

@'



**ANALIZĂ MATEMATICĂ**  
**Noțiuni teoretice și probleme rezolvate**

MIRCEA OLTEANU



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Serii de numere</b>	<b>7</b>
1.1	Noțiuni teoretice . . . . .	7
1.2	Serii cu termeni pozitivi . . . . .	15
1.3	Serii cu termeni oarecari . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Spații metrice. Continuitate</b>	<b>29</b>
2.1	Noțiuni teoretice . . . . .	29
2.2	Spații metrice . . . . .	37
2.3	Teorema contractiei . . . . .	42
2.4	Funcții continue . . . . .	48
2.5	Spații normate și operatori liniari . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Șiruri de funcții. Funcții elementare</b>	<b>67</b>
3.1	Noțiuni teoretice . . . . .	67
3.2	Șiruri și serii de funcții . . . . .	72
3.3	Formula lui Taylor. Serii Taylor . . . . .	86
3.4	Serii de puteri, funcții elementare . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Funcții diferențiabile</b>	<b>107</b>
4.1	Noțiuni teoretice . . . . .	107
4.2	Derivate parțiale și diferențiala . . . . .	112
4.3	Diferențiala funcției compuse . . . . .	126
4.4	Extreme locale . . . . .	135
4.5	Funcții implicite . . . . .	141
4.6	Extreme cu legături . . . . .	152
<b>5</b>	<b>Integrale improprii și cu parametri</b>	<b>161</b>
5.1	Noțiuni teoretice . . . . .	161
5.2	Integrale improprii . . . . .	166
5.3	Integrale cu parametri . . . . .	169

<b>6</b>	<b>Măsură și integrală</b>	<b>181</b>
6.1	Noțiuni teoretice . . . . .	181
6.2	Funcții integrabile . . . . .	192
6.3	Serii Fourier . . . . .	201
6.4	Operatori pe spații Hilbert . . . . .	213
<b>7</b>	<b>Integrale duble și triple</b>	<b>229</b>
7.1	Noțiuni teoretice . . . . .	229
7.2	Integrale duble . . . . .	232
7.3	Integrale triple . . . . .	237
<b>8</b>	<b>Integrale curbilinii și de suprafață</b>	<b>243</b>
8.1	Noțiuni teoretice . . . . .	243
8.2	Integrale curbilinii . . . . .	249
8.3	Integrale de suprafață . . . . .	258
<b>9</b>	<b>Formule integrale</b>	<b>267</b>
9.1	Noțiuni teoretice . . . . .	267
9.2	Formula Green-Riemann . . . . .	269
9.3	Formula Gauss-Ostrogradski . . . . .	274
9.4	Formula lui Stokes . . . . .	281
<b>10</b>	<b>Exemple de teste pentru examen</b>	<b>289</b>
10.1	Analiză matematică I . . . . .	289
10.2	Analiză matematică II . . . . .	294

# Introducere

Această lucrare este rezultatul cursurilor și seminariilor de analiză matematică ținute de autor studenților anilor întâi ai Facultăților de Automatică și Electronică din Universitatea Politehnica București. Cartea este structurată în zece capitole, conținând exerciții rezolvate care acoperă programa cursului de analiză din primul și al doilea semestru. În ultimul capitol sunt exemple de subiecte propuse la examenele de analiză matematică. Fiecare capitol începe cu o secțiune teoretică ce conține principalele noțiuni și rezultate necesare rezolvării exercițiilor. Desigur, pentru înțelegerea conceptelor fundamentale ale analizei este necesară o pregătire teoretică suplimentară. Pentru aceasta, sunt recomandate cursurile care se adresează studenților din învățământul superior tehnic; o listă cu acestea se găsește în bibliografia de la sfârșit, îndeosebi lucrările [4], [6], [9]. De asemenea, se recomandă consultarea și a altor culegeri de probleme, de exemplu [11], [12], [13], [14].





# Capitolul 1

## Serii de numere

### 1.1 Noțiuni teoretice

#### Relații

Dacă  $M$  este o mulțime arbitrară nevidă, orice submulțime  $\rho \subseteq M \times M$  se numește relație pe  $M$ . Se notează  $x\rho y$  dacă  $(x, y) \in \rho$ .

Relația  $\rho$  se numește:

reflexivă dacă  $x\rho x, \forall x \in M$ ;

simetrică dacă  $x\rho y \Rightarrow y\rho x$ ;

antisimetrică dacă  $x\rho y$  și  $y\rho x \Rightarrow x = y$ ;

tranzitivă dacă  $x\rho y$  și  $y\rho z \Rightarrow x\rho z$ .

O relație se numește relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Relația de ordine  $\rho$  (pe mulțimea  $M$ ) se numește totală (sau se mai spune că mulțimea  $M$  este total ordonată) dacă pentru orice  $x, y \in M$  rezultă  $x\rho y$  sau  $y\rho x$ .

În cele ce urmează  $(M, \leq)$  este o mulțime total ordonată, iar  $X$  este o submulțime nevidă a lui  $M$ . Un element  $a \in M$  se numește majorant al mulțimii  $X$  dacă  $x \leq a, \forall x \in X$ . Dacă mulțimea majoranților lui  $X$  este nevidă, atunci  $X$  se numește majorată.

Un element  $b \in M$  se numește minorant al lui  $X$  dacă  $b \leq x, \forall x \in X$ .

Mulțimea  $X$  se numește minorată dacă mulțimea minoranților săi este nevidă.

Mulțimea  $X$  se numește mărginită dacă este și majorată și minorată.

Dacă  $X$  este o submulțime majorată a lui  $M$ , atunci un element  $\alpha \in M$  se numește marginea superioară a lui  $X$  dacă:

**i.**  $x \leq \alpha, \forall x \in X$ ; ( $\alpha$  este majorant).

**ii.** dacă  $x \leq \gamma, \forall x \in X$ , atunci  $\alpha \leq \gamma$ ; ( $\alpha$  este cel mai mic majorant).

Analog se definește marginea inferioară a unei mulțimi minorate. Notațiile uzuale pentru marginea superioară și marginea inferioară ale lui  $X$  (dacă există) sunt  $\sup X$  și, respectiv,  $\inf X$ .

### Mulțimi de numere

Mulțimea  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  a numerelor naturale se definește axiomatice după cum urmează (axiomele lui Peano):

- i. există  $s : N \mapsto N$  funcție injectivă (funcția succesor);
- ii. există  $0 \in N$  astfel încât funcția  $s : N \mapsto N \setminus \{0\}$  este bijectivă;
- iii. pentru orice submulțime  $A \subseteq N$  cu proprietățile

$$0 \in N \text{ și } s(n) \in A, \forall n \in N,$$

rezultă  $A = N$  (principiul inducției matematice).

Mulțimea numerelor întregi este  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , iar mulțimea numerelor raționale este:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0, \text{ cu convenția } \frac{m}{n} = \frac{p}{k} \text{ dacă } mk = np \right\}.$$

Prin definiție, mulțimea numerelor reale  $R$  satisface axiomele următoare:

- i. structura algebrică: există două operații (adunarea și înmulțirea, notate  $+$  și  $\cdot$ ) astfel încât  $(R, +, \cdot)$  este corp comutativ;
- ii. structura de ordine: există o relație de ordine totală pe  $R$  (notată  $\leq$ ), compatibilă cu operațiile algebrice:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall x, y, z \in R$$

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq xy, \forall x, y \in R.$$

- iii. axioma marginii superioare (Cantor): orice submulțime nevidă și majorată a lui  $R$  are o margine superioară în  $R$ .

$$\text{Modulul unui număr real } x \in R \text{ este } |x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Mulțimea  $C$  a numerelor complexe este mulțimea perechilor ordonate de numere reale,  $C = R \times R$ . Cu operațiile

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \text{ și } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

$(C, +, \cdot)$  este corp comutativ. Se notează  $i = (0, 1)$  și identificând perechile de forma  $(a, 0)$  cu numărul real  $a$ , orice număr complex  $z \in C$  se scrie  $z = a + ib, a, b \in R$ ; prin calcul direct se obține  $i^2 = -1$ .

Modulul numărului complex  $z = a + ib$  este, prin definiție,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; proprietățile modulului sunt:

- i.  $|z| \geq 0, \forall z \in C$

ii.  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iii.  $|z + w| \leq |z| + |w|, \forall z, w \in C$

iv.  $|zw| = |z| \cdot |w|, \forall z, w \in C.$

Fie  $z \in C, z \neq 0$ ; argumentul (redus) al lui  $z$  este, prin definiție, unghiul  $\varphi \in [0, 2\pi)$  făcut de semidreptele  $Ox$  și  $Oz$  (în sens trigonometric pozitiv). Forma trigonometrică a lui  $z$  este  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

### Șiruri de numere

Un șir de numere reale (complexe) este orice aplicație  $x : N \mapsto R$  (respectiv  $C$ ); notația uzuală este  $x(n) = x_n, \forall n \in N$ .

Dacă  $\varphi : N \mapsto N$  este o funcție strict crescătoare, atunci  $x_{\varphi(n)}$  se numește subșir al șirului  $x_n$ .

Un șir de numere reale (sau complexe) se numește convergent dacă există un număr real (respectiv complex)  $a$  cu proprietatea:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in N \text{ astfel încât } \forall n \geq N(\epsilon), |x_n - a| < \epsilon.$$

În acest caz, numărul  $a$  se numește limita șirului și se notează  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Dacă există, limita este unică.

Un șir este convergent dacă și numai dacă orice subșir al său este convergent.

Șirul  $x_n$  (de numere reale sau complexe) se numește mărginit dacă există  $M > 0$  astfel încât  $|x_n| \leq M, \forall n \in N$ .

Șirul  $x_n$  de numere reale se numește monoton dacă  $\forall n \in N, x_n \leq x_{n+1}$  (crescător), sau  $\forall n \in N, x_n \geq x_{n+1}$  (descrescător).

Orice șir convergent este mărginit. Pentru șiruri de numere reale are loc și următorul rezultat (teorema lui Weierstrass):

Orice șir monoton și mărginit este convergent; dacă șirul este crescător, atunci limita este marginea sa superioară ( $\sup x_n$ ), iar dacă șirul este descrescător, atunci limita este marginea sa inferioară ( $\inf x_n$ ).

Un șir  $x_n$  se numește șir Cauchy (sau fundamental) dacă:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in N \text{ astfel încât } \forall n, m \geq N(\epsilon), |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Mulțimea numerelor reale are următoarea proprietate de completitudine (criteriul general al lui Cauchy de convergență):

Un șir de numere reale este convergent (în  $R$ ) dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Mulțimea numerelor raționale nu are această proprietate: de exemplu, șirul (crescător și mărginit de numere raționale)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  este șir Cauchy, dar nu are limită rațională. În schimb, există  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in R$ .

Șirurile de numere complexe convergente (Cauchy) se pot caracteriza cu ajutorul șirurilor de numere reale convergente (respectiv Cauchy):

**i.**  $z_n = x_n + iy_n$  este șir (de numere complexe) convergent dacă și numai dacă șirurile (de numere reale)  $x_n$  și  $y_n$  sunt șiruri convergente. În acest caz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**ii.**  $z_n = x_n + iy_n$  este șir Cauchy în  $C$  dacă și numai dacă  $x_n$  și  $y_n$  sunt șiruri Cauchy în  $R$ .

Mulțimea numerelor complexe are (ca și mulțimea numerelor reale) proprietatea de completitudine: un șir de numere complexe este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Se spune că un șir de numere reale  $x_n$  are limita  $\infty$  dacă:

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq N_M, x_n > M.$$

Șirul de numere reale  $x_n$  are limita  $-\infty$  dacă:

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq N_M, x_n < M.$$

Un șir de numere complexe  $z_n$  are limita  $\infty$  dacă:

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq N_M, |z_n| > M.$$

### Serii de numere

Fie  $x_n$  un șir de numere complexe și fie  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  șirul sumelor parțiale

asociat. Seria  $\sum_n x_n$  se numește convergentă dacă șirul  $s_n$  este șir convergent;

în caz contrar seria se numește divergentă. Dacă seria este convergentă, atunci limita șirului  $s_n$  este suma seriei, notată  $\sum_n x_n$ .

Seria  $\sum_n x_n$  se numește absolut convergentă dacă seria  $\sum_n |x_n|$  este serie convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind falsă.

Dacă  $x_n = u_n + iv_n, u_n \in R, v_n \in R$ , atunci seria  $\sum_n x_n$  este convergentă

dacă și numai dacă seriile  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  sunt ambele convergente.

Dăm în continuare două exemple remarcabile de serii.

#### Seria geometrică

Fie  $z \in C$  (numit rație) și fie seria geometrică  $\sum_{n \geq 0} z^n$ . Atunci seria este

convergentă dacă și numai dacă  $|z| < 1$ . În acest caz suma seriei este:

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Evident, dacă  $z = 1$  seria este divergentă; pentru orice  $z \in C$ ,  $z \neq 1$  șirul sumelor parțiale este:

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \forall z \neq 1.$$

De aici rezultă că  $s_n$  este convergent dacă și numai dacă  $|z| < 1$ .

**Seria lui Riemann (seria armonică generalizată)**

Fie  $\alpha \in R$  și fie seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ .

Seria dată este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ ; în particular, seria armonică  $\sum_n \frac{1}{n}$  este divergentă.

Fie  $\alpha \leq 1$ . Vom demonstra că șirul sumelor parțiale  $s_n$  este nemărginit, deci divergent; pentru orice  $n \in N$ , avem inegalitățile:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{2^{n\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Fie acum  $\alpha > 1$ ; este suficient să arătăm că șirul sumelor parțiale este mărginit (fiind crescător, rezultă convergent). Pentru orice  $n \in N$  avem inegalitățile:

$$\begin{aligned} s_{2^n - 1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{2^{(n-1)\alpha} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n\alpha} - 1}\right) \leq \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + 8 \cdot \frac{1}{8^\alpha} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} \leq \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}. \end{aligned}$$

De aici rezultă că șirul  $s_n$  este mărginit.

**Criterii de convergență pentru serii de numere****1. Criteriul general al lui Cauchy.**

Fie  $z_n \in C$  un șir de numere complexe; atunci seria  $\sum_n z_n$  este convergentă dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N$  cu proprietatea

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in N.$$

**2. Criteriul comparației**

Fie  $u_n \geq v_n \geq 0$ .

a. Dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă, atunci și seria  $\sum_n v_n$  este convergentă.

b. Dacă seria  $\sum_n v_n$  este divergentă, atunci și seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

**3. Criteriul de comparație la limită**

Fie  $u_n > 0$  și  $v_n > 0$ .

a. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$  există și este un număr real nenul, atunci cele două serii au aceeași natură.

b. În particular, dacă  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ , atunci obținem criteriul de comparație la limită cu seria lui Riemann:

Fie  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n$ .

i. Dacă  $\alpha > 1$  și  $\ell \in R$ , ( $\ell$  poate fi și 0), atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

ii. Dacă  $\alpha \leq 1$  și  $\ell > 0$ , ( $\ell$  poate fi și  $\infty$ ) atunci seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

**4. Criteriul raportului (al lui D'Alembert)**

Fie  $u_n > 0$ ; presupunem că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

a. Dacă  $\ell < 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

b. Dacă  $\ell > 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:

Dacă există  $c \in (0, 1)$  și  $n_0 \in N$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < c, \forall n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

**5. Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)**

Fie  $u_n > 0$ ; presupunem că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .

a. Dacă  $\ell < 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

b. Dacă  $\ell > 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

O variantă (mai generală) a acestui criteriu este:  
Dacă există  $c \in (0, 1)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} < c, \forall n \geq n_0,$$

atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

### 6. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie  $u_n > 0$ ; presupunem că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \ell.$$

a. Dacă  $\ell > 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

b. Dacă  $\ell < 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

### 7. Criteriul logaritmic

Fie  $u_n > 0$ ; presupunem că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \ell$ .

a. Dacă  $\ell > 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

b. Dacă  $\ell < 1$ , atunci seria  $\sum_n u_n$  este divergentă.

### 8. Criteriul condensării

Fie  $u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Atunci seriile

$$\sum_n u_n \text{ și } \sum_n 2^n u_{2^n}$$

au aceeași natură.

### 9. Criteriul integral

Fie  $f : (0, \infty) \mapsto [0, \infty)$  o funcție descrescătoare și fie șirul

$$a_n = \int_1^n f(t) dt.$$

Atunci seria  $\sum_n f(n)$  este convergentă dacă și numai dacă șirul  $a_n$  este convergent.

### 10. Criteriul lui Leibniz

Fie  $u_n \geq 0$  și fie seria alternată  $\sum_n (-1)^n u_n$ . Dacă șirul  $u_n$  este descrescător și are limita zero, atunci seria este convergentă.

### 11. Criteriul Abel-Dirichlet

Fie  $a_n$  un șir descrescător cu  $a_n \rightarrow 0$  și fie  $u_n$  un șir de numere complexe

astfel încât șirul sumelor parțiale  $\sum_{k=1}^n u_k$  este mărginit. Atunci seria  $\sum_n a_n u_n$  este convergentă.

### Convergență condiționată

O serie convergentă  $\sum_n u_n$  se numește necondiționat convergentă dacă pentru orice permutare (funcție bijectivă)  $\sigma : N \mapsto N$ , seria  $\sum_n u_{\sigma(n)}$  este de asemenea convergentă; altfel, seria se numește condiționat convergentă.

Dăm în continuare două rezultate remarcabile cu privire la convergența condiționată:

#### Teorema lui Dirichlet

Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă.

#### Teorema lui Riemann

Fiind date o serie convergentă, dar nu absolut convergentă și  $S \in R \cup \{\pm\infty\}$ , atunci există o permutare a termenilor seriei inițiale astfel încât suma noii serii să fie  $S$ .

### Aproximarea sumelor seriilor convergente

Evident, suma unei serii convergente se poate aproxima cu termenii șirului sumelor parțiale. Dăm mai jos două rezultate în acest sens.

#### Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi

Fie  $u_n \geq 0$  și fie  $k \geq 0$  astfel încât  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1, \forall n \in N$ . Dacă  $S$  este suma seriei convergente  $\sum_{n \in N} u_n$ , iar  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  este suma primilor  $n + 1$  termeni, atunci:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1 - k} u_n.$$

#### Aproximarea sumelor seriilor alternate

Fie  $\sum_{n \in N} (-1)^n u_n$  o serie alternată convergentă, și fie  $S$  suma sa.

Dacă  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$  este suma primilor  $n + 1$  termeni, atunci

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$



## 1.2 Serii cu termeni pozitivi

Să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi definite de șirul  $x_n$  (exercițiile 1-30):

1.  $x_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

**Soluție**

Seria diverge; se aplică criteriul necesar:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0$ .

2.  $x_n = \frac{1}{n!}$

**Soluție**

Seria converge; se poate aplica criteriul comparației:

$$x_n \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 4.$$

3.  $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ .

**Soluție**

Aplicăm criteriul de comparație la limită:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} x_n = 1$ , deci seria converge.

4.  $x_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}, a \in R$

**Soluție**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{1}{n^a (\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2})}$$

Alegând  $\alpha = a + \frac{2}{3}$ , se obține limita  $\frac{1}{3}$  (finită și nenulă) și deci, conform criteriului de comparație la limită, seria este convergentă dacă și numai dacă  $a > \frac{1}{3}$ .

5.  $x_n = \frac{n^a}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, a \in R$

**Soluție**

Se amplifică cu conjugata și se procedează ca în exemplul precedent.

6.  $x_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

**Soluție**

Se compară la limită cu  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ; seria este divergentă.

$$7. x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \right)$$

**Soluție**

Se compară la limită cu  $\frac{1}{n^2}$ .

$$8. x_n = \frac{1}{n^a} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^b} \right), a, b \in \mathbb{R}$$

**Soluție**

Se compară la limită cu  $\frac{1}{n^{b-a}}$ .

$$9. x_n = \frac{\ln(n+2)}{\sqrt{n^3+1}}$$

**Soluție**

Pentru orice  $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$  se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x_n = 0$  și deci seria este convergentă.

$$10. x_n = \frac{n!}{n^{2n}}$$

**Soluție**

Aplicăm criteriul lui D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

deci seria converge.

$$11. x_n = n! \left( \frac{a}{n} \right)^n, a \in \mathbb{R}$$

**Soluție**

Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{a}{e}$$

Dacă  $a < e$ , atunci seria este convergentă; dacă  $a > e$ , atunci seria este divergentă. Pentru  $a = e$ , aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e} - 1 \right) = \\ &= n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{e} - 1 \right) = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - e}{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Ultima limită se calculează aplicând regula lui L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1} [x - (1+x) \ln(1+x)]}{x^2} = -\frac{e}{2};$$

rezultă că seria este divergentă.

Observație: pentru  $a = e$ , divergența seriei se poate demonstra și aplicând criteriul necesar: șirul  $x_n$  nu converge la zero.

$$12. x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

**Soluție**

Seria este convergentă; se aplică criteriul raportului.

$$13. x_n = (2n + 1) \left( \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)} \right)^2, a \notin \mathbb{Z}.$$

**Soluție**

Aplicând criteriul raportului, rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(a-n)^2}{(2n+1)(a+n+2)^2} = 1. \text{ Cu criteriul Raabe-Duhamel,}$$

se obține:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = 4a + 3$ . Dacă  $a > -\frac{1}{2}$ , atunci seria converge; dacă  $a < -\frac{1}{2}$ , seria diverge; dacă  $a = -\frac{1}{2}$ , atunci  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  și deci seria diverge.

$$14. x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, a > -1.$$

**Soluție**

Criteriul raportului nu decide; aplicând criteriul Raabe-Duhamel, se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a+n+1}{n+1} - 1 \right) = a,$$

deci pentru  $a < 1$  seria diverge, iar pentru  $a > 1$  converge; dacă  $a = 1$ , se obține seria armonică (divergentă).

$$15. x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

**Soluție**

Seria este divergentă (criteriul Raabe-Duhamel).

$$16. x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

**Soluție**

Se aplică criteriul lui Raabe-Duhamel: seria este convergentă.

$$17. x_n = \left( 1 - \frac{3 \ln n}{2n} \right)^n$$

**Soluție**

Criteriul rădăcinii nu decide; aplicând criteriul logaritmic, se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{3 \ln n}{2n})^{-n}}{\ln n} = \frac{3}{2},$$

deci seria converge.

$$18. x_n = \left( \frac{n+1}{3n+1} \right)^n$$

**Soluție**

Seria converge; se aplică criteriul rădăcinii.

$$19. x_n = \left( \frac{an+1}{bn+1} \right)^n, \quad a > 0, b > 0$$

**Soluție**

Aplicând criteriul rădăcinii se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{a}{b}.$$

Dacă  $a < b$ , atunci seria converge, iar dacă  $a > b$  seria diverge. Dacă  $a = b$ , atunci seria diverge (criteriul necesar).

$$20. x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} a^n & \text{dacă } n \text{ par} \\ na^n & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}, \quad a > 0$$

**Soluție**

Aplicând criteriul rădăcinii, se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = a$ , deci dacă  $a < 1$ , seria este convergentă, iar dacă  $a > 1$ , seria este divergentă; pentru  $a = 1$ , seria este divergentă (criteriul necesar). Să mai observăm că pentru această serie, criteriul raportului nu decide.

$$21. x_n = \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n}}}{n \ln(n+1)}$$

**Soluție**

$$x_n = \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}}{n \ln(n+1)} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2n}}{n \ln(n+1)} < \frac{\sqrt{2} \frac{\pi}{2n}}{n \ln(n+1)} < \frac{1}{n^2}, \text{ deci seria converge.}$$

$$22. x_n = \frac{\ln n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})}{n}$$

**Soluție**

$x_n < \frac{\frac{1}{n} \ln n}{n} = \frac{\ln n}{n^2}$ . Se aplică acum criteriul logaritmic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{n^2}{\ln n} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \right) = 2,$$

deci seria converge.

**23.**  $x_n = \left( \frac{1}{\ln n} \right)^{\ln(\ln n)}$ .

**Soluție**

Se aplica criteriul logaritmic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (\ln n)^{\ln(\ln n)}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0,$$

deci seria diverge.

**24.**  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ .

**Soluție**

Din inegalitatea  $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\forall n \geq 3$  rezultă  $\sqrt[n]{n} - 1 > \frac{1}{n}$ , deci seria este divergentă.

**25.**  $x_n = \frac{1}{n \ln n}$ .

**Soluție**

Se aplică criteriul integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(\ln n) - \ln(\ln 2)) = \infty,$$

deci seria diverge.

**26.**  $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

**Soluție**

Seria converge (se aplică criteriul integral).

**27.**  $x_n = \frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}$ ,  $a > 0$

**Soluție**

Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{a}{4}.$$

Rezultă că pentru  $a \in (0, 4)$  seria converge, iar pentru  $a > 4$ , seria diverge. Pentru  $a = 4$ , se aplică criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} - 1 \right) = -\frac{1}{2},$$

deci seria diverge.

$$28. x_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}(c-2)^n, a > 0, b > 0, c > 2$$

**Soluție**

Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+n}{b+n}(c-2) = c-2,$$

deci pentru  $2 < c < 3$  seria converge, și pentru  $c > 3$  seria diverge; dacă  $c = 3$ , se aplică criteriul Raabe-Duhamel și rezultă: dacă  $b - a < 1$  seria diverge, dacă  $b - a > 1$ , seria converge. Dacă  $b - a = 1$ , atunci seria este divergentă (seria armonică).

$$29. x_n = \frac{1}{n^p \ln^q n}, p > 0, q > 0.$$

**Soluție**

Dacă  $p > 1$ , atunci seria converge pentru orice  $q > 0$  deoarece (se aplică criteriul comparației):

$$x_n \leq \frac{1}{n^p}.$$

Dacă  $p = 1$ , se aplică criteriul integral: seria converge dacă și numai dacă  $q > 1$ .

Dacă  $p < 1$  se aplică criteriul de condensare: seria are aceeași natură cu seria cu termenul general  $\frac{1}{n^q 2^{n(p-1)} \ln^q 2}$ , care este divergentă pentru orice  $q > 0$  (se poate aplica criteriul raportului).

$$30. x_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{\pi}{n}, \alpha \in R$$

**Soluție**

Aplicând criteriul de comparație la limită, rezultă că seria are aceeași natură

cu seria  $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ .

### 1.3 Serii cu termeni oarecari

Să se studieze convergența și absolut convergența seriilor definite de șirul  $x_n$  (exercițiile 31-50):

$$31. x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

**Soluție**

Seria nu este absolut convergentă (seria modulelor este seria armonică), dar este convergentă (cu criteriul lui Leibniz):  $\frac{1}{n}$  este descrescător la 0.

$$32. x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{dacă } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$$

**Soluție**

Să observăm mai întâi că nu se poate aplica criteriul lui Leibniz; șirul

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dacă } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$$

ține la zero dar nu este descrescător. Vom arăta acum că seria este divergentă, deci condiția de monotonie din ipoteza criteriului lui Leibniz este necesară. Șirul sumelor parțiale are un subșir divergent:

$$s_{2n} = -\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) \rightarrow -\infty,$$

deci seria este divergentă (conform criteriului necesar).

$$33. x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n^2} & \text{dacă } n \text{ impar} \\ \frac{1}{n^3} & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă.

Pe de altă parte, șirul  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{dacă } n \text{ impar} \\ \frac{1}{n^3} & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$  nu este descrescător, ceea ce arată că criteriul lui Leibniz nu este necesar pentru convergența unei serii alternate.

$$34. x_n = (-1)^n$$

**Soluție**

Seria este divergentă: se aplică criteriul necesar.

$$35. x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

**Soluție**

Seria este alternată:

$$x_n = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n \sin \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}}.$$

Seria este convergentă (cu criteriul lui Leibniz).

$$36. x_n = \frac{\sin nx}{n}, x \in R$$

**Soluție**

Dacă  $x = k\pi, k \in Z$ , atunci  $x_n = 0, \forall n \in N$ ; presupunem în continuare că  $x \neq k\pi, k \in Z$ . Arătăm mai întâi că seria nu este absolut convergentă:

$$|x_n| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \geq \frac{\sin^2(nx)}{n} = \frac{1 - \cos(2nx)}{2n}, \forall n \in N^*.$$

Deci, presupunând prin absurd că seria dată ar fi absolut convergentă, ar rezulta (cu criteriul de comparație) că și seria  $\sum_n \frac{1 - \cos(2nx)}{2n}$  ar fi

convergentă. Seria  $\sum_n \frac{\cos(2nx)}{2n}$  este convergentă (aplicăm criteriul Abel-Dirichlet): fie  $a_n = \frac{1}{2n}$  și  $u_n = \cos(2nx)$ . Atunci  $a_n$  este descrescător la 0, iar  $u_n$  are șirul sumelor parțiale mărginit:

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(2kx) \right| = \left| \frac{\sin(nx) \cos((n+1)x)}{\sin x} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}.$$

Rezultă că și seria  $\sum_n \frac{1}{2n}$  ar trebui să fie convergentă, fiind suma a două serii convergente: contradicție.

Arătăm acum că seria este convergentă, tot cu criteriul Abel-Dirichlet; fie  $a_n = \frac{1}{n}$  și  $u_n = \sin(nx)$ . Atunci  $a_n$  este descrescător la 0, iar  $u_n$  are șirul sumelor parțiale mărginit:

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

$$37. x_n = \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in R, \alpha \in R$$

**Soluție**

Dacă  $x = k\pi, k \in Z$ , atunci  $x_n = 0$ ; presupunem  $x \neq k\pi, k \in Z$ . Dacă  $\alpha \leq 0$ ,



atunci  $x_n$  nu converge la 0, deci seria diverge. Presupunem  $\alpha > 0$ . Dacă  $\alpha > 1$ , atunci seria este absolut convergentă (cu criteriul de comparație):

$$|x_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Dacă  $\alpha \in (0, 1]$ , atunci seria nu este absolut convergentă (am demonstrat în exercițiul anterior că pentru  $\alpha = 1$  seria nu este absolut convergentă), dar este convergentă (cu criteriul Abel-Dirichlet).

$$38. x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$$

**Soluție**

Seria nu este absolut convergentă (se compară la limită cu seria armonică).

Seria este alternată; vom demonstra că șirul  $a_n = \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$  este descrescător la 0, deci seria converge.

Evident  $a_n \rightarrow 0$ ; pentru a arăta că  $a_n$  este descrescător (începând de la un rang suficient de mare), fie funcția  $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$ . Calculăm

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \left( (1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

Pentru a studia semnul derivatei (pentru  $x$  "mare"), calculăm:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \ln x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} = -1,$$

deci  $f'(x) < 0$  pentru  $x$  suficient de mare, deci șirul  $a_n$  este descrescător.

$$39. x_n = \frac{n(2+i)^n}{3^n}$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă:

$$|x_n| = \frac{|n(2+i)^n|}{3^n} = n \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n,$$

ultima serie fiind convergentă (criteriul raportului sau al rădăcinii).

$$40. x_n = \frac{1}{n+i}$$

**Soluție**

Seria este divergentă;

$$x_n = \frac{1}{n+i} = \frac{n-i}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} - i \frac{1}{n^2+1}.$$

Seriile  $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$  și  $\sum_n \frac{1}{n^2+1}$  nu sunt ambele convergente (prima diverge, a doua converge), deci seria din enunț diverge.

$$41. x_n = \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă:  $|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ ; se compară la limită cu seria armonică.

$$42. x_n = \frac{z^n}{n}, z \in C$$

**Soluție**

Dacă  $|z| < 1$ , atunci seria este absolut convergentă (cu criteriul raportului). Dacă  $|z| > 1$ , atunci seria este divergentă, deoarece  $x_n$  nu converge la 0. Studiem acum cazul  $|z| = 1$ ; fie  $z = e^{it}, t \in R$ . Atunci

$$x_n = \frac{e^{int}}{n} = \frac{\cos(nt)}{n} + i \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Seria nu este absolut convergentă deoarece  $|x_n| = \frac{1}{n}$ . Dacă  $t = 2k\pi, k \in Z$ , atunci seria este divergentă:  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dacă  $t \neq 2k\pi$ , atunci seriile  $\sum_n \frac{\cos(nt)}{n}$  și  $\sum_n \frac{\sin(nt)}{n}$  sunt ambele convergente (cu criteriul Abel-Dirichlet, ca în exercițiul 36).

$$43. x_n = \frac{z^n}{n!}, z \in C$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă.

$$44. x_n = \frac{z^n}{n^\alpha}, z \in C, \alpha \in R$$

**Soluție**

Dacă  $|z| < 1$ , seria este absolut convergentă pentru orice  $\alpha \in R$ ; dacă  $|z| > 1$ , atunci seria este divergentă pentru orice  $\alpha \in R$ . Dacă  $|z| = 1$ , și  $\alpha > 1$ , seria converge absolut, iar dacă  $\alpha \leq 0$ , seria diverge. În cazul  $|z| = 1$  și  $\alpha \in (0, 1]$  se procedează ca în exercițiile 36, 37 și 42.

$$45. x_n = \sin \frac{1}{n^2} + i(-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

**Soluție**

Seria este convergentă deoarece seriile:

$$\sum_n \sin \frac{1}{n^2} \quad \text{și} \quad \sum_n (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

sunt convergente (se aplică criteriul de comparație la limită cu  $\frac{1}{n^2}$  și, respectiv, criteriul lui Leibniz); seria nu este absolut convergentă (se aplică criteriul de comparație la limită cu  $\frac{1}{n}$  pentru seria modulelor).

$$46. x_n = \frac{a + (-1)^n \sqrt{n}}{n}, \quad a \in \mathbb{R}$$

**Soluție**

Dacă  $a = 0$  seria este convergentă dar nu este absolut convergentă. Dacă  $a \neq 0$ , atunci seria este divergentă.

$$47. x_n = \frac{a \sqrt[3]{n} + b(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

**Soluție**

Dacă  $b = 0$  seria este absolut convergentă pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ . Dacă  $b \neq 0$ , atunci seria este convergentă dar nu este absolut convergentă  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

$$48. x_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \quad \text{și} \quad x_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$$

**Soluție**

Seria este divergentă:  $\sum_{n \geq 1} (x_{2n-1} + x_{2n}) = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n}$ .

$$49. x_{2n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{și} \quad x_{2n} = -\frac{1}{5^n}$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă:

$$\sum_{n \geq 1} |x_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{5^n}.$$

$$50. x_{2n-1} = \frac{1}{5n-3} \quad \text{și} \quad x_{2n} = -\frac{1}{5n-3}$$

**Soluție**

Seria este convergentă dar nu absolut convergentă:

$$\sum_{n \geq 1} (x_{2n+1} + x_{2n}) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n-1} \right) = \sum_n \frac{2}{(5n-3)(5n-1)}.$$

**51.** În seria convergentă  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  să se permute ordinea termenilor astfel încât să se obțină o serie convergentă dar cu o altă sumă.

**Soluție**

Seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  este convergentă și suma sa este un număr nenul  $S > 0$ .

Menționăm că suma acestei serii este  $\ln 2$ , dar acest rezultat nu se va folosi în raționamentul următor. Fie deci:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S$$

Înmulțind egalitatea de mai sus cu  $\frac{1}{2}$ , rezultă:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}S$$

Însumăm acum cele două egalități grupând termenii astfel:

$$\begin{aligned} 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} + \\ + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{11} + \dots = \frac{3}{2}S. \end{aligned}$$

Seria de mai sus este (după efectuarea calculelor din paranteze):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots = \frac{3}{2}S,$$

care este o permutare a seriei inițiale.

**Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât  $\epsilon$  sumele seriilor definite de șirul  $x_n$  (exercițiile 52-56)**

$$**52.** \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$$

**Soluție**

În cazul seriilor alternate, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat; deci cea mai mică soluție a inecuației  $|x_n| < \epsilon$  este rangul primului termen neglijat. Obținem:  $\frac{1}{n!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 7$ , deci

$$S \approx \sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k}{k!} = 0,36805.$$

$$53. x_n = \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \epsilon = 10^{-2}.$$

**Soluție**

$$n^3 \sqrt{n} > 100 \Rightarrow n = 4, \text{ deci } S \approx \sum_{k=2}^3 \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} = 0,06725.$$

$$54. x_n = \frac{1}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$$

**Soluție**

Dacă  $S$  este suma seriei și  $s_n = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ , atunci

$$S - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6,$$

deci  $S \approx 2,7166$ .

$$55. x_n = \frac{1}{n!2^n}, \epsilon = 10^{-4}$$

**Soluție**

Fie  $S$  suma seriei și  $s_n$  suma primilor termeni. Aplicăm rezultatul cu privire la aproximarea unei serii cu termeni pozitivi (a se vedea secțiunea teoretică); pentru aceasta, evaluăm:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{6} = k, \forall n \geq 2,$$

$$\text{deci } S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{n!2^n} \frac{1}{5} < 10^{-4} \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{Aproximarea cerută este } S \approx s_5 = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k^2 k!} = 1,146463..$$

$$56. x_n = \frac{1}{n^4(2n)!}, \epsilon = 10^{-6}$$

**Soluție**

Aplicăm același procedeu ca în exercițiul anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^4 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{56} = k, \forall n \geq 3.$$

$$\text{Rezultă } S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} \leq \frac{1}{56} x_n; \text{ din condiția:}$$

$$x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{56} x_n < 10^{-6},$$

rezultă  $n \geq 4$ , deci  $S \approx x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,5026212$ .



## Capitolul 2

# Spații metrice. Continuitate

### 2.1 Noțiuni teoretice

#### Spații metrice

Fie  $X$  o mulțime nevidă; o aplicație  $d : X \times X \mapsto R$  se numește distanță (metrică) pe  $X$  dacă:

- i.  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in R$
- ii.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- iii.  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ .
- iv.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Perechea  $(X, d)$  se numește spațiu metric.

Dacă  $Y \subseteq X$  este o submulțime nevidă, atunci  $(Y, d)$  se numește subspațiu metric indus.

Un șir  $x_n \in X$  se numește convergent dacă există  $a \in X$  astfel încât

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in N \text{ cu proprietatea } d(x_n, a) < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon.$$

În acest caz  $a$  se numește limita șirului și se notează  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  sau  $x_n \rightarrow a$ .

Un șir  $x_n \in X$  se numește șir Cauchy (fundamental) dacă

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in N \text{ astfel încât } d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Un spațiu metric se numește complet dacă orice șir Cauchy este convergent.

Fie  $d_1$  și  $d_2$  două distanțe pe o aceeași mulțime  $X$ . Metricile  $d_1$  și  $d_2$  se numesc echivalente dacă există  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$  astfel încât

$$d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \forall x, y \in X.$$

În acest caz, (dacă  $d_1$  și  $d_2$  sunt echivalente), se demonstrează că un șir  $x_n \in X$  este convergent (respectiv Cauchy) în spațiul metric  $(X, d_1)$  dacă și

numai dacă este convergent (respectiv Cauchy) în spațiul metric  $(X, d_2)$ .

### Mulțimi remarcabile în spații metrice

Fie  $a \in X$  și  $r > 0$ ; bila deschisă de centru  $a$  și rază  $r$  este, prin definiție, mulțimea

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Sfera de centru  $a$  și rază  $r$  este definită prin

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\},$$

iar bila închisă de centru  $a$  și rază  $r$  este

$$\overline{B(a, r)} = B(a, r) \cup S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

O submulțime  $D \subseteq X$  se numește deschisă dacă  $\forall a \in D, \exists r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subseteq D$ .

O submulțime  $F \subseteq X$  se numește închisă dacă  $X \setminus D$  (complementara) este mulțime deschisă.

Se poate demonstra următoarea caracterizare cu șiruri a mulțimilor închise:  $F$  este închisă dacă și numai dacă pentru orice șir convergent  $x_n \in F$  rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$ .

O submulțime  $M \subseteq X$  se numește mărginită dacă există  $a \in X$  și  $r > 0$  astfel încât  $M \subseteq B(a, r)$ .

O mulțime  $K \subseteq X$  se numește compactă dacă pentru orice familie de mulțimi deschise  $(D_i)_{i \in J}$  cu proprietatea  $\bigcup_{i \in J} D_i \supseteq K, \exists I \subseteq J, I$  finită astfel încât  $\bigcup_{i \in I} D_i \supseteq K$ .

Spațiul metric  $X$  se numește conex dacă nu există două submulțimi simultan deschise (sau închise)  $D_1$  și  $D_2$  cu proprietățile:

$$D_1 \neq \emptyset, D_2 \neq \emptyset, X = D_1 \cup D_2 \text{ și } D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

O submulțime  $A \subseteq X$  se numește conexă dacă spațiul metric (indus)  $(A, d)$  este conex. Rezultă următoarea caracterizare a submulțimilor conexe: o submulțime  $A \subseteq X$  este conexă dacă și numai dacă nu există două submulțimi deschise  $D_1$  și  $D_2$  astfel încât  $D_1 \cap D_2 = \emptyset, D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset$  și  $A \subseteq D_1 \cup D_2$ .

Fie  $A \subseteq X$  și fie  $a \in X$ . Punctul  $a$  se numește punct de acumulare al mulțimii  $A$  dacă pentru orice  $r > 0$ , avem  $B(a, r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$ . Caracterizarea cu șiruri a punctelor de acumulare este:



Punctul  $a \in X$  este punct de acumulare al mulțimii  $A$  dacă și numai dacă există un șir  $x_n \in A$  astfel încât  $x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Un punct al mulțimii  $A$  se numește punct izolat al lui  $A$  dacă nu este punct de acumulare al lui  $A$ . Mulțimea  $A$  se numește perfectă dacă este închisă și nu conține puncte izolate.

Mulțimile finite nu au puncte de acumulare. În plus, se poate demonstra că orice mulțime perfectă este nenumărabilă.

### Funcții continue

Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice.

O aplicație  $f : X \mapsto Y$  se numește continuă în punctul  $a \in X$  dacă

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$  astfel încât  $\forall x \in X$  cu proprietatea  $d(x, a) < \delta_\epsilon$  rezultă

$$d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

O formulare echivalentă (cu șiruri) este:

$f$  este continuă în  $a$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $x_n \in X$  cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Funcția  $f$  se numește continuă (pe  $X$ ) dacă este continuă în orice punct  $a \in X$ .

### Caracterizarea funcțiilor continue

Următoarele afirmații sunt echivalente:

i. Aplicația  $f : X \mapsto Y$  este continuă.

ii. Aplicația  $f$  întoarce mulțimi deschise în mulțimi deschise, i.e.:

pentru orice submulțime deschisă  $D \subseteq Y$  rezultă că  $f^{-1}(D)$  este submulțime deschisă în  $X$ .

iii. Aplicația  $f$  întoarce mulțimi închise în mulțimi închise, i.e. pentru orice submulțime închisă  $D \subseteq Y$  rezultă că  $f^{-1}(D)$  este submulțime închisă în  $X$ .

### Uniform continuitate

O aplicație  $f : X \mapsto Y$  se numește uniform continuă (pe  $X$ ) dacă:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ astfel încât } d(x, y) < \delta_\epsilon \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

### Proprietăți ale funcției continue

Fie  $f : X \mapsto Y$  o funcție continuă; atunci:

Dacă  $A$  este mulțime compactă atunci  $f(A)$  este mulțime compactă.

Dacă  $X$  este conex, atunci  $f(X)$  este conex (ca subspațiu al lui  $Y$ ).

Dacă  $X$  este spațiu metric compact, atunci  $f$  este uniform continuă pe  $X$ .

**Principiul contracției, metoda aproximațiilor succesive**

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și fie  $f : X \mapsto X$ . Aplicația  $f$  se numește contracție (pe  $X$ ) dacă există  $k \in [0, 1)$  astfel încât:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Numărul  $k$  se numește factor de contracție.

**Teorema de punct fix a lui Banach**

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet și fie  $f : X \mapsto X$  o contracție de factor  $k$ . Atunci există un unic punct  $\xi \in X$  astfel încât  $f(\xi) = \xi$ .

Punctul  $\xi$  de mai sus se numește punct fix al aplicației  $f$ .

Construcția lui se face astfel: fie  $x_0 \in X$ , arbitrar fixat și fie șirul (numit șirul aproximațiilor succesive) definit prin recurență  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Se demonstrează că șirul  $x_n$  este convergent și limita sa este punctul fix căutat. În plus, are loc formula (evaluarea erorii):

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemple uzuale de spații metrice**

a. Mulțimea numerelor reale,  $R$ , este spațiu metric cu distanța uzuală

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in R.$$

Se poate demonstra că singurele mulțimi conexe din  $R$  sunt intervalele.

b. Pe mulțimea numerelor complexe,  $C$ , distanța uzuală este

$$d(z, w) = |z - w|, \forall z, w \in C.$$

c. Fie  $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in R\}$ . Distanța uzuală (euclidiană):

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \text{ unde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

În  $R^n$  o mulțime este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

d. Fie  $C^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in C\}$ . Distanța uzuală (euclidiană):

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2},$$

cu notații evidente.

**e.** Fie  $\ell^2(N) = \{x : N \mapsto R \mid \sum_n |x(n)|^2 < \infty\}$ . Generalizarea distanței euclidiene la cazul infinit dimensional (pe  $\ell^2(N)$ ) este

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_n |x(n) - y(n)|^2}.$$

**f.** Fie  $A \neq \emptyset$  și fie  $\mathcal{M}(A) = \{f : A \mapsto R \mid f \text{ mărginită}\}$ . Distanța "supremum" pe spațiul funcțiilor mărginite este

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

**g.** Fie  $a, b \in R$  și fie  $\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \mapsto R \mid f \text{ continuă}\}$ . Distanța uzuală pe spațiul funcțiilor continue este

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

**h.** Mai general, dacă  $X$  este un spațiu metric compact, atunci mulțimea funcțiilor continue  $\mathcal{C}(X) = \{f : X \mapsto R \mid f \text{ continuă}\}$  este spațiu metric cu distanța  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ .

**i.** Fie  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$  codul (alfabetul) binar. Pe produsul cartezian

$$\mathcal{B}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathcal{B}, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$$

definim distanța Hamming:

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

Distanța Hamming măsoară de fapt numărul de necoincidențe dintre elementele  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

**j.** Orice mulțime nevidă  $A$  se poate organiza ca spațiu metric (discret) cu distanța "discretă"  $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}$

### Spații normate

Fie  $X$  un spațiu vectorial complex (sau real).

O aplicație  $\| \cdot \| : X \rightarrow [0, \infty)$  cu proprietățile:

**a.**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**b.**  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

**c.**  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,

pentru orice  $x, y \in X$  și  $\alpha \in C$ , se numește normă. O aplicație care verifică

doar condițiile **a** și **b** se numește seminormă.

Perechea  $(X, \|\cdot\|)$  se numește spațiu normat. Orice spațiu normat este și spațiu metric, distanța dintre  $x$  și  $y$  fiind, prin definiție,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Dacă în plus orice șir Cauchy este convergent, atunci  $(X, \|\cdot\|)$  se numește spațiu Banach (sau spațiu normat complet). Se poate demonstra că operațiile algebrice sunt continue: dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$  și analog pentru înmulțirea cu scalari.

### Exemple de spații normate

i. Spațiile vectoriale  $R^n$  și  $C^n$  sunt spații Banach cu norma euclidiană:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}.$$

ii. Spațiile de șiruri  $\ell^p(Z)$  și  $\ell^p(N)$

Fie  $p \in R, p \geq 1$ , fixat și fie

$$\ell^p(Z) = \{x : Z \rightarrow C; \sum_{n \in Z} |x(n)|^p \text{ este convergentă}\}.$$

Facem precizarea că dacă  $(a_n)_{n \in Z}$  este un șir de numere complexe indexat după  $Z$ , atunci seria  $\sum_{n \in Z} a_n$  este convergentă dacă seriile  $\sum_{n=-\infty}^0 a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sunt amândouă convergente.

Cu operațiile uzuale cu șiruri,  $\ell^p(Z)$  este spațiu vectorial. Norma este

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n \in Z} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se demonstrează că  $(\ell^p(Z), \|\cdot\|_p)$  este spațiu Banach.

Analog se definesc spațiile  $\ell^p(N) = \{x : N \rightarrow C; \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$ .

iii. Spațiul șirurilor mărginite

Fie  $\ell^\infty(Z) = \{x : Z \rightarrow C; x \text{ șir mărginit}\}$ . Cu operațiile uzuale,  $\ell^\infty(Z)$  este spațiu vectorial. Aplicația  $\|x\|_\infty = \sup_{n \in Z} |x(n)|$  este normă, iar  $(\ell^\infty(Z), \|\cdot\|_\infty)$

este spațiu Banach.

Analog se definește spațiul  $\ell^\infty(N)$ .

