Definiţia 5.14 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu prehilbertian, dotat cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

*a) Două **elemente** x şi y din V se numesc **ortogonale** dacă şi numai dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$.*

*b) Spunem că un vector $\mathrm{x} \in V$ este **ortogonal pe o mulţime** $U \subset V$ $(U \neq \varnothing)$ dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{y} \in U$.*

*c) Un **sistem** de vectori din V se numeşte **ortogonal** dacă este alcătuit din vectori ortogonali doi câte doi. Mai exact, dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y}$ din respectivul sistem, cu $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.*

*d) Dacă U este o submulţime nevidă a lui V, atunci prin **suplimentul ortogonal al lui** U, notat cu $U^{\perp}$, înţelegem mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe U.*

Observaţie: Notăm prin $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ faptul că vectorul $\mathrm{x} \in V$ este ortogonal pe vectorul $\mathrm{y} \in V$. De asemenea, ortogonalitatea unui element x pe o submulţime U a lui V o vom marca prin notaţia $\mathrm{x} \perp U$. Se vede că $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, $\forall\, U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$.

Definiţia 5.15 *Fie $(V, K, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. **Unghiul dintre vectorii** x **şi** y, notat prin $\sphericalangle(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ sau $\widehat{(\mathrm{x}, \mathrm{y})}$, se defineşte prin relaţia:*

$$\widehat{(\mathrm{x}, \mathrm{y})} = \arccos \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathrm{y}, \mathrm{y} \rangle}}.$$

Observaţie: Într-un spaţiu euclidian, doi vectori sunt ortogonali dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este $\dfrac{\pi}{2}$.

Definiţia 5.16 *a) Fie $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real. Se numeşte **normă** pe V o aplicaţie de la V la $\mathbb{R}$, notată simbolic prin $\| \cdot \|$, care satisface următoarele axiome:*

AN1) $\|\mathrm{x}\| \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ şi $\|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$;

AN2) $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\| = |\alpha| \|\mathrm{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{x} \in V$;

AN3) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leqslant \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|, \forall \mathrm{x,y} \in V$.

b) Perechea $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* ***spaţiu normat****.*

Propoziţia 5.8 *Spaţiul liniar real* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$*, înzestrat cu aşa-numita normă euclidiană, definită prin*

$$\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu normat.

Demonstraţie: Se verifică lesne axiomele *AN1), AN2)* şi *AN3)*, din Definiţia 5.16. Astfel, pentru *AN1)*, avem $\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \geqslant 0$, $\forall \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\|\mathrm{x}\|_e = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$. Pentru *AN2)*, vedem că $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^2 x_i^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \|\mathrm{x}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. În fine, ţinând seama de inegalitatea lui Minkowski, cu $p = 2$, are loc şi *AN3)*, cu $\|\cdot\|_e$. ◀

Observaţie: Orice spaţiu euclidian V este şi spaţiu normat. Într-adevăr, prin intermediul produsului scalar din dotarea spaţiului euclidian respectiv, fie el notat cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se poate defini o normă (numită *norma indusă de produsul scalar* în cauză) prin:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle}, \forall \mathrm{x} \in V.$$

Există şi norme neinduse de vreun produs scalar.

Definiţia 5.17 *a) Fie* $(V, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi* $\mathrm{x} \in V$*. Elementul* x *se numeşte* ***versor*** *dacă* $\|\mathrm{x}\| = 1$*.*

b) Fie V *un spaţiu euclidian şi* U *un sistem nevid de vectori din* V*.* U *se numeşte* ***ortonormat*** *dacă, în raport cu produsul scalar de pe* V*, avem:*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \textit{când } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \\ 1, & \textit{când } \mathrm{x} = \mathrm{y} \end{cases}, \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in U.$$

Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots \mathrm{b}_n\}$ o bază a unui spaţiu euclidian, finit-dimensional, V (cu $dim(V) = n$). În raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definit pe V, matricea $G = (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu elementele $g_{ij} = \langle \mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j \rangle$, al cărei determinant se numeşte ***determinant Gram***, este, desigur, nesingulară, căci, altfel, vectorii din B nu ar mai fi liniar independenţi. Dat fiind faptul că, pentru doi vectori arbitrari din V, x şi y , avem reprezentările (în baza B) $\mathrm{x} = BX_B$ şi $\mathrm{y} = BY_B$, unde X_B şi respectiv Y_B sunt matricile unicolonare ale coordonatelor lui x şi respectiv y în baza B, găsim ***expresia analitică a produsului scalar*** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ***în baza*** B, şi anume

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X_B^T G Y_B,$$

în care $X_B^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este transpusa matricei unicolonare de coordonate ale lui x în baza B.

Baza B este numită ***ortogonală*** ori de câte ori matricea G este diagonală, adică $g_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$.

Spunem că baza B este ***ortonormată*** dacă şi numai dacă G este matricea unitate I_n.

Teorema 5.1 ***(Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt)***

În orice spaţiu euclidian finit-dimensional există baze ortonormate.

Demonstraţie: Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui. Plecând de la B, se poate construi o bază $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiaşi spaţiu V, procedând prin aşa-zisul algoritm al lui Gram-Schmidt, după cum urmează:

1. Pasul 1: $\mathrm{b}'_1 = \mathrm{b}_1$.
2. Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, aşa încât vectorul $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 + \lambda_1 \mathrm{b}'_1$ să fie ortogonal pe b'_1, adică să avem $0 = \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle + \lambda_1 \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle$. Rezultă $\lambda_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}$. Astfel, $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}\mathrm{b}'_1$.
3. Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 şi μ_2 din $\mathbb{R}$, aşa încât $\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 + \mu_1 \mathrm{b}'_1 + \mu_2 \mathrm{b}'_2$ să fie ortogonal pe sistemul $\{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2\}$, adică să avem $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_1\rangle = 0$ şi $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_2\rangle = 0$.
   Găsim $\mu_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}$ şi $\mu_2 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2\rangle}$. Prin urmare, avem: $\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}\mathrm{b}'_1 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2\rangle}\mathrm{b}'_2$.
4. Pasul k: Continuând procedeul, obţinem formula generală:

$$\mathrm{b}'_k = \mathrm{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_k\rangle}{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_i\rangle}\mathrm{b}'_i, k = \overline{2, n}.$$

În cele din urmă, plecând de la baza B', putem obţine baza ortonormată $B'' = \{\mathrm{b}''_1, \mathrm{b}''_2, \ldots, \mathrm{b}''_n\}$, dacă luăm $\mathrm{b}''_k = \dfrac{\mathrm{b}'_k}{\|\mathrm{b}'_k\|}$, $k = \overline{1, n}$, unde $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, considerat pe V. ◀

Bibliografie

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

2. Marina Gorunescu, F. Gorunescu, A. Prodan - *Matematici superioare, Biostatistică şi Informatică*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

3. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. N. Cotfas - *Elemente de algebră liniară,* Editura Universităţii din Bucureşti, 2009.

6. S. Corbu - *Algebră liniară.Geometrie analitică (elemente de teorie şi aplicaţii)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

Cursul 6

Cadru topologic pentru $\mathbb{R}^n$

În continuarea precedentei părţi, din cursul 5, dedicată, în întregime, unor aspecte de ordin algebric (relative la $\mathbb{R}^n$, în principal), sunt prezentate aici elemente cu caracter topologic legate de $\mathbb{R}^n$. Se definesc mai întâi noţiuni de bază din domeniul topologiei generale, după care sunt expuse chestiuni ce privesc spaţiile metrice, cu referiri de interes la $\mathbb{R}^n$. În cele din urmă, sunt luate în atenţie noţiunile de şir şi de serie de elemente din $\mathbb{R}^n$ şi se dau, în context, caracterizări unor puncte şi mulţimi de puncte topologic remarcabile.

Elemente de topologie generală

Iniţiată, cu mai bine de un secol în urmă, în lucrările lui Karl Weierstrass şi dezvoltată ulterior prin contribuţiile semnificative ale unor matematicieni ca J. W. Alexander, P. I. Alexandrov şi S. Lefschetz, ***topologia***, numită (până prin 1930) "analysis situs", este, ca ramură a matematicii, disciplina care se ocupă de aşa-numitele proprietăţi topologice ale mulţimilor de puncte, adică de acele proprietăţi care pot fi formulate folosind numai noţiunea de mulţime deschisă şi noţiunile obişnuite din teoria mulţimilor, precum element, submulţime, complementară, reuniune, intersecţie şi alte asemenea. Totodată, ca ramură de sine-stătătoare a matematicii, topologia are în vedere şi proprietăţile de ordin specific ale funcţiilor, între care existenţa limitei (de un anumit tip) într-un punct şi continuitatea într-un punct sau pe o mulţime sunt cele mai studiate. Devenită în prezent obiect fundamental al matematicii, topologia are aplicaţii aproape în toate domeniile ştiinţei, chiar şi în cele nematematice, mai cu seamă în legătură cu demonstrarea unor rezultate de existenţă din cadrul acelor probleme ce reclamă soluţii de un anumit fel, cu anumite proprietăţi şi care să aparţină anumitor mulţimi.

Ca entitate matematică în sine, noţiunea de topologie (structură topologică) pe o mulţime este introdusă de următoarea definiţie.

Definiţia 6.1 *Fie X o mulţime nevidă oarecare. Numim* ***topologie*** *(sau* ***structură topologică****) pe X o mulţime τ, de submulţimi (părţi) ale lui X, care satisface următoarele condiţii:*

(AT1) $\varnothing, X \in \tau$;

(AT2) orice reuniune de elemente (mulţimi) din τ este un element al lui τ;

(AT3) orice intersecţie finită de mulţimi din τ aparţine lui τ.

Exemple:

a) Mulţimea τ_0 a tuturor submulţimilor D ale lui $\mathbb{R}$, pentru care, fiecărui punct $x \in D$ îi corespunde un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} \subseteq D$, este, după cum, fără dificultate, se poate constata, prin verificarea axiomelor (AT1) - (AT3), o topologie pe $\mathbb{R}$. Aceasta se numeşte ***topologia uzuală (obişnuită) pe mulţimea numerelor reale***.

b) Oricare ar fi mulţimea X, mulţimea tuturor părţilor sale, adică mulţimea $\mathcal{P}(X)$ este desigur o topologie pe X, deoarece verifică (AT1) - (AT3). Aceasta este denumită ***topologie discretă*** pe X.

c) Pentru o mulţime oarecare X, diferită de $\varnothing$, mulţimea $\{\varnothing, X\}$ îndeplineşte (AT1) - (AT3) şi este deci o topologie pe X, denumită ***topologie grosieră (nondiscretă)*** (pe X).

Definiţia 6.2 *Spunem că topologia τ_1, pe o mulţime X, este **mai puţin fină** decât topologia τ_2, pe aceeaşi mulţime X, sau, altfel zis, topologia τ_2 este **mai fină** decât τ_1 dacă $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Se notează aceasta prin $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$.*

Observaţii:

i) Relaţia binară de "fineţe" pe mulţimea topologiilor (pe o aceeaşi mulţime X) este, cu evidenţă, o relaţie de ordine (parţială).

ii) Pe orice mulţime X, topologia grosieră este cea mai puţin fină (decât orice altă topologie), iar topologia discretă este cea mai fină.

Definiţia 6.3 *Un cuplu (X, τ), în care X este o mulţime, iar τ o topologie pe X, se numeşte **spaţiu topologic**.*

Exemplu: $(\mathbb{R}, \tau_0)$ este spaţiul topologic uzual al mulţimii numerelor reale.

Definiţia 6.4 *j) Într-un spaţiu topologic (X, τ), se numeşte **mulţime deschisă** (sau **τ-deschisă**) orice submulţime a lui X care aparţine topologiei τ.*

*j) O submulţime a mulţimii X se numeşte **închisă** dacă complementara ei (în raport cu X) este deschisă.*

Propoziţia 6.1 *Dacă (X, τ) este un spaţiu topologic, atunci:*

1. $\varnothing$ şi X sunt mulţimi închise;

2. orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă;

3. o intersecţie oarecare de mulţimi închise este mulţime închisă.

Demonstraţie: *1.* Potrivit Definiţiei 6.1 (AT1) şi Definiţiei 6.4 j), $\varnothing$ este o mulţime deschisă. Rezultă atunci că $X = X \setminus \varnothing$ este, în conformitate cu Definiţia 6.4 jj), o mulţime închisă. Totodată, pe baza Definiţiei 6.1 (AT1) şi a Definiţiei 6.4 j), mulţimea X este deschisă, de asemenea. În consecinţă, complementara ei faţă de X, adică mulţimea $\varnothing$ este închisă.

2. Cum, în conformitate cu (AT3) (din Definiţia 6.1), orice intersecţie finită de mulţimi din τ, adică mulţimi deschise (potrivit Definiţiei 6.4 jj)), este tot o mulţime din τ, deci deschisă, se poate deduce lesne, prin complementariere în raport cu X şi folosire a regulilor lui De Morgan, că oricare reuniune finită de mulţimi închise este o mulţime închisă.

3. În mod asemănător, folosind (AT2), complementarierea faţă de X şi regulile lui De Morgan, obţinem faptul că o intersecţie oarecare de mulţimi închise este mulţime închisă. ◀

Definiţia 6.5 *Dacă A este o mulţime nevidă dintr-un spaţiu topologic (X, τ), atunci $\tau_A = \{A \cap D \mid D \in \tau\}$ se numeşte **urma topologiei τ pe** A.*

Exemplu: Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, mulţimea $\tau^0_{[a,b]} = \{[a, b] \cap D \mid D \in \tau_0\}$ este urma topologiei reale uzuale τ_0 pe mulţimea $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r \leqslant b\}$ (intervalul închis $[a, b]$).

Definiţia 6.6 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$. Se numeşte **vecinătate a mulţimii** A orice submulţime V a lui X care include o mulţime deschisă D ($D \in \tau$) astfel încât, la rândul său, D o include pe A ($A \subseteq D \subseteq V$). În cazul în care $A = \{x\}$, unde x este un element al mulţimii X, V se numeşte **vecinătate a lui** x.*

Este de remarcat faptul că dacă V este o vecinătate a unei mulţimi $A \subset (X, \tau)$, atunci V este vecinătate pentru orice element $a \in A$ şi reciproc.

Propoziţia 6.2 *Oricare ar fi un element arbitrar x al unui spaţiu topologic (X, τ), mulţimea tuturor vecinătăţilor sale, notată cu $\mathcal{V}(x)$, are următoarele proprietăţi:*

(PV1) dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \subseteq U \subseteq X$, atunci $U \in \mathcal{V}(x)$.

(PV2) oricare ar fi mulţimea finită $\{V_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{V}(x)$, intersecţia $\bigcap\limits_{i \in I} V_i$ aparţine mulţimii $\mathcal{V}(x)$;

(PV3) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;

(PV4) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x)$, astfel încât, $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstraţie: Pentru (PV1): $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \tau$ cu $x \in D \subseteq V$. Cum $V \subseteq U \subseteq X$, urmează că $x \in D \subseteq U$. Ca atare, $U \in \mathcal{V}(x)$, în conformitate cu Definiţia 6.6.

Relativ la (PV2): $\forall V_i \in \mathcal{V}(x)$, $i \in I$, $\exists D_i \in \tau$, astfel încât $x \in D_i \subseteq V_i$, $\forall i \in I$. Atunci $\bigcap\limits_{i \in I} D_i \in \tau$ (conform axiomei (AT3) din Definiţia 6.1) şi $x \in \bigcap\limits_{i \in I} D_i \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} V_i$. Deci $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(x)$.

(PV3) are loc, cu evidenţă, în virtutea Definiţiei 6.6.

În ceea ce priveşte (PV4), pe baza Definiţiei 6.6, deducem că, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists D \in \tau$ aşa încât $x \in D \subseteq D \subseteq V$. Se poate spune că $D \in \mathcal{V}(x)$, deocamdată. Întrucât avem $y \in D \subseteq D$, $\forall y \in D$, putem afirma că $D \in \mathcal{V}(y)$, de asemenea. Aşadar, luând $W = D$, are loc (PV4). ◀

Observaţie: Proprietăţile (PV1) - (PV4) sunt caracteristice pentru un sistem de vecinătăţi $\mathcal{V}(x)$. Mai exact, se poate arăta că, dacă fiecărui punct x dintr-o mulţime X i se asociază o mulţime $\tilde{\mathcal{V}}(x)$, de părţi din X, astfel încât $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ să satisfacă (PV1) - (PV4), atunci există o structură topologică $\tilde{\tau}$, unică, pe X, în raport cu care, pentru orice $x \in (X, \tilde{\tau})$, să avem $\mathcal{V}(x) = \tilde{\mathcal{V}}(x)$, unde $\mathcal{V}(x)$ este sistemul de vecinătăţi ataşat punctului x, prin topologia $\tilde{\tau}$.

Definiţia 6.7 *a) Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $x \in X$. Numim* ***sistem fundamental de vecinătăţi ale lui*** *x o mulţime $\mathcal{U}(x)$ de vecinătăţi ale lui x care satisface condiţia că, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, există $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încât $U \subseteq V$.*

b) Într-un spaţiu topologic (X, τ), se numeşte ***bază a topologiei*** *τ o familie $\mathcal{B}$ de mulţimi deschise (din τ) în raport cu care orice mulţime $D \in \tau$ se poate reprezenta ca reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$.*

Propoziţia 6.3 *O mulţime $\mathcal{B}$ de părţi deschise dintr-un spaţiu topologic (X, τ) este o bază pentru topologia τ dacă şi numai dacă, oricare ar fi punctul $x \in (X, \tau)$, familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x.*

Demonstraţie: Dacă (X, τ) este un spaţiu topologic în care $\mathcal{B}$ este o bază pentru topologia τ, x este un punct arbitrar din (X, τ) şi $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $D \in \tau$ aşa încât $x \in D \subseteq V$. În plus, D se reprezintă ca o reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$. Există deci $B \in \mathcal{B}$, astfel încât $x \in B \subseteq D$. Prin urmare, avem $B \subseteq V$. Ţinând seama de Definiţia 6.7 a), putem trage concluzia că $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul x.

Reciproc, admiţând că, pentru orice $x \in (X, \tau)$, mulţimea $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x şi considerând o mulţime deschisă oarecare D (din τ), precum şi un punct y arbitrar din D, putem vedea că, întrucât $D \in \mathcal{V}(y)$, există o mulţime $B_y \in \mathcal{B}_y$ astfel încât $B_y \subseteq D$.

În consecinţă, avem: $\bigcup_{y\in D} B_y \subseteq D$. În acelaşi timp, cum, pentru orice $y \in D$, avem $y \in B_y$, rezultă: $D \subseteq \bigcup_{y\in D} B_y$. Aşadar, $D = \bigcup_{y\in D} B_y$, adică D se reprezintă ca o reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$. ◀

Exemple:

1) Familia $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$, unde X este o mulţime nevidă oarecare, constituie o bază pentru $\mathcal{P}(X)$, topologia discretă pe X.

2) Familia mulţimilor de tipul $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$, formează o bază pentru τ_0, topologia uzuală pe $\mathbb{R}$.

În cele ce urmează, sunt date definiţii şi proprietăţi ale unor puncte şi submulţimi remarcabile dintr-un spaţiu topologic oarecare (X, τ).

Definiţia 6.8 *a) Fie A o parte nevidă a spaţiului topologic (X, τ). Un element x_0 din A se numeşte **punct interior al mulţimii** A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică dacă A este vecinătate pentru x_0.*

*b) Mulţimea tuturor punctelor interioare ale unei mulţimi $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte **interiorul mulţimii** A şi se notează prin $\mathring{A}$ (sau $int(A)$).*

Teorema 6.1 *Într-un spaţiu topologic (X, τ), arbitrar, sunt adevărate următoarele relaţii şi afirmaţii:*

1°. $\mathring{A} \subseteq A$, $\forall A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

3°. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

4°. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, $\forall A, B \subseteq X$;

5°. $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$, $\forall A \subseteq X$;

6°. $A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

Demonstraţie: Relaţia 1° este, clar, evidentă. Pentru 2°, fie $x \in \mathring{A}$, oarecare. Atunci $A \in \mathcal{V}(x)$ şi, cum, prin ipoteză, $A \subseteq B$, rezultă, pe baza (PV1) (din Propoziţia 6.2), că $B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \mathring{B}$. Altfel spus, $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, ori de câte ori $A \subseteq B$. Pentru 3°, în virtutea relaţiei 2°, pe baza faptului că $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$, vedem că $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A}$ şi $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{B}$. Deci $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Dar are loc şi incluziunea inversă, după cum urmează: $\forall x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A}$ şi $x \in \mathring{B}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$ şi $B \in \mathcal{V}(x)$. De aici, ţinând cont de (PV2) (din Propoziţia 6.2), rezultă că $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, adică $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. În privinţa relaţiei 4°, deoarece $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, avem $\mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ şi $\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, ţinând seama de 2°. În consecinţă, deducem că $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. Pentru 5°, dacă x este un element arbitrar al lui $\mathring{A}$, există atunci o mulţime $D \in \tau$, astfel încât $x \in D \subseteq A$. Ca atare, $x \in \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$ şi deci $\mathring{A} \subseteq \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$. Invers, dacă $x \in \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$, reiese că există $D \in \tau$, aşa încât $x \in D \subseteq A$. Prin urmare, $A \in \mathcal{V}(x)$ şi, astfel, $x \in \mathring{A}$. Altfel spus: $\bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} \subseteq \mathring{A}$. În ceea ce priveşte 6°, dacă $A \in \tau$, rezultă că

$A \subseteq \bigcup\limits_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}}$, adică $A \subseteq \mathring{A}$, în virtutea relaţiei 5°. Ţinând cont şi de 1°, obţinem: $A = \mathring{A}$. Reciproc, dacă $A = \mathring{A}$, atunci, în virtutea relaţiei 5°, reiese că $\mathring{A} \in \tau$, adică $A \in \tau$. ◀

Definiţia 6.9 *a) Un element x din X care este punct interior complementarei $X \setminus A$, unde $A \subseteq X$, se numeşte **punct exterior** al lui A.*

*b) Mulţimea punctelor exterioare unei mulţimi $A \subseteq X$ se numeşte **exteriorul** lui A şi se notează $Ext(A)$.*

Propoziţia 6.4 *Un element x dintr-un spaţiu topologic (X, τ) este punct exterior pentru o mulţime $A \subseteq X$ dacă şi numai dacă există cel puţin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$.*

Demonstraţie: $x \in Ext(A) \Leftrightarrow x \in \widehat{X \setminus A}^{\circ} \Leftrightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists\, D \in \tau$, cu $x \in D \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow \exists\, D \in \tau$, $x \in D$ şi $D \cap A = \varnothing \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \cap A = \varnothing$. ◀

Definiţia 6.10 *i) Un element x dintr-un spaţiu topologic (X, τ) se numeşte **punct aderent** pentru o mulţime $A \subseteq X$ dacă $V \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$.*

*ii) Mulţimea tuturor punctelor aderente ale unei mulţimi A din spaţiul topologic (X, τ) se numeşte **aderenţa** (sau **închiderea**) **mulţimii** A şi se notează cu $\overline{A}$.*

Teorema 6.2 *În orice spaţiu topologic (X, τ), au loc următoarele relaţii şi afirmaţii:*

1°. $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

3°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

4°. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

5°. $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F$, $\forall\, A \subseteq X$;

6°. $(X \setminus A) \in \tau \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demonstraţie: Pentru 1°, dacă x (oarecare) $\in A$, atunci, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $x \in V$ şi deci $x \in V \cap A$, adică $V \cap A \neq \varnothing$. Altfel spus, $x \in \overline{A}$. Aşadar: $A \subseteq \overline{A}$. Relativ la 2°, dacă $A \subseteq B$ şi $x \in \overline{A}$, avem $\varnothing \neq V \cap A \subseteq V \cap B, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \overline{B}$, adică $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Cât priveşte 3°, ţinând seama de 2°, din faptul că $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, rezultă că $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ şi $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Deci: $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Reciproc, dacă $\forall x \in \overline{A \cup B}$, avem $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am presupune că $x \notin \overline{A}$ şi $x \notin \overline{B}$, atunci vor exista două vecinătăţi $V, W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$ şi $W \cap B = \varnothing$.Însă $U = V \cap W \in \mathcal{V}(x)$ şi $U \cap (A \cup B) = \varnothing$ - ceea ce nu este posibil, atât timp cât, în realitate, $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Pentru 4°, întrucât $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$, prin 2° şi intersecţie, deducem că $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Privitor la 5°, se poate vedea, mai întâi, că $\overline{A} = X \setminus Ext(A)$, ceea ce înseamnă că $\overline{A}$ este o mulţime închisă. Cum, din 1°, $A \subseteq \overline{A}$, avem: $\bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F \subseteq \overline{A}$. Invers, contând cu anticipaţie pe 6°, avem $\overline{F} = F$, $\forall\, F \subseteq X$, aşa încât $(X \setminus F) \in \tau$. Atunci, din faptul că $A \subseteq F$, în conformitate cu 1°, rezultă: $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{F} = F$.

De aici, luând intersecţia după F, obţinem: $\overline{A} \subseteq \bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F$. Prin urmare, prin dublă incluziune, are loc 5°. În fine, pentru 6°, dacă A este închisă, înseamnă că mulţimea $(X \setminus A)$ este deschisă. Deci $X \setminus A = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}} = Ext(A)$. Atunci: $A = X \setminus Ext(A) = \overline{A}$. Reciproc, dacă $A = \overline{A}$, deducem că $A = X \setminus Ext(A)$, adică $X \setminus A = Ext(A) = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}}$. Deci $(X \setminus A) \in \tau$, ceea ce înseamnă că A este închisă. ◀

Definiţia 6.11 *i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$. Se numeşte* ***frontieră a mulţimii*** *A, notată cu $Fr(A)$ (sau cu ∂A), mulţimea $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

ii) O ***mulţime*** *$A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte* ***densă în*** *X, atunci când $\overline{A} = X$.*

Exemplu: În (X, τ_0), avem: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, mulţimea numerelor raţionale este densă în $\mathbb{R}$, în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 6.12 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$.*

a) Un element $x \in X$ se numeşte ***punct de acumulare*** *pentru mulţimea A dacă, pentru orice vecinătate V a lui x, are loc relaţia*

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

b) Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale unei mulţimi $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte ***mulţime derivată*** *a lui A şi se notează cu A'.*

Propoziţia 6.5 *În orice spaţiu topologic (X, τ), sunt adevărate relaţiile următoare:*

1°. $A' \subseteq \overline{A}, \forall A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B', \forall A, B \subseteq X$;

3°. $(A \cup B)' = A' \cup B', \forall A, B \subseteq X$.

Demonstraţie: 1°. $\forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{A}$.

2°. $\forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} \varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap B \Rightarrow x \in B'$.

3°. $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B \Rightarrow A' \subseteq (A \cup B)'$ şi $B' \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Pe de altă parte, $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((U \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((U \setminus \{x\}) \cap B) \neq \varnothing$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am avea $x \notin A'$ şi $x \notin B'$, atunci ar există două vecinătăţi $V, W \in \mathcal{V}(x)$ aşa încât $(V \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$ şi $(W \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$, de unde, notând cu $U = V \cap W$, am obţine contradicţia $(U \setminus \{x\}) \cap A = (U \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$. Aşadar, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$şi, ca atare, are loc 3°. ◀

Teorema 6.3 *Dacă $A \subseteq (X, \tau)$, atunci:*

j) $\overline{A} = A \cup A'$;

jj) $A = \overline{A} \Longleftrightarrow A' \subseteq A$.

Demonstraţie: j) $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Invers, dacă x (arbitrar ales) $\in \overline{A}$, atunci $V \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. În această situaţie, există două posibilităţi: sau $x \in A$ sau $x \notin A$ şi, inevitabil, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$, adică $x \in A'$. Aşadar: $x \in A \cup A'$. Altfel spus, avem şi incluziunea $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

jj) Dacă $A = \overline{A}$, ţinând seama de j), avem: $A = \overline{A} = A \cup A'$. Adică: $A' \subseteq A$. Reciproc, dacă $A' \subseteq A$, atunci: $\overline{A} = A \cup A' = A$. ◀

Definiţia 6.13 *i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$, cu A nevidă. Un element x, din A, care nu este din A', se numeşte **punct izolat** al lui A. Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A se numeşte **partea discretă a mulţimii** A şi se notează cu $Iz(A)$ (sau cu $\mathcal{D}(A)$)*

*ii) Mulţimea $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte **discretă** dacă şi numai dacă orice punct al său este un punct izolat, adică dacă $A = Iz(A)$ (sau $A \cap A' = \varnothing$).*

Definiţia 6.14 *a) Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, unde (X, τ) este un spaţiu topologic. Mulţimile A_1 şi A_2 se numesc **separate** dacă şi numai dacă există $D_1, D_2 \in \tau$, astfel încât: $A_1 \subseteq D_1$, $A_2 \subseteq D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.*

*b) O mulţime $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte **neconexă** dacă şi numai dacă există două mulţimi separate, A_1 şi $A_2 \subseteq (X, \tau)$, astfel încât $A = A_1 \cup A_2$.*

*c) Mulţimea $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte **conexă** dacă şi numai dacă A nu este neconexă.*

Definiţia 6.15 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic.*

*a) O familie $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de părţi ale lui X se numeşte **acoperire** a unei mulţimi $A \subseteq (X, \tau)$ dacă*

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

*Dacă $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ şi A este inclusă în $\bigcup_{U_i \in \tilde{\mathcal{U}}} U_i$, spunem că $\tilde{\mathcal{U}}$ este o **subacoperire** a lui $\mathcal{U}$. O acoperire $\mathcal{U}$ a lui A se numeşte **deschisă** dacă elementele U_i ale lui $\mathcal{U}$, $\forall\, i \in I$, sunt mulţimi deschise (adică $U_i \in \tau$, $\forall\, i \in I$).*

*b) O submulţime A a spaţiului topologic (X, τ) se numeşte **compactă** dacă, din orice acoperire deschisă a sa, se poate extrage o subacoperire finită (adică având un număr finit de elemente).*

Observaţie: Definiţiile şi rezultatele de mai sus sunt fără îndoială valide în cazul în care $X = \mathbb{R}^n$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}^*$). Dotând pe $\mathbb{R}^n$ cu o topologie τ, se poate vorbi despre spaţiul topologic $(\mathbb{R}^n, \tau)$ şi, în cadrul acestuia, noţiunile şi proprietăţile lor, prezentate în cadrul general de până aici, se vor păstra.

Spaţii metrice. Referiri la $\mathbb{R}^n$

Definiţia 6.16 *a) Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte **distanţă** (sau **metrică**) pe X, o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele condiţii:*

(AD1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall\, x, y \in X$;

(AD2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$ *(simetria)*;

(AD3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiulară)*;

*b) Perechea (X, d), în care X este o mulţime nevidă şi d este o metrică pe X, se numeşte **spaţiu metric**.*

Observaţie: Din Definiţia 6.16, rezultă că, dacă (X,d) este un spaţiu metric, atunci $d(x,y) \geqslant 0$, $\forall\, x,y \in X$.

Exemple:

1) Fie $X=\mathbb{R}$ şi $d_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu $d_1(x,y)=|x-y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Ţinând seama de proprietăţile funcţiei modul pe $\mathbb{R}$, se poate vedea că d_1 satisface axiomele (AD1) - (AD2), fiind deci o metrică pe $\mathbb{R}$, numită ***metrică uzuală***. Astfel, $(\mathbb{R},d_1)$ este un spaţiu metric.

2) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $X=\mathbb{R}^n$. Considerând $d_2:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, definită prin

$$d_2(\mathrm{x},\mathrm{y})=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

se poate constata uşor că d_2 îndeplineşte (AD1) şi (AD2). De asemenea, pe baza inegalităţii Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz, se verifică că d_2 satisface şi (AD3). Prin urmare, d_2 este o metrică pe $\mathbb{R}^n$ (numită ***metrica euclidiană***), iar $(\mathbb{R}^n,d_2)$ este un spaţiu metric (euclidian).

Pe $\mathbb{R}^n$ se mai pot defini, ca distanţe, şi următoarele aplicaţii:

$$d_p(\mathrm{x},\mathrm{y})=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\forall\,p\geqslant 1,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|},\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

În particular, din metrica (Minkowski) d_p, pentru $p=1$, se obţine distanţa (Manhattan) d_1, definită prin:

$$d_1(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|,\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

iar pentru $p\longrightarrow\infty$, se ajunge la distanţa (Cebîşev) d_∞, definită prin:

$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y})=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|,\forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

3) Dacă X este o mulţime nevidă oarecare, aplicaţia $d:X\times X\to\mathbb{R}$, definită prin

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y})=\begin{cases}1, & \text{dacă } \mathrm{x}\neq\mathrm{y}\\ 0, & \text{dacă } \mathrm{x}=\mathrm{y}\end{cases},$$

satisface, cu evidenţă, axiomele (AD1) - (AD3) din Definiţia 6.16, ceea ce înseamnă că d este o metrică pe X (numită ***metrică discretă***). Spaţiul (X,d) se numeşte ***spaţiu metric discret***.

4) Orice spaţiu normat $(V,\|\cdot\|)$ (vezi Definiţia 5.16 - b) este un spaţiu metric, în raport cu distanţa $d:V\times V\to\mathbb{R}$, ori de câte ori $(V,+,\cdot)$ este un spaţiu liniar real (peste $\mathbb{R}$), unde

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y})=\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|,\forall\,\mathrm{x},\mathrm{y}\in V.$$

În acest caz, d se numeşte ***distanţa indusă de norma*** $\|\cdot\|$. În general, nu orice distanţă este indusă de o normă. Astfel, metrica $\tilde{d}$, definită mai sus pe $\mathbb{R}^n$, nu este indusă de nici o normă, întrucât $\tilde{d}(\mathrm{x},\mathbf{0})$ nu satisface cea de-a doua axiomă din Definiţia 5.16 a).

5) Orice spaţiu prehilbertian real este un spaţiu metric. Distanţa în cauză este distanţa indusă de norma dată de produsul scalar ce intervine în această situaţie. Se poate trage concluzia că, în raport cu orice produs scalar definit pe $\mathbb{R}^n$ (deci şi în raport cu produsul scalar euclidian), mulţimea $\mathbb{R}^n$, înzestrată cu metrica indusă de respectivul produs scalar (prin intermediul normei asociate lui), poate fi considerată că este un spaţiu metric.

6) Fie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi aşa-numita ***funcţie a lui Baire***, $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}.$$

Prin intermediul acesteia, aplicaţia $d_f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|\,, \forall\, x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

satisface axiomele (AD1) - (AD3) din Definiţia 6.16 a), fiind deci o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$. Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$ este atunci un spaţiu metric.

Definiţia 6.17 *Fie (X, d) un spaţiu metric.*

a) ***Distanţa de la un element*** $x \in X$ ***la o mulţime nevidă*** $A \subseteq X$ *este notată cu $\rho(x, A)$ şi egală, prin definiţie, cu* $\inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.

Pentru mulţimea vidă $\varnothing$, se acceptă, prin convenţie, că $\rho(x, \varnothing) = +\infty$.

b) ***Distanţa dintre două mulţimi nevide*** $A, B \subseteq (X, d)$ *este definită prin:*

$$\rho(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Prin convenţie, $\rho(A, \varnothing) = \rho(\varnothing, A) = +\infty$, $\forall\, A \subseteq X$.

c) Se numeşte ***diametru al unei mulţimi nevide*** $A \subseteq (X, d)$ *elementul din $\overline{\mathbb{R}}$, notat cu $\rho(A)$ şi dat de relaţia:*

$$\rho(A) = \sup\{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\}.$$

Convenţional, $\rho(\varnothing) = -\infty$.

Propoziţia 6.6 *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare. Atunci, pe baza Definiţiei 6.17, au loc următoarele afirmaţii:*

i) $A \subseteq B \subseteq (X, d) \Rightarrow \rho(A) \leqslant \rho(B)$

ii) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *este unipunctuală în* (X, d).

Definiţia 6.18 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric (X, d).*

j) A se numeşte ***mărginită*** *dacă $\rho(A) < +\infty$.*

jj) A este numită ***mulţime nemărginită*** *dacă $\rho(A) = +\infty$.*

Pe o mulţime X , nevidă şi dotată cu o metrică d, se pot introduce diferite structuri topologice, dintre care una este intim legată de metrica d, numindu-se ***topologie compatibilă*** (sau ***generată***) ***cu*** (***de***) ***această metrică***. În scopul precizării sale, introducem acum noţiunile de sferă deschisă şi de bilă, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 6.19 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$. Numim* ***sferă deschisă*** *(respectiv* ***închisă*** *sau* ***bilă****) de centru x_0 şi rază r mulţimea $\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$, notată cu $S(x_0; r)$ (respectiv mulţimea $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}$).*

Observaţie: Termenul de ***sferă*** de rază r şi centru x_0 este atribuit mulţimii $Fr\,(S(x_0; r))$.

Topologia τ_d, generată (indusă) de metrica d, pe mulţimea X este atunci aceea care are drept bază (în sensul Definiţiei 6.7 b)) mulţimea tuturor sferelor deschise din X. Într-o asemenea topologie, o mulţime D este deschisă dacă ea este vidă sau dacă, pentru orice punct $x \in D$, există $r \in \mathbb{R}_+^*$, aşa încât $S(x; r) \subseteq D$. Familia tuturor mulţimilor de acest fel este însăşi topologia τ_d pe X. Faptul că τ_d este, în sensul Definiţiei 6.1, o topologie pe X, se poate vedea prin verificarea satisfacerii de către aceasta a axiomelor (AT1) - (AT3). Se poate vedea, de asemenea, că orice sferă deschisă din X (în sensul Definiţiei 6.19) este element din τ_d, meritându-şi într-adevăr denumirea de "deschisă".

În particular, ***mulţimea*** $\mathbb{R}^n$, ***dotată***, de exemplu, ***cu metrica euclidiană*** d_2, poate fi privită, prin prisma cuplului $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$, unde τ_{d_2} este topologia indusă de d_2, ca un spaţiu topologic. Într-un asemenea context, τ_{d_2} poartă denumirea de ***topologie euclidiană*** sau ***uzuală*** pe $\mathbb{R}^n$, iar $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$ se numeşte ***spaţiu topologic euclidian real***, ***n-dimensional***.

Definiţia 6.20 *Două metrici, d şi $\hat{d}$, pe o aceeaşi mulţime X, se numesc* **echivalente** *dacă induc aceeaşi topologie pe X, adică dacă $\tau_d = \tau_{\hat{d}}$.*

Teorema 6.4 *Fie d şi $\hat{d}$ metrici pe o mulţime X. Dacă există două constante reale şi pozitive, α şi β, astfel încât*

$$(*) \quad \alpha \cdot d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y) \leqslant \beta \cdot d(x, y), \forall\, x, y \in X,$$

atunci d şi $\hat{d}$ sunt metrici echivalente.

Demonstraţie: Se constată că prima (cea de la stânga) dintre inegalităţile din $(*)$ implică faptul că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$, iar cealaltă inegalitate conduce la relaţia $\tau_{\hat{d}} \preccurlyeq \tau_d$, ajungându-se astfel la concluzia că $(*)$ implică egalitatea topologiilor τ_d şi $\tau_{\hat{d}}$, ceea ce înseamnă echivalenţa metricilor d şi $\hat{d}$.

Astfel, pentru a arăta că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$, se consideră x arbitrar din X şi o sferă arbitrară $S_d(x; r)$. Luând $r_\alpha = \alpha \cdot r > 0$, observăm că $S_{\hat{d}}(x; r_\alpha) \subseteq S_d(x; r)$, întrucât, $\forall\, y \in S_{\hat{d}}(x; r_\alpha)$, avem $\hat{d}(x, y) < r_\alpha = \alpha \cdot r$ şi, din $(*)$, deducem că $\alpha \cdot d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y) < \alpha \cdot r$. De aici, rezultă că $d(x, y) < r$, adică $y \in S_d(x; r)$. Deci $S_d(x; r) \in \tau_{\hat{d}}$ şi, astfel, reiese că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$. În mod cu totul similar, se arată că are loc şi relaţia inversă, adică $\tau_{\hat{d}} \preccurlyeq \tau_d$ ◀

Exemplu: Metricile d_1, d_2 şi d_∞ sunt echivalente pe $\mathbb{R}^n$. Aceasta întrucât, după cum se poate vedea, (nedificil în fond) au loc relaţiile următoare, de tipul $(*)$:

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \sqrt{n} \cdot d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \text{ şi,}$$

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant d_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant n \cdot d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Observaţii:

1) Condiţia $(*)$ este doar suficientă, nu şi necesară pentru echivalenţa a două metrici, d şi $\hat{d}$. Fără să satisfacă numaidecât $(*)$, două metrici pot fi echivalente. De exemplu, pe $X = \mathbb{R}_+^*$, metricile $d(x, y) = |x - y|$ şi $\hat{d}(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, sunt echivalente (inducând o aceeaşi topologie), dar nu satisfac nici o relaţie de tipul $(*)$.

2) În cazul în care metricile d şi $\hat{d}$ sunt induse de nişte norme, atunci condiţia $(*)$ este nu numai suficientă, ci şi necesară pentru ca respectivele metrici să fie echivalente. În acel caz, la nivelul normelor $\|\cdot\|$ şi $|||\cdot|||$ ce induc pe d şi pe $\hat{d}$, relaţia $(*)$ revine la următoarea:

$$(**) \quad \alpha\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant \beta\|x\|, \forall\, x \in X,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, iar X este spaţiul liniar real în cauză. Se poate spune atunci că $(**)$ reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca normele $\|\cdot\|$ şi $|||\cdot|||$ (implicit, şi metricile induse de aceste norme) să fie echivalente.

Şiruri şi serii de elemente din $\mathbb{R}^n$

Cum, după cum am văzut deja, $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu o distanţă, poate fi apreciat, în pereche cu metrica respectivă, ca un spaţiu metric, consideraţiile ce urmează sunt potrivite şi pentru cazul în care, în particular, X, mulţimea la care ne referim în general, este $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 6.21 *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de puncte din X.*

a) Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este ***mărginit*** *dacă mulţimea elementelor sale este mărginită, adică dacă există $\tilde{x} \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_n \in S(\tilde{x}, r)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este unul ***fundamental (Cauchy)*** *dacă: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.*

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este numit ***convergent*** *la un $x_0 \in X$ dacă şirul de numere reale $(d(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la 0.*

Teorema 6.5 *Fie $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, dotat cu metrica euclidiană d_2. Un şir de puncte din $\mathbb{R}^m$ este convergent, în $\mathbb{R}^m$, dacă şi numai dacă, cele m şiruri componente (ale coordonatelor) sunt convergente şi, atunci limita şirului din $\mathbb{R}^m$ este punctul ale cărui coordonate sunt limitele celor m şiruri din $\mathbb{R}$ ale coordonatelor.*

De asemenea, un şir de puncte din $\mathbb{R}^m$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$. La fel, studiul unei serii din $\mathbb{R}^m$, revine la studiul componentelor sale în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: Fie $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ un şir pentru care $\mathrm{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^m\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $x_n^j \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, j = \overline{1, m}$. Totodată, $\forall\, \mathrm{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^m\right) \in \mathbb{R}^m$, este adevărată relaţia:

$$(\ !\ ) \quad |y^j| \leqslant \|y\|_e = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(y^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, j = \overline{1, m}.$$

Admiţând că $\mathrm{x}_n \xrightarrow{d_2} \mathrm{x}_* = \left(x_*^1, x_*^2, \ldots, x_*^m\right) \in \mathbb{R}^m$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) = 0$, în $\mathbb{R}$, deducem, pe seama relaţiei (!), că, luând $y^j = x_n^j - x_*^j$, $\forall\, j = \overline{1, m}$, avem:

$$(\ !!\ ) \quad |x_n^j - x_*^j| \leqslant d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_n^i - x_*^i|, \forall\, j = \overline{1, m}.$$

Întrucât $d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) \longrightarrow 0$, reiese că $|x_n^j - x_*^j| \longrightarrow 0$, $\forall\, j = \overline{1, m}$, ceea ce înseamnă că toate cele m şiruri componente ale şirului $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$, la coordonatele corespunzătoare ale lui x_*. Faptul reciproc rezultă adevărat pe baza inegalităţii din partea dreaptă a relaţiei (!!).

În ceea ce priveşte concluzia relativă la un şir Cauchy $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, ea rezultă în virtutea relaţiei (!), în care, de data aceasta, se ia $y^j = x^j_{n+p} - x^j_n$, $\forall\, j = \overline{1,m}$. La fel şi concluzia privitoare la o serie din $\mathbb{R}^m$. ◀

Propoziţia 6.7 ***(De caracterizare a punctelor aderente ale unei mulţimi dintr-un spaţiu metric, cu ajutorul şirurilor)***

Fie A o submulţime a unui spaţiu metric (X,d). Un punct $x \in X$ este aderent pentru A dacă şi numai dacă există un şir de puncte din A care să conveargă la x, în τ_d.

Demonstraţie: Se ţine seama de faptul că $x \in \overline{A} \Leftrightarrow V \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$. În particular, pentru $V = S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right)$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Alegând câte un punct $x_n \in S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ pentru care $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$. Cu alte cuvinte, $x_n \xrightarrow{d_2} x$.

Reciproc, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ este un şir convergent, în τ_d, la un punct x din X, atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x) < \varepsilon$. Altfel spus, $x_n \in S_d(x;\varepsilon)$. Deci: $S_d(x;\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Ori, aceasta înseamnă că $x \in \overline{A}$. ◀

Observaţie: În virtutea rezultatului stipulat de Propoziţia 6.7, putem afirma că o mulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) (şi, în particular, din $\mathbb{R}^n$) este închisă (în raport cu τ_d), adică $A = \overline{A}$, dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A.

Propoziţia 6.8 ***(De caracterizare a punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor)***

Fie $A \subseteq (X,d)$. Atunci $x \in A'$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$, astfel încât $x_n \neq x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Altfel spus, $x \in A'$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Definiţia 6.22 *a) Un spaţiu metric (X,d) se numeşte **complet** dacă şi numai dacă orice şir Cauchy din X este convergent la un punct din X.*

*b) Un spaţiu prehilbertian şi complet (ca spaţiu metric, cu metrica indusă de norma dată, la rândul ei, de produsul scalar în cauză) se numeşte **spaţiu Hilbert**.*

*c) Un spaţiu normat şi complet (în raport cu metrica indusă de norma existentă) se numeşte **spaţiu Banach**.*

Teorema 6.6 *Spaţiul $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian, este un spaţiu Hilbert. Dotat cu norma euclidiană, $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu Banach, fiind un spaţiu complet în raport cu metrica euclidiană.*

Demonstraţie: În conformitate cu Teorema 6.5, un şir din $\mathbb{R}^n$ este de tip Cauchy dacă şi numai dacă toate cele n şiruri componente ale sale sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$. Cum, în $\mathbb{R}$, înzestrat cu metrica (topologia) uzuală, orice şir Cauchy este convergent, se poate spune, în virtutea aceleiaşi teoreme, că şirul considerat în $\mathbb{R}^n$, ca şir Cauchy, este, în mod necesar, convergent în $\mathbb{R}^n$ (în raport cu metrica euclidiană). Prin urmare, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spaţiu metric complet. Cum d_2 este indusă de norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, putem afirma că spaţiul normat $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ este complet, adică un spaţiu Banach. În fine, întrucât $\|\cdot\|_2$ este norma dată de produsul scalar euclidian $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$, se poate zice că spaţiul prehilbertian $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ este complet în raport cu metrica indusă de norma dată de $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$, adică $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ este un spaţiu Hilbert. ◀

Bibliografie

1. W. G. Chinn, N. E. Steenrod - *Introducere în topologie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

2. Olga Costinescu - *Elemente de topologie generală*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 3)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 4)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată. Analiză matematică (Cap. IV)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 4)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

7. D. Lehmann - *Initiation à la Topologie Générale*, Ellipses Marketing, 2004.

8. Silvia-Otilia Corduneanu - *Capitole de analiză matematică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2010.

Cursul 7

Funcţii reale (Generalităţi). Aplicaţii liniare.

Amintindu-ne (v. cursul 1) că o funcţie (relaţie funcţională) f, de la o mulţime nevidă X la o mulţime nevidă Y este, prin definiţie, o relaţie binară $f \subseteq X \times Y$ astfel încât $D(f) \overset{def}{=} \{x \in X \mid \exists\, y \in Y, (x, y) \in f\} = X$, iar dacă $(x, y_1) \in f$ şi $(x, y_2) \in f$, atunci $y_1 = y_2$, $\forall\, x \in X$, precizăm că, pentru f, în locul denumirii de ***funcţie de la** X **la** Y*, uzual notată cu $f : X \to Y$, se mai folosesc şi termenii de ***aplicaţie*** sau ***transformare*** sau ***operator*** sau ***reprezentare*** sau ***operaţie*** de la X la Y. Oricum am denumi-o, $D(f)$ reprezintă ***mulţimea de definiţie*** a funcţiei f, iar $f(X) \overset{def}{=} \{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ aşa încât $y = f(x)\}$ este ***imaginea lui** X **prin** f* sau, echivalent spus, ***mulţimea valorilor lui** f*. Totodată, dacă $\varnothing \neq A \subseteq X$, mulţimea $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ se numeşte, firesc, ***imaginea lui** A **prin funcţia** $f : X \to Y$*, iar dacă $B \subseteq Y$, mulţimea $f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ se va numi ***imaginea reciprocă*** sau ***contraimaginea*** sau ***preimaginea mulţimii** B **prin funcţia** f*. De asemenea, în contextul de faţă, este indicat să fie amintit şi faptul că mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ poartă denumirea de ***grafic al funcţiei*** $f : X \to Y$. În plus, dacă $\varnothing \neq A \subseteq X$, funcţia notată cu $f_{|A}$ şi definită, ca relaţie binară funcţională, prin $f_{|A} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$, pentru care, aşadar, $D\left(f_{|A}\right) = A$ şi $f_{|A}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, se numeşte (v. cursul 1) ***restricţia funcţiei** f **la mulţimea** A*, în timp ce, pentru o funcţie $g : A \to Y$, orice aplicaţie $\tilde{g} : \tilde{A} \to Y$, unde $A \subsetneq \tilde{A} \subseteq X$, se numeşte ***prelungire a lui** g **la mulţimea** $\tilde{A}$*,de îndată ce $\tilde{g}_{|A} \equiv g$.

În aceeaşi notă generală, să precizăm şi aici că o funcţie $f : X \to Y$ este o ***surjecţie*** (ori, echivalent, o ***funcţie surjectivă***) dacă $f(X) = Y$, o ***injecţie*** (sau o ***funcţie injectivă***) ori de câte ori, pentru orice $x_1, x_2 \in X$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, faptul că $f(x_1) = f(x_2)$, cu $x_1, x_2 \in X$, implică numai egalitatea $x_1 = x_2$, nu şi vreo altă relaţie între x_1 şi x_2), după cum f este o ***bijecţie*** (sau o ***funcţie bijectivă***) când ea este, simultan, surjecţie şi injecţie. Este cazul, totodată, să punctăm faptul că, dacă f este o funcţie de la X la Y, atunci relaţia inversă $f^{-1} \subseteq Y \times X$ nu este, în general, tot o funcţie, decât numai când f este o bijecţie şi reciproc. În acest caz, şi f^{-1} este tot o bijecţie. Tot în general, pentru o funcţie oarecare $f : X \to Y$, pentru care $f^{-1}(\cdot)$ desemnează imaginea reciprocă a unei mulţimi, sunt adevărate următoarele afirmaţii:

i) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$, $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

ii) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$, $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$;

iii) $\forall\, (A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow f\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$ şi $f\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$;

iv) $\forall\, (B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ şi $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

v) $\forall\, B \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$;

vi) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;

vii) $\forall\, B \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$;

viii) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right)$.

Dacă f este surjecţie, atunci relaţia din vii) este chiar una de egalitate, nu numai de incluziune într-un singur sens. Tot aşa, când f este o injecţie, în viii) avem o egalitate de fapt. În plus, dacă f este o bijecţie de la X la Y, cea de-a doua relaţie din iii) este una de egalitate. Tot atunci, când f este bijectivă, mai au loc şi proprietăţile:

j) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ şi $f : X \to Y$ bijecţie $\Rightarrow f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$;

jj) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ şi $f : X \to Y$ bijecţie $\Rightarrow f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;

În fine, dacă f este o funcţie de la X la Y şi g o funcţie de la Y la W (mulţime abstractă, nevidă), atunci compunerea $g \circ f$ a relaţiilor funcţionale f şi g este tot o funcţie, de la X la W, aşa ca $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall\, x \in X$ şi au loc următoarele două proprietăţi:

l) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow (g \circ f)(A) = g(f(A))$;

ll) $\forall\, C \in \mathcal{P}(W) \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.

Dacă f şi g sunt, ambele, injective (respectiv surjective, ori bijective), atunci $g \circ f$ este, de asemenea, injectivă (respectiv surjectivă/bijectivă). Compunerea funcţiilor este asociativă, dar, în general, nu şi comutativă. Dacă f este o bijecţie, atunci există, ca funcţie, $f^{-1} : Y \to X$ şi avem: $f^{-1} \circ f = 1_X$ (funcţia identică în X), $f \circ f^{-1} = 1_Y$ (funcţia identică în Y).