**iv.** Spațiul funcțiilor continue

Fie  $\mathcal{D}$  un spațiu metric compact (caz particular:  $D = [a, b], a, b \in R$ ) și fie

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{f : \mathcal{D} \rightarrow C; f \text{ continuă}\}.$$

Cu operațiile uzuale,  $\mathcal{C}(\mathcal{D})$  este spațiu vectorial. Structura de spațiu Banach este definită de norma supremum:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathcal{D}} |f(t)|.$$

**v.** Spațiul funcțiilor mărginite

Fie  $A \neq \emptyset$ ; spațiul vectorial al funcțiilor mărginite

$$\mathcal{M}(A) = \{f : A \mapsto R \mid f \text{ mărginită}\}$$

este spațiu Banach cu norma supremum:  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in A} |f(t)|$ .

**Serii într-un spațiu normat**

Fie  $(X, \|\cdot\|)$  un spațiu normat și fie  $(x_n)_{n \in N}$  un șir de elemente din  $X$ . Spunem că seria  $\sum_{n \in N} x_n$  este convergentă la  $x \in X$  (numit în acest caz

suma seriei) dacă șirul sumelor parțiale,  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  converge la  $x$ . Seria

$\sum_{n \in N} x_n$  se numește absolut convergentă dacă seria (de numere reale și pozitive)  $\sum_{n \in N} \|x_n\|$  este convergentă. Cu o demonstrație asemănătoare celei de

la serii de numere reale se poate arăta că într-un spațiu Banach orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind, în general, falsă.

**Operatori liniari**

Fie  $(X, \|\cdot\|)$  și  $(Y, \|\cdot\|)$  două normate; o aplicație  $T : X \rightarrow Y$  se numește aplicație liniară (sau operator liniar) dacă:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in C.$$

Operatorul  $T$  se numește liniar și continuu dacă, în plus, aplicația  $T$  este și continuă.

Mulțimea operatorilor liniari și continui de la  $X$  în  $Y$  se notează cu  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Cu operațiile uzuale:

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x), (\alpha T)(x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in C, \forall x \in X,$$

mulțimea  $\mathcal{L}(X, Y)$  este spațiu vectorial.

Pentru orice aplicație liniară  $T : X \mapsto Y$ , se demonstrează că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a.  $T$  este continuă.
- b.  $T$  este continuă în  $0 \in X$ .
- c. există  $M > 0$  astfel încât:  $\forall x \in X, \|T(x)\| \leq M \|x\|$ .

Spațiul vectorial  $\mathcal{L}(X, Y)$  se organizează ca spațiu normat cu norma:

$$\|T\| = \inf\{M > 0 \mid \|T(x)\| \leq M \|x\|\}.$$

Au loc următoarele egalități:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Din definiție rezultă:

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad \forall T \in \mathcal{L}(X), \forall x \in X.$$

Se demonstrează de asemenea inegalitatea:

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|, \quad \forall T, S \in \mathcal{L}(X).$$

Dacă  $Y$  este spațiu Banach, atunci  $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$  este spațiu Banach.

Dacă  $Y$  este corpul scalarilor ( $R$  sau  $C$ ) atunci  $\mathcal{L}(X, C)$  se notează  $X'$  și se numește dualul spațiului  $X$ , iar elementele lui se numesc funcționale liniare și continue.

În cazul  $X = Y$ , notăm  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ .

### **Spectru, valori proprii, vectori proprii**

În continuare presupunem că  $X$  este spațiu Banach.

Pentru orice operatori  $T, S \in \mathcal{L}(X)$  se definește produsul (compunerea):

$$(TS)(x) = T(S(x)), \quad \forall x \in X.$$

Un operator  $T \in \mathcal{L}(X)$  se numește inversabil dacă există  $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$  astfel încât  $TS = I$ , unde, am notat cu  $I$  operatorul identic:  $Ix = x, \forall x \in X$ .

Un rezultat fundamental (teorema lui Banach) afirmă că un operator  $T$  este inversabil dacă și numai dacă este bijectiv.

Pentru orice  $T \in \mathcal{L}(X)$ , mulțimea:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C \mid \text{operatorul } \lambda I - T \text{ nu este inversabil}\}$$

se numește spectrul operatorului  $T$ . Se demonstrează că spectrul este mulțime nevidă și compactă inclusă în  $\{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$ .

Numărul  $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$  se numește raza spectrală a operatorului  $T$ ; evident,  $r(T) \leq \|T\|$  și, în plus, are loc formula razei spectrale:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Submulțimea:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid \text{operatorul } \lambda I - T \text{ nu este injectiv}\}$$

se numește spectrul punctual (sau mulțimea valorilor proprii).

Dacă  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , atunci există  $x \in X, x \neq 0$ , astfel încât  $Tx = \lambda x$ . În acest caz vectorul  $x$  se numește vector propriu al lui  $T$  asociat valorii proprii  $\lambda$ . Dacă  $X$  este un spațiu Banach finit dimensional, ( $C^n$  sau  $R^n$ ) atunci spectrul coincide cu mulțimea valorilor proprii și

$$\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C \mid P_T(\lambda) = 0\},$$

unde,  $P_T$  este polinomul caracteristic al operatorului  $T$ .

## 2.2 Spații metrice

1. Să se demonstreze că următoarele aplicații sunt metrice pe  $R^2$ , echivalente cu distanța euclidiană:

- a.  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .
- b.  $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ .

### Soluție

Se verifică direct definiția distanței. Fie  $d_2$  distanța euclidiană pe  $R^2$  și fie  $(x, y) \in R^2$ ; din inegalitățile:

$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2(|x|^2 + |y|^2)},$$

$$\frac{1}{2}(|x| + |y|) \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|,$$

rezultă:

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2} d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

și respectiv

$$\frac{1}{2} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

2. Să se generalizeze exemplul de mai sus în cazurile  $R^n$  și  $C^n$ .

3. Să se caracterizeze șirurile convergente și șirurile Cauchy într-un spațiu metric discret. Să se demonstreze că orice spațiu metric discret este complet.

**Soluție**

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric discret și fie  $x_n$  un șir în  $X$ ; fie  $0 < \varepsilon < 1$ . Dacă  $x_n \rightarrow a$ , atunci există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $d(x_n, a) < \varepsilon < 1, \forall n \geq n_\varepsilon$ , deci  $d(x_n, a) = 0, \forall n \geq n_\varepsilon$ ; rezultă că șirul  $x_n$  este constant (începând de la un rang). Un raționament similar se aplică și în cazul șirurilor Cauchy.

4. Pe mulțimea numerelor raționale,  $Q$ , considerăm distanța uzuală (inclusă din  $R$ ),  $d(x, y) = |x - y|$ . Să se demonstreze că spațiul metric  $(Q, d)$  nu este complet.

**Soluție**

Fie șirul de numere raționale  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Se știe că în  $R$  șirul  $x_n$  este convergent la  $e \in R \setminus Q$ . Rezultă că  $x_n$  este șir Cauchy în  $R$ , deci și în  $Q$ ; dacă  $x_n$  ar fi convergent în  $Q$ , atunci în  $R$  ar avea două limite, ceea ce constituie o contradicție.

**5. Mulțimea lui Cantor**

Notăm cu  $I_0$  intervalul  $[0, 1]$ . Eliminăm din  $I_0$  intervalul din mijloc,  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  și notăm

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

mulțimea astfel obținută. Continuăm procedeul: din fiecare din intervalele  $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  eliminăm intervalul din mijloc și notăm cu  $I_2$  mulțimea rezultată:

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Continuând procedeul, se obține un șir de mulțimi  $I_0, I_1, I_2, \dots$  cu proprietățile:

i.  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

ii.  $I_n$  este reuniunea a  $2^n$  intervale, fiecare de lungime  $3^{-n}$ .

Prin definiție, mulțimea lui Cantor este intersecția:  $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

Să se demonstreze următoarele proprietăți:

a.  $\mathcal{C}$  este mulțime compactă.

b. Mulțimea  $\mathcal{C}$  nu conține intervale.

c. Mulțimea lui Cantor este perfectă (nu conține puncte izolate); în particular, rezultă că  $\mathcal{C}$  nu este mulțime numărabilă.



**Soluție**

**a.** Mulțimea  $\mathcal{C}$  este mărginită (inclusă în  $[0, 1]$ ) și închisă (intersecție de mulțimi închise).

**b.** Din construcție, rezultă:

$$\mathcal{C} \cap \left( \frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right) = \emptyset, \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Dar, orice interval  $(\alpha, \beta)$  conține un interval de forma  $\left( \frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right)$  dacă  $m$  este ales cu condiția  $3^{-m} < \frac{\beta-\alpha}{6}$ . Rezultă că mulțimea  $\mathcal{C}$  nu conține intervale.

**c.** Fie  $a \in \mathcal{C}$  și fie  $S$  un interval arbitrar care-l conține pe  $a$ ; pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , fie  $J_n$  acel interval al lui  $I_n$  care-l conține pe  $a$ . Alegem  $n_0$  suficient de mare astfel încât  $J_{n_0} \subseteq S$ ; dacă notăm cu  $x_n$  acel capăt al intervalului  $J_n$  diferit de  $a$ , rezultă  $x_n \in \mathcal{C} \cap S$ ,  $x_n \neq a, \forall n \geq n_0$ .

**6.** Fie spațiul metric  $(R^n, d_2)$ , fie  $x_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$  un șir de elemente din  $R^n$  și  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ . Atunci:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a \text{ (în } R^n) \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^m = a_k \text{ (în } R), \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Soluție**

Se aplică inegalitățile:

$$|x_j^m - a_j| \leq d_2(x_m, a) \leq \sum_{k=1}^n |x_k^m - a_k|, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**7.** Fie  $a, b \in R, a < b$ .

**a.** Să se demonstreze că

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

este distanță pe mulțimea funcțiilor continue  $\mathcal{C}[a, b]$ .

**b.** Să se demonstreze că orice șir  $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$  convergent în raport cu distanța  $d_\infty$  este convergent și în raport cu distanța  $d_1$ , dar reciproca este falsă.

**Soluție**

**a.** Se verifică direct definiția (se folosesc proprietățile modulului și ale integralei).

**b.** Fie  $f_n, f \in \mathcal{C}([a, b])$  astfel încât  $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ . Atunci:

$$d_1(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \cdot d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0.$$

Pentru a arăta că reciproca este falsă, fie șirul  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ .  
Atunci  $f_n \rightarrow 0$  în raport cu distanța  $d_1$ , dar nu converge în raport cu  $d_\infty$ .

**8.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet și fie  $A \subseteq X$ ; să se demonstreze că spațiul metric indus  $(A, d)$  este complet dacă și numai dacă  $A$  este submulțime închisă în  $X$ .

**Soluție**

Se folosește caracterizarea cu șiruri a mulțimilor închise. Presupunem mai întâi că  $A$  este închisă. Dacă  $x_n \in A$  este un șir Cauchy (în  $X$ ), atunci există (deoarece  $X$  este complet)  $x \in X$  astfel încât  $x_n \rightarrow x$ . Dar  $A$  este închisă, deci  $x \in A$ . Implicația inversă o lăsăm ca exercițiu.

**9. a.** Să se demonstreze că aplicația

$$d : R \times R \mapsto [0, \infty), d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|, \forall x, y \in R,$$

este distanță pe  $R$ .

**b.** Spațiul metric  $(R, d)$  nu este complet.

**Soluție**

**a.** Funcția  $\arctg$  este injectivă, deci  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

**b.** Șirul  $x_n = n$  este șir Cauchy în raport cu distanța  $d$ :

$$d(x_n, x_m) = |\arctg n - \arctg m| = \left| \arctg \left( \frac{n-m}{1+nm} \right) \right| \rightarrow 0,$$

dacă  $m, n \rightarrow \infty$ .

Presupunând, prin absurd, că șirul  $x_n$  este convergent la  $a \in R$ , atunci  $d(x_n, a) \rightarrow 0$ ; pe de altă parte:

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &= |\arctg n - \arctg a| = \\ &= \left| \arctg \left( \frac{n-a}{1+na} \right) \right| \rightarrow \left| \arctg \left( \frac{1}{a} \right) \right| \neq 0, \forall a \in R, \end{aligned}$$

contradicție.

**10.** Exemplul de mai sus se poate generaliza astfel: fie  $X$  o mulțime nevidă arbitrară, fie  $f : X \mapsto R$  și fie

$$d : X \times X \mapsto [0, \infty), d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Atunci  $d$  este distanță pe  $X$  dacă și numai dacă funcția  $f$  este injectivă.

**11.** În spațiul metric  $(R^2, d_2)$  considerăm submulțimile:

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\},$$

$$E = \{(x, y) \in R^2 \mid ax + by + c = 0, a, b, c \in R \text{ constante fixate}\},$$

$$F = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 1 \right) \in R^2 \mid n \in N \right\}, \quad G = F \cup \{(0, 1)\}.$$

Să se precizeze dacă mulțimile sunt deschise, închise, mărginite, conexe sau compacte.

**Soluție**

$A$  este mulțime mărginită și conexă, dar nu este deschisă și nici închisă.  $B$  este compactă și conexă.  $D$  este deschisă, conexă și mărginită.  $E$  este închisă, conexă și nemărginită.  $F$  este mărginită, dar nu este deschisă, nici închisă și nici conexă.  $G$  este mulțime compactă.

**12.** Să se dea un exemplu de submulțime în  $R^2$  care este conexă, dar nu este conexă prin arce (o submulțime  $M$  a unui spațiu metric  $X$  se numește conexă prin arce dacă pentru orice  $x, y \in M$  există  $a, b \in R$  și o funcție continuă  $\gamma : [a, b] \mapsto M$  astfel încât  $\gamma(a) = x$  și  $\gamma(b) = y$ ).

**Soluție**

Un exemplu este :

$$H = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in R^2 \mid x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, y) \in R^2 \mid y \in [-1, 1]\}.$$

**13.** Să se arate că într-un spațiu metric intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise nu este neapărat deschisă și reuniunea unei familii infinite de mulțimi închise nu este neapărat închisă.

**Soluție**

Fie, de exemplu, în spațiul metric  $R$  mulțimile deschise

$$D_n = \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \forall n \in N^*.$$

Atunci  $\bigcap_{n \geq 1} D_n = \{0\}$ . În același spațiu metric, fie mulțimile închise

$$F_n = \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right], \forall n \in N^*.$$

Atunci  $\bigcup_{n \geq 1} F_n = (0, 1)$ .

### 2.3 Teorema contracției

14. Să se decidă dacă următoarele funcții sunt contracții pe mulțimile indicate:

- a.  $f(x) = \sin x, x \in R$ .
- b.  $f(x) = \ln x, x \in [e, \infty)$ .
- c.  $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in R$ .
- d.  $f(x) = \frac{1-x^2}{5(1+x^2)}, x \in R$ .
- e.  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, x \in R$ .

#### Soluții

a. Funcția  $f(x) = \sin x$  nu este contracție pe  $R$ . Presupunând prin absurd că ar exista  $k \in (0, 1)$  astfel încât  $|\sin x - \sin y| \leq k|x - y|, \forall x, y \in R$ , atunci, în particular pentru  $y = 0$ , se obține  $|\sin x| \leq k|x|, \forall x \in R$ ; rezultă că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \leq k < 1$ , contradicție. Funcția sinus este totuși contracție pe orice interval închis care nu conține numere de forma  $k\pi, \forall k \in Z$  (pentru demonstrație se poate aplica teorema lui Lagrange).

b. Funcția  $f(x) = \ln x$  este contracție pe  $[e, \infty)$ ; din teorema lui Lagrange rezultă:

$$|\ln x - \ln y| \leq \left( \sup_{c \geq e} \frac{1}{c} \right) |x - y| \leq \frac{1}{e} |x - y|, \forall x, y \in R.$$

c. Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  nu este contracție pe  $R$ ; fie, prin absurd,  $k \in (0, 1)$  astfel încât  $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq k|x - y|, \forall x, y \in R$ . În particular pentru  $y = 0$  rezultă  $|\operatorname{arctg} x| \leq k|x|, \forall x \in R$  și deci  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{arctg} x|}{|x|} \leq k < 1$ , contradicție. Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este contracție pe orice interval  $I$  pentru care  $0$  nu este punct de acumulare, deoarece, pe un astfel de interval are loc inegalitatea  $\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$ .

d. Funcția nu este contracție pe  $R$ ; raționament similar cu exemplele a și c de mai sus.

e. Funcția este contracție pe  $R$ .

15. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$  soluția reală a ecuației  $x^3 + 4x - 1 = 0$ .

#### Soluție

Ecuația are o singură soluție reală,  $\xi \in (0, 1)$ . Vom aplica metoda aproximațiilor succesive. Fie  $X = [0, 1]$  și  $f : X \mapsto X, f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ . Ecuația

este echivalentă cu  $f(x) = x$ , iar spațiul metric  $X$  este complet (cu metrica uzuală indusă din  $R$ ); demonstrăm acum că  $f$  este contracție pe  $X$ . Derivata este  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$ , iar  $\sup_{x \in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1$ , deci  $f$  este contracție cu factorul de contracție  $k = \frac{2}{25}$ . Șirul aproximațiilor succesive este

$$x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4};$$

evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k} |x_0 - x_1| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^n,$$

deci  $\xi \approx x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) = 0,2355072$ .

Aceeași ecuație se poate rezolva aproximativ și folosind contracția  $g(x) = \frac{1}{4}(1-x^3)$ ,  $x \in [0, 1]$ . În acest caz factorul de contracție este

$k = \sup_{x \in (0,1)} |g'(x)| = \frac{3}{4}$ . Metoda aproximațiilor succesive converge mult

mai încet în acest caz,  $\xi \approx x_6$ .

**16.** Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$  soluția reală a ecuației  $x^3 + 12x - 1 = 0$ .

**Soluție**

Ecuația are o singură soluție reală  $\xi \in (0, 1)$  și este echivalentă cu  $x = f(x)$ , unde  $f(x) = (x^2 + 12)^{-1}$  este contracție pe  $[0, 1]$ , cu factorul de contracție  $k = \frac{2}{169}$ .

**17.** Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$  soluția reală a ecuației  $x^5 + x - 15 = 0$ .

**Soluție**

Ecuația are o singură soluție reală  $\xi \in (1, 2)$ . Scriem ecuația sub forma echivalentă  $x = \sqrt[5]{15-x}$ ; aplicația  $f(x) = \sqrt[5]{15-x}$  este contracție pe  $[1, 2]$  cu factorul de contracție  $k = \frac{1}{5\sqrt[5]{14^4}}$ .

**18.** Fie  $a \in (0, 10^{-1})$ . Să se construiască un șir al aproximațiilor succesive pentru soluția din  $(0, 1)$  a ecuației  $xe^x = a$ .

**Soluție**

Scriem ecuația sub forma  $x = \phi(x)$ , cu  $\phi(x) = ae^{-x}$ . Atunci  $\phi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  este o contracție (cu factorul  $a$ ).

**19. Ecuația lui Kepler** Să se construiască un șir care converge la (unica) soluție a ecuației  $x = q \sin x + m$ ,  $q \in (-1, 1)$ ,  $m \in R$ .

**Soluție**

Funcția  $f : R \mapsto R$ ,  $f(x) = q \sin x + m$  este contracție:

$$\sup_{x \in R} |f'(x)| = q < 1,$$

deci ecuația  $x = f(x)$  are o soluție unică  $\xi \in R$ .

Pentru orice  $x_0 \in R$ , șirul

$$x_{n+1} = f(x_n) = q \sin x_n + m$$

converge la  $\xi$ , eroarea la pasul  $n$  fiind:

$$|x_n - \xi| < \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

**20.** Fie  $a, b, c \in R$ ; în ce condiții se poate aplica metoda aproximațiilor succesive ecuației:  $x = a \sin x + b \cos x + c$ ?

**Soluție**

Fie  $f : R \mapsto R$ ,  $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ . Funcția  $f$  se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) + c = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi) + c, \end{aligned}$$

cu  $\phi \in R$  bine ales. Rezultă că aplicația  $f$  este contracție dacă și numai dacă  $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$ ; dacă această ipoteză este adevărată, atunci un șir al aproximațiilor succesive este (de exemplu)  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Eroarea la pasul  $n$  este cel mult  $\frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^n}{1 - \sqrt{a^2 + b^2}} |b + c|$ .

**21.** Să se demonstreze că pentru orice  $a \in (-1, 1)$  și pentru orice funcție continuă  $h : [0, 1] \mapsto R$  există o singură funcție continuă  $u : [0, 1] \mapsto R$  astfel încât  $u(x) = h(x) + a \sin u(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

**Soluție**

Studiem ecuația în spațiul metric  $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ . Fie aplicația

$$F : \mathcal{C}([0, 1]) \mapsto \mathcal{C}([0, 1]), (F(f))(x) = h(x) + a \sin f(x), \forall x \in [0, 1].$$

Este suficient să demonstrăm că  $F$  este contracție (funcția  $u$  din concluzie este punctul fix al contracției). Fie  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ ; atunci:

$$d_\infty(F(f), F(g)) = \sup_{x \in [0, 1]} |a(\sin f(x) - \sin g(x))| \leq |a| \cdot d_\infty(f, g),$$

deci  $F$  este contracție cu factorul  $|a|$ .

**22. Sisteme liniare** Fie  $A = (a_{ij})$  o matrice pătratică de ordinul  $n \in \mathbb{N}$  cu elemente  $a_{ij} \in R, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  și fie  $b_i \in R, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pentru ce valori ale parametrului  $\lambda \in R$  se poate aplica metoda aproximațiilor succesive sistemului liniar:  $x_i = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + b_i, \forall 1 \leq i \leq n$  ?

**Soluție**

Fie  $d$  una din distanțele echivalente pe  $R^n$  (a se vedea exercițiile 1 și 2) și fie

$$T : R^n \mapsto R^n, T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot \left( \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + b_1, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k + b_n \right).$$

Se impune condiția ca  $T$  să fie contracție și se obțin valorile cerute pentru  $\lambda$ . Vom face în continuare calculul pentru distanța euclidiană,  $d = d_2$ . Pentru orice vectori  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  din  $R^n$ , avem (aplicăm inegalitatea lui Schwarz):

$$\begin{aligned} d_2(T(x), T(y)) &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}(x_k - y_k) \right)^2} \leq \\ &\leq |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right) \right)} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2} \cdot d_2(x, y). \end{aligned}$$

Deci  $T$  este contracție dacă și numai dacă  $|\lambda| \leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2} \right)^{-1}$ .

**23.** Să se rezolve exercițiul anterior în raport cu distanțele  $d_1$  și  $d_\infty$ .

**24. Ecuații integrale de tip Fredholm** Fie  $a, b \in R, a < b$  și fie  $K : [a, b] \times [a, b] \mapsto R$  o funcție continuă (numită nucleu). Pentru orice funcție continuă  $f : [a, b] \mapsto R$  și pentru orice  $\lambda \in R$ , fie ecuația (cu necunoscuta  $\phi$ ):

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy + f(x), \forall x \in [a, b].$$

Să se afle pentru ce valori ale lui  $\lambda \in R$  se poate aplica metoda aproximațiilor succesive ecuației considerate.

**Soluție**

Studiem ecuația în spațiul Banach  $(\mathcal{C}([a, b]), d_\infty)$ . Fie aplicația

$$U : \mathcal{C}([a, b]) \mapsto \mathcal{C}([a, b]), (U\phi)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy + f(x).$$

Ecuția Fredholm se scrie  $U(\phi) = \phi$ . Pentru orice  $\phi, \psi \in \mathcal{C}([a, b])$ , calculăm:

$$\begin{aligned} d_\infty(U\phi, U\psi) &= \sup_{x \in [a, b]} |(U\phi)(x) - (U\psi)(x)| = \\ &= \sup_{x \in [a, b]} \left| \lambda \int_a^b K(x, y)(\phi(y) - \psi(y))dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, y)| \cdot |\phi(y) - \psi(y)| dy \leq \\ &\leq |\lambda| \|K\|_\infty \int_a^b |\phi(y) - \psi(y)| dy, \end{aligned}$$

unde, am notat  $\|K\|_\infty = \sup_{(x, y) \in [a, b]^2} |K(x, y)|$ . Rezultă deci

$$d_\infty(U\phi, U\psi) \leq |\lambda| \|K\|_\infty (b - a) d_\infty(\phi, \psi), \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Aplicația  $U$  este contracție dacă și numai dacă  $|\lambda| < \frac{1}{(b - a) \|K\|_\infty}$ . În această ipoteză, construim un șir al aproximațiilor succesive: fie  $\phi_0 \in \mathcal{C}([a, b])$  și  $\phi_{n+1} = U\phi_n$ . Calculăm primii termeni ai șirului:

$$\phi_1(x) = (U\phi_0)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\phi_0(y)dy + f(x), \forall x \in [a, b].$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= (U\phi_1)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \left( \lambda \int_a^b K(y, t)\phi_0(t)dt + f(y) \right) dy + f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, y)K(y, t)\phi_0(t)dtdy = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b \left( \phi_0(t) \int_a^b K(x, y)K(y, t)dy \right) dt. \end{aligned}$$

Definim nucleele iterate:

$$K_1(x, y) = K(x, y),$$



$$K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t)K_1(t, y)dt,$$

$$K_3(x, y) = \int_a^b K(x, t)K_2(t, y)dt,$$

.....

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, t)K_{n-1}(t, y)dt.$$

Cu aceste notații, soluția ecuației Fredholm este:

$$\xi(x) = f(x) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \int_a^b K_n(x, y)f(y)dy, \forall x \in [a, b].$$

Fie  $R(x, y, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n K_{n+1}(x, y)$  rezolventa ecuației; atunci:

$$\xi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda)f(y)dy.$$

**25.** Să se determine  $\lambda \in R$  astfel încât ecuației

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 xy\phi(y)dy + x^2$$

să i se poată aplica metoda aproximațiilor succesive și, în acest caz, să se rezolve ecuația.

**Soluție**

Cu notațiile din exercițiul precedent,  $a = 0, b = 1,$

$K : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto R, K(x, y) = xy, f(x) = x^2$  și  $\| K \|_\infty = 1.$  Aplicația  $U$  definită prin  $(U\phi)(x) = \lambda \int_0^1 xy\phi(y)dy + x^2$  este contracție dacă și numai dacă  $|\lambda| < 1.$  În acest caz, nucleele iterate sunt:

$$K_1(x, y) = K(x, y) = xy,$$

$$K_2(x, y) = \int_0^1 K(x, t)K_1(t, y)dt = \int_0^1 xt^2ydt = \frac{1}{3}xy,$$

$$K_3(x, y) = \int_0^1 \frac{1}{3}xt^2ydt = \frac{1}{3^2}xy.$$

În general,  $K_n = \frac{1}{3^{n-1}}xy.$  Rezultă:

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^n xy = \frac{3xy}{3 - \lambda},$$

și deci soluția (unică) a ecuației este

$$\xi(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 \frac{3xy}{3-\lambda} y^2 dy = x^2 + \frac{3\lambda}{4(3-\lambda)} x.$$

### 26. Metoda lui Newton

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și fie  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă astfel încât  $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ . Presupunem că ecuația  $f(x) = 0$  are o soluție  $\xi \in [a, b]$ . Metoda lui Newton aproximează  $\xi$  cu șirul aproximațiilor succesive generat de contractia  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Să se găsească o condiție suficientă pentru a se putea aplica metoda aproximațiilor succesive și să se interpreteze geometric metoda.

#### Soluție

Condiția  $|g'(x)| \leq k < 1$  (pentru ca  $g$  să fie contractie) este echivalentă cu  $|f(x)f''(x)| < k(f'(x))^2, \forall x \in [a, b]$ . Dacă această condiție este îndeplinită, atunci șirul aproximațiilor succesive este  $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ . Geometric,  $x_n$  este abscisa punctului de intersecție al tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  cu axa  $Ox$ . Într-adevăr, ecuația tangentei este  $y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$  și pentru  $y = 0$  se obține  $x_n$ .

**27.** Fie  $a > 0$  și  $p \in \mathbb{N}$ . Să se aplice metoda lui Newton pentru a construi un șir al aproximațiilor succesive pentru  $\sqrt[p]{a}$ .

#### Soluție

Fie  $f(x) = x^p - a$  și  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{p} \left( (p-1)x + ax^{1-p} \right)$ . Aplicația  $g$  este contractie pe un interval care conține  $\sqrt[p]{a}$ :

$$|g'(x)| = \frac{p-1}{p} |1 - ax^{-p}| < \frac{p-1}{p} < 1, \forall x > \sqrt[p]{\frac{a}{2}}.$$

În concluzie, pentru a construi un șir al aproximațiilor succesive, trebuie ca primul termen,  $x_0$ , să fie ales astfel încât  $x_0 > \sqrt[p]{\frac{a}{2}}$ .

## 2.4 Funcții continue

**28.** Să se studieze continuitatea în zero a funcției

$$f(x) = \begin{cases} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

unde,  $[a]$  este partea întreagă a numărului  $a \in \mathbb{R}$ .

**Soluție**

Din dubla inegalitate:

$$x \left( \frac{1}{x} - 1 \right) < f(x) \leq x \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1],$$

rezultă că funcția  $f$  este continuă în 0.

**29.** Fie

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Să se demonstreze că  $f$  este uniform continuă pe  $\mathbb{R}$ .

**Soluție**

Funcția  $f$  este continuă, deci pe orice interval compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  este și uniform continuă. Fie  $x_n \rightarrow \infty$  și  $y_n \rightarrow \infty$  astfel încât  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ . Atunci  $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$  (deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$ ), deci  $f$  este uniform continuă pe  $\mathbb{R}$ .

**30.** Fie  $f : (0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Să se demonstreze că  $f$  nu este uniform continuă.

**Soluție**

Fie  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  și  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ . Atunci  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ , dar

$$|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 1 \neq 0.$$

**31.** Fie  $f : (0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \ln x$  și  $g : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \ln x$ . Să se studieze uniform continuitatea funcțiilor  $f$  și  $g$ .

**Soluție**

Funcția  $f$  nu este uniform continuă: fie  $x_n = e^{-n}$  și  $y_n = e^{-2n}$ . Atunci  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ , dar  $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow \infty$ . Funcția  $g$  este uniform continuă: din inegalitatea  $\sup_{x \geq 1} |g'(x)| \leq 1$ , rezultă, (aplicând teorema lui Lagrange):

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [1, \infty).$$

**32.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric, fie  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  o aplicație continuă și fie  $a \in \mathbb{R}$ . Considerăm mulțimile:

$$A = \{x \in X \mid f(x) < a\}$$

$$B = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

$$D = \{x \in X \mid f(x) = a\}.$$

Să se demonstreze că  $A$  este mulțime deschisă, iar  $B$  și  $D$  sunt mulțimi închise.

**Soluție**

$A = f^{-1}((-\infty, a))$ ,  $B = f^{-1}((-\infty, a])$ ,  $D = f^{-1}(\{a\})$ ; mulțimea  $(-\infty, a)$  este deschisă, iar mulțimile  $(-\infty, a]$  și  $\{a\}$  sunt închise.

**33.** Să se construiască o funcție continuă, bijectivă având inversa discontinuă.

**Soluție**

Fie  $X = [0, 2\pi)$  cu distanța uzuală indusă din  $R$ . Fie cercul unitate

$$Y = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

cu distanța euclidiană indusă din  $R^2$  (se poate lua și metrica "lungimea arcului", care este echivalentă cu distanța euclidiană). Fie funcția:

$$f : X \mapsto Y, f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Atunci  $f$  este continuă (deoarece componentele sunt continue) și bijectivă. Dacă funcția inversă  $f^{-1} : Y \mapsto X$  ar fi continuă, atunci imaginea oricărui șir convergent din  $Y$  ar fi un șir convergent în  $X$ . Șirul  $(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, -\frac{1}{n})$  converge la  $(1, 0)$  în  $Y$ , dar imaginea sa prin funcția  $f^{-1}$ :

$$f^{-1} \left( \left( \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, -\frac{1}{n} \right) \right) = 2\pi - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \right)$$

nu este șir convergent în  $X$ ; altfel ar trebui ca  $2\pi \in X$ , contradicție.

**34.** Există funcții continue și bijective de la  $[0, 1)$  în  $(0, 1)$  ?

**Soluție**

Fie  $X = [0, 1)$  cu metrica indusă din  $R$  și  $Y = (0, 1)$  cu aceeași metrică. Să presupunem, prin absurd, că ar exista o funcție continuă și bijectivă  $f : X \mapsto Y$ . Fie  $a = f(0)$  și fie  $g$  restricția lui  $f$  la  $(0, 1)$ ; atunci  $g((0, 1)) = (0, a) \cup (a, 1)$ . Dar  $(0, 1)$  este mulțime conexă în  $X$ , restricția  $g$  este continuă, deci ar trebui ca  $g((0, 1))$  să fie mulțime conexă în  $Y$ , contradicție.

Să se studieze continuitatea următoarelor funcții în origine (exercițiile 35-47):

$$35. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ , deoarece  $|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| \leq |x|$ . Rezultă că funcția este continuă.

$$36. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

Trecând la coordonate polare,  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , obținem:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\rho^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

ceea ce arată că limita în  $(0, 0)$  nu există, deci funcția nu este continuă în origine.

$$37. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  nu există: fie  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \rightarrow (0, 0)$ . Atunci  $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2}$ . Dacă  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ , atunci  $f(x'_n, y'_n) \rightarrow 0$ . Se observă că deși  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0, \forall m \in R$ , totuși limita nu există.

$$38. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  nu există.

$$39. f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

Din inegalitatea  $|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}| \leq x^2 + y^2$  rezultă

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0,$$

deci funcția este continuă.

$$40. f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  nu există; dacă  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ , atunci

$$f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2},$$

iar dacă  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n^2}) \rightarrow (0, 0)$ , atunci

$$f(x'_n, y'_n) \rightarrow 0.$$

$$41. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} \sin \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}}{\frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ , deoarece

$$\left| \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x^3|,$$

deci funcția este continuă.

$$42. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2$ , deci funcția nu este continuă.

$$43. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 \cdot y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1)} = 0, \end{aligned}$$

deci funcția este continuă.

$$44. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

Folosind limita  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , rezultă  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , deci funcția este continuă.

$$45. f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( (1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}} \right)^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = 1, \end{aligned}$$

deci funcția nu este continuă.

$$46. f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

Folosind coordonatele sferice:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta,$$

obținem

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{\rho^2} = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi,$$

deci limita nu există.

$$47. f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y, z) \notin Oz \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

**Soluție**

Fie  $(0, 0, z_o) \in Oz$ ; analizăm mai întâi cazul  $z_o \neq 0$ .

Folosind coordonate cilindrice,

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z,$$

obținem

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,z_0)} f(x,y,z) = \lim_{(\rho,z) \rightarrow (0,z_0)} \frac{\rho \cos \varphi \cdot z}{\rho} = z_0 \cos \varphi,$$

deci limita nu există.

Dacă  $z_0 = 0$ , din inegalitatea

$$|f(x,y,z)| \leq |z|,$$

rezultă

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0,$$

deci funcția este continuă în origine.

## 2.5 Spații normate și operatori liniari

**48. a.** Fie  $x_0 \in [a, b]$ ; pe spațiul funcțiilor continue,  $(\mathcal{C}[a, b], \| \cdot \|_\infty)$  considerăm aplicația (numită evaluarea în punctul  $x_0$ ):

$$F_{x_0} : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathbb{R}, F_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Să se demonstreze că  $F_{x_0}$  este funcțională liniară și continuă și să se calculeze norma  $\| F_{x_0} \|$ .

**b.** Mai general, să se demonstreze că pentru orice  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$  și orice  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , aplicația:

$$F : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathbb{R}, F(f) = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k)$$

este funcțională liniară și continuă. În plus:

$$\| F \| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

### Soluție

**a.** Fie  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; atunci:

$$F_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = \alpha F_{x_0}(f) + \beta F_{x_0}(g),$$

deci  $F_{x_0}$  este funcțională liniară.

Pentru orice  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , avem:

$$|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \| f \|_\infty,$$



deci  $F_{x_0}$  este continuă și  $\|F_{x_0}\| \leq 1$ .

Dacă  $\mathbf{1}$  este funcția constantă 1, atunci  $|F_{x_0}(\mathbf{1})| = 1$ , deci  $\|F_{x_0}\| = 1$ .

**b.** Evident, se poate presupune că  $c_k \neq 0$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  și că punctele  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sunt alese crescător; liniaritatea:

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^n c_k \alpha f(t_k) + \sum_{k=1}^n c_k \beta g(t_k) = \\ &= \alpha F(f) + \beta F(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}[a, b], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Din inegalitatea:

$$\begin{aligned} |F(f)| &= \left| \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |c_k f(t_k)| \leq \left( \sum_{k=1}^n |c_k| \right) \|f\|_{\infty}, \quad \forall f \in \mathcal{C}[a, b], \end{aligned}$$

rezultă continuitatea lui  $F$  și inegalitatea:

$$\|F\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă, considerăm funcția  $h : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ , definită astfel: în punctele  $t_k$  ia valorile  $\text{sgn}(c_k)$ , pe fiecare interval  $(t_k, t_{k+1})$  funcția este liniară, iar pe intervalele  $[a, t_1]$  și  $(t_n, b]$  funcția  $h$  este constantă. Notând  $u_k = \frac{c_k}{|c_k|}$ , funcția  $h$  este:

$$h(x) = \begin{cases} u_k & , \quad x = t_k \\ u_1 & , \quad x \in [a, t_1) \\ u_n & , \quad x \in (t_n, b] \\ \frac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k} x + \frac{u_k t_{k+1} - u_{k+1} t_k}{t_{k+1} - t_k} & , \quad x \in (t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

Evident, din definiție rezultă funcția  $h$  este continuă și  $\|h\|_{\infty} = 1$ , deci:

$$\|F\| \geq |F(h)| = \left| \sum_{k=1}^n c_k h(t_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \frac{c_k}{|c_k|} \right| = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

ceea ce încheie demonstrația.

**49. a.** Pe spațiul Banach  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$  al funcțiilor continue (reale) considerăm aplicația

$$J : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathbb{R}, \quad J(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Să se demonstreze că  $J$  este funcțională liniară și continuă și apoi să se calculeze norma sa.

**b.** Mai general, pentru orice funcție continuă  $\varphi : [a, b] \mapsto R$  aplicația:

$$J_\varphi : \mathcal{C}[a, b] \mapsto R, \quad J_\varphi(f) = \int_a^b \varphi(t) f(t) dt$$

este o funcțională liniară și continuă și

$$\|J_\varphi\| = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

### Soluție

**a.** Liniaritatea este o consecință directă a proprietăților integralei Riemann. Pentru orice  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , avem:

$$\begin{aligned} |J(f)| &= \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

deci  $J$  este continuă. Din inegalitatea de mai sus rezultă și  $\|J\| \leq b-a$ . Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie  $\mathbf{1}(t) = 1, \forall t \in [0, 1]$ . Atunci  $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$  și deci:

$$\|J\| \geq |J(\mathbf{1})| = b-a.$$

Rezultă  $\|J\| = b-a$ .

**b.** Liniaritatea este evidentă; din inegalitatea:

$$|J_\varphi(f)| = \left| \int_a^b \varphi(t) f(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t) f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

rezultă continuitatea și inegalitatea:

$$\|J_\varphi\| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă construim o funcție  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  după cum urmează; fie  $\varepsilon > 0$ , arbitrar fixat și fie o diviziune a intervalului  $[a, b]$ ,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

astfel încât

$$\max_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| < \varepsilon.$$

Această alegere a diviziunii este posibilă datorită continuității funcției  $\varphi$ .

Împărțim intervalele diviziunii în două grupe:

în prima grupă considerăm intervalele (notate  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r$ ) pe care funcția  $\varphi$  nu se anulează (nu schimbă semnul);

în grupa a doua, celelalte intervale (notate  $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_s$ ).

Definim funcția  $g$  pe fiecare interval al diviziunii urmând următoarele reguli:

**i.**  $g(t) = \text{sgn}(\varphi(t))$ ,  $\forall t \in \Delta'_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, r$ ;

**ii.**  $g(t)$  este liniară în restul punctelor din  $[a, b]$ ; (se pot da formule concrete, a se vedea exercițiul anterior);

**iii.** dacă  $a$  sau  $b$  este extremitate a unui interval din a doua grupă, atunci  $g(a) = 0$ , (respectiv  $g(b) = 0$ ).

Evident, funcția  $g$  este continuă și  $\|g\|_\infty \leq 1$ , deci:

$$\begin{aligned} \|J_\varphi\| &\geq |J_\varphi(g)| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} \varphi(t) g(t) dt + \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} \varphi(t) g(t) dt \right| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} |\varphi(t)| dt - \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)| dt = \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)| dt > \\ &> \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$ , rezultă inegalitatea:

$$\|J_\varphi\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt,$$

ceea ce încheie demonstrația.

**50.** Fie  $\mathcal{C}^1[a, b]$  spațiul vectorial al funcțiilor de clasă  $C^1$  definite pe intervalul compact  $[a, b]$ .

**a.** Să considerăm pe  $\mathcal{C}^1[a, b]$  norma supremum:  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Să se demonstreze că aplicația de derivare

$$D : \mathcal{C}^1[a, b] \mapsto \mathcal{C}[a, b], D(f) = f',$$

este operator liniar dar nu este și continuu. Pe spațiul funcțiilor continue,  $\mathcal{C}[a, b]$ , este considerată, ca de obicei, norma supremum.

**b.** Să considerăm acum pe spațiul  $\mathcal{C}^1[a, b]$  norma:

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Să se demonstreze că aplicația de derivare  $D$  este în acest caz operator continuu.

**Soluție**

**a.** Liniaritatea este evidentă. Fie șirul  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ ; atunci  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$  și deci  $f_n \rightarrow 0$  în spațiul normat  $(\mathcal{C}^1[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ , dar șirul  $D(f_n) = f'_n$  nu converge (la 0) în  $\mathcal{C}[a, b]$ .

**b.** Fie  $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ; din inegalitatea:

$$\|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|$$

rezultă că  $D$  este operator continuu.

**51.** Să se demonstreze că orice operator liniar  $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  este continuu (pe spațiul  $\mathbb{R}^n$  este considerată norma euclidiană, notată în continuare  $\|\cdot\|_2$ ).

**Soluție**

Fie  $T$  ca în enunț, fie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza canonică în  $\mathbb{R}^n$  și fie:

$$K = \max\{\|Te_1\|_2, \|Te_2\|_2, \dots, \|Te_n\|_2\}.$$

Pentru orice vector  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n$ , au loc inegalitățile:

$$|x_i| \leq \|x\|_2, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

De aici și din inegalitatea triunghiului, rezultă:

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2 &= \left\| T \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\|_2 = \| \sum_{j=1}^n x_j T e_j \|_2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T e_j\|_2 \leq nK \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

deci operatorul  $T$  este continuu și  $\|T\| \leq nK$ . Evident, demonstrația de mai sus rămâne adevărată și pe spațiul  $\mathbb{C}^n$ .

**52. Operatorul de înmulțire cu variabila independentă**

Pe spațiul Banach complex  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  considerăm operatorul (de înmulțire cu variabila independentă):

$$(Mf)(x) = xf(x), \forall f \in \mathcal{C}[a, b], \forall x \in [a, b].$$

- a. Să se demonstreze că  $M$  este liniar și continuu și  $\|M\| = |b|$ .  
 b. Să se demonstreze că spectrul lui  $M$  este :

$$\sigma(M) = [a, b].$$

- c. Să se demonstreze că mulțimea valorilor proprii este vidă:  $\sigma_p(M) = \emptyset$ .

**Soluție**

- a. Pentru orice  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , avem:

$$\begin{aligned} (M(\alpha f + \beta g))(x) &= x(\alpha f + \beta g)(x) = \\ &= \alpha xf(x) + \beta xg(x) = (\alpha Mf + \beta Mg)(x), \forall x \in [a, b], \end{aligned}$$

deci  $M$  este liniar. Continuitatea:

$$\|Mf\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |xf(x)| \leq |b| \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}[a, b], \forall x \in [a, b],$$

deci  $M$  este continuu și în plus  $\|M\| \leq |b|$ .

Notând cu  $\mathbf{1}$  funcția constantă 1, atunci  $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$  și deci:

$$\|M\| \geq \|M\mathbf{1}\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |x| = |b|,$$

deci  $\|M\| = |b|$ .

- b. Demonstrăm egalitatea  $\sigma(M) = [a, b]$  prin dublă incluziune.

Prin definiție,  $\lambda \in \sigma(M)$  dacă și numai dacă operatorul  $\lambda I - M$  nu este inversabil (ceea ce este echivalent cu a fi bijectiv, conform teoremei lui Banach; a se vedea secțiunea teoretică a acestui capitol). Fie  $\lambda_0 \in [a, b]$ ; din egalitatea:

$$((\lambda_0 I - M)(f))(x) = (\lambda_0 - x)f(x), \forall f \in \mathcal{C}[a, b], \forall x \in [a, b]$$

rezultă că operatorul  $\lambda_0 I - M$  nu este surjectiv deoarece imaginea sa este:

$$\text{Im}(\lambda_0 I - M) = \{f \in \mathcal{C}[a, b] \mid f(\lambda_0) = 0\} \neq \mathcal{C}[a, b],$$

deci  $[a, b] \subseteq \sigma(M)$ . În locul incluziunii inverse  $\sigma(M) \subseteq [a, b]$  demonstrăm incluziunea echivalentă:  $C \setminus [a, b] \subseteq C \setminus \sigma(M)$ . Fie  $\lambda_0 \notin [a, b]$ ; atunci funcția

$$\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}, \varphi_0(x) = \frac{1}{\lambda_0 - x}$$

este corect definită și continuă, deci  $\|\varphi_0\|_\infty < \infty$ . Considerăm operatorul:

$$S : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathcal{C}[a, b], (Sf)(x) = \varphi_0(x)f(x) = \frac{1}{\lambda_0 - x}f(x), \forall x \in [a, b].$$

Se demonstrează fără dificultate că  $S$  este operator liniar. Continuitatea rezultă din inegalitatea:

$$\|Sf\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_0(x)f(x)| \leq \|\varphi_0\|_\infty \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}[a, b].$$

În concluzie, operatorul  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[a, b])$ ; în plus, au loc egalitățile:

$$(\lambda_0 I - M)Sf = (S(\lambda_0 I - M))f = \varphi_0 \frac{1}{\varphi_0} f = f, \forall f \in \mathcal{C}[a, b],$$

deci operatorul  $\lambda_0 I - M$  este inversabil și  $(\lambda_0 I - M)^{-1} = S$ , ceea ce demonstrează că  $\lambda_0 \notin \sigma(M)$ .

**c.** Pentru a demonstra că  $M$  nu are valori proprii, vom arăta că pentru orice  $\lambda \in [a, b]$ , operatorul  $\lambda I - M$  este injectiv. Fie  $\lambda_0 \in [a, b]$  și fie  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  astfel încât  $(\lambda_0 I - M)f = 0$ ; rezultă:

$$(\lambda_0 - x)f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

De aici rezultă

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \setminus \{\lambda_0\}.$$

Funcția  $f$  fiind continuă, rezultă și  $f(\lambda_0) = 0$ , deci  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ ; în concluzie,  $\lambda_0 I - M$  este injectiv.

### 53. Operatorul de înmulțire

Exemplul anterior se poate generaliza după cum urmează. Fie  $\phi \in \mathcal{C}[a, b]$  și fie operatorul (de înmulțire cu funcția  $\phi$ ):

$$M_\phi : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathcal{C}[a, b], M_\phi f = \phi f.$$

- a.** Să se arate că  $M_\phi$  este operator liniar și continuu și  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$ .
- b.** Spectrul lui  $M_\phi$  coincide cu imaginea funcției  $\phi$ :

$$\sigma(M_\phi) = \{\phi(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

**c.** Operatorul  $M_\phi$  are valori proprii dacă și numai dacă există intervale (nedegenerate)  $J \subseteq [a, b]$  astfel încât  $\phi(x) = c, \forall x \in J$ . În acest caz  $c$  este valoare proprie a lui  $M_\phi$ .

**Soluție**

**a.** Liniaritatea este imediată; din inegalitatea:

$$\|M_\phi f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\phi(x)f(x)| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_\infty,$$

rezultă continuitatea și  $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ . Inegalitatea inversă rezultă ca în exercițiul anterior.