Cu evidenţă, toate precizările de până aici îşi menţin valabilitatea şi în cazul particular în care $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ şi $Y = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, adică în cazul funcţiilor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, generic denumite ***funcţii reale***. Când $n = m = 1$, este cazul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ***real-scalare*** (sau, mai exact, ***reale şi scalar-scalare*** sau ***unidimensionale*** (***de o singură varabilă reală***)). Dacă $n = 1$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, suntem în cazul ***funcţiilor*** reale $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ denumite ***scalar-vectoriale*** (sau ***funcţii de o variabilă reală*** şi ***cu valori reale, vectoriale***). Despre asemenea funcţii, se poate afirma că au m componente scalar-scalare $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$, în sensul că

$$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\right), \forall\, x \in D_f \subseteq \mathbb{R},$$

cu $D_f = \bigcap\limits_{k=1}^{m} D_{f_k}$, unde D_{f_k} - reprezintă mulţimea de definiţie a funcţiei reale, de o variabilă reală, f_k, adică mulţimea acelor elemente $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f_k(x)$ are înţeles în $\mathbb{R}$. Fiecare dintre funcţiile f_k $(k = \overline{1,m})$ este fie o ***funcţie elementară de bază***, adică un element din familia $E_b = \{\text{"}const\text{"}, 1_{\mathbb{R}}, \exp_a, \log_a, (\cdot)^a, \text{"}trig\text{"}, \text{"}arctrig\text{"}\}$, în care "const" semnifică o ***funcţie reală constantă*** (adică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = c, c \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$), $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este ***funcţia identitate pe*** $\mathbb{R}$ (adică $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$), $\exp_a$ înseamnă ***funcţia exponenţială de bază*** a $(a > 0, a \neq 1)$ (adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x \in \mathbb{R}_+^*$), $\log_a$ reprezintă ***funcţia logaritmică cu baza*** a $(a > 0, a \neq 1)$ (adică $x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$), $(\cdot)^a$ denotă ***funcţia putere de exponent*** a $(a \in \mathbb{R})$ (adică $x \in D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow x^a \in \widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}$), "*trig*" este una dintre ***funcţiile trigonometrice directe*** (*sinus*, *cosinus*, *tangentă*, *cotangentă*), iar "*arctrig*" este o ***funcţie trigonometrică inversă*** (*arcsinus*, *arccosinus*, *arctangentă* sau *arccotangentă*) , fie o ***funcţie elementară***, adică o funcţie obţinută prin aplicarea, de un număr finit de ori, a unora dintre sau a tuturor celor patru operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea) asupra elementelor lui E_b, fie o ***funcţie specială*** (precum este ***funcţia parte întreagă***, anume $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \stackrel{def}{=} \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid t \leq x\}$, funcţia ***signum***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, ***funcţia modul***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, ***funcţia parte zecimală***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \{x\} = x - [x] \in [0,1)$, ***funcţia lui Dirichlet***, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,***funcţia lui Heaviside***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, ***funcţia lui Riemann***, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in (0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ (p,q) = 1 \end{cases}$, fie o ***funcţie rezultată prin compunerea unui număr finit de elemente din E_b, funcţii elementare sau/şi funcţii speciale***). Studiul unei funcţii $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ se face, de cele mai multe ori, pe baza studiului funcţiilor sale componente $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall\, k = \overline{1,m}$.

În situaţia în care $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m = 1$, orice ***funcţie reală*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte ***vectorial-scalară*** sau ***funcţie de variabilă vectorial-reală şi cu valori scalar-reale*** (ori ***funcţie de n variabile reale, cu valori reale şi scalare***). De asemenea, când A este un subspaţiu liniar, peste $\mathbb{R}$, al spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, f se numeşte ***funcţională*** (***reală***).

Exemple:

1) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = -\sqrt{\sin\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2) \in A$, unde $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin\left(x_1^2 + x_2^2\right) \geq 0\}$ este, de fapt, mulţimea $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N}\}$, reprezintă un exemplu de funcţie de două variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{R}$. Din punct de vedere geometric, mulţimea A, de definiţie a acestei funcţii, este reuniunea mulţimilor de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, situate în interiorul şi pe frontiera discului $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \pi\}$, cu centrul în $\mathbf{0} = (0,0)$ şi de rază $\sqrt{\pi}$, precum şi în coroanele circulare închise $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$, adică în $\overline{D(\mathbf{0}, \sqrt{(2k+1)\pi})} \setminus \overset{\circ}{D}(\mathbf{0}, \sqrt{2k\pi})$, unde $\overline{D(\mathbf{0}, \sqrt{(2k+1)\pi})}$ este închiderea discului de centru $\mathbf{0} = (0,0)$ şi de rază egală cu $\sqrt{(2k+1)\pi}$, în raport cu topologia indusă de metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^2$, iar $\overset{\circ}{D}(\mathbf{0}, \sqrt{2k\pi})$ este interiorul discului cu centrul tot în $\mathbf{0}$ şi cu raza $\sqrt{2k\pi}$, în raport cu aceeaşi toplogie, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

2) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = \ln(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_3)^{x_2}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in A$, unde $A = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathrm{x}) \text{ are sens în } \mathbb{R}\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0 \text{ şi } x_1 + x_3 > 0\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 + x_3 < 1 - x_2\}$ este, cu evidenţă, un exemplu de funcţie dependentă de trei variabile reale şi cu valori reale, scalare.

3) Un alt exemplu de funcţie reală de mai multe variabile şi cu valori în $\mathbb{R}$ este cel furnizat de noţiunea de ***funcţie polinomială*** $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$(*) \quad P(\mathrm{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

unde $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i_1 = \overline{0, k_1}$, $\forall\, i_2 = \overline{0, k_2}$, $\ldots$, $\forall\, i_n = \overline{0, k_n}$ (cu $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$) reprezintă coeficienţii ***polinomului*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (***de n nedeterminate şi cu coeficienţi reali***). Fiecare dintre termenii $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ se numeşte ***monom*** (dependent de variabilele reale x_1, dacă $i_1 > 0$, x_2, dacă $i_2 > 0$, $\ldots$ şi/sau x_n, când $i_n > 0$ şi cu coeficientul real $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$). Prin ***gradul monomului*** $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ înţelegem numărul $i_1 + i_2 + \ldots + i_n \in \mathbb{N}$. Cum $P(\mathrm{x})$ este o sumă finită de monoame, definim ***gradul polinomului*** P ca fiind maximul gradelor monoamelor din expresia sa. ***Polinomul*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numeşte ***omogen*** sau, altfel spus, ***formă***, dacă toate monoamele din suma sa de expresie au acelaşi grad. Un exemplu de astfel de ***polinom*** este cel ***de gradul întâi***, a cărui expresie, dependentă de n variabile reale - $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

adică o combinaţie liniară de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, în care coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt elemente din $\mathbb{R}$. Acest tip de polinom este o ***formă liniară reală, definită pe*** $\mathbb{R}^n$. Este clar că orice polinom

$P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se poate exprima, în mod unic, ca o sumă finită de polinoame omogene, adică se poate scrie $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$, unde P_i, $\forall\, i = \overline{0, m}$, este un polinom omogen de grad egal cu i, iar m este gradul lui P .

Un ***polinom*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numeşte ***simetric*** dacă, pentru orice permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, cu $\sigma(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ şi $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avem

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{i_n},$$

când funcţia polinomială corespunzătoare lui P are expresia $(*)$.

Următoarele elemente din $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numesc ***polinoame simetrice fundamentale***:

$$\begin{aligned}
& P_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
& P_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \cdots + X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} X_i X_j \\
& P_3 = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + \cdots + X_{n-2} X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n}^{n} X_i X_j X_k \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& P_k = X_1 X_2 \ldots X_k + \cdots + X_{n-k+1} X_{n-k+2} \ldots X_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots i_k \leqslant n} X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& P_n = X_1 X_2 \ldots X_n
\end{aligned}$$

Un rezultat remarcabil pentru mulţimea polinoamelor simetrice este următorul, prezentat aici fără demonstraţie.

Teorema 7.1 *Pentru orice polinom simetric $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, există un polinom $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ astfel încât*

$$P = Q(P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

unde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt polinoamele simetrice fundamentale specificate mai sus.

Revenind la funcţiile $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$, putem spune, în fine, că, atunci când $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, asemenea ***aplicaţii*** f se numesc ***reale***, ***vectorial-vectoriale*** (sau ***funcţii de*** n ***variabile reale, cu*** m ***valori reale***). Şi în cazul acestor funcţii, se poate vorbi de o exprimare în care intervin componente funcţionale, potrivit relaţiei

$$f(\mathrm{x}) = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x}))\,, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

unde $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, sunt funcţii vectorial-scalare, cu valori reale, aşa încât

$$(f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x})) \in B, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

Ţinând seama de structura algebric-topologică a spaţiilor $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$, multe dintre proprietăţile unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se pot deduce pe seama proprietăţilor funcţiilor sale componente.

Aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale.
Forme reale liniare şi afine. Transformări punctuale liniare şi afine.

Definiţia 7.1 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp de scalari K. O* ***aplicaţie*** *$T : V \to W$ se numeşte* ***liniară*** *(****operator liniar, transformare liniară*** *sau* ***morfism de K-spaţii vectoriale****) dacă*

i) $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ *şi*

ii) $T(\alpha \mathrm{u}) = \alpha T(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u} \in V$, $\alpha \in K$,

adică dacă aplicaţia T este ***aditivă*** *(prin satisfacerea condiţiei i)) şi K-****omogenă*** *(prin satisfacerea condiţiei ii)).*

Propoziţia 7.1 *Condiţiile i) şi ii) din Definiţia 7.1 sunt echivalente cu următoarea:*

iii) $T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$.

Demonstraţie: Admiţând că $T : V \to W$ satisface condiţiile i) şi ii) din cadrul Definiţiei 7.1, avem:

$$T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = T(\alpha \mathrm{u}) + T(\beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in K.$$

Deci T satisface şi iii). Reciproc, în ipoteza că T verifică iii), rezultă că, pentru $\alpha = \beta = 1 \in K$, din iii), avem i), iar pentru $\beta = 0 \in K$, tot din iii), avem şi ii). ◀

Observaţii:

1) De cele mai multe ori, în virtutea Propoziţiei 7.1, condiţia iii) este considerată a fi, practic, de bază pentru stabilirea caracterului de liniaritate al aplicaţiei T.

2) În cazul în care $W = V$, aplicaţia liniară $T : V \to V$ se numeşte ***endomorfism liniar*** pe V sau ***transformare liniară de la spaţiul V în el însuşi***. Dacă edomorfismul liniar $T : V \to V$ este şi bijectiv, atunci el se numeşte ***izomorfism liniar*** pe V.

3) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci are loc şi următoarea extensie a relaţiei iii):

$$\text{iv)}\;\; T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathrm{u}_i),\, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, \forall\, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n \in V,\, \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K.$$

4) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci

$$T\left(\mathbf{0}_V\right) = \mathbf{0}_W,$$

unde $\mathbf{0}_V$ şi $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V şi respectiv vectorul nul din W. Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \to W$ nu este liniară.

5) Mulţimea $\mathcal{L}(V, W)$ a tuturor aplicaţiilor liniare de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial Weste, în raport cu operaţia de adunare a aplicaţiilor şi cu operaţia de înmulţire a unei aplicaţii cu un scalar din K, de asemenea un K-spaţiu vectorial.

6) Fie U, V şi W spaţii vectoriale peste corpul comutativ K. Dacă $T_1 : U \to V$ şi $T_2 : V \to W$ sunt aplicaţii liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \to W$ este tot o aplicaţie liniară.

7) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci $T^{-1} : T(V) \subseteq W \to V$ este, de asemenea, o aplicaţie liniară.

Definiţia 7.2 *Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W.*

a) Mulţimea $Ker(T) = T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathrm{v} \in V \mid T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ se numeşte ***nucleul aplicaţiei liniare*** *T.*

b) Mulţimea $T(V) = \{\mathrm{w} \in W \mid \exists\, \mathrm{v} \in V, T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}\}$ se numeşte ***imaginea aplicaţiei liniare*** *T şi se notează cu $Im(T)$.*

Propoziţia 7.2 *Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W, atunci $Ker(T)$ este un subspaţiu liniar al lui V, iar $Im(T)$ un subspaţiu liniar al lui W.*

În plus, dacă $dim(V) < +\infty$ şi $dim(W) < +\infty$, adică dacă ambele spaţii vectoriale V şi W sunt finit-dimensionale, atunci are loc relaţia

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,,$$

numită, sugestiv, ***relaţia dimensiunilor***.

Demonstraţie: Faptul că atât $Ker(T)$, cât şi $Im(T)$ sunt subspaţii vectoriale ale lui V şi respectiv W rezultă pe baza relaţiei evidente

$$T(\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T), \forall\, \alpha, \beta \in K,$$

în virtutea căreia $\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$ .Totodată, avem: $\alpha_1\mathrm{w}_1 + \alpha_2\mathrm{w}_2 \in Im(T)$, $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$ şi $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K$. Aceasta din urmă deoarece, dacă $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$, atunci există v_1 şi $\mathrm{v}_2 \in V$, astfel încât $T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{w}_1$ şi $T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_2$. Prin urmare: $\alpha_1\mathrm{w}_1 + \alpha_2\mathrm{w}_2 = \alpha_1 T(\mathrm{v}_1) + \alpha_2 T(\mathrm{v}_2) = T(\alpha_1\mathrm{v}_1 + \alpha_2\mathrm{v}_2) \in T(V) = Im(T)$, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$.

În ceea ce priveşte relaţia dimensiunilor, fie $n = dim(V)$ şi $d = dim\,(Ker(T))$ (d şi n în $\mathbb{N}$). Dacă $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci $d = 0$ şi, pentru orice bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, se poate spune, pe contul relaţiei iv) din observaţia 3) de mai înainte, că, oricare ar fi $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{v}_k$ (cu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in K$, coordonate ale lui v în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$), avem $T(\mathrm{v}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k T(\mathrm{v}_k)$, ceea ce ar însemna că $T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ ar fi un sistem de generatori al subspaţiului liniar $T(V)$, adică al lui $Im(T)$. Cum sistemul de vectori $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este şi liniar independent, căci dacă, pentru $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$, am avea $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k T(\mathrm{v}_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k\right) = \mathbf{0}_W$ şi deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k \in Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, de unde, în virtutea faptului că $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este bază a lui V, ar reieşi că $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, se poate spune că $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este o bază a lui $Im(T)$, ceea ce înseamnă că $\dim\,(Im(T)) = n$. Aşadar, în acest caz, avem $n = 0 + n$, adică:

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,.$$

Dacă $d \in \mathbb{N}^*$, adică $Ker(T) \supsetneq \{\mathbf{0}_V\}$ (mai bine spus, $Ker(T) \neq \{\mathbf{0}_V\}$), atunci oricare bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d\}$ a lui $Ker(T)$ se poate completa la o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d, \mathrm{b}_{d+1}, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V. Cum orice vector din $Im(T)$ este de forma $T(\mathrm{v})$, cu $\mathrm{v} \in V$, iar v are reprezentarea $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k$ în baza $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ de mai sus, vedem că $T(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(b_k) = \sum_{k=d+1}^{n} \alpha_k T(b_k)$, întrucât $T(b_k) = \mathbf{0}_W$, $\forall\, k = \overline{1,d}$. Prin urmare, $\{T(b_{d+1}), \ldots, T(b_n)\}$ este un sistem de generatori pentru $Im(T)$. În plus, vectorii $T(b_{d+1}), \ldots, T(b_n)$ sunt şi liniar independenţi în W. Într-adevăr, admiţând că am avea o combinaţie liniară a acestora egală cu $\mathbf{0}_W$, ar rezulta, din faptul că $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k T(b_k) = \mathbf{0}_W$, cu $\omega_{d+1}, \ldots, \omega_n \in K$, existenţa relaţiei $T\left(\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k\right) = \mathbf{0}_W$, în virtutea căreia am deduce că $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k \in Ker(T)$. Ca atare, ar exista $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d \in K$, aşa încât $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k = \sum_{k=1}^{d} \eta_k b_k$. Altfel spus, am avea dependenţa liniară a vectorilor $b_1, b_2, \ldots, b_n$ din baza V, ceea ce ar fi absurd. Deci $\{T(b_{d+1}, \ldots, T(b_n)\}$ este, de fapt, o bază a lui $Im(T)$ şi acesta are dimensiunea $n - d = dim(V) - dim\,(Ker(T))$. Aşadar, şi în acest caz, are loc relaţia din enunţ a dimensiunilor. ◀

Definiţia 7.3 *Pentru o aplicaţie liniară T de la un K-spaţiu vectorial V la un K-spaţiu vectorial W, $dim\,(Ker(T))$ se numeşte* ***defectul lui*** *T şi se notează cu $def(T)$, iar $dim\,(Im(T))$ se numeşte* ***rangul lui*** *T şi se notează cu $rang(T)$.*

Formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:

$$dim(V) = rang(T) + def(T).$$

Observaţie: Pe baza relaţiei dimensiunilor, se poate afirma că orice aplicaţie liniară, între K-spaţii vectoriale finit dimensionale, duce un subspaţiu vectorial arbitrar al spaţiului ei de definiţie într-un spaţiu vectorial de dimensiune cel mult egală cu a subspaţiului în cauză.

Propoziţia 7.3 *Fie T o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V, finit-dimensional, la K-spaţiul vectorial W. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) T este aplicaţie injectivă;

b) $def(T) = 0$;

c) $rang(T) = dim(V)$;

d) Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ ($p \in \mathbb{N}^*, p \leq n = dim(V) \in \mathbb{N}^*$) este un sistem liniar independent în V, atunci $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este sistem liniar independent în W.

Demonstraţie: În virtutea relaţiei dimensiunilor, are loc echivalenţa afirmaţiilor b) şi c), cu evidenţă. Cât priveşte a) şi b), dacă admitem mai întâi că b) este adevărată, ceea ce ar însemna ca să luăm drept ipoteză faptul că $\{\mathbf{0}_V\} = Ker(T)$, ar reieşi că, de îndată ce, pentru u şi v arbitrare din V, ar avea loc relaţia $T(u) = T(v)$, adică $T(u - v) = \mathbf{0}_W$, s-ar obţine $u - v = \mathbf{0}_W$, deci $u = v$. Cu alte cuvinte, b) implică injectivitatea lui T. Reciproc, dacă a) este adevărată, adică dacă T este injectivă, atunci $T(u) = T(v)$ implică $u = v$, deci $u - v = \mathbf{0}_V$. Pentru $v = \mathbf{0}_V$, rezultă că $T(u) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ ar implica, cu necesitate, $u = \mathbf{0}_V$. Astfel, avem $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, adică $def(T) = 0$. Aşadar, are loc b). În fine, se poate arăta că b) echivalează cu d). În acest sens, presupunând mai întâi că are loc b) şi că $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este un sistem liniar independent din V, vedem că, dacă $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k T(v_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k\right) = \mathbf{0}_W$, adică, în virtutea faptului că b) este adevărată, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k = \mathbf{0}_V$, de unde, pentru că $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este un sistem liniar independent în V, rezultă : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$. Deci $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este un sistem liniar independent în W. Invers, admiţând că d) este adevărată şi că b) n-ar avea loc, ar exista o bază a lui $Ker(T)$, fie ea $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ care, ca sistem liniar independent din V, n-ar mai implica faptul că $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este sistem liniar independent în W, deoarece $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\} = \{\mathbf{0}_W\}$. Deci b) trebuie, cu necesitate, să aibă loc, în ipoteza că d) este adevărată. ◀

De asemenea, fără prea mare dificultate, se poate demonstra şi următorul rezultat:

Propoziţia 7.4 *Fie T o aplicaţie liniară de la un K-spaţiu vectorial V la un K-spaţiu vectorial W, finit dimensional. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) T *este o surjecţie;*

ii) $rang(T) = dim(W)$;

iii) $Im(T) = W$;

iv) Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *este un sistem de generatori pentru* V*, atunci* $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ *este un sistem de generatori pentru* W.

Pe baza propoziţiilor 7.3 şi 7.4, se poate vedea că are loc şi rezultatul potrivit căruia, dacă T este o aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale finit-dimensionale V şi W ($T : V \to W$), atunci afirmaţiile imediat următoare sunt echivalente:

j) T *este o aplicaţie bijectivă;*

jj) $dim(V) = dim(W)$;

jjj) $T^{-1} : W \to V$ *este o bijecţie;*

jv) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *este o bază a lui* V *dacă şi numai dacă* $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *este o bază a lui* W.

Observaţie: Evident, definiţiile 7.1 - 7.3, precum şi rezultatele propoziţiilor 7.2 - 7.4, împreună cu cel menţionat puţin mai înainte se aplică şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar T este o aplicaţie liniară reală de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$. Astfel, T va fi un izomorfism liniar dacă şi numai dacă $m = n$, caz în care, dacă $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ va fi o bază în $\mathbb{R}^n$ (de exemplu baza canonică $b_k = e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, cu 1 pe poziţia $k, \forall\, k = \overline{1, n}$), atunci $\{T(b_1), T(b_2), \ldots, T(b_n)\}$ va fi, de asemenea, o bază în $\mathbb{R}^n$ şi reciproc.

Să considerăm, în continuare două K-spaţii vectoriale, V şi W, finit-dimensionale ($dim(V) = n$ şi $dim(W) = m$), iar $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază a lui V, iar $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază a lui W, atunci, pentru orice $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ din V, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, sunt coordonatele lui v în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, avem

$$y = T(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{l=1}^{m} a_{lk} w_l \right) = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} \alpha_k \right) w_l$$

pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, scalarii $\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\}$ reprezentând coordonatele vectorului $T(v_k)$ în baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Cum, de fapt,

$$y = \sum_{l=1}^{m} y_l w_l,$$

cu $y_1, y_2, \ldots, y_m$ drept coordonate, din K, ale lui y, în baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_n\}$, se poate deduce că avem:

$$(**) \quad y_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\alpha_k, \forall\, l = \overline{1, m}.$$

Constituind matricea $A = (a_{lk})_{\substack{1\leq l\leq m\\ 1\leq k\leq n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se vede că putem scrie $\mathrm{y} = A\mathrm{v}$, ceea ce înseamnă că aplicaţia liniară T induce, în raport cu bazele $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$, matricea A. Reciproc, este lesne de constatat că, prin intermediul matricii A şi a relaţiei $\mathrm{y} = A\mathrm{v}$, se introduce de fapt aplicaţia $T : V \to W$, definită prin $T(\mathrm{v}) = A\mathrm{v} = \mathrm{y}$ şi, în plus, T este liniară. În concluzie, în K-spaţii vectoriale finit dimensionale, oricărei aplicaţii liniare dintre două asemenea spaţii, i se poate asocia, în raport cu o pereche de baze, o matrice cu elemente din corpul scalarilor K. Studiul unei asemenea aplicaţii T se reduce, astfel, la studiul matricii asociate care, raportată la perechea de baze $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$, are, de fapt, drept coloane, vectorii coordonatelor lui $T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ în baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$.

Notând cu B baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, cu B' baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$ a lui W, cu $\mathrm{y}_{B'}$ vectorul coordonatelor lui y, din W, în baza B' şi cu v_B vectorul coordonatelor lui v în baza B, se poate spune că relaţia $(**)$, care înseamnă relaţia $\mathrm{y} = T(\mathrm{v})$, se poate reda,cu ajutorul matricii $A_{BB'}$, asociată lui T, prin:

$$(***) \quad y_{B'} = A_{BB'}\mathrm{v}_B.$$

Aceasta reprezintă expresia analitică a operatorului liniar $T : V \to W$, în raport cu perechea de baze (B, B').

Trecând acum, în V, de la baza B la baza $\hat{B}$, prin matricea de schimbare S (potrivit relaţiei $\widetilde{\hat{B}} = \widetilde{B}S$) şi de la baza B' la baza $\hat{B}'$, în W, prin matricea de schimbare S' (adică $\widetilde{\hat{B}'} = \widetilde{B'}S'$), se vede că, pe baza relaţiei $(***)$ şi a relaţiilor de transformare a coordonatelor lui y şi respectiv v, adică a relaţiilor $\mathrm{y}_{\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'}$ şi $\mathrm{v}_B = S\mathrm{v}_{\hat{B}}$, în raport cu perechea nouă de baze $(\hat{B}, \hat{B}')$, avem:

$$\mathrm{y}_{\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'} = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}\mathrm{v}_B = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S\mathrm{v}_{\hat{B}}.$$

Aceasta înseamnă că, faţă de $(\hat{B}, \hat{B}')$ matricea asociată lui T este $\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S$, adică are loc relaţia

$$(\ !\ ) \quad A_{\hat{B}\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S,$$

care reprezintă formula schimbării matricii unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze. În cazul în care $W = V$, se poate considera că $B' = B$ şi $\hat{B}' = \hat{B}$, ceea ce ar însemna că $S' = S$. Astfel, formula (!) s-ar reduce la

$$(\ !!\ ) \quad A_{\hat{B}} = S^{-1}A_BS,$$

unde A_B şi $A_{\hat{B}}$ ar fi matricile asociate lui T în bazele B şi respectiv $\hat{B}$, iar S ar fi matricea de schimbare de la B la $\hat{B}$. În virtutea relaţiei (!!), matricile pătratice $A_{\hat{B}}$ şi A_B sunt asemenea. Reciproc, se poate vedea că, dacă A şi $\tilde{A}$ din $\mathcal{M}_n(K)$ sunt două matrici pătratice asemenea, adică există o matrice nesingulară L, din $\mathcal{M}_n(K)$, astfel încât $\tilde{A} = L^{-1}AL$, atunci A şi $\tilde{A}$ reprezintă un acelaşi endomorfism liniar T, pe un spaţiu vectorial de dimensiune n, în două baze (distincte, când $L \neq I_n$) ale respectivului spaţiu pentru care matricea de trecere de la una la cealaltă este L.

Observaţie: Formula (!) se păstrează şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$ şi $W = \mathbb{R}^m$, iar formula (!!) funcţionează şi atunci când $W = V = \mathbb{R}^n$.

Definiţia 7.4 *a) Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi T un endomorfism pe V. Se numeşte **adjunct al lui** T şi se notează cu T^* operatorul $T^* : V \to V$, definit prin*

$$\langle T^*(\mathrm{u}), \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v})\rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

*b) O aplicaţie $T \in \mathcal{L}(V)$, unde $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spaţiu euclidian, se numeşte **autoadjunctă** sau **simetrică** dacă $T = T^*$.*

Observaţie: Se poate arăta că un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ definit pe un spaţiu euclidian $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, finit dimensional, este simetric dacă şi numai dacă matricea sa asociată, în raport cu o bază ortonormată a lui V, este una simetrică.

Definiţia 7.5 *Un endomorfism T pe un spaţiu euclidian $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este numit **antisimetric** dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), \mathrm{v} \rangle = -\langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v}) \rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Se poate vedea că, în cazul în care V este finit dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ este antisimetric dacă şi numai dacă matricea sa A, într-o bază ortonormată, este antisimetrică, adică $A^T = -A$, unde A^T reprezintă matricea transpusă corespunzătoare lui A.

Definiţia 7.6 *Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T se numeşte **ortogonal** dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), T(\mathrm{u}) \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V.$$

Observaţie: Ţinând seama de definiţia 7.4, relaţia din definiţia 7.6 se poate rescrie sub forma

$$\langle (T^* \circ T)(\mathrm{u}), \mathrm{u} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V,$$

echivalentă la rândul ei, cu relaţia

$$T^* \circ T = \mathbf{1}_V.$$

Astfel, dacă V este finit dimensional, atunci $T \in \mathcal{L}(V)$ este un endomorfism ortogonal dacă şi numai dacă, într-o bază ortonormată a lui V, matricea A, asociată lui T, este ortogonală, adică este aşa încât $A^T \cdot A = I$. Deoarece, în acest caz, $det(A) = \pm 1$, înseamnă că A este nesingulară, având rangul egal cu $dim(V)$. Aşadar, $rang(T) = dim(V)$ şi atunci $def(T) = 0$. Prin aplicarea propoziţiilor 7.3 şi 7.4 rezultă că T este simultan injecţie şi surjecţie pe V. Deci T este un automorfism pe V. Cu alte cuvinte, orice endomorfism ortogonal pe un spaţiu euclidian finit dimensional este un automorfism pe respectivul spaţiu.

Definiţia 7.7 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi f o aplicaţie de la X la X. Se spune că f este o **izometrie** pe X dacă $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.*

Propoziţia 7.5 *Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T este o izometrie dacă şi numai dacă el este ortogonal.*

Demonstraţie: Raţionând în raport cu metrica indusă pe V de norma dată de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T ar fi o izometrie pe V dacă $d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y}))$, adică $\|T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y})\|$, echivalent spus $\langle T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}), T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}) \rangle^{1/2}$, ar fi egală cu $d(x, y)$, adică cu $\langle \mathrm{x} - \mathrm{y}, \mathrm{x} - \mathrm{y} \rangle^{1/2}$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$. Ori asta revine la $\langle T(\mathrm{u}), T(\mathrm{u}) \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle$, $\forall\, \mathrm{u} \in V$, ceea ce ar înseamna că T este endomorfism ortogonal. La fel, şi reciproc. ◀

Ţinând seama de observaţia ce precede Definiţia 7.7, putem afirma că orice izometrie liniară pe un spaţiu euclidian este un automorfism pe acel spaţiu.

Definiţia 7.8 *Fie V un K-spaţiu liniar şi $T \in \mathcal{L}(V)$.*

*a) Un vector nenul v din V se numeşte **vector propriu** pentru T dacă există $\lambda \in K$ aşa încât $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. Scalarul λ din acest context se numeşte **valoare proprie** a lui T, corespunzătoare vectorului propriu v.*

b) $Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)$ *se numeşte* ***subspaţiu propriu*** *corespunzător valorii proprii* λ.

Relativ la valorile proprii şi vectorii proprii ai unui endomorfism T pe un K-spaţiu vectorial V, remarcăm următoarele:

1. Un vector nenul $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu, corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$, pentru T, dacă şi numai dacă $\mathrm{v} \in Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

2. Unui vector propriu al lui T îi corespunde o singură valoare proprie $\lambda \in K$ nu şi reciproc.

3. Vectorii proprii ce corespund unor valori proprii distincte pentru T sunt liniar independenţi.

4. Orice subspaţiu propriu corespunzător unei valori proprii a lui T este invariant în raport cu T, adică are loc relaţia: $T\,(Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)) \subseteq Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)$.

5. La două valori proprii distincte ale lui T corespund subspaţii proprii care au în comun doar vectorul nul $\mathbf{0}_V$.

6. În cazul în care V este finit dimensional, iar A este matricea lui $T \in \mathcal{L}(V)$ într-o bază B a lui V, atunci $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu pentru T dacă şi numai dacă este soluţie nebanală a sistemului (algebric, omogen)
$$(A - \lambda I)\mathrm{v} = \mathbf{0}_V,$$
iar λ este valoare proprie ce corespunde lui v dacă şi numai dacă este rădăcină a ***ecuaţiei*** aşa-numită ***caracteristică***
$$det(A - \lambda I) = 0.$$
În acest caz, polinomul $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ se numeşte ***polinom caracteristic*** al matricii A şi, implicit, al lui T.

   Dacă λ este rădăcină simplă a polinomului $P_A(\lambda)$, adică este valoare proprie simplă pentru T, atunci defectul lui $(T - \lambda \mathbf{1}_V)$ este egal cu 1. Altfel spus, dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii simple λ este egală cu 1. În rest, când λ este valoare proprie de multiplicitate $m > 1$, atunci $dim\,(Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)) \leq n$.

   Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ îşi verifică propria ecuaţie caracteristică, în conformitate cu teorema Cayley-Hamilton. Adică $P_A(A) = \mathit{0}_n$ (în sens matricial).

7. Orice endomorfism simetric de la un spaţiu euclidian $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la acelaşi spaţiu are numai valori proprii reale, iar subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte sunt ortogonale.

Definiţia 7.9 *Un* ***endomorfism*** *pe un spaţiu liniar finit dimensional este denumit* ***diagonalizabil*** *dacă există o bază* B *a respectivului spaţiu în raport cu care matricea* A_B*, asociată endomorfismului în cauză, este una de formă diagonală, adică* $A_B = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$*, unde* n *este dimensiunea spaţiului respectiv şi* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *sunt scalari din corpul peste care este structurat spaţiul liniar considerat.*

Se pot constata următoarele:

1. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, se poate diagonaliza dacă şi numai dacă există o bază a lui V alcătuită din vectori proprii ai lui T.

2. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spaţiul liniar şi finit dimensional V dacă şi numai dacă ecuaţia caracteristică din context are toate rădăcinile în corpul K (peste care este structurat V) şi subspaţiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

3. Un endomorfism simetric pe un spaţiu euclidian finit dimensional este întotdeauna diagonalizabil. În acest caz, diagonalizabilitatea are loc într-o bază ortonormată a respectivului spaţiu. În practică, pentru diagonalizarea endomorfismului, se parcurg următoarele etape:

   - Se determină matricea A a endomorfismului vizat, într-o bază fixată a spaţiului euclidian considerat. În particular, dacă spaţiul este $\mathbb{R}^n$, se consideră matricea A în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$;
   - Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuaţiei algebrice caracteristice $P_A(\lambda) = 0$;
   - Dacă rangul matricii $A - \lambda I$ este, pentru λ egal cu fiecare valoare proprie, identic cu dimensiunea spaţiului euclidian luat în consideraţie, diminuată cu multiplicitatea valorii proprii în cauză, atunci se decide că endomorfismul este diagonalizabil. În caz contrar, se concluzionează că endomorfismul din context nu este diagonalizabil.
   - Pentru situaţia în care endomorfismul este diagonalizabil, se determină o bază a spaţiului euclidian considerat alcătuită din vectorii proprii ai endomorfismului, vectori v ce se găsesc prin rezolvarea sistemelor algebrice şi omogene

     $$(A - \lambda_j I)\,\mathrm{v} = \mathbf{0}_V, \forall\, j = \overline{1, l},$$

     unde λ_j sunt valorile proprii găsite în prealabil.
   - Baza în care endomorfismul are formă diagonală se determină prin transformarea bazei iniţiale (de start), matricea transformării fiind aleasă drept aceea care are, pe coloane, coordonatele vectorilor proprii ortogonali găsiţi, în raport cu baza de start.
   - Se scrie matricea ce corespunde formei ortogonale a endomorfismului avut în vedere prin respectarea exprimării $diag(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_l, \ldots, \lambda_l)$, unde fiecare din valorile proprii λ_j este luată de atâtea ori cât îi este ordinul de multiplicitate.

În fond, ne bazăm pe următorul rezultat:

Teorema 7.2 *Fie V un spaţiu euclidian n-dimensional ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Necesar şi suficient ca vectorii proprii ai endomorfismului T să genereze întreg spaţiul V este ca, în raport cu baza vectorilor proprii, matricea asociată lui T să aibă formă diagonală. În acest caz, fiecare valoare proprie a lui T apare, pe diagonala respectivă, de un număr de ori egal cu dimensiunea spaţiului propriu asociat.*

Demonstraţie: Admitem că V este dotat deja cu o bază alcătuită din vectorii proprii ai lui T. Fie aceştia $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii (nu numai decât distincte) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Avem deci: $T(\mathrm{v}_i) = \lambda_i \mathrm{v}_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Dacă baza respectivă este ortonormată, ceea ce este, de fapt, posibil întotdeauna, în virtutea faptului că subspaţiile proprii asociate valorilor λ_i sunt mutual (două câte două) ortogonale şi, pentru fiecare dintre respectivele spaţii, se poate pune în evidenţă, prin algoritmul lui Gram-Schmidt, câte o bază ortonormată (alcătuită, evident, din combinaţii liniare ale vectorilor proprii corespunzători unei aceleiaşi valori proprii, combinaţii care sunt tot vectori proprii ai respectivei valori), atunci reiese că matricea endomorfismului T, faţă de această bază a lui V, este matricea diagonală

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Reciproc, dacă matricea asociată lui T, în raport cu o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, are forma diagonală A_T, atunci avem relaţiile $T(\mathrm{b}_k) = \lambda_k \mathrm{b}_k$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt vectori proprii ai lui T, corepsunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dacă, în raport cu baza aceasta a lui V, alcătuită deci din vectori proprii ai lui T, am avea un anume element din V, fie el notat cu v_0, tot vector propriu al lui T, corespunzător unei valori proprii λ_0, atunci ar trebui să aibă loc relaţia $T(\mathrm{v}_0) = \lambda_0 \mathrm{v}_0$, cu $\mathrm{v}_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k \neq \mathbf{0}_V$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui v_0 în baza $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$. Altfel zis, am avea:

$$\lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = \lambda_0 v_0 = T(v_0) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k b_k.$$

De aici, ar rezulta că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_k - \lambda_0)\mathrm{b}_k = \mathbf{0}_V$. Cum $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt liniar independenţi, ar reieşi că am avea $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, n}$. Deoarece scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu au cum să fie toţi egali cu zero, am avea $\lambda_0 \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, ceea ce înseamnă că T nu admite şi alte valori proprii în afară de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Considerând că am avea $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \lambda_0$ şi $\lambda_i \neq \lambda_0$, $\forall\, i \in \{r + 1, \ldots, n\}$, unde $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ar fi ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_0, putem conta pe faptul că orice vector de tipul $c_1\mathrm{b}_1 + c_2\mathrm{b}_2 + \cdots c_r\mathrm{b}_r$ (cu $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$) ar fi vector propriu al lui T, corespunzător valorii proprii λ_0. Ar rezulta atunci, pe baza relaţiilor $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, de mai înainte, că, în mod necesar, găsim: $\alpha_k = 0$, $\forall\, k = \overline{r + 1, n}$. Prin urmare, subspaţiul propriu asociat lui λ_0 coincide, în realitate, cu subspaţiul generat de vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_r$, având dimensiunea egală cu multiplicitatea lui λ_0. ◀

Bibliografie

1. Elena Macovei, F. Iacob - *Matematică (pentru anul I - ID,Informatică) (Funcţii scalar-reale elementare, pp. 47-49*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", 2005-2006.

2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 6)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

3. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră (Cap. III) (inele de polinoame şi polinoame simetrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

4. Marina Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni (§4.5)*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2000.

5. D. Drăghici - *Algebră (Cap. X)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

6. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie (Cap. V)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

7. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

8. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.

9. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications,* The Saylor Foundation, 2013

Cursul 8

Forme liniare, biliniare şi pătratice
(Aspecte algebrice şi geometrice)

Forme (funcţionale) liniare

Aplicaţiile liniare de la un spaţiu vectorial oarecare la un spaţiu vectorial unidimensional merită o atenţie specială, deoarece spaţiul din urmă s-ar putea identifica, la nevoie, cu corpul K, al scalarilor, peste care sunt considerate cele două spaţii liniare în cauză. Iată de ce, aici, facem acum o succintă prezentare a câtorva chestiuni privitoare la asemenea gen de aplicaţii liniare.

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ (de scalari) K.

Definiţia 8.1 *a) O aplicaţie liniară $f : V \to K$, adică un element al mulţimii $\mathcal{L}(V; K)$, se numeşte **formă liniară** (sau **funcţională liniară**) pe V. Când $K = \mathbb{R}$, elementul $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ se numeşte **formă (funcţională) liniară reală**.*

*b) Mulţimea $\mathcal{L}(V; K)$, a tuturor formelor liniare pe V, privită ca spaţiu liniar peste K - în raport cu operaţia de adunare uzuală a două funcţii şi operaţia de înmulţire a unei funcţii cu un element din K - se numeşte **spaţiu dual** (sau **conjugat**) (ori, pur şi simplu, **dualul** sau **conjugatul**) lui V şi se notează, îndeobşte, cu V^*.*

Propoziţia 8.1 *Dacă spaţiul vectorial V este finit dimensional, atunci la fel este şi dualul său V^*. În acest caz, avem $dim(V^*) = dim(V) \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstraţie: Fie $n = dim(V) \in \mathbb{N}^*$ şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V. Pentru un element oarecare v din V, fie $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ coordonatele lui v în baza B. Se pot defini atunci funcţionalele $v_j^* : V \to K$, prin $v_j^*(\mathrm{v}) = v_j$, $\forall\, j = \overline{1,n}$. Acestea sunt, desigur, elemente ale lui V^*, întrucât: $v_j^*(\alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{u}) = (\alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{u})_j = \alpha v_j + \beta u_j = \alpha v_j^*(\mathrm{v}) + \beta v_j^*(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \alpha, \beta \in K, j = \overline{1,n}$. În plus, $v_j^*(\mathrm{b}_i) = 0$, când $i \neq j$ şi $v_j^*(\mathrm{b}_j) = 1$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Mulţimea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ este o bază a spaţiului V^*. Într-adevăr, B^* este liniar independentă, deoarece relaţia $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^* = \mathbf{0}_{V^*}$ (cu $\gamma_j \in K$, $\forall\, j = \overline{1,n}$), care implică faptul că $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(\mathrm{v}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^*\right)(\mathrm{v}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^*(\mathrm{v}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$, adică şi $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(\mathrm{b}_i) = \gamma_i$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, are loc, deci, doar când $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$. Totodată, B^* este şi un sistem de generatori pentru V^*, căci, pentru orice $f \in V^*$ şi $\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{b}_j \in V$, avem: $f(\mathrm{v}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\mathrm{b}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j^*(\mathrm{v}) f(\mathrm{b}_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{b}_j) \cdot v_j^*\right)(\mathrm{v})$. ◀

Definiţia 8.2 *Sistemul B^* se numeşte **baza duală** a bazei B, iar $\{f(\mathrm{b}_j)\}_{1 \leq j \leq n} \subset K$ se numesc **coeficienţi ai formei liniare f în baza B^***.*

Observaţie: Se poate simplu vedea că, dacă $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \subset K$ este o mulţime indicată de scalari, iar $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a spaţiului liniar n-dimensional V, atunci există şi este unică o formă liniară $f \in V^*$, ai cărei coeficienţi, în baza duală B^*, sunt tocmai scalarii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Aceasta este: $f = \sum_{j=1}^{n} \omega_j v_j^*$.

În virtutea unei atare remarci, se evidenţiază următorul rezultat:

Propoziţia 8.2 *Dacă $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ şi V este spaţiu liniar finit dimensional peste un corp comutativ K, atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(\mathrm{v}) \neq 0 \in K$.*

Demonstraţie: Cum $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ şi V are o bază finită B, există cel puţin o coordonată nenulă a lui v, în baza B. Drept urmare, putem lua $f : V \to K$, $f = v_j^*$, unde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este indicele ce corespunde acelei coordonate nenule a lui v. Astfel, am avea: $f(\mathrm{v}) = v_j^*(\mathrm{v}) = v_j \neq 0$. ◀

Observaţie: Enunţul Propoziţiei 8.2 are următoarea variantă echivalentă: ”*Dacă V este un K-spaţiu liniar finit dimensional şi u, v sunt două elemente arbitrare şi distincte din V, atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(u) \neq f(v)$*”.

Cum un element $f \in V^*$ este o aplicaţie liniară de la V la K, se poate afirma că, în cazul în care V este finit dimensional, lui f i se asociază, prin intermediul bazelor B, din V şi $\{1\}$, din K, potrivit relaţiei de tipul aceleia din finalul Propoziţiei 8.1, matricea linie

$$A_f^B = [f(\mathrm{b}_1), f(\mathrm{b}_2), \ldots, f(\mathrm{b}_n)],$$

unde $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt vectorii din B. În conformitate cu aceeaşi relaţie, raportându-ne la baza duală B^*, vedem că

$$f_{B^*} = \begin{bmatrix} f(\mathrm{b}_1) \\ f(\mathrm{b}_2) \\ \vdots \\ f(\mathrm{b}_n) \end{bmatrix} \text{(adică } f = \sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{b}_j) v_j^*).$$

Aşadar, matricea asociată lui f , în raport cu B^*, este $\left(A_f^B\right)^T$, adică transpusa matricii A_f^B. Cu alte cuvinte, lui f, privit ca o funcţională liniară pe K-spaţiul liniar, finit dimensional, V, îi corespunde o matrice formată dintr-o linie, iar dacă f este privit ca element din spaţiul dual V^*, atunci lui f îi corespunde o matrice coloană (faţă de baza duală), iar cele două matrice implicate în consideraţie sunt transpuse una alteia.

Formula de shimbare a lui A_f^B, la o transformare de bază în V (şi, implicit, în V^*), se deduce a fi următoarea

$$A_f^{B'} = A_f^B S,$$

pentru trecerea de la baza B la baza B', în V, cu matricea de schimbare S, precum şi, corespunzător, următoarea

$$f_{B'^*} = S^T f_{B^*},$$

pentru trecerea de la baza duală B^* la baza duală B'^*, în spaţiul V^*. Prin urmare, dacă matricea de trecere de la baza B la baza B', în V, este S, atunci matricea de trecere de la duala lui B' la duala lui B este egală cu transpusa lui S.

Definiţia 8.3 ***(Bidualul unui spaţiu vectorial)*** *Fie V un K-spaţiu vectorial şi V^* dualul său. Dualul lui V^*, notat cu V^{**} (fiind tot un K-spaţiu vectorial), se numeşte **bidualul** lui V.*

Când V este finit dimensional, avem $dim(V^{**}) = dim(V^*) = dim(V)$ şi, în virtutea acestei relaţii, bidualul lui V, adică spaţiul V^{**} - care, în general, este un “supraspaţiu” al lui V (sau, mai exact spus, este izomorf cu un supraspaţiu liniar al lui V) - se poate arăta că este izomorf cu V. În acest sens, se foloseşte aplicaţia $\psi : V \longrightarrow V^{**}$, definită prin $\psi(\mathrm{v}) = \mathrm{v}^{**}$, $\forall \mathrm{v} \in V$, unde $\mathrm{v}^{**} \in V^{**}$ se introduce pe baza relaţiei: $\mathrm{v}^{**}(f) = f(\mathrm{v})$, $\forall\, f \in V^*$.

Despre ψ, se deduce că este liniară, deoarece $(\psi(\alpha\cdot \mathrm{v}+\beta\cdot u))(f)=f(\alpha\cdot \mathrm{v}+\beta\cdot u)=\alpha\cdot f(\mathrm{v})$ $+\beta\cdot f(u)=\alpha\cdot(\psi(\mathrm{v}))(f)+\beta\cdot(\psi(u))(f)$, $\forall\alpha,\beta\in K$, $u,\mathrm{v}\in \mathrm{V}$, $f\in V^*$ şi, de asemenea, surjectivă, pe baza relaţiei $dim(V^{**})=dim(V)$. Cât priveşte injectivitatea lui ψ, ea are loc, întrucât $\psi(\mathrm{v})=\mathbf{0}_{V^{**}}$ implică $(\psi(\mathrm{v}))(f)=\mathbf{0}_{V^{**}}(f)$, adică $f(\mathrm{v})=0$, cu $\mathrm{v}\in \mathrm{V}$ şi $\forall f\in V^*$. Dacă, de aici, n-ar rezulta $\mathrm{v}=\mathbf{0}_V$, atunci, presupunând că $\mathrm{v}\neq\mathbf{0}_V$, ar exista un element $\widetilde{f}\in V^*$, astfel încât, în conformitate cu Propoziţia 8.2, am avea $\widetilde{f}(\mathrm{v})\neq 0$, în contradicţie cu faptul că $f(\mathrm{v})=0$, $\forall f\in V^*$. Astfel, cu necesitate, reiese că nucleul lui ψ este $\{\mathbf{0}_V\}$, ceea ce înseamnă că ψ este într-adevăr injectivă. În plus, potrivit teoremei dimensiunilor, chiar avem $dim(V)=dim(Im(\psi))+dim(Ker(\psi))=dim(Im(\psi))$ $=dim(V^{**})$, deoarece $dim(Ker(\psi))=0$, ceea ce înseamnă că ψ este, într-adevăr, şi surjectivă. Deci ψ este un izomorfism de la V la V^{**}, care, nemijlocit fiind de vreun sistem de coordonate din V, se numeşte ***izomorfismul canonic*** de la spaţiul liniar V la bidualul său V^{**}. În virtutea acestui izomorfism, de cele mai multe ori, V şi V^{**} se identifică, luându-se $\mathrm{v}^{**}\equiv\mathrm{v}$, $\forall\mathrm{v}\in V$. Pe baza unei asemenea identificări, putem privi, după caz, orice element v din V fie ca pe un vector în V, fie ca pe o funcţională liniară definită pe V^*, în concordanţă cu starea elementelor din V^* care, prin definiţie, sunt funcţionale liniare definite pe V. Fiecare dintre spaţiile V şi V^* apare ca dualul celuilalt, iar în virtutea identificării menţionate avem $\mathrm{v}(f)=f(\mathrm{v})$, $\forall\mathrm{v}\in V$, $f\in V^*$, relaţie pe baza căreia se poate spune că legătura dintre V şi V^* este simetrică (numită ***relaţie de dualitate*** între V şi V^*).

Din punct de vedere geometric, nucleul unei funcţionale nenule şi liniare pe un spaţiu vectorial V este un aşa-numit ***hiperplan***, adică un subspaţiu propriu, maximal al lui V. Când $dim(V)=n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, deoarece $dim(Im(f)))=1$, $\forall f\in V^*$, avem: $dim(Ker(f))=dim(V)-dim\,(Im(f))=n-1$. În acest caz, în raport cu o bază $B=\{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\ldots,\mathrm{b}_n\}$ din V, mulţimea $Ker(f)$, adică hiperplanul în cauză, este

$$\{\mathrm{x}\in V \mid f(\mathrm{x})=0\},$$

adică $\{\mathrm{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{b}_i \mid \sum_{i=1}^{n}x_if(\mathrm{b}_i)=0\}$. Notând $f(\mathrm{b}_i)$ cu a_i, $\forall i=\overline{1,n}$, se poate spune că acest hiperplan este caracterizat de ***ecuaţia***

$$(*)\quad a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

Reciproc, pentru orice set de scalari $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subseteq K$, existenţa unei funcţionale liniare $f\in V^*$, ai cărei coeficienţi de reprezentare în baza duală lui B sunt $a_1,a_2,\ldots,a_n$, implică faptul că, plecând de la o ecuaţie de forma $(*)$, hiperplanului în speţă i se poate asocia chiar funcţionala f, aşa încât $Ker(f)$ să fie respectivul hiperplan.

Când $K=\mathbb{R}$ şi $V=\mathbb{R}^3$, ecuaţia $(*)$ caracterizează un ***plan ce trece prin punctul*** $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ (originea lui $\mathbb{R}^3$). În cazul în care $K=\mathbb{R}$ şi $V=\mathbb{R}^2$, "hiperplanul" de ecuaţie $(*)$ este o ***dreaptă ce trece prin originea planului real*** $\mathbb{R}^2$.

Mai general, se poate arăta că orice subspaţiu liniar al unui spaţiu vectorial finit dimensional, nu numai un subspaţiu liniar maximal, se caracterizează prin sisteme de ecuaţii de forma $(*)$. În aceeaşi notă de generalitate, când $K=\mathbb{R}$ şi $V=\mathbb{R}^2$ sau $V=\mathbb{R}^3$, o dreaptă şi, respectiv, un plan care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ şi respectiv prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ sunt, din punct de vedere algebric, nuclee ale unor aşa-numite ***funcţionale afine***, generic introduse prin definiţia ce urmează.

Definiţia 8.4 *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K şi $c_0\in K$. De asemenea, fie $f\in V^*$ şi $f_0:V\to K$, definită prin $f_0(\mathrm{v})=c_0$, $\forall\,\mathrm{v}\in V$. Suma $f+f_0$ se numeşte* ***funcţională afină*** *pe V.*

Altfel spus, o funcţională afină pe un spaţiu liniar V este suma dintre o funcţională liniară pe V (anume f) şi o funcţională constantă pe V (adică f_0).

Dacă V este n-dimensional $(n\in\mathbb{N}^*)$, cu o bază $B=\{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\ldots,\mathrm{b}_n\}$, atunci: $Ker(f+f_0)=\{\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{b}_i\in V \mid (f+f_0)(\mathrm{v})=0\}=\{\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{b}_i\in V \mid \sum_{i=1}^{n}v_if(\mathrm{b}_i)+c_0=0\}$.

Cu notaţia $f(\mathrm{b}_i) = a_i,\ \forall\, i = \overline{1, n}$, mulţimea $Ker(f + f_0)$ este caracterizată de ecuaţia:

$$(**) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + c_0 = 0.$$

Aceasta corespunde unei ***drepte reale*** când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$, ori unui ***plan*** (care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$) când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^3$, ori, în general, când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^n$, unui ***hiperplan real***.

Noţiunea de funcţională afină reprezintă un caz particular al aceleia de aplicaţie (transformare) afină, a cărei definiţie este următoarea:

Definiţia 8.5 *a) Un triplet (X, V, φ), în care X este o mulţime nevidă, V este un spaţiu vectorial, iar φ este o funcţie de la $X \times X$ la V astfel încât*

(i) $\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z),\ \forall\, x, y, z \in X$ *şi*

(ii) $\forall\, x \in X, \mathrm{v} \in V$, $\exists\, y \in X$, *unic, aşa ca* $\varphi(x, y) = \mathrm{v}$,

*se numeşte **spaţiu afin**.*

*b) Un spaţiu afin aflat în situaţia în care $X = V$ şi $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{u} - \mathrm{v},\ \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ poartă denumirea de **spaţiu afin ataşat spaţiului vectorial** V.*

*Când $X = V = \mathbb{R}^n$, iar V este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, atunci este vorba despre **spaţiul afin real** $\mathbb{R}^n$.*

*c) Se numeşte **endomorfism de spaţii afine** un morfism (aplicaţie liniară) de la unul dintre spaţii la celălalt.*

*d) O aplicaţie f de la spaţiul afin (X, V, φ) la spaţiul afin (Y, W, φ) se numeşte **morfism afin** (sau **aplicaţie/funcţie/transformare afină**) dacă, pentru orice subspaţiu afin al lui (X, V, φ), imaginea sa prin f este un subspaţiu afin al lui (Y, W, φ).*

În cazul în care spaţiile afine din Definiţia 8.5-d) sunt finit dimensionale, funcţia afină f este dată printr-o relaţie de tipul

$$f(\mathrm{v}) = A\mathrm{v} + \mathrm{w}_0, \forall\, \mathrm{v} \in V$$

unde A este o matrice ($\in \mathcal{L}(V, W)$), iar $\mathrm{w}_0 \in W$.

În cazul particular în care $W = V$ şi A este matricea unitate, transformarea (punctuală) afină $f : V \to V$, definită prin $f(\mathrm{v}) = \mathrm{v} + \mathrm{w}_0$ se numeşte ***translaţie*** (sau ***deplasare paralelă cu direcţia dată de*** w_0).

Dacă $W \equiv V$, $\mu_0 \in K$, $\mathrm{v}_0 \in V$, $\mathrm{w}_1 \in W$, $A = \mu_0 I$ şi $\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_1 - \mu_0 \mathrm{v}_0$, atunci transformarea afină în cauză, $f : V \to V$, definită prin $f(\mathrm{v}) = w_1 + \mu_0(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0),\ \forall\, \mathrm{v} \in V$ se numeşte ***omotetie***.

Un morfism de spaţii afine, $f : V \to W$ este denumit ***simetrie***, în cazul când $W = V$ şi $f \circ f = \mathbf{1}_V$.

Forme biliniare

Definiţia 8.6 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp comutativ K. O aplicaţie $g : V \times W \to K$ care satisface relaţiile*

(j) $g(\alpha\mathrm{v} + \beta\mathrm{u}, \mathrm{w}) = \alpha g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \beta g(\mathrm{u}, \mathrm{w}),\ \forall\, \alpha, \beta \in K,\ \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V,\ \mathrm{w} \in W$ *şi*

(jj) $g(\mathrm{v}, \lambda\mathrm{w} + \mu\mathrm{z}) = \lambda g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \mu g(\mathrm{v}, \mathrm{z}),\ \forall\, \lambda, \mu \in K,\ \mathrm{v} \in V,\ \mathrm{w}, \mathrm{z} \in W$

*se numeşte **formă** (sau **funcţională**) **biliniară** pe $V \times W$.*

Când $W \equiv V$, aplicaţia $g : V \times V \to K$ care satisface (j) şi (jj) se numeşte ***formă*** (***funcţională***) ***biliniară*** pe V.

Dacă V şi W sunt finit dimensionale, cu bazele $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ şi respectiv $\widehat{B} = \{\widehat{\mathrm{b}}_1, \widehat{\mathrm{b}}_2, \ldots, \widehat{\mathrm{b}}_m\}$, atunci:

$$g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i, \sum_{j=1}^{m} w_j \widehat{\mathrm{b}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j g(\mathrm{b}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j), \forall\, \mathrm{v} \in V, \mathrm{w} \in W,$$

unde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ sunt coordonatele lui v în baza B, iar $w_1, w_2, \ldots, w_m \in K$ sunt coordonatele lui w în baza $\widehat{B}$ (din W). Scalarii $a_{ij} = g(\mathrm{b}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j)$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ se numesc ***coeficienţi ai formei biliniare*** g în raport cu perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar matricea acestor coeficienţi este numită ***matricea formei biliniare*** g în cuplul de baze $(B, \widehat{B})$.

Dacă B' şi $\widehat{B}'$ sunt alte baze în V şi respectiv W, iar S şi respectiv $\widehat{S}$ sunt matricile de trecere de la B la B' şi respectiv de la $\widehat{B}$ la $\widehat{B}'$, atunci matricea $A_{B', \widehat{B}'}$, corespunzătoare formei biliniare g în raport cu perechea de baze $(B', \widehat{B}')$ este dată de formula

$$(\#) \quad A_{B', \widehat{B}'} = S^T A_{B, \widehat{B}} \widehat{S}$$

în care $A_{B, \widehat{B}}$ este matricea formei biliniare g în perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar S^T transpusa matricii S. Prin urmare, matricea formei g faţă de noile baze B' şi $\widehat{B}'$ se obţine din matricea lui g relativă la vechile baze B şi $\widehat{B}$, prin înmulţirea, la stânga, cu transpusa matricii schimbării de baze în V şi, la dreapta, cu matricea schimbării de baze în W.

Aplicaţia biliniară $g : V \times W \to K$ defineşte, în raport cu parametrul $\mathrm{w} \in W$, o familie de funcţii liniare $f_{\mathrm{w}} : V \to K$, date prin $f_{\mathrm{w}}(\mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$, precum şi o familie de funcţii liniare $h_{\mathrm{v}} : W \to K$, depinzând de parametrul $\mathrm{v} \in V$, introduse prin formula $h_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{w} \in W$. Atunci, aplicaţia $\mathrm{w} \to f_{\mathrm{w}}$ este un morfism g' de la spaţiul liniar W la dualul V^* al lui V. Prin acest morfism, fiecărui element $w \in W$ îi corespunde forma liniară $g'(\mathrm{w}) = f_{\mathrm{w}} \in \mathcal{L}(V, K) = V^*$. De asemenea, aplicaţia $g'' : V \to W^* = \mathcal{L}(W, K)$, definită prin $g''(\mathrm{v}) = h_{\mathrm{v}}$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$ este un morfism de spaţii liniare.

Definiţia 8.7 *Fie $g : V \times W \to K$ o aplicaţie biliniară pe $V \times W$ şi morfismele liniare derivate g' şi g''. Subspaţiul liniar $Ker(g')$ (al lui W) se numeşte* **nucleul** *lui g* **la dreapta***, iar subspaţiul lui V, $Ker(g'')$ se numeşte* **nucleul la stânga** *al lui g. Dacă $Ker(g') = \{\mathbf{0}_W\}$ şi $Ker(g'') = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci forma biliniară g se numeşte* **nedegenerată***.*

Definiţia 8.8 *O formă biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte* ***simetrică*** *dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ şi* ***antisimetrică*** *dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -g(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$.*

Propoziţia 8.3 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară simetrică (sau antisimetrică) pe V, atunci nucleul său la stânga coincide cu nucleul său la dreapta.*

În acest caz, oricare dintre nucleele coincidente (fie cel la stânga, fie cel la dreapta) se numeşte, pur şi simplu, **nucleul lui** *g şi se notează cu simbolul $Ker(g)$.*

Demonstraţie: Pentru orice $\mathrm{v} \in Ker(g') = \{\mathrm{y} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{x} \in V\}$, avem $g(\mathrm{x}, \mathrm{v}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$. Dar cum g este simetrică (sau antisimetrică), rezultă că avem $g(\mathrm{v}, \mathrm{x}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{v} \in Ker(g'') = \{\mathrm{x} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{y} \in V\}$. Prin urmare, $Ker(g') \subseteq Ker(g'')$. Incluziunea contrară se demonstrează la fel. Astfel, conchidem că avem: $Ker(g') = Ker(g'')$. ◀

Propoziţia 8.4 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul vectorial V, finit dimensional, peste K, atunci*

$$rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V),$$

unde $rang(g)$ este rangul matricii asociate lui g în raport cu o bază B din V.

Demonstraţie: Fie $n = dim(V)$ şi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază a lui V, în care matricea lui g este $A = (g(v_i, v_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. Atunci, pentru orice $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in V$, avem:

$$g(x, y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j, \text{ cu } a_{ij} = g(v_i, v_j), \forall\, 1 \le i, j \le n$$

Cum $Ker(g) = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall\, y \in V\}$ şi $g(x, y) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) y_j$, putem spune că $x \in Ker(g)$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0, \forall\, j = \overline{1, n}$, adică dacă x este o soluţie a cestui sistem de ecuaţii omogene. Ca atare, $Ker(g)$ coincide cu mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem, relativ la care se ştie că rangul matricii sale, adică $rang(g)$, este egal cu diferenţa dintre numărul necunoscutelor şi dimensiunea spaţiului soluţiilor. Aşadar, avem: $rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V)$. ◀

Observaţie: Ţinând seama de Propoziţia 8.4, se poate afirma că o condiţie necesară şi suficientă ca o formă biliniară şi simetrică $g : V \times V \to K$ să fie nedegenerată este ca rangul ei să fie maxim, adică egal cu $dim(V)$.

Definiţia 8.9 *a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V. Doi vectori u şi v din V se numesc **ortogonali** (sau **conjugaţi**) în raport cu g dacă $g(u, v) = 0$.*

*b) Dacă U este un subspaţiu liniar al lui V, atunci mulţimea $\{y \in V \mid g(x, y) = 0, \forall\, x \in U\}$, care se dovedeşte a fi un subspaţiu vectorial al lui V, se numeşte **complementul ortogonal al lui U faţă de** g şi se notează cu $U^{\perp_g}$.*

Observaţie: Când V este finit dimensional şi $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ este o bază a subspaţiului liniar $U \subseteq V$, atunci $y \in U^{\perp_g}$ dacă şi numai dacă $g(u_l, y) = 0, \forall\, l = \overline{1, p}$.

Teorema 8.1 *Fie V un K-spaţiu vectorial finit dimensional şi $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V. Atunci, oricare ar fi baza $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g (adică aşa încât $g(b_i, b_j) = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \ne j$), exact un număr egal cu $rang(g)$ dintre scalarii $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), ..., g(b_n, b_n)$ sunt diferiţi de zero.*

Demonstraţie: Fie $r = rang(g)$ şi s numărul scalarilor $g(b_i, b_i)$ diferiţi de 0. Astfel, $g(b_1, b_1) \ne 0, g(b_2, b_2) \ne 0, \ldots, g(b_s, b_s) \ne 0$ şi $g(b_j, b_j) = 0$, $\forall\, j = \overline{s+1, n}$. Atunci:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in Ker(g) \Longleftrightarrow g(b_i, x) = x_i g(b_i, b_i) = 0, \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Deci $Ker(g) = \{x = \sum_{i=1} x_i b_i \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0\}$ şi, în consecinţă, $dim(Ker(g)) = dim(V) - rang(g) = n - r$. Aşadar, rezultă că avem: $n - s = n - r$. De aici, găsim: $s = r$. ◀

Când $K = \mathbb{R}$, se poate spune chiar mai mult despre g decât în Teorema 8.1 şi anume:

Teorema 8.2 ***(Teorema inerţiei; a lui Sylvester)***

Fie V un spaţiu vectorial real şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi simetrică pe V, nedegenerată. Există atunci un număr natural p astfel încât, dacă $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ este o bază a spaţiului finit dimensional V, ortogonală faţă de g, exact p dintre numerele $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), \ldots, g(b_n, b_n)$ sunt mai mari decât 0 (adică pozitive) şi $q = n - p$ dintre ele sunt negative.

Demonstraţie: Fie $c_i = g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. După o eventuală renumerotare a elementelor bazei, putem zice că avem $c_1, c_2, \ldots, c_p > 0$ şi $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n < 0$. Considerăm o altă bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, tot ortogonală faţă de g, în raport cu care avem $d_i = g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ astfel încât $d_1, d_2, \ldots, d_l > 0$ şi $d_{l+1}, d_{l+2}, \ldots, d_n < 0$. Arătăm că vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt liniar independenţi în V. Astfel, presupunând că avem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_{l+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ aşa ca

$$\alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots \alpha_p \mathrm{b}_p + \beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n = \mathbf{0}_V,$$

putem scrie: $\mathrm{w} = \alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathrm{b}_p = -(\beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n)$. Calculând $g(\mathrm{w}, \mathrm{w})$, obţinem, pe de o parte, $c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2$ şi, pe de alta, $d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2$, adică

$$0 \leq c_1 \alpha_1^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2 = d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2 \leq 0,$$

ceea ce nu este posibil decât dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_{l+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Prin urmare, vectorii $\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt într-adevăr liniar independenţi. În consecinţă, avem $p + n - l \leq n$, adică $p \leq l$. Similar, avem şi relaţia reciprocă, aşa încât, de fapt, $p = l$. Deci p este un invariant al lui g (indiferent de baza lui V). ◀

Observaţie: Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul liniar real, finit dimensional, V, atunci, pentru orice bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g, numărul elementelor pozitive, numărul elementelor nule şi cel al elementelor negative din şirul $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2)$, $g(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_3), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt mereu aceleaşi, invariabile în raport cu baza considerată. Aceasta, în virtutea Teoremei 8.1 şi a Teoremei 8.2, ultima dintre ele aplicată restricţiei lui g la $Ker(g)$.

Definiţia 8.10 *Tripletul (p, q, r), în care numărul natural p este egal cu numărul elementelor pozitive din suita $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$, q este numărul elementelor negative din aceeaşi suită, iar r (adică $n - p - q$) este numărul elementelor egale cu zero din respectivul şir, se numeşte* ***signatura lui*** *g.*

Forme şi funcţii pătratice

Definiţia 8.11 *Fie $g : V \times V \to K$ o funcţie biliniară şi simetrică pe spaţiul vectorial V, peste corpul comutativ K. Funcţia $h : V \to K$, definită prin $h(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ (adică restricţia lui g la $\{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in V\} \subseteq V \times V$) se numeşte* ***formă (funcţională) pătratică*** *pe V, asociată formei biliniare g.*

Observaţie: Deoarece $h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = g(\mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{x} + \mathrm{y}) = g(\mathrm{x}, \mathrm{x}) + g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + g(\mathrm{y}, \mathrm{x}) + g(\mathrm{y}, \mathrm{y})$ şi $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = g(\mathrm{y}, \mathrm{x})$, avem

$$h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = h(\mathrm{x}) + 2g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + h(\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V,$$

de unde deducem formula:

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{2} \left[h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) - h(\mathrm{x}) - h(\mathrm{y}) \right], \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V.$$

În virtutea acesteia, cunoaşterea formei pătratice h pe V conduce la determinarea formei biliniare şi simetrice g, asociată lui h, pe V.

Dacă $dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$ şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci matricea asociată lui g în raport cu B este, de fapt, şi matricea asociată lui h, iar funcţia polinomială şi omogenă, de gradul 2, $h(\mathrm{x})$, al cărei aspect este

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ pentru } \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ este matricea menţionată, se numeşte ***expresie a formei pătratice*** h. Scalarii a_{ij}, verificând relaţia de simetrie $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$, se numesc ***coeficienţi ai lui*** h ***în baza*** B. Determinantul matricii $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ se numeşte ***discriminantul*** formei pătratice h.

Ţinând cont de formula (#), putem spune că, şi în cazul formei h, matricea sa asociată într-o bază B' a lui V, alta decât B, matrice notată cu $A_{B'}$, se obţine din cea asociată lui h în baza B, notată cu A_B, în conformitate cu relaţia

$$(\#\#) \quad A_{B'} = S^T A_B S,$$

unde S este matricea de trecere de la B la B', iar S^T este transpusa matricii S.

În virtutea legăturii dintre h şi g, se poate spune că h este o ***formă pătratică nedegenerată*** dacă şi numai dacă g este nedegenerată, adică dacă $det(A) \neq 0$, unde A este matricea asociată lui g şi respectiv lui h. Altfel, h este o ***forma pătratică degenerată***.

Definiţia 8.12 *Se numeşte* ***formă canonică (redusă)*** *a funcţiei pătratice h acea expresie în care, în raport cu o anumită bază a lui V, matricea asociată are formă diagonală. Forma canonică a lui h este numită* ***normală*** *atunci când matricea (diagonală) asociată lui h conţine, pe diagonala în speţă, numai elementele 0, 1 şi -1 (din K).*

Teorema 8.3 ***(Metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la expresia ei redusă)***
Fie V un spaţiu liniar real, n-dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există atunci o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V şi scalarii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$, aşa încât, pentru orice $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \in V$, avem:

$$h(\mathrm{x}) = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2.$$

Demonstraţie: Fie $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ o bază oarecare a lui V, faţă de care expresia lui $h(\mathrm{x})$ este $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$, unde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ sunt coordonatele lui x în raport cu această bază, iar a_{ij} sunt coeficienţii din $\mathbb{R}$ ai lui h relativ la baza respectivă. Pentru reducerea formei $h(\mathrm{x})$ la doar o sumă algebrică de pătrate ale coordonatelor lui x într-o altă anumită bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, căutăm dacă cel puţin unul dintre coeficienţii a_{ii}, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, este diferit de zero. Dacă acest lucru nu are loc din start, iar h nu este o formă identic nulă, atunci expresia lui h are cel puţin un termen $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ cu $a_{ij} \neq 0$. Efectuând transformarea de bază ce corespunde schimbării de coordonate următoare $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1, \tilde{x}_2 = \hat{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1} = \hat{x}_{i-1}, \tilde{x}_i = \hat{x}_i + \hat{x}_j, \tilde{x}_{i+1} = \hat{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_{j-1} = \hat{x}_{j-1}, \tilde{x}_j = \hat{x}_i - \hat{x}_j, \tilde{x}_{j+1} = \hat{x}_{j+1}, \ldots, \tilde{x}_n = \hat{x}_n$, termenul $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ devine $2a_{ij}\left(\hat{x}_i^2 - \hat{x}_j^2\right)$ şi, astfel,de exemplu, coeficientul lui $\hat{x}_i^2$ este nenul.

Fără a micşora generalitatea raţionamentului de faţă, admitem că avem, de la început, în expresia lui h, $a_{11} \neq 0$. Luăm atunci în atenţie suma tuturor acelor termeni (din respectiva expresie) care îl conţin pe $\tilde{x}_1$. Completăm această sumă până la un pătrat perfect, aşa încât expresia lui h să se redea sub forma

$$\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2 + \cdots,$$

în care termenii din zona "..." conţin numai coordonatele $x_2, \ldots, x_n$ ale lui x în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$.

Expresia sumei din zona "..." este similară aceleia din start, cu diferenţa că ea nu mai conţine deloc pe $\tilde{x}_1$. Repetând asupra ei raţionamentul de până aici, obţinem:

$$h(\mathrm{x}) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2 + \frac{1}{a_{22}^*}\left(a_{22}^*\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}^*\tilde{x}_n\right)^2 + \cdots$$

Mai departe, prin continuarea unui asemenea proces de calcul, se ajunge, după un număr finit de paşi, la expresia dorită a lui $h(\mathrm{x})$, adică la $\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt noile coordonate ale lui x, iar $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sunt noii coeficienţi ai lui h într-o bază ce corespunde schimbării de coordonate guvernată de relaţiile

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n \\ x_2 &= a_{22}^*\tilde{x}_2 + a_{23}^*\tilde{x}_3 + \cdots + a_{2n}^*\tilde{x}_n \\ &\vdots \\ x_m &= \overline{a}_{mm}\tilde{x}_m + \cdots + \overline{a}_{mn}\tilde{x}_n, \end{cases}$$

în care $1 \leq m \leq n$. ◀

Observaţie: Pe baza Teoremei 8.2, se poate spune că, dacă (p, q, r) este signatura formei biliniare g şi, implicit, a formei pătratice h, asociată lui g, exact p dintre coeficienţii formei canonice obţinută prin Teorema 8.3 sunt pozitivi, q sunt negativi şi r sunt egali cu zero. Şi acest lucru se produce în raport cu baza faţă de care h are formă redusă în V.

Teorema 8.4 ***(Metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice la forma canonică)***
Fie V un spaţiu liniar real, finit dimensional ($dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$) şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de expresie $h(\mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, în raport cu o bază a lui V în care x are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă toţi minorii principali ai matricii asociate $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ sunt nenuli, adică dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix},$$

atunci există o bază $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$ a spaţiului V aşa încât

$$h(\mathrm{x}) = \mu_1\check{x}_1^2 + \mu_2\check{x}_2^2 + \cdots + \mu_n\check{x}_n^2,$$

unde $\mu_j = \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, cu $\Delta_0 = 1$ şi $\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots, \check{x}_n$ sunt coordonatele lui x în baza B'.

Demonstraţie: Plecând de la baza $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, considerăm vectorii $\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n$, unde

$$\begin{cases} \mathrm{b}'_1 &= s_{11}\mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}'_2 &= s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathrm{b}'_n &= s_{n1}\mathrm{b}_1 + s_{n2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{nn}\mathrm{b}_n, \end{cases}$$

cu $s_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq j \leq i \leq n$, astfel încât

$$(\diamondsuit) \quad \begin{cases} g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_j) = 0 & \text{dacă } 1 \leq j < i \leq n \text{ şi} \\ g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_i) = 1 & \text{dacă } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Condiţiile $(\diamondsuit)$ determină în mod unic elementele matricii $S = (s_{ij})_{1\leq j\leq i\leq n}$, în ipotezele din enunţul prezentei teoreme. Aceasta întrucât, de exemplu, pentru obţinerea lui b'_i, avem de rezolvat sistemul algebric liniar

$$(\bullet) \quad \begin{cases} a_{11}s_{i1} + a_{12}s_{i2} + \cdots + a_{1i}s_{ii} &= 0 \\ a_{21}s_{i1} + a_{22}s_{i2} + \cdots + a_{2i}s_{ii} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{i-1,1}s_{i1} + a_{i-1,2}s_{i2} + \cdots + a_{i-1,i}s_{ii} &= 0 \\ a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \cdots + a_{ii}s_{ii} &= 1 \end{cases}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$. Deci sistemul ($\bullet$) este compatibil determinat, având o soluţie unică, ce se poate obţine prin regula lui Kramer. După găsirea tuturor vectorilor $\mathrm{b}_1', \mathrm{b}_2', \ldots, \mathrm{b}_n'$, se poate arăta că ei alcătuiesc o bază în V, bază în raport cu care matricea asociată lui h este una de formă diagonală, cu elementele $\dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$ şi $\Delta_0 = 1$, pe respectiva diagonală.

Într-adevăr, pe baza condiţiilor ($\diamondsuit$) şi ţinând cont de simetria lui g, avem:

$$g(\mathrm{b}_i', \mathrm{b}_j') = g(\mathrm{b}_i', s_{j1}\mathrm{b}_1 + s_{j2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{jj}\mathrm{b}_j) = s_{j1}g(\mathrm{b}_i', \mathrm{b}_1) + s_{j2}g(\mathrm{b}_i', \mathrm{b}_2) + \cdots + s_{jj}g(\mathrm{b}_i', \mathrm{b}_j) = 0,$$

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ (ţinând cont şi de simetria lui g).}$$

În acelaşi timp, avem:

$$g(\mathrm{b}_i', \mathrm{b}_i') = s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \forall\, i = \overline{1,n} \text{ (cu } \Delta_0 = 1).$$

◀

Definiţia 8.13 *a) O formă pătratică $h : V \to K$ se numeşte* ***pozitiv definită*** *pe V, ori de câte ori, în signatura lui h, indexul pozitiv este egal cu dimensiunea (finită) a lui V. Forma pătratică h se numeşte* ***pozitiv semidefinită*** *pe V când, în signatura (p, q, r) a lui h, r este nenul şi $q = 0$.*

b) Forma h se numeşte ***negativ definită*** *dacă $p = r = 0$ şi $q = dim(V)$. Forma h se numeşte* ***negativ semidefinită*** *atunci când $p = 0, r > 0$ şi $q = dim(V) - r > 0$.*

c) Forma pătratică h se numeşte ***nedefinită*** *când $p > 0$ şi $q > 0$.*

Observaţie: În conformitate cu Teorema 8.4, o formă pătratică $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, este pozitiv definită atunci când toţi determinanţii Δ_j sunt pozitivi. Forma h este negativ definită dacă $(-1)^{j+1}\Delta_j < 0$, $\forall\, j = \overline{1,n}$ şi nedefinită atunci când nu toţi determinanţii nenuli Δ_j au acelaşi semn.

Teorema 8.5 ***(Metoda valorilor proprii şi a vectorilor proprii pentru reducerea unei forme pătratice la expresia sa canonică)***

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe spaţiul liniar real, finit dimensional V. Dacă V este un spaţiu euclidian, atunci există o bază ortonormată a lui V faţă de care h are forma canonică

$$h(\mathrm{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricii asociate lui h, în baza iniţială, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele lui x *în acea bază.*

Demonstraţie: Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V, în raport cu care matricea A_B, corespunzătoare lui h, are vectorii proprii $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ca şi în cazul diagonalizării lui A_B, putem admite că sistemul $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este ortonormat faţă de produsul scalar cu care este înzestrat spaţiul V.

Atunci, în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, matricea lui h va avea forma diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, iar expresia lui h va fi cea a formei canonice indicate în enunţ. ◀

Definiţia 8.14 *Fie V spaţiu vectorial peste un corp comutativ K, h o formă pătratică pe V şi f o funcţională afină pe V. Suma $h + f$ se numeşte* ***funcţională pătratică de expresie neomogenă*** *pe V.*

În raport cu o anumită bază a lui V, expresia lui $h+f$ este

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, $b_i \in K$, $\forall\, i=\overline{1,n}$ şi $c\in K$ sunt coeficienţii respectivei funcţii pătratice în acea bază, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele unui vector x din V, în baza considerată.

Dacă V este spaţiu euclidian, atunci expresia funcţiei pătratice $\rho = h+f$ se poate reda prin

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x}\rangle + c, \forall\, \mathrm{x}\in V,$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ şi $\mathrm{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Matricea A se poate considera întotdeauna simetrică, întrucât, prin intermediul egalităţii,

$$\begin{aligned}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle A^T\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \left(A+A^T\right)\mathrm{x}, \mathrm{x}\right\rangle,\end{aligned}$$

unde $\left(A+A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$, se poate conta mereu pe aportul matricii simetrice $\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$, chiar dacă $A\neq A^T$.

Efectuând o transformare afină de coordonate, de forma

$$\mathrm{x}' = S\mathrm{x} + \mathrm{x}_0,$$

unde S este o matrice nesingulară, iar $\mathrm{x}_0 \in V$ este fixat arbitrar, obţinem:

$$\begin{aligned}\rho(\mathrm{x}) &= \left\langle AS^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0), S^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0)\right\rangle + \left\langle \mathrm{b}, S^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0)\right\rangle + c \\ &= \left\langle \left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}', \mathrm{x}'\right\rangle - \left\langle 2\left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}_0 + \left(S^{-1}\right)^T \mathrm{b}, \mathrm{x}'\right\rangle + c_0.\end{aligned}$$

Dacă S este o matrice ortogonală (de exemplu având drept coloane vectorii proprii, ortonormaţi, ai lui A), atunci $S^{-1} = S^T$ şi $SAS^T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A. În consecinţă, avem:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle - 2\left\langle S\left(AS^T\mathrm{x}_0 + \frac{\mathrm{b}}{2}\right), \mathrm{x}'\right\rangle + c_0.$$

În cazul în care A este nesingulară, se poate lua $\mathrm{x}_0 = -\frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$ şi atunci:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle + c_0,$$

unde $c_0 = \langle D\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0\rangle - \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}_0\rangle + c$.

Aşadar, în cazul în care matricea A este nesingulară, prin transformarea afină $\mathrm{x}' = S\mathrm{x} - \frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$, s-ar aduce funcţia pătratică ρ la o formă redusă, sumă dintre o formă pătratică canonică şi o formă constantă.

Când A este singulară, se ia $x_0 = \mathbf{0}_V$ şi se ajunge, prin transformarea liniară $\mathrm{x}' = S\mathrm{x}$, la

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle + \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}'\rangle + c_0,$$

ceea ce ne spune că forma redusă a lui ρ are şi o componentă ce depinde liniar de x', iar partea ei principală $\langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle$ este o formă pătratică canonică cu $1 \leq r < n$ termeni. Mai departe, efectuând o adecvată transformare liniară de coordonate, de aici, se poate ajunge la o expresie a lui ρ de forma

$$\rho(\mathrm{x}) = \sum_{i=r} \lambda_i \left(x_i''\right)^2 + \gamma_{r+1} x_{r+1}'',$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ şi $\gamma_{r+1} \in \mathbb{R}$, iar $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ sunt coordonatele lui x în noua bază a lui V (r este rangul lui ρ).

Din punct de vedere geometric, nucleul lui ρ este, pentru $V = \mathbb{R}^n$, o ***conică***, atunci când $n = 2$, o ***cuadrică***, când $n = 3$ şi o ***hipercuadrică***, când $n \geq 4$. În cazul în care $n = 1$, expresia redusă (normală) a funcţiei pătratice ρ poate fi x_1^2+1 (şi atunci $Ker(g)$ este mulţimea a două puncte imaginare, conjugate) sau $x_1^2 - 1$ ($Ker(g)$ fiind atunci mulţimea a două puncte distincte) sau x_1^2 (situaţie în care $Ker(g)$ este o mulţime de două puncte confundate).

Când $n = 2$, avem următoarele nouă tipuri de ecuaţii (reduse) de conice:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (*elipsă "imaginară"*);
2. $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (*hiperbolă*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (*elipsă*);
4. $x_1^2 - 2x_2 = 0$ (*parabolă*);
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (*un punct*; *două drepte imaginare, conjugate*);
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (*două drepte concurente*);
7. $x_1^2 + 1 = 0$ (*două drepte imaginare*);
8. $x_1^2 - 1 = 0$ (*două drepte paralele*);
9. $x_1^2 = 0$ (*două drepte confundate*).

Când $n = 3$, cuadricele în cauză sunt de 17 feluri, caracterizându-se (în principal) prin ecuaţiile reduse următoare:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (*elipsoid "imaginar"*);
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ (*elipsoid*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu o pânză*);
4. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu două pânze*);
5. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$ (*paraboloid eliptic*);
6. $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$ (*paraboloid hiperbolic*);
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (*con imaginar; punct*);
8. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (*con real*).

În completare, sunt cele 9 expresii de ecuaţii reduse din cazul $n = 2$, care, acum, în $\mathbb{R}^3$, reprezintă *cilindri* de diferite tipuri. Primele 6 clase reprezintă *cuadrice nesingulare*, iar celelalte, *cuadrice singulare.*

Bibliografie recomandată

1. D. Drăghici - *Algebră (Cap. VIII)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

2. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

3. Irinel Radomir - *Matematică. Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

4. C. Costinescu - *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

5. Simona Roatesi, M. Ariciuc - *Lecţii de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2008.

6. M. Neagu - *Geometria curbelor şi suprafeţelor. Teorie şi aplicaţii*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2013.

Cursul 9

Limite de funcţii. Continuitatea funcţiilor

Asemenea conceptului de convergenţă/divergenţă la şiruri sau serii numerice, noţiunile de limită şi continuitate pentru funcţii sunt intrinsec legate de structura topologică a spaţiului din care provin mulţimile de definiţie şi în care iau valori respectivele funcţii. Pe mulţimi amorfe, netopologizate, aplicaţiilor definite nu li se poate introduce noţiunea de limită într-un punct şi, în absenţa acesteia, nici noţiunea de continuitate într-un punct sau/şi pe o mulţime. Aceasta deoarece punctul şi, implicit, mulţimea de puncte în cauză, trebuind să fie "de acumulare" (în cazul punctului) şi, respectiv, "derivată" (în cazul mulţimii), necesită prezenţa unei structuri topologice atât pentru mulţimea de definiţie, cât şi pentru mulţimea în care ia valori aplicaţia (funcţia) vizată. Cum, în situaţia funcţiilor reale, fie ele scalar-scalare, scalar-vectoriale, vectorial-scalare sau vectorial-vectoriale (v. Cursul 7), impedimentul inexistenţei unei topologii pe oricare dintre mulţimile implicate nu are loc, se poate vorbi despre limita unor astfel de funcţii într-un punct de acumulare al mulţimii lor de definiţie, precum şi despre continuitatea lor într-un punct sau pe o mulţime de puncte din mulţimea lor de definiţie. Este exact ceea ce ne propunem aici, în cele ce urmează.

Limite de funcţii (în cadru general şi în spaţiul $\mathbb{R}^n$)

Fie (X, τ_1) şi (Y, τ_2) două spaţii topologice, $f : A \subseteq X \to Y$ o funcţie şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A (în raport, evident, cu topologia τ_1). Aşadar $x_0 \in A'$, unde A' este mulţimea derivată corespunzătoare lui A, adică mulţimea tuturor punctelor sale de acumulare (în raport cu τ_1).

Definiţia 9.1 *Spunem că* ***funcţia*** f ***are limită în*** x_0*, fie ea* $l \in Y$*, dacă, pentru orice vecinătate* V *a lui* l *(*$V \in \mathcal{V}(l)$*), există o vecinătate* U *a lui* x_0 *(*$U \in \mathcal{V}(x_0)$*), astfel încât:*

$$\forall\, x \in (U \ \setminus \{x_0\}) \cap A \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Îndeobşte, acest fapt se notează prin $\lim\limits_{x \xrightarrow{\tau_1} x_0} f(x) \overset{\tau_2}{=} l$ sau, echivalent, prin $f(x) \xrightarrow{\tau_2} l$, când $x \xrightarrow{\tau_1} x_0$. Ori de câte ori se subînţelege în ce topologie are loc una sau / şi cealaltă dintre convergenţele ce definesc faptul că $l \in Y$ este limita funcţiei $f : A \subseteq X \to Y$ în punctul $x_0 \in A$, se va folosi notaţia mai simplă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ sau echivalenta ei: $f(x) \to l$, când $x \to x_0$.

Definiţia 9.1 nu-şi modifică semnificaţia dacă, atât pentru x_0, cât şi pentru l, în locul sistemelor generale de vecinătăţi $\mathcal{V}(x_0)$ şi respectiv $\mathcal{V}(l)$, se consideră sisteme fundamentale de vecinătăţi (v. Definiţia 6.7, a)). Astfel, avem:

Definiţia 9.2 *Funcţia* $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *are limita* $l \in Y$ *în punctul* $x_0 \in A'$ *dacă*

$$\forall\, \tilde{V} \in \mathcal{U}(l), \exists\, \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0) \text{ astfel încât, } \forall\, x \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A,\ f(x) \in \tilde{V},$$

unde $\mathcal{U}(l)$ *şi* $\mathcal{U}(x_0)$ *sunt sisteme fundamentale de vecinătăţi pentru* l *şi respectiv* x_0*.*

Propoziţia 9.1 *Definiţiile 9.1 şi 9.2 sunt echivalente.*

Demonstraţie: Să admitem, pentru început, că are loc Definiţia 9.1. Considerând o vecinătate oarecare $\tilde{V}$, din sistemul fundamental $\mathcal{U}(l)$, avem $\tilde{V} \in \mathcal{V}(l)$, deoarece $\mathcal{U}(l) \subseteq \mathcal{V}(l)$.Atunci, în conformitate cu Definiţia 9.1, pentru $\tilde{V}$, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, aşa încât, $\forall\, x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$, avem $f(x) \in \tilde{V}$. În acelaşi timp, întrucât $\mathcal{U}(x_0)$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0, se poate conta pe faptul că, pentru $U \in \mathcal{V}(x_0)$, există $\tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$ aşa încât $\tilde{U} \subseteq U$.

Atunci, $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$ avem $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ şi deci $f(x) \in \tilde{V}$. Aşadar, $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$, $\exists \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $\forall x \in \left(\tilde{U} \setminus \{x_0\}\right) \cap A \Rightarrow f(x) \in \tilde{V}$. Adică are loc Definiţia 9.2.

Reciproc, presupunând că are loc Definiţia 9.2 şi considerând o vecinătate arbitrară V a lui l ($V \in \mathcal{V}(l)$), se poate deduce că, întrucât $\mathcal{U}(l)$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru l, există $\tilde{V} \subseteq V$, cu $\tilde{V} \in \mathcal{V}(x_0)$ (deci, la urma urmelor, $\tilde{U}$ din $\mathcal{V}(x_0)$) aşa încât, pentru orice $x \in \left(\tilde{U} \setminus \{x_0\}\right) \cap A$, avem $f(x) \in \tilde{U}$. Deci are loc Definiţia 9.1. ◀

Observaţie: Prin negarea oricăreia dintre definiţiile echivalente 9.1 şi 9.2, se obţine o caracterizare a situaţiei în care elementul l din Y nu este limita funcţiei $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ în punctul $x_0 \in A'$. Astfel, de exemplu, pe baza negaţiei relativă la Definiţia 9.1, deducem că *$l \in Y$ nu este $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă există $V_0 \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât, pentru orice $U \in \mathcal{V}(x_0)$, există $x_U \in \left(\tilde{U} \setminus \{x_0\}\right) \cap A$, cu proprietatea că $f(x_U) \notin V_0$.* Notăm acest lucru prin: $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$.

Definiţia 9.3 *Se spune că **funcţia** $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ **are limită** într-un punct $x_0 \in A'$ dacă există $l \in Y$ astfel încât, în conformitate cu Definiţia 9.1 (sau echivalent, Definiţia 9.2), avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

În cazul în care topologiile τ_1 şi τ_2 sunt induse de nişte metrici, $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ şi respectiv $d_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ (adică (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt spaţii metrice), am putea considera mulţimile sferelor (deschise) din X şi, corespunzător, Y în rolul sistemelor fundamentale de vecinătăţi din Definiţia 9.2. Atunci am avea următoarea formulare în postura Definiţiei 9.2.

Definiţia 9.4 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$, unde d_1 este o metrică pe X, iar d_2 o metrică pe Y. Elementul l este **limita funcţie** f **în punctul** x_0 dacă $\forall S_{d_2}(l; \varepsilon)$, $\exists S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$ astfel încât $\forall x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$ are loc: $f(x) \in S_{d_2}(l, \varepsilon)$.*

Altfel spus, ţinând seama de semnificaţia mulţimilor $S_{d_2}(l; \varepsilon)$ şi $S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$, elementul l este limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ aşa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon), \text{ rezultă } d_2(f(x), l) < \varepsilon.$$

Pentru situaţia în care X şi Y ar fi înzestrate cu norme, $\|\cdot\|_X$ pe X şi $\|\cdot\|_Y$ pe Y, adică pentru cazul în care $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ar fi spaţii normate, distanţele d_1 şi d_2 ar fi definite prin intermediul normelor $\|\cdot\|_X$ şi $\|\cdot\|_Y$, iar Definiţia 9.4 ar avea următorul enunţ:

Definiţia 9.5 *Fie $f : A \subseteq (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$. Avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ aşa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < \|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon), \text{rezultă } \|f(x) - l\|_Y < \varepsilon.$$

Observaţie: Când $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$ (cu $n, m \in \mathbb{N}^*$), oricare dintre definiţiile 9.1 - 9.5 funcţionează în raport cu diverse topologii, τ_1 pe $\mathbb{R}^n$ şi τ_2 pe $\mathbb{R}^m$ (cum ar fi, de pildă, topologiile uzuale), ori în raport cu diverse metrici, d_1 pe $\mathbb{R}^n$ şi d_2 pe $\mathbb{R}^m$ (cum sunt, de exemplu, metricile euclidiană şi minkowskiană, de ordin $p \in (0, +\infty)$) sau în raport cu diferite norme, $\|\cdot\|_\#$ pe $\mathbb{R}^n$ şi $\|\cdot\|_o$ pe $\mathbb{R}^m$.

În cazul în care X şi Y sunt spaţii metrice, limita l este, după cum se poate arăta, unică. Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 9.1 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$ ($A \neq \varnothing$), $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Dacă există, atunci limita funcţiei f în punctul x_0 este unică.*

Demonstraţie: Admitem că există l_1 şi l_2 în Y , $l_1 \neq l_2$, aşa încât $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Cum $l_1 \neq l_2$, avem $d_2(l_1, l_2) > 0$. Atunci, luând $\epsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ în Definiţia 9.4, rezultă că există $\delta(\epsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \delta(\epsilon)$, are loc relaţia: $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. În acelaşi timp, există $\widetilde{\delta}(\epsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widetilde{\delta}(\epsilon)$, are loc: $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. În consecinţă, pentru $\epsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3} > 0$, există $\widehat{\delta}(\epsilon) = min\{\delta(\epsilon), \widetilde{\delta}(\epsilon)\}$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widehat{\delta}(\epsilon)$, au loc, simultan, relaţiile $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ şi $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. Cum $d_2(l_1, l_2) \leq d_2(f(x), l_1) + d_2(f(x), l_2)$, s-ar ajunge la anomalia: $d_2(l_1, l_2) < \frac{2d_2(l_1,l_2)}{3}$. Aşadar, de fapt, elementul l_1 trebuie să fie egal cu l_2 şi nu diferit. ◀

Tot în cadrul spaţiilor metrice, are loc următoarea caracterizare a existenţei limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 9.2 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$. Avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă*

$$\forall\, (x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ \textit{cu}\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0,\ \textit{are loc}\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$$

Demonstraţie: Dacă $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, atunci, potrivit Definiţiei 9.4, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$. Deoarece x_0 este punct de acumulare pentru A, în conformitate cu Propoziţia 6.9, există cel puţin un şir $(x_n)_{n \geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. De altfel, pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 0}$ cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$ şi cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem: pentru $\tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $d_1(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. În virtutea acesteia, avem $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$. Prin urmare, combinând faptul că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ cu faptul că $x_n \longrightarrow x_0$, pentru $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, am obţinut: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \mid \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$. Asta înseamnă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Reciproc, presupunând că, $\forall (x_n)_{n \geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$ şi, totodată, prin reducere la absurd, admiţând că $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$, adică există $\epsilon_0 > 0$, aşa încât, $\forall \delta > 0$, $\exists\, x_\delta \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_\delta), l) \geq \epsilon_0$, vedem că, pentru $\delta = \frac{1}{n}$, cu n arbitrar din N^*, există x_n în $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x_n, x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_n), l) \geq \epsilon_0 > 0$. Deducem astfel că există un şir $(x_n)_{n \geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$ încât $x_n \longrightarrow x_0$, pentru $n \to \infty$ şi totuşi $f(x_n) \nrightarrow l$, când $n \to \infty$, în contradicţie cu ipoteza. Prin urmare, în realitate, $f(x) \overset{\tau_{d_2}}{\to} l$, când $x \overset{\tau_{d_1}}{\to} x_0$. ◀

Observaţii:

1) Funcţia $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu are limită într-un punct $x_0 \in A'$ ori de câte ori putem pune în evidenţă un şir $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, pentru care şirul $(f(x_n))_{n \geq 0} \subseteq Y$ nu are limită.

2) Atunci când se pot determina două şiruri, $(x'_n)_{n \geq 0}$ şi $(x''_n)_{n \geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = \lim\limits_{n \to \infty} x''_n = x_0$, pentru care există $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = l_1 \in Y$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n) = l_2 \in Y$, iar $l_1 \neq l_2$, putem susţine că f nu are limită în punctul $x_0 \in A'$.

   De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

   nu are limită în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, punct care este de acumulare pentru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Într-adevăr, pentru şirul $\left((x'_n, y'_n)\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ (când $n \to \infty$), avem $f(x'_n, y'_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = l_1$, când $n \to \infty$, în timp ce, pentru şirul $\left((x''_n, y''_n)\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent şi el la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, avem $f(x''_n, y''_n) = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{n}{n^2+1} \to 0 = l_2 \neq l_1$, când $n \to \infty$.

Propoziţia 9.2 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$, $f : A \to Y$ şi $g : A \to \mathbb{R}_+$. Dacă*

i) există $l \in Y$ astfel încât $d_2(f(x), l) \leq g(x)$, $\forall\, x \in A$

şi

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie: Pentru acest rezultat (care poate fi considerat un ***criteriu pentru existenţa***, cu o anumită valoare, a ***limitei unei funcţii într-un punct***), demonstraţia decurge, pe baza ipotezelor i) şi ii), după cum urmează. Din ii), rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$ (adică $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$), avem $0 < g(x) < \varepsilon$. Folosind şi i), deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $0 \leq d_2(f(x), l) \leq g(x) < \varepsilon$. Cu alte cuvinte, $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ◄

Un ***alt criteriu*** pentru existenţa limitei unei funcţii într-un punct, în cadrul spaţiilor metrice, este cel prezentat de teorema ce urmează:

Teorema 9.3 ***(Cauchy-Bolzano)***
Fie (X, d_1) un spaţiu metric, (Y, d_2) un spaţiu metric complet, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Funcţia f are limită în punctul x_0 dacă şi numai dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \textit{astfel încât}\ \forall\, x', x'' \in A \setminus \{x_0\},\ \textit{cu}\ d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)\ \textit{şi}\ d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon), \textit{avem}$$

$$d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Demonstraţie: Dacă f are limită în x_0, atunci există $l \in Y$ astfel încât $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, adică, potrivit Definiţiei 9.4 (în limbajul "$\varepsilon - \delta$"), avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ aşa încât } \forall\, x \in A,\ \text{cu } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici, luând x' şi x'' din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$, obţinem: $d_2(f(x'), f(x'')) \leq d_2(f(x'), l) + d_2(f(x''), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Prin urmare, tocmai caracterizarea din enunţ.

Reciproc, dacă are loc caracterizarea din enunţ, pentru existenţa limitei lui f în x_0, deducem că, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0, avem:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ şi $\exists\, n_\varepsilon = n\,(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \geq n_\varepsilon$, au loc relaţiile $d_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x_m, x_0) < \delta(\varepsilon)$, pe baza cărora rezultă că $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Reţinem de aici că, în condiţiile în care $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ este un şir convergent la x_0, şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy în Y. Cum (Y, d) este un spaţiu metric complet, rezultă că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$. Tot condiţia Cauchy din enunţ ne asigură că l este limita şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0. Aceasta deoarece, dacă, prin absurd, ar exista $(x'_n)_{n\geq 1}$şi $(x''_n)_{n\geq 1}$ din $A \setminus \{x_0\}$, şiruri convergente (în X) la x_0 , astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$, atunci, prin folosirea condiţiei menţionate, ar rezulta: $0 \leq d_2(l_1, l_2) < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Deci $l_1 = l_2$. ◀

Propoziţia 9.3 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A'$. Dacă f are limită în punctul x_0, atunci există o vecinătate V_0 a lui x_0 încât restricţia funcţiei f la $(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$ este mărginită.*

Demonstraţie: Utilizând Definiţia 9.4 (cu vecinătăţi sferice), deducem că dacă f are limita $l \in Y$ în punctul x_0, atunci, pentru $S_{d_2}(l, 1)$, există $V_0 = S_{d_1}(x_0, \delta(1)) \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $A \cap (V_0 \setminus \{x_0\})$, avem $f(x) \in S_{d_2}(l, 1)$, adică $d_2(f(x), l) \leq 1$, ceea ce înseamnă că $f|_{(A\cap V_0)\,\setminus\,\{x_0\}}$ este mărginită. ◀

Propoziţia 9.4 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spaţiu normat, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$.*

i) Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, atunci există şi $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$.

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq \mathbf{0}_Y$, atunci există $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, $\forall\, x \in (A\cap V_0) \setminus \{x_0\}$.

Demonstraţie: i) Faptul că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ implică, pentru orice $\varepsilon > 0$, existenţa unui $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, oricare ar fi $x \in A$, cu $0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $\|f(x)-l\| < \varepsilon$. Dar cum $|\|f(x)\| - \|l\|| \leq \|f(x) - l\|$, deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $|\|f(x)\| - \|l\|| < \varepsilon$. Deci există $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

ii) Cum $\|f(x) - \mathbf{0}_Y\| = \|f(x)\|$, $\forall\, x \in A$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$, prin aplicarea Propoziţiei 9.2 şi a Teoremei 9.1, rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există şi este egală cu $\mathbf{0}_Y$.

iii) Întrucât $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, atunci $\|l\| > 0$ şi, pentru $\varepsilon = \|l\|$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $\forall\, x \in (S_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap A) \setminus \{x_0\}$, avem $\|f(x) - l\| < \|l\|$, de unde: $\|f(x)\| \leq \|f(x) - l\| < 2\|l\|$. Există deci $V_0 = S_d(x_0, \delta(\|l\|))$, astfel încât f este mărginită pe $(V_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ şi diferită de $\mathbf{0}_Y$, întrucât, în conformitate cu i), avem $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\| \neq 0$, ceea ce înseamnă că, cel puţin pe o submulţime a lui V_0, tot din $\mathcal{V}(x_0)$, f nu se anulează. ◀

Propoziţia 9.5 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$un $\mathbb{R}$-spaţiu normat, $\varnothing \neq A \subseteq X$ şi $x_0 \in A'$.*

i) Dacă $f, g : A \to Y$ sunt astfel încât există $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, atunci, pentru orice α şi $\beta \in \mathbb{R}$, funcţia $\alpha f + \beta g$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha f + \beta g) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

ii) Dacă $f : A \to Y$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt astfel încât există $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $\alpha = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, atunci funcţia $\varphi \cdot f : A \to Y$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (\varphi \cdot f)(x) = \alpha \cdot l.$$

Demonstraţie: i) Se ţine seama că $\|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha l_1 - \beta l_2\| \leq |\alpha|\|f(x) - l_1\| + |\beta|\|g(x) - l_2\|$ şi se aplică existenţa limitelor $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ii) Se are în vedere faptul că $\|\varphi(x)f(x) - \alpha l\| = \|(\varphi(x) - \alpha)f(x) + \alpha(f(x) - l)\| \leq \|f(x)\||\varphi(x) - \alpha| + |\alpha|\|f(x) - l\|$ şi se aplică, odată cu caracterizarea existenţei limitelor implicate (în limbajul " $\varepsilon - \delta$ "), Propoziţia 9.3. ◀

Observaţie: Atât teoremele 9.1 - 9.3, cât şi propoziţiile 9.1 - 9.5 se aplică şi cazului funcţiilor reale, în care, în particular, $X = \mathbb{R}^k$ şi $Y = \mathbb{R}^m$, aceste spaţii fiind, după caz, privite ca nişte spaţii metrice sau normate în mod corespunzător.

Un rezultat specific funcţiilor reale cu valori în $\mathbb{R}^n$ este următorul.

Teorema 9.4 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $A \neq \varnothing$, $x_0 \in A'$ şi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, unde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1,m}$. Atunci f are limita $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ în punctul x_0 dacă şi numai dacă există simultan $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = l_i$, $\forall\, i = \overline{1,m}$.*

Demonstraţie: Rezultatul acesta se obţine pe baza Teoremei 9.2, de caracterizare a limitei lui f în x_0 prin şiruri şi pe baza faptului că, în $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^m$, convergenţa unui şir de elemente echivalează cu convergenţa lui pe coordonate. ◀

Teorema 9.5 ***(Principiul substituţiei)***

Fie $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ spaţii metrice, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $\varnothing \neq B \subseteq Y$, $x_0 \in A'$, $y_0 \in B'$, $f : A \to B$ şi $g : B \to Z$. Dacă:

j) $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

jj) $f(x) \neq y_0$, $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$ *şi*

jjj) $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l \in Z$,

atunci funcţia compusă $g \circ f : A \to Z$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l.$$

Demonstraţie: Cum $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$, rezultă că $\forall\, W \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, V$ din $\mathcal{V}(y_0)$ aşa încât $\forall\, y \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$, avem $g(y) \in W$. În acelaşi timp, deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ şi f ia valori în $B \setminus \{y_0\}$, înseamnă că, pentru V, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$, să avem $f(x) \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$. Prin urmare, $\forall\, W \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(x_0)$ aşa încât, oricare ar fi $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ să aibă imaginea sa prin $g \circ f$ în W. Deci $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l$. ◀

În afară de noţiunea de ***limită globală*** a unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (cu $p, q \in \mathbb{N}^*$) într-un punct $x_0 \in A'$, noţiune introdusă prin una dintre definiţiile 9.1 - 9.5, există, în cazul unei astfel de funcţii reale, când $p \geq 2$, şi conceptul de ***limită iterată***, definită după cum urmează.

Pentru funcţia vectorială de p variabile rale $(p \geq 2)$ $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, fie ***funcţiile*** sale ***parţiale***

$$f_{[k]} : x_k \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_p), \forall\, k = \overline{1,p}$$

care sunt definite pe $A_{[k]} = \{x_k \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A\}$ şi cu valori în $\mathbb{R}^q$, $\forall\, k = \overline{1,p}$.

În cazul în care x_k^0 este un punct de acumulare al mulţimii $A_{[k]}$ ($k \in \{1, 2, \ldots, p\}$), se poate vorbi despre existenţa limitei $\lim\limits_{x_k \to x_k^0} f_{[k]}(x_k)$ care ar fi să fie un element din $\mathbb{R}^q$ ce depinde parametric de celelalte variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$. S-ar putea apoi considera limita

$$\lim_{x_j \to x_j^0} \left(\lim_{x_k \to x_k^0} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_p) \right), k, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Aceasta va depinde de celelalte $p-2$ variabile ($i = \overline{1,p}$) diferite de x_j şi x_k. În fine, dacă se consideră limitele după toate variabilele x_i ($i = \overline{1,p}$), luate pe rând, atunci

$$(*) \lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\ldots \lim_{x_{i_p} \to x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ldots \right) \right), \text{ cu } \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} = \{1, 2, \ldots, p\},$$

va reprezenta un element din $\mathbb{R}^q$ care nu mai depinde de nici una dintre variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Definiţia 9.6 *Limita* $(*)$ *se numeşte* ***limita iterată a funcţiei*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ***în punctul*** $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A'$, ***în ordinea*** $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

Observaţie: Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se poate vorbi despre $p!$ limite iterate, într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$. De exemplu, pentru cazul $p = 3$, limitele iterate în cauză sunt următoarele:

$$l_{123} = \lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{132} = \lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right),$$

$$l_{213} = \lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{231} = \lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right),$$

$$l_{312} = \lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{321} = \lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right).$$

Acestea sunt limitele funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^q$ atunci când x_1, x_2 şi x_3 tind succesiv la x_1^0, x_2^0 şi x_3^0, în fiecare dintre cele 3! (adică 6) ordini (i_1, i_2, i_3) posibile.