**b.** Fie  $A = \{\phi(x) \mid x \in [a, b]\}$  imaginea lui  $\phi$ . Demonstrăm egalitatea  $\sigma(M_\phi) = A$  prin dublă incluziune. Dacă  $\lambda_0 \in A$ , atunci există  $x_0 \in [a, b]$  astfel încât  $\phi(x_0) = \lambda_0$ ; de aici rezultă că operatorul  $\lambda_0 I - M_\phi$  nu este surjectiv deoarece imaginea sa este:

$$\text{Im}(\lambda_0 I - M_\phi) = \{f \in \mathcal{C}[a, b] \mid f(x_0) = 0\} \neq \mathcal{C}[a, b].$$

Pentru a demonstra incluziunea inversă, fie  $\lambda_0 \notin A$ ; atunci funcția

$$\varphi_0 : [a, b] \mapsto \mathcal{C}, \varphi_0(x) = \frac{1}{\lambda_0 - \phi(x)}$$

este corect definită și continuă. Rezultă că operatorul  $\lambda_0 I - M_\phi$  este inversabil, inversul său fiind operatorul de înmulțire cu funcția  $\varphi_0$ :

$$(\lambda_0 I - M_\phi)^{-1} f = M_{\varphi_0} f = \varphi_0 f, \forall f \in \mathcal{C}[a, b].$$

Continuitatea operatorului  $M_{\varphi_0}$  se poate arăta direct, dar este și o consecință a teoremei lui Banach (a se vedea secțiunea teoretică).

**c.** Fie  $\lambda_0 \in \sigma(M_\phi) = A$  astfel încât există  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  cu proprietatea  $(\lambda_0 I - M_\phi)f = 0$ ; dacă funcția  $\phi$  nu este constantă pe nici un interval, atunci, din egalitatea  $(\lambda_0 - \phi(x))f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$  și din continuitatea lui  $f$  rezultă  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ , deci operatorul  $\lambda_0 I - M_\phi$  este injectiv, deci  $\lambda_0$  nu este valoare proprie pentru  $M_\phi$ . Să presupunem acum că există  $J \subseteq [a, b]$  astfel încât  $\phi(x) = c, \forall x \in J$ . Demonstrăm că  $c$  este valoare proprie a lui  $M_\phi$ ; pentru aceasta, considerăm o funcție neidentic nulă  $f_0 \in \mathcal{C}[a, b]$  astfel încât  $f_0(x) = 0, \forall x \in [a, b] \setminus J$ . Atunci  $f_0$  este vector propriu asociat valorii proprii  $c$ :

$$((cI - M_\phi)f_0)(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

Operatorul de înmulțire se poate defini și condiții mai generale. De exemplu, dacă  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime compactă și dacă  $\phi : D \mapsto \mathbb{C}$  este o funcție continuă, atunci, pe spațiul  $\mathcal{C}(D)$  al funcțiilor continue pe  $D$  se poate defini operatorul (de înmulțire cu  $\phi$ ):  $M_\phi f = \phi f$ . Se poate demonstra că proprietățile demonstrate mai sus sunt adevărate și în acest caz.

**54. Operatorul integral**

Fie  $K : [a, b] \times [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  o funcție continuă și fie operatorul integral (asociat nucleului  $K$ ) definit prin:

$$T_K : \mathcal{C}[a, b] \mapsto \mathcal{C}[a, b], (T_K(f))(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt.$$

Pe spațiul funcțiilor continue este considerată norma supremum.

- Să se demonstreze că  $T_K$  este operator liniar și continuu.
- Norma operatorului  $T_K$  este:

$$\| T_K \| = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt.$$

**Soluție**

- Pentru orice  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avem:

$$\begin{aligned} (T_K(\alpha f + \beta g))(s) &= \int_a^b K(s, t)(\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_a^b K(s, t)f(t) dt + \beta \int_a^b K(s, t)g(t) dt = \alpha(T_K f)(s) + \beta(T_K g)(s), \end{aligned}$$

$\forall s \in [a, b]$ , deci  $T_K$  este liniar.

Continuitatea operatorului  $T_K$  rezultă din inegalitatea:

$$\begin{aligned} \| T_K f \|_\infty &= \sup_{s \in [a, b]} \left| \int_a^b K(s, t)f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \| f \|_\infty \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt, \forall f \in \mathcal{C}[a, b]. \end{aligned}$$

- Din inegalitatea de mai sus rezultă și inegalitatea

$$\| T_K \| \leq \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt.$$

Demonstrăm acum inegalitatea inversă. Aplicația

$$[a, b] \ni s \mapsto \int_a^b |K(s, t)| dt \in \mathbb{R}$$

este continuă (definită pe un compact) și deci există  $s_0 \in [a, b]$  astfel încât:

$$\sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt = \int_a^b |K(s_0, t)| dt.$$



Notăm  $\phi(t) = K(s_0, t)$ ; evident,  $\phi \in \mathcal{C}[a, b]$ . Pe spațiul Banach  $\mathcal{C}[a, b]$  considerăm funcționala (ca în exercițiul 49.b)

$$J_\phi(f) = \int_a^b \phi(t)f(t) dt = \int_a^b K(s_0, t)f(t) dt.$$

Conform exercițiului 49,  $J_\phi$  este funcțională liniară și continuă pe  $\mathcal{C}[a, b]$  și

$$\|J_\phi\| = \int_a^b |\phi(t)| dt = \int_a^b |K(s_0, t)| dt.$$

În demonstrația egalității de mai sus s-a arătat (a se vedea soluția exercițiului 49.b) că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există o funcție  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  astfel încât  $\|g\|_\infty \leq 1$  și

$$J_\phi(g) \geq \|J_\phi\| - \varepsilon.$$

Deoarece  $\|g\| \leq 1$  avem:

$$\begin{aligned} \|T_K\| \geq \|T_K g\|_\infty &\geq (T_K g)(s_0) = \int_a^b K(s_0, t)g(t) dt = \\ &= J_\phi(g) \geq \|J_\phi\| - \varepsilon = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Deoarece  $\varepsilon > 0$  a fost ales arbitrar, rezultă:  $\|T_K\| = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)| dt$ .

### 55. Operatorul de convoluție

Fie două șiruri  $x, y : Z \mapsto C$ , cu proprietatea că pentru orice  $n \in Z$  seria  $\sum_{k \in Z} x(n-k)y(k)$  este convergentă. În acest caz se poate defini șirul

$$x \star y : Z \mapsto C, (x \star y)(n) = \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k),$$

numit convoluția (sau produsul de convoluție) șirurilor  $x$  și  $y$ .

- a. Să se demonstreze că pentru orice  $x, y \in \ell^1(Z)$ , există convoluția  $x \star y$ .
- b. Să se demonstreze că pentru orice  $x, y \in \ell^1(Z)$ , convoluția  $x \star y \in \ell^1(Z)$ , și în plus  $\|x \star y\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$
- c. Produsul de convoluție este comutativ și asociativ.
- d. Pentru orice  $m \in Z$ , fie șirul  $\sigma_m(n) = \delta_m^n$ , unde,  $\delta_m^n$  este simbolul lui Kronecker. Să se demonstreze egalitatea:

$$(\sigma_m \star x)(n) = x(n-m), \forall x \in \ell^1(Z), \forall m, n \in Z.$$

În particular,  $\sigma_0$  este element neutru pentru convoluție.

e. Fie  $\theta \in \ell^1(Z)$  un șir fixat și fie operatorul (de convoluție):

$$C_\theta : \ell^1(Z) \mapsto \ell^1(Z), C_\theta x = \theta \star x.$$

Să se demonstreze că operatorul  $C_\theta$  este liniar și continuu.

**Soluție**

a. Fie  $x, y \in \ell^1(Z)$  și fie  $n \in Z$ ; atunci:

$$\sum_{k \in Z} |x(n-k)y(k)| \leq \sum_{k \in Z} \left( |x(n-k)| \sum_{k \in Z} |y(k)| \right) = \|y\|_1 \|x\|_1.$$

b. Fie  $x, y \in \ell^1(Z)$ ; atunci:

$$\begin{aligned} \|x \star y\|_1 &= \sum_{n \in Z} |(x \star y)(n)| = \sum_{n \in Z} \left| \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n \in Z} \sum_{k \in Z} |x(n-k)y(k)| = \sum_{k \in Z} \left( |y(k)| \sum_{n \in Z} |x(n-k)| \right) = \\ &= \left( \sum_{k \in Z} |y(k)| \right) \left( \sum_{m \in Z} |x(m)| \right) = \|x\|_1 \|y\|_1, \end{aligned}$$

comutarea sumelor (în  $k$  și  $n$ ) fiind corectă datorită absolut convergenței ambelor serii.

c. Pentru orice  $x, y \in \ell^1(Z)$  și  $n \in Z$ , avem:

$$(x \star y)(n) = \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k) = \sum_{m \in Z} x(m)y(n-m) = (y \star x)(n).$$

Analog se demonstrează și asociativitatea.

d. Pentru orice  $x \in \ell^1(Z)$  și  $m, n \in Z$ , avem:

$$(\sigma_m \star x)(n) = (x \star \sigma_m)(n) = \sum_{k \in Z} x(n-k)\sigma_m(k) = x(n-m).$$

e. Lăsăm liniaritatea ca exercițiu. Fie  $\theta \in \ell^1(Z)$ , fixat; atunci, pentru orice  $x \in \ell^1(Z)$ , aplicând inegalitatea de la punctul b, avem:

$$\|C_\theta x\|_1 = \|\theta \star x\|_1 \leq \|\theta\|_1 \|x\|_1,$$

ceea ce încheie demonstrația.

**56.** Fie  $(X, \| \cdot \|)$  un spațiu Banach și fie  $T \in \mathcal{L}(X)$  un operator astfel încât  $\| T \| < 1$ . Să se demonstreze că  $I - T$  este operator inversabil și

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n.$$

În plus, are loc inegalitatea:

$$\| (I - T)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| T \|}.$$

**Soluție**

Spațiul  $\mathcal{L}(X)$  este complet, deci orice serie (de operatori) absolut convergentă este și convergentă. Fie seria  $\sum_{n \geq 0} T^n$ ; seria converge absolut:

$$\sum_{n \geq 0} \| T^n \| \leq \sum_{n \geq 0} \| T \|^n = \frac{1}{1 - \| T \|},$$

deci converge în spațiul  $\mathcal{L}(X)$ . Fie  $S \in \mathcal{L}(X)$  suma acestei serii și fie

$S_n = \sum_{k=0}^n T^k$  șirul sumelor parțiale asociat; atunci:

$$(I - T)S_n = (I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^n) = I - T^{n+1}.$$

Dar șirul  $T^{n+1}$  converge la  $O$  în spațiul  $\mathcal{L}(X)$ :

$$\| T^{n+1} \| \leq \| T \|^{n+1} \rightarrow 0, \text{ când } n \rightarrow \infty,$$

deci  $(I - T)S = I$ . Analog se arată și egalitatea  $S(I - T) = I$ , deci într-adevăr  $S = (I - T)^{-1}$ . În plus, dintr-un calcul făcut mai sus, rezultă:

$$\| (I - T)^{-1} \| = \left\| \sum_{n \geq 0} T^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \| T \|},$$

ceea ce încheie demonstrația.



## Capitolul 3

# Șiruri și serii de funcții Funcții elementare

### 3.1 Noțiuni teoretice

#### Convergență punctuală și convergență uniformă

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric, fie  $f_n : X \mapsto R(C)$  un șir de funcții și fie  $f : X \mapsto R(C)$  o funcție.

Șirul  $f_n$  converge punctual (sau simplu) la  $f$  dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Se spune că  $f$  este limita punctuală a șirului  $f_n$ .

Șirul  $f_n$  este uniform convergent la  $f$  dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in X.$$

Într-o formulare echivalentă, șirul  $f_n$  converge uniform la  $f$  dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Evident, convergența uniformă implică convergența punctuală, reciproca fiind falsă.

Dacă  $f_n$  sunt funcții mărginite, atunci convergența uniformă coincide cu convergența în spațiul metric al funcțiilor mărginite,  $(\mathcal{M}, d_\infty)$ .

Dacă funcțiile  $f_n$  sunt continue, iar șirul  $f_n$  converge simplu la  $f$ , nu rezultă, în general, continuitatea funcției  $f$ . De exemplu, șirul de funcții continue

$$f_n : [0, 1] \mapsto R, f_n(x) = x^n$$

converge punctual la funcția discontinuă  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$

Are loc următorul rezultat:

**Transfer de continuitate**

Dacă  $f_n$  sunt funcții continue și șirul  $f_n$  converge uniform la  $f$ , atunci funcția  $f$  este continuă.

**Integrare termen cu termen**

Fie  $f_n, f : [a, b] \mapsto R$  funcții continue.

Dacă  $f_n$  converge uniform la  $f$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Să considerăm șirul  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ ,  $x \in R$ . Șirul  $f_n$  converge uniform la funcția constantă 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Funcțiile  $f_n$  sunt derivabile, dar șirul derivatelor  $f'_n(x) = \cos(nx)$  nu converge (nici punctual). Rezultatul următor dă condiții suficiente în care șirul derivatelor converge:

**Derivare termen cu termen**

Presupunem că funcțiile  $f_n$  sunt derivabile,  $\forall n \in N$ . Dacă șirul  $f_n$  converge punctual la  $f$  și dacă există  $g : [a, b] \mapsto R$  astfel încât  $f'_n$  converge uniform la  $g$ , atunci  $f$  este derivabilă și  $f' = g$ .

**Serii de funcții**

Fie  $u_n : X \mapsto R(C)$  un șir de funcții și fie  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$  șirul sumelor parțiale.

Se spune că seria  $\sum_n u_n$  este punctual (simplu) convergentă dacă  $s_n$  este punctual convergent. Seria este uniform convergentă dacă  $s_n$  converge uniform. Suma seriei este limita (punctuală sau uniformă) a șirului sumelor parțiale.

**Criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă**

Dacă există un șir cu termeni pozitivi  $a_n$  astfel încât  $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X$  și seria  $\sum_n a_n$  converge, atunci seria  $\sum_n u_n$  converge uniform.

**Transfer de continuitate**

Dacă  $u_n$  sunt funcții continue și seria  $\sum_n u_n$  converge uniform la  $f$ , atunci

funcția  $f$  este continuă.

### Integrare și derivare termen cu termen

Se spune că o serie de funcții  $\sum_n f_n$  are proprietatea de integrare termen cu

termen pe intervalul  $[a, b]$  dacă  $\int_a^b \left( \sum_n f_n(x) \right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx$ .

Se spune că o serie de funcții  $\sum_n f_n$  are proprietatea de derivare termen

cu termen pe mulțimea  $D$  dacă  $\left( \sum_n f_n(x) \right)' = \sum_n f_n'(x)$ ,  $\forall x \in D$ .

Are loc următorul rezultat:

Fie  $u_n : [a, b] \mapsto R$  un șir de funcții continue.

**a.** Dacă seria  $\sum_n u_n$  converge uniform la  $f$ , atunci  $f$  este integrabilă și

$$\int_a^b \sum_n u_n(x) dx = \sum_n \int_a^b u_n(x) dx.$$

**b.** Presupunem că funcțiile  $u_n$  sunt derivabile. Dacă seria  $\sum_n u_n$  converge

punctual la  $f$  și dacă există  $g : [a, b] \mapsto R$  astfel încât  $\sum_n u_n'$  converge uni-

form la  $g$ , atunci  $f$  este derivabilă și  $f' = g$ .

Trebuie menționat că ipotezele teoremei de mai sus sunt condiții suficiente (nu și necesare) pentru ca o serie să se poată integra (respectiv deriva) termen cu termen.

### Formula lui Taylor

Fie  $I \subseteq R$  un interval deschis și fie  $f : I \mapsto R$  o funcție de clasă  $C^m$  pe  $I$ . Pentru orice  $a \in I$  definim polinomul Taylor de gradul  $n \leq m$  asociat funcției  $f$  în punctul  $a$ :

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Restul de ordin  $n$  este, prin definiție,

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întâi (respectiv de gradul al doilea) se numesc aproximarea liniară (respectiv pătratică) ale funcției în jurul punctului  $a$ .

### Teoremă (Formula lui Taylor cu restul Lagrange)

Fie  $f : I \mapsto R$  de clasă  $C^{n+1}$  și  $a \in I$ . Atunci, pentru orice  $x \in I$ , există

$\xi \in (a, x)$  (sau  $(x, a)$ ) astfel încât

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

### Observații

1. Restul de ordin  $n$  poate fi scris sub forma Peano :

$\exists \omega : I \mapsto R$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0$  și

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x).$$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ .

3. Restul de ordin  $n$  poate fi scris sub forma integrală:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

### Seria Taylor

Fie  $I \subseteq R$  un interval deschis și fie  $f : I \mapsto R$  o funcție de clasă  $C^\infty$  pe  $I$ .

Pentru orice  $x_0 \in I$  definim seria Taylor asociată funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

### Observații

1. Seria Taylor asociată funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este o serie de puteri.

2. Seria Taylor asociată lui  $f$  în  $x_0 = 0$  se mai numește și serie Mc Laurin.

### Teorema de reprezentare a funcțiilor prin serii Taylor

Fie  $a < b$  și fie  $f \in C^\infty([a, b])$  astfel încât există  $M > 0$  cu proprietatea că

$\forall n \in N, \forall x \in [a, b], |f^{(n)}(x)| \leq M$ . Atunci pentru orice  $x_0 \in (a, b)$ , seria

Taylor a lui  $f$  în jurul lui  $x_0$  este uniform convergentă pe  $[a, b]$  și suma ei

este funcția  $f$ , adică  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \forall x \in [a, b]$ .

### Serii de puteri

Fie  $(a_n)_{n \in N}$  un șir de numere complexe și  $a \in C$ . Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  se numește seria de puteri centrată în  $a$  definită de șirul  $a_n$ .

### Formula razei de convergență

Fie seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  și fie  $\alpha = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ .



Raza de convergență a seriei date, (notată  $R$ ), se definește astfel:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \alpha = \infty \\ \infty & \text{dacă } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{dacă } \alpha \in (0, \infty) \end{cases}$$

### Teorema lui Abel

Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  o serie de puteri și fie  $R$  raza sa de convergență.

1. Dacă  $R = 0$ , atunci seria converge numai pentru  $z = a$ .
2. Dacă  $R = \infty$ , atunci seria converge absolut pentru orice  $z \in C$ .
3. Dacă  $R \in (0, \infty)$ , atunci seria este absolut convergentă pentru  $|z-a| < R$  și divergentă pentru  $|z-a| > R$ .
4. Seria este uniform convergentă pe orice disc închis  $|z-a| \leq r$ ,  $\forall r \in (0, R)$ .

### Derivare și integrare termen cu termen

Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  o serie de puteri și fie  $S(z)$  suma sa.

1. Seria derivatelor  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-a)^{n-1}$  are aceeași rază de convergență cu seria inițială și suma sa este  $S'(z)$ .
2. Seria primitivelor  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$  are aceeași rază de convergență cu seria inițială și suma sa este o primitivă a lui  $S$ .

### Funcții elementare

1.  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$ ,  $\forall z \in C$ .
2.  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ,  $\forall |z| < 1$ .
3.  $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ ,  $\forall |z| < 1$ .
4.  $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}$ ,  $\forall z \in C$ .
5.  $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}$ ,  $\forall z \in C$ .
6.  $(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$ ,  $\forall |z| < 1$ ,  $\alpha \in R$ .

### 3.2 Șiruri și serii de funcții

Să se studieze convergența punctuală și uniformă a următoarelor șiruri de funcții (exercițiile 1-9):

$$1. u_n : (0, 1) \mapsto R ; u_n(x) = \frac{1}{nx + 1}, n \geq 0.$$

**Soluție**

Fie  $x > 0$ , fixat. Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx + 1} = 0$ , deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = 0$ .

Evident,  $\sup_{x \in (0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{nx + 1} \right| = 1$  și deci  $u_n$  nu converge uniform la  $f$ .

$$2. u_n : [0, 1] \mapsto R ; u_n(x) = nx(1 - x)^n, n \geq 0.$$

**Soluție**

Pentru orice  $x \in (0, 1)$ , fixat, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1 - x)^n = 0,$$

și deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = 0$ .

Studiem acum convergența uniformă:

$$\sup_{x \in (0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} |nx(1 - x)^n| = u_n \left( \frac{1}{n + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{e},$$

deci  $u_n$  nu este uniform convergent.

$$3. u_n : [0, 1] \mapsto R ; u_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0.$$

**Soluție**

Pentru orice  $x \in [0, 1]$  fixat, rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{2n}) = 0,$$

deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = 0$ .

Studiem convergența uniformă:

$$\sup_{x \in (0,1)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} |x^n - x^{2n}| = u_n \left( \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right) = \frac{1}{4},$$

deci  $u_n$  nu converge uniform.

$$4. u_n : R \mapsto R ; u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n > 0.$$

**Soluție**

Fie  $x \in R$ , fixat; atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|,$$

deci  $u_n$  converge punctual  $f(x) = |x|, \forall x \in R$ .

Studiem convergența uniformă:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in R} |u_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in R} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right| = \\ &= \sup_{x \in R} \frac{1}{n^2 \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \right)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

deci  $u_n$  converge uniform la  $f$ . Se observă că pentru orice  $n \in N$ ,  $u_n$  este funcție derivabilă, dar  $f$  nu este derivabilă.

$$5. u_n : (-\infty, 0) \mapsto R, u_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}, n \geq 0.$$

**Soluție**

Fie  $x < 0$ , fixat; atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} = -1,$$

deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = -1, \forall x \in (-\infty, 0)$ .

Convergența uniformă:

$$\sup_{x \in (-\infty, 0)} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-\infty, 0)} \left| \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} + 1 \right| = 1,$$

deci  $u_n$  nu converge uniform.

$$6. u_n : R \mapsto R, u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}, n > 0.$$

**Soluție**

Fie  $x \in R$ , fixat; atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctan} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2} = 0,$$

deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = 0, \forall x \in R$ . Convergența uniformă:

$$\sup_{x \in R} |u_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in R} \left| \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2} \right|.$$

Funcțiile  $u_n$  sunt impare deci este suficient să găsim supremumul pe intervalul  $(0, \infty)$ .

$$u'_n(x) = \left( \operatorname{arctan} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2} \right)' = \frac{1 - n(n+1)x^2}{x^2 + (1 + n(n+1)x^2)^2},$$

deci supremumul este atins în  $x = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ; în final rezultă că  $u_n$  este uniform convergent.

$$7. u_n : (1, \infty) \mapsto R, u_n(x) = \sqrt{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}, n > 0.$$

**Soluție**

Folosim inegalitatea  $\sin x \leq x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  și obținem :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(x) &\leq \frac{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2 + 1) \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \\ &< \frac{(n^2 + 1) \frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

deci șirul  $u_n$  este uniform convergent la 0 .

$$8. u_n(x) = x^n e^{-nx}, x \geq 0.$$

**Soluție**

Fie  $x \geq 0$ , fixat. Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$ , deci șirul converge punctual la funcția  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ . Studiind variația funcției  $u_n$ , rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |u_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0,$$

deci șirul este uniform convergent.

$$9. u_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}, x \in [0, 1].$$

**Soluție**

Fie  $x \in [0, 1]$ , fixat. Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = x$ , deci șirul  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$ . Pentru a studia convergența uniformă, calculăm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |u_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} \frac{x + x^2}{1 + n + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + n} = 0,$$

deci șirul converge uniform; faptul că supremumul de mai sus se atinge în  $x = 1$  rezultă din studiul variației funcției  $x \mapsto \frac{x + x^2}{1 + n + x}$  pe  $[0, 1]$  (funcția este crescătoare).

**10.** Fie șirul  $u_n : R \mapsto R$ ,  $u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ,  $n > 0$ .

Să se studieze convergența șirurilor  $u_n$  și  $u'_n$ .

**Soluție**

Din inegalitatea

$$\left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

rezultă că șirul  $u_n$  converge uniform la 0.

Șirul derivatelor nu este punctual convergent:

$$(u_n(x))' = \sqrt{n} \cos nx.$$

**11.** Fie șirul  $u_n : R \mapsto R$ ,  $u_n(x) = x + \frac{1}{n}$ .

Să se studieze convergența șirurilor  $u_n$  și  $u_n^2$ .

**Soluție**

Șirul  $u_n$  converge uniform la  $f(x) = x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |u_n(x) - x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Șirul  $u_n^2$  converge punctual la  $f^2(x) = x^2$ , dar nu converge uniform:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |u_n^2(x) - x^2| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = \infty.$$

**12.** Fie șirul  $u_n : [0, \infty) \mapsto R$ ,  $u_n(x) = \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x + n}$ ,  $n \in N$  și fie

$A_n = \int_0^1 u_n(x) dx$ ,  $\forall n \in N^*$ . Să se studieze convergența șirului  $u_n$  și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**Soluție**

Fie  $x \geq 0$ , fixat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x} + xe^{-n}}{x + n} = e^{-x},$$

deci  $u_n$  converge punctual la  $f(x) = e^{-x}$ ,  $\forall x \geq 0$ .

Evaluăm în continuare

$$g_n(x) = |u_n(x) - f(x)| = \left( 1 - \frac{n}{n+x} \right) |e^{-n} - e^{-x}|, \forall x > 0, \forall n \in N^*.$$

Dacă  $x \in (n, \infty)$  atunci:

$$e^{-x} < e^{-n} \Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| < e^{-n} \Rightarrow g_n(x) < e^{-n} \rightarrow 0.$$

Dacă  $x \in [0, n]$  atunci

$$\begin{aligned} e^{-x} \geq e^{-n} &\Rightarrow |e^{-n} - e^{-x}| \leq |e^{-n}| + |e^{-x}| = \\ &= e^{-n} + e^{-x} \leq 2e^{-x}, \end{aligned}$$

deci

$$g(x) \leq \frac{2xe^{-x}}{x+n}, \forall x \in [0, n].$$

Studiem acum variația funcției  $[0, 1] \ni x \mapsto \frac{2xe^{-x}}{x+n}$ .

$$\left( \frac{2xe^{-x}}{x+n} \right)' = 2 \frac{e^{-x}}{(x+n)^2} \cdot (-x^2 - nx + n),$$

deci funcția  $\frac{2xe^{-x}}{x+n}$  este crescătoare pe  $(0, \frac{\sqrt{n^2+4n-n}}{2})$  și descrescătoare pe  $(\frac{\sqrt{n^2+4n-n}}{2}, n)$ , deci

$$g_n(x) \leq \frac{8n}{(\sqrt{n^2+4n}+n)^2} \cdot e^{-\frac{2n}{\sqrt{n^2+4n}+n}} \rightarrow 0.$$

Deci  $u_n$  converge uniform la  $f$ .

Aplicând transferul de integrabilitate obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{e-1}{e}.$$

**13.** Fie  $u_n : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $u_n(x) = e^{-nx}$ . Să se studieze convergența șirurilor  $u_n$  și  $u'_n$ .

**Soluție**

Șirurile  $u_n$  și  $u'_n$  converg simplu la funcția constantă zero, dar nu converg uniform.

**14.** Fie șirul  $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}$ , definit prin relația de recurență:

$$f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = \sin(f_{n-1}(x)).$$

Să se studieze convergența punctuală și uniformă.

**Soluție**

Fie  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  fixat. Șirul  $f_n(x)$  este descrescător:

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leq f_n(x), \forall n \in N$$

și mărginit:

$$0 \leq f_n(x) \leq x, \forall n \in N.$$

Deci șirul  $f_n$  este punctual convergent.

Fie  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto R$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Trecând la limită în relația de recurență, se obține:  $f(x) = \sin(f(x))$ ,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Se demonstrează simplu că singura soluție a ecuației  $t = \sin t$  este  $t = 0$ , deci funcția  $f$  este constantă zero. Studiem acum convergența uniformă; pentru aceasta, trebuie calculat  $\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)|$ . Demonstrăm în continuare că funcția  $f_n$

este crescătoare pentru orice  $n \in N$  și deci supremumul de mai sus este  $f_n(\frac{\pi}{2})$ . Șirul  $f_n(\frac{\pi}{2})$  converge la zero (deoarece s-a demonstrat mai sus că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) și deci  $f_n$  este uniform convergent.

Demonstrația faptului că  $f_n$  sunt funcții crescătoare se face prin inducție:  $f_1$  este crescătoare; presupunem că  $f_k$  sunt crescătoare pentru orice  $1 \leq k \leq n$  și demonstrăm că  $f_{n+1}$  este crescătoare. Fie  $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$ ; atunci:

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leq \sin(f_n(y)) = f_{n+1}(y),$$

deci  $f_{n+1}$  este funcție crescătoare, ceea ce încheie demonstrația.

**15.** Fie șirul  $f_n : [0, \infty) \mapsto R$ ,  $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$ .

**a.** Să se studieze convergența punctuală.

**b.** Să se studieze convergența uniformă pe  $[0, 1]$ .

**c.** Să se studieze convergența uniformă pe  $[1, \infty)$ .

**d.** Să se studieze convergența punctuală a șirului derivatelor (acolo unde există).

**e.** Să se studieze convergența uniformă a șirului derivatelor pe  $[0, 1]$ .

**Soluție**

**a.** Fie  $x \geq 0$ , fixat; atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1+\frac{1}{n}} = x,$$

deci  $f_n$  converge punctual la  $f(x) = x$ .

**b.** Pentru a studia convergența uniformă pe  $[0, 1]$ , calculăm:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \left( x - x^{1+\frac{1}{n}} \right).$$

Studiind variația funcției de mai sus, rezultă că supremumul se atinge în  $x = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ; rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0,$$

deci șirul  $f_n$  converge uniform pe  $[0, 1]$  la funcția  $f$ .

c. Șirul nu converge uniform la  $f$  pe  $[1, \infty)$ . Procedând ca mai sus, obținem:

$$\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} x \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \infty.$$

d. Evident,  $f'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}}$ . Pentru orice  $x > 0$ , fixat, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} = 1 = f'(x).$$

În  $x = 0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$ . Deci șirul derivatelor converge punctual pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

e. Șirul derivatelor nu converge uniform pe  $[0, 1]$ :  $\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \geq 1$ . Un alt argument este faptul că funcția limită (a șirului derivatelor) nu este continuă.

**Să se studieze convergența următoarelor serii de funcții și să se decidă dacă se pot deriva termen cu termen (exercițiile 16-22):**

$$16. \sum_n n^{-x}, x \in R.$$

**Soluție**

Seria converge punctual dacă și numai dacă  $x \in (1, \infty)$  (se compară cu seria lui Riemann).

Fie  $r > 1$ ; pentru orice  $x \geq r$ , avem  $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^r}$ . Seria  $\sum_n \frac{1}{n^r}$  este convergentă și deci, conform criteriului lui Weierstrass, seria converge uniform pe intervalul  $[r, \infty)$ .

Seria derivatelor:  $\sum_{n \geq 1} (n^{-x})' = - \sum_{n \geq 1} n^{-x} \ln n$  converge uniform pe orice interval  $[r, \infty)$ ; se aplică criteriul lui Weierstrass:

$$\sum_{n \geq 1} n^{-x} \ln n \leq \sum_{n \geq 1} n^{-r} \ln n, \forall x \geq r.$$

Ultima serie (numerică) este convergentă.



$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, x \in R.$$

**Soluție**

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \forall x \in R.$$

Seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$  este convergentă și din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{2^n}$$

este uniform convergentă pe  $R$ .

Seria derivatelor  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{\sin nx}{2^n} \right)' = \sum_{n \geq 1} \frac{n \cos nx}{2^n}$  converge uniform pe  $R$  (criteriul lui Weierstrass), deci seria se poate deriva termen cu termen.

$$18. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2}, \text{ unde } \varphi : [a, b] \mapsto R \text{ este o funcție de clasă } \mathcal{C}^1$$

arbitrară.

**Soluție**

Seria are termeni pozitivi și  $\frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă, deci  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\varphi(x))^2}$  este uniform convergentă pe  $[a, b]$ .

Seria derivatelor  $\sum_{n \geq 1} \frac{-2\varphi(x)\varphi'(x)}{(n^2 + (\varphi(x))^2)^2}$  este uniform convergentă pe  $[a, b]$ , deci seria se poate deriva termen cu termen.

$$19. \sum_{n \geq 1} \frac{(x+n)^2}{n^4}; x \in [a, b], 0 < a < b.$$

**Soluție**

Din inegalitățile  $0 < a < b$  și  $a \leq x \leq b$  rezultă  $(x+n)^2 \leq (b+n)^2$  și deci

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(x+n)^2}{n^4} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{(b+n)^2}{n^4}.$$

Aplicând criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria este uniform convergentă pe  $[a, b]$ .

Seria derivatelor converge uniform pe  $[a, b]$ , deci seria se poate deriva termen cu termen.

$$20. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}; x > 0.$$

**Soluție**

Aplicând inegalitatea  $\ln(1 + x) \leq x$  obținem

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Ultima serie este convergentă dacă  $\frac{1}{x} \in (-1, 1)$  (deci  $x \in (1, \infty)$ ) și divergentă în rest. Deci seria inițială este simplu convergentă pentru  $x \in (1, \infty)$ . Seria converge uniform pe orice interval  $[\alpha, \infty)$ ,  $\alpha > 1$ .

Dacă  $x \in (0, 1]$ , atunci din inegalitatea:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n} \geq \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + nx)}{n},$$

rezultă că seria este divergentă, deoarece ultima serie este divergentă (criteriul necesar). În concluzie, seria dată converge dacă și numai dacă  $x > 1$ . Seria derivatelor este:

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{(1 + nx)x^n} - \frac{\ln(1 + nx)}{x^{n+1}} \right).$$

Fie  $r > 1$ ; din inegalitățile:

$$\left| \frac{1}{(1 + nx)x^n} \right| \leq \frac{1}{(1 + nr)r^n}, \forall x \in [r, \infty),$$

$$\left| \frac{\ln(1 + nx)}{(1 + nx)x^{n+1}} \right| \leq \frac{n}{x^n} \leq \frac{n}{r^n}, \forall x \in [r, \infty),$$

rezultă că seria derivatelor converge uniform pe orice interval  $[r, \infty)$ ,  $r > 1$ .

$$21. \sum_{n \geq 0} x^n(1 - x), x \geq 0.$$

**Soluție**

Șirul sumelor parțiale este

$$s_n(x) = 1 - x^{n+1}.$$

Rezultă că seria converge simplu pentru orice  $x \in [0, 1]$ .

Suma seriei este

$$s : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, s(x) = 1, \forall x \in [0, 1) \text{ și } s(1) = 0.$$

Seria nu converge uniform pe  $[0, 1]$  (altfel suma seriei ar fi continuă), dar converge uniform pe orice interval  $[0, \alpha]$ ,  $\alpha < 1$ .

Seria derivatelor  $\sum_{n \geq 0} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)$  are șirul sumelor parțiale

$$s'_n(x) = -(n+1)x^n$$

care converge uniform pe orice interval compact  $[0, r]$ ,  $\forall r < 1$ .

**22.**  $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ ,  $x > 0$ .

**Soluție**

Șirul sumelor parțiale este  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-kx} = \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$ . Seria converge

punctual la funcția  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$  pentru orice  $x > 0$ ; seria nu converge uniform pe  $(0, \infty)$ :

$$\sup_{x > 0} \left| \sum_{k=0}^n e^{-kx} - f(x) \right| = \sup_{x > 0} \left| \frac{-e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \infty.$$

Seria derivatelor  $\sum_{n \geq 0} (-ne^{-nx})$  are șirul sumelor parțiale

$$s'_n(x) = \left( \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right)' = \frac{(n+1)e^{-(n+1)x} - ne^{-(n+2)x} - e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Pentru orice  $x > 0$  fixat avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x) = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2},$$

deci seria derivatelor converge punctual la derivata sumei. Convergența nu este uniformă pe  $(0, \infty)$ , dar seria derivatelor converge uniform pe orice interval compact  $[r, \infty)$   $r > 0$  (se poate face un raționament asemănător cu cel pentru seria inițială).

**23.** Să se demonstreze că funcția  $f : R \mapsto R$ ,  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$  este

continuă. Se poate deriva seria termen cu termen ?

**Soluție**

Seria este uniform convergentă (se aplică criteriul lui Weierstrass):

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)},$$

ultima serie fiind convergentă. Seria derivatelor  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n+1}$  nu converge punctual, deci seria nu se poate deriva termen cu termen.

**24.** Fie seria de funcții  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ ,  $x \in R$ .

- Să se studieze convergența punctuală pentru orice  $x \in R$  și convergența uniformă pe orice interval  $[a, b]$ . Este seria uniform convergentă pe  $R$ ?
- Să se studieze absolut convergența pentru orice  $x \in R$ .
- Să se studieze continuitatea sumei seriei (acolo unde ea există).
- Se poate deriva seria termen cu termen ?

**Soluție**

- Fie  $x \in R$ ; seriile numerice  $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$  și  $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$  sunt ambele convergente, deci seria dată este punctual convergentă pentru orice  $x \in R$ .

Studiem acum convergența uniformă pe intervalul  $[a, b]$ . Seria  $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$  este uniform convergentă pe  $[a, b]$ ; pentru aceasta, aplicăm criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă pentru serii:

$$\left| (-1)^n \frac{x^2}{n^2} \right| \leq \frac{b^2}{n^2}, \forall x \in [a, b],$$

iar seria numerică  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  este convergentă.

Seria nu este uniform convergentă pe  $R$ ; pentru aceasta, fie  $a$  suma seriei  $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$  și  $b$  suma seriei  $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ . Evident, seria dată converge punctual

la funcția  $f(x) = ax^2 + b$ . Fie  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^2 + k}{k^2}$ . Calculăm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} |f(x) - s_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} x^2 \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} - a \right| = \infty,$$

deci seria nu converge uniform pe  $R$  la  $f$ .

- Seria nu converge absolut pentru nici un  $x \in R$  deoarece seria  $\sum_n \frac{x^2 + n}{n^2}$  este divergentă (se poate compara cu seria armonică).
- Evident, funcția  $f$  (suma seriei) este continuă pe  $R$  (deși seria nu converge uniform pe  $R$ ).

d. Seria nu verifică ipotezele teoremei de derivare termen pe termen pe  $R$ : seria dată trebuie să convergă punctual, iar seria derivatelor să convergă uniform; prima condiție a fost verificată. Seria derivatelor este  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2x}{n^2}$ , serie care nu este uniform convergentă pe  $R$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} \left| 2x \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} - 2ax \right| = \infty.$$

Menționăm totuși că seria derivatelor converge uniform pe orice compact din  $R$ . Seria dată se poate deriva termen cu termen, egalitatea

$$\left( x^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \right)' = 2x \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \forall x \in R$$

fiind evident adevărată.

**25.** Fie seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n + x}{n^2 + 1}$ .

- Pentru ce valori ale lui  $x \in R$  seria converge ?
- Să se studieze convergența uniformă.
- Se poate deriva seria termen cu termen ?

**Soluție**

- Fie  $x \in (-1, 1)$ , fixat. Descompunem seria:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n + x}{n^2 + 1} = x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1} + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 1} x^n.$$

Prima serie este convergentă pentru orice  $x \in R$ . A doua serie converge absolut dacă  $x \in (-1, 1)$ ; pentru demonstrație se poate aplica criteriul raportului:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}}{\frac{n}{n^2+1}} \right| = |x| < 1.$$

Dacă  $x = -1$ , seria converge (cele două serii de mai sus sunt convergente) dar nu converge absolut.

Dacă  $x = 1$  seria este divergentă (se poate compara cu seria armonică).

Dacă  $|x| > 1$  seria diverge (se poate aplica criteriul necesar).

În concluzie, seria converge dacă și numai dacă  $x \in [-1, 1)$ .

b. Aplicând criteriul lui Weierstrass, seria converge absolut și uniform pe orice compact  $[-r, r] \subset (-1, 1)$ :

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{nx^n + x}{n^2 + 1} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{nr^n + r}{n^2 + 1}, \forall |x| \leq r,$$

iar ultima serie (numerică) este convergentă.

c. Seria derivatelor este:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{nx^n + x}{n^2 + 1} \right)' &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{n^2}{n^2 + 1} x^{n-1} + \frac{1}{n^2 + 1} \right) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1} + \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n^2 + 1} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Seria derivatelor converge uniform pe orice interval  $[-r, r] \subset (-1, 1)$ , deci seria se poate deriva termen cu termen.

**26.** Să se stabilească natura seriei  $\sum_{n \geq 1} (f_n - f_{n-1})$  dacă :

a  $f_n : [0, 1] \mapsto R$  ;  $f_n(x) = nx(1-x)^n, \forall n \in N$ .

b.  $f_n : (0, 1] \mapsto R$ ,  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}, \forall n \in N$ .

**Soluție**

a. Calculăm șirul sumelor parțiale

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x), \forall x \in [0, 1].$$

Folosind exercițiul **2** din acest capitol rezultă că seria este simplu convergentă (la 0) dar nu este uniform convergentă.

b. Calculăm șirul sumelor parțiale:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} - \frac{1}{2}.$$

Rezultă că seria converge punctual la funcția  $S(x) = \frac{1}{2}$ . Din evaluarea:

$$\sup_{x \in (0,1]} \left| S_n(x) - \frac{1}{2} \right| = \sup_{x \in (0,1]} \left| \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} - 1 \right| = \sup_{x \in (0,1]} \frac{1}{1 + e^{nx}} = \frac{1}{2},$$

rezultă că seria nu este uniform convergentă .

**27.** Fie  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  cercul unitate și fie  $\mathcal{C}(D_1)$  spațiul Banach al funcțiilor continue pe  $D_1$  cu norma supremum. Fie, de asemenea,  $\ell^1(\mathbb{Z})$  spațiul Banach al șirurilor absolut sumabile cu norma  $\| \cdot \|_1$ , (a se vedea secțiunea teoretică a capitolului 2).

**a.** Să se demonstreze că pentru orice  $z \in D_1$  și pentru orice șir  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , seria (de numere complexe)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$  este absolut convergentă.

**b.** Pentru orice  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , notăm cu  $\mathcal{Z}x$  funcția (corect definită, datorită punctului a):

$$\mathcal{Z}x : D_1 \mapsto \mathbb{C}, (\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n}.$$

Funcția  $\mathcal{Z}x$  se numește transformata  $\mathcal{Z}$  ("zet") a șirului  $x$ . Să se demonstreze că  $\mathcal{Z}x$  este funcție continuă.

**c.** Să se demonstreze că aplicația

$$\mathcal{Z} : \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto \mathcal{C}(D_1), (\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

este liniară și continuă.

**d.** Să se demonstreze că pentru orice șiruri  $x, y \in \ell^1(\mathbb{Z})$  are loc egalitatea:

$$\mathcal{Z}(x \star y) = (\mathcal{Z}x)(\mathcal{Z}y),$$

unde,  $x \star y$  este convoluția șirurilor  $x$  și  $y$ , (cf. exercițiului 55, cap. 2).

**e.** Fie  $\theta \in \ell^1(\mathbb{Z})$  un șir fixat și fie  $M_{\mathcal{Z}\theta}$  operatorul de înmulțire cu funcția  $\mathcal{Z}\theta$  (a se vedea exercițiului 53 din capitolul 2):

$$M_{\mathcal{Z}\theta} : \mathcal{C}(D_1) \mapsto \mathcal{C}(D_1), M_{\mathcal{Z}\theta}f = (\mathcal{Z}\theta)f.$$

Fie, de asemenea, operatorul de convoluție cu  $\theta$  (a se vedea exercițiul 55 din capitolul 2):

$$C_\theta : \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto \ell^1(\mathbb{Z}), C_\theta x = \theta \star x.$$

Să se demonstreze relația:

$$\mathcal{Z}C_\theta x = M_{\mathcal{Z}\theta}\mathcal{Z}x, \forall x \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

### Soluție

**a.** Fie  $z \in D_1$  și fie  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ; atunci:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)z^{-n}| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| = \|x\|_1 < \infty.$$

**b.** Fie  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ; pentru a demonstra că funcția  $\mathcal{Z}x$  este continuă pe  $D_1$  este suficient să demonstrăm că seria  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$  este uniform convergentă pe  $D_1$ . Pentru aceasta aplicăm criteriul lui Weierstrass:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)z^{-n}| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|,$$

ultima serie fiind o serie numerică absolut convergentă.

**c.** Liniaritatea o propunem ca exercițiu; pentru orice  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , avem:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}x\|_\infty &= \sup_{z \in D_1} |(\mathcal{Z}x)(z)| = \sup_{z \in D_1} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n} \right| \leq \\ &\leq \sup_{z \in D_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| |z^{-n}| = \|x\|_1, \end{aligned}$$

ceea ce arată că  $\mathcal{Z}$  este operator continuu.

**d.** Fie  $x, y \in \ell^1(\mathbb{Z})$  și  $z \in D_1$ ; atunci:

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}(x \star y))(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x \star y)(n) z^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(n-k)y(k) \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( y(k) \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-k) z^{-n} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( y(k) \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) z^{-k-m} \right) = \\ &= \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) z^{-m} \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} y(k) z^{-k} \right) = (\mathcal{Z}x)(\mathcal{Z}y), \end{aligned}$$

comutarea seriilor (în  $n$  și  $k$ ) fiind permisă datorită faptului că ambele sunt absolut convergente.

**e.** Fie  $\theta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ; atunci, pentru orice  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , aplicând punctul d, rezultă:

$$\mathcal{Z}C_\theta x = \mathcal{Z}(\theta \star x) = (\mathcal{Z}\theta)(\mathcal{Z}x) = M_{\mathcal{Z}\theta} \mathcal{Z}x,$$

ceea ce încheie demonstrația.

### 3.3 Formula lui Taylor. Serii Taylor

Să se dezvolte în serie Mc Laurin următoarele funcții precizându-se domeniul de convergență (exercițiile 28-41):



**28.**  $f(x) = e^x$

**Soluție**

Calculăm derivatele funcției și obținem :  $(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in N$ . Rezultă

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n.$$

Pentru determinarea domeniului de convergență folosim criteriul raportului

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

seria este convergentă pe  $R$ .

Restul de ordin  $n$  este :  $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}$ ,  $\xi \in (0, x)$  sau  $\xi \in (x, 0)$ .

**29.**  $f(x) = \operatorname{ch} x$

**Soluție**

Din relațiile:  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$  și  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$  rezultă

$$(\operatorname{ch})^{(2n)}(0) = \operatorname{ch}(0) = 1 \quad \text{și} \quad (\operatorname{ch})^{(2n+1)}(0) = \operatorname{sh}(0) = 0.$$

Rezultă seria

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in R.$$

**30.**  $f(x) = \operatorname{sh} x$

**Soluție**

Procedând ca mai sus, obținem:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in R.$$

**31.**  $f(x) = \sin x$

**Soluție**

Calculăm derivata de ordin  $n$  a funcției sinus:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left( x + n \frac{\pi}{2} \right), \forall n \in N,$$

și deci  $\sin^{(2n)}(0) = 0$  și  $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ . Rezultă

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}.$$

Pentru determinarea domeniului de convergență folosim criteriul raportului

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

deci seria este convergentă pe  $R$ .

**32.**  $f(x) = \cos x$

**Soluție**

Derivata de ordin  $n$  a funcției cosinus este:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left( x + n \frac{\pi}{2} \right),$$

și deci

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Seria este convergentă pe  $R$ .

**33.**  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in R$

**Soluție**

Fie  $\alpha \in R$ ; derivata de ordinul  $n$  a funcției  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  este:

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad \forall n \in N.$$

Rezultă că derivata de ordin  $n$  în zero este  $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))$  și deci (seria binomială):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Domeniul de convergență al seriei este  $|x| < 1$ .

**34.**  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

**Soluție**

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, \forall x \in (-1, 1).$$

**35.**  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

**Soluție**

Caz particular al seriei binomiale:  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; rezultă:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n} x^n, \forall |x| < 1.$$

**36.**  $f(x) = \ln(1+x)$  ; să se calculeze apoi suma seriei

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

**Soluție**

Derivata de ordin  $n$  a funcției  $x \mapsto \ln(1+x)$  este:

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \left( \frac{1}{1+x} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rezultă seria:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n,$$

care este convergentă pe  $(-1, 1]$ . În particular, se obține:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

**37.**  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ; să se calculeze apoi suma seriei

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Soluție**

Dezvoltăm în serie derivata funcției:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}, \forall |x| < 1.$$

Integrând termen cu termen, rezultă (convergența în punctele  $\pm 1$  rezultă aplicând criteriul lui Leibniz):

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x \in [-1, 1].$$

În particular, se obține (seria Leibniz-Gregory):

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$38. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

**Soluție**

Aplicând dezvoltarea funcției sinus și integrând termen cu termen, rezultă:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Seria este convergentă pe  $R$ .

$$39. f(x) = \sin^2 x$$

**Soluție**

Liniazând și aplicând dezvoltarea funcției cosinus, se obține:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Seria este convergentă pe  $R$ .

$$40. f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

**Soluție**

Descompunem funcția în fracții simple :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n.$$

Prima serie este convergentă pe  $(-1, 1)$  iar a doua pe  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Rezultă:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n, \forall |x| < \frac{1}{2}.$$

$$41. f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

**Soluție**

Descompunem funcția în fracții simple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \forall |x| < 1, \end{aligned}$$

unde  $c_n = 1$  dacă  $n = 4k$ ,  $c_n = -1$  dacă  $n = 4k + 1$  și  $c_n = 0$  în rest.

42. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui  $x - 1$  funcția

$$f : R \setminus \{0\} \mapsto R, f(x) = \frac{1}{x}.$$

**Soluție**

Derivata de ordin  $n$  este:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \text{ deci } f^{(n)}(1) = (-1)^n n!, \forall n \in N.$$

Rezultă

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \forall x \in (0, 2).$$

43. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui  $x + 4$  funcția

$$f : R \setminus \{-2, -1\} \mapsto R, f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

**Soluție**

Se descompune funcția în fracții simple și apoi se procedează ca la exercițiul anterior (se calculează derivata de ordin  $n$  în  $x = -4$ ):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n, \forall x \in (-6, -2). \end{aligned}$$

O altă metodă este de a aplica direct dezvoltarea funcției  $\frac{1}{1+x}$  translatată în  $x = -4$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-3\left(1 - \frac{x+4}{3}\right)} - \frac{1}{-2\left(1 - \frac{x+4}{2}\right)} = \\ &= -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^{n+1}}(x+4)^n + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}(x+4)^n, \forall |x+4| < 2. \end{aligned}$$

**44.** Să se determine aproximările liniare și pătratice ale următoarelor funcții în jurul punctelor indicate:

- a.  $f(x) = x \ln x$  în jurul punctului  $a = 1$ .  
b.  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \sin x$  în jurul punctului  $a = 0$ .

**Soluție**

a. Aproximările cerute sunt polinoamele Taylor de gradul 1 și respectiv 2.

Se calculează  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 1$ ,  $f''(1) = 1$ . Rezultă:

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1.$$

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

b. Analog, se obține  $T_1(x) = 1 + x$  și  $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ .

**45.** Să se demonstreze că există funcții  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  care nu se pot dezvolta în serie Taylor.

**Soluție**

Un exemplu uzual este funcția

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Atunci  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  și în plus funcția  $f$  și toate derivatele ei în 0 sunt nule:  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Dacă funcția s-ar putea dezvolta în serie Mc Laurin într-o vecinătate  $\mathcal{V}$  a originii, atunci

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 0, \forall x \in \mathcal{V},$$

contradicție: evident, funcția  $f$  nu se anulează în alte puncte în afara originii.

**46.** Folosind dezvoltări limitate să se calculeze următoarele limite:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$$

**Soluție**

a. Considerăm funcțiile  $f(x) = 1 - \cos x^2$  și  $g(x) = \sin x^2$  pe care le dezvoltăm în jurul lui 0. Obținem:

$$f'(x) = 2x \sin x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 12x \cos x^2 - 8x^3 \sin x^2 \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 12 \cos x^2 - 48x^2 \sin x^2 - 16x^4 \cos x^2 \Rightarrow f^{(4)}(0) = 12$$

$$g'(x) = 2x \cos x^2 \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$g''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 \Rightarrow g''(0) = 2$$

Notăm  $0(x^k)$  orice expresie care verifică egalitatea  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x^k)}{x^k} = 0$ . Rezultă

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{12x^4}{4!} + 0(x^4)}{\frac{2x^4}{2!} + 0(x^4)} = \frac{1}{2}.$$

O altă metodă constă în a aplica direct dezvoltările funcțiilor sinus și cosinus (până la gradul al treilea).

b. Considerăm funcția  $f(x) = \ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2$  pe care o dezvoltăm în jurul lui 0; pentru aceasta, putem calcula derivatele până la ordinul al treilea ale funcției  $f$  (ca mai sus) sau putem aplica dezvoltările funcțiilor logaritm și sinus:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} x^n - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + 2x^2.$$

Rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{16x^3}{3!} + 0(x^3)}{x^3} = \frac{8}{3}.$$

**47.** Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{2x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \right)$

**Soluție**

Scriem mai întâi limita sub forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{2x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 2e^x + 2}{2x^2(e^x-1)}.$$

Considerăm funcțiile  $f(x) = x^2 + 2x - 2e^x + 2$  și  $g(x) = e^x - 1$  pe care le dezvoltăm în jurul lui 0. Procedăm ca în exercițiul precedent și obținem :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{2x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + 0(x^3)}{2x^3 + 0(x^3)} = -\frac{1}{6}.$$

Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$  integralele (exercițiile 48-51):

$$48. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Soluție**

Se dezvoltă integrantul în serie de puteri în jurul lui 0, se integrează termen cu termen și se aproximează seria alternată rezultată:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}.$$

$$49. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

**Soluție**

Se procedează analog; rezultă:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}.$$

$$50. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

**Soluție**

Analog, se obține:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 3^{2n+1}}.$$

$$51. \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

**Soluție**



Analog, rezultă:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

### 3.4 Serii de puteri, funcții elementare

Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență în  $R$  pentru următoarele serii de puteri (exercițiile 52-62):

52.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

**Soluție**

Fie  $R$  raza de convergență:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ . Deci seria este absolut convergentă pe  $(-1, 1)$  și divergentă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Evident, seria este uniform convergentă pe orice interval închis  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x \in \{-1, 1\}$  se obține o serie divergentă.

53.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

**Soluție**

Fie  $R$  raza de convergență:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ . Deci seria este absolut convergentă pe  $(-1, 1)$  și divergentă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Evident, seria este uniform convergentă pe orice interval închis  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x \in \{-1, 1\}$  se obține o serie divergentă.

54.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

**Soluție**

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ . Deci seria este absolut convergentă pe  $(-1, 1)$ , divergentă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x = -1$  se obține seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$  care este divergentă, iar pentru  $x = 1$  se

obține seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  care este o serie convergentă.

55.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$

**Soluție**

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Seria este absolut convergentă pe  $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$  și divergentă pe  $(-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$ . Seria este uniform convergentă pe  $|x| \leq r < e$ . Dacă  $x \in \left\{-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\}$  se obține o serie divergentă (criteriul raportului).

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}, p \in \mathbb{R}$$

**Soluție**

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ . Seria este absolut convergentă pentru  $x \in (-1, 1)$ , divergentă pentru  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x = -1$  se obține seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$  care este divergentă pentru

$p \leq 0$  și convergentă pentru  $p > 0$ , iar pentru  $x = 1$  se obține seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

care este divergentă pentru  $p \leq 1$  și convergentă pentru  $p > 1$ . Prin urmare mulțimea de convergență este:

$[-1, 1]$  dacă  $p > 1$ ,  
 $[-1, 1)$  dacă  $p \in (0, 1]$  și  
 $(-1, 1)$  dacă  $p \leq 0$ .

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n+2}} x^n$$

**Soluție**

$R = 1$ . Seria este absolut convergentă pe  $(-1, 1)$ , divergentă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x \in \{-1, 1\}$  se obține o serie divergentă (se aplică criteriul necesar).

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} x^n, a > 0$$

**Soluție**

Raza de convergență este  $R = 1$ . Seria este absolut convergentă pe  $(-1, 1)$ , divergentă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x| \leq r < 1$ . Dacă  $x = 1$  obținem seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}.$$

Cu criteriul Raabe-Duhamel obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = a.$$

Seria este divergentă pentru  $a < 1$  și convergentă pentru  $a > 1$ ; dacă  $a = 1$  seria este seria armonică (divergentă). Dacă  $x = -1$  se obține o serie convergentă (cu criteriul lui Leibniz).

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$$

**Soluție**

Raza de convergență este  $R = 3$ . Seria este absolut convergentă pe  $(-2, 4)$ , divergentă pe  $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x - 1| \leq r < 3$ . Dacă  $x \in \{-2, 4\}$  se obține seria armonică.

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$$

**Soluție**

Raza de convergență este  $R = 1$ . Seria este absolut convergentă pe  $(-4, -2)$ , divergentă pe  $(-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$  și uniform convergentă pe  $|x + 3| \leq r < 1$ .

Dacă  $x \in \{-4, -2\}$  se obțin seriile  $\sum_{n \geq 1} \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$  care sunt absolut convergente.

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-2)^{2n}$$

**Soluție**

$R = 1$ . Seria este absolut convergentă pentru  $(x-2)^2 < 1$ , adică  $x \in (1, 3)$ ; seria este divergentă pentru  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$  și uniform convergentă pe  $(x-2)^2 \leq r < 1$ . Dacă  $x \in \{1, 3\}$  se obține seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  care este convergentă.

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} (x-1)^n$$

**Soluție**

$R = \frac{9}{4}$ . Seria este absolut convergentă pentru  $|x-1| < \frac{9}{4}$ , adică  $x \in \left(-\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$ ; seria este divergentă pentru  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{13}{4}, \infty\right)$ ; seria este uniform convergentă pe  $|x-1| \leq r < \frac{9}{4}$ . Dacă  $x = -\frac{5}{4}$  se obține se-

ria  $-\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{4}\right)^n \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}$  care este divergentă (criteriul necesar), iar dacă

$x = \frac{13}{4}$  se obține seria  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{9}{4}\right)^n \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}$  care este divergentă.

**În exercițiile 63-68, să se studieze convergența următoarelor serii de funcții**

$$63. \sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x, x > 0$$

**Soluție**

Cu schimbarea de variabilă  $t = \ln x$  se obține o serie de puteri cu raza de convergență  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ . Seria de puteri este absolut convergentă pentru  $t \in (-1, 1)$  și divergentă pentru  $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Rezultă că seria inițială este convergentă dacă și numai dacă  $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ . Evident, seria este uniform convergentă pe  $[e^{-r}, e^r], \forall r < 1$ .

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$$

**Soluție**

Cu schimbarea de variabilă  $t = e^{-x} > 0$  se obține o serie de puteri având raza de convergență  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e$ . Seria este absolut convergentă pentru  $t \in (0, e)$ , deci pentru  $x > -1$  și divergentă pentru  $t \in (e, \infty)$ , adică  $x < -1$ . Evident seria este uniform convergentă pe  $x \geq r, \forall r > -1$ . Dacă  $x = -1$  se obține o serie divergentă (se poate aplica criteriul necesar):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} e\right)^n \geq 1.$$

$$65. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n! x^n}$$

**Soluție**

Fie  $y = x^{-1}$ ; seria de puteri  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} y^n$  are raza de convergență  $R = \infty$ , deci seria inițială converge pentru orice  $x \neq 0$ .

$$66. \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$$

**Soluție**

Fie  $y = e^{-\sin x}$ ; seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} y^n$  are raza de convergență  $R = 1$

și converge dacă și numai dacă  $y \in (-1, 1)$ . Rezultă că seria inițială converge dacă și numai dacă  $\sin x > 0$ , adică

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi).$$

$$67. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin^n x$$

**Soluție**

Fie  $y = \sin x$ ; seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} y^n$  converge dacă și numai dacă  $y \in (-1, 1]$ , deci seria inițială converge dacă și numai dacă  $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

$$68. \sum_{n \geq 0} \left( \frac{x}{\ln x} \right)^n, x > 0$$

**Soluție**

Fie  $y = \frac{x}{\ln x}$ ; seria converge dacă și numai dacă  $|y| < 1$ , sau echivalent,  $x < |\ln x|$ . Fie  $\xi \in (0, 1)$  soluția unică a ecuației  $x = -\ln x$ . Seria converge dacă și numai dacă  $x \in (0, \xi)$ .

**Să se găsească raza de convergență și mulțimea de convergență în  $C$  pentru următoarele serii de puteri (exercițiile 69-73):**

$$69. \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^p}, z \in C$$

**Soluție**

Raza de convergență este 1. Seria este absolut convergentă pentru orice  $|z| < 1$  și divergentă pentru  $|z| > 1$ . Cazurile  $z = \pm 1$  au fost studiate în exercițiul 11. Fie  $z = e^{it}, t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Dacă  $p \leq 0$ , seria este divergentă (criteriul necesar); dacă  $p > 1$ , seria este absolut convergentă. Dacă  $p \in (0, 1]$ , seria este convergentă (părțile reală și imaginară sunt convergente - se aplică criteriul Abel-Dirichlet).

$$70. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n, z \in C$$

**Soluție**

$R = 1$ , deci discul de absolut convergență al seriei este  $|z| < 1$ . Dacă  $|z| = 1$  sirul termenilor seriei nu tinde la 0 deci seria este divergentă.

$$71. \sum_{n=0}^{\infty} (1 + ni)z^n, z \in C$$

**Soluție**

$R = 1$ , deci discul de absolut convergență al seriei este  $|z| < 1$ . Dacă  $|z| = 1$  șirul termenilor seriei nu tinde la 0, deci seria este divergentă.

$$72. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}, z \in C$$

**Soluție**

$R = 3$ , deci discul de absolut convergență este  $|z-2i| < 3$ . Dacă  $|z-2i| = 3$ , deci  $z-2i = 3e^{i\theta}$  se obține seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  care a fost studiată în capitolul 1, exercițiul 42.

$$73. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, z \in C$$

**Soluție**

$R = 1$ , deci discul de absolut convergență al seriei este  $|z| < 1$ . Dacă  $|z| = 1, z = e^{i\theta}$  se obține seria  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ . Dacă  $z = -1$ , seria este divergentă (seria armonică); pentru  $z \neq -1$  seria este convergentă (criteriul Abel-Dirichlet).

Să se calculeze sumele seriilor de funcții (exercițiile 74-80) :

$$74. \sum_{n \geq 0} x^{2n}$$

**Soluție**

$$\sum_{n \geq 0} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}, \forall |x| < 1.$$

$$75. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

**Soluție**

Raza de convergență este 1. Fie  $S(x)$  suma seriei date. Seria derivatelor are aceeași rază de convergență cu seria inițială și suma ei este egală cu derivata sumei. Calculăm:

$$S'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \forall |x| < 1.$$

Rezultă  $S(x) = \arctg x + C$ . Din  $S(0) = 0$ , rezultă  $C = 0$ .

$$76. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

**Soluție**

Fie  $S(x)$  suma seriei. Seria primitivelor are aceeași rază de convergență cu seria inițială ( $R = 1$ ) și suma ei este egală cu o primitivă a sumei seriei date. Integrând seria termen cu termen se obține:

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n \geq 0} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \forall |x| < 1.$$

Rezultă  $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

$$77. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

**Soluție**

Seria converge pentru  $x \in (-2, 2)$  și fie  $S(x)$  suma seriei. Dacă  $x = 0$ , atunci  $S(0) = 0$ ; fie  $x \in (-2, 2) \setminus \{0\}$ ;

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

Suma ultimei serii (pe care o notăm cu  $T(x)$ ) se calculează prin derivare

$$T'(x) = \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \right)' = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2-x}.$$

Rezultă:

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = C - \ln(2-x).$$

Din  $T(0) = 0$  rezultă  $C = \ln 2$ . În concluzie rezultă:

$$S(x) = \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x} \ln \frac{2}{2-x}, \forall x \in (-2, 2), x \neq 0 \text{ și } S(0) = 0.$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)} x^{n-1}$$

**Soluție**

Seria este absolut convergentă pentru  $x \in (-1, 1)$ . Dacă  $x = 0$  suma este  $\frac{8}{3}$ ; fie  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Coeficientul  $\frac{(n+1)^3}{n(n+2)}$  se descompune în fracții simple:

$$\frac{(n+1)^3}{n(n+2)} = n+1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Rezultă (pentru  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)} x^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2(n+2)} x^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1-x} + \sum_{n \geq 1} (x^n)' + \frac{1}{2x} \sum_{n \geq 1} \int_0^x x^{n-1} dx + \frac{1}{2x^3} \sum_{n \geq 1} \int_0^x x^{n+1} dx = \\ &= \frac{1}{1-x} + \left( \sum_{n \geq 1} x^n \right)' + \frac{1}{2x} \int_0^x \left( \sum_{n \geq 1} x^{n-1} \right) dx + \frac{1}{2x^3} \int_0^x \left( \sum_{n \geq 1} x^{n+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{1-x} + \left( \frac{x}{1-x} \right)' + \frac{1}{2x} \int_0^x \left( \frac{1}{1-x} \right) dx + \frac{1}{2x^3} \int_0^x \left( \frac{x^2}{1-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2x} \ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2x^3} \left( -x - \frac{x^2}{2} + \ln \frac{1}{1-x} \right). \end{aligned}$$

**79.**  $\sum_{n \geq 1} n x^{-n}$

**Soluție**

Se face substituția  $y = x^{-1}, x \neq 0$ . Suma seriei (de puteri)  $\sum_{n \geq 1} n y^n$  se

calculează prin derivarea seriei  $\sum_{n \geq 1} y^n$  și apoi înmulțire cu  $y$ ; rezultă:

$$\sum_{n \geq 1} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2}, \forall y \in (-1, 1).$$

Rezultă:

$$\sum_{n \geq 0} n x^{-n} = \frac{x}{(x-1)^2}, \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$



$$80. \sum_{n \geq 1} (4n - 3)x^{-(4n-3)}$$

**Soluție**

Se procedează analog cu exercițiul precedent.

81. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcția  $f(x) = \arcsin x$  și apoi să se demonstreze

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

**Soluție**

Dezvoltăm în serie derivata funcției arcsin (folosim seria binomială pentru exponentul  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} x^{2n}, \forall |x| < 1.$$

Integrând termen cu termen (de la 0 la  $x$ ), obținem:

$$\arcsin x = x + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1}, \forall x \in [-1, 1].$$

Convergența în punctele  $\pm 1$  se stabilește cu criteriul lui Leibniz. Suma seriei numerice din enunț este  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ .

82. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcția  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  și apoi să se demonstreze:

$$1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n + 1} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**Soluție**

Procedăm analog cu exercițiul anterior:

$$\begin{aligned} (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot x^{2n}, \forall |x| < 1. \end{aligned}$$

Rezultă dezvoltarea:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) =$$

$$= x + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, \forall x \in [-1, 1].$$

În particular pentru  $x = 1$  obținem suma seriei date:  $\ln(1 + \sqrt{2})$ .

Folosind serii de puteri să se calculeze sumele următoarelor serii de numere (exercițiile 83-90):

$$83. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

**Soluție**

Suma este  $\ln 2$ .

$$84. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

**Soluție**

Suma este  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ .

$$85. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!}$$

**Soluție**

Suma este  $e^{-\frac{1}{4}}$ .

$$86. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

**Soluție**

Suma este  $\sqrt{3} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ .

$$87. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

**Soluție**

Fie dezvoltarea:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \forall x \in (-1, 1).$$

Primitiva care se anulează în 0 este:

$$\int_0^x \operatorname{arctg} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

Calculând (prin părți) integrala, rezultă:

$$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2},$$

deci suma cerută este  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

**88.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$$

**Soluție**

Raza de convergență a seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  este 1 și

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \\ &= \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

În particular, pentru  $x = \frac{1}{4}$  rezultă  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} = \frac{16}{9}$ .

**89.** 
$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

**Soluție**

Din dezvoltarea funcției  $\operatorname{arctg}$ :

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x \in [-1, 1],$$

rezultă

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Valoarea acestei integrale (constanta lui Catalan) este aproximativ 0,91596.

**90.** 
$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

**Soluție**

Seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$  converge pentru orice  $x \in (-1, 1]$ ; integrând

termen cu termen, se obține:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{3n} dx = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \right) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

## Capitolul 4

# Funcții diferențiabile

### 4.1 Noțiuni teoretice

#### Derivate parțiale, diferențială

Fie  $D$  o submulțime deschisă în  $R^n$  și fie  $f : D \mapsto R$ . Fie  $a \in D$  și  $s \in R^n$  un versor arbitrar. Se spune că  $f$  este derivabilă în punctul  $a$  după direcția  $s$  dacă există în  $R$  limita:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t}.$$

Dacă există, această limită se notează  $\frac{df}{ds}(a)$  și se numește derivata lui  $f$  după  $s$  în punctul  $a$ . Se spune că  $f$  are derivată parțială în punctul  $a$  în raport cu variabila  $x_k$  dacă există  $\frac{df}{de_k}(a)$ , care în acest caz se notează  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ . Funcția  $f$  se zice derivabilă parțial pe  $D$  dacă pentru orice  $a \in D$  și pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  există  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ . Funcțiile

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \mapsto R$$

se numesc derivatele parțiale ale lui  $f$ . Funcția  $f$  se zice de clasă  $C^1$  pe  $D$  (se notează  $f \in C^1(D)$ ) dacă toate derivatele parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  există și sunt funcții continue pe  $D$ .

Presupunem că  $f \in C^1(D)$ ; pentru orice  $a \in D$ , vectorul

$$\text{grad}_a f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

se numește gradientul lui  $f$  în punctul  $a$ . Are loc formula:

$$\frac{df}{ds}(a) = s \cdot \text{grad}_a f, \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Fie  $F : D \mapsto \mathbb{R}^m$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . Presupunând că există toate derivatele parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ , se poate defini matricea jacobiană a aplicației  $F$  în punctul  $a$  prin:

$$J_F(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Dacă  $m = n$ , atunci matricea este pătratică și determinantul ei se numește jacobianul funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_n$  în punctul  $a$  și se notează

$$\det(J_F(a)) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Funcția  $F$  se numește de clasă  $C^1$  pe mulțimea  $D$  dacă toate componentele sale,  $f_1, \dots, f_m$  sunt de clasă  $C^1$ .

#### Diferențiala

Aplicația  $F : D \mapsto \mathbb{R}^m$  se numește diferențiabilă în punctul  $a \in D$  dacă există o aplicație liniară  $DF(a) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a) - DF(a)(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Dacă există, aplicația  $DF(a)$  se numește diferențiala lui  $F$  în punctul  $a$ .

#### Legătura dintre derivate parțiale și diferențială

**i.** Dacă  $F$  este diferențiabilă în punctul  $a$  atunci  $F$  este derivabilă parțial în  $a$ . În acest caz, matricea (în baza canonică) a aplicației liniare  $DF(a)$  este matricea jacobiană a lui  $F$  în  $a$ , deci

$$DF(a)x = J_F(a)x^T, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  este diferențiabilă în  $a \in D$ , atunci

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},$$

$$Df(a)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)x_n,$$

sau, notând cu  $dx_j$  proiecția pe componenta  $j$ , diferențiala se scrie sub forma:

$$Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

ii. Dacă  $F \in C^1(D)$  atunci  $F$  este diferențiabilă în orice  $a \in D$ .

### Diferențiala funcției compuse

Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  și  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  două mulțimi deschise și fie  $F : A \mapsto B$ ,  $G : B \mapsto \mathbb{R}^k$ . Dacă  $F$  este diferențiabilă în  $a \in A$  și  $G$  este diferențiabilă în  $b = F(a) \in B$  atunci compunerea  $G \circ F$  este diferențiabilă în  $a$  și

$$D(G \circ F)(a) = DG(b) \circ DF(a).$$

Relația dintre matricele jacobiene asociate este

$$J_{G \circ F}(a) = J_G(b)J_F(a).$$

### Derivate parțiale de ordin superior

Funcția  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  se numește de clasă  $C^2$  pe  $D$  dacă  $f \in C^1(D)$  și  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^1(D)$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Funcțiile  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$  se numesc derivatele parțiale de ordinul al doilea și se notează  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ . În cazul particular  $j = k$ ,

se folosește notația  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ .

### Teorema de simetrie a lui Schwartz

Dacă  $f \in C^2(D)$ , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a), \forall j, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall a \in D.$$

### Diferențiala a doua

Fie  $f \in C^2(D)$  și  $a \in D$ . Matricea hessiană a lui  $f$  în  $a$  este matricea (simetrică)

$$H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $a$  este forma pătratică

$$D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, D^2 f(a)(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

### Polinomul Taylor

Fie  $D$  o submulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , fie  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^m$  și fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ . Notăm

$$\Delta f(a) = Df(a)(x - a) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k).$$

Puterea simbolică  $[\Delta f(a)]^{(k)}$  se definește ca fiind puterea  $k$  a polinomului  $\Delta f(a)$  cu convențiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{p_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)^{p_2} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^{p_n} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}(a),$$

$\forall p_1, p_2, \dots, p_n \in \{0, 1, \dots, k\}$  astfel încât  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = k$ .

Polinomul Taylor de gradul  $m$  asociat funcției  $f$  în punctul  $a$  este, prin definiție:

$$T_m(f, a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \Delta f(a) + \frac{1}{2!} [\Delta f(a)]^{(2)} + \dots + \frac{1}{m!} [\Delta f(a)]^{(m)}, \forall x \in D,$$

iar restul de ordin  $m$  este  $R_m(f, a)(x) = f(x) - T_m(f, a)(x)$ .

De exemplu, dacă  $n = 2$ ,  $(a_1, a_2) = (a, b)$ , atunci:

$$T_1(f, (a, b))(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b),$$

$$\begin{aligned} T_2(f, (a, b))(x, y) &= f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( (x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right). \end{aligned}$$

În general, pentru  $m \in N$ :

$$T_m(f, (a, b))(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} [\Delta f(a, b)]^{(k)},$$

unde

$$[\Delta f(a, b)]^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i (x - a)^{k-i} (y - b)^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(a, b).$$

Polinoamele  $T_1(f, a)$  și  $T_2(f, a)$  se numesc aproximarea liniară și, respectiv, aproximarea pătratică a funcției  $f$  în jurul punctului  $a$ .

#### **Formula lui Taylor**

În condițiile de mai sus, fie  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subseteq D$ . Atunci, pentru orice  $x \in B(a, r)$ , există  $\xi \in [a, x]$  astfel încât

$$f(x) = T_m(f, a) + \frac{1}{m!} [\Delta f(\xi)]^{(m)}.$$

În particular, rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_m(f, a)(x)}{\|x - a\|^m} = 0.$$



**Extreme locale**

Fie  $D$  o submulțime deschisă în  $R^n$  și  $f : D \mapsto R$ . Un punct  $a \in D$  se numește punct de extrem local pentru funcția  $f$  dacă există o vecinătate  $V \subseteq D$  a punctului  $a$  astfel încât  $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x \in V$  (maxim local) sau  $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in V$  (minim local).

Un punct  $a \in D$  se numește punct critic al lui  $f$  dacă  $f$  este diferențiabilă în  $a$  și  $Df(a) = 0$ .

**Teorema lui Fermat**

Cu notațiile de mai sus, dacă  $a \in D$  este punct de extrem local pentru  $f$  și funcția  $f$  este diferențiabilă în  $a$ , atunci  $a$  este punct critic al lui  $f$ .

**Condiții suficiente de extrem local**

Fie  $f \in C^2(D)$  și fie  $a \in D$  un punct critic pentru  $f$ . Dacă forma pătratică  $D^2f(a)$  este pozitiv definită (respectiv negativ definită) atunci  $a$  este minim local (respectiv maxim local) al lui  $f$ . Dacă matricea hessiană are valori proprii de semne contrare, atunci  $a$  nu este extrem local.

**Difeomorfisme**

Fie  $A, B$  doi deschiși din  $R^n$ . O aplicație  $f : A \mapsto B$  se numește difeomorfism dacă este bijectivă, de clasă  $C^1$  și cu inversa de clasă  $C^1$ .

**Teorema funcției inverse**

Dacă într-un punct  $a \in A$  diferențiala  $Df(a)$  este izomorfism liniar (sau, echivalent,  $\det(J_f(a)) \neq 0$ ), atunci  $f$  este difeomorfism local în jurul lui  $a$ , adică există  $V$  vecinătate a lui  $a$  și  $W$  vecinătate a lui  $f(a)$  astfel încât restricția  $f : V \mapsto W$  să fie difeomorfism.

**Teorema funcțiilor implicite**

Fie  $A \subseteq R^n$  și  $B \subseteq R^m$  două mulțimi deschise.

Notăm  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in B$  și  $(x, y) \in A \times B$ .

Fie  $F : A \times B \mapsto R^m$ ,  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y))$  o funcție de clasă  $C^1$ . Fie  $(a, b) \in A \times B$  astfel încât

$$F(a, b) = 0 \text{ și } \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Atunci există  $V \subseteq A$  vecinătate deschisă a lui  $a$  și  $W \subseteq B$  vecinătate deschisă a lui  $b$  și o unică funcție  $\phi : V \mapsto W$  cu proprietățile:

$$\phi \in C^1(V), \phi(a) = b \text{ și } F(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in V.$$

**Extreme cu legături**

Fie  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  o submulțime nevidă și  $a \in M$ . Fie  $f$  o funcție definită pe o vecinătate a lui  $a$ . Se spune că punctul  $a$  este punct de extrem pentru  $f$  cu legătura  $M$  (sau extrem condiționat) dacă  $a$  este punct de extrem local pentru restricția lui  $f$  la  $M$ , sau, echivalent, dacă există  $V$  o vecinătate a lui  $a$  astfel încât

$$f(x) \leq f(a) \text{ sau } f(x) \geq f(a), \forall x \in V \cap M.$$

**Teorema multiplicatorilor lui Lagrange**

Fie  $D$  o submulțime deschisă din  $\mathbb{R}^{n+m}$  și fie  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1(D)$ . Notăm  $D \ni (x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$  variabilele din  $D$ . Fie  $g_k : D \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$  funcții de clasă  $C^1(D)$  și fie

$$M = \{(x, y) \in D \mid g_k(x, y) = 0, \forall 1 \leq k \leq m\}.$$

Dacă  $(a, b) \in M$  este punct de extrem local pentru  $f$  cu legătura  $M$  astfel încât

$$\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0,$$

atunci există  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  astfel încât  $(a, b)$  să fie punct critic al funcției

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + \dots + \lambda_m g_m(x, y),$$

sau, echivalent,  $(a, b)$  este soluție a sistemului de  $n + 2m$  ecuații cu  $n + 2m$  necunoscute:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, g_k = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

**4.2 Derivate parțiale și diferențiala**

1. Fie  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 2x^3y - e^{x^2}$ . Să se calculeze, cu definiția, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$  în punctele  $(0, 0)$  și  $(-1, 1)$ .

**Soluție**

Observăm că  $f$  este continuă în cele două puncte. Aplicând definiția, obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{x^2} + 1}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x, 1) - f(-1, 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - e^{x^2} + 2 + e}{x + 1} = 6 + 2e.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(-1, y) - f(-1, 1)}{y - 1} = -2.$$

**2. a.** Să se studieze existența derivatelor parțiale în origine pentru funcția

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**b.** Este funcția  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$  de clasă  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  ?

**Soluție**

**a.** Aplicând definiția, se obține:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Limita de mai sus nu există, deci funcția  $f$  nu are derivate parțiale în origine.

**b.** Pentru orice  $(x, y) \neq (0, 0)$ , avem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

În origine derivatele parțiale există și sunt nule:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Verificăm dacă derivatele parțiale sunt continue (în origine):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

deoarece  $\left| \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

deoarece  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Rezultă că  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ .

**3.** Folosind definiția, să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor următoare, în punctele indicate:

a.  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  în  $(1, 0)$  și  $(1, 1)$ .

b.  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = xe^{yz}$  în  $(0, 0, 0)$  și  $(1, 1, 1)$ .

**Soluție**

a. Se calculează mai întâi derivatele parțiale de ordinul întâi într-un punct arbitrar  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Calculăm acum derivatele parțiale de ordinul al doilea (cu definiția):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1}{x - 1} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y\sqrt{1 + y^2}} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)}{x - 1} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - 1}{y} = 0.$$

Analog se calculează și în punctul  $(1, 1)$ .

b. Derivatele parțiale de ordinul întâi într-un punct arbitrar sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = e^{yz}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = xze^{yz}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = xye^{yz}.$$

În  $(0, 0, 0)$  toate derivatele parțiale de ordinul al doilea sunt nule. În punctul  $(1, 1, 1)$ , avem:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1, 1, 1) = e = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(1, 1, 1),$$

celelalte calculându-se analog.

4. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - z^2)$ . Să se calculeze, folosind definiția, derivata după direcția  $h = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  a funcției  $f$  în punctul  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .

**Soluție**

Aplicând definiția, obținem:

$$\frac{df}{dh}(1, 1, 2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(1, 1, 2\right) + t\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) - f(1, 1, 2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(-1 - \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^2, -3 - \frac{4}{3}t\right) - (-1, -3)}{t} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

**5.** Fie  $f : R^3 \mapsto R^2$ ,  $f(x, y, z) = (x^3 - y^3, x^3 + y^3 + z^3)$ . Să se calculeze derivata după direcția  $h = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$  a lui  $f$  în punctul  $(1, -1, 1)$ .

**Soluție**

Se aplică definiția (ca în exercițiul precedent).

**6.** Să se calculeze laplacianul următoarelor funcții:

**a.**  $f : R^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto R$ ,  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

**b.**  $g : R^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mapsto R$ ,  $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ .

**c.**  $h : R^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto R$ ,  $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**d.**  $k : R^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mapsto R$ ,  $k(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Soluție**

Laplacianul unei funcții  $f$  de  $n$  variabile, este, prin definiție:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

O funcție al cărei laplacian este nul se numește funcție armonică.

**a.** Calculăm derivatele parțiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

și deci  $\Delta f = 0$ .

**b.** Derivatele parțiale:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2y^2 + 2z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

și deci  $\Delta g = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$ .

c. Derivatele parțiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}},$$

și deci  $\Delta h = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ .

d. Derivatele parțiale:

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}},$$

și deci  $\Delta k = 0$ .

7. Să se calculeze laplacianul funcțiilor:

a.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ .

b.  $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ .

**Soluție**

a.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^3}$ , deci  $\Delta f = 4(x^2 + y^2)^{-2}$ .

b.  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{6x^2 - 2(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ , deci  $\Delta g = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}$ .

8. Fie funcția  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Să se demonstreze că  $f$  este continuă, are derivate parțiale de ordinul întâi în orice punct și nu este diferentiabilă în origine.

**Soluție**

Din inegalitatea:  $|f(x, y)| \leq |x|$  rezultă  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ , deci funcția

este continuă. Este evident că în orice punct  $(x, y) \neq (0, 0)$  funcția are derivate parțiale de ordinul întâi; studiind existența lor în origine (cu definiția), obținem:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Demonstrăm acum că  $f$  nu este diferențiabilă în origine; dacă ar fi, atunci diferențiala sa ar fi aplicația identic nulă deoarece:

$$df(0, 0)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = 0.$$

Din definiția diferențiabilității ar trebui ca:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df(0, 0)(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

contradicție cu faptul că această limită nu există. (se pot folosi coordonatele polare).

**9.** Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în origine pentru funcțiile:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{b. } g(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

**Soluție**

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho(\rho^2 \cos^3 \varphi - \sin \varphi)}{\rho} = -\sin \varphi, \end{aligned}$$

deci funcția nu este continuă în origine.

Studiem acum existența derivatelor parțiale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x|x|} = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y|y|} = -\infty, \end{aligned}$$

deci  $f$  nu este derivabilă parțial în raport cu  $y$  în origine.

**b.** Din inegalitatea:  $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ , rezultă că funcția  $g$  este continuă

în origine.

Studiem acum existența derivatelor parțiale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{|y|}.$$

Ultima limită nu există, deci  $g$  nu este derivabilă parțial în raport cu  $y$  în origine.

**10.** Să se demonstreze că următoarele funcții sunt diferențiabile în origine dar nu sunt de clasă  $\mathcal{C}^1$ :

$$\text{a. } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b. } g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^4}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{c. } h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^2}} & \text{dacă } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

**Soluție**

**a.** Calculând derivatele parțiale de ordinul întâi, se obține:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Derivatele parțiale sunt continue în orice punct  $(x, y) \neq (0, 0)$ , dar în origine nu sunt continue deoarece  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  nu există (se pot folosi coordonatele polare). Am demonstrat deci că  $f$  nu este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $\mathbb{R}^2$ . Studiemi diferențiabilitatea în origine (în rest, derivatele parțiale fiind continue, funcția este diferențiabilă):

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df(0, 0)(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0, \end{aligned}$$



deci  $f$  este diferențiabilă în origine.

**b.** În puncte  $(x, y) \neq (0, 0)$  derivatele parțiale sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{y^6}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^4}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy^5}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^4}}.$$

Evident, (cu definiția), în origine derivatele parțiale sunt nule.

Derivatele parțiale nu sunt continue în origine; demonstrăm pentru  $\frac{\partial g}{\partial x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial x}(y^2, y) = \frac{1}{2},$$

deci  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}$  nu există.

Demonstrăm că  $g$  este diferențiabilă în origine:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - g(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^4}\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

deoarece:

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \right| \leq 1 \text{ și}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

**c.** Lăsăm ca exercițiu faptul că  $h$  nu este de clasă  $C^1$ ; demonstrăm că  $h$  este diferențiabilă în origine. Derivatele parțiale în origine sunt toate nule (se aplică definiția); diferențiabilitatea:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(0, 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy^2z}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

deoarece:

$$\left| \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^2}} \right| \leq 1 \text{ și}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

**11.** Să se demonstreze că următoarele funcții nu sunt continue în origine, totuși au derivate parțiale în acest punct.

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{b. } g(x, y) &= \begin{cases} e^{-\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)} & \text{dacă } xy \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } xy = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Soluție**

**a.** Pentru a demonstra că funcția nu este continuă în origine, se pot considera șirurile:  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$  și  $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$ ; atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) &= 0. \end{aligned}$$

Derivatele parțiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

**b.** Pentru a demonstra că funcția nu este continuă în origine, calculăm:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\left(\frac{x^2}{(mx)^2} + \frac{(mx)^2}{x^2}\right)} = e^{-\left(\frac{1}{m^2} + m^2\right)},$$

deci limita nu există (depinde de  $m$ ).

Derivatele parțiale în origine sunt ambele nule (rezultă direct din definiția funcției).

$$\text{12. Fie funcția } f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**a.** Să se arate că  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $R^2$ .

**b.** Să se arate  $f$  are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea în orice punct și să se calculeze  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  în origine; este funcția  $f$  de clasă  $\mathcal{C}^2$  pe  $R^2$  ?

**Soluție**

**a.** Derivatele parțiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \cos \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se demonstrează că  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt continue, deci  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $\mathbb{R}^2$ .

**b.** Evident, funcția are derivate parțiale de ordinul al doilea în orice punct  $(x, y) \neq (0, 0)$ ; studiem existența derivatelor mixte în origine (cu definiția):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 1}{x} = \sin 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sin(-1)}{y} = -\sin 1.$$

Funcția nu este de clasă  $\mathcal{C}^2$  pe  $\mathbb{R}^2$ ; dacă ar fi fost, atunci, conform teoremei de simetrie a lui Schwartz, cele două derivate mixte de ordinul al doilea ar fi trebuit să fie egale.

**13.** Fie funcția:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**a.** Să se arate că  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $\mathbb{R}^2$ .

**b.** Să se arate  $f$  are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea în orice punct și să se calculeze  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  în origine; este funcția  $f$  de clasă  $\mathcal{C}^2$  pe  $\mathbb{R}^2$  ?

**Soluție**

Derivatele parțiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Derivatele parțiale de ordinul al doilea în origine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)}{y} = 1,$$

deci funcția nu este de clasă  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ .

**14.** Să se studieze existența derivatelor parțiale și a diferențialei în origine pentru funcția:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2-yx^2}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**Soluție**

Funcția are derivate parțiale în orice punct, dar nu este diferențiabilă în origine.

**15.** Fie  $f : R^3 \mapsto R ; f(x, y, z) = x^2 + yz - xy$  și  $a = (1, 1, 2)$ . Să se determine versorul  $s$  știind că  $\frac{df}{ds}(a)$  este maxim.

**Soluție**

$$\frac{df}{ds}(a) = s \cdot \text{grad}_a f = \|s\| \cdot \|\text{grad}_a f\| \cdot \cos(s, \widehat{\text{grad}_a f}) =$$

$$= \|\text{grad}_a f\| \cdot \cos(s, \widehat{\text{grad}_a f}).$$

Deci maximul se obține atunci când  $s$  are aceeași direcție și același sens cu  $\text{grad}_a f$ . Rezultă:  $\text{grad}_a f = (1, 1, 1) \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .

**16.** Fie  $f : R^3 \mapsto R ; f(x, y, z) = xy^2 - 2xyz$  și  $a = (2, 1, 1)$ . Să se determine versorul  $s$  știind că  $\frac{df}{ds}(a)$  este minim.

**Soluție**

Repetând raționamentul din exercițiul anterior, rezultă că minimum se obține atunci când  $s$  are aceeași direcție și sens opus cu  $\text{grad}_a f$ .

Rezultă:  $\text{grad}_a f = (-1, 0, -4) \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$ .

**17.** Să se calculeze jacobienii transformărilor în coordonate polare, cilindrice și sferice.

**Soluție**

Transformarea în coordonate polare este:

$$(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), (\rho, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi).$$

Jacobianul într-un punct arbitrar  $(\rho, \varphi)$  este:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Transformarea în coordonate cilindrice este

$$(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z), (\rho, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times R.$$

Jacobianul într-un punct arbitrar este:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Transformarea în coordonate sferice este

$$(x, y, z) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta), (\rho, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

Jacobianul într-un punct arbitrar este:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

**18.** Fie funcția  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = e^{x+y}$ . Să se scrie polinomul Taylor de gradul  $n$  asociat funcției  $f$  în punctele  $(0, 0)$  și  $(1, -1)$ .

**Soluție**

Fie  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq m \leq n$ . Se calculează

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(x, y) = e^{x+y}$$

și deci

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(1, -1) = 1.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} T_n(f, (0, 0))(x, y) &= 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(x+y)^n. \\ T_n(f, (1, -1))(x, y) &= 1 + \frac{1}{1!}((x-1) + (y+1)) + \\ &+ \frac{1}{2!}((x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2) + \dots + \frac{1}{n!}((x-1) + (y+1))^n = \\ &= T_n(f, (0, 0)). \end{aligned}$$

**19.** Să se calculeze aproximarea liniară în jurul originii a funcției

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x+1}{(y+1)(z+1)}}$$

**Soluție**

Se calculează

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = -\frac{1}{2}.$$

Aproximarea cerută este polinomul Taylor de gradul întâi:

$$T_1(f, (0,0,0))(x,y,z) = 1 + \frac{1}{2}(x - y - z).$$

**20.** Să se calculeze aproximativ  $\sqrt{1,01}\sqrt[3]{0,97}$ , folosind polinomul Taylor de gradul 2 asociat funcției  $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$  în punctul  $(1,1)$ .

**Soluție**

Se calculează

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{6}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -\frac{2}{9}.$$

Aproximarea de ordinul 2 a funcției  $f$  în jurul punctului  $(1,1)$  este

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) &\approx f(1,1) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)k^2 \right). \end{aligned}$$

În particular pentru  $h = 0,1$  și  $k = -0,3$ , obținem valoarea aproximativă cerută.

**21.** Să se determine aproximarea liniară a funcției  $f(x,y) = x^2e^{x^2+y^2}$  în jurul punctului  $(1,-1)$ .

**Soluție**

Se calculează polinomul Taylor de gradul întâi.

**22.** Să se calculeze aproximativ  $e^{-0,2}\sqrt[4]{1,02}$ .

**Soluție**

Se poate folosi polinomul Taylor de gradul al doilea asociat funcției

$$f(x,y) = e^x \sqrt[4]{y}.$$

**23.** Să se determine polinomul Taylor de gradul  $n$  al funcției  $f(x, y) = e^{2x+y}$  în origine.

**Soluție**

Derivatele parțiale de ordinul  $k$  sunt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x, y) = 2^{k-j} e^{2x+y}, \forall j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Rezultă:

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(0, 0) x^{k-j} y^j = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j 2^{k-j} x^{k-j} y^j,$$

deci polinomul Taylor de gradul  $n$  în origine este:

$$T_n(f, (0, 0))(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j 2^{k-j} x^{k-j} y^j.$$

**24.** Să se determine polinomul Taylor de gradul  $n$  al funcției  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$  în origine.

**Soluție**

Analog cu exercițiul anterior:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x, y, z) = e^{x+y+z}, \forall m = i + j + k.$$

Rezultă:

$$T_n(f, (0, 0, 0))(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x + y + z)^k.$$

**25.** Să se calculeze diferențialele funcțiilor:

a.  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 0\}$ ,  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

b.  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0\}$ ,  $g(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .

**Soluție**

Într-un punct  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy \neq 0\}$ , din domeniul comun al funcțiilor  $f$  și  $g$  diferențialele sunt egale:

$$df(x, y) = dg(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

### 4.3 Diferențiala funcției compuse

**26.** Fie  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  și fie  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ . Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea ale funcției  $g$ .

**Soluție**

Fie  $u = x^2 + y^2$  și  $v = x^2 - y^2$ ; derivatele parțiale ale funcțiilor  $u$  și  $v$  sunt:  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$ . Rezultă:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Derivatele parțiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2x \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 4x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2x \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \\ &= 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 4xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2y \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 2y \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 4y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

**27.** Fie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  și fie  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Să se calculeze laplacianul funcțiilor  $g(x, y, z) = f\left(\frac{1}{r}\right)$  și  $h(x, y, z) = f(r)$ .



**Soluție**

Calculăm mai întâi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{-x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (r) = \frac{x}{r}$$

Derivatele parțiale ale funcției  $g$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f' \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{x}{r^3} \right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = f'' \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{x}{r^3} \right)^2 - f' \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{3x^2 - r^2}{r^5} \right)$$

Rezultă  $\Delta g = \frac{1}{r^4} f'' \left( \frac{1}{r} \right)$ . Derivatele parțiale ale funcției  $h$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

deci  $\Delta h = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ .

**28.** Dacă  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  și  $u(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$  să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $u$ .

**Soluție**

Fie  $p = x^2 + y^2$ ,  $q = x^2 - y^2$  și  $r = 2xy$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial p} + 2x \frac{\partial f}{\partial q} + 2y \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = 2y \frac{\partial f}{\partial p} - 2y \frac{\partial f}{\partial q} + 2x \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \\ &\quad + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \\ &\quad + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2y \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \\ &= 4x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right) + 4xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} \right) + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial p} + 2 \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 4xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) + 4(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right) + 4xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial r} \right) + \\
& +4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial p} - 2 \frac{\partial f}{\partial q}.
\end{aligned}$$

**29.** Fie  $a \in R$  și fie  $g$  și  $h$  două funcții de clasă  $C^2$  pe  $R$ . Să se demonstreze că  $f(x, y) = g(x - ay) + h(x + ay)$  verifică ecuația coardei vibrante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

**Soluție** Calcul direct.

**30.** Să se afle  $f \in C^2(R)$  știind că funcția  $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$  este armonică pe  $R^2$ .

**Soluție**

O funcție este armonică dacă satisface relația  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 - y^2); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 - y^2) + 4x^2 f''(x^2 - y^2).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'(x^2 - y^2); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2f'(x^2 - y^2) + 4y^2 f''(x^2 - y^2)$$

Înlocuind în  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , rezultă  $4(x^2 + y^2)f''(x^2 - y^2) = 0$ ; în final se obține  $f(t) = at + b$ , cu  $a, b \in R$  arbitrar fixate.

**31.** Să se afle  $f \in C^2(R)$  știind că funcția  $v(x, y) = f(\frac{y}{x})$  este armonică.

**Soluție**

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'(\frac{y}{x}); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} f''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} f'(\frac{y}{x}); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f''(\frac{y}{x}).$$

Înlocuind în ecuația dată, rezultă:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^4} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} f'(\frac{y}{x}) = 0.$$

Notând  $t = \frac{y}{x}$  se obține (după calcule):

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{-2t}{t^2 + 1},$$

și deci

$$f(t) = a \cdot \operatorname{arctg}(t) + b$$

cu  $a, b \in R$  arbitrar fixate.

**32.** Să se demonstreze că laplacianul în coordonate polare este:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

**Soluție**

Fie  $f \in C^2(R^2)$ ,  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \cos \varphi.$$

Rezolvând sistemul, (în necunoscutele  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ), rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}. \end{aligned}$$

În concluzie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

**33.** Fie ecuația diferențială  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ . Ce devine ecuația dacă se face schimbarea de variabile  $(x, y) \mapsto (t, y)$ , unde  $x = e^t$  ?

**Soluție**

Calculăm  $\frac{dy}{dx}$  și  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  în funcție de  $\frac{dy}{dt}$  și  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ . Din  $x = e^t$ , rezultă  $t = \ln x$  și deci  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$ ; rezultă:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} e^{-t} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

Ecuația devine:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2y = 0$ .

**34.** Să se demonstreze că funcția  $z(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$  verifică ecuația

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

**Soluție**

Se calculează derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $z$ .

**35.** Ce devine ecuația  $x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{x^2} y = 0$  dacă se face schimbarea de variabile  $(x, y) \mapsto (t, y)$ , unde  $t = \frac{1}{x}$ .

**Soluție**

Se calculează

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} = -t^2 \frac{dy}{dt}, \text{ etc.}$$

**36.** Ce devine ecuația  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  prin schimbarea de variabile  $(x, y) \mapsto (u, v)$ , unde  $u = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$ .