Propoziţia 9.6 *Dacă, pentru o funcţie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *în* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A'$, *există atât o limită iterată* $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = \lim\limits_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim\limits_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\ldots \lim\limits_{x_{i_p} \to x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ldots \right) \right)$, *cât şi limita globală* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci* $l = l_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$.

Demonstraţie: Existenţa limitei $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ şi $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$) se interpretează prin aceea că, $\forall \varepsilon > 0$, există o vecinătate a lui x_0, fie ea notată cu U, astfel încât, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ din $(U \cap A) \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, avem $\|f(x_1, x_2, \ldots, x_p) - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ (unde $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^q}$ este o normă (de exemplu una euclidiană) pe $\mathbb{R}^q$. De aici, prin trecere la limită, succesiv după $x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \ldots, x_{i_1}$, la respectiv $x_{i_p}^0, x_{i_{p-1}}^0, \ldots$ şi $x_{i_1}^0$, obţinem, atâta timp cât există limita iterată $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, că are loc relaţia $\|l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, ceea ce denotă că, datorită arbitrarietăţii lui ε, avem $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = l$. ◀

Observaţii:

a) Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ are două limite iterate diferite într-un acelaşi punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, atunci f nu are limită globală în punctul respectiv.

b) Dacă există numai o parte dintre limitele iterate ale unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, nu înseamnă că există şi celelalte limite iterate. Cu atât mai puţin că există limita globală a lui f în x_0.

c) Chiar dacă toate limitele iterate există şi sunt egale, nu se poate afirma că există limita globală. De exemplu, funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$, are limitele iterate $l_{12} = \lim\limits_{x_1 \to 0} \left(\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) \right) = 0 = \lim\limits_{x_2 \to 0} \left(\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) \right) = l_{21}$, dar nu şi limita globală $\lim\limits_{(x_1,x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$, deoarece există şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ pentru care $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = l_1$ şi $f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = l_2 \neq l_1$.

d) Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, este posibil să nu existe limitele iterate într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi totuşi să existe limita globală, a lui f, în acel punct. Este, de exemplu, cazul funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,definită prin $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}$, $\forall\, (x_1, x_2) \in A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0$ şi $x_2 \neq 0\}$. Pentru această funcţie, nu există l_{12} şi nici l_{21}, deoarece nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$. În schimb, pe baza relaţiei $0 \leq |f(x_1, x_2)| = \left| (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1 + x_2|, \forall\, (x_1, x_2) \in A$, prin trecere la limită ($(x_1, x_2) \to (0,0)$), se obţine faptul că există $\lim\limits_{(x_1,x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2) = 0$.

Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pe lângă noţiunile de limită globală şi limită iterată într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, se mai poate vorbi despre *limită după o direcţie dată* şi *limită parţială* în x_0. În acest sens, are loc definiţia care urmează.

Definiţia 9.7 *a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde $A \neq \varnothing$, $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^p$. Se spune că funcţia f are* ***limită în*** x_0, ***după direcţia*** u, *dacă funcţia $t \mapsto f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})$, cu $t \in \{t \geq 0 \mid \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \in A\} \neq \varnothing$, are limită în $t = 0$, adică dacă există $l_{\mathrm{u}}^0 \in \mathbb{R}^q$ astfel încât:*

$$l_{\mathrm{u}}^0 = \lim_{t \searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}).$$

b) Când $u = \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, atunci $l_{\mathbf{e}_k}^0$ se numeşte ***limita parţială a funcţiei f în punctul*** x_0.

Nu pentru orice funcţie se poate defini limita într-un punct după o direcţie u sau $\mathbf{e}_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, deoarece mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \in A\}$, respectiv mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in A\}$, ar putea fi mulţimea vidă sau 0 ar putea să nu fie punct de acumulare pentru asemenea mulţimi, ori, pur şi simplu, să nu existe limita în cauză. Totuşi, dacă există limita globală, atunci se poate vedea că există şi limita după orice direcţie, în conformitate cu următorul rezultat.

Propoziţia 9.7 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \neq \varnothing$, $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^p$, aşa încât x_0 să fie punct de acumulare şi pentru mulţimea $A \cap \{\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \mid t \geq 0\} \neq \varnothing$. Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x})$ şi este egală cu $l \in \mathbb{R}^q$, atunci există şi $\lim\limits_{t \searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) = l_{\mathrm{u}}$ şi avem $l_{\mathrm{u}} = l$.*

Demonstraţie: Pentru orice şir $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, cu $t_n \to 0$, când $n \to \infty$, avem $\mathrm{x}_n = \mathrm{x}_0 + t_n\mathrm{u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{x}_0$. În plus, deducem că

$$l_{\mathrm{u}} = \lim_{t_n \to 0} f(\mathrm{x}_0 + t_n\mathrm{u}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$$

◀

În particular, pentru $\mathrm{u} = \mathbf{e}_k$, Propoziţia 9.7 se referă la raportul dintre limita globală a lui f în x_0 şi limita parţială, de rang k, a lui f în x_0, precizând că, dacă există $l = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$, atunci există şi $l_k = \lim_{t\searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k)$ şi $l = l_k$.

Observaţie: Existenţa limitei după una sau mai multe direcţii (chiar şi după toate direcţiile posibile) nu garantează existenţa limitei globale a unei funcţii într-un punct. Astfel, de exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. nu are, după cum am văzut deja, limită globală în punctul $(0,0)$, dar are limită după orice direcţie $\mathrm{u} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, căci:

$$\lim_{t\searrow 0} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) = \lim_{t\searrow 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{t^2(u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Când $\mathrm{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ sau $\mathrm{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$, limitele parţiale ale acestei funcţii în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ sunt egale cu 0.

Pentru funcţii reale de argument scalar $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ se poate vorbi şi despre noţiunea de ***limită laterală*** într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$. Mai exact, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este un ***punct de acumulare la stânga*** pentru A, adică, prin definiţie, punct de acumulare pentru mulţimea $A \cap \{x < x_0\}$, atunci spunem că f are ***limită la stânga în*** x_0, notată cu l_s (sau cu $f(x_0^-)$, ori $f(x_0 - 0)$) dacă $f_{|A\cap\{x<x_0\}}$ are limită globală în x_0, în sensul Definiţiei 9.1. Tot aşa, dacă x_0 este un ***punct de acumulare la dreapta*** pentru A, adică punct de acumulare al mulţimii $\{x \in A \mid x > x_0\}$, atunci se spune că f are limită la dreapta în x_0, notată cu l_d (sau cu $f(x_0^+)$ ori $f(x_0 + 0)$) dacă $f_{|A\cap\{x>x_0\}}$ are limită (globală) în x_0, în sensul aceleiaşi Definiţii 9.1. Evident, ţinând seama de Teorema 9.2 şi de definiţiile de imediat-mai-sus pentru limitele la dreapta şi la stânga (în cazul $p = 1$), se poate face caracterizarea limitei laterale a unei funcţii reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale şi prin intermediul şirurilor adecvat adaptate contextului.

Astfel, se poate arăta că l_s (respectiv l_d) $\in \mathbb{R}^q$ este limita la stânga (respectiv la dreapta) a unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ într-un punct x_0 de acumulare la stânga (respectiv la dreapta) a lui A dacă şi numai dacă, pentru orice şir strict crescător (respectiv descrescător) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$, cu $x_n \to x_0$, are loc $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^q} l_s$ (respectiv l_d).

De asemenea, tot pe baza Teoremei 9.2, ca şi în cazul funcţiilor reale scalar-scalare, se poate vedea că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ are limită (globală) într-un punct de acumulare x_0 a lui A dacă şi numai dacă există atât limita la dreapta (când este posibil), cât şi limita la stânga (tot când este posibil) a lui f în x_0 şi cele două limite laterale sunt egale.

În general, din punct de vedere practic, pentru funcţiile reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale (luate pe componente), calculul limitei într-un punct se realizează, mai ales în cazuri de nedeterminare, prin folosirea unor limite remarcabile (fundamentale), cum sunt următoarele:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e; \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a} \quad (0 < a \neq 1); \quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1; \quad \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e; \quad \lim_{t\to 0}\frac{a^t - 1}{t} = \ln a \quad (0 < a \neq 1); \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1; \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^r - 1}{t} = r \ (r \in \mathbb{R}); \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1.$$

Continuitatea funcţiilor

După cum am menţionat deja în introducere, continuitatea funcţiilor se leagă, conceptual, de noţiunea de structură topologică a spaţiilor implicate în definirea acelor funcţii. Mai precis, continuitatea unei funcţii într-un punct al mulţimii ei de definiţie sau pe o mulţime, parte proprie sau chiar improprie, dar nevidă, a mulţimii de definiţie în cauză, este strâns legată de existenţa limitei în respectivul punct (corespunzător, în toate punctele submulţimii vizate) şi de egalitatea valorii ei cu valoarea funcţiei în punct (respectiv, în punctele mulţimii considerate).

Definiţia 9.8 *Fie (X, τ_1) şi (Y, τ_2) două spaţii topologice, iar A o parte nevidă a lui X. De asemenea fie $f : A \to Y$, $x_0 \in A$ şi $\widetilde{A} \subseteq A$, cu $\widetilde{A} \neq \varnothing$.*

i) ***Funcţia*** *f se numeşte* ***continuă în*** *x_0 dacă există limita (globală) a lui f în x_0 şi valoarea acestei limite este egală cu $f(x_0)$ sau dacă x_0 este punct izolat al lui $\widetilde{A}$.*

ii) ***Funcţia*** *f se spune că este* ***continuă pe mulţimea*** *$\widetilde{A}$ dacă f este continuă în orice punct al lui $\widetilde{A}$.*

Evident, ţinând seama de toate cele precizate în legătură cu noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct, se pot da diverse caracterizări (în limbajul vecinătăţilor, în limbajul metricilor, în limbajul normelor, în limbajul " $\varepsilon - \delta$ ", în limbajul şirurilor) noţiunii de continuitate a lui f în $x_0 \in A$, prin înlocuirea lui l cu $f(x_0)$. În acelaşi timp, prin utilizarea lui $f(x_0)$ în locul lui l, acolo unde este cazul, şi rezultatele cuprinse în propoziţiile şi teoremele de până aici se pot reformula, în spiritul continuităţii lui f în x_0 (fie global, în raport cu toate variabilele implicate, fie după o direcţie, fie sub aspect de parţialitate).

Definiţia 9.9 *O funcţie $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ care nu este continuă într-un punct $x_0 \in A$ se numeşte* ***funcţie discontinuă în*** *x_0, iar punctul x_0 se numeşte* ***punct de discontinuitate*** *al lui f.*

Teorema 9.6 ***(de caracterizare a continuităţii unei funcţii pe un spaţiu metric)***
Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, iar $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) f este continuă pe X;

2) $\forall\, D \in \tau_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$;

3) $\forall\, F \subseteq Y$, cu $Y \setminus F \in \tau_{d_2} \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) \in \tau_{d_1}$;

4) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

Demonstraţie: 1) $\Rightarrow$ 4) Fie $A \in \mathcal{P}(X)$ şi $y \in f(\overline{A})$. Există atunci $x \in \overline{A}$ astfel ca $y = f(x)$. Cum $x \in \overline{A}$, potrivit Propoziţiei 6.7, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$ aşa încât $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} x$. Deoarece f este continuă pe X, deci şi în x, rezultă, în conformitate cu Teorema 9.2, că $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} f(x) = y$. Prin urmare, există un şir $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq f(A)$ aşa încât $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} y$, ceea ce înseamnă că $y \in \overline{f(A)}$. Astfel, incluziunea $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ este arătată.

4) $\Rightarrow$ 3) Fie F o mulţime închisă din (Y, d_2), adică $F = \overline{F}$ în Y şi fie $A = f^{-1}(F)$. Deoarece 4) are loc, avem:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} = \overline{F} = F.$$

De aici, rezultă că $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) = f^{-1}(F) = A$. Cum $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$, reiese că $A = \overline{A}$, ceea ce ne spune că $f^{-1}(F)$ este închisă în X.

3) $\Rightarrow$ 2) Fie $D \in \tau_{d_2}$. Atunci $Y \setminus D$ este închisă în Y şi, prin 3) , $f^{-1}(Y \setminus D)$ este închisă în X. În consecinţă, mulţimea $X \setminus f^{-1}(Y \setminus D)$, adică $X \setminus \left(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)\right)$, mai exact spus $f^{-1}(D)$, este deschisă în X.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie x_0 arbitrar din X. Pentru a vedea că f este continuă în x_0, fie $D = S_{d_2}\left(f(x_0), \varepsilon\right) \in \mathcal{V}\left(f(x_0)\right)$. Folosind 2), avem: $f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$. În plus, $x_0 \in f^{-1}(D)$ (căci $f(x_0) \in D$). Deci $f^{-1}(D) \in \mathcal{V}(x_0)$. Astfel, există o sferă deschisă $S_{d_1}(x_0, \delta)$, centrată în x_0, încât $S_{d_1}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(D)$. De aici, reiese că $f\left(S_{d_1}(x_0, \delta)\right) \subseteq D = S_{d_2}\left(f(x_0), \varepsilon\right)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◀

Definiţia 9.10 ***(Prelungirea prin continuitate a unei funcţii)***
Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A \cap A'$. De asemenea, fie $f : A \setminus \{x_0\} \to Y$, pentru care există $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in Y$. Atunci funcţia $\widetilde{f} : A \to Y$, definită prin

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \\ l, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases},$$

se numeşte ***prelungire a lui*** f ***la*** A, ***prin continuitate în punctul*** x_0.

Aceasta întrucât $\widetilde{f}$ este continuă în x_0, graţie faptului că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l = \widetilde{f}(x_0)$.

Definiţia 9.11 *a) O aplicaţie f a unui spaţiu metric (X, d_1) în alt spaţiu metric (Y, d_2) se numeşte* ***homeomorfism*** *sau* ***izomorfism topologic*** *dacă f este bijecţie, iar f şi f^{-1} sunt continue pe X şi respectiv Y (altfel spus, f este o* ***bijecţie bicontinuă****).*

b) Două spaţii metrice (X, d_1) şi (Y, d_2) se numesc ***homeomorfe*** *dacă există un homeomorfism $f : X \to Y$.*

Observaţie: Orice izometrie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$, adică orice bijecţie care păstrează distanţele este un homeomorfism de la X la Y, fiind, evident, bicontinuă. În particular, orice translaţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un homeomorfism, fiind o izometrie.

Definiţia 9.12 *Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$. Funcţia f se numeşte* ***uniform continuă*** *pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ încât } \forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in \widetilde{A}, \text{ cu } \|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon, \text{ are loc}$$

$$\|f(\mathrm{x}') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Propoziţia 9.8 *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uniform continuă pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ este, în mod necesar, continuă pe $\widetilde{A}$ şi deci continuă în fiecare punct din $\widetilde{A}$.*

Demonstraţie: Luând, în Definiţia 9.12, unul din punctele x' şi x'' fixate pe moment (de exemplu $x'' = x_0 \in \widetilde{A}$), deducem lesne că f este continuă în x_0. Cum x_0 este arbitrar fixat în $\widetilde{A}$, conchidem că f este continuă pe $\widetilde{A}$, fapt consemnat prin notaţia $f \in \mathcal{C}(\widetilde{A}; \mathbb{R}^q)$. ◀

Observaţii:

a) Reciproca Propoziţiei 9.8 nu este adevărată, întrucât există funcţii continue (pe o mulţime) care nu sunt uniform continue (pe respectiva mulţime).

b) Dacă o funcţie reală, cu valori vectoriale este uniform continuă pe o mulţime (parte a mulţimii ei de definiţie), atunci şi funcţiile ei componente sunt uniform continue pe acea mulţime. Nu şi reciproc.

Definiţia 9.13 *a) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **lipschitziană** dacă există $L \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq L\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, x', x'' \in A.$$

*b) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **hölderiană,** de ordin $\alpha \in (0, 1]$, dacă există $M \in \mathbb{R}_+^*$ aşa încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^{\alpha}, \forall\, x', x'' \in A.$$

Observaţie: Orice funcţie lipschitziană este o funcţie hölderiană de ordin $\alpha = 1$.

Teorema 9.7 *Orice funcţie hölderiană $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie: Folosind Definiţia 9.13, b), deducem că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{\,\varepsilon} = \left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} > 0$, astfel încât, $\forall\, x', x'' \in A$, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$, are loc relaţia:

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^{\alpha} < M\left(\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} = \varepsilon, \forall\, x', x'' \in A.$$

Deci f este uniform continuă pe A. ◀

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi

Teorema 9.8 *O funcţie continuă $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ transformă orice submulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$ într-o mulţime $f(\widetilde{A})$ compactă.*

Demonstraţie: Reamintindu-ne că, fiind în spaţii finit dimensionale, mulţimea $\widetilde{A}$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă, sau, în limbajul şirurilor, dacă orice şir din $\widetilde{A}$ conţine cel puţin un subşir convergent, cu limita în $\widetilde{A}$, deducem, pe baza continuităţii lui f, că imaginea prin f a respectivului subşir constituie un subşir al şirului $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent la imaginea prin f a limitei subşirului din $\widetilde{A}$, punct ce se află în mulţimea $f(\widetilde{A})$. Prin urmare, rezultă că, odată cu $\widetilde{A}$ şi mulţimea $f(\widetilde{A})$ este compactă în $\mathbb{R}^q$. ◀

În cazul în care $q = 1$, de aici, obţinem teorema lui Weierstrass şi anume:

Teorema 9.9 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ continuă, unde A este o mulţime compactă (în raport cu toplogia uzuală pe $\mathbb{R}^p$). Atunci funcţia f este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile.*

Demonstraţie: Prin aplicarea Teoremei 9.8, rezultă că $f(A)$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}$. Deci $f(A)$ este mărginită şi închisă (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$). Fie $m = \inf\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$ şi $M = \sup\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$. Cum $f(A)$ este închisă, reiese că m şi M aparţin lui $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ şi există $x_m, x_M \in A$ astfel încât $f(x_m) = m$ şi $f(x_M) = M$. ◀

Teorema 9.10 ***(Cantor)***

Dacă o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă pe o mulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$,atunci ea este uniform continuă pe $\widetilde{A}$.

Demonstraţie: Prin reducere la absurd, presupunem că f nu este uniform continuă pe $\widetilde{A}$, adică:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \text{ aşa încât } \forall\, \delta > 0, \exists\ x'_\delta, x''_\delta \in \widetilde{A}, \text{ cu } \|x'_\delta - x''_\delta\|_{\mathbb{R}^p} < \delta \text{ şi } \|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ sunt normele euclidiene uzuale. Atunci, pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\ x'_n, x''_n \in \widetilde{A}$, cu $\|x'_n - x''_n\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{1}{n}$ şi $\|f(x'_n) - f(x''_n)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0$. Cum $\widetilde{A}$ este compactă în $\mathbb{R}^p$, şirul $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ conţine un subşir convergent la un element $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Din relaţia $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\|_{\mathbb{R}^p} < \dfrac{1}{n_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, deducem că şirul $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ este convergent şi el la $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Astfel, în virtutea continuităţii lui f, obţinem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k})$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia $\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0 > 0$. Prin urmare, presupunerea iniţială este falsă, ceea ce înseamnă că, de fapt, f este uniform continuă pe mulţimea compactă $\widetilde{A}$. ◀

Un alt rezultat important relativ la aplicaţiile continue pe o mulţime este următorul, prezentat aici cu o schiţă de demonstraţie.

Propoziţia 9.9 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă pe A şi $B \subseteq A$ o mulţime conexă. Atunci $f(B)$ este conexă în $\mathbb{R}^q$.*

Demonstraţie: Presupunând, prin absurd, că $f(B)$ nu este conexă, există atunci două mulţimi nevide şi deschise din $\mathbb{R}^q$, D_1 şi D_2, astfel încât $D_1 \cap D_2 \cap f(B) = \varnothing$, $D_1 \cap f(B) \neq \varnothing$, $D_2 \cap f(B) \neq \varnothing$ şi $f(B) \subseteq D_1 \cup D_2$. Cum f este continuă pe A, mulţimile $\widetilde{D}_1 = f^{-1}(D_1)$ şi $\widetilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în $\mathbb{R}^p$. În plus, $\widetilde{D_1} \neq \varnothing$, $\widetilde{D_2} \neq \varnothing$, $\widetilde{D_1} \cap \widetilde{D_2} \cap B = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap B = f^{-1}(D_1 \cap D_2 \cap f(B)) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\widetilde{D}_1 \cap B \neq \varnothing$, $\widetilde{D}_2 \cap B \neq \varnothing$ şi $B \subseteq f^{-1}(D_1 \cup D_2) \subseteq f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = \widetilde{D_1} \cup \widetilde{D_2}$. De aici, rezultă că B nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunţ. Prin urmare, $f(B)$ este, în mod necesar, conexă. ◀

Propoziţia 9.10 *Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o aplicaţie liniară, atunci f este continuă.*

Demonstraţie: Cum f este liniară de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$, considerând raportarea la bazele canonice din $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, se poate spune că există o matrice $A \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$ aşa încât $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$. De aici, prin utilizarea normelor euclidiene pe $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, deducem că avem $\|f(\mathrm{x})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$, unde $\|A\| = \left\|(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}}\right\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{p,q} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. În consecinţă, are loc relaţia

$$\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^p,$$

în virtutea căreia rezultă că f este continuă (chiar uniform continuă) pe $\mathbb{R}^p$. ◀

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. VI)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. IV)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

3. C-tin Drăguşin, Octav Olteanu, Marinică Gavrilă - *Analiză matematică (cap. V, vol I)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (cap. 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Ch. 5.2)*, Trinity University, 2009.

7. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

Cursul 10

Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor. Derivate şi diferenţiale. Formule de calcul diferenţial.

Printre conceptele fundamentale ale matematicii, implicate fie în stabilirea vitezei de variaţie a stării unor procese din realitatea fizică, fie în problema exprimării (aproximării) locale a unor funcţii neliniare prin aplicaţii liniare, fie în chestiuni geometrice de tangenţă, se numără şi cele relative la derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor, între care se disting noţiunile de derivată şi diferenţială. Reamintind aceste concepte în cazul funcţiilor reale scalar-scalare, prezentăm aici şi corespondentele lor privitoare la funcţii de argument vectorial, cu valori scalare sau vectoriale.

Pentru început, relativ la funcţii reale de o singură variabilă şi cu valori scalare, menţionăm următoarea definiţie:

Definiţia 10.1 *a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. De asemenea, fie $x_0 \in A \cap A'$ (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$). Funcţia f se numeşte* ***derivabilă în*** *x_0 dacă există şi este din $\mathbb{R}$ (nu din $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$)*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Această limită, notată cu $f'(x_0)$, poartă denumirea de ***derivată a lui*** *f* ***în*** *x_0. În loc de $f'(x_0)$, se mai foloseşte notaţia $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.*

Dacă f este derivabilă în orice punct al unei mulţimi $\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A$, spunem că f este derivabilă pe $\widetilde{A}$.

b) Fie $\varnothing \neq A_1 \subseteq A$ mulţimea punctelor în care $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă. Funcţia $x \longrightarrow f'(x)$, $x \in A_1$ se numeşte ***derivata lui*** *f şi se notează, firesc, cu f' (sau $\dfrac{df}{dx}$).*

c) Când x_0 este punct interior sau cel mai mare (respectiv cel mai mic) element al mulţimii nevide $A \subseteq \mathbb{R}$, se defineşte ***derivata la stânga*** *(respectiv* ***la dreapta****)* ***a funcţiei*** *$f : A \to \mathbb{R}$* ***în punctul*** *x_0 ca fiind, ori de câte ori există, limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$), notată cu $f'_s(x_0)$ (respectiv $f'_d(x_0)$). Dacă există atât $f'_s(x_0)$, cât şi $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, se spune că f are* ***derivată în*** *x_0.*

Observaţii:

i) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă derivatele sale laterale (la stânga şi la dreapta) în x_0, adică $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$ există, sunt finite şi egale între ele. Atunci: $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

ii) Spre eliminarea oricărei ambiguităţi de terminologie care s-ar putea produce în raport cu noţiunea de derivată parţială din cazul funcţiilor de argument vectorial, elementele introduse prin Definiţia 10.1 se însoţesc, adeseori, de epitetul "*ordinar*".

Definiţia 10.2 *Spunem că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este* ***de clasă*** *$\mathcal{C}^1(A)$ dacă f este derivabilă pe A şi are derivata f' continuă pe A.*

Observaţie: Când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este doar continuă pe A, spunem că $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Pentru simplitate, în dese rânduri, în locul notaţiei $\mathcal{C}^0(A)$, se foloseşte notaţia $\mathcal{C}(A)$.

Propoziţia 10.1 *Are loc relaţia $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Cu alte cuvinte, orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ care este derivabilă pe A este şi continuă pe A. Nu şi reciproc.*

Demonstraţie: Prin ipoteză, pentru orice $x_0 \in A$, există şi este finită derivata lui f în x_0, adică $f'(x_0)$, care, în conformitate cu Definiţia 10.1 a), este valoarea limitei $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Cum, $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, avem $f(x) = (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, deducem că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală chiar cu $f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. Arbitrarietatea lui x_0 în A ne dă dreptul să conchidem că f este continuă pe A. Deci $f \in \mathcal{C}(A)$, din moment ce, iniţial, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Şi aceasta pentru orice f din $\mathcal{C}^1(A)$. În concluzie, avem $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Exemplul clasic al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, care este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $\mathbb{R}^*$, ne asigură de faptul că incluziunea din enunţ este strictă. ◀

Pe baza Definiţiei 10.1, prin respectarea unor elementare operaţii de algebră şi de analiză matematică, se obţin reguli de calcul diferenţial ordinar, între care şi regula lui Leibniz (de derivare a produsului de două funcţii) sau regula "lanţului" (de derivare a compusei a două funcţii). Reunite în cuprinsul teoremei pe care o dăm aici fără demonstraţie, iată aceste reguli:

Teorema 10.1 *a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f şi g sunt derivabile pe o submulţime (nevidă) $\widetilde{A}$ a lui A, atunci funcţiile $f + g$, $f - g$, αf, $f \cdot g$ şi $\dfrac{f}{g}$ (când $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \widetilde{A}$) sunt derivabile pe $\widetilde{A}$ şi, pe $\widetilde{A}$, avem:*

$$(f+g)' = f' + g'; (\alpha f)' = \alpha f'; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile (fiecare pe mulţimea ei de definiţie). Atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă pe A şi, pe A, are loc formula:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

c) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă pe A şi $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in A$, atunci funcţia inversă $f^{-1} : B \to A$ este derivabilă pe B şi, pe B, are loc relaţia:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Observaţie: Amintindu-ne că derivatele funcţiilor elementare de bază se calculează potrivit următoarelor formule

$$(c)' \equiv \frac{d}{dx}(c) = 0, \forall\, c \in \mathbb{R}; \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D_\alpha \subseteq \mathbb{R};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \forall\, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\sin x)' = \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\cos x)' = -\sin x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

se pot utiliza regulile din Teorema 10.1 spre a determina derivatele unor funcţii care se obţin din funcţii elementare prin operaţii algebrice sau prin operaţii de compunere. Astfel, redescoperim formulele

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall\, x \in (-1,1); \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall\, x \in (-1,1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}; \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

precum şi relaţia

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right),$$

adevărată atunci când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe A.

Ţinând seama de Definiţia 10.1 şi de regulile de calcul pentru limite de funcţii cu valori vectoriale (v. Cursul 9), ne dăm seama că, în cazul funcţiilor reale de argument scalar şi cu valori în $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$), noţiunile de derivată şi de derivabilitate se pot defini pe baza următorului rezultat.

Propoziţia 10.2 *Funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, cu $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ (respectiv pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$) dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţile componente $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$). În plus, are loc relaţia:*

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$$

(respectiv $f' = (f_1', f_2' \ldots, f_q')$, pe $\widetilde{a}$).

Demonstraţie: $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Deducem de aici că există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, notată cu $f'(x_0)$ şi denumită derivata lui f în x_0, dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$. Cu alte cuvinte, f este derivabilă în x_0 şi avem egalitatea $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$ dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0. Este evident acum că $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ este derivabilă pe $\widetilde{A}$ dacă şi numai dacă $\forall\, k = \overline{1,q}$, f_k este derivabilă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţie: Un rezultat cu totul analog Propoziţiei 10.2 poate fi formulat şi demonstrat atunci când, în locul lui $f'(x_0)$ şi respectiv $f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0)$, se consideră derivatele corespunzătoare la stânga (sau cele la dreapta). Astfel, funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ va fi derivabilă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0. Evident că, şi într-un asemenea caz, al funcţiilor $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, putem zice că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă $f_s'(x_0)$, adică derivata la stânga a lui f în x_0, există în $\mathbb{R}^q$ (dată fiind de vectorul cu componentele $(f_1)_s'(x_0), (f_2)_s'(x_0), \ldots, (f_q)_s'(x_0)$, împreună cu $f_d'(x_0)$ (derivata la dreapta a lui f în x_0, adică vectorul $((f_1)_d'(x_0), (f_2)_d'(x_0), \ldots, (f_q)_d'(x_0))$ şi $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. Valoarea comună a acestor derivate laterale este tocmai $f'(x_0)$.

Prin utilizarea Propoziţiei 10.2 şi a Teoremei 10.1, se deduc lesne reguli de calcul pentru derivatele (de ordinul I) ordinare ale unor funcţii reale, scalar-vectoriale, cum sunt regulile (sau formulele) puse în evidenţă de teorema ce urmează:

Teorema 10.2 *Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, $g : A \to \mathbb{R}^q$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$), atunci tot derivabile în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$) sunt şi funcţiile $\alpha f + \beta g$, $\varphi \cdot f$, $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle$ (unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă un produs scalar pe $\mathbb{R}^q$), având loc formulele:*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{)},$$

$$(\varphi \cdot f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{) şi}$$

$$(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle, \text{ pentru } x = x_0 \text{ (respectiv } \forall\, x \in \widetilde{A}).$$

În plus, dacă $\psi : B \subseteq \mathbb{R} \to A$ este derivabilă pe $\widetilde{B} \subseteq B$, atunci funcţia $f \circ \psi = (f_1 \circ \psi, f_2 \circ \psi, \ldots, f_q \circ \psi) : B \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă pe $\widetilde{B}$ şi are loc relaţia:

$$(f \circ \psi)'(x) = \left(\psi' \cdot \left(f' \circ \psi\right)\right)(x) = \psi'(x) \cdot \left(f_1'(\psi(x)), f_2'(\psi(x)), \ldots, f_q'(\psi(x))\right), \forall\, x \in \widetilde{B}.$$

Referindu-ne acum la cazul funcţiilor reale de argument vectorial, este de constatat că, deoarece raportul $\dfrac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}$ nu are sens, nu se poate vorbi despre $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}$ şi deci nu se poate introduce noţiunea de derivată în x_0 prin procedura folosită la funcţiile de argument scalar. Inconvenientul poate fi totuşi surmontat pe una din cele două căi sugerate, pe de o parte, de observaţia potrivit căreia, în cazul unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a unui punct $x_0 \in A$, dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avem, pe de-o parte, relaţia
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$ şi, pe de altă parte, următorul rezultat:

Propoziţia 10.3 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ aşa încât $A \neq \varnothing$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in A$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este derivabilă în x_0;

ii) există o aplicaţie liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Demonstraţie: Dacă f este derivabilă în x_0, atunci există derivata $f'(x_0)$, ca element din $\mathbb{R}$. Prin intermediul ei, există aplicaţia liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită potrivit relaţiei $T_0(h) = f'(x_0) \cdot h$, astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right) = 0.$$

Reciproc, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

atunci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(h) = t \cdot h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$ şi, ca atare, obţinem:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - t\right) = 0.$$

Rezultă deci că există $f'(x_0) = t$ şi $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, adică f este derivabilă în x_0. ◀

Folosind prima dintre căile menţionate mai înainte, ajungem la noţiunea de G-diferenţială (altfel spus, ***diferenţială Gâteaux***), în conformitate cu următoarea definiţie:

Definiţia 10.3 *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde D este o mulţime deschisă în topologia uzuală pe $\mathbb{R}^p$. De asemenea, fie $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, astfel încât $\|\mathrm{v}\|_e = 1$, $\|\cdot\|_e$ însemnând norma euclidiană pe $\mathbb{R}^p$.*

*Dacă există $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} \in \mathbb{R}^q$, atunci această limită, notată îndeobşte cu $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v})$ (sau, echivalent, cu $\dfrac{df}{d\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$ ori cu $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$), se numeşte **G-diferenţiala (diferenţiala Gâteaux a) lui** f **în punctul** x_0, **după versorul (direcţia)** v sau, încă, **derivata direcţională, după (direcţia)** v, **a funcţiei** f, **în punctul** x_0.*

Observaţie: Întrucât, când există $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$, avem

$$f'(\mathrm{x}_0; s\mathrm{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0 + t \cdot s\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = s \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0 + t \cdot s\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{ts} = sf'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}), \forall\, s \in \mathbb{R}^*$$

şi

$$f'(\mathrm{x}_0; 0 \cdot \mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0 + t \cdot \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p} = 0 \cdot f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}),$$

se poate spune că aplicaţia $\psi : D \times S_{d_e}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}; 1) \to \mathbb{R}^q$, definită prin $\psi(\mathrm{x}_0, \mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0, \mathrm{v})$, este omogenă în raport cu v. Ca atare, G-diferenţiala lui f în x_0, după direcţia v, are sens chiar şi atunci când v nu este numaidecât versor, putându-se deci renunţa, în Definiţia 10.3, la precizarea $\|v\|_e = 1$.

Definiţia 10.4 *Fie f, D şi x_0 ca în definiţia 10.3.*

*a) Dacă există $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ pentru orice $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, atunci spunem că funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este **G-diferenţiabilă (diferenţiabilă Gâteaux) în** $\mathrm{x}_0 \in D$.*

b) Dacă aplicaţia $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p \longmapsto f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ este liniară (nu numai omogenă) şi continuă, atunci elementul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, notat cu $f'(\mathrm{x}_0)$ şi definit prin relaţia

$$f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$$

*se numeşte **G-derivata** (sau **derivata Gâteaux a) funcţiei** f **în punctul** x_0, iar f se numeşte **G-derivabilă (derivabilă Gâteaux** sau **derivabilă direcţional) în** x_0 .*

*c) Spunem că f este **G-diferenţiabilă (diferenţiabilă Gâteaux pe o mulţime** $\widetilde{D} \subseteq D$ dacă $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v})$ există (în $\mathbb{R}^q$) pentru orice $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$ şi orice $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$. Analog, dacă derivata Gâteaux $f'(\mathrm{x}_0)$ există în orice punct $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$, zicem că funcţia f este **G-derivabilă (derivabilă Gâteaux) pe mulţimea** $\widetilde{D}$.*

Observaţie: Mulţimea funcţiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care sunt G-diferenţiabile (respectiv G-derivabile) într-un punct din D sau pe o submulţime a lui D este nevidă, deoarece din această mulţime fac parte funcţiile identic-constante ($f(\mathrm{x}) = c \in \mathbb{R}^q$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$), care au G-diferenţiala egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, în orice punct din D, după orice direcţie v din $\mathbb{R}^p$ (respectiv, au G-derivata egală cu elementul nul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$. De asemenea, aceleiaşi mulţimi îi aparţin şi funcţiile liniare $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru care avem:

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0) + tf(\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = f(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{x}_0 \in D, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Deci, în acest caz, $f'(\mathrm{x}_0) = f$, $\forall\, \mathrm{x}_0 \in D$.

Definiţia 10.5 *a) Dacă funcţia* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este G-derivabilă într-un punct* x_0 *al mulţimii deschise* D*, atunci elementul* $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$ *defineşte* ***gradientul lui*** f ***în*** x_0*, care se notează cu* $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ *şi se citeşte* ***"nabla"*** f ***în*** x_0 *(sau se mai notează cu* $gradf(\mathrm{x}_0)$*), pe baza relaţiei*

$$\big(f'(\mathrm{x}_0)\big)(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

unde $\langle \cdot,\cdot\rangle_e$ *reprezintă produsul scalar euclidian pe* $\mathbb{R}^p$*.*

(Aşadar, $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ *este un vector din* $\mathbb{R}^p$ *definit prin intermediul relaţiei sus-menţionate).*

b) Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *este G-derivabilă într-un punct* x_0 *din* D*, atunci matricea asociată aplicaţiei liniare* $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ *se numeşte* ***matricea jacobiană a lui*** f ***în*** x_0*, având drept linii tocmai gradienţii, în* x_0*, ai componentelor lui* f*. Notată cu* $J_f(\mathrm{x}_0)$*, această matrice este dată astfel de relaţia*

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(\mathrm{x}_0) \\ (\nabla f_2)(\mathrm{x}_0) \\ \vdots \\ (\nabla f_q)(\mathrm{x}_0) \end{pmatrix},$$

în care $f_1, f_2, \ldots, f_q$ *sunt componentele lui* f*.*

c) În cazul când $p = q \geq 2$*, determinantul matricii jacobiene* $J_f(\mathrm{x}_0)$ *(adică* $\det(J_f(\mathrm{x}_0))$*) se numeşte* ***jacobianul lui*** f ***în*** x_0 *sau, echivalent,* ***determinantul funcţional*** *al funcţiilor* $f_1, f_2, \ldots, f_q$*, în raport cu variabilele independente* $x_1, x_2, \ldots, x_q$ *(componentele unui vector generic* $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)^T$ *din* D*), calculat în* x_0*. Acesta din urmă se notează, uzual, prin:*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q)}(\mathrm{x}_0).$$

d) În particular, când $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$*,* $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$*, G-diferenţiala* $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k)$ *(unde* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in D$*), dată de limita*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)}{t},$$

se numeşte ***derivata parţială, de ordinul I, a funcţiei*** $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$*,* ***în raport cu*** x_k *(componenta de rang* k *a argumentului vectorial* $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D$ *pentru* f*),* ***în punctul*** $x_0 \in D$ *şi se notează cu* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$*. Când există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) \in \mathbb{R}^q$*, pentru* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$*, cu* $f_j : D \to \mathbb{R}$*,* $\forall\, j = \overline{1,q}$*, avem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)\right),$$

funcţia f *numindu-se* ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***în punctul*** x_0*.*

Funcţia f *se numeşte* ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***pe o mulţime*** $\widetilde{D} \subseteq D$*, dacă există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$*,* $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{D}$*. Într-o atare situaţie, funcţia* $\mathrm{x} \in \widetilde{D} \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$*, notată cu* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$*, se numeşte* ***derivata parţială a lui*** f***, de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***pe mulţimea*** $\widetilde{D}$*.*

Observaţii:

i) Pe baza formulei, cu limită, pentru $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ (din Definiţia 10.5), se poate spune că derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ este, de fapt, derivata în x_k^0 a funcţiei de o variabilă scalară

$$x_k \longmapsto f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0),$$

adică funcţia parţială $f_{[k]}$, corespunzătoare lui f, în punctul $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$. Astfel, calculul derivatei parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ poate fi redus, practic, la calculul derivatei (de ordinul I) pentru o funcţie de o singură variabilă, anume x_k, celelalte variabile independente din componenţa lui x (adică $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$) figurând ca nişte constante în respectivul proces de calcul.

ii) Când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o mulţime $\widetilde{D} \subseteq D$, în raport cu orice variabilă x_k, iar funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^q$ sunt continue pe $\widetilde{D}$, spunem că f este ***de clasă*** $\mathcal{C}^1$ ***pe*** $\widetilde{D}$ şi consemnăm acest fapt prin: $f \in \mathcal{C}^1(\widetilde{D})$.

iii) În cazul în care $q = 1$ şi, pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, se poate vorbi despre relaţia

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p, \mathrm{x}_0 \in D,$$

luând $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k\rangle_e, \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

În virtutea acestui fapt şi a celui potrivit căruia reprezentarea oricărui vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\} \subseteq \mathbb{R}^p$, este $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k \mathbf{e}_k$, obţinem:

$$\langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e = \sum_{k=1}^{p} \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k\rangle_e = \sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) =$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right), \mathrm{v} \right\rangle, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

De aici, deducem că, ori de câte ori există, gradientul lui f în x_0 este vectorul din $\mathbb{R}^p$ cu componentele $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, $k = \overline{1, p}$, adică:

$$(\nabla f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right).$$

iv) Pe baza ultimei formule şi a celei care dă matricea jacobiană $J_f(\mathrm{x}_0)$, în cazul în care $q \geq 2$, deducem că, pentru funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, când este G-derivabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}},$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sunt componentele lui f.

v) Ţinând seama de precizările făcute la punctul i) al observaţiei de faţă, putem vedea că regulile de calcul cu G-diferenţiale (şi apoi, în particular, cu gradienţi şi cu derivate parţiale de ordinul I), se bazează pe următoarele relaţii:

$$\begin{aligned}
(\alpha f+\beta g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= \alpha f'(x_0;\mathrm{v})+\beta g'(x_0;\mathrm{v}), \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\\
&\ \forall f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g:D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\ \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v;}\\
(f\cdot g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})+f(\mathrm{x}_0)\cdot g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),\\
&\ \forall f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g:D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\ \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v;}\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= \frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)}\left[g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})-g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\cdot f(\mathrm{x}_0)\right],\\
&\ \forall f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g:D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\ \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v.}
\end{aligned}$$

În general, raportul dintre G-diferenţiabilitatea unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in D$, după o direcţie $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, nu implică, ca în cazul $p = q = 1$, continuitatea globală a lui f în x_0, ci doar continuitatea pe direcţia v, în x_0, potrivit următorului rezultat.

Teorema 10.3 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, v, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f are derivată direcţională (G-diferenţială), după v, în x_0, anume $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$, atunci f este continuă, pe direcţia v, în punctul x_0.*

Demonstraţie: În conformitate cu Definiţia 10.3, există $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, $\forall\, t \in \mathbb{R}^*$ cu $|t| < \delta_\varepsilon$, avem:

$$\left\| \frac{1}{t}\left(f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)\right)-f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \right\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Atunci:

$$\|f(\mathrm{x}_0+tv)-f(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \le \left\|f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)-tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q}+\left\|tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q} \le$$

$$\le |t|\left(\varepsilon+\left\|f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q}\right), \forall\, |t| < \delta_\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $\lim\limits_{t\to 0} f(\mathrm{x}_0+tv) = f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0, pe direcţia v. ◀

În particular, când Teorema 10.3 are loc pentru $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k$, se poate spune doar că derivabilitatea parţială, de ordinul I, a funcţiei f în punctul x_0, în raport cu x_k, implică continuitatea "parţială" (pe direcţia $\mathbf{e}_k$), nu numaidecât continuitatea globală, a lui f în x_0. Continuitatea globală se poate obţine în condiţiile următoarei teoreme.

Teorema 10.4 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă există o vecinătate $V \subseteq D$, a punctului x_0, pe care f este derivabilă parţial, de ordinul I , iar funcţiile $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ sunt, $\forall\, k = \overline{1,p}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, mărginite pe V, atunci f este continuă, în sens global, în punctul x_0.*

Demonstraţie: Continuitatea lui $f=(f_1,f_2,\ldots,f_q)$ în punctul $\mathrm{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)$ este asigurată de continuitatea fiecăreia dintre componentele f_k ale lui f în x_0. Este suficient deci să arătăm că există $\lim\limits_{x\to x_0} f_j(\mathrm{x})=f_j(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, j=\overline{1,q}$. În acest sens, prin aplicarea teoremei lui Lagrange (de medie) pentru funcţii de o singură variabilă reală şi prin folosirea ipotezei de mărginire, pe V, a funcţiilor $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ ($k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$), constatăm că, pentru orice $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in V$, există $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$, cu ξ_k între x_k şi x_k^0, $\forall\, k=\overline{1,p}$, astfel încât:

$$\begin{aligned}
\left|f_j(x_1,x_2,\ldots,x_p)-f_j(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)\right| &\le \left|f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_p)-f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_p^0)\right|+\\
&+\left|f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_p^0)-f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{p-2},x_{p-1}^0,x_p^0)\right|+\cdots\\
&+\left|f_j(x_1,x_2^0,\ldots,x_p^0)-f_j(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)\right|=\\
&=\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_p}(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},\xi_p)\right|\left|x_p-x_p^0\right|+\\
&\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_{p-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{p-2},\xi_{p-1},x_p^0)\right|\left|x_{p-1}-x_{p-1}^0\right|+\cdots\\
&+\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi_1,x_2^0,\ldots,x_p^0)\right|\left|x_1-x_1^0\right|\le M_j\sum_{k=1}^{p}\left|x_k-x_k^0\right|,
\end{aligned}$$

unde $M_j=\max\limits_{1\le k\le p}\{\sup\limits_{x\in V}\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|\}$. De aici, rezultă clar că f_j este continuă global în x_0, $\forall\, j=\overline{1,q}$. ◀

Observaţie: O condiţie suficientă pentru existenţa unei vecinătăţi $V\subseteq D$, a punctului x_0, pe care funcţia f, derivabilă parţial, de ordinul I, pe D să aibă derivatele parţiale, ale tuturor componentelor sale, mărginite, ar fi continuitatea în x_0 a respectivelor derivate.

Diferenţiala şi diferenţiabilitatea Fréchet a unei funcţii reale, într-un punct sau pe o mulţime

Utilizând acum sugestia oferită de Propoziţia 10.3, putem introduce aici noţiunile de diferenţiabilitate şi diferenţială Fréchet, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 10.6 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar $f:D\to\mathbb{R}^q$.*

*a) Spunem că funcţia f este **diferenţiabilă Fréchet într-un punct** $\mathrm{x}_0\in D$, dacă există o aplicaţie liniară $T:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ şi o funcţie $\alpha:D\to\mathbb{R}^q$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\alpha(\mathrm{x})=\alpha(\mathrm{x}_0)=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi*

$$f(\mathrm{x})=f(\mathrm{x}_0)+T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p},\forall\,\mathrm{x}\in D,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ desemnează o normă (de exemplu, cea euclidiană) pe $\mathbb{R}^p$, iar $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^q$.

*În acest caz, aplicaţia $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ se numeşte **diferenţiala (derivata) Fréchet, de ordinul I, a funcţiei f, în punctul** x_0, depinde de x_0 şi se notează, convenţional, cu $(df)(\mathrm{x}_0)$.*

*b) Spunem că f este **diferenţiabilă Fréchet pe o mulţime** $\widetilde{D}\subseteq D$ dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă, în sensul de la a) în orice punct $\mathrm{x}_0\in\widetilde{D}$.*

Observaţii: Pe baza Definiţiei 10.6 a), deducem că, într-o altă exprimare, echivalentă cu cea din cadrul definiţiei menţionate, putem spune că f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$$

sau, încă, echivalent, există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0_{\mathbb{R}}.$$

O altă modalitate (echivalentă cu cea din Definiţia 10.6 a)) de a exprima faptul că f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, este cea care afirmă că dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ şi, odată cu T, o aplicaţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, definită prin

$$\alpha(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}, & \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0 \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, & \mathrm{x}=\mathrm{x}_0, \end{cases} \quad \mathrm{x}\in D,$$

astfel încât α să fie continuă în x_0 şi, prin asta, să aibă loc relaţia

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|, \forall\, \mathrm{x}\in D,$$

atunci f se poate numi Fréchet-diferenţiabilă în x_0.

Propoziţia 10.4 *Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$ este unică.*

Demonstraţie: Admiţând că $(df)(\mathrm{x}_0)$ nu ar fi unică, ar exista T_1 şi $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0\ (\in\mathbb{R}).$$

Atunci, am avea $(\forall\, \mathrm{x}\in D, \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\|T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \|(f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))-(f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))\|_{\mathbb{R}^q} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} + \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \xrightarrow[\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0]{} 0. \end{aligned}$$

De aici, luând $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}$, cu $\mathrm{u}\in\mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$ şi $t\in\mathbb{R}^*$, ar rezulta:

$$0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\|T_1(t\mathrm{u})-T_2(t\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{|t|\,\|T_1(\mathrm{u})-T_2(\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{|t|\,\|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}.$$

Prin urmare, am avea: $T_1(\mathrm{u}) = T_2(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}\in\mathbb{R}^p\setminus\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$. Dar cum $T_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = T_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, ajungem, în definitiv, la concluzia:$T_1 = T_2$. ◀

Cu privire la mulţimea funcţiilor $f : D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ care sunt diferenţiabile Fréchet (într-un punct din D sau pe o mulţime $\widetilde{D}\subseteq D$), se poate spune că ea nu este vidă, deoarece cel puţin funcţiile identic constante şi funcţiile liniare aparţin respectivei mulţimi, în baza următorului rezultat:

Propoziţia 10.5 *a) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu D mulţime deschisă, este o funcţie constantă, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$.*

b) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie liniară, atunci f este diferenţiabilă Fréchet pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$.

Demonstraţie: a) Pentru $f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}$, cu $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^q$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\mathrm{c}-\mathrm{c}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

b) pentru $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

Deci, există $(df)(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, \mathrm{x}_0 \in D$. ◀

Un alt rezultat, afirmând, în esenţă, că diferenţiala unei funcţii $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, într-un punct x_0, are, drept componente, diferenţialele $(df_j)(\mathrm{x}_0)$, $j = \overline{1,q}$, este următorul:

Teorema 10.5 *Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, x_0 un punct din D şi o funcţie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $f_j : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, j = \overline{1,q}$. Funcţia f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale - $f_1, f_2, \ldots, f_q$ - sunt diferenţabile Fréchet în x_0. În plus, are loc egalitatea:*

$$(df)(\mathrm{x}_0) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)),$$

unde $(df_j)(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall\, j = \overline{1,q}$.

Demonstraţie: Potrivit Definiţiei 10.6 şi observaţiei ce o succedă, f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, dacă şi numai dacă există $T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, cu $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, precum şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D.$$

Pe componente, aceasta înseamnă că, $\forall\, k = \overline{1,q}$, avem:

$$f_k(\mathrm{x}) = f_k(\mathrm{x}_0) + T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha_k(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D,$$

cu $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha_k(\mathrm{x}_0) = \alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,q}$. Prin urmare, se poate spune că f_k este diferenţibilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = T_k$, $\forall\, k = \overline{1,q}$. În plus, are loc relaţia:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)).$$

Reciproc, dacă fiecare funcţie f_k ($k = \overline{1,q}$) este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci există $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall\, k = \overline{1,q}$ şi $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, cu $\alpha_k(\mathrm{x}) = \dfrac{(f_k(\mathrm{x}) - f_k(\mathrm{x}_0) - T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, $\alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$ şi $\alpha(\mathrm{x}) = (\alpha_1(\mathrm{x}), \alpha_2(\mathrm{x}), \ldots, \alpha_q(\mathrm{x}))$. Or, aceasta înseamnă că f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, cu $(df)(\mathrm{x}_0) = T$. ◀

Propoziţia 10.6 *Dacă D este o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, x_0 un punct din D, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci f este continuă (global) în x_0.*

Demonstraţie: Într-adevăr, dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ şi $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D.$$

De aici, ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} T(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, deducem clar că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ există şi este egală cu $f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◀

Observaţie: Propoziţia 10.6 ne arată că necesară diferenţiabilităţii lui f în x_0 este continuitatea funcţiei f în x_0, în sens global. Nu însă şi suficientă.

Legătura dintre diferenţiala Fréchet şi derivata (diferenţiala) Gâteaux este, în parte, dată de următoarea teoremă.

Teorema 10.6 *Fie $\varnothing \neq D$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă Gâteaux în x_0 şi are loc relaţia:*

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

(Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$ şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$).

Demonstraţie: Deoarece f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, cu F-diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$, există $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$. Atunci:

$$\frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \frac{((df)(\mathrm{x}_0))(t\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}{t} =$$

$$= ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\frac{|t|}{t}, \forall\, t \in \mathbb{R}^*, |t| < r, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p, \|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p} = 1.$$

Prin urmare, există $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u})$. De aici, mai departe, avem:

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = f'\left(\mathrm{x}_0; \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot f'\left(\mathrm{x}_0; \frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) =$$

$$= \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}.$$

Dar cum şi $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})$, putem conchide că există $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ (deci f este G-diferenţiabilă în x_0) şi

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$ (deci f este G-derivabilă în x_0) şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$. ◀

Observaţii: Pe baza acestei teoreme şi a faptului că $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, putem spune că $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k)$, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Astfel, $\forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k$, avem

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\sum_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} v_k\,((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e ,$$

când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

În cazul unei funcţii vectoriale $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, am avea

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = (J_f((\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le k \le p}} (\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

ori de câte ori D este o mulţime deschisă, iar f este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$. De aici, deducem că, în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^p$ şi respectiv $\mathbb{R}^q$, matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este tocmai Jacobiana $J_f(\mathrm{x}_0)$.