**Soluție**

Se calculează:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}, \text{ etc.}$$

**37.** Să se determine funcțiile  $z = z(x, y)$  care verifică ecuația

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2,$$

folosind schimbarea de variabile:

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w), \text{ unde, } u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

### Soluție

O metodă constă în a calcula mai întâi  $x, y$  și  $z$  în funcție de  $u, v$  și  $w$ ; se obține:

$$x = u, y = \frac{u}{uw + 1}, z = \frac{u}{uw + 1}.$$

Se calculează acum derivatele parțiale ale lui  $u$  și  $v$  în raport cu  $x$  și  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = -\left(\frac{uw + 1}{u}\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{1 - u^2 \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}{(uw + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u}{uw + 1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \left( \frac{uw + 1}{uw + 1} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația inițială, se obține:  $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$ . Rezultă deci că  $w$  este o funcție constantă în raport cu variabila  $u$ , deci  $w = f(v)$ , unde  $f$  este o funcție arbitrară de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $R$ . Rezultă

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right),$$

deci

$$z(x, y) = \frac{x}{1 + xf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}.$$

O altă metodă constă în a calcula:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2}, \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

și deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z^2}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2 \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Se calculează apoi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

**38.** Fie  $f \in C^1(\mathbb{R})$  și  $n \in \mathbb{N}$ . Să se demonstreze că funcția

$$z(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

verifică ecuația:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

**Soluție**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2yx^{n-3} f'\left(\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-2} f'\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

**39.** O funcție  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  se numește omogenă de grad  $r$  pe  $D$  dacă

$$f(t(x_1, x_2, \dots, x_n)) = t^r f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Să se arate că orice funcție omogenă de grad  $r$  pe  $\mathbb{R}^3$  satisface relațiile:

a.  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = rf.$

b.  $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = r(r-1)f.$

**Soluție**

a. Derivând în raport cu  $t$  relația

$$f(tx, ty, tz) = t^r f(x, y, z),$$

rezultă:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) = rt^{r-1} f(x, y, z) \quad (\star)$$

În particular pentru  $t = 1$ , se obține relația de la punctul a.

b. Se derivează în continuare relația  $(\star)$  în raport cu  $t$ .

#### 40. Operatori diferențiali

Fie  $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  un câmp de vectori de clasă  $\mathcal{C}^2$  pe un deschis  $U \subseteq \mathbb{R}^3$

și  $f \in \mathcal{C}^2(U)$  (câmp scalar). Operatorii diferențiali de ordinul întâi sunt gradientul, divergența și rotorul, definiți pentru orice  $a \in U$  astfel:

$$(\text{grad}f)(a) = (\nabla f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\bar{k}.$$

$$(\text{div}\bar{V})(a) = (\nabla\bar{V})(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a).$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}\bar{V})(a) &= (\nabla \times \bar{V})(a) = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a) \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a) \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

În cele ce urmează vom nota cu  $\bar{r} = (x, y, z)$  vectorul de poziție și cu  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  norma sa. Evident,  $\bar{r}$  este un câmp vectorial, iar  $r$  este un câmp scalar.

Pentru orice câmpuri vectoriale  $\bar{V}$  și  $\bar{W}$  și orice câmpuri scalare  $f$  și  $g$  de clasă  $\mathcal{C}^2$ , au loc relațiile:

a.  $\text{grad}(fg) = f\text{grad}g + g\text{grad}f.$

b.  $\text{div}(f\bar{V}) = f\text{div}\bar{V} + \bar{V}\text{grad}f.$

c.  $\text{div}(\bar{V} \times \bar{W}) = \bar{W}\text{rot}\bar{V} - \bar{V}\text{rot}\bar{W}.$

d.  $\text{rot}(f\bar{V}) = f\text{rot}\bar{V} - \bar{V} \times \text{grad}f.$

e.  $\text{grad}(\bar{V} \bar{W}) = \bar{W} \times \text{rot}\bar{V} + \bar{V}\text{rot}\bar{W} + \frac{d\bar{V}}{d\bar{W}} + \frac{\bar{W}}{d\bar{V}},$

unde,  $\frac{d\bar{V}}{d\bar{W}}$  este derivata după direcția  $\bar{W}$  a lui  $\bar{V}$ .

f.  $\text{rot}(\bar{V} \times \bar{W}) = \bar{V}\text{div}\bar{W} - \bar{W}\text{div}\bar{V} + \frac{d\bar{V}}{d\bar{W}} - \frac{d\bar{W}}{d\bar{V}}.$

g.  $\frac{df}{d\bar{a}} = \bar{a}\text{grad}f, \text{grad}(\bar{a} \bar{r}) = \bar{a},$  pentru orice vector constant  $\bar{a}$ .

h.  $\text{grad}r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}\bar{r}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

i.  $\text{rot}(\text{grad}f) = \bar{0}.$

j.  $\text{div}(\text{rot}\bar{V}) = 0.$

k.  $\text{div}(\text{grad}f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

### Soluție

Calcul direct.

41. Să se calculeze divergența câmpului vectorial

$$\bar{V} = \bar{r} + \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4},$$

unde  $\bar{k}$  este versorul axei  $Oz$ ,  $\bar{k} = (0, 0, 1)$ .

**Soluție**

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \bar{V} &= \operatorname{div} \left( \bar{r} + \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \bar{r} \right) = 3 + \left( \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \right) \operatorname{div} \bar{r} + \bar{r} \operatorname{grad} \left( \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \right) = \\ &= 3 + 3 \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} + \bar{r} \left( \frac{1}{r^4} \operatorname{grad}(\bar{k} \bar{r}) + (\bar{k} \bar{r}) \operatorname{grad} r^{-4} \right) = \\ &= 3 + 3 \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} + \bar{r} \left( \frac{\bar{k}}{r^4} - 4 \frac{(\bar{k} \bar{r})}{r^6} \bar{r} \right) = 3.\end{aligned}$$

**42.** Să se calculeze rotorul câmpului vectorial  $\bar{V} = \frac{1}{r}(\bar{k} \times \bar{r})$ .

**Soluție**

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \bar{V} &= \operatorname{rot} \left( \frac{1}{r} (\bar{k} \times \bar{r}) \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot}(\bar{k} \times \bar{r}) - (\bar{k} \times \bar{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1}{r} \left( \bar{k} \operatorname{div} \bar{r} - \bar{r} \operatorname{div} \bar{k} + \frac{d\bar{k}}{d\bar{r}} - \frac{d\bar{r}}{d\bar{k}} \right) + (\bar{k} \times \bar{r}) \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{2\bar{k}}{r}.\end{aligned}$$

**43.** Să se verifice că următoarele transformări sunt difeomorfisme și să se calculeze jacobianul transformării inverse:

a.  $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $F(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ .

b.  $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $G(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ .

**Soluție**

a. Fie  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ; atunci  $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho \neq 0$ , iar jacobianul transformării inverse este

$$\frac{D(\rho, \varphi)}{D(x, y)} = \left( \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} \right)^{-1} = \frac{1}{\rho}.$$

b. Fie  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ . Atunci

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{și} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -(x^2 + y^2)^2.$$



44. Fie aplicația

$$F : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \mapsto \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, F(x, y) = (xy, 3y).$$

Să se demonstreze că  $F$  este un difeomorfism.

**Soluție**

Se demonstrează că  $F$  este bijectivă. Evident,  $F$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$ . Iacobianul într-un punct arbitrar este  $3y \neq 0$ , deci  $F$  este difeomorfism. Se poate calcula și transformarea inversă:  $F^{-1}(x, y) = \left(\frac{3x}{y}, \frac{y}{2}\right)$ .

45. Să se demonstreze că aplicația

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \mapsto \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, f(x, y) = \left(xy, \frac{1}{2}(y^2 - x^2)\right)$$

este un difeomorfism și să se calculeze inversa.

**Soluție**

Faptul că  $f$  este difeomorfism local rezultă din faptul că iacobianul este nenul în orice punct:  $\det(J_f(x, y)) = x^2 + y^2 \neq 0$ .

Se arată că  $f$  este o bijecție și

$$f^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}, \frac{x}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}}\right).$$

## 4.4 Extreme locale

46. Să se calculeze extremele locale ale funcțiilor:

a.  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy.$

b.  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, g(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy.$

c.  $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, h(x, y) = x^2ye^{2x+3y}.$

**Soluție**

a. Punctele critice ale funcției  $f$  sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Rezultă două puncte critice:  $(0, 0)$  și  $(2, 2)$ . Pentru a decide dacă acestea

sunt puncte de extrem, se calculează matricea hessiană (mai întâi într-un punct arbitrar):

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

În punctele critice se obține:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } H_f(2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale matricei  $H_f(0, 0)$  sunt de semne contrare, deci  $(0, 0)$  nu este punct de extrem, iar valorile proprii ale matricei  $H_f(2, 2)$  sunt ambele strict pozitive, deci  $(2, 2)$  este punct de minim local.

**b.** Punctele critice sunt  $(0, 0)$  și  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ . Primul nu este punct de extrem, iar al doilea este punct de minim local.

**c.** Mulțimea punctelor critice este:  $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1, -\frac{1}{3})\}$ . Punctul  $(-1, -\frac{1}{3})$  este punct de minim (matricea hessiană are valorile proprii pozitive). În punctele  $(0, y)$ , criteriul cu matricea hessiană nu decide (există o valoare proprie nulă). Se evaluează semnul diferenței

$$f(x, y) - f(0, y) = x^2 y e^{2x+3y}.$$

Pentru puncte situate deasupra axei  $Ox$  (adică  $y > 0$ ), există un disc (de rază suficient de mică, de exemplu  $\frac{y}{2}$ ), pe care diferența  $f(x, y) - f(0, y)$  este pozitivă, deci aceste puncte sunt minime locale. Analog, punctele situate sub axa  $Ox$  sunt maxime locale. Pentru  $y = 0$  (deci în origine), diferența  $f(x, y) - f(0, 0)$  nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui  $(0, 0)$ , deci originea nu este punct de extrem.

**47.** Să se determine extremele locale ale funcțiilor:

**a.**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 6z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**b.**  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**c.**  $h(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ .

**Soluție**

**a.** Funcția  $f$  are un singur punct critic,  $(-1, -3, 3)$ . Matricea hessiană are toate valorile proprii strict pozitive, deci punctul  $(-1, -3, 3)$  este minim local.

**b.** Funcția  $g$  are punctul critic  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$  care este minim local deoarece valorile proprii ale hessianei sunt strict pozitive.

c. Punctele critice sunt  $(1, 1, 1)$  și  $(-1, 1, -1)$ . Matricea hessiană într-un punct arbitrar este

$$H_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3} \end{pmatrix}$$

Punctul  $(1, 1, 1)$  este minim local, iar  $(-1, 1, -1)$  este maxim local.

**48.** Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$  și  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = xyz$ .

**Soluție**

Singurul punct critic al funcției  $f$  este  $(0, 0)$  care nu este punct de extrem deoarece diferența  $f(x, y) - f(0, 0)$  nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a originii. Punctele critice ale funcției  $g$  sunt

$$(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Funcția nu are puncte de extrem.

**49.** Să se determine extremele locale ale funcțiilor:

a.  $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ .

b.  $g : (0, \pi)^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ .

**Soluție**

a. Punctele critice sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin y \sin(2x + y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin x \sin(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

Rezultă punctele critice:  $(x_1, y_1) = (\pi, \pi)$  și  $(x_2, y_2) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos(2x + y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos(x + 2y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(2x + 2y).$$

Punctul  $(x_2, y_2)$  este maxim local:

$$rt - s^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \right)^2 = \frac{9}{4} > 0, \quad r = -\sqrt{3} < 0.$$

În punctul  $(x_1, y_1) = (\pi, \pi)$ , derivatele parțiale de ordinul al doilea sunt nule, deci trebuie evaluat semnul diferenței  $f(x, y) - f(\pi, \pi) = \sin x \sin y \sin(x+y)$  în jurul punctului  $(\pi, \pi)$ . Se poate face acest lucru fie folosind formula lui Taylor de ordinul 3, fie direct, observând că pentru  $x < \pi, y < \pi$  diferența este negativă, iar pentru puncte  $x > \pi, y > \pi$  diferența este pozitivă. Rezultă că  $(x_1, y_1)$  nu este extrem local.

În particular, rezultă inegalitatea

$$\sin x \sin y \sin(x+y) \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3, \quad \forall x, y \in (0, \pi)$$

b. Se calculează punctele critice ale funcției  $g$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

deci

$$\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z).$$

Deoarece funcția  $\cos$  este injectivă pe  $(0, \pi)$ , rezultă  $x = y = z$ . Se obține  $\cos x = \cos 3x$ , adică  $2 \sin x \sin 2x = 0$ , cu singura soluție  $x = \frac{\pi}{2}$ . Rezultă punctul critic  $(x, y, z) = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ . Derivatele parțiale de ordinul al doilea sunt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\sin x + \sin(x+y+z), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x+y+z),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -\sin z + \sin(x+y+z),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \sin(x+y+z).$$

În punctul critic matricea hessiană este  $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Polinomul car-

acteristic  $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 4$  are toate rădăcinile strict negative, deci  $\left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  este punct de maxim. Se observă că este un maxim global.

**50.** Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor:

- a.  $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36x + 9, (x, y) \in R^2$ .  
 b.  $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x, (x, y) \in R^2$ .  
 c.  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4, \forall (x, y) \in R^2$ .

**Soluție**

a. Punctele critice sunt  $(x_1, y_1) = (2, 3), (x_2, y_2) = (-2, -3)$ ; nici unul nu este punct de extrem.

b. Punctele critice sunt

$$(x_1, y_1) = (1 + \sqrt{2}, 2), (x_2, y_2) = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), (x_3, y_3) = (1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}),$$

$$(x_4, y_4) = (1 - \sqrt{2}, 2), (x_5, y_5) = (1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), (x_6, y_6) = (1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}).$$

Punctele de extrem sunt  $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$  (minime) și  $(x_4, y_4)$  (maxim).

c. Punctele critice sunt  $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ ; primul nu este punct de extrem, celelalte sunt puncte de maxim.

**51.** Să se determine extremele locale ale funcțiilor:

- a.  $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \mapsto R, f(x, y) = 4x^2 + \frac{2}{xy^2} + y^2$   
 b.  $f : R^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto R, f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

**Soluție**

a. Funcția  $f$  este de clasă  $C^2$  și are în domeniul de definiție un singur punct critic  $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ .

În punctul critic matricea hessiană este  $\begin{pmatrix} 24 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$ .  $\Delta_1 = 24 > 0$  și

$\Delta_2 = 24 \cdot 8 - 32 > 0$  deci  $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$  este punct de minim local și  $f\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) = 4$ .

b. Funcția  $f$  este de clasă  $C^2$  și are în domeniul de definiție punctele critice  $(x, x), x \in R^*$

Matricea hessiană într-un punct critic este

$$H_f(x, x) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{2\sqrt{2}|x|^3} & \frac{x}{2\sqrt{2}|x|^3} \\ \frac{x}{2\sqrt{2}|x|^3} & \frac{-x}{2\sqrt{2}|x|^3} \end{pmatrix}$$

Dacă  $x < 0$  atunci  $(x, x)$  sunt puncte de minim și  $f_{\min} = -\sqrt{2}$ ; dacă  $x > 0$ , atunci  $(x, x)$  sunt puncte de maxim și  $f_{\max} = \sqrt{2}$ .

**52.** Să se determine extremele locale ale funcțiilor:

- a.  $f : R^2 \mapsto R, f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$   
 b.  $f : R^3 \mapsto R, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + yz + 2xz$

**Soluție**

a. Funcția  $f$  este de clasă  $C^2$  și are în domeniul de definiție punctele critice  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ;  $(x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ;  $(x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Într-un punct oarecare matricea hessiană este

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Punctele  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ;  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  sunt minime locale, iar  $(0, 0)$  nu este extrem.

b. Funcția  $f$  este de clasă  $C^2$  și are în domeniul de definiție un singur punct critic  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ .

Matricea hessiană în punctul critic este  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

$\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = 3 > 0$  și  $\Delta_3 = 4 > 0$  deci  $(0, 0, 0)$  este punct de minim local strict și  $f_{\min} = 0$ .

**53.** Să se determine extremele locale ale funcției:

$$F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3xy - 15x - 12y.$$

**Soluție**

Punctele critice sunt  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-2, -1)$ ; folosind matricea hessiană, se decide natura acestor puncte.

**54.** Să se determine extremele globale ale funcțiilor:

a.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$ ,

b.  $g(x, y) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

**Soluție**

Se trece la coordonate polare și se reduce problema la a determina extremele unor funcții de o singură variabilă reală.

**55.** Să se determine extremele locale ale funcției:

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \text{ definită pentru } x > 0, y > 0, z > 0.$$

**Soluție**

Se determină punctele critice și apoi, folosind matricea hessiană, se decide natura lor.

**56.** Să se determine extremele funcțiilor:

a.  $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , definită pentru  $x^2 + y^2 < 1$ .

b.  $g(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Soluție**

a. Punctele critice sunt  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ .

b. Punctele critice sunt  $(2n\pi, 0)$  și  $((2n+1)\pi, -2)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Primele sunt puncte de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem.

**57.** Să se determine extremele următoarelor funcții:

a.  $f(x, y, z) = xy \ln(x^2 + y^2)$ .

b.  $g(x, y, z) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y$ .

**Soluție**

a. Puncte de maxim:  $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ ;

puncte de minim:  $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ .

b. Funcția are un singur punct de extrem (maxim):  $(2, 1)$ .

## 4.5 Funcții implicite

**58.** Funcția  $z = z(x, y)$  este definită implicit de ecuația

$$(y + z) \sin z - y(x + z) = 0.$$

Să se calculeze expresia:

$$E = (z \sin z) \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Soluție**

Fie  $F(x, y, z) = (y + z) \sin z - y(x + z)$ . Funcția  $z = z(x, y)$  există în vecinătatea punctelor cu proprietatea  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , adică

$$\sin z + (y + z) \cos z - y \neq 0.$$

În această ipoteză, se calculează derivatele parțiale ale funcției  $z$ , derivând relația  $F(x, y, z) = 0$  în raport cu  $x$  și respectiv  $y$ , ( $z$  este funcție de  $x$  și  $y$ ):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \sin z + (y + z) \cos z \frac{\partial z}{\partial x} - y \left( 1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + (y + z) \cos z - y}.$$

$$\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \sin z + (y + z) \cos z \frac{\partial z}{\partial y} - (x + z) - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + z - \sin z}{\sin z + (y + z) \cos z - y}.$$

Înlocuind  $\frac{\partial z}{\partial x}$  și  $\frac{\partial z}{\partial y}$  cu valorile obținute mai sus în expresia  $E$ , se obține

$$E = \frac{yF(x, y, z)}{\sin z + (y + z) \cos z - y} = 0.$$

**59.** Fie  $g \in C^1(R^2)$  și fie funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $g(y^2 - x^2, z - xy) = 0$ . Să se calculeze expresia  $E = y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Soluție**

Fie funcția  $F(x, y, z) = g(y^2 - x^2, z - xy)$ . Notăm  $u = y^2 - x^2$  și  $v = z - xy$ . Condiția de existență a funcției  $z = z(x, y)$  este  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , adică  $\frac{\partial g}{\partial v} \neq 0$ . În această ipoteză, se calculează derivatele parțiale ale funcției  $z$ :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(-2x) + \frac{\partial g}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - y \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x \frac{\partial g}{\partial u} + y \frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

$$2y \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial y} - x \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \frac{\partial g}{\partial v} - 2y \frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

Înlocuind, se obține:  $E = x^2 + y^2$ .

**60.** Fie  $a \in R$  și fie funcția  $z = z(x, y)$  definită de ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Să se calculeze diferențiala întâi și diferențiala a doua ale funcției  $z$ .

**Soluție**

Fie funcția  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ . Funcția  $z = z(x, y)$  există în vecinătatea punctelor cu proprietatea  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , adică  $z \neq 0$ . Există deci două submulțimi ale sferei de centru  $O$  și rază  $a$  pe care există câte o funcție  $z$ : semisfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$  și semisfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z < 0$ . Vom calcula diferențialele funcției  $z$  asociate primei semisfere ( $z > 0$ ):

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$



Analog,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  și deci

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dy.$$

Diferențiala a doua:

$$2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

deci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}.$$

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0,$$

deci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}.$$

În concluzie:

$$d^2z = \frac{y^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dx^2 - \frac{2xy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dxdy + \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}}dy^2$$

**61.** Funcțiile  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$  sunt definite implicit de sistemul de ecuații  $u + v = x + y$ ,  $ux + vy = 1$ . Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea ale funcțiilor  $u$  și  $v$ .

**Soluție**

Fie  $F : R^4 \mapsto R^2$ ,  $F(x, y, u, v) = (u + v - x - y, ux + vy - 1)$ . Notând  $f(x, y, u, v) = u + v - x - y$  și  $g(x, y, u, v) = ux + vy - 1$ , condiția de existență a funcțiilor  $u$  și  $v$  este  $\frac{D(f, g)}{D(u, v)} \neq 0$ , adică  $y - x \neq 0$ . În această ipoteză, derivând în raport cu  $x$  și respectiv  $y$  relațiile  $f = 0$ ,  $g = 0$ , se obține:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \text{ și } u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \text{ și } x\frac{\partial u}{\partial y} + v + y\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u+y}{y-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v+y}{y-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

Pentru a calcula derivatele parțiale de ordinul al doilea, se derivează în continuare în raport cu  $x$  și respectiv  $y$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \text{și} \quad 2\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\frac{\partial u}{\partial x}}{y-x} = \frac{2(u+y)}{(y-x)^2}.$$

Analog se calculează și celelalte derivate parțiale de ordinul al doilea.

**62.** Fie  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Funcția  $y = y(x)$  este definită implicit de ecuația

$$F(\sin x + y, \cos y + x) = 0.$$

Să se determine  $y''$  în punctele critice ale lui  $y$ .

**Soluție**

Fie  $u = \sin x + y$ ,  $v = \cos y + x$ . Condiția de existență a funcției  $y$  este  $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \sin y \neq 0$ . Derivând ecuația  $F(u, v) = 0$  în raport cu  $x$ , rezultă:

$$(*) \quad (y' + \cos x) \frac{\partial F}{\partial u} + (1 - y' \sin y) \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Se obține:

$$y' = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \cos x + \frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Derivând relația (\*) în raport cu  $x$  și înlocuind  $y' = 0$ , rezultă (în punctele critice):

$$y'' = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cos^2 x - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cos x - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial u} \sin x}{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \sin y}.$$

**63.** Funcțiile  $y = y(x)$  și  $z = z(x)$  sunt definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z & = a \\ x^2 + y^2 + z^2 & = b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze  $y''$  și  $z''$ .

**Soluție**

Fie  $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - a$ ,  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - b$  și  $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$ . Condiția de existență pentru funcțiile  $y$  și  $z$  este  $\frac{D(f,g)}{D(y,z)} \neq 0 \Leftrightarrow 2z \cos y - 2y \cos z \neq 0$ . Derivând ecuațiile  $f = 0$ ,  $g = 0$  în funcție de  $x$ , rezultă:

$$(*) \begin{cases} \cos x + y' \cos y + z' \cos z = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este

$$y' = \frac{x \cos z - z \cos x}{z \cos y - y \cos z}, \quad z' = \frac{y \cos x - x \cos y}{z \cos y - y \cos z}.$$

Derivând relațiile  $(*)$  în funcție de  $x$ , rezultă:

$$\begin{cases} y'' \cos y - (y')^2 \sin y + z'' \cos z - (z')^2 \sin z = \sin x \\ 2(y')^2 + 2yy'' + 2(z')^2 + 2zz'' = -2 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, rezultă  $y''$  și  $z''$ .

**64.** Funcțiile  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $z = z(x, y)$  sunt definite implicit de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} u + \ln v = x \\ v - \ln u = y \\ z = 2u + v \end{cases}$$

Să se calculeze  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ .

**Soluție**

Fie funcțiile:

$$f(x, y, u, v, z) = u + \ln v - x,$$

$$g(x, y, u, v, z) = v - \ln u - y,$$

$$h(x, y, u, v, z) = z - 2u - v$$

și fie  $F = (f, g, h)$ . Condiția de existență a funcțiilor  $u, v, z$  este

$$\frac{D(f, g, h)}{D(u, v, z)} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{uv} \neq 0.$$

Derivând relațiile  $f = 0, g = 0, h = 0$  în raport cu  $x$ , rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uv}{1+uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{1+uv}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2uv+v}{1+uv}.$$

Derivând relațiile  $f = 0, g = 0$  în raport cu  $y$ , rezultă:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases} .$$

Soluția sistemului este:  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u}{1+uv}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{uv}{1+uv}$ .

Derivând relațiile (\*) în raport cu  $x$ , rezultă

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{uv(u-1)}{(1+uv)^3}.$$

Analog se calculează și  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ .

**65.** Fie  $g \in C^1(\mathbb{R})$  și fie funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $xyz = e^{g(z)}$ . Să se demonstreze că  $z$  nu are puncte critice.

**Soluție**

Fie  $F(x, y, z) = xyz - e^{g(z)}$ ; condiția de existență a funcției  $z$  este

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \Leftrightarrow xy - g'(z)e^{g(z)} \neq 0.$$

Derivând ecuația  $F = 0$  în raport cu  $x$  se obține:

$$yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} - e^{g(z)} g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy - g'(z)e^{g(z)}}$$

și analog,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy - g'(z)e^{g(z)}}.$$

Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

nu are soluții, deci  $z$  nu are puncte critice.

**66.** Să se determine extremele funcției  $y = y(x)$  definite implicit de ecuația  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ .

**Soluție**

Fie  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ . Funcția  $y = y(x)$  este definită în vecinătatea punctelor pentru care  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ , adică  $3y^2 - 2x \neq 0$ . În această ipoteză, se determină punctele critice ale funcției  $y$ :

$$3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Punctele critice sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3x^2 = 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy = 0 \\ 3y^2 - 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x^2}{2} \\ x^3(27x^3 - 16) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \end{cases}.$$

Unica soluție este  $(x, y) = \left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ . Pentru a decide dacă  $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$  este punct de extrem local pentru  $y$ , vom calcula  $y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ :

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0, \Rightarrow y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right) = -3 < 0,$$

deci  $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$  este maxim local pentru  $y$  și  $y\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$ .

**67.** Să se determine extremele funcției  $z = z(x, y)$ , definite implicit de ecuația  $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$ .

**Soluție**

Fie  $F(x, y, z) = z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y)$ ; condiția de existență a funcției  $z$  este  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , adică  $3z^2 + 1 \neq 0$ . Evident, condiția este îndeplinită pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $z$ :

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + 40x - 8(y + 1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8(y + 1) - 40x}{3z^2 + 1}.$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + 40y - 8(x + 1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8(x + 1) - 40y}{3z^2 + 1}.$$

Punctele critice ale funcției  $z$  sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8(y+1)-40x}{3z^2+1} = 0 \\ \frac{8(x+1)-40y}{3z^2+1} = 0 \\ z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0 \end{cases}$$

Unica soluție a sistemului este  $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$ . Pentru a decide dacă el este punct de extrem local, se calculează derivatele parțiale ale funcției  $z$ .

$$6z \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{40}{3z^2 + 1}.$$

$$6z \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{40}{3z^2 + 1}.$$

$$6z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 8 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8}{3z^2 + 1}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = -10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = -10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = 2,$$

deci în punctul  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , funcția  $z$  are un maxim local.

**68.** Fie  $a \in R, a \neq 0$ ; să se determine extremele locale ale funcției  $z = z(x, y)$  definite implicit de ecuația  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$ .

**Soluție**

Fie  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2$ ; Condiția de existență a funcției  $z$  este  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , adică  $z \neq 0$ . În această ipoteză, se calculează derivatele parțiale ale funcției  $z$ :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \left( 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}.$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \left( 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \right) + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2 + z^2)}{z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)}$ .

$$\text{Sistemul } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ are soluțiile}$$

$$(x_1, y_1, z_1) = \left( 0, 0, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}} \right) \text{ și}$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left( 0, 0, -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}} \right).$$

Se observă că este verificată condiția  $z \neq 0$ . Derivatele parțiale de ordinul al doilea:

$$\left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left(2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

de unde rezultă  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3z^2 + y^2 + z^2 + 1}{z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}$ .

$$4y^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left(2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

de unde rezultă  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 + 3y^2 + z^2}{z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}$ .

$$\begin{aligned} & \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(2y + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \\ & + (x^2 + y^2 + z^2) \left(2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}$$

de unde rezultă  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}$ .

Calculând derivatele parțiale de ordinul al doilea în punctul critic  $(0, 0)$ , rezultă:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{1}{z}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = -\frac{z}{z^2 + 1}.$$

Deoarece  $rt - s^2 = \frac{1}{z^2 + 1} > 0$ , (și pentru  $z_1$  și pentru  $z_2$ ), rezultă că atât  $z_1$  cât și  $z_2$  au extreme locale în  $(0, 0)$ . Funcția  $z_1$  satisface condiția  $r < 0$ , deci are un maxim local în  $(0, 0)$ , iar valoarea ei în acest punct este

$$z_1(0, 0) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}.$$

Funcția  $z_2$  satisface condiția  $r > 0$ , deci are un minim local în  $(0, 0)$ , iar valoarea ei în acest punct este

$$z_2(0, 0) = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}.$$

**69.** Să se determine extremele locale ale funcției  $y = y(x)$  definite implicit de ecuația  $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$ .

**Soluție**

Fie  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3$ . Condiția de existență pentru  $y$  este  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ , adică  $3y^2 - 3x^2 \neq 0$ . În această ipoteză, se calculează  $y'$ :

$$3x^2 + 3y^2y' - 6xy - 3x^2y' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2},$$

deci punctele critice ale funcției  $y$  sunt

$$x_1 = 0, y_1(0) = \sqrt[3]{3}, x_2 = -2, y_2(-2) = -1.$$

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 6y - 12xy' - 3x^2y'' = 0 \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{-2x + 2y - 2y(y')^2 + 4xy'}{y^2 - x^2}.$$

Rezultă  $y''(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$ , deci  $x_1 = 0$  este minim local și  $y''(-2) = -\frac{2}{3}$ , deci  $x_2 = -2$  este maxim local.

**70.** Să se determine punctele de extrem ale funcției  $y = y(x)$  definite implicit de ecuația  $x^2 + y^2 - e^{2\arctg\frac{x}{y}}, y \neq 0$ .

**Soluție**

Condiția de existență a funcției  $y$  este

$$y(x^2 + y^2) + xe^{2\arctg\frac{x}{y}} \neq 0.$$

Se obține

$$y' = \frac{2ye^{\arctg\frac{x}{y}} - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) + xe^{2\arctg\frac{x}{y}}};$$

punctele critice sunt:

$$x_1 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}.$$

În aceste puncte  $y(x_1) = x_1$  și  $y(x_2) = x_2$ . Se calculează  $y''(x_{1,2})$ , etc.

**71.** Să se calculeze  $y'(1)$ ,  $y$  fiind definită implicit de  $x^3 - y - \cos y = 0$ .

**Soluție**

Condiția de existență este  $\sin y - 1 \neq 0$ ; derivând relația dată, rezultă  $y'(x) = \frac{3x^2}{1 - \sin y}$ .



**72.** Să se calculeze  $y'(0)$  și  $y''(0)$ , unde  $y$  este definită implicit de ecuația

$$e^{x^2-y^2} = \sin(x+2y) + 1.$$

**Soluție**

Se derivează ecuația dată în raport cu  $x$ .

**73.** Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi în punctul  $(1, 1)$  ale funcției  $z$  definite implicit de

$$2z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Soluție**

Se derivează relația dată în raport cu  $x$  și  $y$ .

**74.** Fie  $G \in C^\infty(R^3)$  și fie  $z = z(x, y)$  definită implicit de relația

$$z + G(x, y, z) = 0.$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $z$ .

**Soluție**

Derivând în raport cu  $x$ , se obține:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

**75.** Să se calculeze  $x'(0)$  și  $y'(0)$ , funcțiile  $x$  și  $y$  fiind definite implicit de sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} xy + 2y^2 + yz + x + y = 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \ln(x^2 + 2y^2 + z^2) = \ln 2 \end{cases}.$$

**Soluție**

Se derivează relațiile date în funcție de  $z$ .

**76.** Să se determine extremele următoarelor funcții definite implicit:

a.  $y = y(x)$ , definită de  $2yx^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ .

b.  $y = y(x)$  definită de  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ .

c.  $z = z(x, y)$ , definită de  $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$ .

**Soluție**

Aceeași metodă ca în exercițiul 70.

## 4.6 Extreme cu legături

**77.** Să se determine extremele locale ale funcției  $f(x, y, z) = xyz$  cu legătura  $x + y + z = 1$ .

### Soluție

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Fie funcțiile

$g(x, y, z) = x + y + z - 1$  și  $F(x, y, z) = f + \lambda g = xyz + \lambda(x + y + z - 1)$ .

Extremele cerute verifică sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sunt:

pentru  $\lambda_1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

pentru  $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0), \\ (x_3, y_3, z_3) = (0, 1, 0), \\ (x_4, y_4, z_4) = (0, 0, 1) \end{cases} .$

Pentru a decide natura celor patru puncte critice, se calculează diferențiala a doua a funcției  $F$ :

$$\begin{aligned} d^2F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz = \\ &= 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz). \end{aligned}$$

Pe legătură, avem  $dg = 0$ , adică  $dx + dy + dz = 0$ . Rezultă deci că restricția lui  $d^2F$  la legătura  $g = 0$  este:

$$\begin{aligned} d^2F &= 2((1-x-y) dx dy + y dx(-dx-dy) + x dy(-dx-dy)) = \\ &= 2(-y dx^2 - x dy^2 + (1-2x-2y) dx dy). \end{aligned}$$

În punctul  $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  se obține:

$$d^2F \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} (dx^2 + dx dy + dy^2),$$

care este o formă pătratică negativ definită și deci  $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  este maxim local al funcției  $f$  cu legătura  $g = 0$ .

Celelalte puncte nu sunt puncte de extrem; de exemplu, în  $(1, 0, 0)$ , rezultă

$d^2F(1,0,0) = -2dy^2 - 2dxdy$ , care are valorile proprii  $-1 \pm \sqrt{2}$ , etc. Se poate studia și semnul diferenței  $f(x, y, z) - f(1, 0, 0)$  într-o vecinătate a punctului  $(1, 0, 0)$ , restricționată la planul  $x + y + z = 1$ .

**78.** Să se calculeze valorile extreme ale funcției  $f(x, y, z) = x + y + z$  restricționate la  $\Gamma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x + 2y + z = 1\}$ .

**Soluție**

Intersecția dintre sferă și plan este un cerc deci o mulțime compactă. Funcția  $f$  fiind continuă, rezultă că este mărginită (pe  $\Gamma$ ) și își atinge marginile. Există deci  $\alpha$  și  $\beta$  în  $\Gamma$  astfel încât  $f(\alpha) = \inf_{\Gamma} f$  și  $f(\beta) = \sup_{\Gamma} f$ . Pentru a

determina aceste valori, se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $h(x, y, z) = 2x + 2y + z - 1$

și fie  $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(2x + 2y + z - 1)$ .

Se determină punctele critice ale funcției  $F$  cu legăturile date:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x + 2\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y + 2\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 2\lambda z + \mu = 0 \\ g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ h = 2x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{4} & \mu_1 = -\frac{1}{2} & (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1) \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} & \mu_2 = -\frac{11}{18} & (x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right) \end{cases} .$$

Având numai două puncte critice, într-unul dintre ele funcția va lua valoarea maximă, iar în celălalt, valoarea minimă. Se calculează  $f(0, 0, 1) = 1$  (maxim) și  $f(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}) = \frac{1}{9}$  (minim).

**79.** Să se determine extremele globale ale funcției

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$$

pe mulțimea compactă  $\Gamma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\}$ .

**Soluție**

Se determină mai întâi extremele locale ale lui  $f$  pe interiorul lui  $\Gamma$  (care este o mulțime deschisă), apoi se determină extremele lui  $f$  cu legătura  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$ .

Punctele critice ale lui  $f$  din mulțimea  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + 2z^2 < 8\}$  sunt

soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0) \\ (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 1) \\ (x_3, y_3, z_3) = (0, 0, -1) \end{cases}$$

Matricea hessiană într-un punct arbitrar este  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$ . În

punctul  $(0, 0, 0)$  matricea hessiană are și valori proprii pozitive și negative, deci originea nu este extrem local. În  $(0, 0, 1)$  și  $(0, 0, -1)$  matricea hessiană are toate valorile proprii pozitive, deci acestea sunt amândouă minime locale.

Valoarea funcției în aceste puncte este  $f(0, 0, 1) = f(0, 0, -1) = -1$ .

Se determină acum extremele locale ale lui  $f$  cu legătura

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0.$$

Fie  $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 8)$ . Se rezolvă

$$\text{sistemul: } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x - y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - x + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 4z^3 - 4z + 4\lambda z = 0 \\ g = x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Din primele două ecuații rezultă  $x = y$  sau  $\lambda = -\frac{5}{2}$ . Cazul  $x = y$  conduce la soluțiile:

$$\lambda_1 = -3, (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, \pm 2),$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2}, (x_2, y_2, z_2) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right), (x_3, y_3, z_3) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

În aceste puncte funcția  $f$  ia valorile:

$$f(0, 0, \pm 2) = 8, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{23}{4}.$$

Cazul  $\lambda = -\frac{5}{2}$  conduce la sistemul  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 8 \\ z(2z^2 - 7) = 0 \end{cases}$  cu soluțiile:

$$(x_4, y_4, z_4) = (2, -2, 0), (x_5, y_5, z_5) = (-2, 2, 0)$$

$$(x_6, y_6, z_6) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right) (x_7, y_7, z_7) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

În aceste puncte funcția  $f$  ia valorile:

$$f(2, -2, 0) = f(-2, 2, 0) = 20,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \frac{33}{4}.$$

Comparând valorile funcției  $f$ , rezultă că valoarea minimă a funcției (pe

mulțimea  $\Gamma$ ) este  $f(0, 0, 1) = f(0, 0, -1) = -1$ , iar valoarea maximă este  $f(2, -2, 0) = f(-2, 2, 0) = 20$ .

**80.** Să se determine maximul și minimul funcției

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

pe mulțimea  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Soluție**

Funcția își atinge marginile pe mulțimea  $K$ . Determinăm mai întâi extremele funcției pe mulțimea deschisă  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ . Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

nu are soluții în interiorul cercului unitate. Rezultă că valorile extreme se vor atinge pe cerc. Pentru a le determina, aflăm extremele funcției  $f$  cu legătura  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Funcția lui Lagrange este

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

și deci rezultă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sunt:

$$\lambda_1 = -1 - \frac{\sqrt{13}}{2}, x_1 = -\frac{3\sqrt{13}}{13}, y_1 = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\lambda_2 = -1 + \frac{\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3\sqrt{13}}{13}, y_2 = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Calculând valorile funcției  $f$  în aceste puncte se obțin valorile extreme cerute.

**81.** Fie  $D = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ . Să se determine extremele locale ale funcției  $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ .

**Soluție**

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie legătura  $g(x, y) = x + y - 1$  și fie

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + \lambda(x + y - 1).$$

$$\text{Sistemul } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 1 + \lambda = 0 \\ g = x + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ are soluțiile } \lambda = 0, (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Matricea hessiană a funcției  $F$  (într-un punct arbitrar, deci și pe  $D$ ) este  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , deci punctul  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  este minim local.

**82.** Să se determine punctele cele mai depărtate de origine care se găsesc pe suprafața de ecuație  $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ .

**Soluție**

Problema este echivalentă cu a găsi extremele funcției

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

cu legătura  $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ .

**83.** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

pe mulțimea  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

**Soluție**

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange; fie

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \text{ și } F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

$$\text{Sistemul } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(2 + \lambda)x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(1 + \lambda)y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2(3 + \lambda)z = 0 \\ g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ are soluțiile}$$

$$\lambda_1 = -1, (x, y, z) \in \{(0, 1, 0); (0, -1, 0)\},$$

$$\lambda_2 = -2, (x, y, z) \in \{(1, 0, 0); (-1, 0, 0)\},$$

$$\lambda_3 = -3, (x, y, z) \in \{(0, 0, 1); (0, 0, -1)\}.$$

Sfera unitate este mulțime compactă, deci funcția  $f$  își atinge marginile; rezultă  $f_{\min} = f(0, 1, 0) = 1$  și  $f_{\max} = f(0, 0, 1) = 3$ .

**84.** Să se determine valorile extreme ale produsului  $xy$  când  $x$  și  $y$  sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuație  $x^2 + 2y^2 = 1$ .

**Soluție**

Problema este echivalentă cu a găsi valorile extreme ale funcției  $f(x, y) = xy$  cu legătura  $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ .

Considerăm funcția  $F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$ . Din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 4\lambda y = 0 \\ g = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

rezultă  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Pentru  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , rezultă:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ și } (x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Pentru  $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ , rezultă:

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ și } (x_4, y_4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Valorile extreme ale funcției continue  $f$  pe elipsă (care este mulțime compactă) sunt:  $f(x_1, y_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$  (minim) și  $f(x_3, y_3) = \frac{\sqrt{2}}{4}$  (maxim).

**85.** Fie  $a, b, c \in R$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ; să se determine valorile extreme ale funcției

$$f : R^3 \mapsto R, f(x, y, z) = ax + by + cz,$$

pe mulțimea  $D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ .

### Soluție

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$  și  $F(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$

Mulțimea  $D$  este compactă. Deoarece  $f$  este continuă, rezultă că  $f$  este își atinge marginile pe  $D$ . În concluzie,  $f$  are cel puțin un punct de minim global condiționat de  $g$  și un punct de maxim global condiționat de  $g$ .

Sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = a - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = b - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = c - 2\lambda z = 0 \\ g = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

are soluțiile  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2r}$ ,  $(x, y, z) = \left(\frac{a}{2\lambda}, \frac{b}{2\lambda}, \frac{c}{2\lambda}\right)$ .

Deoarece  $f$  are cel puțin două puncte de extrem globale pe  $D$ , deducem că valorile extreme ale lui  $f$  sunt  $\pm r \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

**86.** Să se determine extremele funcției

$$f : R^3 \mapsto R, f(x, y, z) = xyz$$

pe mulțimea  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$

**Soluție**

Fie  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $h(x, y, z) = x + y + z$  și

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

$$\text{Sistemul } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0 \\ g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ h = x + y + z = 0 \end{cases} \text{ are soluțiile}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$$

Se obțin trei puncte de minim în care  $f$  are valoarea  $\frac{-1}{3\sqrt{6}}$  și trei puncte de maxim în care  $f$  are valoarea  $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ .

**87.** Funcția  $z = z(x, y)$  este definită implicit de ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Să se determine extremele locale ale lui  $z$  cu legătura  $x = 0$ .

**Soluție**

Fie  $F(x, y, z) = z(x, y) + \lambda x$ . Se obține sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda = \frac{1-x}{z-2} + \lambda \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+y}{z-2} \\ x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sunt  $(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, 2 + \sqrt{15})$  și  $(x_2, y_2, z_2) = (0, -1, 2 - \sqrt{15})$ .

Calculându-se diferențiala a doua a funcției  $F$  (pe legătură) se obține

$$D^2F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Rezultă că funcția  $z_1$  are un maxim în  $(0, -1)$  iar funcția  $z_2$  are un minim în  $(0, -1)$ .

**88.** Să se determine extremele funcției  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$  pe mulțimea  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

**Soluție**

Funcția  $f$  este continuă, iar mulțimea dată este compactă, deci există cel puțin două puncte de extrem (în care  $f$  își atinge valorile extreme). Fie



$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ ; rezultă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sistemul format din primele trei ecuații are soluțiile  $x = y = z = 0$  și  $x = y = z = -\frac{2}{3}\lambda$ . Prima soluție nu verifică ultima ecuație; cea de a doua, înlocuită în ultima ecuație dă  $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Se obțin soluțiile  $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  și  $x_2 = y_2 = z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Calculând valorile funcției  $f$  în aceste puncte, rezultă valorile extreme ale lui  $f$ .

**89.** Să se calculeze extremele următoarelor funcții pe mulțimile indicate:

**a.**  $f(x, y) = e^{xy}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + y = 3$ .

**b.**  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x - y + z = 0$ .

**Soluție**

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**90.** Să se determine valorile extreme ale funcției  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - xy$  pe mulțimea  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 2\}$ .

**Soluție**

Se determină mai întâi extremele (libere) pe mulțimea deschisă

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16, y > 2\}.$$

Apoi se rezolvă două probleme de extrem cu legături, legăturile fiind

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ și respectiv } y = 2.$$

**91.** Fie matricea (simetrică de ordinul  $n$ ),

$$A = (a_{ij})_{ij}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Să se determine valorile extreme ale funcției (forme pătratice)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

pe sfera  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

**Soluție**

Construim funcția lui Lagrange

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1).$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - 2\lambda x_2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - 2\lambda x_n = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0 \end{cases}$$

Sistemul se scrie sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

Evident, sistemul liniar (format din primele  $n$  ecuații) are soluții nenule dacă și numai dacă  $\lambda$  este valoare proprie a matricei  $A$  (valorile proprii sunt reale deoarece  $A$  este matrice simetrică). În acest caz, pentru a calcula valorile extreme ale funcției  $f$ , se înmulțește prima ecuație de mai sus cu  $x_1$ , a doua cu  $x_2$ , ș.a.m.d., a  $n$ -a ecuație cu  $x_n$  și se adună membru cu membru cele  $n$  relații obținute; rezultă:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0$$

În concluzie, pe sfera unitate are loc egalitatea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda$ . Rezultă că valorile minimă și maximă ale funcției  $f$  sunt cea mai mică și (respectiv) cea mai mare valoare proprie ale matricei  $A$ .

## Capitolul 5

# Integrale improprii și cu parametri

### 5.1 Noțiuni teoretice

#### Integrale improprii

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și fie  $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$  o funcție local integrabilă (integrabilă pe orice interval compact  $[u, v] \subseteq [a, b)$ ). Integrala improprie (în  $b$ )  $\int_a^b f(x)dx$  se numește convergentă dacă limita

$$\lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită; altfel, integrala se numește divergentă.

Dacă  $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  este local integrabilă, atunci integrala improprie (la  $\infty$ )  $\int_a^\infty f(x)dx$  se numește convergentă dacă limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită.

Integrala improprie  $\int_a^b f(x)dx$  ( $b$  poate fi și  $\infty$ ) se numește absolut convergentă dacă integrala  $\int_a^b |f(x)| dx$  este convergentă.

#### Exemple

**a.** Fie  $a \in (0, \infty)$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci integrala  $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$  este convergentă dacă și

numai dacă  $\alpha > 1$ .

**b.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci integrala  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha < 1$ .

**Demonstrație**

**a.** Fie  $\alpha \neq 1$ ; atunci:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) < \infty \text{ dacă și numai dacă } \alpha > 1.$$

Dacă  $\alpha = 1$ , atunci:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln a) = \infty.$$

**b.** Analog.

**Criterii de convergență**

**Criteriul lui Cauchy**

Fie  $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ , local integrabilă; atunci integrala  $\int_a^b f(t) dt$  este convergentă dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b)$  astfel încât  $\forall x, y \in (b_\varepsilon, b)$  să rezulte  $\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon$ .

**Criteriul de comparație**

Fie  $f, g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ , ( $b$  poate fi și  $\infty$ ) astfel încât  $0 \leq f \leq g$ ;

**i.** dacă integrala  $\int_a^b g(x) dx$  este convergentă, atunci și integrala  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.

**ii.** dacă integrala  $\int_a^b f(x) dx$  este divergentă, atunci și integrala  $\int_a^b g(x) dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație la limită**

Fie  $f, g : [a, b) \mapsto [0, \infty)$  astfel încât există limita:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**i.** Dacă  $\ell \in [0, \infty)$  și  $\int_a^b g(x) dx$  este convergentă, atunci și  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.

**ii.** Dacă  $\ell \in (0, \infty)$  sau  $\ell = \infty$  și  $\int_a^b g(x) dx$  este divergentă, atunci și

$\int_a^b f(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație cu  $\frac{1}{x^\alpha}$**

Fie  $a \in R$  și  $f : [a, \infty) \mapsto [0, \infty)$ , local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x).$$

i. Dacă  $\alpha > 1$  și  $0 \leq \ell < \infty$ , atunci  $\int_a^\infty f(x)dx$  este convergentă.

ii. Dacă  $\alpha \leq 1$  și  $0 < \ell \leq \infty$ , atunci  $\int_a^\infty f(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație cu  $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$**

Fie  $a < b$  și  $f : [a, b) \mapsto [0, \infty)$ , local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha f(x).$$

i. Dacă  $\alpha < 1$  și  $0 \leq \ell < \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă.

ii. Dacă  $\alpha \geq 1$  și  $0 < \ell \leq \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă.

**Criteriul lui Abel**

Fie  $f, g : [a, \infty) \mapsto R$  cu proprietățile:

$f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\int_a^\infty f'(x)dx$  absolut convergentă,

$g$  este continuă, iar funcția  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  este mărginită pe  $[a, \infty)$ .

Atunci integrala  $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$  este convergentă.

**Integrale cu parametri**

Fie  $A \neq \emptyset$  și  $[a, b] \subset R$  un interval compact. Fie  $f : [a, b] \times A \mapsto R$  o funcție (de două variabile reale) astfel încât pentru orice  $y \in A$  aplicația  $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in R$  este integrabilă Riemann. Funcția definită prin:

$$F : A \mapsto R, F(y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

se numește integrală cu parametru.

**Continuitatea integralei cu parametru**

Dacă  $f : [a, b] \times A \mapsto R$  este continuă, atunci integrala cu parametru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ este funcție continuă.}$$

**Formula lui Leibniz de derivare**

Fie  $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto R$  o funcție continuă astfel încât derivata parțială  $\frac{\partial f}{\partial y}$  există și este continuă pe  $[a, b] \times (c, d)$ . Atunci integrala cu parametru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ este derivabilă și}$$

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \forall y \in (c, d).$$

**Formula generală de derivare**

Fie  $f : [a, b] \times (c, d) \mapsto R$  o funcție continuă astfel încât derivata parțială  $\frac{\partial f}{\partial y}$  există și este continuă pe  $[a, b] \times (c, d)$  și fie  $\varphi, \phi : (c, d) \mapsto [a, b]$  două funcții de clasă  $C^1$ . Atunci funcția  $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} f(x, y) dx$  este derivabilă și:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\phi(y), y)\phi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y), \forall y \in (c, d).$$

**Schimbarea ordinii de integrare**

Fie  $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto R$  o funcție continuă; atunci:

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Integrale improprii cu parametri**

Fie  $f : [a, b) \times A \mapsto R$  o funcție cu proprietatea că pentru orice  $y \in A$ , aplicația  $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in R$  este local integrabilă și integrala (improprie)  $\int_a^b f(x, y) dx$  converge. Se poate defini în acest caz funcția

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

numită integrală improprie cu parametru.

Integrala  $\int_a^b f(x, y)dx$  se numește uniform convergentă (în raport cu  $y$ ) pe mulțimea  $A$  dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b) \text{ astfel încât } \left| \int_t^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \forall t \in (b_\varepsilon, b), \forall y \in A.$$

### Continuitatea integralei improprie cu parametru

Dacă  $f : [a, b) \times A \mapsto R$  este continuă și dacă integrala  $\int_a^b f(x, y)dx$  este uniform convergentă pe  $A$ , atunci funcția  $F : A \mapsto R$ ,  $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  este continuă.

### Derivarea integralei improprie cu parametru

Fie  $f : [a, b) \times (c, d) \mapsto R$  o funcție continuă astfel încât derivata parțială  $\frac{\partial f}{\partial y}$  există și este continuă pe  $[a, b) \times (c, d)$  și pentru orice  $y \in (c, d)$  fixat

integrala  $\int_a^b f(x, y)dx$  este convergentă. Dacă integrala  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$  este uniform convergentă pe  $(c, d)$ , atunci integrala improprie cu parametru  $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  este derivabilă și

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \forall y \in (c, d).$$

### Schimbarea ordinii de integrare în integrala improprie

Dacă  $f : [a, b) \times [c, d] \mapsto R$  este continuă și dacă integrala  $\int_a^b f(x, y)dx$  este uniform convergentă pe  $(c, d)$ , atunci :

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

### Criterii de uniform convergență

#### Criteriul lui Cauchy

Fie  $f : [a, b) \times A \mapsto R$  o funcție cu proprietatea că pentru orice  $y \in A$ , aplicația  $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in R$  este local integrabilă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i. integrala improprie  $\int_a^b f(x, y)dx$  este uniform convergentă pe  $A$ .

ii.  $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b)$  astfel încât pentru orice  $u, v \in (b_\varepsilon, b)$  rezultă

$$\left| \int_u^v f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \forall y \in A.$$

### Criteriul de comparație

Fie  $f : [a, b) \times A \mapsto R$  o funcție cu proprietatea că pentru orice  $y \in A$ , aplicația  $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in R$  este local integrabilă și fie  $g : [a, b) \mapsto R$  astfel încât  $|f(x, y)| \leq g(x), \forall x \in [a, b), \forall y \in A$ . Dacă integrala  $\int_a^b g(x) dx$  este convergentă, atunci integrala  $\int_a^b f(x, y) dx$  este uniform convergentă.

### Funcțiile lui Euler

Fie  $\Gamma$  și  $B$  funcțiile (integralele) lui Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0,$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0.$$

### Proprietățile uzuale ale funcțiilor $\Gamma$ și $B$

- a.  $\Gamma(1) = 1$ .
- b.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ .
- c.  $B(p, q) = B(q, p)$ .
- d.  $\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall \alpha \in (0, 1)$ .
- e.  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .
- f.  $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$ .
- g.  $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in N$ .
- h.  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .
- i.  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 2^{-n} \sqrt{\pi}$ .

## 5.2 Integrale improprii

Aplicand criteriile de comparație cu  $\frac{1}{x^\alpha}$  și  $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ , să se studieze natura integralelor următoare (exercițiile 1-10):



$$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**Soluție**

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ , deci integrala este divergentă.

$$2. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Soluție**

$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , deci integrala este convergentă.

$$3. \int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2} dx.$$

**Soluție**

$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin x}{1-x^2} = \frac{\sin 1}{2}$ , deci integrala este divergentă.

Următoarele integrale sunt improprii în ambele capete.

$$4. \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}} dx.$$

**Soluție**

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}} = 1$ , deci integrala este divergentă, (deși în  $x = 1$  integrala este convergentă).

$$5. \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} dx.$$

**Soluție**

Integrala este convergentă:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1,1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$ .

$$6. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

**Soluție**

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = 1$ , deci integrala este convergentă la infinit, dar este divergentă în  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = \frac{3}{2}$ , deci integrala este divergentă.

$$7. \int_{-1}^{\infty} \frac{x^{2n} e^{-x}}{\sqrt{1+x}} dx, n \in N.$$

**Soluție**

Integrala este convergentă pentru orice  $n \in N$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n} e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{x^{2n} e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = 0.$$

$$8. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \alpha > 0.$$

**Soluție**

Cu schimbarea de variabilă  $\ln x = u$ , obținem integrala  $\int_0^{\infty} \frac{du}{u^\alpha}$ , care este divergentă pentru orice  $\alpha > 0$ .

$$9. \int_0^1 \frac{x^m - 1}{\ln x} dx, m \in N - \{0\}.$$

**Soluție**

Integrala este convergentă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \frac{x^m - 1}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^m - 1}{\ln x} = 0.$$

$$10. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^m} dx, a > 0, m \in N - \{0\}.$$

**Soluție**

Dacă  $m = 1$ , integrala este divergentă; dacă  $m > 1$ , integrala este convergentă.

11. Să se arate că integrala  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

**Soluție**

Convergența ( la  $\infty$  ) rezultă aplicând criteriul lui Abel:  $f(x) = \frac{1}{x}$  și  $g(x) = \sin x$ . În 0 integrala este convergentă deoarece funcția  $\frac{\sin x}{x}$  se poate prelungi prin continuitate.

Presupunem acum prin absurd ca integrala  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  ar fi absolut convergentă. Atunci, din inegalitatea:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x|,$$

ar rezulta (aplicând criteriul de comparație) că integrala  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$  este convergentă; de aici, ar rezulta (întrucât integrala  $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$  este convergentă, conform criteriului lui Abel), că și integrala  $\int_0^{\infty} \frac{1}{2x} dx$  ar fi convergentă, ceea ce constituie o contradicție.

**5.3 Integrale cu parametri**

**12.** Să se studieze continuitatea funcției

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2} dx, \forall y \in R.$$

**Soluție**

Fie  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{1+x^2}$ ,  $(x, y) \in [0, \infty) \times R$ . Evident,  $f$  este funcție continuă. Demonstrăm acum că integrala (improprie) cu parametru

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dx$$

este uniform convergentă în raport cu  $y$  pe  $R$  și deci funcția  $F$  este continuă. Evident, are loc inegalitatea:

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1+x^2}, \forall (x, y) \in [0, \infty) \times R.$$

Integrala improprie  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  este convergentă și deci, conform criteriului de comparație, integrala dată este uniform convergentă.

**13.** Fie  $f : [0, 1] \times (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$  și fie integrala parametru  $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ . Să se calculeze:

- i.  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx$ ,
- ii.  $\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx$ .

**Soluție**

i. Pentru orice  $y > 0$ , avem:

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{y^2}}.$$

În consecință, rezultă:  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = \frac{1}{2}$ .

ii. Pe de altă parte:  $\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ .

**14.** Fie  $f(x, y) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \in [0, 1] \times (0, \infty) \\ \ln x & \text{dacă } (x, y) \in (0, 1] \times \{0\} \end{cases}$

și fie  $F(y) = \begin{cases} \int_0^1 f(x, y) dx & \text{dacă } y > 0 \\ -1 & \text{dacă } y = 0 \end{cases}$

i. Să se demonstreze că funcția  $F$  este continuă.

ii. Să se calculeze  $F'(0)$ .

iii. Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) dx$ .

**Soluție**

i. Pentru orice  $y > 0$ , integrând prin părți, obținem:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 f(x, y) dx = x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx = \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Pentru  $y = 0$ , obținem  $F(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx = \int_0^1 (-1) dx = -1$ .

Funcția  $F$  este continuă în 0:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \sqrt{1+y^2} - 1 + y \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = -1.$$

ii. Derivata  $F'(0)$  se calculează cu definiția:

$$F'(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F(y) - F(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{y} \ln \sqrt{1+y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

iii. Pentru orice  $x \in (0, 1]$ , avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \ln x}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y}{x^2} = 0.$$

Rezultă  $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) dx = 0$ .

**15.** Fie  $f : [0, \infty) \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = ye^{-xy}$  și fie integrala cu parametru  $F(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$ ,  $\forall y \in [0, 1]$ . Să se studieze continuitatea funcției  $F$ .

**Soluție**

Evident,  $F(0) = 0$ ; pentru orice  $y \in (0, 1]$ , avem:

$$F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy} dx = -e^{-xy} \Big|_0^\infty = 1,$$

deci  $F$  nu este continuă în 0.

**16.** Fie  $\alpha > 0$ . Să se calculeze  $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ .

**Soluție**

Considerăm integrala (cu parametrul  $y > 0$ ):

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Sunt verificate ipotezele teoremei de derivare sub integrală și obținem:

$$F'(y) = \int_0^\infty -e^{-yx} \sin x dx = -\frac{1}{y^2 + 1}.$$

Rezultă deci  $F(y) = -\operatorname{arctg}y + \frac{\pi}{2}$ ; în concluzie:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Se arată simplu (printr-o schimbare de variabilă) că:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \forall \alpha > 0.$$

Analog, dacă  $\alpha < 0$ , atunci  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$ .

**17.** Fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; să se calculeze  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \cos \beta x}{x} dx$ .

**Soluție**

Se transformă produsul  $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$  în sumă și apoi se aplică rezultatul din exercițiul anterior.

**18.** Să se calculeze integrala  $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ , folosind integrala cu

parametru  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx, \alpha > 0$ .

**Soluție**

Prin derivare în raport cu  $\alpha$ , obținem:

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg}\alpha.$$

Primitivele acestei funcții sunt:  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \ln(1+\alpha^2) + k, k \in \mathbb{R}$ . Dar  $F(0) = 0$  și deci  $k = 0$ . Rezultă  $J = F(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

**19.** Să se calculeze integrala:

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x) dx, \forall y > 0.$$

**Soluție**

Dacă  $y = 1$ , atunci, evident,  $F(1) = 0$ .

Fie  $y > 0, y \neq 1$ ; atunci:

$$F'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y \sin^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} dx = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2y \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+y^2u^2)(1+u^2)} du = \\
&= \frac{2y}{1-y^2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+y^2u^2} - \frac{1}{1+u^2} \right) = \frac{\pi}{1+y}.
\end{aligned}$$

Rezultă  $F(y) = \pi \ln(1+y) + k$ , unde  $k$  este o constantă ce se determină din condiția  $F(1) = 0$ ; se obține  $k = -\pi \ln 2$ , și deci  $F(y) = \pi \ln \frac{1+y}{2}$ .

**20.** Pentru orice  $a > 0, b > 0$ , să se calculeze  $J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos(\ln x) dx$ .

**Soluție**

Integrala  $J$  se poate scrie și sub forma:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos(\ln x) dx = \int_0^1 \cos(\ln x) \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \\
&= \int_a^b \left( \int_0^1 x^y \cos(\ln x) dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Vom calcula mai întâi integrala:  $J_1 = \int_0^1 x^y \cos(\ln x) dx$ , folosind schimbarea de variabilă:  $t = \ln x$ ; obținem:  $J_1 = \frac{y+1}{1+(y+1)^2}$ , și deci  $J = \frac{1}{2} \ln \frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}$ .

**21.** Să se calculeze integralele:

$$J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \alpha > 0, \alpha \neq 1 \text{ și } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

**Soluție**

$J'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}$ . Pentru a calcula ultima integrala facem schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} x$ ; în final obținem  $J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha)$  și  $I = \frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**22.** Să se calculeze integralele:

**a.**  $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \right) \frac{dx}{\cos x}, |a| < 1.$

**b.**  $G(a) = \int_0^\infty \frac{\arctg(ax)}{x(1+x^2)} dx, a \in R, |a| \neq 1.$

**Soluție**

a.  $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x} dx$ ; cu schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} x$ , obținem:

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{2}{t^2 + (\sqrt{1 - a^2})^2} dt = \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1 - a^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}},$$

și deci  $F(a) = \pi \operatorname{arcsin} a$ .

b.  $G'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + a^2 x^2)} = \frac{\pi}{2(1 + a)}$  și deci  $G(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a)$ .

**23.** Să se calculeze integralele:

a.  $J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx, a > 0, b > 0, a \neq b$ .

b.  $F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, |a| < 1$ .

**Soluție**

a. Derivând în raport cu  $a$ , obținem:

$$\begin{aligned} J' &= \int_0^{\infty} \frac{2a}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2a}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{a^2 + x^2} - \frac{1}{b^2 + x^2} \right) dx = \frac{\pi}{b(a + b)}. \end{aligned}$$

Rezultă deci  $J = \frac{\pi}{b} \ln(a + b) + K(b)$ . Pentru a calcula  $K(b)$ , calculăm

$$\begin{aligned} J(b, b) &= \int_0^{\infty} \frac{\ln(b^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(b^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 t)}{b^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 t} b(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt = \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{b^2}{\cos^2 t} dt = \frac{\pi}{b} \ln b - \frac{2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt. \end{aligned}$$

Ultima integrală se poate calcula cu schimbarea de variabilă  $t = \frac{\pi}{2} - y$  și se obține

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Rezultă  $J(b, b) = \frac{\pi}{b} \ln(2b)$  și deci  $K(b) = 0$ .

b. Derivând în raport cu  $a$ , obținem:

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1 - a^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}} dx =$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a}{1-a^2 \sin^2 t} dt = -\frac{2a}{1-a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2} = -\frac{a\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

deci  $F(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + k$ ; dar  $F(0) = 0$ , deci  $F(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$ .

**24.** Să se calculeze integrala:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Soluție**

Derivata funcției  $J$  este:

$$\begin{aligned} J'(a) &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+a^2 \sin^2 t) \cos t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+(1+a^2)u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + C,$$

constanta  $C$  calculându-se din  $J(0) = 0$ . În final se obține:

$$J(a) = \ln(a + \sqrt{1+a^2}).$$

### 25. Formula lui Froullani

Fie  $0 < a < b$  și fie  $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  o funcție continuă și mărginită astfel

încât integrala  $\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  este convergentă. Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

**Soluție**

Vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$\int_u^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \forall u > 0. \quad (*)$$

Fie  $u > 0$ ; cu schimbarea de variabilă  $bx = t$ , obținem:

$$\int_u^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bu}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Analog, se demonstrează și egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{au}^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalități rezultă egalitatea (\*). Demonstrăm acum formula lui Froullani; folosind egalitatea (\*), avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Pentru a calcula ultima integrală considerăm funcția

$$h(u) = \sup_{t \in [au, bu]} |f(t) - f(0)|.$$

Din continuitatea funcției  $f$ , rezultă  $\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = 0$ . Evident, avem:

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + \int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t} dt.$$

Prima integrală tinde la 0 pentru  $u \mapsto 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt \right| &\leq \int_{bu}^{au} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt \leq \\ &\leq \int_{bu}^{au} \frac{h(u)}{t} dt = h(u) \ln \frac{a}{b} \mapsto 0 \text{ atunci când } u \mapsto 0. \end{aligned}$$

În concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{u \rightarrow 0} \int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

**26.** Fie  $0 < a < b$ ; să se calculeze integralele:

- a.  $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$   
 b.  $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx.$

**Soluție**

Se aplică formula lui Froullani.

**27.** Să se calculeze, folosind funcțiile  $\Gamma$  și  $B$ , integralele:

a.  $\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx, p > 0.$

b.  $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx.$

c.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} dx.$

**Soluție**

a. Cu schimbarea de variabilă  $x^p = y$ , obținem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}} e^{-y} dy = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

În cazul particular  $p = 2$ , obținem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b. Folosind proprietățile funcțiilor lui Euler, obținem:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

c. Cu schimbarea de variabilă  $x^3 = y$ , obținem:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{1+y} dy = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

**28.** Să se calculeze integralele:

a.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1.$

b.  $\int_0^1 x^{p+1} (1-x^m)^{q-1} dx, p > 0, q > 0, m > 0.$

c.  $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0.$

d.  $\int_0^1 \ln^p \left( \frac{1}{x} \right) dx, p > -1.$

e.  $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}.$

**Soluție**

a. Cu schimbarea de variabilă  $\sin^2 x = y$ , obținem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}} (1-y)^{\frac{q-1}{2}} dy = \frac{1}{2} B \left( \frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2} \right).$$

b. Cu schimbarea de variabilă  $x^m = y$ , obținem:

$$\int_0^1 x^{p+1} (1-x^m)^{q-1} dx = \frac{1}{m} B \left( \frac{p+2}{m}, q \right).$$

c. Cu schimbarea de variabilă  $x^q = y$ , obținem:

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx = \frac{1}{q} \int_0^\infty y^{\frac{p+1}{q}-1} e^{-y} dy = \frac{1}{q} \Gamma \left( \frac{p+1}{q} \right).$$

d. Cu schimbarea de variabilă  $\ln \left( \frac{1}{x} \right) = y$ , obținem:

$$\int_0^1 \ln^p \left( \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^\infty y^p e^{-y} dy = \Gamma(p+1).$$

e. Cu schimbarea de variabilă  $x^n = y$ , obținem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1} (1-y)^{-\frac{1}{n}} dy = \frac{1}{n} B \left( \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

**29.** Să se calculeze integrala  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos x dx.$

**Soluție**

Folosind dezvoltarea în serie de puteri (în jurul lui 0) a funcției  $\cos$  și teorema de integrare termen cu termen a seriilor de puteri, obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos x dx &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty \frac{1}{2} y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{2} \Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2n)! 2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}.$$

**30.** Să se calculeze în funcție de  $B$  integralele:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \quad \text{și} \quad J = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

**Soluție**

Pentru  $I$  se face schimbarea de variabilă  $x = t^{\frac{1}{3}}$ ; rezultă:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Pentru calculul lui  $J$  se face schimbarea de variabilă  $x = t^{-\frac{1}{3}}$ ; rezultă:

$$J = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

**31.** Să se calculeze integralele lui Fresnel:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx \quad \text{și} \quad J = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

**Soluție**

Convergența celor două integrale rezultă din criteriul lui Abel și cu schimbarea de variabilă  $x^2 = y$ . Calculăm acum:

$$J - iI = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx.$$

Cu schimbarea de variabilă  $x^2 = -it^2$  și folosind relația  $\Gamma(1) = 1$ , obținem  $I = J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .



## Capitolul 6

# Măsură și integrală

### 6.1 Noțiuni teoretice

#### Spații măsurabile

Fie  $X$  o mulțime nevidă și fie  $\mathcal{P}(X)$  mulțimea părților lui  $X$ . O submulțime  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  se numește  $\sigma$ -algebră pe  $X$  dacă verifică următoarele proprietăți:

- i.  $X \in \mathcal{A}$ .
- ii. dacă  $A \in \mathcal{A}$  atunci  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ .
- iii. dacă  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$  atunci  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

În acest caz  $(X, \mathcal{A})$  se numește spațiu măsurabil iar elementele  $\sigma$ -algebrei  $\mathcal{A}$  se numesc mulțimi măsurabile.

Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $X$ , atunci:

- i.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- ii. dacă  $A, B \in \mathcal{A}$  atunci  $A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$ .
- iii. dacă  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$  atunci  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .
- iv. dacă  $(\mathcal{A}_i)_{i \in J}$  sunt  $\sigma$ -algebre pe  $X$  atunci intersecția  $\bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i$  este  $\sigma$ -algebră pe  $X$ .

Dacă  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$  atunci  $\sigma$ -algebra generată de  $\mathcal{C}$  se notează  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$  și este definită prin

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \bigcap \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ este } \sigma\text{-algebră pe } X, \text{ și } \mathcal{B} \supseteq \mathcal{C} \}.$$

Dacă  $(Y, d)$  este un spațiu metric, atunci  $\sigma$ -algebra mulțimilor Boreliene pe  $Y$  este  $\sigma$ -algebra generată de familia mulțimilor deschise din  $Y$ . În cazul particular  $Y = \mathbb{R}$ ,  $\sigma$ -algebra mulțimilor Boreliene (pe  $\mathbb{R}$ ) coincide

cu  $\sigma$ -algebra generată de oricare din următoarele tipuri de intervale:

$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, b) \mid b \in R\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) \mid a \in R\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(a, b) \mid a, b \in R\},$$

deoarece orice mulțime deschisă din  $R$  este reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise.

### Funcții măsurabile

Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu cu măsură și  $(Y, d)$  un spațiu metric; o aplicație  $f : X \mapsto Y$  se numește măsurabilă dacă  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B$  mulțime Boreliană din  $Y$ .

Dacă  $A \subseteq X$ , atunci funcția caracteristică  $\chi_A : X \mapsto R$  este măsurabilă dacă și numai dacă  $A \in \mathcal{A}$ .

O aplicație  $s : X \mapsto R$  se numește simplă (sau etajată) dacă mulțimea  $s(X)$  este finită, sau, echivalent, dacă există  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}(X)$  și  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$  astfel încât  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ . Evident,  $s$  este măsurabilă dacă și numai dacă

mulțimile  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt măsurabile.

Are loc următorul rezultat de aproximare:

Orice funcție măsurabilă și pozitivă este limita punctuală a unui șir crescător de funcții simple măsurabile și pozitive.

### Spații cu măsură

Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu măsurabil; o aplicație

$$\mu : \mathcal{A} \mapsto [0, \infty]$$

se numește măsură (pe  $X$ ) dacă:

**i.**  $\mu(\emptyset) = 0$

**ii.** pentru orice  $(A_n)_{n \in N} \subseteq \mathcal{A}$  astfel încât  $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$  rezultă

$$\mu \left( \bigcup_{n \in N} A_n \right) = \sum_{n \in N} \mu(A_n).$$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  se numește spațiu cu măsură. Proprietatea **ii** de mai sus se numește numărabil-aditivitate.

Dacă  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  este un spațiu cu măsură, atunci:

**i.**  $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ . (monotonie).

**ii.** pentru orice  $(A_n)_{n \in N} \subseteq \mathcal{A}$  rezultă

$$\mu \left( \bigcup_{n \in N} A_n \right) \leq \sum_{n \in N} \mu(A_n) \quad (\text{numărabil-subaditivitate}).$$



**Egalitate aproape peste tot**

O mulțime măsurabilă  $A \in \mathcal{A}$  se numește de măsură nulă dacă  $\mu(A) = 0$ . Două funcții măsurabile se numesc egale aproape peste tot (se notează  $f = g$  (a.p.t.)) dacă mulțimea  $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$  este de măsură nulă. Relația de egalitate aproape peste tot este relație de echivalență pe mulțimea funcțiilor măsurabile.

**Funcții integrabile**

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și  $s : X \mapsto [0, \infty]$ ,  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  o funcție simplă, pozitivă, măsurabilă. Integrala lui  $s$  în raport cu măsura  $\mu$  este, prin definiție:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Dacă  $f : X \mapsto [0, \infty]$  este o funcție măsurabilă pozitivă atunci integrala lui  $f$  în raport cu măsura  $\mu$  este:

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ funcție simplă măsurabilă, } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Dacă  $f : X \mapsto [0, \infty]$  este o funcție măsurabilă pozitivă și dacă  $A \in \mathcal{A}$ , atunci integrala lui  $f$  pe mulțimea  $A$  în raport cu măsura  $\mu$  este:

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu.$$

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură; o funcție măsurabilă  $f : X \mapsto C$  se numește integrabilă dacă  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

Mulțimea funcțiilor integrabile este spațiu vectorial cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari.

Fie  $f : X \mapsto C$  o funcție integrabilă; atunci  $f = u + iv$ , unde  $u$  și  $v$  sunt funcții măsurabile reale; descompunând  $u = u^+ - u^-$ ,  $v = v^+ - v^-$  (aici  $u^+$ ,  $v^+$  și  $u^-$ ,  $v^-$  sunt părțile pozitive și respectiv negative ale lui  $u$  și  $v$ ), atunci integrala lui  $f$  în raport cu măsura  $\mu$  este

$$\int_X f d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \left( \int_X v^+ d\mu - \int_X v^- d\mu \right).$$

Integrala astfel definită are proprietățile:

i.  $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu, \forall f, g \text{ integrabile și } \forall \alpha, \beta \in C.$

ii.  $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$ ,  $\forall f$  integrabilă.

**Teorema de convergență monotonă a lui Lebesgue**

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și fie  $f_n : X \mapsto [0, \infty]$  un șir crescător de funcții măsurabile:  $f_n \leq f_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dacă  $f$  este limita punctuală a șirului  $f_n$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

În particular, dacă  $f_n : X \mapsto [0, \infty]$ , atunci:

$$\int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.$$

**Teorema de convergență dominată a lui Lebesgue**

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și fie  $f_n : X \mapsto \mathbb{C}$  un șir de funcții măsurabile cu proprietățile:

i.  $f_n$  converge punctual la funcția  $f$ .

ii. există  $g$  o funcție integrabilă astfel încât  $|f_n| \leq g$ .

Atunci  $f$  este funcție integrabilă și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ .

**Spații de funcții  $p$ -integrabile**

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și fie  $1 \leq p < \infty$ . Considerăm mulțimea:

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Evident, pentru  $p = 1$  se obține mulțimea funcțiilor integrabile.

$\mathcal{L}^p(X, \mu)$  este spațiu vectorial, iar aplicația

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

este o seminormă pe  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ . Din relația  $\|f\|_p = 0$  rezultă  $f = 0$  (a.p.t.); fie  $L^p(X, \mu)$  mulțimea claselor de echivalență în raport cu relația de egalitate a.p.t. Atunci  $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$  este spațiu normat (spațiul funcțiilor  $p$ -integrabile). În plus, se demonstrează că  $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$  este spațiu Banach.

**Exemple de spații de funcții integrabile**

i. Dacă pe mulțimea numerelor naturale,  $\mathbb{N}$ , se consideră măsura de numărare (a se vedea exercițiul 1 din acest capitol), atunci, în acest caz, spațiul funcțiilor  $p$ -integrabile este spațiul șirurilor  $p$ -absolut sumabile (a se vedea și exemplele de spații normate din capitolul 2):

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|^p < \infty \right\}.$$

Analog se definește spațiul  $\ell^p(Z)$  al șirurilor bilaterale  $p$ -absolut sumabile; evident, norma în aceste cazuri este:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \ell^p(\mathbb{N}).$$

**ii.** Dacă pe mulțimea numerelor reale,  $\mathbb{R}$ , se consideră măsura Lebesgue (construcția acestei măsuri se găsește în capitolul următor), atunci notăm:

$$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\}.$$

Norma în acest caz este

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Analog, se pot considera intervale  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  și se obțin spațiile  $L^p(a, b)$  corespunzătoare.

**iii.** Un caz particular remarcabil este spațiul funcțiilor periodice (de perioadă  $2\pi$  definite pe  $\mathbb{R}$ ) de pătrat integrabil, definit după cum urmează; dacă  $\mathcal{P}$  este mulțimea funcțiilor periodice  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ,  $f$  de perioadă  $2\pi$ ,  $f(x) = f(x + 2\pi), \forall x \in \mathbb{R}$ , atunci:

$$L^2[0, 2\pi] = \{f \in \mathcal{P} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_0^{2\pi} |f(t)| dt < \infty\},$$

integrala fiind în raport cu măsura Lebesgue. Evident, în locul intervalului  $[0, 2\pi]$  se poate lua orice interval de lungime  $2\pi$ ; o altă alegere uzuală este intervalul  $[-\pi, \pi]$ . Norma pe spațiul  $L^2[0, 2\pi]$  este:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}, \quad \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

Analog se definește spațiul funcțiilor periodice (de perioadă  $2\pi$ ) integrabile:

$$L^1[0, 2\pi] = \{f \in \mathcal{P} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_0^{2\pi} |f(t)| dt < \infty\}.$$

Norma pe spațiul  $L^1[0, 2\pi]$  este:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt, \quad \forall f \in L^1[0, 2\pi].$$

**Spațiul funcțiilor esențial mărginite**

Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și fie  $f : X \mapsto [0, \infty]$  o funcție măsurabilă; considerăm mulțimea

$$M = \{t \in R \mid \mu(f^{-1}(t, \infty]) = 0\}.$$

Prin definiție, supremumul esențial al lui  $f$  este:

$$\text{esssup} f = \infty \text{ dacă } M = \emptyset \text{ și } \text{esssup} f = \inf M \text{ dacă } M \neq \emptyset.$$

Notăm  $\|f\|_\infty = \text{esssup}|f|$ ; funcția  $f$  se numește esențial mărginită dacă  $\|f\|_\infty < \infty$ . Mulțimea funcțiilor esențial mărginite se notează  $L^\infty(X, \mu)$  și este spațiu Banach cu norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Și în acest caz putem particulariza spațiul cu măsură  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , obținându-se (ca mai sus) spațiile  $(\ell^\infty(N), \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(L^\infty(R), \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(L^\infty[0, 2\pi], \|\cdot\|_\infty)$ .

**Spații Hilbert și serii Fourier**

Fie  $H$  un spațiu vectorial (complex sau real); o aplicație

$$\langle, \rangle : H \times H \mapsto C \text{ (respectiv } R)$$

se numește produs scalar dacă pentru orice  $x, y, z \in H$  și orice  $\alpha, \beta \in C$  sunt adevărate relațiile:

- i.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ;
- ii.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- iii.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;
- iv.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Perechea  $(H, \langle, \rangle)$  se numește spațiu cu produs scalar.

Aplicația  $\| \cdot \| : H \mapsto H, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  este normă pe  $H$  și verifică inegalitatea lui Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H.$$

Reciproc, un spațiu normat  $(H, \| \cdot \|)$  este spațiu cu produs scalar dacă și numai dacă este verificată legea paralelogramului:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in H.$$

Spațiul  $(H, \langle, \rangle)$  se numește spațiu Hilbert dacă orice șir Cauchy este convergent (spațiul normat  $(H, \| \cdot \|)$  este complet).

În cele ce urmează  $(H, \langle, \rangle)$  este un spațiu Hilbert.

**Exemple de spații Hilbert**

i. Spațiul Banach  $C^n$  (cu norma euclidiană) este spațiu Hilbert cu produsul scalar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j},$$

pentru orice  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vectori din  $C^n$ . Analog și pentru  $R^n$ .

ii. Spațiul Banach al șirurilor de pătrat sumabil,

$$\ell^2(N) = \{x : N \mapsto C \mid \sum_{n \in N} |x(n)|^2 < \infty\}$$

este spațiu Hilbert cu produsul scalar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in N} x(n) \overline{y(n)},$$

pentru orice șiruri  $x, y \in \ell^2(N)$ . Analog și pentru spațiul șirurilor bilaterale (definite pe  $Z$ ),  $\ell^2(Z)$ .

iii. Dintre toate spațiile de funcții  $p$ -integrabile,  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ , numai spațiul funcțiilor de pătrat integrabil,  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  este spațiu Hilbert, produsul scalar fiind:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu, \quad \forall f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu).$$

**Ortogonalitate**

Doi vectori  $x, y \in H$  se numesc ortogonali (sau perpendiculari; notăm  $x \perp y$ ) dacă  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ortogonalul unei mulțimi nevide  $M \subseteq H$  este, prin definiție, mulțimea (subspațiul închis)  $M^\perp = \{x \in H \mid x \perp y, \forall y \in M\}$ .

Următorul rezultat este esențial în studiul spațiilor Hilbert:

**Teorema proiecției**

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și fie  $M \subseteq H$  o mulțime nevidă, închisă și convexă. Atunci există un unic vector  $x_M \in M$  astfel încât

$$\|x_M\| = \inf\{\|x\| \mid x \in M\}.$$

O consecință importantă este generalizarea descompunerii după direcții perpendiculare din geometria euclidiană:

**Descompunerea ortogonală**

Fie  $K \subseteq H$  un subspațiu închis și fie  $K^\perp$  ortogonalul său. Atunci, pentru vector  $x \in H$  există (și sunt unici)  $y \in K$  și  $z \in K^\perp$  astfel încât  $x = y + z$ .

**Baze ortonormale, serii Fourier**

Fie  $H$  un spațiu Hilbert; o submulțime  $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in J}$  se numește bază ortonormală în  $H$  dacă:

- i.  $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$  (simbolul lui Kronecker),  $\forall i, j \in J$ ;
- ii. subspațiul vectorial generat de  $\mathcal{B}$  este dens în  $H$ .

Spațiul Hilbert  $H$  se numește separabil dacă admite baze ortonormale cel mult numărabile. În continuare vom considera numai spații Hilbert separabile.

Fie  $H$  un spațiu Hilbert (separabil), fie  $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o bază ortonormală (fixată) și fie  $x \in H$  un vector fixat; coeficienții Fourier ai lui  $x$  (în baza  $\mathcal{B}$ ) sunt  $\hat{x}_n = \langle x, \varepsilon_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$ , iar seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{x}_n \varepsilon_n$  se numește seria Fourier asociată lui  $x$ . Aplicația

$$H \ni x \mapsto (\hat{x}_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$$

se numește transformarea Fourier (pe spațiul  $H$ ).

**Proprietățile seriei Fourier**

- i. Pentru orice  $x \in H$ , seria Fourier asociată,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{x}_n \varepsilon_n$ , converge la  $x$ ;
- ii.  $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{x}_n|^2$  (identitatea lui Parseval);
- iii. transformarea Fourier este un izomorfism (izometric) de spații Hilbert.

**Serii trigonometrice**

Un caz particular remarcabil de serie Fourier este seria trigonometrică. Considerăm spațiul Hilbert al funcțiilor periodice (de perioadă  $2\pi$ ) de pătrat integrabil (a se vedea exemplele de spații  $p$ -integrabile):

$$L^2[0, 2\pi] = \{f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Produsul scalar este

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

$$\text{iar norma } \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , fie  $\omega_n(t) = e^{int}$ . Un rezultat clasic de analiză afirmă că mulțimea (sistemul trigonometric)  $\mathcal{B} = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  este bază ortonormală în  $L^2[0, 2\pi]$ . Pentru orice funcție  $f \in L^2[0, 2\pi]$ , coeficienții Fourier (în

raport cu baza fixată mai sus), sunt

$$\widehat{f}_n = \langle f, \omega_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \forall n \in \mathbb{Z},$$

iar seria Fourier (sau seria trigonometrică) asociată funcției  $f$  este  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n \omega_n$ ;

sumele parțiale ale seriei,  $P_n = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k \omega_k$ , se numesc polinoame trigonometrice și  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f$  în spațiul  $L^2[0, 2\pi]$ , sau, echivalent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_2 = 0.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

Folosind egalitatea  $e^{int} = \cos nt + i \sin nt, \forall t \in \mathbb{R}$ , seria Fourier asociată funcției  $f$  se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienții trigonometrici (clasici)  $a_n$  și  $b_n$  sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt, \forall n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt, \forall n \geq 1.$$

Legătura dintre coeficienții  $\widehat{f}_n, a_n$  și  $b_n$  este:

$$\widehat{f}_0 = \frac{a_0}{2}, \widehat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \widehat{f}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Lema lui Riemann afirmă că dacă funcția  $f$  este integrabilă, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

În legătură cu convergența punctuală a seriei Fourier, are loc următorul rezultat clasic:

**Teorema lui Dirichlet**

Dacă  $f : R \mapsto R$  este o funcție periodică de perioadă  $2\pi$ , măsurabilă, mărginită, având cel mult un număr finit de discontinuități de speța întâi și având derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier asociată funcției  $f$  converge în fiecare punct  $x \in R$  la

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

În particular, dacă funcția  $f$  este continuă (și verifică celelalte ipoteze din teorema lui Dirichlet), atunci are loc descompunerea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

**Convergența uniformă a seriei Fourier**

Condiții suficiente pentru convergența uniformă a seriei Fourier sunt date în teorema următoare:

Dacă  $f : R \mapsto C$  este o funcție continuă, de clasă  $C^1$  pe porțiuni și periodică de perioadă  $2\pi$ , atunci seria sa Fourier este absolut și uniform convergentă, iar suma este  $f$ .

Numărul  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$  este media semnalului  $f$ , primul termen

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

este oscilația principală (în jurul valorii medii), iar termenul

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad n \geq 2$$

este armonica de ordinul  $n$  a funcției  $f$ . Perioada armonice de ordinul  $n$  este  $\frac{2\pi}{n}$ , iar amplitudinea  $A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ ; conform lemei lui Riemann rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ .

În cazul în care funcția  $f$  are perioada  $T = 2\ell$ , ( $\ell > 0$ ), atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare; baza ortonormală este

$$\{\epsilon_n \mid n \in Z\}, \quad \text{cu } \epsilon_n(x) = e^{i \frac{n\pi x}{\ell}},$$

iar coeficienții Fourier sunt:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{\ell}} dx, \quad \forall n \in Z,$$



$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Teorema lui Dirichlet se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{i \frac{n\pi x}{\ell}}, \forall x \in R. \end{aligned}$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} |f(t)|^2 dt.$$

Evident, toate rezultatele de mai sus rămân adevărate dacă înlocuim intervalul  $[0, 2\ell]$  cu orice alt interval de lungime  $2\ell$ , de exemplu,  $[-\ell, \ell]$ .

### Serii de sinusuri și cosinusuri

Fie  $f : [0, \ell] \mapsto R$ , o funcție integrabilă și fie  $\tilde{f} : R \mapsto R$ , periodică de perioadă  $2\ell$ , definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcția  $\tilde{f}$  satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, atunci, dezvoltând  $\tilde{f}$  în serie Fourier, rezultă:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell}, \forall x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad f(\ell-0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

coeficienții  $a_n$  fiind coeficienții Fourier reali asociați funcției  $\tilde{f}$ .

Formula de mai sus se numește dezvoltarea în serie de cosinusuri a lui  $f$ .

Analog, dacă funcția (impară):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcției  $f$  este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad \forall x \in (0, \ell),$$

coeficienții  $b_n$  fiind coeficienții Fourier reali asociați funcției  $\tilde{f}$ .

### Operatori pe spații Hilbert

Acestă secțiune continuă paragraful din capitolul 2 referitor la operatori liniari și continui pe spații normate.

În continuare  $(H, \langle, \rangle)$  este un spațiu Hilbert, iar  $\mathcal{L}(H)$  este spațiul Banach al operatorilor liniari și continui pe  $H$ . În legătură cu dualul unui spațiu Hilbert, are loc următorul rezultat:

#### Teorema lui Riesz

i. Pentru orice  $y \in H$ , aplicația

$$f_y : H \mapsto C, \quad f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

este funcțională liniară și continuă.

ii. Reciproc, dacă  $f$  este o funcțională liniară și continuă pe  $H$ , atunci există  $y \in H$  astfel încât  $f = f_y$ .

#### Adjunctul unui operator

Pentru orice  $T \in \mathcal{L}(H)$ , se demonstrează că există un unic operator  $T^* \in \mathcal{L}(H)$  astfel încât:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Proprietățile lui  $T^*$  (numit adjunctul lui  $T$ ) sunt:

i.  $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*, \quad \forall \alpha, \beta \in C, \forall T, S \in \mathcal{L}(H)$ .

ii.  $(T^*)^* = T, \quad \forall T \in \mathcal{L}(H)$ .

iii.  $(TS)^* = S^*T^*, \quad \forall T, S \in \mathcal{L}(H)$ .

iv.  $\|T^*T\| = \|T\|^2, \quad \forall T \in \mathcal{L}(H)$ .

v. Dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  este inversabil, atunci  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ .

Fie  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operator fixat.  $T$  se numește autoadjunct dacă  $T = T^*$ ; operatorul  $T$  se numește unitar dacă este inversabil și  $T^{-1} = T^*$ ; operatorul  $T$  se numește normal dacă  $TT^* = T^*T$ .

## 6.2 Funcții integrabile

1. Să se demonstreze că următoarele aplicații sunt măsuri:

a. Fie  $X \neq \emptyset$ , fie  $\mathcal{P}(X)$  mulțimea părților lui  $X$  și fie  $a \in X$ , un element

arbitrar fixat. Măsura Dirac concentrată în punctul  $a$  este, prin definiție:

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty), \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a \in A \\ 0 & \text{dacă } a \notin A \end{cases}$$

**b.** Măsura de numărare pe  $X$  este, prin definiție:

$$\mu_c : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty], \mu_c(A) = \begin{cases} \text{card}A & \text{dacă } A \text{ este finită} \\ \infty & \text{dacă } A \text{ este infinită} \end{cases}$$

**c.** Presupunem în plus că mulțimea  $X$  este finită. Măsura de probabilitate pe  $X$  este, prin definiție:

$$P : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, 1], P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(X)}.$$

**d.** Un exemplu remarcabil de măsură este măsura Lebesgue (pe spațiul  $R^n$ ); construcția ei este dată în capitolul următor.

### Soluție

Se verifică direct axiomele măsurii.

**2.a.** Fie  $\delta_a$  măsura Dirac (cf. exercițiului 1) și fie  $f : X \mapsto R$ . Să se demonstreze că:

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

**b.** Fie  $\mu_c$  măsura de numărare (cf. exercițiului 1) pe  $N$  și fie  $f : N \mapsto R$ . Să se demonstreze că

$$\int_N f d\mu_c = \sum_{n \in N} f(n),$$

în ipoteza că seria din membrul drept are o sumă (eventual  $\infty$ ).

**c.** Fie  $P$  măsura de probabilitate (cf. exercițiului 1) și fie  $f : X \mapsto R$ . Să se demonstreze că

$$\int_X f dP = \frac{\sum_{x \in X} f(x)}{\text{card}(X)}.$$

### Soluție

Se aplică definiția integralei, (mai întâi pentru funcții simple).

**3.** Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și fie  $f : X \mapsto [0, \infty)$  o funcție măsurabilă. Să se demonstreze că dacă  $\int_X f d\mu = 0$ , atunci  $f = 0$  (a.p.t.).

**Soluție**

Pentru orice  $n \in N$ , fie

$$A_n = \{x \in X ; f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Mulțimile  $A_n$  sunt măsurabile pentru că  $A_n = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}, \infty\right)\right)$ . Mai mult, avem:

$$\bigcup_{n \in N} A_n = \{x \in X ; f(x) \neq 0\}.$$

Vom demonstra că  $\mu(A_n) = 0, \forall n \in N$ . Integrând pe  $A_n$  inegalitatea:

$$\frac{1}{n} < f(x), \forall x \in A_n,$$

obținem (folosim și  $f(x) \geq 0$ ):

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0,$$

deci  $\mu(A_n) = 0, \forall n \in N$ . Avem deci:

$$\mu(\{x \in X ; f(x) \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) \leq \sum_{n \in N} \mu(A_n) = 0.$$

**4.** Fie  $(a_{ij})_{i,j \in N}$  un șir dublu indexat astfel încât  $a_{ij} \geq 0, \forall i, j \in N$ . Să se demonstreze că:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij} = \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} a_{ij}.$$

Facem mențiunea că membrii egalității pot fi și  $\infty$ .

**Soluție**

Vom aplica teorema de convergență monotonă. Considerăm spațiul cu măsură  $(N, \mu_c)$  și șirul de funcții

$$f_i : N \mapsto [0, \infty), f_i(j) = a_{ij}.$$

Atunci, conform teoremei de convergență monotonă, avem:

$$\int_N \sum_{i \in N} f_i d\mu_c = \sum_{i \in N} \int_N f_i d\mu_c,$$

adică (aplicând exercițiul 2(b)):

$$\sum_{j \in N} \sum_{i \in N} a_{ij} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij}.$$

### 5. Funcții convexe, inegalitatea lui Jensen

O funcție  $\phi : (a, b) \mapsto R$  se numește convexă dacă:

$$\phi((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y), \forall x, y \in (a, b), \forall \lambda \in [0, 1],$$

sau, echivalent:

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} \leq \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u - t}, \forall a < s < t < u < b.$$

Se demonstrează fără dificultate că o funcție convexă pe un interval deschis este continuă. Un exemplu remarcabil de funcție convexă pe  $R$  este funcția exponențială,  $\phi(x) = e^x$ .

**Inegalitatea lui Jensen** Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură astfel încât  $\mu(X) = 1$  și fie  $a, b \in \bar{R}$ ,  $a < b$ . Atunci, pentru orice funcție integrabilă  $f : X \mapsto (a, b)$  și pentru orice funcție convexă  $\phi : (a, b) \mapsto R$ , are loc inegalitatea:

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) d\mu.$$

#### Soluție

Fie  $t = \int_X f d\mu \in R$  și fie  $\alpha = \sup_{s \in [a, t]} \frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s}$ . Propunem ca exercițiu inegalitatea:

$$\phi(s) \geq \phi(t) + \alpha(s - t), \forall s \in (a, b).$$

În particular, pentru  $s = f(x)$ , obținem:

$$\phi(f(x)) \geq \phi(t) + \alpha(f(x) - t), \forall x \in X.$$

Integrând ultima inegalitate pe  $X$  în raport cu măsura  $\mu$ , obținem:

$$\int_X (\phi \circ f) d\mu \geq \int_X \phi(t) d\mu + \alpha \left( \int_X f d\mu - t \right),$$

adică:

$$\int_X (\phi \circ f) d\mu \geq \phi\left(\int_X f d\mu\right).$$

6. Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ca în exercițiul 5 și fie  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g : X \mapsto [0, \infty)$ , două funcții integrabile; să se demonstreze inegalitățile:

a. 
$$e^{\int_X f d\mu} \leq \int_X e^f d\mu.$$

b. 
$$e^{\int_X \ln g d\mu} \leq \int_X g d\mu.$$

**Soluție**

Se aplică inegalitatea lui Jensen funcției convexe  $\phi(t) = e^t$ .

**7. Inegalitatea mediilor**

Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Să se demonstreze că pentru orice numere reale nenegative  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , are loc inegalitatea mediilor:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

**Soluție**

Evident, putem presupune că  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt strict pozitive.

Fie  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  o mulțime cu  $n$  elemente și fie

$P : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty)$ , măsura de probabilitate, deci

$$P(\{p_j\}) = \frac{1}{n}, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Fie  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(p_j) = \ln x_j$  și fie  $\phi(x) = e^x$ . Aplicând inegalitatea lui Jensen (sau exercițiul 6a), obținem:

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(p_j)} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{f(p_j)},$$

adică  $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

**8. Inegalitatea lui Holder**

Fie  $p > 0$  și  $q > 0$  astfel încât  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ;  $p$  și  $q$  se numesc în acest caz conjugate.

a. Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură. Atunci, pentru orice funcții măsurabile  $f, g : X \mapsto [0, \infty)$ , are loc inegalitatea lui Holder:

$$\int_X fg d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

b. Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și  $b_1, b_2, \dots, b_n$  numere reale pozitive; atunci:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

### Soluție

a. Fie  $A = \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$  și  $B = \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ . Dacă  $A = \infty$  sau  $B = \infty$ , atunci inegalitatea este evidentă. Dacă  $A = 0$  sau  $B = 0$ , atunci, conform exercițiului 3,  $f = 0(a.p.t.)$  sau  $g = 0(a.p.t.)$  și deci  $fg = 0(a.p.t.)$  și inegalitatea este iarăși evidentă. Presupunem acum  $A, B \in (0, \infty)$ ; fie  $F = \frac{f}{A}$  și  $G = \frac{g}{B}$ . Fie  $x \in X$ ; deoarece  $F(x) > 0$  și  $G(x) > 0$ , există  $s, t \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F(x) = e^{\frac{s}{p}}$  și  $G(x) = e^{\frac{t}{q}}$ . Folosind convexitatea funcției exponențiale, avem:

$$F(x)G(x) = e^{\frac{1}{p}s + \frac{1}{q}t} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t = \frac{1}{p} F^p(x) + \frac{1}{q} G^q(x).$$

Integrând ultima inegalitate, obținem:

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ceea ce încheie demonstrația.

b. Se aplică inegalitatea lui Holder pentru un spațiu de probabilitate (a se vedea demonstrația de la inegalitatea mediilor).