Dacă, în continuare, ţinem seama de faptul că aplicaţiile de proiecţie $pr_k : D \to \mathbb{R}$, definite prin $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, $\forall\, k = \overline{1,p}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sunt liniare şi deci, prin aplicarea Propoziţiei 10.5, sunt diferenţiabile Fréchet pe D, cu $d(pr_k) = pr_k$, $\forall\, k = \overline{1,p}$, atunci, ori de câte ori funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem:

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) v_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) pr_k(\mathrm{v}) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) pr_k \right)(\mathrm{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) d(pr_k) \right)(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Cum $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, diferenţiala $d(pr_k)$, care este independentă de punctul în care o calculăm, se notează, prin convenţie, cu dx_k, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Astfel găsim formula de calcul următoare:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) dx_k.$$

Făcând uz de vectorul $d\mathrm{x} = (dx_1, dx_2, \ldots dx_p)$, se poate scrie

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), d\mathrm{x} \rangle_e ,$$

ori de câte ori funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

Analog, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$, deducem că are loc formula:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = (J_f(\mathrm{x}_0))(d\mathrm{x}).$$

În anumite condiţii, prezentate în enunţul teoremei ce urmează (fără demonstraţie, aici), diferenţiabilitatea Gâteaux într-un punct implică totuşi diferenţiabilitatea Fréchet în acel punct.

Teorema 10.7 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este G-derivabilă pe o vecinătate W a punctului x_0, de forma $\{\mathrm{u} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{v} \mid t \in [0,1], \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p\}$, iar G-derivata $f'(\cdot)$ este continuă în x_0 (în sensul topologiei spaţiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$), atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0)$.*

Acest rezultat, reformulat la nivelul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale componentelor lui f (în raport cu componentele argumentului vectorial x), constituie următorul criteriu de Fréchet-diferenţiabilitate:

"Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to R^q$, cu D mulţime nevidă şi deschisă, este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o vecinătate W a punctului $x_0 \in D$ (cu $W \subseteq D$), iar derivatele parţiale $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (ale componentelor

lui f) sunt continue în x_0, atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(x_0)$ este chiar Jacobiana lui f în x_0, adică $J_f(x_0)$."

Mai mult, dacă $f \in \mathcal{C}^1(\widetilde{D})$, unde $\varnothing \neq \widetilde{D} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p$, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe $\widetilde{D}$. De aceea, funcţiilor din $\mathcal{C}^1(\widetilde{D})$ li se mai spune ***continuu-diferenţiabile*** (pe $\widetilde{D}$).

Propoziţia 10.7 *(**Reguli de calcul cu diferenţiale Fréchet**)*
Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar x_0 un punct din D.

i) Dacă f şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt Fréchet-diferenţiabile în x_0, iar λ şi $\mu \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\lambda f + \mu g : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula

$$(d(\lambda f + \mu g))(\mathrm{x}_0) = \lambda (df)(\mathrm{x}_0) + \mu (dg)(\mathrm{x}_0).$$

ii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $f \cdot g : D \to R^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 şi are loc relaţia:

$$(d(f \cdot g))(\mathrm{x}_0) = g(\mathrm{x}_0) \cdot (df)(\mathrm{x}_0) + f(\mathrm{x}_0) \cdot (dg)(\mathrm{x}_0).$$

iii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ şi $g : D \to \mathbb{R}^*$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc egalitatea:

$$\left(d\left(\frac{f}{g}\right)\right)(\mathrm{x}_0) = \frac{1}{g(\mathrm{x}_0)}(df)(\mathrm{x}_0) - \frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)} f(\mathrm{x}_0)(dg)(\mathrm{x}_0).$$

*iv) (**regula "lanţului"**) Dacă Ω este o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^q$, funcţia $f : D \to \Omega$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, iar $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ este Fréchet-diferenţiabilă în $f(\mathrm{x}_0)$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula:*

$$(d(g \circ f))(\mathrm{x}_0) = (dg)(f(\mathrm{x}_0)) \circ (df)(\mathrm{x}_0).$$

Demonstraţie: Pentru i), ii) şi iii), se foloseşte Definiţia 10.6. În ceea ce priveşte iv), avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0 \\ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0}} \frac{(g \circ f)(\mathrm{x}) - (g \circ f)(\mathrm{x}_0) - (((dg)(f(\mathrm{x}_0)))) \circ ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} =$$

$$= \lim_{\substack{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0 \\ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0}} \frac{g(f(\mathrm{x})) - g(f(\mathrm{x}_0)) - (dg)(f(\mathrm{x}_0))(f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0))}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} +$$

$$+ \lim_{\substack{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0 \\ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0}} ((dg)(f(\mathrm{x}_0))) \left(\frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - (df)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}\right) =$$

$$= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + ((dg)(f(\mathrm{x}_0)))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

◀

Observaţie: La nivelul matricilor Jacobiene, regula "lanţului" se redă prin relaţia

$$J_{g \circ f}(\mathrm{x}_0) = J_g(f(\mathrm{x}_0)) \cdot J_f(\mathrm{x}_0),$$

care, la rândul ei, la nivelul elementelor acestor matrici, adică la nivelul derivatelor parţiale ale componentelor lui $h = g \circ f$, g şi f, se prezintă astfel:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\left(f(\mathrm{x}_0)\right) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathrm{x}_0), \forall\, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}.$$

În situaţia în care $m = p = q \geq 2$, matricile implicate sunt pătratice şi, prin considerarea determinanţilor lor, avem relaţia:

$$det\left(J_{g\circ f}(\mathrm{x}_0)\right) = det\left(J_g\left(f(\mathrm{x}_0)\right)\right) \cdot det\left(J_f(\mathrm{x}_0)\right).$$

Altfel spus, avem:

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0) = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}(f(\mathrm{x}_0)) \cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0).$$

Când $f \in \mathcal{C}^1(D; E)$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $E \subseteq \mathbb{R}^p$ sunt mulţimi deschise şi nevide, atunci, dacă f este şi bijectivă, există $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(E; D)$ şi $J_{f^{-1}}\left(f(\mathrm{x}_0)\right) = J_f^{-1}(\mathrm{x}_0)$.

Definiţia 10.7 *Date fiind mulţimile deschise şi nevide D_1 şi D_2 din $\mathbb{R}^p$, se numeşte* ***difeomorfism*** *(sau* ***transformare regulată*** *sau* ***izomorfism diferenţiabil****) de la D_1 la D_2 o bijecţie $T : D_1 \to D_2$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D_1, a cărei inversă $T^{-1} : D_2 \to D_1$ este o aplicaţie continuă, iar matricea jacobiană $J_T(\mathrm{x})$ este nesingulară, $\forall\, \mathrm{x} \in D$ (adică determinantul funcţional $\dfrac{D(T_1, T_2, \ldots, T_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0)$ este nenul).*

Orice difeomorfism induce, din punct de vedere geometric, o transformare (schimbare) de coordonate (nu numaidecât liniară).

Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Mai întâi, în cazul unei funcţii reale scalar-scalare $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fie $D_1 \neq \varnothing$ acea submulţime de puncte din D în care f este derivabilă (ordinar, de ordinul I). Cu alte cuvinte, se poate vorbi despre derivata $f' : D_1 \to \mathbb{R}$. Dacă aceasta, la rândul ei, este derivabilă într-un punct x_0 din $D_1 \cap D_1'$, atunci elementul $\left(f'\right)'(\mathrm{x}_0)$ se notează cu $f''(\mathrm{x}_0)$ şi se numeşte ***derivata a doua a lui f în*** x_0, fiind din $\mathbb{R}$. Când $f''(\mathrm{x})$ există şi este finită, pentru orice $\mathrm{x} \in D_2 \subseteq D_1$, atunci spunem că f este de două ori derivabilă pe D_2, iar funcţia $x \in D_2 \longmapsto f''(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}$ se numeşte ***derivata a doua a lui f***.

Prin recurenţă, spunem că f este derivabilă de n-ori ($n \in \mathbb{N}^*$) în $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D} \subseteq D$ dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă o dată în punctul x_0 şi $f^{(n)}(\mathrm{x}_0)$, adică $\left(f^{(n-1)}\right)'(\mathrm{x}_0)$, se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în x_0. La nivel de funcţii, $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul întâi a derivatei de ordinul $(n-1)$ a lui f. În mod asemănător se introduc şi derivatele laterale de ordin superior ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in D$.

Tot recursiv, se pot defini şi noţiunile de diferenţială Gâteaux, derivată parţială, gradient şi diferenţială Fréchet de ordin superior pentru funcţii reale de argument vectorial.

Astfel, în ceea ce priveşte derivatele parţiale, putem defini, prin recurenţă, derivate parţiale de un ordin oarecare $l \in \mathbb{N}^*$, plecând de la derivatele parţiale de ordinul $l - 1$. Dacă, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, există derivata $\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}}$, pe o vecinătate a punctului $\mathrm{x}_0 \in D$, şi această funcţie admite derivată parţială (de ordinul întâi), în raport cu x_{i_1} în x_0, unde $i_1, i_2, \ldots, i_l$ sunt elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, p\}$, atunci:

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}} \right)}{\partial x_{i_1}}(\mathrm{x}_0).$$

În general, cum indicii $i_1, i_2, \ldots, i_l$ se pot repeta, se preferă exprimarea

$$(D^\alpha f)(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_p} x_p}(\mathrm{x}_0), \text{ unde } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p, \alpha_k \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1, p},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ numindu-se *multi-indice* p-dimensional. Dacă cel puţin două dintre componentele lui α sunt nenule, atunci ***derivata parţială*** în cauză se numeşte ***mixtă***. Altminteri ea se numeşte *derivată parţială nemixtă*.

În cazul în care $|\alpha| = 2$, derivatele mixte care pot exista sunt egale, în condiţiile teoremei lui Schwartz sau ale teoremei lui Young, teoreme ale căror enunţuri (fără demonstraţie) le dăm aici, în continuare.

Teorema 10.8 ***(H. A. Schwartz)***

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ are derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existente pe o vecinătate a unui punct interior $\mathrm{x}_0 \in D$ şi aceste derivate sunt continue în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$

Teorema 10.9 ***(G. C. Young)***

Dacă toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ există pe o vecinătate a unui punct x_0, interior unei mulţimi nevide $\widetilde{D} \subseteq D$ şi aceste derivate sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$ există şi coincid.

Mai general, dacă o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale până la ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, continue pe mulţimea nevidă şi deschisă D, atunci

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_p}}(\mathrm{x}_0),$$

oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ obţinut prin permutarea lui $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

Definiţia 10.8 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este* ***de clasă $\mathcal{C}^m$ pe*** *D ($m \geq 2$) dacă f este derivabilă parţial de ordinul m (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate derivatele parţiale de ordin m sunt continue pe D. Mulţimea tuturor funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m$ pe D se notează cu $\mathcal{C}^m(D)$.*

Definind $\mathcal{C}^\infty(D)$ ca fiind mulţimea ***funcţiilor indefinit derivabile parţial pe*** D, adică mulţimea funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m(D)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, vedem că are loc relaţia:

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^m(D) \subset \mathcal{C}^{m-1}(D) \subset \ldots \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D).$$

În ceea ce priveşte diferenţiabilitatea Fréchet de ordin superior a unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, are loc următoarea definiţie.

Definiţia 10.9 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

a) *Spunem că f este* ***de** m **ori*** *($m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$)* ***diferenţiabilă Fréchet într-un punct*** $\mathrm{x}_0 \in D$ *dacă f este derivabilă parţial de $(m-1)$ ori într-o vecinătate $V \subseteq D$ a lui x_0 şi toate derivatele parţiale de ordinul $(m-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile Fréchet, de ordinul întâi, în x_0.*

b) *Spunem că f este* ***de** m **ori diferenţiabilă Fréchet pe*** $\widetilde{D} \subseteq D$ *dacă f este de m ori Fréchet diferenţiabilă în orice punct $\mathrm{x} \in \tilde{D}$.*

c) *Numim* ***diferenţială Fréchet de ordinul*** m *a funcţiei f în punctul $\mathrm{x}_0 \in D$, aplicaţia $(d^m f)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$((d^m f)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0)\right)^m, \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p,$$

unde expresia din membrul secund înseamnă că paranteza se ridică, formal, la puterea simbolică m, după formula polinomială a lui Newton.

De exemplu, pentru $m = 2$, avem:

$$\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{u}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j, \forall\, \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 10.10 ***(Formula lui Taylor)***

Fie D o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(m+1)$ ori diferenţiabilă Fréchet pe D, x_0 un punct din D şi $S_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$ o sferă deschisă inclusă în D. Atunci, pentru orice $\mathrm{x} \in S_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$, există un punct ξ, aparţinând segmentului cu extremităţile x_0 şi x, astfel încât:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) \quad &= \quad f(\mathrm{x}_0) + \frac{1}{1!}(df)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{m!}(d^m f)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!}\left(d^{m+1} f\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0). \end{aligned}$$

Demonstraţie: Considerând un versor oarecare $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$ şi $t \in (-r, r)$, se defineşte $\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$, prin $\varphi(t) = f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})$. Cum f este de $(m+1)$-diferenţiabilă pe D, rezultă că şi φ este la fel pe $(-r, r)$. În plus, vedem că avem

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^{p} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})\right)^{(k)}, \forall\, k = \overline{1, m+1}.$$

De aici, pentru $\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{t}$, cu $t \in (-r, r) \setminus \{0\}$, găsim:

$$t^k \varphi^{(k)}(0) = \left(d^k f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0), \forall\, k = \overline{1, m}.$$

Pe de altă parte, are loc egalitatea

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\tau),$$

unde $\tau = \lambda t$, cu $\lambda \in (0,1)$, $\forall\, t \in (-r, r)$.

Astfel, întrucât $t^{m+1}\varphi^{(m+1)}(\tau) = \left(d^{(m+1)}f\right)(\xi)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)$, cu $\xi = \mathrm{x}_0 + \tau\mathrm{v}$, deducem că este adevărată formula din enunţ. ◄

Bibliografie recomandată

1. F. Iacob - *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.

2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. 11)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5 şi 6)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 6 şi 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. Rodica Mihaela Dăneţ, Florica Voicu, S. D. Niţă, Iuliana Popescu, M. V. Popescu - *Curs modern de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.

6. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.

Cursul 11

Aplicaţii ale diferenţiabilităţii funcţiilor. (Extreme fără restricţii. Funcţii implicite. Inversabilitatea funcţiilor de mai multe variabile reale. Dependenţă/independenţă funcţională. Extreme condiţionate.)

Una dintre aplicaţiile de certă importanţă practică a diferenţiabilităţii funcţiilor reale (de una sau mai multe variabile şi cu valori scalare) este aceea relativă la stabilirea elementelor de extrem pentru funcţiile implicate în anumite probleme de optimizare, adică în probleme care vizează minimizarea sau maximizarea unei aşa-numite funcţionale de cost, în absenţa sau în prezenţa unor condiţii (restricţii) precizate. După exemplificarea unor astfel de probleme, prezentăm aici chestiunile teoretice necesare abordării şi tratării cazului ce priveşte extremele necondiţionate, iar apoi, pe baza expunerii unor concepte şi rezultate din domeniile funcţiilor implicit-definite, inversabilităţii funcţiilor reale vectorial-vectoriale şi dependenţei funcţionale a unui set de funcţii, considerăm cazul extremelor cu legături.

Exemple de probleme de optimizare în $\mathbb{R}^n$

Exemplul 11.1 ***Metoda celor mai mici pătrate pentru minimizarea abaterii unor estimări faţă de determinări***

Admitem că, în urma unor experimente asupra unei anumite mărimi fizice, s-au obţinut valorile $b_1, b_2, \ldots, b_p$, corespunzătoare valorilor (de "intrare") $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (unde $p \in \mathbb{N}^*$). Reprezentând punctele (a_k, b_k) $(k = \overline{1,p})$ într-un reper ortogonal din plan, facem o apreciere asupra naturii (formei) expresiei (graficului) funcţiei φ care, necunoscută iniţial, ar avea, în a_k, valoarea b_k, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Potrivit acestei aprecieri, estimăm că φ ar avea o expresie de un anumit tip (polinomial, exponenţial, trigonometric etc.), ale cărei caracteristici (parametri) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (din $\mathbb{R}$), nesupuse vreunei condiţii restrictive, se cer a fi identificate. În acest scop, folosind aşa-numita ***metodă a celor mai mici pătrate***, considerăm problema minimizării expresiei

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\varphi(a_k; c_1, c_2, \ldots, c_n) - b_k\right)^2,$$

în raport cu $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Prin rezolvarea acestei probleme, de extrem fără restricţii (condiţii), adică prin găsirea soluţiei (când aceasta există şi este unică) $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \in \mathbb{R}^n$, pentru care

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^{p} \left(\varphi(a_k; c_1, c_2, \ldots, c_n) - b_k\right)^2 \right\} = \sum_{k=1}^{p} \left(\varphi(a_k; c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) - b_k\right)^2,$$

putem aprecia (în final) faptul că mărimea fizică asupra căreia s-au făcut măsurătorile ce au condus la determinările $b_1, b_2, \ldots, b_p$ se supune legii $y = \varphi(x; c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$.

Precizăm (în context) că dacă imaginea grafică a mulţimii $\{(a_k, b_k) \mid k = \overline{1,p}\}$ ne sugerează faptul că φ ar fi să aibă o expresie liniară, atunci putem lua $n = 2$ şi $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. Prin aceasta, metoda celor mai mici pătrate va consta în determinarea parametrilor c_1 şi c_2 aşa încât expresia

$$\sum_{k=1}^{p} (c_1 a_k + c_2 - b_k)^2$$

să fie minimă.

Exemplul 11.2 ***Realizarea unui profit maxim sau a unui cost minim într-o producţie economică***

Într-o teorie economică, spaţiul $\mathbb{R}^n$ se interpretează ca fiind spaţiul complexelor de bunuri de consum, în care fiecare "bun" (produs) este caracterizat de un anumit indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iar un "complex de bunuri" este un vector $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, unde componenta x_i înseamnă cantitatea în care se găseşte "bunul" i. "Unitatea" bunului i este $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Dreapta reală este interpretată ca mulţimea "valorilor", exprimată în "unităţi de cont". Într-un astfel de context, un "sistem de preţuri" este o funcţie ce asociază fiecărui "complex de bunuri" o anumită valoare. Se consideră, în mod firesc, că un "sistem de preţuri" este un element din dualul lui $\mathbb{R}^n$, adică o aplicaţie liniară $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, unde p_i este preţul unitar al "bunului" i. Astfel, pentru complexul de bunuri $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, valoarea sa în raport cu sistemul de preţuri p este dată de $< \mathrm{p}, \mathrm{x} >_e$, anume $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Considerând mulţimea $\mathbb{R}^n_+$, a vectorilor $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cu componente nenegative, comportamentul unui consumator este apreciat în teoria economică printr-o funcţie de utilitate $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, funcţie ce poate determina o aşa-numită "relaţie de preferinţă" "$\prec$" pe mulţimea $\mathbb{R}^n_+$, definită prin: $\mathrm{y} \prec \mathrm{x} \Leftrightarrow u(\mathrm{x}) \leq u(\mathrm{y})$.

Dacă o firmă (întreprindere) produce un anumit "complex de bunuri", se poate pune problema realizării respectivei producţii astfel încât cheltuielile de producţie sa fie minime sau/şi profitul de producţie să fie maxim. Prin studii economice adecvate, se utilizează, în acest sens, o funcţie de cost corespunzătoare contextului şi o funcţie de profit convenabil stabilită.

Când optimul funcţiei obiectiv (de cost sau /şi profit) se cere a fi găsit, în situaţia în care mulţimea complexelor de bunuri este $\mathbb{R}^n$, spunem că avem de-a face cu o problemă de extrem fără restricţii. În caz contrar, când mulţimea producţiilor nete ale unei intreprinderi (firme), notată cu K, este o submulţime proprie a lui $\mathbb{R}^n_+$ ce conţine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, problema optimizării funcţiei de utilitate u, pe K, este una de extrem condiţionat. Problema în cauză este de "programare liniară" ori de câte ori atât funcţia de optimizat, cât şi relaţiile ce definesc mulţimea K sunt liniare. Dacă funcţia obiectiv este pătratică sau convexă, iar K este convexă, atunci problema de optimizare considerată se numeşte problemă de optimizare pătratică şi respectiv convexă, cu restricţii.

Exemplul 11.3 ***Problema entropiei informaţionale maxime***

Introdusă, ca noţiune matematică, de Claude E. Shannon (1947), *entropia* reprezintă o funcţie ce corespunde cantităţii de informaţie livrată (oferită) de o anumită sursă, prin intermediul unui anumit limbaj, semnal electric sau fişier (informatic) de date. Funcţia respectivă, notată cu H, este definită pe mulţimea variabilelor aleatoare

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

şi are expresia

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \log_2 p_k,$$

unde p_k este probabilitatea ($p_k \in (0,1)$) cu care se transmit (se percep) k informaţii transmise de o sursă (sau mai multe surse ce acţionează concomitent), iar $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

O astfel de funcţie (entropie) se utilizează, de exemplu, în "analiza" matematică a silabelor din limba română, caz în care, luând $n = 6496$ (numărul total al silabelor existente în limba română) şi

p_k egală cu raportul dintre frecvenţa globală a silablei aflate pe poziţia k (în clasamentul obţinut prin ordonarea descrescătoare a silabelor după frecvenţa lor în limba română) şi numărul total de apariţii ale silabelor, s-a găsit valoarea lui H egală cu 8.621. Când se ia $n = 56$ (numărul total de tipuri consoană-vocală) care intră în componenţa silabelor) şi p_k este probabilitatea de apariţie a tipului k (în ordinea frecvenţei de apariţie), se găseşte $H = 230$.

Tot o funcţie de entropie de tip Shannon este şi cea de expresie

$$-\sum_{i=0}^{N} \frac{A_i}{4\pi} \cdot \log_2\left(\frac{A_i}{4\pi}\right),$$

unde A_i este suprafaţa (aria) proiectată a feţei i a unui obiect ce se doreşte observat dintr-un anumit punct P din spaţiu, 4π este măsura unghiului solid (sferic) de rază 1, iar $\dfrac{A_i}{4\pi}$ reprezintă gradul de vizibilitate, pentru faţa de rang i, din punctul P. O asemenea funcţie se foloseşte în scopul alegerii celei mai bune poziţii a punctului P pentru observarea obiectului cu feţele $1, 2, \ldots, N$.

Relativ la funcţia H, se pune problema stabilirii clasei optime de distribuţie a variabilei aleatoare X, astfel încât valoarea $H(X)$ să fie maximă. Cu alte cuvinte, interesează care sunt probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pentru care expresia lui $H(X)$, adică

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k,$$

are valoare maximă pe mulţimea $\left\{(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid p_i \in (0,1), i = \overline{1,n}, \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right\}$.

Extreme libere (fără legături)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţională reală pe $A \neq \varnothing$ şi $\mathrm{x}_0 \in A$.

Definiţia 11.1 *a) Punctul* x_0 *se numeşte* ***punct de extrem local*** *(similar spus,* ***relativ****) al funcţiei* f *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(\mathrm{x}_0)$ *aşa încât* $(f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0))$ *are semn constant sau este nulă pe* $V \cap A$*. Atunci* $f(\mathrm{x}_0)$ *se numeşte* ***valoare extremă locală a lui*** f *(pe* $V \cap A$*).*

b) Punctul x_0 *se numeşte* ***punct de maxim*** *(respectiv* ***punct de minim****)* ***local*** *(sau* ***relativ****) al funcţiei* f *când are loc relaţia:*

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) \leq 0 \ \textit{(respectiv } f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) \geq 0\textit{)}, \ \forall\, \mathrm{x} \in V \cap A.$$

Dacă, în inegalităţile acestea, avem $f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) = 0$ *numai când* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$*, spunem că* x_0 *este un punct de* ***maxim*** *(respectiv* ***minim****)* ***local, strict****.*

c) Dacă $f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) \leqslant 0$ *(respectiv* $f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) \geqslant 0$*),* $\forall\, \mathrm{x} \in A$*, atunci* x_0 *se numeşte* ***punct de maxim*** *(respectiv* ***minim****)* ***absolut*** *(sau* ***global****) pentru* f*. În acest caz, "****extrema****"* $f(\mathrm{x}_0)$ *este* ***valoarea maximă*** *(respectiv* ***minimă****)* ***absolută*** *(****globală****) a lui* f*.*

Observaţie: Orice punct de tipul x_0, de extrem (maxim sau minim) absolut pentru o funcţie f, este întotdeauna punct de extrem relativ, pentru f. Nu şi reciproc.

Definiţia 11.2 *a) Problema determinării punctelor şi valorilor de extrem, locale sau globale, ale unei funcţii (funcţionale)* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, în absenţa oricărei condiţii restrictive asupra argumentului lui* f*, se numeşte* ***problemă de extrem liber*** *(****necondiţionat*** *sau* ***fără legături****).*

b) *Problema determinării elementelor de extrem ale unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, în condiţiile în care se cere punctului de extrem să aparţină unei anumite mulţimi (de restricţii) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ($B \neq \varnothing$), se numeşte* ***problemă de extrem (maxim** sau **minim) cu legături** (sau **problemă de extrem condiţionat**).*

Teorema 11.1 ***(Fermat)***

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$. Dacă x_0 este un punct de extrem al lui f, iar f are derivate parţiale de ordinul întâi în x_0, atunci derivatele respective se anulează în x_0.

Demonstraţie: Dacă $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$ şi există $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, atunci, în conformitate cu Definiţia 10.5 d), avem: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0)}{t}$. În cazul în care x_0 este un punct de maxim al lui f, local sau global, înregistrăm: $f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0) \leq 0$, $\forall\, t \in V_0 \in \mathcal{V}(0)$, cu $V_0 = (a, b)$, $a < 0 < b$. Astfel, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0)}{t} \geq 0$ şi $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0)}{t} \leq 0$. Deci $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = 0$. Când x_0 este punct de minim al lui f, avem $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0)}{t} \leq 0$ şi $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathrm{x}_0)}{t} \geq 0$. Prin urmare, rezultă şi atunci că $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = 0$. ◄

Observaţie: Dacă $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$ este un punct de extrem al unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cu gradient în x_0, atunci, potrivit Teoremei 11.1, gradientul lui f în x_0, adică $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ este vectorul nul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$.

Definiţia 11.3 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$, astfel încât f este diferenţiabilă Frèchet (de ordinul întâi) în x_0. Punctul x_0 se numeşte* ***punct critic*** *(sau* ***punct staţionar****) al funcţiei f dacă $(df)(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})}$, adică $(\nabla f)(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$.*

Observaţie: Întrucât $((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$,Teorema 11.1 afirmă că orice punct de extrem (local) care aparţine interiorului mulţimii A (de definiţie a funcţionalei $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) şi în care f este diferenţiabilă Frèchet constituie un punct critic al lui f. Reciproca nu este adevărată, după cum se poate vedea în cazul funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$, cu punctul critic $(1, 1)$ (deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 3x_1^2 - 3x_2|_{x_1=1,x_2=1} = 0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1) = 3x_2^2 - 3x_1|_{x_1=1,x_2=1} = 0$). Se constată că diferenţa $f(x_1, x_2) - f(1, 1) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 + 1$ este, pentru $x_2 = 1$, egală cu $(x_1 - 1)(x_1 - 2)$ ceea ce înseamnă că $f(1 - a, 1) - f(1, 1) = (-a)(-1 - a) = a(1 + 1) \geq 0$, $\forall\, a \geq 0$ şi $f(1 + b, 1) - f(1, 1) = b(b - 1) \leq 0$, $\forall\, b \in [0, 1]$. Deci, în punctul $(1, 1)$, funcţia f din acest caz nu are nici minim şi nici maxim local, nesatisfăcând Definiţia 11.1.

Definiţia 11.4 *Un punct critic al unei funcţii (diferenţiabile) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care nu este punct de extrem al lui f se numeşte* ***punct şa*** *pentru funcţia f.*

Pentru funcţiile diferenţiabile de cel puţin ordinul al doilea într-un punct critic există criterii (condiţii suficiente) de discernere a punctelor de extrem sau a punctelor şa, adică criterii de identificare a punctelor de extrem sau şa printre punctele critice ale respectivelor funcţii.

În acest sens, pentru cazul în care $n = 1$, are loc următorul rezultat:

Teorema 11.2 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in \mathring{A}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ($n \geq 2$) ori derivabilă în x_0. Dacă $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, iar n este par, atunci x_0 este punct* *de extrem local pentru f şi anume: punct de minim local, când $f^{(n)}(x_0) > 0$ sau punct de maxim local, când $f^{(n)}(x_0) < 0$. Dacă, în acest context, n este impar, atunci x_0 nu este punct de extrem local al lui f.*

Demonstraţie: Considerând funcţiile $R_f(\cdot; x_0) : A \to \mathbb{R}$ şi $g_0 : A \to \mathbb{R}$, definite prin $R_f(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - \dfrac{x - x_0}{1!} f'(x_0) - \cdots - \dfrac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ şi $g_0(x) = (x - x_0)^n$, $\forall\, x \in A$, vedem că $R_f(\cdot; x_0)$ şi g_0 sunt derivabile de n ori în $x_0 \in \mathring{A}$ şi $R_f^{(k)}(x_0; x_0) = g_0^{(k)}(x_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, n-1}$, iar $R_f^{(n)}(x_0; x_0) = 0$ şi $g_0^{(n)}(x_0) = n!$. Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_f(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R'_f(x; x_0)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_f^{(n)}(x; x_0)}{g_0^{(n)}(x)} = \dfrac{0}{n!} = 0$. În consecinţă, avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_f(x; x_0), \forall\, x \in A,$$

cu $R_f(\cdot; x_0) : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_f(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$. Definind $\alpha : A \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \dfrac{R_f(x; x_0)}{(x - x_0)^n} & , \quad \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ 0 & , \quad \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

putem scrie

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \alpha(x), \forall\, x \in A,$$

unde α este continuă şi nulă în x_0. Adică, pentru f, are loc formula lui Taylor de ordin n, cu rest de tip Peano ($R_f(x; x_0) = \dfrac{(x - x_0)^n}{n!} \alpha(x)$) în vecinătatea lui x_0. Cum, prin ipoteză, $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, rezultă că avem:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right], \forall\, x \in A.$$

În acelaşi timp, deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, avem:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right] = f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Graţie continuităţii lui α în x_0, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ aşa încât, pe baza relaţiei de imediat mai sus, semnul expresiei funcţiei $\alpha(x) + f^{(n)}(x_0)$ este constant şi anume egal cu semnul numărului $f^{(n)}(x_0)$. Atunci $\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\left[f^{(n)}(x_0) \right] \cdot \left[\dfrac{(x - x_0)^n}{n!} \right] \right)$, $\forall\, x \in V \cap A$ şi deci, dacă n este par, avem $(x - x_0)^n > 0$, $\forall\, x \in (V \cap A) \setminus \{x_0\}$, ceea ce implică faptul că $\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(f^{(n)}(x_0) \right)$. În consecinţă, când $f^{(n)}(x_0) > 0$, obţinem $f(x) > f(x_0)$, $\forall\, x \in (V \cap A) \setminus \{x_0\}$, ceea ce spune că x_0 este un punct de minim al lui f, iar când $f^{(n)}(x_0) < 0$, găsim că $f(x) > f(x_0)$, $\forall\, x \in (V \cap A) \setminus \{x_0\}$, aceasta însemnând că x_0 este punct de maxim al lui f. Dacă n este impar, $(x - x_0)^n$ are semn variabil pe $V \cap A$ şi, la fel, se va petrece atunci cu semnul diferenţei $f(x) - f(x_0)$, ceea ce ne spune că x_0 este un punct şa pentru f şi nu un punct de extrem. ◀

Teorema 11.3 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie ce are pe $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$ ca punct critic. Dacă f are derivate parţiale de ordinul al doilea continue într-o vecinătate a lui x_0, atunci:*

i) când $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0) v_i v_j > 0$, $\forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, punctul x_0 este unul de minim pentru funcţia f, iar când $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) < 0$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, punctul x_0 este unul de maxim pentru f;

ii) când $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$ este o formă pătratică nedefinită (adică $\exists\, v' \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ şi $v'' \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ din $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}') < 0$ şi $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}'') > 0$, x_0 este punct şa pentru f (nefiind punct de extrem);

iii) când $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$ este o formă pătratică semidefinită pozitiv (sau negativ), adică $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) \geq 0$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ şi există $\mathrm{v}' \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, astfel încât $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}') = 0$ (respectiv $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) \leq 0$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ şi există $\mathrm{v}'' \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, astfel încât $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}'') = 0$), nu putem stabili natura punctului staţionar x_0 cu ajutorul diferenţialei $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$.

Demonstraţie: Deoarece f are derivate parţiale de ordinul al doilea continue pe o vecinătate V a lui x_0 (vecinătate pe care, fără a restrânge generalitatea prezentului raţionament, o putem considera de tip sferic, adică, mai precis, $V = S(\mathrm{x}_0; r) \subseteq A$), f este diferenţiabilă (Fréchet) de două ori pe V şi deci există $\alpha : V \to \mathbb{R}$, aşa încât $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = 0$ şi

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + \frac{1}{1!}\left(df(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{\alpha(x)}{2!}\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|^2, \forall\, \mathrm{x} \in V,$$

în conformitate cu formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile.

Cum x_0 este punct staţionar pentru f, avem $\left(df(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$. Atunci:

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) = \frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|^2}{2!}\left[\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|}\right) + \alpha(\mathrm{x})\right], \forall\, \mathrm{x} \in V \setminus \{\mathrm{x}_0\}.$$

Totodată, mulţimea $\mathcal{M} = \left\{\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|} \mid \mathrm{x} \in V \setminus \{\mathrm{x}_0\}\right\} \subseteq \{\mathrm{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{z}\| = 1\}$ este mărginită şi închisă (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}^n$), fiind deci compactă. Teorema lui Weierstrass, aplicată funcţiei $f \in \mathcal{C}^2(V)$, ne asigură că $\mathrm{y} \in \mathcal{M} \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{y})$ este o funcţie mărginită, care îşi atinge marginile $m = \inf\limits_{\mathrm{y} \in \mathcal{M}} \varphi(\mathrm{y})$ şi $M = \sup\limits_{\mathrm{y} \in \mathcal{M}} \varphi(\mathrm{y})$. În cazul i), ipoteza $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) > 0$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, cu $\mathrm{v} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, ne asigură că $m > 0$. Cum α este continuă în x_0 şi $\alpha(\mathrm{x}_0) = 0$, există $\delta(m) > 0$ astfel încât $|\alpha(\mathrm{x})| < m$, $\forall\, \mathrm{x} \in S(\mathrm{x}_0; \delta(m))$. În consecinţă, avem

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) = \frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|^2}{2!}\left[\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|}\right) + \alpha(\mathrm{x})\right] >$$

$$> \frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|^2}{2!}\left[m + \alpha(\mathrm{x})\right] > 0, \forall\, \mathrm{x} \in \left(S(\mathrm{x}_0, \delta(m)) \cap V\right) \setminus \{\mathrm{x}_0\},$$

ceea ce înseamnă că x_0 este un punct de minim local al lui f.

În cazul i), atunci când $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}) < 0$, $\forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, avem $M < 0$ şi, ca mai sus, pe baza continuităţii lui α în x_0 şi a faptului că $\alpha(\mathrm{x}_0) = 0$, deducem că există $S(\mathrm{x}_0; \eta(M))$ astfel încât

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) = \frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|^2}{2!}\left[\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|}\right) + \alpha(\mathrm{x})\right] <$$

$$< \frac{\|x - x_0\|^2}{2!}\left[M + \alpha(x)\right] > 0, \forall x \in \left(S\left(x_0, \eta(M)\right) \cap V\right) \setminus \{x_0\},$$

ceea ce înseamnă că x_0 este punct de maxim local pentru f.

În cazul ii), când $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)(v)$ este nedefinită, existând $v' \in \mathbb{R}^n$ şi $v'' \in \mathbb{R}^n$, vectori nenuli, pentru care $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)(v') < 0$ şi respectiv $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)(v'') > 0$, putem vedea că funcţiile scalare $t \longmapsto f(x_0 + tv')$ şi $t \longmapsto f(x_0 + tv'')$ au punctul critic $t = 0$ şi derivata de ordinul al doilea în $t = 0$ strict negativă, respectiv strict pozitivă. Prin aplicarea Teoremei 11.2 , rezultă că $t = 0$ este punct de maxim pentru prima dintre funcţii şi punct de minim pentru cea de-a doua. Aşadar, punctul x_0, corespunzător lui $t = 0$, este de maxim pentru f, pe direcţia v' şi, simultan, punct de minim, pe direcţia v''. Deducem astfel că x_0 nu este punct de extrem al funcţiei f, ci punct şa. În fine, în situaţia iii), când $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)$ este o formă pătratică semi-definită pozitiv sau negativ, există $\widetilde{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, astfel încât $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)(\widetilde{v}) = 0$ şi, atunci, pentru $x = x_0 + \widetilde{v}$, avem:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \alpha(x).$$

Cum semnul lui $\alpha(x)$ nu este cunoscut, nu putem stabili, pe baza acestei relaţii, natura punctului x_0 (de a fi sau nu punct de extrem). ◀

Observaţie: Având în vedere că, în ipoteza $f \in \mathcal{C}^2(V)$, matricea formei pătratice $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)$, adică matricea $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, ***denumită hessiana lui*** f ***în*** x_0 şi notată cu $H_f(x_0)$, este, pe baza criteriului lui Schwarz (v. Teorema 10.8), simetrică, se poate spune că toate valorile proprii ale acesteia sunt reale. Atunci, ţinând seama de Teorema 8.5 şi de Teorema de inerţie a lui Sylvester (Teorema 8.2), se poate afirma că forma pătratică $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)(v)$, adică $< H_f(x_0)(v), v >_e$, este pozitiv-definită atunci când toate valorile proprii ale matricii $H_f(x_0)$ sunt pozitive. Analog, forma pătratică $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)$ este negativ definită când toate valorile proprii ale matricii $H_f(x_0)$ sunt negative. În fine, dacă matricea $H_f(x_0)$ are valori proprii atât din $\mathbb{R}^*_-$, cât şi din $\mathbb{R}^*_+$, atunci $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)$ este o formă pătratică nedefinită. Combinând aceste remarci cu Teorema 11.3, putem formula următorul rezultat.

Propoziţia 11.1 *Fie* $A \neq \varnothing$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$, $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f \in \mathcal{C}^2(V)$. *Dacă* $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, *atunci* x_0 *este un punct de maxim local al lui* f , *când* $H_f(x_0)$ *are toate valorile proprii negative şi punct de minim local pentru* f, *când* $H_f(x_0)$ *are toate valorile proprii pozitive. Când* $H_f(x_0)$ *are cel puţin două valori proprii nenule şi de semne contrare, atunci punctul critic* x_0 *este un punct şa pentru* f . *Dacă toate valorile proprii ale lui* $H_f(x_0)$ *sunt nule, nu putem decide natura lui* x_0.

În mod asemănător, ţinând seama de Teorema 8.12, cât şi de observaţia ce imediat o succede, putem formula, în virtutea Teoremei 11.3, următoarea propoziţie:

Propoziţia 11.2 *Fie* A, x_0, V *şi* f *ca în enunţul Propoziţiei 11.1, iar* $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = \det\left[a_{11}\right]$, $\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det\left[(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}\right]$ *minorii principali ai matricii* $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, *unde* $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$. *Avem:*

i) Dacă $\Delta_j > 0$, $\forall\, j = \overline{1, n}$, *atunci* $\left(\left(d^2 f\right)(x_0)\right)$ *este pozitiv definită şi deci punctul critic* x_0 *este unul de minim pentru* f.

ii) Dacă $(-1)^{j+1}\Delta_j < 0, \forall j = \overline{1,n}$*, atunci* $\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)$ *este negativ definită şi deci* x_0 *este punct de maxim al lui* f*.*

iii) Dacă $\Delta_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}$ *sau* $(-1)^{j+1}\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,n}$ *şi există cel puţin un rang* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *pentru care* $\Delta_i = 0$*, în fiecare din cele două situaţii, atunci* $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$ *este semi-definită pozitiv, respectiv negativ, şi nu putem decide, cu ajutorul formei pătratice* $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$*, natura punctului* x_0*.*

iv) Dacă şirul $(\Delta_j)_{j=\overline{1,n}}$ *nu este în nici unul dintre cazurile de la i), ii) sau iii), atunci forma pătratică* $\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)$ *este nedefinită şi deci* x_0 *nu este punct de extrem, ci punct şa al lui* f*.*

Observaţie: În cazul particular în care $n = 2$, Propoziţia 11.2 revine la a spune că, dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a unui punct critic (pentru f) $\mathrm{x}_0 \in \mathring{A}$ şi adoptăm notaţiile $p = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}_0)$, $q = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{x}_0)$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathrm{x}_0)$, atunci:

i) când $p > 0$ şi $pr - q^2 > 0$, punctul $\mathrm{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ este de minim pentru f;

ii) când $p < 0$ şi $pr - q^2 > 0$, punctul x_0 este unul de maxim pentru f;

iii) când $pr - q^2 < 0$, x_0 nu este un punct de extrem al lui f;

iv) când $pr - q^2 = 0$, nu putem stabili natura lui x_0 prin intermediul diferenţialei a doua a lui f în x_0.

De pildă, revenind la Exemplul 11.1, relativ la metoda celor mai mici pătrate, cu φ de expresie liniară, se vede că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(c_1, c_2) = \sum_{k=1}^{l} (c_1 a_k + c_2 - b_k)^2$$

este, evident, de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{R}^2$ şi are gradientul ∇f nul în acel punct $\left(c_1^0, c_2^0\right)$ pentru care:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial c_1}\left(c_1^0, c_2^0\right) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{l} (c_1^0 a_k + c_2^0 - b_k) a_k = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial c_2}\left(c_1^0, c_2^0\right) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{l} (c_1^0 a_k + c_2^0 - b_k) = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem algebric liniar, echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} c_1^0 \displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k^2 + c_2^0 \sum_{k=1}^{l} a_k = \sum_{k=1}^{l} b_k a_k \\[2ex] c_1^0 \displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k^2 + l c_2^0 = \sum_{k=1}^{l} b_k, \end{cases}$$

al cărui determinant

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{l} a_k^2 & \sum_{k=1}^{l} a_k \\ \sum_{k=1}^{l} a_k & l \end{vmatrix}$$

are valoarea $l\sum_{k=1}^{l} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2$ − nenulă, când nu suntem în situaţia $a_1 = a_2 = \ldots = a_l$, pe baza inegalităţii lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski − obţinem:

$$c_1^0 = \frac{l\sum_{k=1}^{l} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{l} b_k\right)}{l\sum_{k=1}^{l} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2} \text{ şi}$$

$$c_2^0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{l} b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k b_k\right)}{l\sum_{k=1}^{l} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2}.$$

Cum, în acest caz, avem $p = \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2}\left(c_1^0, c_2^0\right) = 2\sum_{k=1}^{l} a_k^2$, $q = \frac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial c_2}\left(c_1^0, c_2^0\right) = 2\sum_{k=1}^{l} a_k$ şi $r = \frac{\partial^2 f}{\partial c_2^2}\left(c_1^0, c_2^0\right) = 2l$, rezultă că, atâta timp cât $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt nenule şi nu toate egale, suntem în situaţia în care $p > 0$ şi $pr - q^2 = 4\left[l\sum_{k=1}^{l} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2\right] > 0$, ceea ce înseamnă că punctul $\left(c_1^0, c_2^0\right)$ este unul de minim pentru actuala funcţie f.

În continuare, deoarece pentru abordarea teoretică a unei probleme de extrem cu restricţii (legături) avem nevoie de elemente relative la noţiunile de funcţie implicită, inversabilitatea unei funcţii de mai multe variabile reale şi dependenţa funcţională a unui set de funcţii, prezentăm, pe scurt, astfel de noţiuni şi, fără demonstraţii, rezultate de bază care le privesc.

Funcţii implicite

Definiţia 11.5 *Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, unde $F : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $B \subseteq \mathbb{R}$. O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este o **soluţie,** în raport cu y, a ecuaţiei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, pe mulţimea A, dacă, pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, avem:*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0.$$

*O asemenea funcţie $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită prin intermediul ecuaţiei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ se numeşte **funcţie implicită** sau **funcţie definită implicit**.*

Observaţii:

a) Dacă notăm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu x, ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ se poate rescrie sub forma $F(\mathrm{x}, y) = 0$, iar soluţia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se redă prin $y = f(\mathrm{x})$.

b) O ecuaţie $F(\mathrm{x}, y) = 0$ poate să aibă, pe A, mai multe soluţii sau nici una. De exemplu, ecuaţia $F(x, y) = 0$, în care $F : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $F(\mathrm{x}, y) = y^2 - x$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^*_-$, nu are nici o soluţie, pe când dacă $A \subseteq \mathbb{R}^*_+$ ea are două soluţii: $y = -\sqrt{x}$ şi $y = \sqrt{x}$.

Teorema 11.4 ***(a funcţiilor implicite)***
Fie $F : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathring{A}$ şi $b \in \mathring{B}$.
Dacă

j) $F(\mathrm{a}, b) = 0$,

jj) există $U \times V \subseteq A \times B$, vecinătate a punctului (a, b), astfel încât $F \in \mathcal{C}^1(U \times V)$,

jjj) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{a}, b) \neq 0$,

atunci:

i) există $U_0 \subseteq U$ - vecinătate deschisă a punctului a,*o vecinătate deschisă $V_0 \subset V$ a punctului b şi o funcţie unică $f : U_0 \to V_0$, astfel încât $f(\mathrm{a}) = b$ şi $F(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in U_0$.*

ii) $f \in \mathcal{C}^1(U_0)$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))}, \forall\, i = \overline{1, n}, \forall\, \mathrm{x} \in U_0.$$

iii) Dacă $F \in \mathcal{C}^k(U \times V)$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $f \in \mathcal{C}^k(U_0)$.

Definiţia 11.5 şi Teorema 11.4 pot fi extinse la sisteme de ecuaţii şi de funcţii implicit-definite. Astfel, avem:

Definiţia 11.6 *Un sistem de ecuaţii*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0 \\ \vdots & & \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0, \end{cases}$$

în care $F_k : A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de expresii cunoscute, cu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $B \subseteq \mathbb{R}^m$, se numeşte ***sistem de funcţii implicite****.*

O ***soluţie*** *a unui astfel de sistem, cu necunoscutele $y_1, y_2, \ldots, y_m$, este un set de m funcţii reale (implicit-definite)*

$$\begin{cases} y_1 & = & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 & = & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots & & \\ y_m & = & f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

cu $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, satisfăcând relaţiile:

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0, \forall\, k = \overline{1, n}.$$

Teorema 11.5 *(a funcţiilor vectoriale implicit-definite)*

Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \end{cases}$$

în care $F_k : A \times B \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $\forall\, k = \overline{1,n}$ *şi* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ *un punct interior al mulţimii* $A \times B$ *(adică* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathring{A}$ *şi* $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) \in \mathring{B}$*).*

Dacă

1) $F_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,n}$;

2) *există* $U \times V \subseteq A \times B$, *o vecinătate a punctului* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *(cu* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *şi* $\mathrm{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$*), astfel încât* $F_k \in \mathcal{C}^1(U \times V)$, $\forall\, k = \overline{1,m}$ *şi*

3) *jacobianul* $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = \det\left[\left(\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}}\right]$ *este diferit de zero,*

atunci:

α) *există o vecinătate deschisă* U_0 *a punctului* x_0, *cu* $U_0 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, *o vecinătate* V_0, *deschisă, a punctului* y_0, *cu* $V_0 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$ *şi o funcţie unică* $f : U_0 \to V_0$, $f(\mathrm{x}) = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x}))$, *astfel încât* $f_j(\mathrm{x}_0) = y_j^0$, $\forall\, j = \overline{1,m}$ *şi* $F_j(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})) = 0$, $\forall\, j = \overline{1,m}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_0$;

β) *Funcţiile* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *sunt de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* U_0, *având derivatele parţiale de ordinul întâi, pe* U_0, *date de formulele:*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_i, y_{k+1}, \ldots, y_m)}(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))}, \forall\, \mathrm{x} \in U_0, \forall\, k = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}.$$

γ) *dacă* $F_1, F_2, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^l(U \times V)$, $l \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^l(U_0; V_0)$.

Inversabilitatea funcţiilor diferenţiabile, de mai multe variabile reale

Se ştie că un sistem algebric liniar de tipul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{cases}, \text{ cu } a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall\, i, j = \overline{1,n},$$

are o soluţie unică dacă şi numai dacă $det\left[(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}\right] \neq 0$. Altfel spus, funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cu expresia

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} -$$

adică, matriceal, $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ – este bijectivă (şi ca atare, ***inversabilă în vecinătatea oricărui punct*** $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$; ***adică inversabilă global***) dacă şi numai dacă $\dfrac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathrm{x}) = \det A \neq 0$.

Extinderea unui asemenea rezultat la cazul sistemelor neliniare de forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n, \end{cases}$$

se poate face, de regulă local, în virtutea următoarei teoreme:

Teorema 11.6 ***(de inversabilitate locală)***

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi deschisă, iar $f : A \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe A. De asemenea, fie $\mathrm{x}_0 \in A$. Dacă $(df)(\mathrm{x}_0)$ este o bijecţie (liniară) de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^n$, adică dacă $det(J_f(\mathrm{x}_0)) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă U a lui x_0, $U \subseteq A$ şi o vecinătate deschisă V a lui $f(\mathrm{x}_0)$, astfel încât $f : U \to V$ să fie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe V. În plus, dacă f este de clasă $\mathcal{C}^k$ de la U la V, atunci f^{-1} este tot de clasă $\mathcal{C}^k$, de la V la U.

Observaţii:

i) Teorema 11.6 poate fi reformulată după cum urmează: "*O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to R^n$, $f \in C^1(A)$*, *este inversabilă în vecinătatea oricărui punct $x_0 \in \mathring{A}$ în care (df) există şi este inversabilă (ca aplicaţie liniară de la R^n la R^n)*".

ii) În condiţiile Teoremei 11.6,cu $f \in \mathcal{C}^1(U;V)$ şi $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V;U)$,avem : $(df)(\mathrm{x}) \circ \left(d\left(f^{-1}\right)\right)(f(\mathrm{x})) = \left(d\left(f^{-1}\right)\right)(f(\mathrm{x})) \circ (df)(\mathrm{x}) = I(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in U$. Aşadar, putem scrie: $\left(d\left(f^{-1}\right)\right)(f(\mathrm{x})) = ((df)(\mathrm{x}))^{-1}$. Adică, matricea jacobiană $J_{f^{-1}}$, calculată în punctul $f(\mathrm{x})$, este inversa matricii $J_f(\mathrm{x})$. Acest fapt permite calculul derivatelor parţiale ale lui f^{-1} în funcţie de derivatele parţiale ale lui f.

Dependenţa sau independenţa funcţională a unui ansamblu de funcţii

Definiţia 11.7 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, iar $f_1, f_2, \dots, f_m$, cu $m \le n$, funcţii definite pe A şi cu valori în $\mathbb{R}$. Se spune despre o funcţie $f_0 : A \to \mathbb{R}$ că* ***depinde (este dependentă) funcţional*** *(sau că este* ***funcţional-dependentă****)* ***de*** *$f_1, f_2, \dots, f_m$,* ***pe*** *$\widetilde{A} \subseteq A$ (cu $\widetilde{A} \neq \varnothing$), dacă, oricare ar fi*

$\mathrm{x}_0 \in \widetilde{A}$*, există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(\mathrm{x}_0)$ *şi o funcţie* $\varphi : V \to \mathbb{R}$*, unde* V *este o vecinătate a punctului* $(f_1(\mathrm{x}_0), f_2(\mathrm{x}_0), \ldots, f_m(\mathrm{x}_0))$*, astfel încât:*

$$f_0(\mathrm{x}) = \varphi\left(f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x})\right), \forall\, \mathrm{x} \in U \cap \widetilde{A}.$$

Altminteri, f_0 *se numeşte* ***funcţional-independentă de*** $f_1, f_2, \ldots, f_m$*, pe* $\widetilde{A}$*.*

În context, despre un ansamblu finit de funcţii de la A *în* $\mathbb{R}$ *se spune că este* ***în dependenţă funcţională*** *atunci când una dintre funcţii este dependentă funcţional de celelalte. În caz contrar, ansamblul respectiv este denumit* ***independent funcţional.***

Propoziţia 11.3 *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime nevidă şi deschisă, iar* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *(cu* $m \leq n$*) o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* A*, de componente* $f_1, f_2, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$*, a cărei matrice jacobiană* $J_f = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *are rangul maxim (adică* m*) în orice punct din* A*. Atunci, o funcţie* $f_0 : A \to \mathbb{R}$*, de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* A*, depinde funcţional de* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *dacă şi numai dacă există* m *funcţii continue* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m : A \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$(df_0)(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(\mathrm{x})\,(df_k)(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

Altfel spus, în ipotezele Propoziţiei 11.3, f_0 *depinde funcţional de* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *dacă* df_0 *se poate exprima, pe* A*, ca o combinaţie liniară de* $df_1, df_2, \ldots, df_m$*.*

Teorema 11.7 ***(a dependenţei funcţionale)***

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime deschisă şi nevidă, iar* $f : A \to \mathbb{R}^n$*, cu* $m \leq n$*, de componente* $f_1, f_2, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$*, o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* A*, a cărei matrice jacobiană* J_j *are rang constant –* $r \leq m$ *– în orice punct* $\mathrm{x} \in A$*. Atunci funcţiile* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *satisfac, local,* $m - r$ *relaţii de dependenţă funcţională.*

Cu alte cuvinte, dacă rang $J_f(\mathrm{x}) = r \leq m$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, atunci doar r dintre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt funcţional independente, iar celelalte $m - r$ sunt dependente de acele r funcţii independente între ele.