### 9. Inegalitatea lui Minkovski

Fie  $p > 1$  și fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură; pentru orice funcții măsurabile  $f, g : X \mapsto [0, \infty)$ , are loc inegalitatea:

$$\left( \int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cazul particular  $p = 2$  este cunoscut sub numele de inegalitatea lui Schwarz.

### Soluție

Integrând egalitatea:

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1},$$

obținem:

$$\int_X (f + g)^p = \int_X f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f + g)^{p-1} d\mu.$$

Aplicând inegalitatea lui Holder celor doi termeni din membrul drept al egalității de mai sus, obținem (alegem  $q$  conjugat cu  $p$ ):

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ și}$$

$$\int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Însumând cele două inegalități și folosind egalitatea  $(p-1)q = p$ , obținem inegalitatea:

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left( \int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left( \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (*).$$

Folosind convexitatea funcției putere cu exponent supraunitar,  $\phi(t) = t^p$ , obținem:

$$\left( \frac{f+g}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p),$$

ceea ce arată că dacă membrul stâng al inegalității (\*) este  $\infty$ , atunci și membrul drept este  $\infty$ . Putem deci presupune că  $\int_X (f+g)^p d\mu < \infty$ .

Demonstrația se încheie împărțind inegalitatea (\*) cu  $\left( \int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ .

**10.** Să se studieze convergența punctuală, uniformă și în norma  $\|\cdot\|_1$  a șirului de funcții

$$f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

### Soluție

Fie  $f(x) = 0, \forall x \in (0, 1]$  și  $f(0) = 1$ . Atunci  $f_n$  converge punctual la  $f$ , dar nu converge uniform; în norma  $\|\cdot\|_1$ , șirul  $f_n$  converge la funcția nulă:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \ln(1+n) \rightarrow 0.$$

**11.** Să se demonstreze incluziunile:

$$\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z) \text{ și } L^2[0, 2\pi] \subset L^1[0, 2\pi].$$

### Soluție

Incluziunile rezultă din următoarele două inegalități:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1, \forall x \in \ell^2(Z) \text{ și}$$



$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2, \forall f \in L^1[0, 2\pi].$$

Prima inegalitate este evidentă:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| \right)^2 = \|x\|_1^2.$$

Pentru cea de-a doua inegalitate să observăm mai întâi că funcția constantă  $\mathbf{1}(t) = 1$  este și în  $L^1[0, 2\pi]$  și în  $L^2[0, 2\pi]$ :

$$\|\mathbf{1}\|_1 = \|\mathbf{1}\|_2 = 1.$$

Fie acum  $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{C}$  o funcție măsurabilă (și periodică). Aplicăm inegalitatea lui Holder (exercițiul 8) funcțiilor  $|f|$  și  $\mathbf{1}$ ; obținem:

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \mathbf{1}(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{2\pi} |\mathbf{1}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2. \end{aligned}$$

**12.** Fie  $L^1(\mathbb{R})$  spațiul Banach al funcțiilor integrabile pe  $\mathbb{R}$  în raport cu măsura Lebesgue și fie  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**a.** Să se demonstreze că pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ , funcția  $h(x) = e^{-itx} f(x)$  este în spațiul  $L^1(\mathbb{R})$ .

Putem defini deci:

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x) dx.$$

Funcția  $\widehat{f}$  se numește transformata Fourier a funcției  $f$ ; să se demonstreze următoarele proprietăți:

**b.** Dacă  $\phi(x) = f(x)e^{isx}$ , atunci  $\widehat{\phi}(t) = \widehat{f}(t-s)$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ .

**c.** Dacă  $\psi(x) = f(x-s)$ , atunci  $\widehat{\psi}(t) = \widehat{f}(t)e^{-ist}$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ .

**d.** Dacă  $\eta(x) = \overline{f(-x)}$ , atunci  $\widehat{\eta}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Soluție**

**a.** Cu notațiile din enunț:

$$\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixt} f(x)| dt = \|f\|_1 < \infty,$$

deci  $h \in L^1(\mathbb{R})$ .

**b.** Fie  $s, t \in \mathbb{R}$ ; atunci:

$$\widehat{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x)e^{isx} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(t-s)} f(x) dx = \widehat{f}(t-s).$$

c. Pentru orice  $t, s \in R$  avem:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(t) &= \int_R e^{-ixt} f(x-s) dx = \int_R e^{-i(s+u)t} f(u) du = \\ &= e^{-ist} \int_R e^{-iut} f(u) du = e^{-ist} \widehat{f}(t),\end{aligned}$$

unde, în prima integrală s-a făcut schimbarea de variabilă  $x-s = u$ .

d. Pentru orice  $t \in R$  avem:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \int_R e^{-ixt} \overline{f(-x)} dx = \\ &= \overline{\int_R e^{ixt} f(-x) dx} = \overline{\int_R e^{-ixt} f(x) dx} = \overline{\widehat{f}(t)}.\end{aligned}$$

**13.** Fie  $f \in L^1(R)$  și fie  $g(x) = -ixf(x)$ . Dacă  $g \in L^1(R)$ , atunci funcția  $\widehat{f}$  este diferențiabilă și  $(\widehat{f})' = \widehat{g}$ .

**Soluție**

Pentru orice  $t \in R$ , avem:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(t+u) - \widehat{f}(t)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \int_R e^{-ixt} f(x) \frac{e^{-ixu} - 1}{u} dx.$$

Propunem ca exercițiu inegalitatea:

$$\left| e^{-ixt} f(x) \frac{e^{-ixu} - 1}{u} \right| \leq |xf(x)|, \forall u \neq 0.$$

Din ipoteză, funcția  $R \ni x \mapsto xf(x) \in R$  este integrabilă și deci putem aplica teorema de convergență dominată a lui Lebesgue:

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(t+u) - \widehat{f}(t)}{u} &= \int_R e^{-ixt} f(x) \left( \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{-ixu} - 1}{u} \right) dx = \\ &= \int_R e^{-ixt} f(x) (-ix) dx = \widehat{g}(t),\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

**14.** Fie  $f \in L^1(R)$  o funcție de clasă  $C^1(R)$  astfel încât  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Atunci  $f' \in L^1(R)$  și  $\widehat{f}'(t) = it\widehat{f}(t)$ ,  $\forall t \in R$ .

**Soluție**

Pentru orice  $t \in R$ , aplicând formula de integrare prin părți, avem:

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f'(x) dx = \\ &= e^{-ixt} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx = it \widehat{f}(t).\end{aligned}$$

**6.3 Serii Fourier**

15. Să se demonstreze egalitățile:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$\forall n \in N^*, \forall x \in R, x \neq 2k\pi, k \in Z$ .

**Soluție**

Se înmulțește membrul drept cu  $2 \sin \frac{x}{2}$  și se transformă produsele în diferențe. Altă metodă: notăm cu  $S$  prima suma și a doua cu  $T$  și calculăm  $S + iT$ ; notând  $z = \cos x + i \sin x$ , se obține o progresie geometrică.

16. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la întregul  $R$ .

Să se deducă apoi suma seriei numerice:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

**Soluție**

Funcția este continuă; calculăm coeficienții Fourier reali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) = \\
&= \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \forall n \geq 1. \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |x| \sin nx \, dx = 0, \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Rezultă seria Fourier (conform teoremei lui Dirichlet):

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2} \cos nx, \forall x \in [-\pi, \pi],$$

sau, echivalent:

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m \geq 0} \frac{-4}{\pi(2m+1)^2} \cos(2m+1)x, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

În particular, pentru  $x = 0$ , se obține:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

**17.** Să se determine seria Fourier asociată funcției

$$f(x) = x, \forall x \in (-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la  $R$ . Notând cu  $S$  suma acestei serii, să se determine  $S(x)$ .

**Soluție**

Din periodicitate, rezultă că  $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$ , deci funcția nu este continuă în punctele  $k\pi$ ,  $k \in Z$  și:

$$\frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)) = 0.$$

Calculăm acum coeficienții Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x \cos nx \, dx = 0, \forall n \geq 0.$$

$$b_n = \int_{-\pi}^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Rezultă seria Fourier:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Conform teoremei lui Dirichlet rezultă :

$$S(x) = f(x), \forall x \in (-\pi, \pi),$$

iar în punctele  $\pm\pi$  rezultă:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)) = 0.$$

În particular, pentru  $x = \frac{\pi}{2}$ , se obține seria lui Leibniz:  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ .

**18.** Să se determine seria Fourier asociată funcției

$$f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi],$$

prelungită prin periodicitate la  $R$ .

Să se calculeze apoi sumele seriilor de numere:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

**Soluție**

Evident, funcția este continuă; calculăm coeficienții Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{4}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Evident,  $b_n = 0, \forall n \geq 1$ . Rezultă dezvoltarea:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \forall x \in [0, \pi].$$

Pentru a calcula suma primei serii, particularizăm în identitatea de mai sus  $x = \pi$ ; rezultă:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pentru suma celei de-a doua serii, luăm  $x = 0$ ; se obține:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pentru a calcula suma celei de-a treia serii, scriem mai întâi identitatea lui Parseval pentru seria trigonometrică de mai sus; rezultă:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2.$$

Se obține:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \left( -\frac{2\pi^4}{9} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

**19.** Fie  $a \in \mathbb{R}^*$ .

- Să se determine seria Fourier asociată funcției  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\pi, \pi]$ .
- Să se deducă sumele seriilor de numere:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} \text{ și } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$$

- Să se deducă dezvoltările în serie Fourier ale funcțiilor  $\text{ch}(ax)$  și  $\text{sh}(ax)$ , pe intervalul  $(-\pi, \pi)$ .

**Soluție**

- Calculăm coeficienții Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = 2 \frac{\text{sh}(a\pi)}{a\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}(a \cos nx + n \sin nx)}{\pi(a^2 + n^2)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^n \frac{2a \text{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{\pi(a^2 + n^2)} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}, \forall n \geq 1.$$

Rezultă formula:

$$e^{ax} = \frac{2 \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - b \sin nx) \right), \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. În punctele  $\pm\pi$  funcția (prelungită prin periodicitate) nu este continuă; în aceste puncte suma seriei trigonometrice este:

$$\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} = \frac{2 \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2} \right).$$

Din egalitatea de mai sus rezultă suma primei serii cerute:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi(e^{a\pi} + e^{-a\pi})}{2a(e^{a\pi} - e^{-a\pi})} - \frac{1}{2a^2}.$$

Pentru a calcula suma celei de-a doua serii, se ia  $x = 0$  în dezvoltarea funcției  $f$ ; se obține:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$$

c. Din definiție și din dezvoltarea obținută la punctul a, rezultă:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(ax) &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2a \operatorname{sh}(a\pi)}{a^2 + n^2} \cos nx, \forall x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

Formula de mai sus este adevărată și în  $\pm\pi$ , deoarece funcția  $\operatorname{ch}$  (prelungită prin periodicitate) este continuă.

Analog, se obține:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(ax) &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh}(a\pi)}{a^2 + n^2} \sin nx, \forall x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

20. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

**Soluție**

Fie  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $x \in [0, 2\pi)$ , prelungită prin periodicitate la  $\mathbb{R}$ ; calculăm coeficienții Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \\ &= \frac{(\pi - x) \sin nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0, \forall n \geq 1. \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \\ &= \frac{-(\pi - x) \cos nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Aplicând teorema lui Dirichlet, rezultă:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

În punctele  $x = 0$  și  $x = 2\pi$  funcția  $f$  nu este continuă; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0.

21. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \forall x \in (0, \pi).$$

**Soluție**

Din formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi),$$

demonstrată în exercițiul precedent, înlocuind pe  $x$  cu  $2x$ , rezultă identitatea:

$$\frac{\pi - 2x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2nx}{n}, \forall x \in (0, \pi).$$



Împărțind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută.

**22.** Să se demonstreze identitățile:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \forall x \in (0, \pi)$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}, \forall x \in (-\pi, 0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

### Soluție

Pentru prima identitate se scade membru cu membru cele două egalități demonstrate în exercițiile 20 și 21; a doua identitate rezultă din prima și din imparitatea funcției sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia  $x = \frac{\pi}{3}$  în prima egalitate și obținem:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă:  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ .

### 23. Fenomenul Gibbs

În jurul unui punct de discontinuitate al unei funcții date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergență (aparent paradox) al șirului sumelor parțiale asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens.

Considerăm restricția funcției signum la intervalul  $(-\pi, \pi)$ ,

$$\text{sgn} : (-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{R}, \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , x \in (-\pi, 0) \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x \in (0, \pi) \end{cases}$$

În exercițiul anterior s-a demonstrat egalitatea:

$$\text{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

Notăm cu  $S_n$  șirul sumelor parțiale:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

În punctul  $x = 0$  funcția  $\operatorname{sgn}$  nu este continuă; seria sa Fourier converge (conform teoremei lui Dirichlet) la  $\frac{1}{2}(-1+1) = 0 = \operatorname{sgn}(0)$ ; convergența  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ,  $\forall x \in (-\pi, \pi)$  este punctuală, nu și uniformă.

a. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. Să se arate că funcția  $S_n$  are un maxim în punctul  $x = \frac{\pi}{2n}$  și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,1789.$$

c. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sgn}(0+) \right|.$$

### Soluție

a. Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x, \quad \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru aceasta, considerăm și suma  $B = \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x$  și calculăm:

$$\begin{aligned} A + iB &= \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots + (\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x) = \\ &= z^2 \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1}, \end{aligned}$$

unde am notat  $z = \cos x + i \sin x$ . După calcule, rezultă:

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x} (\cos nx + i \sin nx),$$

și deci:

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}, \quad \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Integrând de la 0 la  $x$ , rezultă:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2 \sin t} dt,$$

sau, înmulțind cu  $\frac{4}{\pi}$ :

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \forall x \in (-\pi, \pi).$$

**b.** Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x}$$

și deci  $\frac{\pi}{2n}$  este punct critic al lui  $S_n$ ; într-o vecinătate a lui  $\frac{\pi}{2n}$  avem:

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} > 0, x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} < 0, x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că  $x = \frac{\pi}{2n}$  este punct de maxim al funcției  $S_n$ .

Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \frac{du}{2n} = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} du.$$

Rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Ultima integrală se aproximează dezvoltând funcția sinus în serie de puteri:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^{\pi} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-2} \right) du = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1} \Big|_0^{\pi} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}. \end{aligned}$$

Seria fiind alternată, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat.

Cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$ , se obține

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

c. Rezultă:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n \left( \frac{\pi}{2n} \right) - \operatorname{sgn}(0+) \right| \approx 0,1789$ .

24. Să se dezvolte în serie Fourier funcția:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-2, 0] \\ \frac{x}{2} & , \quad x \in (0, 2] \end{cases} ,$$

prelungită prin periodicitate (perioadă 4) la  $R$ .

**Soluție**

Cu notațiile uzuale,  $\ell = 2$  și deci coeficienții Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ par, } n \geq 2 \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2} & \text{dacă } n \text{ impar, } n \geq 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Rezultă dezvoltarea:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right) = f(x), \quad \forall x \in (-2, 2),$$

deci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 1} \left( -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) &= \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-2, 0] \\ \frac{x}{2} & , \quad x \in (0, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

În particular, pentru  $x = 1$  rezultă identitatea (obținută și în exercițiul 17):

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

În  $x = 2$  funcția nu este continuă, deci seria Fourier nu converge în acest punct la  $f(2) = 1$ , ci, conform teoremei lui Dirichlet, la  $\frac{f(2-) + f(2+)}{2} = \frac{1}{2}$ ; rezultă identitatea (obținută și în exercițiul 16):

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**25.** Fie funcția  $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ .

**a.** Să se dezvolte  $f$  în serie de cosinusuri.

**b.** Să se dezvolte  $f$  în serie de sinusuri.

**Soluție**

**a.** Calculăm coeficienții dezvoltării în serie de cosinusuri (coeficienții Fourier ai prelungirii pare a funcției  $f$  la intervalul  $(-\pi, \pi)$ ):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2x \sin nx}{\pi n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Rezultă dezvoltarea în serie de cosinusuri:

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

egalitatea fiind adevărată în punctele  $x = 0$  și  $x = \pi$  deoarece prelungirea pară este continuă.

**b.** Calculăm coeficienții dezvoltării în serie de sinusuri (coincid cu coeficienții Fourier ai prelungirii impare a funcției  $f$ ):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2(-1)^{n-1}}{n}, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Rezultă dezvoltarea în serie de sinusuri:

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

**26.** Fie  $a \in \mathbb{R}^*$ ; să se dezvolte funcția  $f : [0, \pi) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{ax}$ :

**a.** în serie de cosinusuri;

**b.** în serie de sinusuri.

**Soluție**

Se calculează coeficienții (a se vedea și exercițiul 19) și rezultă dezvoltările:

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2a((-1)^n e^{a\pi} - 1)}{\pi(a^2 + n^2)} \cos nx \quad \forall x \in [0, \pi).$$

$$e^{ax} = \sum_{n \geq 1} \frac{2n(1 - (-1)^n e^{a\pi})}{\pi(a^2 + n^2)} \sin nx, \quad \forall x \in (0, \pi).$$

**27.** Să se determine coeficienții Fourier complecși (spectrul în frecvență) ai funcției de perioadă  $2\pi$ ,

$$f(t) = e^{|t|}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

**Soluție**

Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , coeficienții Fourier sunt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{|t|} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-t(1+in)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{t(1-in)} dt = \\ &= \frac{-1}{2\pi(1+in)} e^{-t(1+in)} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{t(1-in)} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} \left( in \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) + (-1)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

**28.** Să se determine coeficienții Fourier complecși și seria Fourier pentru funcția periodică

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in (-\pi, 0) \\ 1 & , \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$

**Soluție**

Calculăm coeficienții Fourier; evident,  $\hat{f}_0 = 0$ . Pentru  $n \in \mathbb{Z}^*$ , avem:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi in} \left( e^{-int} \Big|_{-\pi}^0 - e^{-int} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{i}{\pi n} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Din teorema lui Dirichlet, rezultă:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{2n+1} e^{i(2n+1)t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{-2i}{(2n+1)\pi} e^{i(2n+1)\pi}, \quad \forall t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

**29.** Să se determine seria Fourier complexă a funcției de perioadă  $2\pi$ :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad x \in (0, 2\pi].$$

Să se demonstreze că seria converge uniform pe  $R$ .

**Soluție**

Calculăm mai întâi coeficienții Fourier; pentru orice  $n \in Z^*$ :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \right) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi n^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-inx} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi n^2}.\end{aligned}$$

Prin calcul direct,  $\widehat{f}_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Funcția  $f$  este continuă, periodică și de clasă  $C^1$  pe porțiuni (funcția nu este de clasă  $C^1$  în punctele  $2k\pi$ ,  $\forall k \in Z$ ), deci seria Fourier asociată converge uniform la  $f$  pe  $R$ :

$$\frac{\pi}{6} + \sum_{n \in Z^*} \frac{-1}{2\pi n^2} e^{inx} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad \forall x \in R.$$

## 6.4 Operatori pe spații Hilbert

**30.** Fie  $T \in \mathcal{L}(C^n)$  cu matricea asociată (în baza canonică)  $M_T = (a_{ij})_{i,j}$ .

a. Să se demonstreze că matricea adjunctului  $T^*$  este  $M_{T^*} = (b_{ij})_{ij}$ , unde,

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

b. Să se demonstreze că operatorul  $T$  este autoadjunct dacă și numai dacă  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

c. Să se demonstreze că operatorul  $T$  este unitar dacă și numai dacă  $M_T$  este matrice ortogonală.

**Soluție**

a. Fie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza canonică din  $R^n$ ; atunci, din definiție,

$$a_{ij} = \langle T e_j, e_i \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pentru orice  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , avem:

$$b_{ij} = \langle T^* e_j, e_i \rangle = \langle e_j, (T^*)^* e_i \rangle = \langle e_j, T e_i \rangle = \overline{\langle T e_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

Celelalte afirmații sunt consecințe directe ale definițiilor și ale punctului a.

**31.** Fie  $(H, \langle, \rangle)$  un spațiu Hilbert și fie  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

Notăm  $\text{Ker}(T)$  și  $\text{Im}(T)$  nucleul și, respectiv, imaginea operatorului  $T$ :

$$\text{Ker}(T) = \{x \in H \mid Tx = 0\}, \quad \text{Im}(T) = \{Tx \mid x \in H\}.$$

Să se demonstreze egalitățile:

- a.  $\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$ .  
 b.  $\text{Im}(T) = (\text{Ker}(T^*))^\perp$ .

**Soluție**

- a. Fie  $x \in \text{Ker}(T)$  și fie  $y \in H$ ; atunci:

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0$$

și deci  $x \perp \text{Im}(T^*)$ . Pentru incluziunea inversă, fie  $x \in (\text{Im}(T^*))^\perp$ ; atunci, pentru orice  $y \in H$ , avem:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0$$

și deci  $Tx = 0$ , adică  $x \in \text{Ker}(T)$ .

- b. Este o consecință a egalității  $(T^*)^* = T$  și a egalității de la punctul a.

### 32. Operatorul diagonal

- a. Să se demonstreze că pentru orice  $\alpha \in \ell^\infty(Z)$  și pentru orice  $x \in \ell^2(Z)$ , șirul produs  $\alpha x : Z \mapsto C$ ,  $(\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n)$  este în spațiul  $\ell^2(Z)$ .  
 b. Fie  $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ ; să se demonstreze că operatorul:

$$D_\alpha : \ell^2(Z) \mapsto \ell^2(Z), D_\alpha x = \alpha x$$

este liniar și continuu și  $\|D_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$ . Operatorul  $D_\alpha$  se numește operator diagonal.

c. Să se calculeze adjunctul operatorului  $D_\alpha$  și să se caracterizeze operatorii diagonali autoadjuncți și cei unitari.

d. Să se demonstreze că  $D_\alpha$  este inversabil dacă și numai dacă:

$$\alpha(n) \neq 0, \forall n \in Z \text{ și } 0 \text{ nu este punct limită al șirului } \alpha,$$

sau, într-o formulare echivalentă,  $0 \notin \overline{\{\alpha(n) \mid n \in Z\}}$ , unde, bara înseamnă, în acest caz, închiderea (în  $C$ ) a mulțimii respective.

e. Să se determine spectrul operatorului diagonal.

**Soluție**

- a. Pentru orice  $\alpha \in \ell^\infty(Z)$  și  $x \in \ell^2(Z)$ , avem:

$$\|\alpha x\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in Z} |\alpha(n)x(n)|^2} \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_2,$$

deci  $\alpha x \in \ell^2(Z)$ .

- b. Liniaritatea este imediată. Din inegalitatea:

$$\|D_\alpha x\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in Z} |\alpha(n)x(n)|^2} \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_2,$$



rezultă că  $D_\alpha$  este continuu și în plus  $\|D_\alpha\| \leq \|\alpha\|_\infty$ .

Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie, pentru orice  $m \in Z$ , șirul

$$\sigma : Z \mapsto C, \sigma_m(n) = \delta_m^n,$$

unde,  $\delta_m^n$  este simbolul lui Kronecker.

Evident,  $\|\sigma_m\|_2 = 1$  și  $D_\alpha \sigma_m = \alpha(m)\sigma_m$ ; rezultă:

$$|\alpha(m)| = \|\alpha(m)\sigma_m\|_2 = \|D_\alpha \sigma_m\|_2 \leq \|D_\alpha\| \|\sigma_m\|_2 = \|D_\alpha\|.$$

Din inegalitatea obținută, luând supremumul (după  $m \in Z$ ), rezultă:

$$\sup_{m \in Z} |\alpha(m)| \leq \|D_\alpha\|,$$

și deci  $\|\alpha\|_\infty \leq \|D_\alpha\|$ .

c. Să notăm  $\bar{\alpha}$  șirul definit prin  $\bar{\alpha}(n) = \overline{\alpha(n)}$ ,  $\forall n \in Z$ . Pentru orice șiruri  $x, y \in \ell^2(Z)$ , avem:

$$\begin{aligned} \langle D_\alpha x, y \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(n)x(n)\overline{y(n)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left( \overline{\alpha(n)y(n)} \right) = \langle x, \bar{\alpha}y \rangle = \langle x, D_{\bar{\alpha}}y \rangle, \end{aligned}$$

ceea ce arată că  $D_\alpha^* = D_{\bar{\alpha}}$ . De aici rezultă următoarele caracterizări:

$$D_\alpha \text{ este autoadjunct} \Leftrightarrow \alpha(n) \in R, \forall n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este unitar} \Leftrightarrow |\alpha(n)| = 1, \forall n \in Z.$$

d. Să presupunem mai întâi că șirul  $\alpha \in \ell^\infty(Z)$  are proprietățile din enunț, adică:

$$\alpha(n) \neq 0 \text{ și } 0 \text{ nu este punct limită al lui } \alpha.$$

Rezultă că șirul definit prin:

$$\beta : Z \mapsto C, \beta(n) = \frac{1}{\alpha(n)}$$

este mărginit, deci putem considera operatorul  $D_\beta x = \beta x$ . Rezultă imediat că  $D_\beta$  este inversul lui  $D_\alpha$ , deci  $D_\alpha$  este în acest caz inversabil și  $D_\alpha^{-1} = D_\beta$ . Reciproc, să presupunem acum că operatorul  $D_\alpha$  este inversabil și fie  $D_\alpha^{-1}$  inversul său; atunci:

$$\sigma_n = D_\alpha^{-1}(D_\alpha \sigma_n) = D_\alpha^{-1}(\alpha(n)\sigma_n) = \alpha(n)D_\alpha^{-1}\sigma_n,$$

deci

$$D_\alpha^{-1}\sigma_n = \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n, \forall n \in Z.$$

Considerând normele ambilor membri în egalitatea de mai sus, obținem:

$$\left\| \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n \right\|_2 = \left\| D_\alpha^{-1}\sigma_n \right\|_2 \leq \left\| D_\alpha^{-1} \right\| \left\| \sigma_n \right\|_2 = \left\| D_\alpha^{-1} \right\|.$$

Rezultă deci că șirul  $\frac{1}{\alpha}$  este mărginit:

$$\left| \frac{1}{\alpha(n)} \right| \leq \left\| D_\alpha^{-1} \right\|,$$

ceea ce încheie demonstrația.

**e.** Fie  $\lambda \in C$  și fie  $\mathbf{1}$  șirul constant 1; aplicând rezultatul de la punctul anterior operatorului  $D_\alpha - \lambda I = D_{\alpha-1}$ , rezultă:

$$\lambda \in \sigma(D_\alpha) \Leftrightarrow \exists n \in Z \text{ cu } \lambda = \alpha(n) \text{ sau } \lambda \text{ este punct limită al lui } \alpha.$$

În concluzie,  $\sigma(D_\alpha) = \overline{\{\alpha(n) \mid n \in Z\}}$ , bara desemnând închiderea.

**33.** Fie  $H$  un spațiu Hilbert și fie  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Să se demonstreze implicația:

$$\lambda \in \sigma_p(T^*) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T).$$

### Soluție

Dacă  $\lambda \in \sigma_p(T^*)$ , atunci, prin definiție, există  $x \in H$ ,  $x \neq 0$  astfel încât  $T^*x = \lambda x$ ; avem deci (aplicăm exercițiul 31):

$$\{0\} \neq \text{Ker}(\lambda I - T^*) = (\text{Im}((\lambda I - T^*)^*))^\perp = (\text{Im}(\bar{\lambda}I - T))^\perp,$$

ceea ce arată că  $\text{Im}(\bar{\lambda}I - T) \neq H$ , deci operatorul  $\bar{\lambda}I - T$  nu este surjectiv; rezultă  $\bar{\lambda} \in \sigma(T)$ .

### 34. Operatorul de translație unilateral

Pe spațiul Hilbert  $\ell^2(N)$  considerăm operatorul:

$$V : \ell^2(N) \longrightarrow \ell^2(N), (Vx)(0) = 0 \text{ și } (Vx)(n) = x(n-1), \forall n \geq 1.$$

Este evident că definiția este corectă ( $Vx \in \ell^2(N)$ ). Operatorul  $V$  se numește operatorul de translație unilateral. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

**a.**  $V$  este liniar și continuu.

**b.**  $V$  este o izometrie:  $\|Vx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \ell^2(N)$ .

De aici rezultă, în particular, că  $\|V\| = 1$ .

**c.**  $V$  nu este operator inversabil (nu este surjectiv).

**d.**  $(V^*x)(n) = x(n+1), \forall x \in \ell^2(N), \forall n \in N$  și  $\|V^*\| = 1$ .

**e.**  $V^*V = I$  dar  $VV^* \neq I$ .

**f.** Operatorul  $V$  nu are valori proprii:  $\sigma_p(V) = \emptyset$ .

**g.**  $\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}$  și  $\sigma(V) = \sigma(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| \leq 1\}$ .

În legătură cu afirmațiile de la punctele b și c să observăm că pe spații finite dimensionale nu există endomorfisme injective care să nu fie surjective (de fapt operatorul  $V$  este mai mult decât injectiv, este o izometrie); dimpotrivă, în cazul finit dimensional orice operator injectiv este și surjectiv (în plus, orice izometrie este operator unitar). Este de asemenea de reținut faptul că  $V$  nu are valori proprii, în timp ce în cazul unui operator definit pe un spațiu finit dimensional spectrul este format numai din valori proprii.

### Soluție

Prin definiție,  $V$  acționează astfel:

$$\ell^2(N) \ni x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \rightarrow (0, x(0), x(1), \dots) = Vx \in \ell^2(N).$$

**a, b, c.** Liniaritatea o lășăm ca exercițiu. Este evident (din schema de mai sus) că  $\|Vx\|_2 = \|x\|_2$ , și deci  $V$  este izometrie. Operatorul  $V$  nu este surjectiv deoarece  $\text{Im}(V) = \{x \in \ell^2(N); x(0) = 0\} \neq \ell^2(N)$  de exemplu, nu există  $x \in \ell^2(N)$  astfel încât  $Vx = \sigma_o$ .

**d.** Pentru orice  $x, y \in \ell^2(N)$ , avem:

$$\langle Vx, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (Vx)(n) \overline{y(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1) \overline{y(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \overline{y(n+1)},$$

ceea ce arată că adjunctul lui  $V$  este:

$$\ell^2(N) \ni y = (y(0), y(1), y(2), \dots) \rightarrow V^*y = (y(1), y(2), y(3), \dots) \in \ell^2(N).$$

Este evident că pentru orice  $x \in \ell^2(N)$  avem  $\|V^*x\|_2 \leq \|x\|_2$ , deci  $\|V^*\| \leq 1$ . Dar  $\|V^*\sigma_1\|_2 = \|\sigma_o\|_2 = 1$ , deci  $\|V^*\| = 1$ .

**e.** Este clar că  $V^*V = I$ ; dar, pentru orice  $x \in \ell^2(N)$  cu proprietatea că  $x(0) \neq 0$ , avem  $VV^*x \neq x$ .

**f.** Arătăm acum că  $V$  nu are valori proprii. Fie, prin absurd,  $\lambda \in C$  astfel încât există  $x \in \ell^2(N), x \neq 0$ , cu proprietatea  $Vx = \lambda x$ , adică:

$$(0, x(0), x(1), x(2), \dots) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots).$$

De aici rezultă  $x(n) = 0, \forall n \in N$ , contradicție cu  $x \neq 0$ .

Am demonstrat deci că  $\sigma_p(V) = \emptyset$ .

**g.** Deoarece  $\|V\| = \|V^*\| = 1$ , rezultă că spectrele operatorilor  $V$  și  $V^*$  sunt incluse în discul unitate închis. Vom arăta mai întâi că

$$\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}.$$

Din egalitatea  $V^*x = \lambda x$ , rezultă:

$$(x(1), x(2), x(3), \dots) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots),$$

și deci  $x(n+1) = \lambda^n x(0)$ ,  $\forall n \in N$ . Dacă  $x(0) = 0$ , atunci  $x = 0$ . Rezultă deci că vectorii proprii  $x$  asociați valorii proprii  $\lambda$  sunt de forma:

$$x = (x(0), \lambda x(0), \lambda^2 x(0), \lambda^3 x(0), \dots), \text{ cu condiția } x(0) \neq 0.$$

Există însă restricția  $x \in \ell^2(N)$ , ceea ce este echivalent cu  $|\lambda| < 1$ . Am demonstrat deci că:

$$\sigma_p(V^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| < 1\}.$$

Din exercițiul anterior, rezultă că  $\sigma(V) \supseteq \sigma_p(V^*)$ . În concluzie, spectrele operatorilor  $V$  și  $V^*$  conțin discul unitate deschis și sunt conținute în discul unitate închis. Cum spectrul este mulțime închisă, rezultă că spectrele celor doi operatori sunt egale cu discul unitate închis.

**35.** Fie  $H$  un spațiu Hilbert și fie  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Mulțimea

$$\sigma_{pa}(T) = \{\lambda \in C \mid \exists x_n \in H \text{ cu } \|x_n\| = 1, \forall n \in N \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = 0\}$$

se numește spectrul punctual aproximativ al lui  $T$ . Să se demonstreze incluziunile:

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{pa}(T) \subseteq \sigma(T).$$

### Soluție

Pentru prima incluziune, fie  $\lambda \in \sigma_p(T)$  și fie  $x \in H$  un vector propriu de normă 1 asociat lui  $\lambda$ . Atunci șirul constant  $x_n = x$ ,  $\forall n \in N$  satisface condițiile:  $\|x_n\| = 1$  și  $(\lambda I - T)x_n = 0$ ,  $\forall n \in N$ , deci  $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$ . Incluziunea  $\sigma_{pa}(T) \subseteq \sigma(T)$  se demonstrează prin reducere la absurd: presupunem că  $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$  și  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Atunci există un șir  $x_n$  cu proprietățile  $\|x_n\| = 1$ ,  $\forall n \in N$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = 0$ ; de asemenea, există operatorul  $(\lambda I - T)^{-1}$ . Aplicând acest operator egalității  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = 0$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , contradicție cu  $\|x_n\| = 1$ ,  $\forall n \in N$ .

**36.** Fie  $H$  un spațiu Hilbert și fie  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

- a.** Dacă  $T$  este inversabil, atunci  $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ .  
**b.** Dacă  $T$  este unitar, atunci  $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ .

**Soluție**

- a.** Egalitatea cerută este echivalentă cu dubla implicație:

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T^{-1}).$$

Fie  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$ ; atunci există  $(\lambda I - T)^{-1}$  și, în plus, el comută cu  $T$ , deci:

$$\begin{aligned} I &= (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} = (T^{-1} - \lambda^{-1}I) \lambda T (\lambda I - T)^{-1} = \\ &= (T^{-1} - \lambda^{-1}I) (\lambda I - T)^{-1} \lambda T, \end{aligned}$$

ceea ce arată că operatorul  $\lambda^{-1}I - T^{-1}$  este inversabil, deci:

$$\lambda^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T^{-1}).$$

Implicația inversă rezultă datorită simetriei între  $T$  și  $T^{-1}$ . Demonstrația se încheie observând că  $0 \in (\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T^{-1}))$ .

- b.** Presupunem că  $T$  este operator unitar, deci  $T^* = T^{-1}$ . Demonstrăm mai întâi că  $\|T\| = 1$ :

$$\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|I\| = 1.$$

Evident, din egalitatea (adevărată în general, nu numai pentru operatori unitari),  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ , rezultă că și  $T^{-1}$  este operator unitar, deci

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = 1.$$

Fie acum  $\lambda \in \sigma(T)$ ; conform punctului precedent, rezultă că  $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$ . Dar  $|\lambda| \leq \|T\| = 1$  și  $|\lambda^{-1}| \leq \|T^{-1}\| = 1$ , deci  $|\lambda| = 1$ .

### 37. Operatorul de translație bilateral

Pe spațiul Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z})$  considerăm aplicația:

$$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), (Wx)(n) = x(n-1), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$W$  se numește operatorul de translație bilateral. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

- a.**  $W$  este liniar și continuu.  
**b.** Adjunctul lui  $W$  este  $(W^*x)(n) = x(n+1), \forall n \in \mathbb{Z}$ .

c.  $W$  este operator unitar:  $WW^* = W^*W = I$ ;

în particular,  $\|W\| = \|W^*\| = 1$ .

d. Operatorii  $W$  și  $W^*$  nu au valori proprii.

e.  $\sigma(W) = \sigma_{pa}(W) = \sigma(W^*) = \sigma_{pa}(W^*) = \{\lambda \in C; |\lambda| = 1\}$ .

Reamintim că  $\sigma_{pa}$  este spectrul punctual aproximativ (cf. exercițiul 35).

### Soluție

a. Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din relația evidentă:

$$\|Wx\|_2 = \|x\|_2.$$

b. Pentru orice  $x, y \in \ell^2(Z)$ , avem:

$$\langle Wx, y \rangle = \sum_{n \in Z} x(n-1) \overline{y(n)} = \sum_{n \in Z} x(n) \overline{y(n+1)},$$

și deci într-adevăr  $(W^*x)(n) = x(n+1)$ ,  $\forall n \in Z$ .

c. Egalitățile  $WW^* = W^*W = I$  sunt evidente.

d. Vom demonstra că  $W$  nu are valori proprii (analog se arată și pentru  $W^*$ ). Presupunem prin absurd că există  $\lambda \in C$  și  $x \in \ell^2(Z)$ ,  $x \neq 0$  astfel încât  $Wx = \lambda x$ , adică

$$x(n-1) = \lambda x(n), \forall n \in Z.$$

Rezultă deci că  $x(n) = \lambda^{-n}x(0)$ ,  $\forall n \in Z$ . Dar  $x \in \ell^2(Z)$  și deci seriile geometrice:

$$\sum_{n=-\infty}^0 |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n}$$

trebuie să fie simultan convergente; acest lucru este posibil numai dacă  $x(0) = 0$ , adică  $x = 0$ , contradicție.

e. Spectrele operatorilor  $W$  și  $W^*$  sunt incluse în cercul unitate pentru că sunt operatori unitari (exercițiul 36).

Demonstrăm că spectrul punctual aproximativ al lui  $W$  este egal cu cercul unitate. Fie  $\lambda = e^{it}$  și fie  $x_n \in \ell^2(Z)$ , șirul definit prin:

$$x_n(k) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikt} \text{ pentru } |k| \leq n \text{ și } x_n(k) = 0 \text{ în rest.}$$

Propunem cititorului să arate că  $\|x_n\|_2 = 1$  și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda I - W)x_n\|_2 = 0.$$

Analog se calculează și  $\sigma_{pa}(W^*)$ . Cum  $\sigma(W)$  și  $\sigma(W^*)$  sunt incluse în cercul unitate, demonstrația este încheiată.

**38. Operatorul integral**

Fie spațiul Hilbert  $(L^2[0, 1], \|\cdot\|_2)$  al funcțiilor de pătrat integrabil pe intervalul  $[0, 1]$  în raport cu măsura Lebesgue. Fie  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  o funcție de pătrat integrabil pe  $[0, 1] \times [0, 1]$  și fie:

$$\|K\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy}.$$

a. Să se demonstreze că pentru orice funcție  $f \in L^2[0, 1]$ , funcția  $g$  definită prin egalitatea:

$$g(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$$

este în  $L^2[0, 1]$ .

Rezultă deci că putem defini aplicația:

$$T_K : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), (T_K f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

Operatorul  $T_K$  se numește operatorul integral definit de nucleul  $K$ .

b. Să se demonstreze că  $T_K$  este liniar și continuu și  $\|T_K\| \leq \|K\|_2$ .

c. Fie  $T_K$  și  $T_H$  doi operatori integrali cu nucleele  $K$  și respectiv  $H$ .

Să se demonstreze că operatorul  $T_K T_H$  este operator integral și are nucleul definit prin  $G(x, y) = \int_0^1 K(x, z)H(z, y)dz$ , deci:

$$(T_K T_H f)(x) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, z)H(z, y)dz \right) f(y)dy.$$

În cazul particular  $K = H$ , obținem:

$$(T_K^2 f)(x) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, z)K(z, y)dz \right) f(y)dy.$$

d. Dacă șirul de nuclee  $K_n$  converge în spațiul Hilbert  $L^2([0, 1] \times [0, 1])$  la funcția  $K$ , atunci șirul de operatori integrali  $T_{K_n}$  converge în spațiul  $(\mathcal{L}(L^2[0, 1]), \|\cdot\|)$  la operatorul integral  $T_K$ .

e. Adjunctul operatorului  $T_K$  este operatorul integral  $T_{\tilde{K}}$ , cu nucleul

$$\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$$

În particular,  $T_K$  este autoadjunct dacă și numai dacă nucleul  $K$  are proprietatea  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$  (un astfel de nucleu se numește simetric).

**Soluție**

a. Avem (folosim inegalitatea lui Schwarz):

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)f(y) dy \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right) \left( \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2. \end{aligned}$$

b. Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din punctul precedent și în plus  $\|T_K\| \leq \|K\|_2$ .

c. Pentru orice  $f \in L^2[0,1]$ , avem:

$$\begin{aligned} (T_K T_H f)(x) &= \int_0^1 K(x,y) (T_H f)(y) dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y) H(y,z) f(z) dz dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x,y) H(y,z) dy \right) f(z) dz = \\ &= \int_0^1 G(x,z) f(z) dz = (T_G f)(x). \end{aligned}$$

d. Demonstrația este o consecință imediată a inegalității dintre normele operatorului integral și a nucleului său:

$$\|T_{K_n} - T_K\| \leq \|K_n - K\|_2 \rightarrow 0.$$

e. Pentru orice  $f, g \in L^2[0,1]$ , avem:

$$\begin{aligned} \langle T_K f, g \rangle &= \int_0^1 (T_K f)(x) \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_0^1 \left( f(y) \int_0^1 K(x,y) \overline{g(x)} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{\left( \int_0^1 \widetilde{K}(y,x) g(x) dx \right)} dy = \langle f, T_{\widetilde{K}} g \rangle. \end{aligned}$$

**39. Operatorul Volterra**

Un operator integral  $T_K$  (a se vedea exercițiul precedent) se numește operator de tip Volterra dacă nucleul  $K$  are proprietatea:  $K(x,y) = 0, \forall x < y$ . Rezultă că un operator Volterra este definit prin:

$$(T_K f)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y) dy, \forall f \in L^2[0,1].$$



Analogia cu teoria matricelor este evidentă: operatorii de tip Volterra sunt analogul operatorilor asociați matricelor inferior triunghiulare. Se știe că dacă o matrice  $A$  este strict inferior triunghiulară, atunci ea este nilpotentă, adică există  $m \in \mathbb{N}$  astfel încât  $A^m = O$ . Scopul acestui exercițiu este de a demonstra o proprietate asemănătoare și pentru operatorii Volterra definiți de nuclee mărginite; o consecință va fi calculul spectrului unui astfel de operator.

Fie  $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  un nucleu Volterra mărginit, deci  $\|K\|_\infty < \infty$ ; atunci, operatorul Volterra asociat,  $T_K$ , are proprietățile:

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|T_K^n\|)^{\frac{1}{n}} = 0$ .

b.  $\sigma(T_K) = \{0\}$ ; un operator cu această proprietate se numește cvasinilpotent.

### Soluție

a. Vom demonstra mai întâi că produsul a doi operatori de tip Volterra  $T_K$  și  $T_H$  este un operator de același tip. Ținând cont de cele demonstrate în exercițiul precedent (punctul c), este suficient să arătăm implicația:

$$K(x, y) = H(x, y) = 0, \forall x < y \Rightarrow G(x, y) = 0, \forall x < y,$$

unde, conform exercițiului precedent (punctul c):

$$G(x, y) = \int_0^1 K(x, z)H(z, y)dz.$$

Într-adevăr, dacă  $x < y$ , atunci orice  $z \in [0, 1]$  trebuie să verifice cel puțin una din inegalitățile:  $x < z$  sau  $z < y$ ; în primul caz, avem  $K(x, z) = 0$ , iar în al doilea  $H(z, y) = 0$ , deci oricum  $G(x, y) = 0$ . Dacă  $x \geq y$ , atunci:

$$G(x, y) = \int_y^x K(x, z)H(z, y).$$

Să presupunem acum că  $H = K$  și să notăm în acest caz

$$K^{[2]}(x, y) = G(x, y) = \int_0^1 K(x, z)K(z, y)dz,$$

și în general pentru  $n \in \mathbb{N}$ :

$$K^{[n]}(x, y) = \int_0^1 K(x, z)K^{[n-1]}(z, y)dz.$$

Pentru orice  $0 \leq y \leq x \leq 1$ , avem:

$$|K^{[2]}(x, y)| = \left| \int_y^x K(x, z)K(z, y)dz \right| \leq \|K\|_\infty^2 (x - y).$$

Prin inducție rezultă că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $y \leq x$ , avem:

$$|K^{[n]}(x, y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} (x-y)^{n-1} \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}.$$

Rezultă deci că:

$$(\|T_K^n\|)^{\frac{1}{n}} \leq (\|K^{[n]}\|_\infty)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\|K\|_\infty}{(n-1)!^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0,$$

pentru  $n \longrightarrow \infty$ , ceea ce încheie demonstrația.

**b.** Reamintim că raza spectrală a unui operator  $T$  este:

$$r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Din definiția razei spectrale rezultă în mod evident că dacă  $r(T) = 0$ , atunci  $\sigma(T) = \{0\}$ . Din cele demonstrate la punctul precedent, rezultă că  $r(T_K) = 0$ , deci  $\sigma(T_K) = \{0\}$ .

**40.** Fie  $L^\infty[0, 2\pi]$  spațiul Banach al funcțiilor esențial mărginite cu norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**a.** Să se arate că pentru orice  $\phi \in L^\infty[0, 2\pi]$  și  $f \in L^2[0, 2\pi]$ , funcția produs  $\phi f$  este în  $L^2[0, 2\pi]$ .

**b.** Pentru orice  $\phi \in L^\infty[0, 2\pi]$ , fixată definim operatorul:

$$M_\phi : L^2[0, 2\pi] \mapsto L^2[0, 2\pi], \quad M_\phi(f) = \phi f.$$

Să se demonstreze că  $M_\phi$  este operator liniar și continuu.

Operatorul  $M_\phi$  se numește operatorul de înmulțire cu funcția  $\phi$ .

**c.** Să se demonstreze că  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$ .

**d.** Să se demonstreze că  $M_\phi^* = M_{\bar{\phi}}$ , unde,  $\bar{\phi}(t) = \overline{\phi(t)}$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$ . Să se caracterizeze apoi operatorii de înmulțire autoadjuncți și cei unitari.

**Soluție**

**a.** Pentru orice  $\phi \in L^\infty[0, 2\pi]$  și  $f \in L^2[0, 2\pi]$ , avem:

$$\|\phi f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi(t)f(t)|^2 dt} \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2 < \infty.$$

**b.** Liniaritatea aplicației  $M_\phi$  este evidentă; continuitatea este echivalentă cu existența unei constante  $k > 0$  cu proprietatea

$$\|M_\phi f\|_2 \leq k \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

Din calculul făcut la punctul a, rezultă că putem lua  $k = \|\phi\|_\infty$ , ceea ce încheie demonstrația.

c. Prin definiție, norma  $\|M_\phi\|$  este:

$$\|M_\phi\| = \inf\{k > 0; \|M_\phi f\|_2 \leq k \|f\|_2, \forall f \in L^2[0, 2\pi]\}.$$

Inegalitatea  $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$  a fost demonstrată la punctul b; demonstrăm acum inegalitatea inversă. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  considerăm mulțimea:

$$A_n = \{t \in [0, 2\pi]; |\phi(t)| \geq \|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}\}.$$

Din definiția normei  $\|\cdot\|_\infty$  rezultă că măsura Lebesgue a mulțimii  $A_n$  este nenulă (și finită, deoarece măsura întregului cerc este finită). Fie  $\chi_n$  funcția caracteristică a mulțimii  $A_n$ ; evident  $\chi_n \in L^2[0, 2\pi]$  și:

$$\begin{aligned} \|M_\phi \chi_n\|_2 &= \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi(t)\chi_n(t)|^2 dt} \geq \\ &\geq \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(\|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}\right)^2 |\chi_n(t)|^2 dt} \geq \left(\|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}\right) \|\chi_n\|_2, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Rezultă inegalitatea:

$$\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_\infty - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

deci  $\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_\infty$ .

d. Dacă  $f, g \in L^2[0, 2\pi]$ , atunci:

$$\begin{aligned} \langle M_\phi f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(t)f(t)) \overline{g(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{(\phi(t)g(t))} dt = \langle f, M_{\overline{\phi}} g \rangle, \end{aligned}$$

și deci  $(M_\phi)^* = M_{\overline{\phi}}$ . Rezultă imediat următoarele caracterizări:  $M_\phi$  este autoadjunct dacă și numai dacă  $\phi(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 2\pi]$ .  $M_\phi$  este unitar dacă și numai dacă  $|\phi(t)| = 1, \forall t \in [0, 2\pi]$ .