Extreme cu legături

În realitatea obiectivă, pe lângă situaţiile în care se cer rezolvate probleme de extrem libere, fără restricţii, precum cele din Exemplele 11.1 şi 11.2, în parte, se întâlnesc şi cazuri de probleme în care extremele unei funcţii se caută în condiţiile satisfacerii, de către argumentele funcţiei respective, a unor relaţii de legătură între ele. În asemenea cazuri, extremele respective poartă denumirea de ***extreme condiţionate*** sau, echivalent, ***extreme cu legături***, legături ce se exprimă, adeseori, prin relaţii de egalitate.

Analizăm aici următoarea situaţie, în care D este o mulţime deschisă, în raport cu topologia uzuală, din $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$), iar $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : F \to \mathbb{R}^m$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, astfel încât se caută punctele de extrem ale funcţiei f, supuse la condiţia suplimentară $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, unde $\mathrm{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $\mathrm{y} \in E \subseteq \mathbb{R}^m$, cu $B \times E \subseteq D$.

Notând cu A mulţimea $\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in D \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ şi cu $g_1, g_2, \ldots, g_m$ componentele funcţiei g, se vede că problema de mai sus cere, de fapt, determinarea punctelor de extrem ale restricţiei lui f la A, adică acele puncte de extrem ale lui f care satisfac, simultan, relaţiile $g_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \ldots, g_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$. Cum $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sunt continue, rezultă că g este continuă şi deci A este o mulţime închisă, în raport cu topologia amintită. Dacă B şi E sunt mărginite, atunci şi A este mărginită. În acest caz, fiind închisă şi mărginită, A este o mulţime compactă. Ca atare, fiind continuă pe A, f va avea, cu siguranţă, puncte de extrem în A. Se mai pune, deci, doar problema determinării lor. În acest scop, este de observat că metoda de evidenţiere a acestor puncte, folosită în cazul extremelor libere, nu este de utilizat, deoarece punctele lui A vor aparţine interiorului acestei mulţimi dacă şi numai dacă $g_1 \equiv g_2 \equiv \ldots \equiv g_m \equiv 0$, ceea ce ar însemna, de fapt, că nu am mai avea o problemă de extrem cu legături.

Pentru tratarea problemei de extrem cu legăturile nenule $g_1, g_2, \ldots, g_m$, am putea încerca să utilizăm teorema funcţiilor implicite (Teorema 11.4 sau Teorema 11.5) pentru a soluţiona mai întâi sistemul $g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, în raport cu y. Scoţând $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$, am putea reduce problema iniţială de extrem la o problemă de extrem liber pentru funcţia obiectiv $f(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}))$, cu $\mathrm{x} \in B$. În această situaţie am putea studia extremele lui $f(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}))$ pe calea prezentată în prima parte a materialului de faţă. Procedeul ar fi însă dificil de folosit în practică, deoarece, în general, ecuaţia vectorială $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ar fi greu de rezolvat în raport cu y şi, chiar dacă, teoretic, acest lucru ar fi posibil, nu ar fi uşor de ajuns la $f(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}))$.

Iată de ce, în realitate, se foloseşte aşa-numita ***metodă a multiplicatorilor lui Lagrange***, descrisă în teorema care urmează după definiţia dată în continuare.

Definiţia 11.8 *a) Se spune că $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in A$ este un* ***punct de extrem local al funcţiei*** *$f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$,* ***cu restricţiile*** *$g_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \ldots, g_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, unde $g_k : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, (sau că $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este* ***punct de extrem local, condiţionat, al lui*** *f), dacă există o vecinătate $V \subseteq D$ a lui $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ astfel încât $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) - f(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ să aibă semn constant $\forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in V \cap A$.*

Spunem că $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in A$ este un ***punct de minim local, condiţionat, al funcţiei*** *f dacă $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) - f(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \geq 0$, $\forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in V \cap A$. Analog, $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este un* ***punct de maxim, condiţionat, pentru*** *f dacă $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) - f(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \leq 0$, $\forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in V \cap A$.*

Altfel exprimat, $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este un punct de extrem (minim sau maxim) local, condiţionat, pentru f dacă el este un punct de extrem (minim şi respectiv maxim) local pentru restricţia funcţiei f la mulţimea de legături (restricţii) A.

b) Un punct $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este un ***punct critic, condiţionat*** *(de A) (sau* ***punct staţionar, condiţionat****), pentru f, dacă el este un punct critic (staţionar) al restricţiei lui f la A.*

Teorema 11.8 ***(de existenţă a multiplicatorilor Lagrange)***

Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}^m$, adică $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, cu $g_k : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, iar $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in D$ un punct de extrem local, condiţionat, al lui f, cu restricţiile $g_k(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$.

Dacă $\dfrac{D(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \neq 0$, adică dacă $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sunt funcţional independente, în raport cu $y_1, y_2, \ldots, y_m$, în $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, atunci există m numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, astfel încât, dacă se consideră funcţia

$$L(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \lambda_1 g_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \lambda_2 g_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}),$$

punctul $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ să-i fie punct critic, adică să satisfacă sistemul de relaţii:

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) & = & 0, \quad \forall\, k = \overline{1, n} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y_j}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) & = & 0, \quad \forall\, j = \overline{1, m} \\[2ex] g_i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) & = & 0, \quad \forall\, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Precizări:

1) Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*.

2) Punctele de extrem condiţionat (în raport cu restricţiile $g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$) pentru funcţia f se găsesc printre punctele critice, condiţionate, ale lui f , adică printre punctele critice ale funcţiei asociate $L = f + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$.

3) Dacă, în expresia $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, admitem că şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sunt variabile, atunci funcţia $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda) \longmapsto L(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda) = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ poartă denumirea de *Lagrangean* asociat lui f şi restricţiilor g_k, $\forall\, k = \overline{1, m}$.

4) Dacă f şi g_k sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D, $\forall\, k = \overline{1, n}$, sau cel puţin pe o vecinătate a unei soluţii $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0; \lambda_0) = (\mathrm{x}_1^0, \mathrm{x}_2^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0, \mathrm{y}_1^0, \mathrm{y}_2^0, \ldots, \mathrm{y}_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ a sistemului de ecuaţii $(*)$, atunci, în virtutea Teoremei 11.8, punctul $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este unul critic pentru funcţia $L(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0; \lambda_0)$, adică avem $d\left(L(\mathrm{x}, \mathrm{y}; \lambda_0)\right)(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$. Totodată, deoarece $L(\mathrm{x}, \mathrm{y}; \lambda_0) - L(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0; \lambda_0) = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) - f(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, $\forall\, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in A$, rezultă că $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este un punct de extrem, condiţionat de legăturile $g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, pentru f, dacă şi numai dacă el este un punct de extrem liber pentru $L(\cdot\,, \cdot\,; \lambda_0)$. Prin urmare, în conformitate cu Teorema 11.3, este necesară studierea formei pătratice $\left(d^2 L(\mathrm{x}, \mathrm{y}; \lambda_0)\right)(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$. Altfel spus, trebuie studiată expresia $\sum\limits_{i,j=1}^{n+m} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \widetilde{x}_i \partial \widetilde{x}_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)\, d\widetilde{x}_i d\widetilde{x}_j$, unde $\widetilde{\mathrm{x}} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_{n+m}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Cum diferenţialele $d\widetilde{x}_1, d\widetilde{x}_2, \ldots, d\widetilde{x}_{n+m}$ nu sunt independente, relaţiile de dependenţă dintre ele se obţin prin diferenţierea ecuaţiilor $g_k(\widetilde{\mathrm{x}}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, anume: $\sum\limits_{k=1}^{n+m} \dfrac{\partial g_i}{\partial \widetilde{x}_j}(\widetilde{\mathrm{x}}_0)\, d\widetilde{x}_k = 0$. Cum $\dfrac{D(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{D(\widetilde{x}_{n+1}, \widetilde{x}_{n+2}, \ldots, \widetilde{x}_{n+m})}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \neq 0$, de aici putem găsi $d\widetilde{x}_{n+1}, d\widetilde{x}_{n+2}, \ldots, d\widetilde{x}_{n+m}$ în funcţie de $d\widetilde{x}_1, d\widetilde{x}_2, \ldots, d\widetilde{x}_n$, prin expresii liniare. Aceste expresii, introduse în $\sum\limits_{i,j=1}^{n+m} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \widetilde{x}_i \partial \widetilde{x}_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)\, d\widetilde{x}_i d\widetilde{x}_j$ conduc la relaţia $d^2 L(\widetilde{\mathrm{x}}_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0\, dx_i dx_j$, reprezentând o formă pătratică pe $\mathbb{R}^n$, în care a_{ij}^0 depind liniar de $\dfrac{\partial^2 g_k}{\partial \widetilde{x}_i \partial \widetilde{x}_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$. Astfel, pe baza Teoremei 11.3, deducem că, dacă $d^2 L(\widetilde{\mathrm{x}}_0)$ este o formă pătratică pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci $\widetilde{\mathrm{x}}_0$ este punct de minim (respectiv maxim) condiţionat, local, pentru f, iar dacă $d^2 L(\widetilde{\mathrm{x}}_0)$ reprezintă o formă pătratică nedefinită, atunci $\widetilde{\mathrm{x}}_0$ nu este punct de extrem pentru f, condiţionat de legăturile $g_k(\widetilde{\mathrm{x}}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$. În fine, dacă $d^2 L(\widetilde{\mathrm{x}}_0)$ este semi-definită (pozitiv sau negativ), atunci nu putem stabili natura punctului $\widetilde{\mathrm{x}}_0$ numai pe baza diferenţialei a doua a lui L.

Aceasta este *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* pentru tratarea problemelor de extrem condiţionat.

Demonstraţie: *(pentru Teorema 11.8)*

Prin aplicarea teoremei funcţiilor implicite pentru sisteme de ecuaţii, adică prin aplicarea Teoremei 11.5 asupra sistemului de legături $g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, se poate spune că există U, o vecinătate a lui x_0, şi o funcţie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe U (adică există $\varphi_k : U \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1,m}$, $\varphi_k \in \mathcal{C}^1(U)$) aşa încât $\varphi(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$ şi $g_k(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x})) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,m}$, $\forall\, \mathrm{x} \in U$. De aici, rezultă că avem (în virtutea regulii "lanţului"), prin derivare:

$$(**)\quad \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x})) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) (\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x})) = 0, \forall\, k = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}.$$

Considerând funcţia $F(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x}))$, $\forall\, \mathrm{x} \in U$, putem zice că, deoarece $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ este un punct de extrem local, cu restricţiile $g_k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,m}$, pentru f, iar $(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x})) \in A$, $\forall\, \mathrm{x} \in U$, punctul x_0 este unul de extrem local, necondiţionat, pentru F pe U. Atunci, potrivit Teoremei 11.1 (Fermat), avem $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,n}$. Cu alte cuvinte, avem:

$$(!)\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = 0, \forall\, k = \overline{1,n}.$$

Cum, $\dfrac{D(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \neq 0$, reiese că sistemul liniar algebric

$$(***)\quad \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)\alpha_k = -\frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0), \forall\, j = \overline{1,m}$$

are o soluţie unică. Fie aceasta notată cu $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$. În raport cu ea, funcţia $L = f + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 g_k$ satisface relaţiile din sistemul $(*)$.

Într-adevăr, cum $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in A$, avem $g_k(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,m}$.

În plus, calculând derivatele parţiale ale lui L în raport cu x_i, găsim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0) \right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_k^0 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0),
\end{aligned}$$

dacă se ţine seama şi de relaţiile $(**)$ şi $(***)$. De aici, folosind (!), se deduce că $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$

În fine, derivând L în raport cu y_j şi ţinând, iarăşi, cont de faptul că $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ este soluţia sistemului $(***)$, obţinem:

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0, \forall\, j = \overline{1,m}.$$

◀

Aplicând acum metoda multiplicatorilor lui Lagrange în cazul problemei entropiei lui Shannon, adică în cazul problemei de extrem pentru funcţia

$$\widetilde{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k, \text{ unde } p_k \in (0,1), \forall\, k = \overline{1,n},$$

cu condiţia $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, ne dăm seama că $m = 1$, $g(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k - 1$ şi Lagrangeanul în cauza prezentă este:

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_n; \lambda_1) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{n} p_k - 1 \right).$$

Atunci sistemul de tip $(*)$, este următorul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_k}(p_1, p_2, \ldots, p_n; \lambda_1) & = & -\left(\log_2 p_k + \dfrac{1}{p_k \ln 2} \right) + \lambda_1 = 0, \forall\, k = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}(p_1, p_2, \ldots, p_n; \lambda_1) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k - 1 = 0. \end{cases}$$

Din primele n ecuaţii, reiese că $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \psi(\lambda_1)$, iar dacă se ţine seama şi de ultima ecuaţie, rezultă soluţia:

$$p_1^0 = p_2^0 = \ldots = p_n^0 = \frac{1}{n} = \psi(\lambda_1^0), \lambda_1^0 = \log_2 \frac{1}{n} + \frac{n}{\ln 2}.$$

Pe baza legăturii $g_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$, deducem că $dp_1 + dp_2 + \cdots + dp_n = 0$. Astfel, avem:

$$\left(\left(d^2 L \right) (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0; \lambda_1^0) \right) (\mathrm{u}) < 0, \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\},$$

ceea ce înseamnă că punctul $(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right)$ este unul de maxim pentru $\widetilde{H}$, în condiţia $g_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$.

Prin urmare, entropia informaţională maximă se obţine pentru variabila aleatoare

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

a cărei distribuţie de probabilitate este uniformă.

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (§11.6)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 7 şi 8)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. Maria Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni (cap.VII)*, Reprografia Universităţii Craiova, 2000.

4. G. Păltineanu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial,* Editura AGIR, Bucureşti, 2002.

5. F. Iacob - *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005 (tema 3, modulul 3).

6. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (§6.6)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

7. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (§7.4)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

8. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

Cursul 12

Şiruri şi serii de funcţii reale.
Serii de puteri. Serii Taylor. Serii trigonometrice. Serii Fourier.

Două dintre entităţile de prim plan din domeniul analizei matematice sunt ***şirul de funcţii*** şi ***seria de funcţii***. Prezentăm aici aceste noţiuni, cu referiri la convergenţa punctuală şi la convergenţa uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii reale, la unele criterii de convergenţă uniformă, precum şi la rezultate ce privesc transferul de proprietăţi de la funcţiile ce sunt termeni ai unui şir (sau ai unei serii) la funcţia limită (respectiv sumă). Cazurile particulare ale seriilor de puteri (în rândul cărora intră *seriile Taylor*) şi ale seriilor trigonometrice (cu subsidiarele *serii Fourier-trigonometrice*) sunt expuse la urmă.

Şiruri de funcţii reale

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi spaţiul liniar real al funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), notat cu $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$.

Definiţia 12.1 *Se numeşte* ***şir de funcţii*** *definite pe A şi cu valori în $\mathbb{R}^q$ o aplicaţie de la $\mathbb{N}^*$ la $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$.*

Un asemenea şir se notează cu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(\subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q))$, ori $(f_n)_{n\geq 1}$ sau $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$.

Definiţia 12.2 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii reale. Elementul $\mathrm{x}_0 \in A$ se numeşte* ***punct de convergenţă*** *al şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dacă şi numai dacă şirul numeric $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$ este convergent.*

Mulţimea punctelor de convergenţă ale unui şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ poartă denumirea de ***mulţime de convergenţă*** *pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi, notată cu A_c, este submulţime a lui A.*

Exemplu: Când $p = q = 1$, $A = [-3, 5]$ şi $f_n(x) = x^n$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$, punctul $x = -1$ nu este unul de convergenţă pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ întrucât şirul numeric $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este unul divergent. Totodată, punctul $x = \dfrac{1}{2}$ este unul de convergenţă pentru şirul de funcţii considerat aici, deoarece şirul numeric $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent (la 0). Mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii în cauză este, uşor de constatat, $(-1, 1]$.

Observaţie: În cazul în care $q > 1$, şirul numeric real $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$, pe baza căruia se decide dacă $\mathrm{x}_0 \in A$ este sau nu punct de convergenţă pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, se poate investiga prin intermediul şirurilor sale componente $(f_n^j(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $j = \overline{1, q}$.

Dacă un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ are mulţimea de convergenţă $A_c \subseteq A$ nevidă, atunci se poate defini pe A_c o funcţie f, prin $\mathrm{x} \in A_c \longmapsto f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})$, numită ***funcţia limită a şirului de funcţii*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***pe mulţimea*** A_c.

De pildă, în exemplul de mai sus, în care $p = q = 1$, $A = [-3, 5]$, $f_n(x) = x^n$, $\forall\, x \in A$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, iar $A_c = (-1, 1]$, funcţia limită în cauză este $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ şi $f(1) = 1$.

Definiţia 12.3 *a) Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$. Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte* ***punctual*** *(sau* ***simplu****)* ***convergent la*** *f, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, $\widetilde{A} \neq \varnothing$, dacă şi numai dacă $\widetilde{A} \subseteq A_c$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_{\varepsilon,\mathrm{x}} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_{\varepsilon,\mathrm{x}}$, are loc: $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \varepsilon$.*

b) *Un şir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *se numeşte* ***punctual*** *(simplu)* ***convergent pe o mulţime nevidă*** $\widehat{A} \subseteq A$ *dacă există* $f \in \mathcal{F}(\widehat{A};\mathbb{R}^q)$ *astfel încât* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *să conveargă punctual la (similar spus, să aibă limita punctuală)* f.

Faptul că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge punctual, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, la f se notează prin $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$. Altminteri, când $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ nu este convergent punctual la o funcţie f (din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$), pe o submulţime $\widetilde{A} \subseteq A$, se foloseşte notaţia $f_n \overset{p/\widetilde{A}}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} f$.

Observaţie: Dacă se doreşte ca o anumită proprietate a funcţiilor termeni - f_n - din cadrul şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ să se regăsească la funcţia limită f, convergenţa punctuală a lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la f este, mai întotdeauna, neasigurătoare pentru "transferul" proprietăţii vizate. Nu mai departe decât şirul din exemplul precedent are funcţiile termeni - $f_n(x) = x^n$ - continue la stânga în $x = 1$, dar funcţia sa limită punctuală - $f(x) = 0$, $\forall\ x \in (-1,1)$ şi $f(1) = 1$ - nu este continuă la stânga în punctul respectiv.

Un alt tip de convergenţă, adecvat "transferului de proprietăţi" mai mult decât convergenţa punctuală, este cel relativ la ***convergenţa uniformă*** a unui şir de funcţii, introdus după cum urmează.

Definiţia 12.4 *a) Şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *se numeşte* ***convergent uniform*** *pe* $\widetilde{A} \subseteq A$, ***la*** $f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, *dacă şi numai dacă* $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *cu* $n \geq n_\varepsilon$ *şi pentru orice* $\mathrm{x} \in \widetilde{A}$, *are loc relaţia:* $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \varepsilon$. *Notăm acest fapt prin* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

b) *Şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *se numeşte* ***convergent uniform pe*** $\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A$ *dacă şi numai dacă există* $f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$ *aşa încât* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

Observaţii:

1) Din definiţiile 12.3 şi 12.4, se deduce că dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$.

2) Pe baza Definiţiei 12.4, se vede că dacă şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, converge uniform pe $\widetilde{A} \subseteq A$ ($\widetilde{A} \neq \varnothing$) şi există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

3) Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ nu converge uniform, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, către $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, adică $f_n \overset{u/\widetilde{A}}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} f$, dacă şi numai dacă există $\varepsilon_0 > 0$ aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se pot găsi $k_n \in \mathbb{N}^*$, cu $k_n \geq n$ şi $\mathrm{x}_n \in \widetilde{A}$, pentru care să avem $\|f_{k_n}(\mathrm{x}_n) - f(\mathrm{x}_n)\| \geq \varepsilon_0$.

4) Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ este un şir de funcţii convergent punctual la un element $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, pe mulţimea $\widetilde{A} \subseteq A$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, ori de câte ori, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea $\{n_{\varepsilon,\mathrm{x}} \mid \mathrm{x} \in \widetilde{A}\}$ (în care $n_{\varepsilon,\mathrm{x}}$ este rangul - din $\mathbb{N}^*$ - implicat în Definiţia 12.3) este mărginită.

Pentru stabilirea situaţiei în care are loc convergenţa uniformă a unui şir de funcţii, pe o anume mulţime, se poate utiliza unul dintre următoarele criterii.

Propoziţia 12.1 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$. Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniform pe $\widetilde{A} \subseteq A$ ($\widetilde{A} \neq \varnothing$) dacă şi numai dacă este* ***uniform fundamental (Cauchy) pe*** *$\widetilde{A}$, adică*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ aşa încât }, \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } m, n \geq n_\varepsilon, \text{ are loc relaţia}$$

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$$

sau, echivalent,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ aşa încât }, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\, p \in \mathbb{N}^* \text{ are loc}$$

$$\|f_{n+p}(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Demonstraţie: Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe $\widetilde{A}$, atunci, în conformitate cu Definiţia 12.4 b), există $f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, astfel încât: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. Potrivit primei părţi a aceleiaşi definiţii, aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. De aici, rezultă că, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $m, n \geq n_\varepsilon$, este adevărată relaţia:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Aşadar, are loc relaţia din enunţ, în conformitate cu care $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir uniform fundamental de funcţii din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$.

Reciproc, dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir uniform fundamental (Cauchy) pe $\widetilde{A}$, atunci $(f_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$ este, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, un şir numeric Cauchy. Cum, în $\mathbb{R}^q$, orice şir Cauchy este convergent, rezultă că, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $(f_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ are o limită (unică) $l_\mathrm{x} \in \mathbb{R}^q$. Se obţine astfel o funcţie $f : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^q$, definită prin $f(\mathrm{x}) = l_\mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, în raport cu care avem: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$. Ţinând acum seama de faptul că, $\forall\, \varepsilon > 0$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $m, n \geq n_\varepsilon$, avem $\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ şi, pentru $m \longrightarrow \infty$, găsim că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. Ca atare, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, potrivit cu Definiţia 12.4 a). ◀

Propoziţia 12.2 *Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ converge, uniform pe $\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$, la $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, dacă şi numai dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \right) = 0.$$

Demonstraţie: Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, atunci, conform Definiţiei 12.4 a), $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Prin urmare, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}^*$, are loc relaţia

$$\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de unde deducem că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \right) = 0$.

Reciproc, dacă are loc condiţia din enunţ, atunci:

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,\ \text{încât},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \text{cu}\ n \geq n_\varepsilon,\ \text{avem}\ \sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}<\varepsilon$$

şi astfel, cu atât mai mult, $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}<\varepsilon$, $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$. Aşadar, putem considera că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. ◀

Revenind la exemplul şirului de funcţii $f_n:[-3,5]\to\mathbb{R}$, cu $f_n(x)=x^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x\in[-3,5]$, constatăm că $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u/\widetilde{A}}{\nrightarrow}} f$, unde $\widetilde{A}=(-1,1]$ şi $f:\widetilde{A}\to\mathbb{R}$, cu $f(x)=0$, $\forall\, x\in(-1,1)$ şi $f(1)=1$. Aceasta întrucât $\sup\limits_{\mathrm{x}\in(-1,1]}|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})| = \sup\limits_{\mathrm{x}\in(-1,1]} x^n=1\nrightarrow 0$, când $n\longrightarrow\infty$. În acelaşi timp, deducem că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\hat{A}} f|_{\hat{A}}$, unde $\hat{A}=[\alpha,\beta]\subseteq(-1,1)$. Asta deoarece $\sup\limits_{\mathrm{x}\in\hat{A}}\big|f_n(\mathrm{x})-f|_{\hat{A}}(\mathrm{x})\big|=\sup\limits_{\mathrm{x}\in\hat{A}}x^n=\max\{|\alpha|^n,|\beta|^n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Propoziţia 12.3 ***(criteriul majorării pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale)***

Fie $A\subseteq\mathbb{R}^p$, $A\neq\varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$.

a) Dacă există $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, astfel încât $g_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} g\equiv\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\leq\|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\forall\mathrm{x}\in\widetilde{A}\subseteq A$, atunci $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

b) Dacă există $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathbb{R}_+$, astfel încât $\gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ şi $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\leq\gamma_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}\subseteq A$, atunci $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

Demonstraţie: a) $g_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}}\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, avem $\|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}<\varepsilon$, $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$. Atunci, ţinând seama că $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\leq\|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$, rezultă: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}<\varepsilon$, $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$. Deci: $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

b) Cum $\gamma_n\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0$ şi $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\leq\gamma_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$, rezultă că, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, $\forall\,\mathrm{x}\in\widetilde{A}$,avem: $\|f_n(\mathrm{x})-f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\leq\gamma_n<\varepsilon$. Atunci, în conformitate cu Definiţia 12.4 a), deducem că $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. ◀

Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ asigură păstrarea, pentru funcţia limită, a unor proprietăţi ale funcţiilor ce sunt termeni ai şirului, proprietăţi între care menţionăm: mărginirea, existenţa limitei într-un punct, continuitatea, diferenţiabilitatea (derivabilitatea) şi integrabilitatea. O asemenea calitate este evidenţiată de teoremele care urmează.

Teorema 12.1 ***(pentru transfer de mărginire)***

Fie $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}^p$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii mărginite pe A. Dacă $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, unde $f\in\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, atunci f este mărginită pe A.

Demonstraţie: Cum $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, rezultă că, pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_1$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < 1, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

În acelaşi timp, deoarece f_{n_1} este mărginită pe A, există $\mu > 0$, aşa încât: $\|f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \mu$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$. Combinând cele două relaţii şi luând $n = n_1$ în prima dintre ele, obţinem:

$$\|f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f(\mathrm{x}) - f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq 1 + \mu, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

Deci f este mărginită pe A. ◀

Teorema 12.2 ***(pentru transferul existenţei limitei într-un punct)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *şi* $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, *astfel încât* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$. *Dacă* $\mathrm{x}_0 \in A'$ *şi există* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci există* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ *şi, în plus, are loc egalitatea:*

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right).$$

Demonstraţie: Cum $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, reiese că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$(*) \quad \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall\, x \in A.$$

Totodată, pentru că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, considerând $n = n_\varepsilon$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in A$, cu $\mathrm{x}' \neq \mathrm{x}_0$, $\mathrm{x}'' \neq \mathrm{x}_0$ şi $\|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Combinând aceste relaţii, deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in A$, cu $\mathrm{x}' \neq \mathrm{x}_0$, $\mathrm{x}'' \neq \mathrm{x}_0$ şi $\|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$, avem:

$$\begin{aligned}\|f(\mathrm{x}') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} \quad &\leq \quad \|f(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}')\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} + \\ &+ \qquad \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

În consecinţă, potrivit Teoremei 9.3, există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$.

Trecând acum la limită (cu $\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$) în $(*)$, obţinem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$\|\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x}) - \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

De aici, rezultă că egalitatea $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right)$ are într-adevăr loc. ◀

Teorema 12.3 ***(pentru transfer de continuitate)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *un şir de funcţii uniform convergent, pe* A, *la o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}^q$.

a) Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *este continuă în* $\mathrm{x}_0 \in A$, *atunci şi* f *este continuă în* x_0.

b) Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *este continuă pe o mulţime* $\widetilde{A} \subseteq A$, *atunci la fel este şi* f, *adică* $f \in \mathcal{C}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$.

Demonstraţie: a) Cum, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n este continuă în $\mathrm{x}_0 \in A$, rezultă că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x}) = f_n(\mathrm{x}_0)$. Astfel, deoarece $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, prin aplicarea Teoremei 12.2, deducem că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ şi

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0).$$

Deci f este continuă în x_0.

b) Faptul că, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n este continuă pe $\widetilde{A}$, înseamnă că f_n este continuă în orice punct din $\widetilde{A}$. Atunci, pe baza rezultatului de la a), rezultă că f, limita uniformă a şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pe $\widetilde{A}$, este de asemenea continuă în orice punct al lui $\widetilde{A}$. Prin urmare, f este continuă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţie: Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii constituie o condiţie suficientă, nu şi necesară, pentru transferul proprietăţilor de mărginire, existenţă a limitei într-un punct sau continuitate. Există şiruri de funcţii mărginite sau continue care, deşi converg numai punctual, au funcţia limită cu aceeaşi proprietate.

Cât priveşte diferenţiabilitatea (derivabilitatea) funcţiei limită, are loc următorul rezultat.

Teorema 12.4 ***(pentru transfer de diferenţiabilitate)***

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime mărginită, deschisă şi convexă, iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii diferenţiabile Fréchet pe A. Dacă există un punct $\mathrm{x}_0 \in A$ aşa încât şirul $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ să fie convergent în $\mathbb{R}^q$ şi există $L : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât $(df_n)(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} L(\cdot)$, atunci există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ aşa încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, f este diferenţiabilă Fréchet pe A şi $df = L$.

Demonstraţie: Cum, pentru orice m şi n din $\mathbb{N}^*$, funcţia $(f_n - f_m)$ este diferenţiabilă pe mulţimea nevidă, deschisă şi convexă A, se poate vedea că, $\forall\,\mathrm{x} \in A$, există $\xi \in \{t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{x}_0 \mid t \in (0,1)\} \subseteq A$, astfel încât:

$$(**) \quad \|\,(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})) - (f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0))\,\|_{\mathbb{R}^q} \le \|\,(df_n)(\xi) - (df_m)(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)} \cdot \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Într-adevăr, considerând funcţia $g_{n,m} : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$(!) \quad g_{n,m}(\mathrm{z}) = \sum_{k=1}^{q} \left[(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})) - (f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0))\right](f_{n,k}(\mathrm{z}) - f_{m,k}(\mathrm{z})), \forall\,\mathrm{z} \in A,$$

unde $f_n = (f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots, f_{n,q})$ şi $f_m = (f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots, f_{m,q})$, se poate constata faptul că există $\xi \in \{t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{x}_0 \mid t \in (0,1)\}$ aşa încât:

$$(!!) \quad g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = (dg_{n,m}(\xi))(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

Această relaţie (formulă de medie) rezultă prin aplicarea formulei lui Lagrange asupra funcţiei $h_{n,m} : (-\omega, \omega+1) \to \mathbb{R}$, definită prin $h_{n,m}(s) = g_{n,m}(\mathrm{x}_0 + s(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0))$, $\forall\, s \in (-\omega, \omega+1)$, unde $\omega > 0$ este astfel încât $\{\mathrm{x}_0 + s(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \mid s \in (-\omega, \omega+1)\} \subseteq A$. Întrucât $h_{n,m}$ este continuă pe $[0,1]$ şi derivabilă pe $(0,1)$, există, potrivit teoremei de medie a lui Lagrange, un punct $\sigma \in (0,1)$ aşa încât $h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma)$, adică:

$$g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_{n,m}}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0))(x_k - x_k^0) =$$

$$= \langle \nabla g_{n,m}(\mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)), \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 \rangle = (dg_{n,m}(\xi))\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0), \text{ unde } \xi = \mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

Acum, folosind (!) în (!!) şi apelând la inegalitatea lui Cauchy, obţinem:

$$\|\,(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})) - (f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0))\,\|^2_{\mathbb{R}^q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{q} \left[(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})) - (f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0))\right]^2 = \\
&= g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = (dg_{n,m}(\xi))\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left[(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})) - (f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0))\right] \cdot d\,(f_{n,k} - f_{m,k})\,(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \\
&= \langle (f_n - f_m)\,(\mathrm{x}) - (f_n - f_m)\,(\mathrm{x}_0), d\,(f_n - f_m)\,(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\rangle_e \leq \\
&\leq \|\,(f_n - f_m)\,(\mathrm{x}) - (f_n - f_m)\,(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|d\,(f_n - f_m)\,(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
&\leq \|\,(f_n - f_m)\,(\mathrm{x}) - (f_n - f_m)\,(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|d\,(f_n - f_m)\,(\xi)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^p}.
\end{aligned}$$

De aici, prin simplificare, rezultă relaţia $(**)$.

Pe baza acestei relaţii, în virtutea ipotezelor de mărginire a mulţimii A şi de uniformă convergenţă a şirului $((df_n)\,(\xi))_{n\in\mathbb{N}^*}$ în $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, dacă ţinem seama de Propoziţia 12.1, deducem faptul că şirul $(f_n(\cdot) - f_m(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe A. Aceasta, întrucât, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x}_0) - (f_m(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x}_0))\,\|_{\mathbb{R}^q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \|\,(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})) - (f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0))\,\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
&\leq \|\,(df_n)\,(\xi) - (df_m)\,(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)} \cdot \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A.
\end{aligned}$$

Drept urmare, deoarece $f_n(\mathrm{x}) = f_n(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x}_0) + f_n(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, iar $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este, prin ipoteză, un şir uniform convergent pe A. Există deci $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ aşa încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$.

Astfel ţinând seama iarăşi de ipoteza convergenţei uniforme, la L, a şirului $(df_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}\,(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q))$, se poate spune că avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n(\mathrm{x}) - f_n(\widetilde{\mathrm{x}}) - (df_n)\,(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}} - \frac{f(\mathrm{x}) - f(\widetilde{\mathrm{x}}) - L(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}} \right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q},$$

$\forall\, \mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}} \in A$, $\mathrm{x} \neq \widetilde{\mathrm{x}}$. De aici, întrucât

$$\lim_{\mathrm{x}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{x}}} \frac{f_n(\mathrm{x}) - f_n(\widetilde{\mathrm{x}}) - (df_n)\,(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că există

$$\lim_{\mathrm{x}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{x}}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\widetilde{\mathrm{x}}) - L(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}}$$

şi această limită este egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$.

Ca atare, ţinând seama de Definiţia 10.6 şi de observaţiile de imediat după ea, conchidem că f este diferenţiabilă Fréchet în punctul arbitrar $\widetilde{\mathrm{x}}$ din A şi, în plus, $(df)(\widetilde{\mathrm{x}}) = L(\widetilde{\mathrm{x}}), \forall\, \widetilde{\mathrm{x}} \in A$. ◀

Cât priveşte transferul proprietăţii de integrabilitate (în sens Riemann), are loc următorul rezultat, a cărui demomstraţie o vom lămuri în următoarele două secţiuni (v. Cursurile 13 şi 14).

Teorema 12.5 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime nevidă, închisă şi mărginită, iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii integrabile, în sens Riemann, pe A, astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, atunci f este Riemann-integrabilă pe A şi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int_A f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}.$$

În particular, când $p = q = 1$ şi $A = [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$), iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}([\alpha,\beta];\mathbb{R}^q)$ este un şir pentru care există $\int_\alpha^\beta f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[\alpha,\beta]} f \in \mathcal{F}([\alpha,\beta];\ \mathbb{R}^q)$, atunci putem afirma că există şi $\int_\alpha^\beta f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, fiind adevărată relaţia: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int_\alpha^\beta f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$.

Serii de funcţii

Definiţia 12.5 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$. De asemenea, fie şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Perechea $((f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ se numeşte* ***serie de funcţii*** *din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ şi se notează prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sau $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$.*

Definiţia 12.6 *O serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte* ***punctual (simplu) convergentă pe*** *$\widetilde{A} \subseteq A$ dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este punctual (simplu) convergent pe $\widetilde{A}$. Funcţia $S : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^q$, pentru care $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} S$, se numeşte* ***suma punctuală a seriei de funcţii*** *$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ şi $S(\mathrm{x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$.*

Definiţia 12.7 *Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ se numeşte* ***uniform convergentă*** *pe $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă şi numai dacă şirul asociat (al sumelor-funcţii parţiale) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent uniform pe $\widetilde{A}$. În acest caz, elementul $S \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, pentru care $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} S$, se numeşte* ***suma uniformă a seriei de funcţii*** *$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ şi $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, uniform pe $\widetilde{A}$.*

Definiţia 12.8 *O serie de funcţii $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte* ***absolut convergentă într-un punct*** *$x_0 \in A$ (respectiv* ***pe o mulţime*** *$\widetilde{A} \subseteq A$) dacă seria numerică $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} \|f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^q}$ (respectiv $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} \|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}$) este convergentă (respectiv convergentă pentru orice $x \in \widetilde{A}$).*

Ţinând seama de aceste definiţii, precum şi de criteriul lui Cauchy de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii (vezi Propoziţia 12.1), putem spune că studiul convergenţei punctuale a unei serii de funcţii $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se face pe baza studiului seriei numerice $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(\mathrm{x})$, cu $\mathrm{x} \in A$, folosind criterii specifice pentru convergenţa unei astfel de serii, pe când convergenţa uniformă a seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ se poate aprecia potrivit următorului criteriu:

Propoziţia 12.4 *Fie şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$. *Seria de funcţii* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *este uniform convergentă pe* $\widetilde{A} \subseteq A$*, dacă şi numai dacă şirul asociat* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *(cu* $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$*) este uniform fundamental pe* $\widetilde{A}$*, adică dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât, } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \text{ avem}$$

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Caracterizarea situaţiei în care seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ nu este uniform convergentă pe $\widetilde{A}$ se obţine negând relaţia de mai sus. Astfel, se poate zice că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ nu converge uniform pe $\widetilde{A}$ dacă şi numai dacă există $\varepsilon_0 > 0$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se găsesc $k_n \in \mathbb{N}^*$şi $p_n \in \mathbb{N}^*$, cu $k_n \geq n$, precum şi $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$, pentru care avem:

$$\|f_{k_n+1}(\widetilde{\mathrm{x}}) + f_{k_n+2}(\widetilde{\mathrm{x}}) + \cdots + f_{k_n+p_n}(\widetilde{\mathrm{x}})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0.$$

Propoziţia 12.5 *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *din* $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *este absolut convergentă într-un punct* $\mathrm{x}_0 \in A$*, atunci ea este convergentă în respectivul punct.*

Demonstraţie: Deoarece seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este absolut convergentă în x_0, rezultă că seria numerică $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}$ este convergentă, ceea ce, potrivit criteriului general al lui Cauchy, înseamnă că $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Dar, cum

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}_0) + f_{n+2}(\mathrm{x}_0) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_{n+1}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q},$$

se poate spune că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, are loc relaţia din enunţul Propoziţiei 12.4 pentru $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$. Drept urmare, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este convergentă în punctul x_0. ◀

Unul dintre criteriile de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii, deosebit de util în practică, este cel din teorema care urmează.

Teorema 12.6 ***(Criteriul lui Weierstrass)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$. Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, aşa încât $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă şi

$$(\#) \quad \|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq u_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \forall\, \mathrm{x} \in A,$$

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A.

Demonstraţie: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ fiind convergentă, înseamnă că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem: $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon$. Atunci, în virtutea relaţiei (#), rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned} & \|f_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ \leq\ & \|f_{n+1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ \leq\ & u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A. \end{aligned}$$

În conformitate cu Propoziţia 12.4 şi cu criteriul lui Cauchy de absolută convergenţă, deducem de aici că seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A. ◀

Observaţie: De regulă, dacă $\sup\limits_{\mathrm{x}\in A}\{\|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\} < +\infty$, se foloseşte criteriul lui Weierstrass (din Teorema 12.6), luând $u_n = \sup\limits_{\mathrm{x}\in A}\{\|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci când $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este convergentă.

Un alt criteriu de convergenţă uniformă (nu şi absolută), pentru serii de funcţii de forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$, este următorul:

Teorema 12.7 ***(Criteriul lui Dirichlet)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$,$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ şi $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit uniform, iar şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător şi uniform convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Demonstraţie: Cum şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este uniform mărginit, există $M > 0$, aşa încât

$$(\bullet) \quad \|f_1(\mathrm{x}) + f_2(\mathrm{x}) + \cdots + f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

În acelaşi timp, deoarece $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent la 0 pe A, rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem: $|g_n(\mathrm{x})| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$.

Ţinând seama ce aceasta, de (•) şi de faptul că $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător pe A, obţinem:

$$\begin{aligned}
& \|f_{n+1}(\mathrm{x})g_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x})g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} = \\
= \; & \|\left(S_{n+1}(\mathrm{x}) - S_n(\mathrm{x})\right) g_{n+1}(\mathrm{x}) + \left(S_{n+2}(\mathrm{x}) - S_{n+1}(\mathrm{x})\right) g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots \\
& \cdots + \left(S_{n+p}(\mathrm{x}) - S_{n+p-1}(\mathrm{x})\right) g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} = \\
= \; & \| - S_n(\mathrm{x})g_{n+1}(\mathrm{x}) + S_{n+1}(\mathrm{x})\left(g_{n+1}(\mathrm{x}) - g_{n+2}(\mathrm{x})\right) + \cdots \\
& \cdots + S_{n+p-1}(\mathrm{x})\left(g_{n+p-1}(\mathrm{x}) - g_{n+p}(\mathrm{x})\right) + S_{n+p}(\mathrm{x})g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
\leq \; & M\left[g_{n+1}(\mathrm{x}) + g_{n+1}(\mathrm{x}) - g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + (g_{n+p-1}(\mathrm{x}) - g_{n+p}(\mathrm{x}) + g_{n+p}(\mathrm{x})\right] < \\
< \; & 2M \cdot g_{n+1}(\mathrm{x}) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, p \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Potrivit Propoziţie 12.4, conchidem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A. ◀

Tot pentru serii de forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ există şi criteriul lui Abel, în conformitate cu următorul rezultat.

Teorema 12.8 ***(Criteriul lui Abel)***
Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi şirurile de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A, iar şirul $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform mărginit şi monoton pentru orice $\mathrm{x} \in A$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A.

Demonstraţie: Şirul $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ fiind uniform mărginit şi monoton pentru fiecare $\mathrm{x} \in A$, există $l_{\mathrm{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\mathrm{x})$, cu $l_{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$. Dacă $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător, şirul $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $g : A \to \mathbb{R}$ este definită prin $g(\mathrm{x}) = l_{\mathrm{x}}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, este convergent la 0, uniform (în ipotezele din enunţ) pe A. În plus, $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar fi şi monoton descrescător. Scriind $f_n g_n = f_n(g_n - g) + f_n g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ne dăm seama că, prin aplicarea Teoremei 12.7 şi a faptului că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A (ceea ce implică că şirul corespunzător al sumelor parţiale, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este uniform mărginit), rezultă uniforma convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$. ◀

Ca şi în cazul şirurilor de funcţii, convergenţa uniformă a seriilor oferă posibilitatea transferului de proprietăţi (precum continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea) de la termenii seriilor în cauză la funcţiile-sumă ale lor. În acest caz, prin interpretarea adecvată a Teoremelor 12.1 - 12.5, are loc următorul rezultat, a cărui demonstraţie se poate face pe baza proprietăţilor adecvate de transfer ale şirului sumelor parţiale în cauză.

Teorema 12.9 *1) Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, astfel încât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A. Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n este mărginită pe A sau are limită într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A$ sau este continuă într-un punct $\widetilde{\mathrm{x}} \in A$ ori pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ sau este integrabilă Riemann pe A, atunci şi suma uniformă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este respectiv mărginită pe A, are limită* *în* x_0*, este continuă în* $\widetilde{\mathrm{x}}$ *ori pe* $\widetilde{A}$ *sau este integrabilă Riemann pe* A*, iar în acest din urmă caz integrala pe* A *din funcţia sumă este egală cu suma seriei integralelor pe* A *din termenii* f_n*.*

2) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ *o mulţime mărginită, deschisă şi convexă, iar* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *un şir de funcţii diferenţiabile Fréchet pe* A*. Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} df_n$*, de elemente din* $\mathcal{F}(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q))$*, este uniform convergentă la* $\widetilde{f} \in \mathcal{F}(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q))$ *şi există* $\mathrm{x}_0 \in A$ *încât seria numerică* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(\mathrm{x}_0)$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *este uniform convergentă, pe* A*, la o funcţie* f $(\in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q))$ *care este diferenţiabilă Fréchet pe* A *şi* $df = \widetilde{f}$*.*

Cazuri particulare ale seriilor de funcţii reale sunt acelea ale seriilor de puteri şi seriilor trigonometrice în $\mathbb{R}$, pe care le prezentăm în continuare.

Serii de puteri în $\mathbb{R}$

Definiţia 12.9 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale şi* $x_0 \in \mathbb{R}$*, fixat arbitrar. Seria de funcţii* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$*, în care* $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$*,* $\forall\, x \in A \subseteq \mathbb{R}$ *,*$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, se numeşte* ***serie de puteri*** *(sau* ***serie întreagă****),* ***în variabila*** x*,* ***centrată în*** x_0 ***şi cu coeficienţii*** a_n*.*

Numărul real a_n *se numeşte* ***coeficientul termenului de rang*** n *din seria de puteri*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Observaţii:

a) Toate rezultatele stabilite pentru serii de funcţii oarecari sunt aplicabile, desigur, şi în cazul particular al seriilor de puteri.

b) O chestiune de bază din studiul seriilor de puteri este determinarea mulţimilor de convergenţă punctuală, absolută şi uniformă.

c) Mulţimea de convergenţă punctuală a oricărei serii de puteri este nevidă, întrucât măcar x_0 aparţine respectivei mulţimi. Convenim să notăm cu A_{cp} mulţimea de convergenţă punctuală a unei serii de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$.

d) Prin schimbarea de variabilă $x \longrightarrow y = x - x_0$, se poate considera seria de puteri mai simplă (centrată în $y_0 = 0$) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y^n$. Orice rezultat stabilit pentru această serie este adevărat, în mod corespunzător, şi pentru seria iniţială, aşa încât, în continuare, ne concentrăm atenţia asupra cazului în care $x_0 = 0$, adică asupra seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Teorema 12.10 ***(Abel)***

Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *există un element* $r \in [0,+\infty]$*, numit* ***rază de convergenţă*** *a seriei în cauză, astfel încât:*

i) dacă $r = 0$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă numai pentru* $x = 0$, *adică* $A_{cp} = \{0\}$;

ii) dacă $r > 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este absolut convergentă pe intervalul* $(-r, r)$;

iii) dacă $0 < r < +\infty$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este divergentă pe* $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$;

iv) dacă $r = +\infty$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă pe* $\mathbb{R}$;

v) dacă $r > 0$ *şi* $\rho \in (0, r)$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe orice interval* $[\alpha, \beta] \subseteq [-\rho, \rho]$.

Demonstraţie: Cum $0 \in A_{cp}$ pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, reiese că $A_{cp} \neq \varnothing$. Considerăm:

$$r = \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}.$$

Este evident că $r \in [0, +\infty]$. Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$şi deci are loc i). Dacă $r > 0$, atunci, pentru orice $|x_0| < r$, există $x_1 \in A_{cp} \backslash \{0\}$, aşa încât $|x_0| < |x_1| < r$. Cum $x_1 \in A_{cp}$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_1^n$ este convergentă şi, ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. În consecinţă, există $M > 0$, astfel ca $|a_n x_1^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$|a_n x_0^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Întrucât $\left|\frac{x_0}{x_1}\right| < 1$, seria geometrică cu termenul general $\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n$ este convergentă şi, pe baza acestui fapt, prin criteriul întâi de comparaţie, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n x_0^n|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_0^n$ este absolut convergentă, oricare ar fi $x_0 \in (-r, r)$. Aşadar, are loc ii). Dacă $r = +\infty$, raţionamentul de mai înainte se poate relua, aplicându-se pentru orice $x_1 \in \mathbb{R}$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}$, cu $|x_0| < |x_1|$. Rezultă atunci faptul că seria de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ (deci $A_{cp} = \mathbb{R}$). Astfel, are loc şi iv). Dacă $r < \infty$ şi seria nu ar fi divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$, ar exista un punct $x_2 \in R$, cu $|x_2| > r$, în care $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_2^n$ ar fi convergentă. De aici ar rezulta că $r < \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}$, în contradicţie cu definiţia lui r. Aşadar, şi iii) are loc. În fine, în cazul v), cum $0 < \rho < r$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \rho^n$ este absolut convergentă, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \rho^n$ este convergentă. Ca atare, pe baza Teoremei 12.6, deducem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-\rho, \rho] \subseteq (-r, r)$şi, cu atât mai mult, pe orice subinterval $[\alpha, \beta]$al lui $[-\rho, \rho]$. ◀

Observaţii: Potrivit Teoremei 12.10, se poate spune că, pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, avem:

$$(-r, r) \subseteq A_{cp} \subseteq [-r, r].$$

Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$, iar dacă $r = +\infty$, atunci $A_{cp} = \mathbb{R}$.

Pentru găsirea mulţimii A_{cp}, se determină raza de convergenţă r şi apoi se stabileşte dacă $x = -r$ şi $x = r$ sunt sau nu puncte de convergenţă ale seriei în cauză.

Propoziţia 12.6 *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *o serie de puteri şi* r *raza ei de convergenţă.*

j) Dacă există $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *atunci:*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{când } l_1 = +\infty \\ \\ l_1^{-1}, & \text{când } 0 < l_1 < +\infty \\ \\ \infty, & \text{când } l_1 = 0 \end{cases} .$$

Altminteri, dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *se menţine relaţia de stabilire a lui* r*, în care, de astă dată,* $l_1 = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

jj) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ *şi există (în* $\overline{\mathbb{R}}$*)* $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *atunci: fie* $r = l_2^{-1}$, *când* $0 < l_2 < \infty$, *fie* $r = 0$, *când* $l_2 = \infty$, *fie* $r = \infty$, *când* $l_2 = 0$.

Demonstraţie: j) Prin aplicarea criteriului rădăcinii asupra seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n||x|^n$, deducem că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n}$şi aceasta este subunitară, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$este absolut (şi, implicit) convergentă. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, se poate spune că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l_1$, atunci absoluta convergenţă a (şi, în consecinţă, convergenţa) seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ are loc pentru $|x| < l_1^{-1}$, atunci când $0 < l_1 < \infty$, sau doar pentru $x = 0$, când $l_1 = +\infty$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, când $l_1 = 0$. Altfel, dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci există cu siguranţă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$şi seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ ar fi să fie absolut convergentă pentru orice $x \in (-r, r)$, unde r este dat de formula din enunţ, în care, de astă dată, rolul lui $l_1$este jucat de $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (*Cauchy-Hadamard*).

jj) În condiţiile prezentei teoreme, seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n x^n|$ i se aplică criteriul raportului (*D' Alembert*). Astfel, se obţine convergenţa seriei de faţă, în situaţia în care $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$. Cu alte cuvinte, atunci când $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Prin urmare, luând în consideraţie $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, reiese că $r = l_2^{-1}$, atunci când $0 < l_2 < \infty$, ori $r = 0$, când $l_2 = \infty$, sau $r = \infty$, când $l_2 = 0$. ◀

Propoziţia 12.7 *Orice serie de puteri* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* $r \in \mathbb{R}_+^*$, *are suma o funcţie care este continuă pe* $(-r, r)$.

Demonstraţie: În virtutea Teoremei 12.10 v), seria din enunţ este uniform convergentă pe orice subinterval compact $[-\rho, \rho]$ al intervalului de convergenţă $(-r, r)$ (cu $0 < \rho < r$). Cum $f_n(x) = a_n x^n$ sunt toate funcţii continue pe $[-\rho, \rho]$, se poate aplica Teorema 12.3 (de transfer de continuitate), rezultând astfel că funcţia f, sumă a seriei la care ne referim, este continuă pe $[-\rho, \rho]$, $\forall\, \rho \in (0, r)$. Altfel spus, f este continuă pe $(-r, r)$. ◀

Teorema 12.11 *(**Abel**)*
Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* r. *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă în punctul* $x = r$ *(respectiv* $x = -r$*), atunci suma sa, funcţia* f, *este continuă în* $x = r$ *(respectiv* $x = -r$*).*

Demonstraţie: Admitem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$converge în $x = r$. Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ este convergentă şi, ca atare aici, uniform convergentă pe $[0, r]$. Cum şirul $\left(\left(\frac{x}{r}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este, $\forall\, x \in [0, r]$, monoton descrescător şi uniform mărginit pe $[0, r]$ (întrucât $0 \le \left(\frac{x}{r}\right)^n \le 1$, $\forall\, x \in [0, r]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$), rezultă, potrivit criteriului lui Abel de convergenţă uniformă (v. Teorema 12.8), că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, în care $a_n x^n$ poate fi rescris, când $x \in [0, r]$, sub forma $a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n$, este uniform convergentă pe $[0, r]$. Atunci, conform Teoremei 12.3, reiese că funcţia sumă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este continuă pe $[0, r]$ (prin transferul de continuitate pe $[0, r]$ a funcţiilor termeni $a_n x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$). La fel se face demonstraţia pentru cazul în care locul lui r este luat de $-r$. ◀

Teorema 12.12 *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* r. *Atunci:*

a) Seriile de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ *(a derivatelor termenilor* $a_n x^n$*) şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *(a integralelor de la 0 la* x *din termenii* $a_n x^n$*) au tot raza de convergenţă* r.

b) Dacă $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, $\forall\, x \in (-r, r)$, *cu* $r > 0$, *atunci* $f'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$, $\forall\, x \in (-r, r)$, *adică seria dată de puteri poate fi derivată, termen cu termen, pe intervalul deschis de converegenţă* $(-r, r)$, *iar*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall\, x \in (-r, r),$$

adică seria de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*poate fi integrată termen cu termen, pe orice interval* $[0, x]$, *unde* $x \in (-r, r)$.

Demonstraţie: a) Prin utilizarea Propoziţiei 12.6, în situaţia în care $0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, găsim:

$$r' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r \text{ şi}$$

$$r'' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

La fel în celelalte două situaţii, în care este lesne de văzut că $r' = r'' = r = 0$, atunci când $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ şi respectiv că $r' = r'' = r = \infty$, atunci când $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

b) Cum seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} na_nx^{n-1}$este uniform convergentă pe orice subinterval compact al intervalului $(-r', r') = (-r, r)$, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$este convergentă cel puţin în $x = 0$, rezultă, prin aplicarea Teoremei 12.9 b), că f, funcţia sumă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ este derivabilă pe $(-r, r)$ şi, în plus, $f'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} na_nx^{n-1}$, $\forall\, x \in (-r, r)$, în mod uniform. În conformitate cu aceeaşi teoremă (punctul a)), funcţia f este integrabilă de la 0 la x, $\forall\, x \in (-r, r)$ şi, mai mult, $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, $\forall\, x \in (-r, r)$. ◀

Observaţii:

1. De fapt, prin Teorema 12.12, rezultă că f, suma seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$, este derivabilă de o infinitate de ori pe $(-r, r)$ şi are derivatele de orice ordin continue pe $(-r, r)$. Altfel spus, avem: $f \in \mathcal{C}^\infty(-r, r)$.

2. Cum $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_nx^{n-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in (-r, r)$, deducem că are loc formula: $f^{(k)}(0) = k!a_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

   În virtutea acesteia, rezultă că dacă două serii de puteri, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_nx^n$, au aceeaşi rază de convergenţă r şi aceeaşi sumă f pe intervalul $(-r, r)$, atunci ele coincid, întrucât $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) = b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Operaţiile care se pot face cu serii de puteri respectă regulile din cazul general al seriilor de funcţii şi al seriilor numerice.

4. Un caz particular important este cel al ***seriei binomiale***, de expresie

   $$1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Pentru $\alpha \in \mathbb{N}$, seria binomială se reduce la un polinom.

   Când $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, se constată că raza de convergenţă a seriei binomiale este $r = 1$, deoarece:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1.$$

   Dacă notăm cu f suma acestei serii şi aplicăm Teorema 12.12, deducem, prin calcul direct, că:

   $$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \forall\, x \in (-1, 1).$$

De aici, întrucât $f(x) \neq 0$ pe $(-1,1)$ (căci, altfel, dacă ar exista $x_0 \in (-1,1)$ aşa încât $f(x_0) = 0$, ar reieşi faptul că $f^{(k)}(x_0) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, adică $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1,1)$, ceea ce ar fi imposibil, atâta timp cât $f(0) = 1$), deducem că:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x+1}, \forall\, x \in (-1,1).$$

Pe baza acestei relaţii, prin integrare, găsim:

$$\ln(f(x)) = \alpha \ln(x+1) + \ln c, \forall\, x \in (-1,1),\ c > 0.$$

Prin urmare, avem $f(x) = c(1+x)^\alpha$, $\forall\, x \in (-1,1)$, cu $c = 1$, deoarece $f(0) = 1$. În concluzie, are loc formula

$$(\triangle) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \forall\, x \in (-1,1),$$

care generalizează, cu evidenţă, formula binomului lui Newton, adevărată pentru $\alpha \in \mathbb{N}$. Astfel, denumirea de *serie binomială* se justifică.

Pentru diverse valori ale lui α şi diferite operaţii aplicate asupra formulei $(\triangle)$, se deduc sumele unor importante serii de puteri.

Un alt caz particular este cel al ***seriilor MacLaurin*** şi al ***seriilor Taylor***.

Definiţia 12.10 *i) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă în $0 \in \mathring{A}$. Numim **serie MacLaurin ataşată funcţiei** f, **în punctul** 0, seria de puteri*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in A.$$

*ii) Pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie derivabilă de orice ordin în $x_0 \in \mathring{A}$, numim **serie Taylor asociată funcţiei** f, **în punctul** x_0, seria de puteri:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, x \in A.$$

Firesc, în legătură cu asemenea serii particulare de puteri, interesează care este mulţimea de convergenţă (punctuală, absolută şi uniformă) şi care le este suma. Nu, cumva, tot f ?. În acest sens, are loc următorul rezultat:

Propoziţia 12.8 *Fie A un interval simetric faţă de $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$. Dacă există $M > 0$ aşa încât $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci:*

$$(\triangledown) \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,\ \forall x \in A = (x_0 - a, x_0 + a).$$

Demonstraţie: Folosind formula lui Taylor (cu rest de tip Lagrange), vedem că

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} a^{n+1},$$

$\forall\, x \in A = (x_0 - a, x_0 + a)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $a > 0$ şi $\xi = x_0 + \lambda(x - x_0)$, $\lambda \in (0,1)$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, rezultă că formula ($\bigtriangledown$) are loc într-adevăr. Când $x_0 = 0$, în ipotezele din enunţul acestei propoziţii, se ajunge la concluzia că are loc formula lui MacLaurin:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall\, x \in (-a, a), a > 0.$$

◀

Serii trigonometrice. Serii Fourier trigonometrice

Definiţia 12.11 *j) O serie de forma*

$$(\&) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \ x \in A \subseteq \mathbb{R},$$

unde $l \in \mathbb{R}_+^*$, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, se numeşte ***serie trigonometrică****.*

jj) Seria trigonometrică pentru care $A = [-l, l]$, iar, în raport cu o funcţie dată $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$, coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de formulele

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ şi}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

se numeşte ***serie Fourier trigonometrică****. Coeficienţii în cauză se numesc* ***coeficienţi Fourier****.*

În general, studiul seriilor trigonometrice se face cu ajutorul criteriilor de la seriile de funcţii oarecare. Toate proprietăţile de la serii de funcţii sunt adevărate şi pentru seriile trigonometrice. În plus, seriile trigonometrice au următoarele proprietăţi specifice importante:

1) Dacă seria (&) este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe un interval compact oarecare, de lungime $2l$, (de exemplu $[-l, l]$), atunci ea este convergentă (respectiv uniform convergentă sau absolut convergentă) pe $\mathbb{R}$, iar suma ei este o funcţie periodică de perioadă $2l$.

2) Dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$ sunt monotone şi converg la 0, atunci seria (&) este convergentă pe $\mathbb{R}\setminus\{2kl, k \in \mathbb{Z}\}$ şi uniform convergentă pe orice interval compact ce nu conţine puncte de forma $2kl$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

3) (**Criteriul lui Dirichlet**) Dacă funcţia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este monotonă pe porţiuni, pe $[-l, l]$ şi are, în acest interval, cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate care sunt de prima speţă, atunci seria Fourier trigonometrică asociată lui f converge, în fiecare punct $x_0 \in [-l, l]$, către $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$. În particular, dacă f este continuă pe $[-l, l]$, atunci suma seriei Fourier în cauză este chiar f.

4) Dacă f este o funcţie pară, adică $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in [-l, l]$, atunci $b_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$şi $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

5) Dacă f este impară pe $[-l, l]$, adică $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in [-l, l]$, atunci $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, pentru $l = \pi$ şi $f(x) = x^2$, avem $b_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$şi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3}, & \text{când } n = 0 \\ \dfrac{4}{n^2}(-1)^n, & \text{când } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Folosind criteriul lui Dirichlet de mai sus, deducem că:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

De aici, în particular, pentru $x = \pi$, găsim relaţia

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2},$$

pe baza căreia obţinem faptul că seria numerică $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ are suma $\frac{\pi^2}{6}$.

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 10)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (Cap. 10, 11 şi 12)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 3)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Macovei, F. Iacob - *Matematică pentru anul I - ID (Tema 6)*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2005.

5. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Chap. 4)*, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2010.

6. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

Cursul 13

Integrale ale funcţiilor reale scalar-scalare

Necesităţi practice legate fie de determinarea matematică a stării unui proces dinamic căruia îi este cunoscută viteza de evoluţie, fie de calculul unor caracteristice numerice de ordin geometric (precum lungimi, arii şi volume), fizic (ca, de exemplu, momente de inerţie, valori de potenţiale şi lucru mecanic), deterministic (coordonate de poziţie ori centre de greutate) sau probabilist-stochastic (densităţi de probabilitate, medii şi dispersii pentru variabile aleatoare continue) ale anumitor entităţi pot fi soluţionate, în dese rânduri, prin folosirea adecvată a noţiunii de integrală. Amintind aici despre integrala nedefinită şi despre integrala Riemann a unei funcţii reale scalar-scalare, avem în vedere încă tipurile de integrale improprii (pe intervale nemărginite sau din integranzi nemărginiţi), cât şi integralele cu parametri, între care funcţiile Γ (gamma) şi B (beta) ale lui Euler, sunt prezentate pe scurt în final.

Integrale nedefinite. Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$.

Definiţia 13.1 *a) O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **primitivă** (pe intervalul I) a funcţiei f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.*

*b) Dacă f are cel puţin o primitivă pe I, atunci f se numeşte **funcţie primitivabilă** pe I şi acest fapt se notează prin $f \in \mathcal{P}(I)$.*

*c) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$, atunci mulţimea tuturor primitivelor (pe I) ale funcţiei f poartă denumirea de **integrala nedefinită a lui f pe** I şi se notează cu $\displaystyle\int f(x)\,dx$.*

Observaţii:

i) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$ şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f (pe I), atunci toate primitivele funcţiei f sunt de forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Aceasta deoarece, oricare altă primitivă (decât F) a lui f are derivata egală cu a lui F (adică f) pe I şi deci diferă de F printr-o constantă (reală) c. Aşadar: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $\forall\, x \in I$.

ii) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci ea este o primitivă (pe I) a funcţiei f' şi deci $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$, $\forall\, x \in I$, unde c este o constantă reală arbitrară.

iii) Determinarea unei primitive F, a lui f, pe intervalul I, se numeşte (operaţie de) ***integrare*** a lui f pe I. Integrarea este "inversa" operaţiei de diferenţiere a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$, cu primitiva $F : I \to \mathbb{R}$, deoarece avem:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + c\right) = \left(F + c\right)'(x)\,dx = F'(x)dx = f(x)dx \text{ şi}$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c, \forall\, x \in I, c \in \mathbb{R}.$$

iv) Mulţimea $\mathcal{P}(I)$ (a funcţiilor primitivabile pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$) este nevidă, întrucât orice funcţie continuă pe I are primitive pe I, adică $\varnothing \neq C(I;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(I)$. În plus, din punct de vedere algebric, $\mathcal{P}(I)$ este un subspaţiu liniar real al spaţiului vectorial (peste $\mathbb{R}$) $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, deoarece, pentru orice $f, g \in \mathcal{P}(I)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}(I)$ şi

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx, \text{ pe } I.$$

v) $\mathcal{P}(I)$ este parte a mulţimii funcţiilor f care au proprietatea lui Darboux pe I ($\forall\, x_1, x_2 \in I$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ cuprins strict între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, $\exists\, \widetilde{x}$ din intervalul deschis cu extremităţile x_1 şi x_2, astfel încât $f(\widetilde{x}) = \lambda$). Aceasta întrucât, fiind derivată a oricăreia dintre primitivele sale, o funcţie $f \in \mathcal{P}(I)$ are, în mod necesar, proprietatea menţionată. Prin urmare, dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu este primitivabilă pe I.

Ca ***metode de calcul pentru primitive***, indicăm folosirea tabelului integralelor nedefinite ale unor funcţii elementare, integrarea prin părţi, integrarea prin transformări algebrice şi trigonometrice, integrarea prin substituţii şi utilizarea, în anumite cazuri, a unor formule de recurenţă.

Tabelul specificat cuprinde următoarele ***primitive uzuale***:

$$\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln|x|, & \alpha = -1 \end{cases} + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + c, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{ch} x + c; \int \operatorname{ch} x\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{sh} x + c, \ x \in I.$$

Integrarea prin părţi, aplicabilă ori de câte ori avem de-a face cu două funcţii f şi $g : I \to \mathbb{R}$, derivabile şi cu derivatele f' şi respectiv g' continue pe I, se face în conformitate cu formula

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx, \ x \in I,$$

care, în virtutea relaţiilor $f'(x)dx = (df)(x)$, $g'(x)dx = (dg)(x)$ şi $d(fg) = f(dg) + g(df)$, pe I, poate fi redată şi prin:

$$\int g(x)(df)(x) = f(x)g(x) - \int f(x)(dg)(x), \ x \in I.$$

Aplicarea acestei formule permite, de exemplu, între altele, completarea tabelului de primitive imediate cu următoarele integrale nedefinite:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}_+^*, \ |x| < a, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, \ a \in \mathbb{R}^*, \ x \in I, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*, \ c \in \mathbb{R}.$$

Tot integrarea prin părţi este recomandată, ca metodă de calcul, în cazul integralelor de forma

$$\int P_n(x) f(x) \, dx,$$

unde $P_n \in \mathbb{R}[X]$ şi f este una dintre funcţiile elementare e^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, a^x, $\log_a x$ etc. Prin aplicarea acestei metode, se reduce treptat, cu câte o unitate la fiecare utilizare (repetată) a integrării prin părţi, gradul polinomului P_n $(n \in \mathbb{N})$.

Metoda transformărilor algebrice se foloseşte, cu precădere, pentru calculul primitivelor unor funcţii raţionale, de forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P şi Q sunt din $\mathbb{R}[X]$, definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $\mathring{I} \neq \varnothing$ şi $Q(x) \neq 0$ pe I. Cum, potrivit unui rezultat cunoscut din algebră, orice funcţie raţională se descompune, în mod unic, într-o sumă de fracţii raţionale "simple", în conformitate cu formula

$$(*) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum\nolimits_2 \frac{B_{k,m}x + C_{k,m}}{(x^2 + p_k x + q_k)^m}, \ x \in I,$$

în care G este un polinom (nul, când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H tot un polinom (cu gradul strict mai mic decât gradul lui Q şi identic cu P, atunci când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), $\sum_1$ este o sumă relativă la toate rădăcinile reale x_k (simple şi multiple) ale lui Q, iar $\sum_2$ se raportează la toate rădăcinile complexe (simple şi multiple) ale lui Q (cu $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, aşa încât $p_k^2 - 4q_k < 0$), integrarea lui f revine la determinarea primitivelor tuturor componentelor din suma de descompunere $(*)$.

În cazul în care polinomul Q are rădăcini multiple, calculul primitivei funcţiei raţionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se mai poate face şi prin ***metoda lui Gauss-Ostrogradski***, bazată pe formula

$$(**) \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \, dx, \ x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q şi Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \dfrac{Q}{Q_1}$, iar P_1 şi P_2 sunt polinoame care au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$ şi respectiv $\operatorname{grad} Q_2$, determinarea lor realizându-se prin derivarea relaţiei $(**)$, adică pe baza relaţiei

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \ x \in I,$$

prin identificare şi aflare, în acest mod, a coeficienţilor (iniţial necunoscuţi ai) lui P_1 şi P_2.

Metoda transformărilor trigonometrice, adeseori combinată cu ***metoda substituţiilor***, se foloseşte pentru calculul primitivelor unor funcţii în ale căror expresii sunt prezente funcţii trigonometrice.

În cazul ***integralelor trigonometrice*** de forma

$$\int E(\sin x, \cos x) \, dx, \ x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcţie raţională de două variabile, se foloseşte, în general, substituţia $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, care, pe baza relaţiilor $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în variabila t. Calculul integralei $\int E(\sin x, \cos x) \, dx$ poate fi simplificat, evitându-se utilizarea substituţiei standard $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, în următoarele trei cazuri:

1. $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, recomandată fiind folosirea substituţiei $\cos x = t$.

2. $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$ şi atunci se face substituţia $\sin x = t$.

3. $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară (simultan) în $\sin x$ şi $\cos x$, făcându-se substituţa $\operatorname{tg} x = t$.

Tot substituţii se practică şi pentru calculul unor ***integrale*** (aşa-numite) ***iraţionale,*** întru reducerea lor la integrale din funcţii raţionale. Este cazul ***substituţiilor lui Euler***, folosite pentru integrale de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,\ x \in I,$$

cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, aşa încât $ax^2 + bx + c \geq 0$, $\forall\, x \in I$ şi E o expresie raţională de două variabile reale. Se face trecerea de la variabila x la variabila t, în conformitate cu una din următoarele trei situaţii şi relaţii corespunzătoare:

i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, când $a > 0$;

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, când $c > 0$;

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_0)$, când $b^2 - 4ac > 0$,

unde x_0 este o rădăcină (din $\mathbb{R}$) a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

Pentru ***integrale iraţionale de forma***

$$\int E\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx,\ x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

în care E este o funcţie raţională de $k+1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, $cx + d \neq 0$, $\forall\, x \in I$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\forall\, x \in I$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, se utilizează (în scopul calculului) substituţia $x \to t$, dată de relaţia $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Substituţiile lui Cebîşev se folosesc pentru calculul integralelor care, cunoscute sub denumirea de ***integrale binoame***, sunt de forma

$$\int x^p (ax^q + b)^r\, dx,\ x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ şi $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Calculul unor asemenea integrale se reduce la calculul primitivelor pentru funcţii iraţionale, doar în următoarele trei cazuri:

j) $r \in \mathbb{Z}$, când se face substituţia $x = t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui p şi q;

jj) $\dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$, situaţie în care se face substituţia $ax^q + b = t^l$, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este numitorul lui r.

jjj) $\dfrac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$, caz în care se face substituţia $a + bx^{-q} = t^l$, l fiind numitorul lui r.

Calculul integralelor de forma

$$\int E\left(a^{r_1 x}, a^{r_2 x}, \ldots, a^{r_n x}\right) dx,$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$, iar E este o funcţie raţională, de n ($n \in \mathbb{N}^*$) variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, se poate face pe baza substituţiei $a^x = t^\nu$, unde $t > 0$, şi ν este cel mai mic multiplu comun al numitorilor numerelor $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Atragem atenţia asupra faptului că există şi o serie de primitive care nu se pot exprima prin combinaţii liniare finite de funcţii elementare. Este cazul ***integralelor eliptice***, adică al integralelor de forma

$$\int \sqrt{(1 - a^2 \sin^2 x)^{\pm 1}}\, dx, \text{ cu } a \in (0,1) \text{ şi } x \in I_a \subseteq \mathbb{R}$$

precum şi al următoarelor integrale:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ (sinusul integral)}, \int \frac{\cos x}{x}\, dx \text{ (cosinusul integral)},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritmul integral)}, \int \frac{e^x}{x}\, dx \text{ (exponenţialul integral)},$$

$$\int e^{-x^2}\, dx \text{ (primitiva lui Poisson)}, \int \cos^2 x\, dx \;\text{ şi } \int \sin^2 x\, dx \text{ (primitivele lui Fresnel)}.$$

Integrala definită (în sens Riemann)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definiţia 13.2 *1) Se numeşte* ***diviziune (divizare) a intervalului compact*** $[a,b]$, *notată prin* Δ, *o mulţime finită şi ordonată crescător de elemente* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, *cu* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. *Elementele* x_i, $i = \overline{0,n}$ *se numesc* ***puncte ale diviziunii*** Δ, *iar* $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$ *se numesc* ***intervale parţiale ale diviziunii*** Δ.

2) Numărul notat cu $\|\Delta\|$ *(sau cu* $\nu(\Delta)$*) şi definit prin*

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

se numeşte ***norma diviziunii*** Δ.

3) O ***diviziune*** Δ *a intervalului* $[a,b]$ *se numeşte* ***echidistantă*** *dacă* $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, *caz în care avem* $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$ *şi* $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, i = \overline{0,n}$.

De regulă, ***mulţimea tuturor diviziunilor unui interval compact*** $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{D}[a,b]$ şi, pe ea, se poate defini o ***relaţie*** binară (***de "fineţe"***), ce se dovedeşte a fi una de ordine parţială, în modul următor: $\forall\, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a,b]$ spunem că Δ_2 ***este mai fină decât*** Δ_1, şi notăm $\Delta_1 \subset \Delta_2$, dacă Δ_2 conţine cel puţin un element în plus faţă de Δ_1. Este lesne de văzut atunci că, $\forall\, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a,b]$, $\exists\, \Delta (= \Delta_1 \cup \Delta_2)$ astfel încât $\Delta_1 \subset \Delta$ şi $\Delta_2 \subset \Delta$.

Definiţia 13.3 *a) Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *şi* $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *din* $\mathcal{D}[a,b]$. *Mulţimea* $\xi_\Delta = \{\xi_i \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}\}$, *adică mulţimea* n*-uplelor* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, *unde* ξ_i *este arbitrar ales din intervalul parţial* $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ *se numeşte* ***mulţime a punctelor intermediare asociate diviziunii*** Δ.

b) Numim ***sumă Riemann*** *a funcţiei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, în raport cu o diviziune* $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ *şi cu* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$*, numărul*

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

unde x_i *sunt punctele diviziunii* $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Definiţia 13.4 *Funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se numeşte* ***integrabilă, în sens Riemann, pe intervalul compact*** $[a, b]$ *(*$a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*), dacă există un număr real* I*, astfel încât, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$*, există* δ_ε*, în raport cu care,* $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$*, cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$*, să avem* $|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon$*, pentru orice alegere a punctelor intermediare* ξ_Δ*. Se mai spune că* f *este* ***$\mathcal{R}$-integrabilă pe*** $[a, b]$.

Numărul I *se numeşte, atunci,* ***integrala Riemann a lui*** f ***pe*** $[a, b]$ *şi se poate vedea că este unic determinat. El se notează cu* $\int_a^b f(x)\,dx$ *(sau cu* $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx$ *ori prin* $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$*).*

Mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile (Riemann-integrabile) pe un interval compact $[a, b]$ din $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziţia 13.1 *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a, b]$*, atunci* $f \in \mathcal{B}[a, b]$*, unde* $\mathcal{B}[a, b]$ *înseamnă mulţimea tuturor funcţiilor* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *care sunt mărginite pe* $[a, b]$.

(Cu alte cuvinte, orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, integrabilă în sens Riemann pe un interval compact* $[a, b]$ *din* $\mathbb{R}$ *este, în mod necesar, mărginită pe* $[a, b]$*).*

Demonstraţie: Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât, în conformitate cu Definiţia 13.4, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, avem $|\sigma_f(\Delta, \xi) - I| < \varepsilon$, adică

$$(\,!\,) \qquad I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon.$$

Fixând $\varepsilon = 1$ şi $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ (cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$), lăsăm ξ_1 să varieze în $[x_0, x_1]$, iar pe $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ le menţinem, pe moment, constante. Atunci, din (!), deducem că avem

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\left[I - 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right] < f(\xi_1) < \frac{1}{x_1 - x_0}\left[I + 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right],$$

$\forall \xi_1 \in [x_0, x_1]$. Deci funcţia f este mărginită pe intervalul parţial al lui Δ $[x_0, x_1]$.

În mod analog, se arată că f este mărginită şi pe celelalte intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$. Astfel, reiese că $f \in \mathcal{B}[a, b]$. ◀

Observaţie: O consecinţă directă a Propoziţiei 13.1 este aceea potrivit căreia, dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) nu este mărginită pe intervalul (compact) $[a, b]$, atunci ea nu este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[a, b]$.

Există însă şi funcţii mărginite pe un interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, care nu sunt din $\mathcal{R}[a, b]$. De exemplu, funcţia lui Dirichlet, $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, dată prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

O condiţie necesară şi suficientă de Riemann-integrabilitate pentru funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se obţine caracterizând limita I, prin sume Riemann $\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$, pe baza condiţiei Cauchy (de existenţă a unei limite). Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 13.1 *(de caracterizare Cauchy a integrabilităţii Riemann)*

Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\xi', \xi'' \in \xi_\Delta$, avem $\left|\sigma_f(\Delta,\xi') - \sigma_f(\Delta,\xi'')\right| < \varepsilon$.

Prin folosirea Teoremei 13.1, se pot pune în evidenţă următoarele ***proprietăţi ale funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe intervale compacte din*** $\mathbb{R}$, reunite în cadrul propoziţiei imediat enunţate aici:

Propoziţia 13.2 *i) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[c,d]$, oricare ar fi subintervalul $[c,d]$ al lui $[a,b]$.*

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$. Dacă $f \in \mathcal{R}[a,c]$ şi $f \in \mathcal{R}[c,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

iii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc relaţia:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

iv) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$.

v) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc inegalitatea ("Cauchy-Schwarz-Buniakowski" pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile):

$$(\,!!\,) \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

vi) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $|f(x)| \geq \mu > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

vii) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(Aşadar, $\mathcal{R}[a,b]$ este, în raport cu adunarea funcţiilor reale scalar-scalare şi cu înmulţirea acestora cu scalari reali, un spaţiu liniar).

viii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Observaţii:

a) Similar situaţiei de la sisteme finite de numere reale, inegalitatea (!!) are, drept generalizare, inegalitatea lui Hölder pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile şi anume:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$\forall\, f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ şi $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{R}[a,b]$.

b) Ţinând seama de viii) din Propoziţia 13.2, se deduce monotonia integralei Riemann, în sensul că, $\forall f, g \in \mathbb{R}[a,b]$, cu proprietatea că $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, avem:

$$(\bullet) \qquad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Convenind ca, pentru $f \in \mathcal{R}[a,b]$, să definim $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ ca fiind $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, rezultă:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

d) Având în atenţie relaţia $(\bullet)$, se poate vedea că, dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$, unde $m = \displaystyle\inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$.

Dacă, în plus, $f \in C[a,b]$, atunci, deoarece $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$ şi f, ca funcţie continuă pe $[a,b]$, îşi atinge marginile (m şi M), având proprietatea lui Darboux, există $c \in [a,b]$, astfel încât $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, adică are loc formula de medie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe $[a,b]$, se pot defini ***sumele Darboux*** (***corespunzătoare lui*** f ***şi unei diviziuni*** $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ ***arbitrare***), ***inferioară*** şi respectiv ***superioară***, prin

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ şi } S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $m_i = \displaystyle\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ şi $M_i = \displaystyle\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Notând elementul $\displaystyle\sup_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} s_f(\Delta)$ cu $\underline{I}$ şi $\displaystyle\inf_{\Delta\in\mathcal{D}[a,b]} S_f(\Delta)$ cu $\overline{I}$, numim $\underline{I}$ ***integrala Darboux inferioară a lui*** f ***pe*** $[a,b]$, iar $\overline{I}$ ***integrala Darboux superioară a lui*** f ***pe*** $[a,b]$. Folosind aceste elemente, se poate pune în evidenţă următorul ***criteriu*** (***al lui Darboux***) ***pentru stabilirea*** $\mathcal{R}$***-integrabilităţii lui*** f ***pe*** $[a,b]$.

Teorema 13.2 *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, mărginită pe $[a,b]$, este integrabilă în sens Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, ceea ce echivalează cu:*

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a,b] \text{ astfel încât } S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Valoarea comună a elementelor $\underline{I}$ *şi* $\overline{I}$ *este, atunci când are loc relaţia* $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, *tocmai* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Pe baza oricăruia dintre criteriile de $\mathcal{R}$-integrabilitate formulate de Teoremele 13.1 (*criteriul lui Cauchy*) şi 13.2 (*criteriul lui Darboux*), se pun în relief ***categorii de funcţii ce sunt integrabile Riemann pe intervale compacte din*** $\mathbb{R}$. Are loc, astfel, rezultatul ce urmează.

Teorema 13.3 *Fie funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- *a) Dacă* $f \in \mathcal{C}[a, b]$, *atunci* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
- *b) Dacă* f *este monotonă pe* $[a, b]$ *(sau pe porţiuni, pe* $[a, b]$, *intervalul* $[a, b]$ *putându-se scrie ca o reuniune finită de intervale* $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, *astfel încât, pe fiecare dintre ele,* f *este monotonă, nu neapărat de acelaşi fel), atunci* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
- *c)* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *dacă şi numai dacă* $f \in \mathcal{B}[a, b]$ *şi* f *este continuă "aproape peste tot" pe* $[a, b]$, *adică* $f \in \mathcal{C}([a, b]; E)$, *unde* $E \subseteq [a, b]$ *este o mulţime "neglijabilă" (de măsură Lebesgue nulă)(*criteriul lui Lebesgue de $\mathcal{R}$-integrabilitate*).*

(O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, există un şir de intervale $(J_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, aşa încât $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} J_n^\varepsilon$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} l(J_n^\varepsilon) < \varepsilon$, unde $l(J_n^\varepsilon)$ înseamnă lungimea intervalului J_n^ε, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.)

Propoziţia 13.3 *Fie* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *şi,* $\forall\, x \in [a, b]$, *în virtutea afirmaţiei i) din Propoziţia 13.2, fie* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, *dată de relaţia:* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a, b]$. *Au loc următoarele concluzii:*

- *a)* $F \in \mathcal{C}[a, b]$. *Mai mult,* $\exists\, L > 0$, *aşa încât*

$$|F(x) - F(\widetilde{x})| \leq L|x - \widetilde{x}|, \forall\, x, \widetilde{x} \in [a, b].$$

- *b) Dacă* f *este continuă într-un punct* $x_0 \in [a, b]$, *atunci* F *este derivabilă în* x_0 *şi* $F'(x_0) = f(x_0)$. *Dacă* $f \in \mathcal{C}[a, b]$, *atunci* F *este o primitivă a lui* f *şi deci* $f \in \mathcal{P}[a, b]$.

Demonstraţie: a) Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, avem: $f \in \mathcal{B}[a, b]$ (în virtutea Propoziţiei 13.1). Există deci $L \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $|f(t)| \leq L$, $\forall\, t \in [a, b]$. Atunci:

$$|F(x) - F(\widetilde{x})| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{\widetilde{x}} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{\widetilde{x}}^x f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{\widetilde{x}}^x |f(t)|\,dt \leq \int_{\widetilde{x}}^x L\,dt = L \cdot |x - \widetilde{x}|, \forall\, x, \widetilde{x} \in [a, b].$$

Deci F este lipschitziană pe $[a, b]$ şi, în consecinţă, $F \in \mathcal{C}[a, b]$.

b) Avem:

$$(\bullet\bullet) \qquad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|} \int_a^x |f(t)-f(x_0)|\, dt, \forall\, x \in [a,b] \setminus \{x_0\}.$$

Cum f este continuă în x_0, putem conta pe faptul că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\; \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, t \in [a,b]$, cu $|t-x_0| < \delta_\varepsilon$, avem: $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$. Folosind acest lucru în (●●), obţinem că

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ astfel încât, } \forall\, x \in [a,b], \text{ cu } |x-x_0| < \varepsilon,$$

rezultă:

$$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Ca atare, există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, adică F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

Când $f \in \mathcal{C}[a,b]$, înseamnă că $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in [a,b]$. Deci F este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F' = f$, pe $[a,b]$. Altfel spus, F este o primitivă a lui f şi, astfel, $f \in \mathcal{P}[a,b]$. ◀

Calculul integralelor definite pentru funcţii $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se face, atunci când $f \in \mathcal{P}[a,b]$, pe baza ***formulei lui Leibnitz-Newton***

$$(\;\#\;) \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f pe $[a,b]$.

Conform Propoziţiei 13.3, b), formula (#) are sens când $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

Tot pentru calculul unei integrale definite (în sens Riemann) dintr-o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pentru care există $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, se mai poate folosi metoda ***schimbării de variabilă***, potrivit formulei

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$, iar $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$ sau în conformitate cu formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)\, dt,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ şi $\psi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$, ψ fiind bijectivă.

La fel de bine, atunci când este posibil, se foloseşte şi formula de integrare prin părţi pentru calcule de integrale definite. Aceasta se exprimă prin relaţia

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx,$$

ori de câte ori f şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[a,b]$ şi cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, când $f, g \in \mathcal{C}^1[a,b]$).

După cum am menţionat, fără demonstraţie, în Cursul 12, pentru un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ care este uniform convergent, pe $[a,b]$, la o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, are loc un transfer de integrabilitate (Riemann), de la f_n la f, în conformitate cu următorul enunţ.

Propoziţia 13.4 *Dacă* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ *este un şir de funcţii uniform convergent, pe* $[a,b]$*, la* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, atunci* $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demonstraţie: Aplicarea Teoremei 12.3, de transfer de continuitate, ne conduce la o primă concluzie: $f\in\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Atunci, prin Teorema 13.3, a), rezultă: $f:\mathcal{R}[a,b]$. Cum f_n şi f sunt continue pe $[a,b]$, există $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\in\mathbb{R}$. Şi, pentru că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[a,b]} f$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\right) = 0$. Deci, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, are loc relaţia: $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
În acest fel, constatăm că, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, avem:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

Aşadar, există $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ şi este egală cu $\int_a^b f(x)\,dx$. ◄

De fapt, ţinând seama de aproximarea funcţiilor din $\mathcal{R}[a,b]$ prin funcţii din $\mathcal{C}[a,b]$, se poate afirma că transferul de integrabilitate (în sens Riemann) are loc şi într-un caz mai general, în care şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathcal{R}[a,b]$ converge uniform pe $[a,b]$ la $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se justifică astfel, acum, Teorema 12.5. În mod firesc, pe baza şirului sumelor parţiale, acest rezultat se manifestă şi la nivelul seriilor de funcţii, uniform convergente pe $[a,b]$. Este justificat deci şi rezultatul din Teorema 12.9, a).

Integrale improprii

O extindere naturală a integralei Riemann, integrală în legătură cu care, atât intervalul de integrare, cât şi funcţia de integrat, adică integrandul, au fost considerate mărginite, este aceea constituită de ***integralele improprii*** (fie din pricina nemărginirii domeniului de integrare, fie din cauza faptului că funcţia de integrat este nemărginită). ***Integralele pe intervale nemărginite*** sunt acelea în care cel puţin una dintre limitele de integrare este infinită, adică de forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ sau } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integralele din funcţii nemărginite sunt acelea de forma $\int_a^b f(x)\,dx$, unde $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este nemărginită cel puţin în vecinătatea unui punct din (a,b). Atât integralele pe intervale nemărginite, cât şi integralele din funcţii nemărginite pot fi privite ca ***integrale pe intervale necompacte***.

Definiţia 13.5 *Fie* $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie definită pe mulţimea* $A=(\alpha,\beta)\setminus\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1}\}$*, unde* $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1}\in(\alpha,\beta)$ *şi* $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{n-1}$*. De asemenea, prin notaţie, fie* $\gamma_0=\alpha$ *şi* $\gamma_n=\beta$*.*

Dacă f *este* ***integrabilă local*** *(în sens Riemann) pe* A*, adică* f *este integrabilă pe orice interval compact inclus în* A*, iar funcţia* $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$*, definită prin*

$$F(u_0,v_0,u_1,v_1,\ldots,u_{n-1},v_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx, \forall\, u_i,v_i\in(\gamma_i,\gamma_{i+1}), \forall\, i=\overline{0,n-1},$$

are o limită finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}) \longrightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, *atunci* ***valoarea acestei limite se ia ca definiţie a integralei lui*** f ***pe intervalul*** (α, β) *. Se spune, în acest caz, că* ***funcţia*** f ***este integrabilă impropriu (generalizat)*** *pe* (α, β) *ori, prin analogie cu termenul corespunzător din teoria seriilor, se spune că* ***integrala*** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ***este convergentă.***

Dacă F *nu are limită sau limita sa nu este finită când* $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1})$ *tinde la* $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, *spunem că f nu este integrabilă, impropriu, pe* (α, β) *sau, echivalent, că* ***integrala*** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ***nu este convergentă (****adică* ***este divergentă).***

Observaţii: Cum existenţa limitei finite a lui F este legată de faptul că fiecare funcţie $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F_i(u_i, v_i) = \int\limits_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx, u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), i = \overline{0, n-1},$$

trebuie să aibă limită finită când $(u_i, v_i) \to (\gamma_i, \gamma_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$, adică integrala $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$ trebuie să fie convergentă pentru orice $i = \overline{0, n-1}$, se poate spune că stabilirea convergenţei (sau divergenţei) integralei $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ revine la stabilirea naturii fiecăreia dintre integralele $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = \overline{0, n-1}$. Întrucât, în cazul acestora, intervalele (γ_i, γ_{i+1}) nu conţin alte puncte în care integrandul f este nemărginit, stabilirea convergenţei sau divergenţei integralelor $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = \overline{0, n-1}$, va consta, conform Definiţiei 13.5, în stabilirea existenţei şi finitudinii, respectiv nonexistenţei ori existenţei şi nefinitudinii limitelor

$$\lim_{\lambda \searrow \gamma_i} \int\limits_{\lambda}^{\omega_i} f(x)\,dx \;\text{ şi } \lim_{\mu \nearrow \gamma_{i+1}} \int\limits_{\omega_i}^{\mu} f(x)\,dx, \text{ unde } \gamma_i < \lambda < \omega_i < \mu < \gamma_{i+1},\ i = \overline{0, n-1}.$$

Când aceste limite există şi sunt finite, atunci ele definesc integralele funcţiei f pe intervalele necompacte $(\gamma_i, \omega_i]$ şi respectiv $[\omega_i, \gamma_{i+1})$, integrale notate, îndeobşte, cu

$$\int\limits_{\gamma_i+0}^{\omega_i} f(x)\,dx \;\text{ şi respectiv } \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-0} f(x)\,dx.$$

Prin analogie, pentru integrala improprie a funcţiei f pe intervalul (γ_i, γ_{i+1}) se foloseşte notaţia $\int\limits_{\gamma_i+0}^{\gamma_{i+1}-0} f(x)\,dx$.

Deoarece $\int\limits_{\gamma_i+0}^{\gamma_{i+1}-0} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_i+0}^{\omega_i} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-0} f(x)\,dx, \forall\, i = \overline{0, n-1}$, este suficient ca, în studiul convergenţei integralelor pe interval necompact, să ne ocupăm de convergenţa unor integrale de tipul

$$(\omega) \quad \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx \text{ şi } \int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx,$$

unde funcţia f este R -integrabilă pe orice interval compact conţinut în intervalele $(a, b]$ şi respectiv $[a, b)$.

Când a şi/sau b sunt infinite ($\pm\infty$), integralele în cauză (din (ω)) sunt *improprii, pe intervale nemărginite*, iar când a şi b sunt din $\mathbb{R}$, atunci integralele (ω) sunt *improprii, din funcţii nemărginite.*

Definiţia 13.6 *i) Dacă funcţia f este integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în intervalul $(a, b]$ sau $[a, b)$, iar integrala* $\int\limits_{a+0}^{b} |f(x)|\,dx$, *respectiv* $\int\limits_{a}^{b-0} |f(x)|\,dx$, *este convergentă, atunci se spune că integrala* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *respectiv* $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, *este **absolut convergentă**.*

ii) dacă integrala $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *respectiv* $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, *este convergentă, dar nu şi absolut convergentă, atunci ea se numeşte **semiconvergentă** (sau **simplu convergentă**).*

Integrale improprii pe intervale infinite

Relativ la integralele $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ şi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, observăm că ne putem limita la a investiga doar prima dintre ele, deoarece celelalte două pot fi redate pe baza unor integrale de tipul primei. Într-adevăr, prin substituţia $x = -t$, avem $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt$, iar $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ se poate scrie sub forma $\int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Definiţia 13.7 *i) Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$, o funcţie $\mathcal{R}$-integrabilă pe orice interval compact $[a, b]$, cu $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. Numim **integrală improprie, de la** a **la** $+\infty$, **din funcţia** f, limita* $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, *dacă aceasta există. În caz de existenţă, respectiva integrală se notează cu* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

ii) Integrala improprie $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *se numeşte **convergentă** dacă limita* $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *există şi este finită. Acest fapt se marchează prin:* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\ (C)$.

iii) Integrala $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *se numeşte **improprie divergentă** dacă limita* $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *nu există* *sau, dacă există, este infinită. Atunci, se foloseşte notaţia:* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *(D).*

De exemplu, integrala improprie $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, unde $a > 0$, este convergentă când $p > 1$ şi divergentă când $p \leq 1$, deoarece, pentru $p > 1$, obţinem $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b \right) = \frac{a^{1-p}}{p-1} \in \mathbb{R}$, iar pentru $p \leq 1$, avem: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$.

Propoziţia 13.5 ***(criteriul lui Cauchy de convergenţă pentru integrale improprii)***

Integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă dacă şi numai dacă, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$*, există* $a_\varepsilon > a$*, astfel încât,* $\forall\, a', a'' > a_\varepsilon$*, avem:*

$$(\square) \qquad \left| \int\limits_{a'}^{a''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Acest rezultat se obţine prin interpretarea în sens Cauchy a existenţei limitei finite $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Considerând $a'' = a' + 1$, pe baza Propoziţiei 13.5 deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $a_\varepsilon > a$, aşa încât, $\forall\, a' > a_\varepsilon$, avem: $M_{a'} = \sup\limits_{t\in[a',a'+1]} |f(t)| < \varepsilon$. Obţinem astfel faptul că o ***condiţie necesară de convergenţă*** a integralei $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ este: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Tot pe baza Propoziţiei 13.5, se poate vedea că, dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ este convergentă, altfel spus dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este (AC), adică absolut convergentă, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

Un alt criteriu de convergenţă pentru integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este ***criteriul general de comparaţie***, cu următorul enunţ:

Propoziţia 13.6 *Dacă* $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$, *cu* $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$ *şi* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *(C),* *atunci* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *(C).*

Demonstraţie: Cum $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$, rezultă: $0 \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^b g(x)\, dx$, $\forall\, b \geq a$. În acelaşi timp, deoarece integrala $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ este convergentă, există şi este finită limita $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b g(x)\, dx$. Deducem atunci că există şi este finită şi limita $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$. Deci $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este absolut convergentă şi, drept urmare, avem: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (C)$. ◀

Teorema 13.4 *(**Criteriul în** β)*

Fie β un număr real fixat. Dacă există $l = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\beta} |f(x)|$, atunci:

j) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (AC)$ *, când $\beta > 1$ şi $l < +\infty$;*

jj) $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx\ (D)$ *, când $\beta \leq 1$ şi $0 < l$.*

Demonstraţie: j) Când $\beta > 1$ şi $l < +\infty$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\ x_{\varepsilon} > 0$, aşa încât, $\forall\, x > x_{\varepsilon}$, are loc relaţia

$$l - \varepsilon < x^{\beta} |f(x)| < l + \varepsilon,$$

adică

$$\frac{l - \varepsilon}{x^{\beta}} < |f(x)| < \frac{l + \varepsilon}{x^{\beta}}.$$

De aici, rezultă că avem:

$$0 \leq \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_a^{x_{\varepsilon}} |f(x)|\, dx + \int\limits_{x_{\varepsilon}}^{+\infty} |f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^{x_{\varepsilon}} |f(x)|\, dx + (l + \varepsilon) \int\limits_{x_{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta}}\, dx < +\infty.$$

Aşadar, reiese că $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (AC)$, ceea ce implică faptul că $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este convergentă.

jj) În acest caz, se constată că $(l - \varepsilon) \int\limits_{x_{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta}}\, dx \leq \int\limits_{x_{\varepsilon}}^{+\infty} |f(x)|\, dx$, cu $\varepsilon \in (0, l)$ şi, întrucât $\int\limits_{x_{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta}}\, dx = +\infty$, se obţine concluzia: $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\ dx\ (D)$. ◀

Observaţie: În cazul în care $f(x) \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \geq x_{\varepsilon}$, jj) implică: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (D)$.

Propoziţia 13.7 *(Criteriul integral al lui Cauchy)*

Dacă funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ *este monoton descrescătoare, atunci integrala improprie* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Demonstraţie: Scriind $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$ şi folosind faptul că, din monotonia lui f , avem $f(k+1)\le f(x)\le f(k)$, $\forall\, x\in[k,k+1]$, $\forall\, k=\overline{1,n-1}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1)\le \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\le \sum_{k=1}^{n} f(k), \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Pe baza acestei relaţii, are loc concluzia din enunţ. ◀

Pot fi formulate şi alte criterii de convergenţă pentru integrale de tipul $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, pornind de la criteriile corespunzătoare pentru serii numerice.

Integrale din funcţii nemărginite

Definiţia 13.8 *Fie funcţia* $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, *cu* $\lim\limits_{x\nearrow b}|f(x)|=+\infty$ *şi* $f\in\mathcal{R}[a,b-\varepsilon]$, $\forall\,\varepsilon\in(0,b-a)$. *Dacă există şi este finită limita*

$$(\diamond)\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

atunci spunem că f *este* ***integrabilă (impropriu) pe*** $[a,b)$ *sau că* ***integrala de la*** a ***la*** b ***din*** f ***este convergentă****. Valoarea limitei se notează cu* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (C).

În caz contrar, dacă limita $(\diamond)$ *nu există sau este infinită, spunem că* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ *este* ***divergentă*** *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (D).

Analog, dacă $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ *este integrabilă local (adică* $f\in\mathcal{R}[a+\varepsilon,b]$, $\forall\,\varepsilon\in(0,b-a)$*) şi* $\lim\limits_{x\searrow a}|f(x)|=+\infty$, *iar* $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *există şi este finită, fiind notată cu* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *atunci spunem că* f *este* ***integrabilă (impropriu) pe intervalul necompact*** $(a,b]$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (C). *Altminteri, dacă* $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *nu există sau este infinită, spunem că* f *nu este integrabilă pe* $(a,b]$ *(sau* *că integrala* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este divergentă) şi scriem.* $\int\limits_{a+0}^b f(x)\,dx\ (D)$.

Observaţie: Pentru cazul în care $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ şi $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, iar integralele improprii $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ şi $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente, avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx\ (C)$ şi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\searrow 0}\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

Când există

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right),$$

declarăm această limită ca fiind ***valoarea principală a integralei*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Dacă, în plus, limita în cauză este şi finită, atunci spunem că f ***este integrabilă pe*** $[a,b]$, ***în sensul valorii principale***.

Pe baza Definiţiei 13.8, integrala improprie $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă atunci când $\alpha < 1$ şi divergentă când $\alpha \geq 1$.

Şi pentru asemenea tipuri de integrale improprii există criterii de convergenţă şi de absolută convergenţă (adică de convergenţă a integralei $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$), între care, des folosit în aplicaţii este aşa-numitul criteriu în α).

Teorema 13.5 ***(Criteriul de convergenţă în*** α*)*

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $f : [a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*)* $\to \mathbb{R}$ *o funcţie* $\mathcal{R}$*-integrabilă pe orice interval compact inclus în* $[a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*). În plus,* $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*).*

Dacă există limita $L = \lim\limits_{x\nearrow b}[(b-x)^\alpha f(x)]$ *(respectiv* $L = \lim\limits_{x\searrow a}[(x-a)^\alpha f(x)]$*), atunci:*

i) integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă când* $\alpha < 1$ *şi* $L < +\infty$*;*

ii) avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx\ (D)$ *când* $\alpha \geq 1$ *şi* $L > 0$.

Demonstraţie: Se utilizează interpretarea existenţei limitei L în limbajul $\varepsilon-\delta$ şi convergenţa/divergenţa integralei $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (respectiv $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$), la fel ca în Teorema 13.4. ◀

Teorema 13.6 ***(Criteriul de convergenţă de tip Cauchy)***

Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *(respectiv* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$*) este convergentă dacă şi numai dacă*

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\, b_\varepsilon \in (a,b),\ \textit{aşa încât, } \forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b),\ \textit{cu } b'<b'',\ \textit{avem } \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(respectiv, pentru $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$*:*

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\, a_\varepsilon \in (a,b),\ \textit{aşa încât, } \forall\, a', a'' \in (a, a_\varepsilon),\ \textit{cu } a'<a'',\ \textit{avem } \left|\int\limits_{a'}^{a''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon).$$

Acest criteriu rezultă prin interpretarea, în sens Cauchy, a existenţei limitei finite, în fiecare caz în parte. Pe baza sa, se pot deduce şi alte criterii de convergenţă pentru asemenea integrale improprii, de interes particular strict.

Integrale cu parametri

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă, a şi $b \in \mathbb{R}$, cu $a<b$, precum şi $f:[a,b]\times A \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall\,\mathrm{y} \in A$, arbitrar fixat, funcţia $f(\cdot,\mathrm{y})$ este Riemann integrabilă pe $[a,b]$. Se poate considera atunci $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\mathrm{y}) = \int\limits_a^b f(x,\mathrm{y})\,dx, \forall\,\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in A$$

şi denumită ***integrală Riemann***, pe $[a,b]$, ***cu parametri*** $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Mai general, dacă, în plus, se iau în consideraţie şi funcţiile $p : A \to [a,b]$, $q : A \to [a,b]$, atunci este bine definită şi funcţia $G : A \to \mathbb{R}$, dată de:

$$G(y) = \int\limits_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} f(x,\mathrm{y})\,dx, \mathrm{y} \in A.$$

Ea se numeşte ***integrală Riemann cu parametri şi cu limitele de integrare dependente de parametri***.

În legătură cu astfel de integrale, interesează îndeosebi condiţiile în care proprietăţi ale integrandului f, relative la parametrul vectorial (când $k>1$) sau scalar (când $k=1$) y, din A, se transmit funcţiilor F şi G.

Încercând să vedem, mai întâi, dacă transferul de existenţă a limitei $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} f(x,\mathrm{y})$, $\forall\,x \in [a,b]$, într-un punct de acumulare al mulţimii A ($\mathrm{y}_0 \in A'$), se produce sau nu, ne punem, firesc, întrebarea dacă există $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} F(\mathrm{y})$ şi dacă $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} F(\mathrm{y}) = \lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} \int\limits_a^b f(x,\mathrm{y})\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Răspunsul, negativ în general, este afirmativ doar dacă $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} f(x,\mathrm{y})$ există uniform în raport cu x. Astfel, cel puţin în cazul în care

$A = \mathbb{N}$, $y = n$ şi $f(x, \mathrm{y}) = f(x, n) = f_n(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, vedem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ nu este egală cu $\int\limits_a^b \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx$, decât dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[a,b]} g$.

Definiţia 13.9 *Pentru* $\mathrm{y}_0 \in A'$, *spunem că* ***funcţia*** $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ ***are limita*** $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, ***când*** $\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0$, *adică* $g(x) = \lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$, ***uniform în raport cu*** $x \in [a, b]$, *dacă,* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathrm{y}_0)$, *vecinătate a lui* y_0, *independentă de* x, *astfel încât,* $\forall\, x \in [a, b]$ *şi* $\forall\, \mathrm{y} \in V_\varepsilon \setminus \{\mathrm{y}_0\}$ *să avem:* $|f(x, \mathrm{y}) - g(x)| < \varepsilon$.

Folosind acum noţiunea de limită uniformă introdusă prin Definiţia 13.9, precum şi caracterizarea de tip Cauchy a existenţei unei limite într-un punct, putem vedea că rezultatul enunţat de propoziţia care urmează este adevărat, pe baza Teoremei 13.1.

Propoziţia 13.8 *Dacă* $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a, b]$ *(în raport cu* $\forall\, \mathrm{y} \in A$*) şi, pentru un* $\mathrm{y}_0 \in A$, *avem* $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y}) = g(x)$, *uniform în raport cu* $x \in [a, b]$, *atunci* g *este integrabilă pe* $[a, b]$ *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0} \int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx = \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

În ceea priveşte transferul de continuitate, în cazul cel mai general, adică cel al funcţiei G, are loc următorul rezultat.

Propoziţia 13.9 *Dacă* A *este o mulţime compactă din* $\mathbb{R}^k$, $f \in \mathcal{C}([a, b] \times A; \mathbb{R})$, *iar* $p, q \in \mathcal{C}(A; [a, b])$, *atunci* $G \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$. *În particular, când* p, q *sunt constante, ca de pildă când* $p \equiv a$ *şi* $q \equiv b$, *obţinem:* $F \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$.

Demonstraţie: Folosim relaţia

$$\begin{aligned} |\, G(\mathrm{y}) - G(\mathrm{y}_0)\,| \quad \le \quad & \left| \int\limits_a^{q(\mathrm{y}_0)} |\, f(x, \mathrm{y}) - f(x, \mathrm{y}_0)|\, dx \right| + \left| \int\limits_{q(\mathrm{y}_0)}^{q(\mathrm{y})} f(x, \mathrm{y})\, dx \right| + \\ + \quad & \left| \int\limits_a^{p(\mathrm{y}_0)} |\, f(x, \mathrm{y}) - f(x, \mathrm{y}_0)|\, dx \right| + \left| \int\limits_{p(\mathrm{y}_0)}^{p(\mathrm{y})} f(x, \mathrm{y})\, dx \right|, \forall\, \mathrm{y}, \mathrm{y}_0 \in A, \end{aligned}$$

în virtutea căreia, în ipotezele din enunţ, $|\, G(\mathrm{y}) - G(\mathrm{y}_0)|$ poate fi oricât de mică dorim, de îndată ce $\|\mathrm{y} - \mathrm{y}_0\|$ este acceptabil de mică. ◀

În aplicaţii, cea mai utilă proprietate de transfer este cea relativă la derivabilitatea funcţiilor F şi G, realizabilă, în condiţiile din Propoziţia 13.10, prin ***formula lui Leibniz de derivare***.

Propoziţia 13.10 *Dacă* A *este un paralelipiped compact în* $\mathbb{R}^k$, $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a, b] \times A$, *care admite* $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ *continuă pe* $[a, b] \times A$, *iar* p *şi* q *sunt două funcţii de la* A *la* $[a, b]$, *derivabile în raport cu y_i ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) pe A, atunci G (şi implicit F, în situaţia în care p şi q sunt constante) este derivabilă în raport cu y_i pe A şi are loc* ***formula (lui Leibniz):***

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathrm{y}) = f\left(q(\mathrm{y}), \mathrm{y}\right) \frac{\partial q}{\partial y_i}(\mathrm{y}) - f\left(p(\mathrm{y}), \mathrm{y}\right) \frac{\partial p}{\partial y_i}(\mathrm{y}) + \int\limits_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathrm{y})\, dx,\ \forall\, \mathrm{y} \in A.$$

Cât priveşte $\mathcal{R}$-integrabilitatea integralelor cu parametri, menţionăm următorul rezultat.

Propoziţia 13.11 *Dacă $A = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ (cu $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$) şi $f \in \mathcal{C}\left([a, b] \times [c, d]; \mathbb{R}\right)$, atunci funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$, dată prin $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$, $\forall\, y \in [c, d]$ este integrabilă Riemann pe $[c, d]$ şi are loc relaţia:*

$$\int\limits_c^d F(y)\, dy \left(= \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \right) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Când, în expresia lui F sau a lui G, fie domeniul de integrare, fie integrandul $f(\cdot, \cdot)$, în raport cu x, nu mai este mărginit, avem de-a face cu integrale improprii (pe interval necompact) şi cu parametri. Şi în cazul unor asemenea integrale interesează transferul proprietăţilor integrandului asupra integralei din context. De data aceasta, intervine decisiv noţiunea de convergenţă uniformă, în raport cu $\mathrm{y} \in A$, a integralelor ce definesc pe F şi pe G.

Definiţia 13.10 *(relativă la cazul $\int\limits_a^{b-0} f(x, \mathrm{y})\, dx$, când improprietatea este pricinuită de nemărginirea lui f, în raport cu x, în b)*

j) ***Integrala improprie*** *$\int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx$, $\mathrm{y} \in A$, se numeşte* ***convergentă punctual*** *pe A dacă există $F : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x, \mathrm{y})\, dx = F(\mathrm{y})$, $\mathrm{y} \in A$.*

jj) Spunem că integrala $\int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx$ este ***convergentă uniform pe*** *A, dacă $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x, \mathrm{y})\, dx = F(\mathrm{y})$ există uniform în raport cu $\mathrm{y} \in A$.*

Utilizând acum, simultan, conceptele introduse de Definiţiile 13.9 şi 13.10, se pot formula, în anumite condiţii, rezultate de transfer de proprietate şi pentru astfel de integrale (improprii şi cu parametri). Iată enunţul rezultatului relativ la derivabilitate.

Propoziţia 13.12 ***(asupra transferului de derivabilitate de la integrand la integrala improprie cu parametri)***

Fie $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $[c, d] = A \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ şi integrala improprie cu parametru $\int\limits_a^{b-0} f(x, y)\, dx$, unde $y \in A$. De asemenea, fie satisfăcute următoarele ipoteze:

1) Integrala improprie $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *converge punctual la o funcţie* $F(y)$*, pentru* $y \in A$*;*

2) Funcţia f *admite derivată parţială în raport cu* y*,* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*, pe* A*;*

3) Funcţiile f *şi* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt continue pe* $[a,b) \times [c,d]$*;*

4) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *converge uniform în raport cu* $y \in A$*.*

Atunci funcţia $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *este derivabilă în orice punct* $y \in [c,d]$ *şi*

$$F'(y) = \int\limits_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx, \forall\, y \in [c,d] = A.$$

Exemple remarcabile de integrale improprii cu parametri. Funcţiile Γ şi B ale lui Euler

Dintre integralele improprii şi cu parametri care ar fi demne de menţionat, amintim aici ***integrala lui Dirichlet*** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, ***integrala lui Euler-Poisson*** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$ şi ***integralele*** (***funcţiile***) ***lui Euler***, asupra cărora zăbovim acum puţin.

Funcţia Γ (gamma)

Prin definiţie, această funcţie este următoarea:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx,\ p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ea este bine definită (deci convergentă ca integrală improprie), $\forall\, p \in (0,+\infty)$, după cum rezultă imediat prin aplicarea criteriilor de convergenţă în β şi în α (v. Teoremele 13.4 şi 13.5).

Câteva proprietăţi imediate ale funcţiei Γ sunt prezentate în cadrul următoarelor relaţii:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall\, p > 0;$
2. $\Gamma(1) = 1;$
3. $\Gamma(n+1) = n!, \forall\, n \in \mathbb{N};$
4. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$
5. $\Gamma(p)\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\pi}{\sin{(p\pi)}}, \forall\, p \in (0,1);$

6. $\Gamma(p) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0;$

7. $(\Gamma(p))^{-1} = pe^{\gamma p} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right) e^{-p/n}, \forall\, p > 0$ (Weierstrass), unde $\gamma = 0,5772...$ este constanta lui Euler.

Funcţia B (beta)

Este definită prin: $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, p > 0, q > 0$. Satisface relaţiile:

1. $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt, \forall\, p,q > 0;$

2. $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta, \forall\, p,q > 0;$

3. $B(p,q) = B(q,p), \forall\, p,q > 0;$

4. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall\, p,q > 0;$

5. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p+q} B(p,q) = \dfrac{q}{p} B(p+1,q), \forall\, p,q > 0;$

6. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1), \forall\, p,q > 0;$

7. $B(p,n+1) = \dfrac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0, n \in \mathbb{N}.$

Bibliografie recomandată

1. Narcisa Apreutesei Dumitru, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii*, Editura "Performantica", Iaşi, 2005.

2. Marina Gorunescu, Florin Gorunescu, Augustin Prodan - *Matematici superioare. Biostatistică şi Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

3. Gh. Mocică - *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

4. Horiana Tudor - *Analiză matematică,* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.

5. M. Postolache, Ariana Pitea, Dragoş Cioroboiu - *Calcul integral,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.

6. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.

Cursul 14

Integrale multiple

Pentru funcţii reale vectorial-scalare, adică pentru funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (de mai multe variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$), corespondenta noţiunii de integrală definită, în sens Riemann, din cazul unidimensional, când $n = 1$ (v. cursul 13), este cea de integrală multiplă. În particular, când $n = 2$, se poate vorbi despre integrala dublă (utilă îndeosebi în aprecierea valorilor unor caracteristici numerice ale entităţilor geometrice sau fizice plane), iar când $n = 3$ se poate defini şi opera cu integrala triplă, pentru calculul unor elemente (volum, masă etc.) ce sunt caracteristice corpurilor din spaţiul euclidian tridimensional .

Ca şi în cazul în care $n = 1$, noţiunea riemanniană de integrală depinde de domeniul (compact sau necompact) şi de integrandul (mărginit sau nemărginit, parametrizat sau nu) pentru care se defineşte, fiind, după caz, proprie sau improprie, cu parametri şi respectiv fără parametri. Oricum, ca şi în cazul unidimensional, când integrala se defineşte prin intermediul conceptului de lungime (măsură) a intervalelor parţiale ce intervin în cadrul unei diviziuni (partiţii), este necesară introducerea prealabilă a noţiunii de arie (când $n = 2$), volum (când $n = 3$) şi, în general, măsură a unei mulţimi, respectiv de mulţime măsurabilă (în sens Jordan sau Lebesgue). Iată de ce, prezentând aici extensia noţiunii de integrală Riemann pentru funcţii reale de mai multe variabile, menţionăm mai întâi elementele definitorii ale noţiunii de măsură Jordan a unei mulţimi din $\mathbb{R}^n$ şi, raportându-ne la aceasta, expunem apoi conceptul de integrală multiplă (în special, cel de integrală dublă şi de integrală triplă, proprie şi improprie).

Măsura Jordan a unei mulţimi. Mulţimi din $\mathbb{R}^n$ măsurabile în sens Jordan

În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, considerăm în cele ce urmează că există dat un reper ortonormat, în raport cu care putem să ne referim la n axe de coordonate.

Definiţia 14.1 *i) Date fiind $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0 \in \mathbb{R}$ şi $b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0 \in \mathbb{R}$, aşa încât $a_k^0 < b_k^0$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, se numeşte* ***interval compact n-dimensional, cu "extremităţile"*** *(după caz,* ***laturile*** *- când $n = 2$,* ***muchiile*** *- când $n = 3$,* ***feţele*** *- când $n \geq 4$)* ***paralele cu axele de coordonate****, mulţimea (****dreptunghiul*** *- când $n = 2$,* ***paralelipipedul*** *- când $n = 3$,* ***hiperparalelipipedul*** *- când $n \geq 4$)*

$$I_0 = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k^0 \leq x_k \leq b_k^0, \forall\, k = \overline{1,n}\right\}$$

a cărui ***măsură*** *(Jordan) este, prin definiţie,* ***numărul*** *(cu semnificaţie de* ***arie*** *- când $n = 2$,* ***volum*** *- când $n = 3$,* ***hipervolum*** *- când $n \geq 4$) dat de produsul notat cu $\mu(I_0)$ şi egal cu*

$$(b_1^0 - a_1^0)(b_2^0 - a_2^0) \ldots (b_n^0 - a_n^0).$$

ii) Numim ***mulţime elementară, măsurabilă în sens Jordan****, orice mulţime din $\mathbb{R}^n$, obţinută ca reuniune finită de intervale compacte n-dimensionale, cu "extremităţile" paralele cu axele de coordonate şi fără puncte interioare comune.*

Cu alte cuvinte, o mulţime elementară, măsurabilă în sens Jordan, în $\mathbb{R}^n$, este o mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care există un număr finit, $q \in \mathbb{N}^*$, de intervale compacte n-dimensionale, $I_l = [a_1^l, b_1^l] \times [a_2^l, b_2^l] \times \cdots \times [a_n^l, b_n^l]$, $l = \overline{1,q}$, astfel încât

$$E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$$

şi $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_l = \varnothing$, $\forall\, j, l \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $j \neq l$. Prin definiţie, ***măsura Jordan a mulţimii elementare*** E este numărul

$$\mu(E) = \sum_{l=1}^{q} \mu(I_l),$$

unde $\mu(I_l) = \prod_{k=1}^{n}(b_k^l - a_k^l)$ (în conformitate cu i)).

Se notează cu $\mathcal{E}_J^n$ familia tuturor mulţimilor elementare din $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile Jordan, în sensul Definiţiei 14.1, ii).

Definiţia 14.2 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Se numeşte* ***măsură Jordan interioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Analog, se numeşte ***măsură Jordan exterioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \supseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Atunci când mulţimea A nu include nici o mulţime elementară, măsurabilă Jordan, E, definim $\mu_*(A) = 0$.

Observaţie: Este evident că, pentru orice mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, există atât $\mu_*(A)$, cât şi $\mu^*(A)$, în $\mathbb{R}_+$, având loc relaţia $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Definiţia 14.3 *Se spune că o mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este* ***măsurabilă în sens Jordan*** *dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Când $n = 2$ şi $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, mulţimea A se numeşte* ***carabilă*** *(Jordan).*

Valoare comună a măsurilor interioară (Jordan) $\mu_*(A)$ şi exterioară (Jordan) $\mu^*(A)$ se numeşte, atunci când A este măsurabilă în sens Jordan (în $\mathbb{R}^n$), pur şi simplu, ***măsura Jordan*** (***aria Jordan*** - când $n = 2$, ***volumul Jordan*** - când $n = 3$ sau ***hipervolumul Jordan*** - când $n \geq 4$) ***a mulţimii*** A şi se notează cu $\mu_J(A)$.

Observaţii:

1) Orice E din $\mathcal{E}_J^n$ este măsurabilă (în sens Jordan) în conformitate cu Definiţia 14.3, deoarece $\mu_J(E) = \mu(E) = \sum_{l=1}^{q} \mu(I_l) = \sum_{l=1}^{q} \prod_{k=1}^{n} (b_k^l - a_k^l)$.

2) Nu orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}^n$ este Jordan măsurabilă în sensul Definiţiei 14.3.

   De exemplu, când $n = 2$, mulţimea $A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_D(x)\}$, unde $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia lui Dirichlet, definită prin

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   nu este carabilă (nu are arie Jordan), deoarece $\mu_*(A_D) = 0 \neq 1 = \mu^*(A_D)$, chiar dacă este mărginită în $\mathbb{R}^2$.

3) Există mulţimi neelementare (în sensul Definiţiei 14.1, ii)) care sunt Jordan măsurabile (în sensul Definiţiei 14.3). Un exemplu în acest sens îl constituie mulţimea carabilă Γ_f - subgraful unei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ integrabile Riemann pe $[a, b]$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), adică mulţimea

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

pentru care avem: $\mu_J(\Gamma_f) = aria(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a,b]$ (v. Propoziţia 13.1) şi, pentru orice diviziune $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ a intervalului $[a,b]$, există m_i (respectiv M_i), din $\mathbb{R}$, ca margine inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Considerând mulţimea $E'_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$, avem: $E'_\Delta \in \mathcal{E}_j^2$, $E'_\Delta \subseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E'_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_f(\Delta)$ (suma Darboux inferioară, corespunzătoare lui f şi lui $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$). În consecinţă, rezultă că $s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f)$. În mod asemănător, considerând $E''_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$, vedem că $E''_\Delta \in \mathcal{E}_J^2$, $E''_\Delta \supseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E''_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}_f(\Delta) \geq \mu^*(\Gamma_f)$, unde $S_f(\Delta)$ este suma Darboux superioară, corespunzătoare lui f şi Δ. Prin cumulare, avem: $s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f) \leq \mu^*(\Gamma_f) \leq S_f(\Delta)$, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$. Dar, cum f este integrabilă pe $[a,b]$, este adevărată relaţia: $\underline{I} = \sup_\Delta s_f(\Delta) = \inf_\Delta S_f(\Delta) = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (v. Teorema 13.2). Se ajunge astfel la concluzia exprimată prin egalitatea $\mu_*(\Gamma_f) = \mu^*(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, ceea ce, ţinând seama de Definiţia 14.3, înseamnă tocmai că Γ_f este o mulţime carabilă (adică măsurabilă în sens Jordan în $\mathbb{R}^2$) şi are aria (adică măsura pătratică) Jordan egală cu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Mai general, deducem că, dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile pe $[a,b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\big\}$ are arie Jordan şi

$$\mu_J\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int\limits_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\,dx.$$

Aşa este cazul în care $0 < \widetilde{a}$, $0 < \widetilde{b}$, $a = -\widetilde{a}$, $b = \widetilde{a}$, $f(x) = -\dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$ şi $g(x) = \dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$, $\forall\, x \in [a,b] = [-\widetilde{a}, \widetilde{a}]$, caz caracteristic mulţimii

$$\Gamma_{f,g} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\widetilde{a} \leq x \leq \widetilde{a}, -\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2} \leq y \leq \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}\right\},$$

adică mulţimii punctelor interioare şi de pe frontiera elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} - 1 = 0$. Prin calcul, găsim că, în acest caz, avem: $\mu_J(\Gamma_{f,g}) = \pi\widetilde{a}\widetilde{b}$. Aşadar, aria (Jordan a) elipsei de semiaxe $\widetilde{a}$ şi $\widetilde{b}$ este egală cu $\pi\widetilde{a}\widetilde{b}$.

Propoziţia 14.1 *O mulţime $B \subseteq \mathbb{R}^n$ este* ***de măsură Jordan nulă****, dacă poate fi inclusă într-o mulţime $E \in \mathcal{E}_J^n$, de măsură oricât de mică. Cu alte cuvinte, avem $\mu_J(B) = 0$ dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, astfel încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Demonstraţie: Faptul că $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ implică $\mu^*(B) = 0$. Cum $0 \le \mu_*(B) \le \mu^*(B)$, rezultă că $\mu_*(B) = \mu^*(B) = 0$, ceea ce, în virtutea Definiţiei 14.3, înseamnă că B este măsurabilă în sens Jordan, având măsura Jordan nulă. ◀

Câteva condiţii necesare şi suficiente pentru ca o mulţime din $\mathbb{R}^n$ să fie măsurablià în sens Jordan sunt reunite în următorul rezultat:

Teorema 14.1 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Atunci, afirmaţiile de mai jos sunt echivalente:*

a) A este Jordan măsurabilă;

b) $\forall\,\varepsilon > 0$, există E'_ε şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E'_\varepsilon \subseteq A \subseteq E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(E''_\varepsilon) < \varepsilon$;

c) $\partial(A)$ este Jordan măsurabilă şi $\mu_J\left(\partial(A)\right) = 0$;

d) Există şirurile $\left(\widetilde{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$ şi $\left(\widehat{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $\widetilde{E}_m \subseteq A \subseteq \widehat{E}_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_J(\widetilde{E}_m) = \lim\limits_{m\to\infty}\mu_J(\widehat{E}_m)$.

Demonstraţie: Pentru echivalenţa afirmaţiilor a) şi b), vedem mai întâi că, dacă A este Jordan-măsurabilă, atunci $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu_j(A)$ şi, din definiţia (caracterizarea) cu "ε" a marginii superioare ce dă pe $\mu_*(A)$, rezultă că, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ aşa încât $E'_\varepsilon \subset A$ şi $\mu_J(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu_J(E'_\varepsilon)$, iar din definiţia marginii inferioare ce dă pe $\mu^*(A)$, reiese că, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $E''_\varepsilon \supset A$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) < \mu_J(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Aşadar, dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu_J(A)$. atunci, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon$ şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, încât $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \mu_J(A) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mu_J(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

Reciproc, dacă, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \varepsilon$, atunci $0 \le \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon$. Deci, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Adică A este Jordan măsurabilă.

Privitor la faptul că a) şi c) sunt afirmaţii echivalente, putem vedea la început că, dacă A este măsurabilă Jordan, iar a) şi b) sunt echivalente, atunci, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon$ şi $E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) = \mu_J(E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon) < \varepsilon$. Cum $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{o}{A} \subset \overline{E''_\varepsilon} \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon} = E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon}$, iar $E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon} \in \mathcal{E}_J^n$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon}) = \mu_J(E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon) < \varepsilon$, rezultă că, potrivit Propoziţiei 14.1, mulţimea $Fr(A)$ este Jordan-măsurabilă şi $\mu_J(Fr(A)) = 0$. Invers, dacă c) este adevărată, atunci, prin aplicarea Propoziţiei 14.1, rezultă că, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $Fr(A) \subset E_\varepsilon$. Dar, cum orice mulţime din $\mathcal{E}_J^n$, care conţine frontiera mulţimii A, se poate scrie ca diferenţa a două mulţimi din $\mathcal{E}_J^n$, între care se află inclusă A, se poate spune că, $\forall\,\varepsilon > 0$, odată cu E_ε, există E'_ε şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E_\varepsilon = E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon$, $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) = \mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$. Deci are loc b), adică a).

În fine, b) şi d) sunt echivalente deoarece, dacă are loc b), atunci, pentru $\varepsilon = \frac{1}{m}$, cu $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, \widetilde{E}_m = E'_\varepsilon$ şi $\widehat{E}_m = E''_\varepsilon$ din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $\widetilde{E}_m \subset A \subset \widehat{E}_m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ şi $0 \le \mu_J(\widehat{E}_m) - \mu_J(\widetilde{E}_m) < \frac{1}{m}$, adică $\underset{m\to\infty}{lim}\,\mu_J(\widetilde{E}_m) = \underset{m\to\infty}{lim}\,\mu_J(\widehat{E}_m)$. Reciproc, dacă d) este adevărată, atunci $\forall\,\varepsilon > 0$, există $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \ge m(\varepsilon)$, avem $\mu_J(\widehat{E}_m) - \mu_J(\widetilde{E}_m) < \varepsilon$ şi prin urmare, b) are loc, cu $E'_\varepsilon = \widetilde{E}_{m(\varepsilon)}$ şi $E''_\varepsilon = \widehat{E}_{m(\varepsilon)}$. ◀

Observaţii:

1) Pe baza echivalenţei dintre afirmaţiile a) şi b) din Teorema 14.1, se poate spune că orice mulţime Jordan-măsurabilă este, în mod necesar, mărginită.

2) Orice mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ care este Jordan-măsurabilă şi care are $\mu_J(A) = 0$ se caracterizează prin faptul că $\mu^*(A) = 0$.

3) O mulţime Jordan-măsurabilă $A \subset \mathbb{R}^n$ are $\mu_J(A) \neq 0$ dacă şi numai dacă $\overset{o}{A} \neq \varnothing$.

4) Graficul oricărei funcţii continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o mulţime din $\mathbb{R}^2$, de arie (măsură pătratică) Jordan nulă. Aceasta întrucât $f \in \mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$ şi deci $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ este Jordan - măsurabilă şi, prin echivalenţa afirmaţiilor a) şi c) din enunţul Teoremei 14.1, mulţimea $Fr(\Gamma_f)$ are arie (Jordan) nulă. Astfel, şi $G_f \subset Fr(\Gamma_f)$ are aria nulă.

5) Orice mulţime din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice ale unor funcţii continue are arie (Jordan).

6) Orice disc din $\mathbb{R}^2$ are arie, întrucât, există întotdeauna două şiruri de mulţimi din $\mathcal{E}_J^2$, unul al poligoanelor cu n laturi, înscrise în cercul-frontieră al discului şi celălalt al poligoanelor cu n laturi, circumscrise respectivului cerc, aşa încât diferenţa ariilor poligoanelor cu câte n laturi este oricât de mică pentru n suficient de mare. Astfel, în virtutea echivalenţei dintre d) şi a) (v. Teorema 14.1), discul are arie.

Notând cu $\mathcal{M}_J^n$ mulţimea tuturor părţilor lui $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile în sens Jordan, pot fi evidenţiate unele proprietăţi ale măsurii Jordan şi, implicit, ale elementelor din $\mathcal{M}_J^n$, după cum urmează.

Teorema 14.2 ***(Proprietăţi ale măsurii Jordan)***
1) $\mu_J(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$ *(proprietatea de nenegativitate).*
2) $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ *cu* $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing$ *(proprietatea de aditivitate finită).*
3) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$, *cu* $B \subseteq A \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(A \backslash B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$ *(proprietatea de substractivitate).*
4) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$, *cu* $B \subseteq A \Longrightarrow \mu_J(B) \leq \mu_J(A)$ *(proprietatea de monotonie).*
5) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$, *cu* $\mu_J(A) = 0$ *şi* $\forall\ B \subseteq A \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(B) = 0$ *(proprietatea de completitudine).*
6) $\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f =$ *izometrie şi* $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow f(A) \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(f(A)) = \mu_J(A)$ *(proprietatea de invarianţă la izometrii).*

Demonstraţie: 1) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \mu_J(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A) \geq \mu_J(E) = \mu(E) \geq 0, \forall\, E \in \mathcal{E}_J^n$.
2)$\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ cu $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \Longrightarrow Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$, $\mu_J(Fr(A)) = 0$, $\mu_J(Fr(B)) = 0$ şi, ca atare, $\mu_J(Fr(A \cup B)) = 0$. Aşadar: $A \cup B \in \mathcal{M}_J^n$. Totodată, $A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. De asemenea, $B \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F'_\varepsilon, F''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $F'_\varepsilon \subset B \subset F''_\varepsilon$ şi $\mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci: $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A \cup B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$, $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A) + \mu_J(B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$ şi deci $|\mu_J(A \cup B) - \mu_J(A) - \mu_J(B)| \leq \mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$.
3)$\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow Fr(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(Fr(A)) = 0; \forall B \subseteq A$ şi $A \setminus B \subseteq A \Longrightarrow Fr(A \setminus B) \subseteq Fr(A) \Longrightarrow \mu_J(Fr(A \setminus B)) = 0 \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$; $A = (A \setminus B) \cup B$ şi $\overset{o}{\widehat{A \setminus B}} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \overset{2)}{\Longrightarrow} \mu_j(A) = \mu_J(A \setminus B) + \mu_J(B) \Longrightarrow \mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$.
4)$\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $B \subseteq A \overset{3)+1)}{\Longrightarrow} \mu_J(A) - \mu_J(B) = \mu_J(A \setminus B) \geq 0$.
5)$\forall A \in \mathcal{M}_J^n$, $\mu_J(A) = 0 \Longleftrightarrow \mu^*(A) = 0, \forall\ B \subseteq A \Longrightarrow \mu^*(B) = 0 \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(B) = 0$.
6)$\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f =$ izometrie $\Longrightarrow f(\mathcal{E}_J^n) = \mathcal{E}_J^n \Longrightarrow \mu_*(A) \leq \mu_*(f(A)) \leq \mu^*(f(A)) \leq \mu^*(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \mu_*(A) = \mu_*(f(A)) = \mu^*(f(A)) = \mu^*(A) \Longrightarrow f(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(f(A)) = \mu_J(A)$. ◀

Integrala multiplă, în sens Riemann, pe mulţimi compacte

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă şi mărginită, astfel încât $D \in \mathcal{M}_J^n$, unde, după cum am specificat mai sus, $\mathcal{M}_J^n$ este mulţimea tuturor submulţimilor Jordan-măsurabile ale lui $\mathbb{R}^n$. De asemenea, fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$.

Definiţia 14.4 *a) Se numeşte* ***partiţie*** *a lui D orice familie finită de subdomenii $D_i \subset D$, $i = \overline{1,p}$, astfel încât $D_i \in \mathcal{M}_J^n$, $\forall i = \overline{1,p}$, $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$ şi $D = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_i$.*

b) Notând cu Δ o asemenea partiţie, se defineşte ***norma*** *ei, notată cu $\|\Delta\|$, prin $\max\limits_{1 \le i \le p} \{\operatorname{diam}(D_i)\}$, unde $\operatorname{diam}(D_i)$ înseamnă diametrul subdomeniului D_i (în raport cu distanţa euclidiană pe $\mathbb{R}^n$).*

Observaţie:

În virtutea proprietăţii de aditivitate finită (v. Teorema 14.2-2)), avem: $\mu_J(D) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_J(D_i)$.

Definiţia 14.5 *Fie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ o partiţie a lui D şi $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i) \in D_i$ un punct arbitrar ales, $\forall i = \overline{1,p}$. Notăm cu ξ_Δ mulţimea de puncte $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$. Se numeşte sumă Riemann ataşată funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, partiţiei Δ şi setului de puncte $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$ din ξ_Δ, numărul*

$$\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi^i) \mu_J(D_i).$$

Definiţia 14.6 *Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, mărginită pe mulţimea conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă $D \subset \mathbb{R}^n$, este $\mathcal{R}-$integrabilă (Riemann$-$integrabilă) pe D, dacă există $I \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, aşa încât, oricare ar fi o partiţie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi punctele $\xi^i \in D_i$, $i = \overline{1,p}$, avem:*

$$|\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) - I)| < \varepsilon.$$

Numărul I se numeşte integrala multiplă (dublă-când $n = 2$, triplă-când $n = 3$ etc.) a funcţiei f pe D şi se notează cu

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Ca şi în cazul unidimensional, pentru o funcţie mărginită $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$, o partiţie oarecare a lui D, se pot defini sumele Darboux inferioară $s_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i \mu_J(D_i)$ şi respectiv superioară $S_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \mu_J(D_i)$, unde $m_i = \inf\limits_{x \in D_i} \{f(x)\}$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in D_i} \{f(x)\}$, $\forall i = \overline{1,p}$.

Este uşor de văzut că are loc relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le s_f(\Delta) \le S_f(\Delta) \le M \cdot \mu_J(D)$$

pentru orice partiţie Δ a lui D, cu $m = \inf\limits_{x \in D} \{f(x)\}$ şi $M = \sup\limits_{x \in D} \{f(x)\}$.

Pe baza ei, notând cu I_* supremumul din $\{s_f(\Delta)\}$ în raport cu partiţiile de tip Δ ale lui D, iar cu I^* infimumul din $\{S_f(\Delta)\}$ pe mulţimea partiţiilor Δ ale lui D, deducem relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le I_* \le I^* \le M \cdot \mu_J(D).$$

Ca şi pentru $n = 1$, se poate arăta că este adevărat următorul rezultat:

Propoziţia 14.2 ***(Criteriul lui Darboux de $\mathcal{R}-$integrabilitate pentru funcţii mărginite)***
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită . Condiţia necesară şi suficientă ca f să fie $\mathcal{R}$-integrabilă (multiplu) pe D este ca, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice partiţie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.

Echivalent, necesar şi suficient ca $f \in \mathcal{R}(D)$ (unde $\mathcal{R}(D)$ înseamnă mulţimea funcţiilor Riemann-integrabile (multiplu) pe D) este să fie îndeplinită relaţia

$$I_* = I^* \in \mathbb{R}.$$

În acest context, valoarea comună a numerelor I_* şi I^* se declară a fi integrala

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Prin utlizarea criteriului lui Darboux de (multiplă) integrabilitate Riemann, se poate dovedi că mulţimea $C(D)$ a funcţiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care sunt continue pe D este inclusă în $\mathcal{R}(D)$. Altfel formulat, are loc următorul rezultat:

Teorema 14.3 *Orice funcţie continuă pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă, este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D (în sensul Definiţiei 14.6).*

Demonstraţie: Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă şi $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ o partiţie oarecare a lui D. Atunci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i)\mu_J(D_i).$$

În acelasi timp, din continuitatea lui f pe D şi, implicit, pe oricare din subdomeniile compacte D_i, rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe D_i, $\forall i = \overline{1,p}$, fiind chiar uniform continuă pe D. Astfel, există ξ^i şi η^i din D_i încât $m_i = f(\xi^i)$ şi $M_i = f(\eta^i)$, iar pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ pentru care, oricare ar fi x' şi x'' din D, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}$. ◀

Luând acum Δ, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, obţinem

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p} (f(\eta^i) - f(\xi^i))\mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)} \sum_{i=1}^{p} \mu_J(D_i) = \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)} \mu_J(D) = \varepsilon.$$

În consecinţă, pe baza Propoziţiei 14.2, rezultă că f este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D.

Un alt rezultat privitor la asigurarea integrabilităţii Riemann multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil este următorul:

Teorema 14.4 *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi măsurabilă Jordan D din $\mathbb{R}^n$, iar, în plus, cu excepţia eventuală a unei mulţimi de măsură Jordan nulă, f este continuă pe D, atunci $f \in \mathcal{R}(D)$.*

Demonstraţie: Cum f este mărginită pe D, există $M \in \mathbb{R}_+^*$ aşa încât $|f(x)| < M$, $\forall x \in D$. În acelaşi timp, $\forall \varepsilon > 0$, există o mulţime $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_j^n$, cu $\overset{\circ}{E}_\varepsilon$incluzând mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f din D şi pentru care $\mu_J(E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Tot prin ipoteză, f este continuă pe $D \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon = \widetilde{D}_\varepsilon$, unde $\widetilde{D}_\varepsilon$ este, cu evidenţă, o submulţime închisă şi mărginită (deci compactă) a lui D. Ca atare, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, aşa încât, $\forall x', x'' \in \widetilde{D}_\varepsilon$, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\mu_j(D)}$. Considerând acum o partiţie Δ a lui D, a cărui prim element D_1 este $D \cap E_\varepsilon$, iar celelalte elemente - $D_2, D_3, \ldots, D_p$ - sunt submulţimi compacte şi Jordan-măsurabile ale lui D, cu diametrele mai mici decât $\delta(\varepsilon)$, putem scrie:

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leq (M_1 - m_1)\mu_J(E_\varepsilon) + \sum_{i=2}^{p}(M_i - m_i)\mu_J(D_i) <$$
$$< 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\mu_J(D)}\sum_{i=2}^{p}\mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Astfel, deoarece $0 \leq I^* - I_* \leq S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$, iar ε este arbitrar, rezultă că $I^* = I_*$, ceea ce înseamnă că f este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D. ◀

Proprietăţile integralei multiple sunt similare celor ale integralei din cazul $n = 1$ şi se pot demonstra pe baza Definiţiei 14.6 şi a Teoremei 14.2. În acest sens, este adevărată următoarea propoziţie.

Propoziţia 14.3 *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă. Atunci:*

a) $\int \cdots \int_D 1 \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \mu_J(D)$;

b) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$ *şi are loc egalitatea*

$$\int \cdots \int_D (\alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n))dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \alpha \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n + \beta \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n;$$

c) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, *avem:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \leq \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n;$$

d) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *rezultă că* $|f| \in \mathcal{R}(D)$ *şi*

$$\left|\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n\right| \leq \int \cdots \int_D |f(x_1, \ldots, x_n)|dx_1 \ldots dx_n;$$

e) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $m = \inf\limits_{x \in D}\{f(x)\}$ *şi* $M = \sup\limits_{x \in D}\{f(x)\}$, *există* $\lambda \in [m, M]$ *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \lambda \mu_J(D).$$

Dacă, în plus, $f \in C(D)$, *atunci există un punct* $\xi \in D$, *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = f(\xi)\mu_J(D);$$

f) Dacă D este reuniunea a două domenii compacte şi Jordan-măsurabile D_1 şi D_2, cu $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset$, iar $f \in \mathcal{R}(D_1) \cap \mathcal{R}(D_2)$, avem $f \in \mathcal{R}(D)$ şi

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n &= \int \cdots \int_{D_1} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n + \\ &+ \int \cdots \int_{D_2} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n; \end{aligned} \tag{14.1}$$

g) $\forall f, g \in C(D)$, *cu* $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, *există* $\eta \in D$, *astfel încât*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= f(\eta) \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Integrala dublă pe mulţimi compacte

În cazul particular în care $n = 2$, Definiţia 14.6 conduce la noţiunea de integrală dublă a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi carabilă D. Notată cu $\iint_D f(x,y)dx\,dy$, aceasta, împreună cu integrandul f şi domeniul D respectă rezultatele relative la integrala multiplă de tip Riemann, prezentate mai înainte şi corespunzător transcrise pentru situaţia în care $n = 2$. Astfel, nu ne rămâne aici decât să facem cunoscut modul de calcul al integralei duble, în câteva cazuri relative la forma geometrică a lui D.

Propoziţia 14.4 ***(Cazul în care D este un dreptunghi)***
Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b, c < d$, $D = [a,b] \times [c,d]$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie pentru care integrala dublă*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy$$

există. Dacă $\int_c^d f(x,y)dy$ *este, ca funcţie de* x, $\mathcal{R}-$*integrabilă pe* $[a,b]$, *atunci există* $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$ *şi avem:*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

În plus, dacă $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, *iar* $f_1 \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f_2 \in \mathcal{R}[c,d]$, *atunci:*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)f_2(y)dx\,dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Demonstraţie: Considerând o partiţie a dreptunghiului $[a,b] \times [c,d]$ prin mulţimi dreptunghiulare de tipul $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ unde $\Delta' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ este o diviziune a intervalului compact, unidimensional, $[a,b]$, iar $\Delta'' = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ este o diviziune a intervalului $[c,d]$, luăm în atenţie $m_{ij} = \inf\{f(x,y)/(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$ şi $M_{ij} = \sup\{f(x,y)/(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Arbitrar alegând $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1,n}$ şi ţinând seama de ipoteza existenţei integralei $\int_c^d f(x,y)dy$, avem

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \ \ \forall j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}.$$

De aici, prin însumare după j de la 1 la m, obţinem:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \ \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Înmulţind această relaţie cu $x_i - x_{i-1}$ şi realizând suma după i, de la 1 la n, a rezultatelor, ajungem la dubla inegalitate

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^n (\int_c^d f(\xi_j, y)dy)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = S_f(\Delta), \tag{14.2}$$

unde $\Delta = \Delta' \times \Delta'$ este partiţia considerată a dreptunghiului $D = [a,b] \times [c,d]$. Cum, prin ipoteză, există $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ şi, în acelaşi timp, există şi $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$, tragem concluzia că, pe seama relaţiei (14.2), rezultă:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Când $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x,y) \in D = [a,b] \times [a,b]$, avem:

$$\begin{aligned}(14.3)\qquad &\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f_1(x)f_2(y)dy)dx = \int_a^b (f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy)dx = \\ &= \int_c^d f_2(y)dy \cdot \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.\end{aligned}$$

◀

Observaţii:

i) Atunci când $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$ şi există $\int_a^b f(x,y)dx$, $\forall y \in [c,d]$, iar aceasta din urmă, ca funcţie de y, este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[c,d]$, atunci prin inversarea rolurilor lui x şi y în cadrul Propoziţiei 14.4, avem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dx\,dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

ii) O condiţie suficientă pentru îndeplinirea ipotezelor din Propoziţia 14.4 este: $f \in C([a,b] \times [c,d]; \mathbb{R})$.

Definiţia 14.7 *a) Un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte* ***simplu în raport cu axa*** *Oy dacă există două funcţii continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$ şi*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

b) Analog, un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte ***simplu în raport cu axa*** *Ox dacă există două funcţii continue $\gamma, \omega : [c,d] \to \mathbb{R}$, aşa încât $\gamma(y) < \omega(y)$, $\forall y \in [c,d]$ şi*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \le x \le \omega(y), c \le y \le d\}.$$

Teorema 14.5 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi $f \in C(D,\mathbb{R})$. Atunci are loc formula*

$$(14.4)\qquad \iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx,$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, cu φ şi ψ din $C([a,b];\mathbb{R})$, aşa încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Demonstraţie: Fie Δ o diviziune echidistantă a intervalului $[a,b]$, cu nodurile $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k = \overline{0,n}$. Evident, $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$. Considerăm funcţiile $\varphi_l : [a,b] \to \mathbb{R}$, $l = \overline{0,n}$, definite prin

$$\varphi_l(x) = \varphi(x) + \frac{l}{n}(\psi(x) - \varphi(x)),\ \ \forall x \in [a,b], l \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Avem $\varphi_0 = \varphi$ şi $\varphi_n = \psi$.

Fie notată cu Ω_n partiţia lui D prin elementele $(D_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, unde

$$D_{ij} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \le x \le x_i, \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x)\}, \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Observăm că $\mathrm{diam}(D_{ij}) \leq \frac{b-a}{n} + \frac{1}{n} \sup\limits_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)|$, $\forall i, j \in \overline{1,n}$ şi, în consecinţă, $\|\Omega_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Folosind notaţiile $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$ şi $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$, $\forall i, j = \overline{1,n}$, avem:

$$m_{ij}\mathrm{aria}(D_{ij}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy)dx \leq M_{ij}\mathrm{aria}(D_{ij}), \forall i, j = \overline{1,n}.$$

De aici, prin sumare succesivă după i şi j, de la 1 la n, obţinem:

$$s_f(\Omega_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\mathrm{aria}(D_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\mathrm{aria}(D_{ij}) = S_f(\Omega_n). \tag{14.5}$$

Cum f este integrabilă pe D, avem $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(\Omega_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Omega_n) = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ şi atunci, pe seama relaţiei (14.5), deducem că are loc formula de calcul (14.4) din concluzia teoremei. ◀

Observaţii:

a) În cazul în care $f \in C(D)$, iar D este simplu în raport cu axa Ox, adică

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\},$$

atunci formula de calcul corespunzătoare este următoarea:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\omega(y)} f(x,y)dx \right) dy. \tag{14.6}$$

b) În situaţia în care D nu este simplu nici în raport cu axa Oy şi nici în raport cu axa Ox, dar se poate exprima ca o reuniune finită de subdomenii simple (fie în raport cu Oy, fie în raport cu Ox) şi mutual disjuncte atunci pentru calculului integralei duble în cauză, se folosesc împreună formulele (14.1) (din propoziţia 14.3-f), (14.4) şi (14.6).

Exemplul 14.1. *Fie* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\}$. *Să se calculeze aria* (D).

Prin aplicarea formulei de la punctul a) al Propoziţiei 14.3, avem:

$$\mathrm{aria}(D) = \iint_D dx\,dy.$$

Cum $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, cu $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, unde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_1(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_1(y) = y, 1 \leq y \leq \sqrt{3}\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_2(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_2(y) = \frac{3}{y}, \sqrt{3} \leq y \leq 2\}$ şi $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_3(y) = \frac{y}{4} \leq x \leq \omega_3(y) = \frac{3}{y}, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}\}$, iar D_1, D_2 şi D_3 sunt domenii simple în raport cu axa Ox, obţinem:

$$\begin{aligned}
\text{aria}(D) &= \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy + \iint_{D_3} dx\,dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{1/y}^{y} dx\right) dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_{1/y}^{3/y} dx\right) dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\int_{y/4}^{3/y} dx\right) dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(y - \frac{1}{y}\right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{y} dy + \int_2^{2\sqrt{3}} (\frac{3}{y} - \frac{y}{4})dy = \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \ln y\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} + 2\ln y\Big|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(3\ln y - \frac{y^2}{8}\right)\Big|_2^{2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + 2\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2} - 3\ln 2 + \frac{1}{2} = 2\ln 2.
\end{aligned}$$

În anumite împrejurări, calculul unei integrale duble pe o mulţime conexă, inchisă, mărginită şi carabilă s-ar putea face şi printr-o schimbare adecvată de variabile (coordonate), urmărindu-se, în principal, transformarea domeniului de integrare şi a integrandului în corespondente ale lor care să faciliteze calculul ulterior.

Dacă Ω este un domeniu mărginit şi carabil din $\mathbb{R}^2$, iar $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, definită prin $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $\forall (u,v) \in \overline{\Omega}$ este o funcţie de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$, care transformă, bijectiv, domeniul Ω într-o mulţime D şi $\det(J_F)(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in \Omega$, atunci $\overline{D} = F(\overline{\Omega})$ este, la rândul său, un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, iar F se numeşte shimbare de variabile (coordonate).

Calculul unei integrale duble pe D, dintr-o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, se va face, prin implicarea transformării F, în virtutea următorului rezultat, a cărui demonstraţie o omitem.

Propoziţia 14.5 *Fie $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ o schimbare de variabile şi $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, are loc formula*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| (u,v)du\,dv,$$

în care $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ semnifică Jacobianul (determinantul funcţional al) lui F, iar $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ valoarea sa absolută.

Observaţii:

i) De obicei, se recurge la o schimbare de variabile sugerată de forma domeniului D.

Astfel, în cazul exemplului de mai sus, luând $xy = u$ şi $\frac{y}{x} = v$, cu $u \in [1,3]$ şi $v \in [1,4]$, altfel spus $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ şi $y = \sqrt{uv}$, avem

$$\text{aria}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_\Omega \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| (u,v)du\,dv,$$

unde $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 4\} = [1,3] \times [1,4]$ şi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix})(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}) = \frac{1}{2v}.$$

Deci, şi pe o asemenea cale, regăsim faptul că

$$\text{aria}(D) = \int_1^3 du \int_1^4 \left|\frac{1}{2v}\right| dv = \left(u\Big|_1^3\right)\left(\frac{1}{2}\ln v\Big|_1^4\right) = 2\frac{1}{2}\ln 4 = 2\ln 2.$$

ii) Frecvent practicate sunt transformările de la coordonatele carteziene (x, y) la cordonatele polare (r, θ), prin relaţiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \text{cu } r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi],$$

unde $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r, \theta) = \det(\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}) = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$

De asemenea, uneori, se mai foloseşte trecerea de la x şi y la aşa-numitele coordonate polare generalizate, potrivit relaţiilor

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\theta \\ y = br\sin^\alpha\theta \end{cases},$$

în care $r \in [r_1, r_2] \subseteq (0, \infty)$ şi $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi]$ sunt noile coordonate, iar a, b şi α sunt parametri adecvat luaţi în context. Când $\alpha = 1$, atunci r şi θ se numesc cordonate eliptice, corespunzătoare elipsei de ecuaţie redusă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Exemplul 14.2. *Să se calculeze* $\iint_D (y - x + 2)dx\,dy$, *unde* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

Folosind transformarea $(x, y) \to (r,\ \theta)$, dată de relaţiile $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$, cu $0 \le r < 1$ şi $0 \le \theta \le 2\pi$, avem:

$$\begin{aligned} &\iint_D (y - x + 2)dx\,dy = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2) \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| (r,\theta)dr)d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)6r\,dr)d\theta = \int_0^{2\pi} (6\sin\theta - 4\cos\theta + 6)d\theta = \\ &= (-6\cos\theta - 4\sin\theta + 6\theta)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

Ca aplicaţii ale integralei duble, menţionăm aici, în afara aceleia relative la calculul ariei unui domeniu plan, şi pe aceea referitoare la calculul masei unei plăci materiale plane D, cu densitate de masă ρ, cunoscută, în conformitate cu formula

$$\text{masa}(D) = \iint_D \rho(x, y)dx\,dy,$$

precum şi pe aceea privitoare la determinarea coordonatelor centrului de greutate (x_G, y_G) al unei plăci materiale plane D, cu densitatea de masă ρ, potrivit formulelor:

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)dx\,dy} \ \text{ şi } \ y_G = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)dx\,dy}.$$

Integrala triplă pe domenii compacte

Integrala triplă reprezintă cazul particular al integralei multiple ce corespunde lui $n = 3$. Evident că toate definiţiile, rezultatele şi observaţiile din cazul general îşi păstrează valabilitatea şi când $n = 3$. Astfel, între altele, Definiţia 14.6, Propoziţia 14.3 şi Teorema 14.3 stabilesc, prin particularizare, pentru $n = 3$, modalitatea de introducere a numărului

$$\iiint_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

cu semnificaţia sa de integrală triplă, în sens Riemann, a funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, pe domeniul compact şi măsurabil-Jordan (adică cu volum Jordan) din $\mathbb{R}^3$, precum şi proprietăţile integralei triple, între care şi faptul că orice funcţie continuă pe D este integrabilă (triplu), în sens Riemann, pe D.

Modalităţile de calcul ale unei integrale triple se pot descifra prin analogie cu cele de la integrala dublă.

Definiţia 14.8 *Un domeniu $D \subset R^3$ se numeşte **simplu în raport cu axa** Oz (de exemplu) dacă există un domeniu $\widetilde{D} \subset R^2$, carabil şi două funcţii continue $\varphi, \psi : \overline{\widetilde{D}} \to R$, cu proprietatea $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \widetilde{D}$, astfel încât*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) < z < \psi(x, y),\ \forall (x, y) \in \widetilde{D}\}.$$

Un astfel de domeniu spaţial are volumul (în sens Jordan) dat de formula

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_{\widetilde{D}} \psi(x, y) dx\, dy - \iint_{\widetilde{D}} \varphi(x, y) dx\, dy.$$

Totodată, analog Teoremei 14.5, este aici următorul rezultat:

Propoziţia 14.6 *Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^3$, simplu în raport cu Oz. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc formula de calcul:*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx\, dy. \tag{14.7}$$

Exemplul 14.3. *Să se calculeze $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz$, unde D este domeniul mărginit de suprafeţele $z = 0$, $z = 1$ şi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Observând că $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1, \forall (x, y) \in \widetilde{D}\}$, unde $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, avem $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\psi(x, y) = 1$, aşa încât, prin utilizarea formulei (14.7) (v. Propoziţia 14.6), obţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz \right) \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy =$$
$$= \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2 + y^2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx\, dy.$$

De aici, mai departe, folosind trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la cele polare (r, θ), avem:

$$\iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2 + y^2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r(1 - r) r\, dr \right) d\theta =$$
$$= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

În ceea ce priveşte corespondentul rezultatului stipulat de Propoziţia 14.5, acesta este următorul:

Propoziţia 14.7 ***(Formula de calcul pentru integrala triplă pe o mulţime compactă, cu volum, din $\mathbb{R}^3$, prin transformare de coordonate)***

Fie Ω şi D două domenii compacte, cu volum Jordan, din $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $F : \Omega \to D$, unde $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, $\forall (u, v, w) \in \Omega$, o transformare punctuală, bijectivă, de clasă $C^1(\Omega, D)$ şi cu jacobianul $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ nenul pe Ω. Dacă $f \in C(D; \mathbb{R})$, atunci are loc formula:

$$(\Theta) \quad \iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u, v, w) du\, dv\, dw.$$

Observaţii:

1) Cea mai utilizată schimbare de variabile în $\mathbb{R}^3$ este trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice r, θ, φ, potrivit relaţiilor:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, \pi], \\ z = r \cos\theta, & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \subseteq [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$\frac{D(x, y, z,)}{D(r, \theta, \varphi)}(r, \theta, \varphi) = \det(\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}) = r^2 \sin\theta.$$

2) O altă schimbare de variabile pentru integrala triplă este trecerea de la coordonatele carteziene la coordonatele (aşa-numite) cilindrice, transformare definită de relaţiile:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r \sin\theta, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi], \\ z = z, & z \in [z_1, z_2] \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

În acest caz, avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}(r, \theta, z) = r$.

Reluând Exemplul 14.3, relativ la integrala triplă

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz,$$

unde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1, \forall (x, y) \in \sqrt{\widetilde{D}}\}$, cu $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, se poate folosi formula de calcul (Θ) din Propoziţia 14.7, în care $u = r$, $v = \theta$, şi $w = z$ sunt coordonate cilindrice, cu $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $z \in [0, 1]$. În acest mod, reobţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 r dz \right) d\theta \right) r\, dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r) r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

Şi integrală triplă îşi are aplicaţiile ei în geometrie, fizică şi alte domenii, între care, menţionăm aici calculul masei unei corp material D, de densitate cunoscută ρ, pe baza formulei

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dx\, dy\, dz,$$

precum şi determinarea coordonatelor centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) al unui corp D, cu densitatea materială ρ, în conformitate cu următoarele formule:

$$x_G = \frac{\iiint_D x\rho(x, y, z) dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx\, dy\, dz},\ y_G = \frac{\iiint_D y\rho(x, y, z) dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx\, dy\, dz},\ z_G = \frac{\iiint_D z\rho(x, y, z) dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx\, dy\, dz}.$$

În general, în cazul unei integrale multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil din $\mathbb{R}^n$, calculul se poate face, în anumite condiţii (deductibile prin analogie cu situaţiile în care $n = 2$ sau $n = 3$), pe baza uneia dintre următoarele două formule:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_2 =$$
$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{\varphi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n$$

(când D este simplu în raport cu Ox_n, apoi cu Ox_{n-1}, etc.) şi

$$\iint_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \iint_\Omega f(x_1(y_1, \ldots, y_n), x_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right| (y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

(când se poate face trecerea de la coordonatele $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, la coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$).

Exemplul 14.4. *Să se calculeze* $\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n$, *unde* D *este mulţimea* $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1\}$.

Folosind prima dintre formulele menţionate, obţinem:

$$\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n)) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) dx_{n-1}) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \frac{(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2})) \ldots) = \ldots = \frac{1}{n!}.$$

Integrale multiple improprii

Ca şi în cazul unidimensional, se poate extinde noţiunea de integrală şi pentru situaţiile în care fie domeniul nu este compact, fie integrandul nu este mărginit, fie ambele aceste caracteristici au loc.

Tratând dintr-odată atât cazul când domeniul este nemărginit, cât şi cazul când funcţia de integrat este nemărginită, în legătură cu integralele multiple improprii se pot menţiona următoarele:

Definiţia 14.9 *Fie* $D \subset R^n$ *un domeniu (mărginit sau nemărginit) şi* $f : D \to R$ *o funcţie (mărginită sau nu) ce se presupune a fi* $\mathcal{R}$*-integrabilă pe orice submulţime compactă şi Jordan-măsurabilă a lui* D.

Spunem că ***integrala*** $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ ***este convergentă*** *dacă, pentru orice şir de domenii mărginite* $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, *care sunt măsurabile-Jordan şi au proprietăţile următoare*

i) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots$

ii) $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $\forall k \in N^*$,

iii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$,

există şi este finită $\lim_{k \to \infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ *, valoarea ei fiind independentă de alegerea şirului* $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

În cazul când respectiva limită nu există sau este infinită, spunem că integrala $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ *este* divergentă.

Ca şi în cazul unidimensional (când $n = 1$), se pot pune în evidenţă diverse criterii de convergenţă/divergenţă pentru integrale multiple improprii, iar calculul unor asemenea integrale, în situaţia de convergenţă, se va baza pe formula

$$\lim_{k\to\infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

în care valoarea integralei $\int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ se determină pe una dintre căile mai-sus-prezentate.

Exemplul 14.5. *Integrala* $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\,dy$ *este convergentă şi are valoarea* π, *după cum urmează*:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr \right) d\theta = (-2\pi) \lim_{a\to\infty} \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a \right) = \pi \lim_{a\to\infty} (1 - e^{-a^2}) = \pi.$$

Exemplul 14.6. *Integrala improprie (din pricina nemărginirii integrandului în* $(0, 0)$)

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx\,dy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \rho^2\}$, $\rho > 0$ *şi* $\alpha > 0$, *se poate aprecia prin intermediul formulei*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx\,dy,$$

unde $D_n = D \setminus B(\theta_{\mathbb{R}^2}; \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, trecând la coordonate polare (pe seama relaţiilor $x = r\cos\theta, y = \sin\theta$,cu $\frac{1}{n} \le r \le \rho, \theta \in [0, 2\pi]$), obţinem:

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{\rho} \frac{r}{r^\alpha} dr \right) d\theta = (2\pi) \lim_{n\to\infty} \left(\int_{1/n}^{\rho} r^{1-\alpha} dr \right) =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{1/n}^{\rho} \right), 0 < \alpha \ne 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln r \Big|_{1/n}^{\rho} \right) \quad, \quad \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi\rho^{2-\alpha}, & 0 < \alpha < 2 \\ +\infty, & \alpha \ge 2 \end{cases}.$$

Aşadar, integrala dată este convergentă când $\alpha \in (0, 2)$ şi divergentă când $\alpha \ge 2$.

Bibliografie

1. B.M. Budak, S.V. Fomin - *Multiple Integrals. Field Theory and Series*, Edit. "Mir", 1973.

2. Constantin P. Niculescu - *Calcul integral pe* $\mathbb{R}^n$, Edit. Universităţii din Craiova, 2000.

3. Şt. Frunză - *Analiză matematică* (partea a II-a), Edit. Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1992.

4. V. Postolică - *Analiză matematică. Eficienţă prin matematică aplicată* (cap. 17), Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. Narcisa Apreutesei-Dumitru, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii* (cap. 6), Edit. Performantica, Iaşi, 2005.

6. Ioana Bârză - *Calcul intégral.Calcul différentiel. Équations différentielles. Éléments de Géométrie différentielle,* Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2010.

7. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.