41. În spațiul Hilbert  $L^2[0, 2\pi]$  considerăm submulțimea:

$$H^2[0, 2\pi] = \{f \in L^2[0, 2\pi] \mid \hat{f}_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}, k \leq -1\}.$$

- a. Să se demonstreze că  $H^2[0, 2\pi]$  este subspațiu vectorial în  $L^2[0, 2\pi]$ .  
 b. Să se demonstreze că  $H^2[0, 2\pi]$  este subspațiu închis în  $L^2[0, 2\pi]$ .  
 c. Fie funcția  $\omega_1(t) = e^{it}, \forall t \in [0, 2\pi]$  și fie  $M_{\omega_1}$  operatorul de înmulțire cu funcția  $\omega_1$ :  $M_{\omega_1}f = \omega_1 f, \forall f \in L^2[0, 2\pi]$  (cf. exercițiului precedent). Să se demonstreze că  $H^2[0, 2\pi]$  este subspațiu invariant pentru operatorul  $M_{\omega_1}$ , adică  $M_{\omega_1}h \in H^2[0, 2\pi], \forall h \in H^2[0, 2\pi]$ .

**Soluție**

În acest exercițiu (și în următorul) vom nota coeficienții Fourier ai unei funcții  $f$  cu  $\widehat{f}(n)$ .

- a. Pentru orice  $f, g \in H^2[0, 2\pi]$  și  $\alpha, \beta \in C$ , avem:

$$(\alpha f + \beta g)(k) = \alpha \widehat{f}(k) + \beta \widehat{g}(k) = 0, \forall k \in Z, k \leq -1,$$

deci  $H^2[0, 2\pi]$  este subspațiu în  $L^2[0, 2\pi]$ .

- b. Fie  $f_n \in H^2[0, 2\pi]$  un șir de funcții și fie  $f \in L^2[0, 2\pi]$ . Trebuie să demonstrăm că dacă  $f_n$  converge în norma  $\|\cdot\|_2$  la  $f$ , atunci  $f \in H^2[0, 2\pi]$ . Pentru aceasta, fie  $k \in Z, k \leq -1$ ; calculăm:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} (f(t) - f_n(t)) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) e^{-ikt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} (f(t) - f_n(t)) dt. \end{aligned}$$

Ultima integrală tinde la 0 când  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} e^{-ikt} (f_n - f(t)) dt \right| &\leq \int_0^{2\pi} |e^{ikt} (f_n(t) - f(t))| dt = \\ &= 2\pi \|f_n - f\|_1 \leq 2\pi \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

unde, ultima inegalitate a fost demonstrată în exercițiul 11.

Rezultă  $\widehat{f}(k) = 0, \forall k \in Z, k \leq -1$ , și deci  $f \in H^2[0, 2\pi]$ .

- c. Fie  $k \in Z, k \leq -1$  și  $h \in H^2[0, 2\pi]$ ; atunci:

$$\begin{aligned} (\widehat{M_{\omega_1}h})(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{it} e^{-ikt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-i(k-1)t} dt = \widehat{h}(k-1) = 0, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

**42.** Fie  $W : \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $(Wx)(n) = x(n-1)$ , operatorul de translație bilateral (a se vedea exercițiul 37) și fie, pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$ , operatorul:

$$(W^k x)(n) = x(n-k), \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Fie, pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$  funcția  $\omega_k(t) = e^{ikt}$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$  și fie  $M_{\omega_k}$  operatorul de înmulțire asociat, adică (cf. exercițiului 40):

$$(M_{\omega_k} f)(t) = \omega_k(t)f(t) = e^{ikt}f(t), \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

Să se demonstreze egalitatea:

$$(\widehat{M_{\omega_k} f})(n) = (W^k \widehat{f})(n), \forall f \in L^2[0, 2\pi], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

### Soluție

Cu notațiile din enunț, avem:

$$\begin{aligned} (\widehat{M_{\omega_k} f})(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_k(t)f(t) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i(n-k)t} dt = \widehat{f}(n-k) = (W^k \widehat{f})(n), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.



# Capitolul 7

## Integrale duble și triple

### 7.1 Noțiuni teoretice

#### Măsura Lebesgue

Fie  $R^k$  spațiul euclidian  $k$ -dimensional și fie  $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ . Un paralelipiped în  $R^k$  este orice mulțime de forma:

$$P = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Inegalitățile nestrictе pot fi înlocuite și de inegalități stricte. Prin definiție, mulțimea vidă și  $R^k$  sunt paralelipede.

Măsura (Lebesgue) a unui paralelipiped este definită prin:

$$\mu(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

În cazurile particulare  $k = 1, 2, 3$  se obțin noțiunile uzuale de lungime, arie, volum.

O submulțime  $E \subseteq R^k$  se numește elementară dacă există  $P_1, P_2, \dots, P_n$  paralelipede astfel încât  $E = \bigcup_{i=1}^n P_i$ .

Notăm cu  $\mathcal{E}$  familia mulțimilor elementare din  $R^k$ .

Orice mulțime elementară se poate scrie ca reuniune de paralelipede disjuncte două câte două. Dacă  $E = \bigcup_{i=1}^n P_i$  este o astfel de descompunere,

atunci măsura Lebesgue a lui  $E$  este:  $\mu(E) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i)$ . Se poate arăta că  $\mu(E)$  nu depinde de descompunerea considerată.

Proprietățile aplicației  $\mu$  pe familia mulțimilor elementare sunt:

- i. dacă  $A, B \in \mathcal{E}$  atunci  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  sunt mulțimi elementare.
- ii. dacă  $A, B \in \mathcal{E}$  astfel încât  $A \cap B = \emptyset$  atunci  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .
- iii. pentru orice  $A \in \mathcal{E}$  și  $\varepsilon > 0$  există  $F, G \in \mathcal{E}$ ,  $F$  închisă și  $G$  deschisă astfel încât:

$$F \subseteq A \subseteq G$$

$$\mu(G) - \varepsilon < \mu(A) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Aplicația  $\mu$  se prelungește la toate părțile lui  $R^k$ ; fie  $A \subseteq R^k$  și fie

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in N} \mu(A_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n \in N} A_n, A_n \in \mathcal{E}, A_n \text{ deschisă } \forall n \in N \right\}.$$

Aplicația  $\mu^*$  se numește măsură exterioară; principalele proprietăți sunt:

- i.  $\mu^*(A) \geq 0, \forall A \subseteq R^k$ .
- ii. dacă  $A_1 \subseteq A_2$  atunci  $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ .
- iii. dacă  $E \in \mathcal{E}$  atunci  $\mu^*(E) = \mu(E)$ .
- iv.  $\mu^* \left( \bigcup_{n \in N} A_n \right) \leq \sum_{n \in N} \mu^*(A_n), \forall A_n \subseteq R^k$ .

Se demonstrează că există o  $\sigma$ -algebră de părți ale lui  $R^k$ , notată  $\mathcal{M}$  astfel încât restricția  $\mu^* : \mathcal{M} \mapsto [0, \infty]$  este măsură. Măsura astfel obținută (notată  $\mu$ ) se numește măsura Lebesgue (în  $R^k$ ), iar elementele lui  $\mathcal{M}$  se numesc mulțimi măsurabile Lebesgue.

Principalele proprietăți ale spațiului cu măsură  $(R^k, \mathcal{M}, \mu)$  sunt:

- i.  $\mathcal{M}$  conține mulțimile Boreliene.
- ii. dacă  $A \in \mathcal{M}$  atunci  $\mu(A) = \inf \{ \mu(D) \mid D \text{ deschisă și } D \supseteq A \}$ .
- iii. dacă  $A \in \mathcal{M}$  atunci  $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K \text{ compactă și } K \subseteq A \}$ .
- iv. orice mulțime compactă are măsură Lebesgue finită.
- v. dacă  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\mu(A) = 0$  și  $B \subseteq A$  atunci  $B \in \mathcal{M}$  și  $\mu(B) = 0$ .
- vi. dacă  $A \in \mathcal{M}$  atunci pentru orice  $x \in R^k$  mulțimea (translatată)  $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$  este măsurabilă Lebesgue și  $\mu(A + x) = \mu(A)$ .

### Integrala Lebesgue

Dacă  $f$  este o funcție integrabilă în raport cu măsura Lebesgue (în  $R^k$ ), atunci integrala corespunzătoare (pe o mulțime  $A$ ) se notează

$$\int_A f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

În cazurile particulare (uzuale)  $k = 1, 2, 3$  se folosesc notațiile:

$$\int_A f(x) dx, \int \int_A f(x, y) dx dy, \int \int \int_A f(x, y, z) dx dy dz.$$



**Legătura cu integrabilitatea în sens Riemann**

**i.** Dacă  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  este o funcție integrabilă Riemann (pe intervalul compact  $[a, b]$ ), atunci  $f$  este și integrabilă în raport cu măsura Lebesgue și cele două integrale sunt egale.

**ii.** Dacă  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  este o funcție mărginită atunci ea este integrabilă Riemann dacă și numai dacă mulțimea punctelor sale de discontinuitate are măsura Lebesgue nulă (se spune că  $f$  este continuă a.p.t.).

**iii.** Există funcții care sunt integrabile Lebesgue dar nu sunt integrabile Riemann; de exemplu, funcția lui Dirichlet (pe intervalul  $[0, 1]$ ) nu este integrabilă Riemann dar este integrabilă Lebesgue (integrala sa este 0, pentru că funcția este nulă a.p.t.).

**iv.** Dacă  $\int_a^b f(x)dx$  este o integrală Riemann improprie absolut convergentă atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue și integralele sunt egale.

Există însă integrale Riemann improprii convergente  $\int_a^b f(x)dx$  (dar nu absolut convergente) pentru care funcția  $f$  nu este integrabilă Lebesgue; de exemplu  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  pe intervalul  $(0, \infty)$ .

**Teorema lui Fubini**

În continuare notăm  $(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p}$ , măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^k$  cu  $dx$ , măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^p$  cu  $dy$  și măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^{k+p}$  cu  $dxdy$ .

Fie  $f : \mathbb{R}^{k+p} \mapsto \mathbb{R}$  o funcție integrabilă Lebesgue; atunci:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x, y) dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy.$$

Următoarele cazuri particulare ale rezultatului de mai sus sunt frecvent utilizate în aplicații.

**i.** Fie  $\varphi, \phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  două funcții continue astfel încât  $\varphi \leq \phi$  și fie mulțimea

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \phi(x)\}.$$

Dacă  $f : K \mapsto \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $K$  și:

$$\int \int_K f(x, y) dxdy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

În particular, aria mulțimii  $K$  este:

$$\mu(K) = \int \int_K dxdy = \int_a^b (\phi(x) - \varphi(x)) dx.$$

ii. Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  o mulțime compactă, fie  $\varphi, \phi : D \mapsto \mathbb{R}$  două funcții continue astfel încât  $\varphi \leq \phi$  și fie

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \phi(x, y)\}.$$

Dacă  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $\Omega$  și:

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\phi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

În particular, volumul lui  $\Omega$  este:

$$\mu(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D (\phi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy.$$

### Formula schimbării de variabile

Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și fie  $\Lambda : A \mapsto \Lambda(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  un difeomorfism. Pentru orice funcție continuă  $f : \Lambda(A) \mapsto \mathbb{R}$ , avem:

$$\int_{\Lambda(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \Lambda)(y) |J_{\Lambda}(y)| dy,$$

unde  $J_{\Lambda}$  este iacobianul difeomorfismului  $\Lambda$ .

## 7.2 Integrale duble

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:

- $\int \int_D xy^2 dx dy$ , unde  $D = [0, 1] \times [2, 3]$ .
- $\int \int_D xy dx dy$ , unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [0, 1], y^2 \leq x \leq y\}$ .
- $\int \int_D y dx dy$ , unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Soluție**

- $\int \int_D xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_0^1 \frac{19}{3} x dx = \frac{19}{6}$ .
- $\int \int_D xy dx dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y xy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^3 - y^5) dy = \frac{1}{24}$ .
- $\int \int_D y dx dy = \int_1^3 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y dy = 0$ .

2. Să se calculeze integralele duble:

a.  $\int \int_D (x+3y) dx dy$ ,  $D$  fiind mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații

$$y = x^2 + 1, y = -x^2, x = -1, x = 3.$$

b.  $\int \int_D e^{|x+y|} dx dy$ ,  $D$  fiind mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații

$$x + y = 3, x + y = -3, y = 0, y = 3.$$

c.  $\int \int_D x dx dy$ ,  $D$  fiind mulțimea plană mărginită de curba de ecuație

$$x^2 + y^2 = 9, x \geq 0.$$

### Soluții

a.  $\int \int_D (x + 3y) dx dy = \int_{-1}^3 dx \int_{-x^2}^{x^2+1} (x + 3y) dy.$

b. Fie  $D_1 = \{(x, y) \in D; x + y \leq 0\}$  și  $D_2 = D \setminus D_1$ .

Atunci  $D = D_1 \cup D_2$  și:

$$\begin{aligned} \int \int_D e^{|x+y|} dx dy &= \int \int_{D_1} e^{-x-y} dx dy + \int \int_{D_2} e^{x+y} dx dy = \\ &= \int_0^3 dy \int_{-3-y}^{-y} e^{-x-y} dx + \int_0^3 dy \int_{-y}^{3-y} e^{x+y} dx. \end{aligned}$$

c.  $\int \int_D x dx dy = \int_{-3}^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} x dx.$

3. Folosind coordonatele polare, să se calculeze integralele:

a.  $\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

b.  $\int \int_D \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - y \leq 0, x \geq 0\}$ .

c.  $\int \int_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$  fiind mărginit de curbele de ecuații

$$x^2 + y^2 = e^2, y = x\sqrt{3}, x = y\sqrt{3}, x \geq 0.$$

### Soluție

Coordonatele polare sunt  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , iacobianul este  $\rho$ , iar domeniul maxim pentru coordonatele  $\rho$  și  $\varphi$  este  $(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ .

a. În coordonate polare domeniul de integrare este dreptunghiul  $(\rho, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 1]$ , și deci:

$$\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \Big|_0^1 d\varphi = \pi(e-1).$$

b. Înlocuind pe  $x$  și  $y$  în condițiile ce definesc domeniul  $D$ , obținem

$$\rho \leq \sin \varphi, \cos \varphi \geq 0$$

și deci

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}), \rho \in [0, \sin \varphi].$$

Rezultă:

$$\int \int_D \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho(1 + \rho) d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{9}.$$

c. Domeniul de integrare în coordonate polare este dreptunghiul  $(\rho, \varphi) \in [0, e] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ , deci:

$$\begin{aligned} \int \int_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^e d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \ln(1 + \rho^2) d\varphi = \\ &= \frac{\pi(1 + e^2)}{12} (\ln(1 + e^2) - 1) + \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

4. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-2}$  integralele:

a.  $\int \int_A \frac{dx dy}{1 + xy}$ ,  $A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ .

b.  $\int \int_B \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2)}} dx dy$ , unde:

$$B = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq (e-1)^2\}.$$

**Soluții**

a.

$$\begin{aligned} \int \int_A \frac{dx dy}{1 + xy} &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1 + xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1 + xy)}{x} \Big|_0^1 dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1 + x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cong \frac{65}{144}. \end{aligned}$$

b. Folosim coordonatele polare:

$$\begin{aligned} \int \int_B \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2)}} &= 4\pi \int_1^{e-1} \frac{\ln \rho}{\rho - 1} d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^{e-2} \frac{\ln(1+u)}{u} du = 4\pi \int_0^{e-2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \rho^n d\rho = \\ &= 4\pi \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (e-2)^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

În continuare se aproximează suma seriei alternante obținute.

5. Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  și fie  $f : D \mapsto [0, \infty)$  o funcție continuă. Să se calculeze volumul mulțimii

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

în următoarele cazuri:

- a.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .
- b.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq x, y > 0\}$ ,  $f(x, y) = xy$ .
- c.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$ ,  $f(x, y) = y$ .

**Soluție**

Volumul mulțimii  $\Omega$  este dat de formula

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D f(x, y) dx dy$$

a. Trecând la coordonate polare, se obține:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

b. Cu aceeași metodă, se obține:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi d\rho = \frac{1}{24}.$$

c. Cu schimbarea de variabile:

$$x = 1 + \rho \cos \varphi, \quad y = 1 + \rho \sin \varphi, \quad (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi),$$

rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int_D y dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 + \rho \sin \varphi) d\rho = \pi.$$

6. Să se calculeze ariile mulțimilor plane  $D$  mărginite de curbele de ecuații:

- a.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a$  și  $b$  fiind două constante pozitive.  
 b.  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x > 0$ ,  $a$  fiind o constantă pozitivă.  
 c.  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ,  $a$  fiind o constantă pozitivă.

**Soluții**

a. Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate,  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = b\rho \sin \varphi$ , este  $\rho = 1$  și deci obținem:

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = \pi ab.$$

b. Ecuația curbei în coordonate polare este  $\rho^2 = a^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$ , sau  $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ , și deci domeniul de integrare în coordonate polare este

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \rho \in (0, a\sqrt{\cos 2\varphi}).$$

Rezultă:

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{a^2}{2}.$$

c. Ecuația lemniscatei în coordonate polare este  $\rho^2 = 2a^2 \cos \varphi \sin \varphi$ . Domeniul de integrare este  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\rho \in (0, a\sqrt{\sin 2\varphi})$ ; obținem:

$$\text{aria}(D) = \int \int_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2.$$

7. Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$  și fie  $D$  discul unitate închis. Să se calculeze integralele:

- a.  $I = \int \int_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$   
 b.  $J = \int \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ .

**Soluție**

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha < 1 \\ \infty & \text{dacă } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \infty & \text{dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

### 7.3 Integrale triple

8. Fie mulțimea:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 5\}$$

Să se calculeze integrala  $\int \int \int_{\Omega} \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$  prin două metode:

- proiectând  $\Omega$  pe planul  $xoy$  și
- folosind coordonatele cilindrice.

**Soluție**

a. Proiecția mulțimii  $\Omega$  pe planul  $xoy$  este

$$D = \{(x, y) \in R^2; x \in [0, 1], \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1 - x^2}\}$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \int \int_D dx dy \int_0^5 \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz = \\ &= \frac{25}{2} \int \int_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \end{aligned}$$

integrală care se calculează folosind coordonate polare.

b. Coordonatele cilindrice sunt  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ , domeniul maxim fiind  $(\rho, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times R$ , iar iacobianul  $J = \rho$ .

Pentru  $\Omega$ , domeniul de integrare în coordonate cilindrice este

$z \in [0, 5]$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\rho \in [1, \frac{2}{\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}}]$  și deci:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \int_0^5 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}}} \frac{z \rho \sin \varphi}{\rho} \rho d\rho = \\ &= \frac{25}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(1 - \cos^2 \varphi)}{3 \cos^2 \varphi + 1} \sin \varphi d\varphi = \frac{25}{18} (4\sqrt{3}\pi - 9). \end{aligned}$$

9. Să se calculeze integralele:

a.  $\int \int \int_{\Delta} (y - x) dx dy dz,$

$$\Delta = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y > 0\}$$

b.  $\int \int \int_{\Omega} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz,$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3; y \geq 0, z \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1\}.$$

$$\text{c. } \int \int \int_{\Pi} z \, dx dy dz,$$

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}.$$

**Soluție**

Coordonatele sferice sunt

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

domeniul maxim fiind:

$$(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi),$$

iar iacobianul  $J = \rho^2 \sin \theta$ .

**a.** Pentru  $\Delta$ , domeniul în coordonate sferice este

$$\rho \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, \pi]$$

și avem:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Delta} (y - x) \, dx dy dz = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \rho^3 \sin^2 \theta (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**b.** Coordonatele sferice generalizate sunt:

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c\rho \cos \theta,$$

având același domeniu maxim ca mai sus și iacobianul  $J = abc\rho^2 \sin \theta$ .

Pentru domeniul  $\Omega$  vom lua  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$ , și obținem:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \, dx dy dz = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi 6\rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\varphi = 6\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho = \\ &= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = 6\pi \int_0^\infty \frac{u^2}{(1 + u^2)^4} du = \\ &= 3\pi \left( -\frac{u}{3(1 + u^2)^3} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{du}{3(1 + u^2)^3} \right) = \pi \int_0^\infty \frac{du}{(1 + u^2)^3} = \\ &= \pi \left( \int_0^\infty \frac{du}{(1 + u^2)^2} - \int_0^\infty \frac{u^2}{(1 + u^2)^3} du \right) = \frac{3}{4}\pi \int_0^\infty \frac{du}{(1 + u^2)^2} = \frac{3}{16}\pi. \end{aligned}$$



c. Pentru  $\Pi$ , domeniul în coordonate sferice este

$$\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \rho \in [0, 2 \cos \theta]$$

și deci:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Pi} z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho = \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

10. Fie  $0 < k < R$ ; să se calculeze volumul mulțimii:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq k\}.$$

### Soluție

Mulțimea  $\Omega$  este interiorul calotei sferice situate "deasupra" planului  $z = k$ . Pentru a calcula volumul, trecem la coordonate sferice. Fie  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  astfel încât  $R \cos \theta_0 = k$ , deci  $\cos \theta_0 = \frac{k}{R}$ ; rezultă domeniul (pentru coordonatele sferice):

$$\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \theta_0], \rho \in [\frac{k}{\cos \theta}, R].$$

Se obține:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\frac{k}{\cos \theta}}^R \rho^2 \sin \theta d\rho = \\ \frac{2\pi}{3} \int_0^{\theta_0} \left( R^3 - \frac{k^3}{\cos^3 \theta} \right) d\theta &= \frac{2\pi}{3} \left( -R^3 \cos \theta - \frac{k^3}{2 \cos^2 \theta} \right) \Big|_0^{\theta_0} = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left( R^3 - \frac{3}{2} R^2 k + \frac{k^3}{2} \right). \end{aligned}$$

11. Să se calculeze volumele mulțimilor  $\Omega$  mărginite de suprafețele de ecuații:

- a.  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0$ .
- b.  $z = x^2 + y^2 - 1, z = 2 - x^2 - y^2$ .
- c.  $z = 4 - x^2 - y^2, 2z = 5 + x^2 + y^2$ .
- d.  $x^2 + y^2 = 1, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ .
- e.  $x^2 + y^2 = 4a^2, x^2 + y^2 - 2ay = 0, x + y + z = 3, x \geq 0, z \geq 0, a \in (0, 1)$ .
- f.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = x^2, x \geq 0$ .

**Soluție**

a. Curba de intersecție dintre elipsoid și con este elipsa de ecuații

$$4x^2 + 2y^2 = 1, z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proiecția pe planul  $xoy$  a lui  $\Omega$  este

$$D = \{(x, y); 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz = \\ &= \int \int_D \left( \sqrt{1-2x^2-y^2} - \sqrt{2x^2+y^2} \right) dx dy = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho d\varphi = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

b. Curba de intersecție a celor doi paraboloidi este cercul de ecuații

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}.$$

Proiecția pe planul  $xOy$  a lui  $\Omega$  este

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}\},$$

și deci obținem:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz = \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} (3-\rho^2) \rho d\varphi. \end{aligned}$$

c. Curba de intersecție dintre cei doi paraboloidi este cercul  $x^2 + y^2 = 1$  situat în planul  $z = 3$ . Notând cu  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)}^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int \int_D \frac{3}{2}(1 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)\rho d\varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

d. Curba de intersecție dintre cilindru și con este cercul  $x^2 + y^2 = 1$  situat în planul  $z = 1$ . Notând cu  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , rezultă:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz = \\ &= \int \int_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \rho)\rho d\varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

e. Proiecția lui  $\Omega$  pe planul  $xOy$  este

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4a^2, x^2 + (y - a)^2 \geq a^2, x > 0\},$$

și deci obținem:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_0^{3-x-y} dz = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2a \sin \varphi}^{2a} \rho(3 - \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\rho. \end{aligned}$$

f. Curba de intersecție dintre sferă și con este cercul  $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ , situat în planul  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Proiecția mulțimii  $\Omega$  pe planul  $yOz$  este discul  $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}\}$ ; rezultă:

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int \int_D dy dz \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y^2+z^2}}} dx = \\ &= \int \int_D \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{y^2 + z^2}\right) dy dz = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi. \end{aligned}$$

**12.** Să se calculeze volumele mulțimilor  $\Omega$  mărginite de suprafețele de ecuații:

a.  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = x$ .

b.  $(x^2 + y^2)^3 = z^2$ ,  $z = 0$ ,  $z = 8$ .

c.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ,  $0 \leq z \leq c$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

**Soluție**

a. Folosim coordonatele sferice. Obținem domeniul:

$\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\rho \in [0, \sqrt[5]{\sin \theta \cos \varphi}]$  și deci:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[5]{\sin \theta \cos \varphi}} \rho^2 \sin \theta d\rho =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin^{\frac{3}{5}} \theta \cos^{\frac{3}{5}} \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \left( \int_0^\pi \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}} \varphi d\varphi \right).$$

Calculăm prima integrală; mai întâi, observăm că:

$$\int_0^\pi \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta,$$

cu schimbarea de variabilă  $t = \theta - \pi$  în a doua integrală. Vom calcula acum integrala  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta$  folosind funcția  $B$  a lui Euler (a se vedea și exercițiul 28(a) din capitolul 5). Cu schimbarea de variabilă  $\sin^2 \theta = y$ , rezultă:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}} \theta d\theta &= \int_0^1 \frac{y^{\frac{4}{5}}}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{3}{10}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Calculăm acum integrala  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}} \varphi d\varphi$  cu aceeași metodă: fie  $\sin^2 \varphi = y$ ; rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}} \varphi d\varphi &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}} \varphi d\varphi = 2 \int_0^1 \frac{(1-y)^{\frac{3}{10}}}{2\sqrt{y}\sqrt{1-y}} dy = \\ &= \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{5}} y^{-\frac{1}{2}} dy = B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

În concluzie, volumul cerut este:

$$\text{vol}(\Omega) = B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

**b.** Folosim coordonatele cilindrice; obținem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{z}} \rho d\rho = 32\pi.$$

**c.** Folosim coordonate cilindrice generalizate:

$$x = a\rho \cos \varphi, y = b\rho \sin \varphi, z = z$$

și obținem:

$$\text{vol}(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} ab\rho d\rho = \frac{\pi}{3} abc.$$

## Capitolul 8

# Integrale curbilinii și de suprafață

### 8.1 Noțiuni teoretice

#### Drumuri parametrizate

Fie  $J$  un interval real; se numește drum parametrizat pe  $J$  cu valori în  $R^n$  orice aplicație continuă  $\gamma : J \mapsto R^n$ .

Dacă notăm  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ , atunci relațiile

$$x_1 = \gamma_1(t), x_2 = \gamma_2(t), \dots, x_n = \gamma_n(t)$$

se numesc ecuațiile parametrice ale drumului  $\gamma$ .

Dacă  $J = [a, b]$ , atunci  $\gamma(a)$  și  $\gamma(b)$  se numesc capetele (extremitățile) drumului. Drumul se numește închis dacă  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Opusul drumului  $\gamma : [a, b] \mapsto R^n$  este, prin definiție,

$$\gamma^- : [a, b] \mapsto R^n, \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Evident,  $\gamma$  și  $\gamma^-$  au aceeași imagine.

Dacă  $\gamma_1 : [a, b] \mapsto R^n$  și  $\gamma_2 : [b, c] \mapsto R^n$  sunt două drumuri parametrizate, atunci drumul concatenat  $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \mapsto R^n$  este definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Imaginea lui  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  este reuniunea imaginilor drumurilor  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ .

Un drum  $\gamma : J \mapsto R^n$  se numește neted dacă aplicația  $\gamma$  este de clasă  $C^1$  și  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in J$ .

Un drum se numește neted pe porțiuni dacă este concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

Două drumuri  $\gamma_1 : I \mapsto R^n$  și  $\gamma_2 : J \mapsto R^n$  se numesc echivalente cu aceeași orientare (notăm  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ) dacă există un difeomorfism strict crescător  $\phi : I \mapsto J$  astfel încât  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$ . Dacă difeomorfismul de mai sus este strict descrescător, atunci cele două drumuri se numesc echivalente cu orientări opuse.

În cazurile particulare  $n = 2$  (plan) și  $n = 3$  (spațiu) notațiile uzuale sunt  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  și respectiv  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Lungimea unui drum neted  $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$  este:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

### Integrala curbilinie de prima speță

Fie  $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$  un drum neted și fie  $f : D \mapsto R$  o funcție continuă astfel încât  $D \supseteq \gamma([a, b])$ . Integrala curbilinie de prima speță a funcției  $f$  pe drumul  $\gamma$  este, prin definiție:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Dacă  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  sunt două drumuri parametrizate echivalente (indiferent de orientare) atunci  $\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$ .

### Aplicații

- i. Dacă  $f$  este funcția constantă 1, atunci se obține lungimea drumului  $\gamma$ .
- ii. Dacă imaginea lui  $\gamma$  este un fir material având densitatea  $f$ , atunci masa  $M$  și coordonatele centrului de greutate  $G$  sunt date de formulele:

$$M = \int_{\gamma} f ds,$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x f ds, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} y f ds, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} z f ds.$$

**Integrala curbilinie de speța a doua**

Fie  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1-formă diferențială cu funcțiile  $P, Q, R$  continue pe un deschis  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  și fie

$$\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în  $D$ . Integrala curbilinie a formei diferențiale  $\alpha$  de-a lungul drumului  $\gamma$  este, prin definiție:

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)) dt.$$

Definiția se generalizează evident la  $n$  variabile. De exemplu, în două variabile:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt.$$

Dacă  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  sunt două drumuri parametrizate echivalente cu aceeași orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale:

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Dacă cele două drumuri parametrizate sunt echivalente dar cu orientări opuse, atunci integralele corespunzătoare diferă prin semn.

**Notații vectoriale**

Unei 1-forme diferențiale  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori  $\bar{V} : D \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{V} = (P, Q, R)$ . Dacă  $\gamma$  este un drum parametrizat neted (cu imaginea inclusă în  $D$ ) atunci integrala  $\int_{\gamma} \alpha$  se mai notează și  $\int_{\gamma} \bar{V} d\bar{r}$ , numindu-se circulația câmpului  $\bar{V}$  de-a lungul drumului  $\gamma$ . În particular, dacă  $\bar{V} = \bar{F}$  este un câmp de forțe, atunci circulația  $\int_{\gamma} \bar{F} d\bar{r}$  este lucrul mecanic efectuat de forța  $\bar{F}$  pe drumul  $\gamma$ .

**Forme diferențiale exacte**

O 1-formă diferențială  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  se numește exactă pe mulțimea  $D$  dacă există  $f$  o funcție (numită potențial scalar sau primitivă) de clasă  $C^1(D)$  astfel încât  $Df = \alpha$ , sau, echivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

în orice punct din  $D$ . Câmpul de vectori  $\bar{V} = (P, Q, R)$  asociat formei diferențiale  $\alpha$  se numește în acest caz câmp de gradienti.

O 1-formă diferențială  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  se numește închisă pe  $D$  dacă sunt verificate (în orice punct din  $D$ ) egalitățile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definițiile de mai sus se generalizează în mod evident la  $n$  variabile.

Importanța formelor diferențiale exacte este dată de următorul rezultat:

**Independența de drum a integralei curbilinii**

Fie  $\alpha = Df$  o 1-formă diferențială exactă pe  $D$  și fie  $\gamma$  un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în  $D$  având extremitățile  $p, q \in D$ ; atunci:

i.  $\int_{\gamma} Df = f(q) - f(p).$

ii. dacă în plus drumul  $\gamma$  este închis, atunci  $\int_{\gamma} Df = 0.$

Din teorema de simetrie a lui Schwarz rezultă că orice formă diferențială exactă (cu potențialul scalar de clasă  $\mathcal{C}^2$ ) este în mod necesar și închisă; reciprocă acestei afirmații este, în general, falsă. De exemplu, forma diferențială

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

este închisă pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  dar nu este exactă pe această mulțime.

Are loc totuși următorul rezultat fundamental:

**Teorema lui Poincare**

Fie  $\alpha$  o 1-formă diferențială de clasă  $\mathcal{C}^1$  închisă pe deschisul  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Atunci pentru orice  $x \in D$  există o vecinătate deschisă a sa  $U \subseteq D$  și o funcție  $f \in \mathcal{C}^1$  astfel încât  $Df = \alpha$  pe  $U$ .

Într-o formulare succintă teorema afirmă că orice 1-formă diferențială închisă este local exactă.

Există mulțimi pe care teorema de mai sus este adevărată global. De exemplu, dacă mulțimea  $D$  este stelată (adică există un punct  $x_0 \in D$  cu proprietatea că segmentul  $[x_0, x] \subseteq D, \forall x \in D$ ) atunci orice 1-formă diferențială închisă pe  $D$  este exactă pe  $D$ .

**Pânze parametrizate**

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  o mulțime deschisă și conexă; o pânză parametrizată pe  $D$  este orice aplicație de clasă  $\mathcal{C}^1$ ,  $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ .

Pânza parametrizată  $\Phi$  se numește simplă dacă aplicația  $\Phi$  este injectivă.

Două pânze parametrizate  $\Phi_1 : D_1 \mapsto \mathbb{R}^3$  și  $\Phi_2 : D_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  se numesc echivalente dacă există un difeomorfism  $\theta : D_1 \mapsto D_2$  astfel încât  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \theta$ .



Se spune că difeomorfismul  $\theta$  păstrează orientarea dacă iacobianul său este pozitiv; în acest caz se spune  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  au aceeași orientare; în caz contrar se spune că pânzele parametrizate au orientări opuse. Evident, două pânze parametrizate echivalente au aceeași imagine (în  $R^3$ ), numită simplu pânză (sau porțiune de suprafață).

Fie  $\Phi : D \mapsto R^3$ ,  $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$  o pânză parametrizată; pânza  $\Phi$  se numește regulată dacă vectorii  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$  sunt liniari independenți în orice punct din  $D$ . În acest caz planul generat de ei se numește planul tangent la pânză (în punctul respectiv); vectorul normal la pânză în punctul  $\Phi(u, v)$  indus de parametrizarea  $\Phi$  este:

$$N_{\Phi}(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Dacă  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sunt două pânze parametrizate simple, regulate echivalente cu aceeași orientare, atunci versorii normalelor induse coincid:

$$n_{\Phi_1}(u, v) = \frac{1}{\|N_{\Phi_1}(u, v)\|} \cdot N_{\Phi_1}(u, v) = \frac{1}{\|N_{\Phi_2}(u, v)\|} \cdot N_{\Phi_2}(u, v) = n_{\Phi_2}(u, v).$$

### Integrala de suprafață de prima speță

Fie  $\Phi : D \mapsto R^3$  o pânză parametrizată, fie  $\Sigma = \Phi(D)$  imaginea ei și fie  $F : U \mapsto R$  o funcție continuă pe imaginea pânzei. Integrala de suprafață de prima speță a lui  $F$  pe  $\Sigma$  este, prin definiție:

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \int \int_D F(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv.$$

Dacă pânza este parametrizată cartezian,  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subseteq R^2$ , atunci formula de mai sus devine:

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \int \int_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Dacă  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sunt două parametrizări echivalente (nu neapărat cu aceeași orientare) atunci integralele corespunzătoare sunt egale.

### Aplicații

i. În cazul particular  $F = 1$  se obține aria suprafeței  $\Sigma$ :

$$\text{aria}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma.$$

ii. Dacă  $F \geq 0$  reprezintă densitatea unei plăci  $\Sigma$ , atunci masa ei este:

$$M = \int_{\Sigma} F d\sigma,$$

iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} xF d\sigma, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} yF d\sigma, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} zF d\sigma.$$

iii. Fie  $\bar{V}$  un câmp vectorial și fie  $\bar{n}$  versorul normalei indus de pânza parametrizată fixată; fluxul câmpului  $\bar{V}$  prin suprafața  $\Sigma$  în raport cu orientarea aleasă (dată de versorul  $\bar{n}$ ) este, prin definiție:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) = \int_{\Sigma} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma.$$

### Integrala de suprafață de speța a doua

Prin definiție, dacă

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

este o 2-formă diferențială și

$$\Phi : D \mapsto R^3, \quad \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

este o pânză parametrizată, atunci integrala pe suprafața (orientată)  $\Sigma$  a formei diferențiale  $\omega$  este:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \int_D \left( (P \circ \Phi) \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi) \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi) \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right) dudv,$$

unde,  $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$ ,  $\frac{D(Z, X)}{D(u, v)}$ ,  $\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}$  sunt iacobienii funcțiilor  $X, Y, Z$  în raport cu variabilele  $u$  și  $v$ .

Dacă  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sunt două pânze parametrizate echivalente cu aceeași orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale; dacă parametrizările au orientări opuse, atunci integralele diferă prin semn.

### Notații vectoriale

Unei 2-forme diferențiale  $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori  $\bar{V} = (P, Q, R)$ ; dacă  $\Phi : D \mapsto R^3$  este o pânză parametrizată cu imaginea  $\Sigma$  (orientată cu versorul normalei  $\bar{n}$ ), atunci:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma.$$

## 8.2 Integrale curbilinii

1. Fie  $a \in R$  și fie  $P, Q : R^2 \mapsto R$ ,  $P(x, y) = x^2 + 6y$ ,  $Q(x, y) = 3ax - 4y$ . Să se afle  $a$  astfel încât  $\omega = Pdx + Qdy$  să fie o 1-formă diferențială exactă pe  $R^2$  și apoi să se determine  $f \in C^1(R^2)$  cu proprietatea  $df = \omega$ .

### Soluție

Spațiul  $R^2$  este mulțime stelată, deci este suficient ca  $\omega$  să fie 1-formă diferențială închisă, adică  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ; rezultă  $a = 2$ . O primitivă (potențial

scalar) a lui  $\omega$  se calculează fie integrând sistemul  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ , fie direct cu formula

$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$ , unde  $x_0$  și  $y_0$  sunt arbitrari fixați;

obținem  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 6xy - 2y^2 + k$ ,  $k \in R$ .

2. Fie  $P, Q : R^2 \mapsto R$ , definite prin:

$$P(x, y) = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}, \quad Q(x, y) = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

și fie  $\omega = Pdx + Qdy$ . Să se găsească un domeniu maximal pe care forma diferențială  $\omega$  să fie exactă.

### Soluție

Funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$  și:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{|y|} \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Mulțimea  $D = \{(x, y) \in R^2; y > 0\}$  este stelată și  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  pe  $D$ ; evident,  $D$  este maximală cu aceste proprietăți.

3. Folosind definiția, să se calculeze următoarele integrale curbilinii (orientarea curbei nu este precizată):

a.  $\int_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ .

b.  $\int_{\Gamma} \frac{y}{x+1}dx + dy$ ,  $\Gamma$  este triunghiul  $ABC$ ,  $A(2, 0), B(0, 0), C(0, 2)$ .

c.  $\int_{\Gamma} xdy - ydx$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ .

### Soluție

a. Cu parametrizarea  $x(t) = 2 \cos t$ ,  $y(t) = 2 \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$  obținem:

$$\int_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy = \int_0^{\pi} (4 \cos 2t - 4 \sin 2t) dt = 0.$$

b.  $\Gamma = [AC] \cup [CB] \cup [BA]$ ; parametrizăm fiecare segment:

$$[AC] : x(t) = 2 - t, y(t) = t, t \in [0, 2]$$

$$[CB] : x(t) = 0, y(t) = 2 - t, t \in [0, 2]$$

$$[BA] : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [0, 2];$$

obținem:

$$\int_{\Gamma} \frac{y}{x+1} dx + dy = \int_0^2 \left( \frac{t}{t-3} + 1 \right) dt - \int_0^2 dt = 2 - 3 \ln 3.$$

c. Parametrizarea canonică a elipsei de semiaxe  $a$  și  $b$  este

$$x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t, t \in [0, 2\pi);$$

obținem:

$$\int_{\Gamma} xdy - ydx = \int_0^{2\pi} abdt = 2\pi ab.$$

4. Fie  $P(x, y) = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)$ ,  $Q(x, y) = e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)$  și fie

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

a. Să se arate că  $\int_{\Gamma} \omega = 0$  pentru orice curbă închisă  $\Gamma$ .

b. Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(2\alpha t) dt,$$

aplicând rezultatul de la punctul a dreptunghiului  $\Gamma = ABCD$ , unde

$$A(0, 0), B(a, 0), C(a, \alpha), D(0, \alpha).$$

**Soluție**

a. Deoarece  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , rezultă că  $\omega$  este 1-formă diferențială închisă pe  $\mathbb{R}^2$

și deci și exactă; în consecință,  $\int_{\Gamma} \omega = 0$ , pentru orice curbă închisă  $\Gamma$ .

**b.** Parametrizând  $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$ , obținem:

$$0 = \int_{\Gamma} \omega = \int_0^a e^{-t^2} dt + \int_0^a e^{-a^2+t^2} \sin(2at) dt - \int_0^a e^{-t^2+\alpha^2} \cos(2\alpha t) dt.$$

Pentru  $a \rightarrow \infty$ , obținem:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(2\alpha t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2},$$

deoarece

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ și } \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-a^2+t^2} \sin(2\alpha t) dt = 0.$$

**5.** Să se calculeze  $\int_{\Gamma} \omega$  în următoarele cazuri:

**a.**  $\omega = x^2 y z dx + x y^2 z dy + x y z^2 dz$ , iar  $\Gamma$  este intersecția suprafețelor

$$x = 1, y^2 + z^2 = 1.$$

**b.**  $\omega = z(z - y) dx + x z dy - x y dz$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , unde  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  și  $\Gamma_3$  sunt intersecțiile conului  $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$  cu planele  $x = 0$ ,  $y = 0$ , și, respectiv,  $z = 0$ , cu restricțiile  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**c.**  $\omega = (y - 2z) dx + (x - z) dy + (2x - y) dz$ ,  $\Gamma$  fiind intersecția suprafețelor

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x - y + z = 0.$$

**d.**  $\omega = y dx + (x + z) dy + x^2 dz$ ,  $\Gamma$  fiind intersecția suprafețelor

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, x + z = 4.$$

### Soluție

Integralele se calculează cu definiția.

**a.**  $\Gamma$  este un cerc situat în planul  $x = 1$ ; o parametrizare este:

$$x = 1, y = \cos t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi).$$

Rezultă:

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left( -\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t \right) dt = 0.$$

**b.** În planul  $x = 0$  obținem dreapta de ecuație  $y + z = 1$ , în planul  $y = 0$  obținem dreapta  $x + z = 1$ , iar în planul  $z = 0$  obținem sfertul de cerc

$x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0$ . Rezultă parametrizările:

$$\Gamma_1 : x(t) = 0, y(t) = 1 - t, z(t) = t, t \in [0, 1].$$

$$\Gamma_2 : x(t) = t, y(t) = 0, z(t) = 1 - t, t \in [0, 1].$$

$$\Gamma_3 : x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 0, t \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

În continuare se aplică definiția.

**c.** Curba este o elipsă situată în planul  $x - y + z = 0$ ; înlocuind  $z = y - x$  în ecuația sferei obținem:  $x^2 + y^2 + (y - x)^2 = r^2$ . Pentru a aduce ecuația acestei conice la forma canonică, facem schimbarea de variabile:  $x - y = u, x + y = v$ ; obținem ecuația:

$$\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2} + \frac{v^2}{(\sqrt{2}r)^2} = 1.$$

Rezultă parametrizarea:

$$u(t) = x(t) - y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}r \cos t,$$

$$v(t) = x(t) + y(t) = \sqrt{2}r \sin t,$$

$$z(t) = y(t) - x(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}r \cos t, t \in [0, 2\pi).$$

Se obține:

$$x(t) = \frac{1}{2}r \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t + \sqrt{2} \sin t \right),$$

$$y(t) = \frac{1}{2}r \left( \sqrt{2} \sin t - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t \right),$$

$$z(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}r \cos t, t \in [0, 2\pi).$$

În continuare se aplică definiția.

**d.** Ecuația canonică a cilindrului este  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  și deci

$$x(t) - 1 = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 3 - \cos t, t \in [0, 2\pi).$$

În continuare se aplică definiția.

**6.** Să se calculeze  $\int_{\Gamma} ydx + xdy$  pe un drum cu capetele  $A(2, 1)$  și  $B(1, 3)$ .

**Soluție**

Forma diferențială  $\alpha = ydx + xdy$  este închisă pe  $R^2$  și deci este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular care unește

punctele  $A$  și  $B$ . Integrala se calculează pe un drum particular, de exemplu pe segmentul  $[AB]$ , a cărei parametrizare este:

$$x(t) = \frac{5-t}{2}, y(t) = t, t \in [1, 3].$$

O altă metodă constă în a determina un potențial scalar  $f$  pentru 1-forma diferențială  $\alpha$ :

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x y_0 dx + \int_{y_0}^y x dy = xy + k,$$

$k$  fiind o constantă arbitrară. Integrala cerută în enunț este:

$$\int_{\Gamma} \alpha = f(B) - f(A) = 1,$$

$\Gamma$  fiind un drum arbitrar având capetele  $A$  și  $B$ .

**7.** Fie  $P, Q, R : \Omega = \{(x, y, z) ; y > 0, z \geq 0\} \mapsto R$ ,

$$P(x, y, z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$Q(x, y, z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$R(x, y, z) = z^2 - xy.$$

Notând cu  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , să se calculeze  $\int_{\Gamma} \omega$ , unde  $\Gamma$  este un drum parametrizat arbitrar (inclus în  $\Omega$ ) ce unește punctele  $A(1, 1, 0)$  și  $B(-1, 1, 0)$ .

**Soluție**

Observăm că  $\omega$  este o 1-formă diferențială închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - z = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Domeniul  $\Omega$  este stelat, așadar  $\omega$  este exactă pe  $\Omega$ . Rezultă că  $\int_{\Gamma} \omega$  nu depinde de drumul parametrizat  $\Gamma$ , ci doar de extremitățile  $A$  și  $B$  și de

orientare (de la  $A$  către  $B$ ).

Fie parametrizarea  $x(t) = -t$ ,  $y(t) = 1$ ,  $z(t) = 0$ ,  $t \in [-1, 1]$ ; obținem:

$$\int_{\Gamma} \omega = - \int_{-1}^1 \left( t^2 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Să mai facem observația că raționamentul de mai sus nu mai este corect dacă drumul nu ar fi inclus în  $\Omega$ , deoarece, pe un astfel de domeniu  $\omega$  nu ar mai fi exactă și deci integrala nu ar mai fi independentă de drum.

De exemplu, să considerăm punctele  $C(1, -1, 0)$ ,  $D(-1, -1, 0)$  și drumul  $\Gamma_1$  format prin concatenarea segmentelor (orientate)  $[AC] \cup [CD] \cup [DB]$ .

Atunci  $\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_{\Gamma} \omega$ . Într-adevăr, cu parametrizarea:

$$[AC] : x(t) = 1, y(t) = -t, z(t) = 0, t \in [-1, 1],$$

$$[CD] : x(t) = -t, y(t) = -1, z(t) = 0, t \in [-1, 1],$$

$$[DB] : x(t) = -1, y(t) = t, z(t) = 0, t \in [-1, 1].$$

se obține:

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + 3\frac{\pi}{2}.$$

8. Fie  $P, Q : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = -1\} \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$P(x, y) = \frac{y}{1 + xy}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

și fie  $\alpha = Pdx + Qdy$ . Să se calculeze integrala  $\int_{\Gamma} \alpha$ , unde  $\Gamma$  este un drum arbitrar având capetele  $A(-1, -1)$  și  $B(3, 3)$  și nu intersectează hiperbola  $xy = -1$ .

**Soluție**

Forma diferențială  $\alpha$  este închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(1 + xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq -1.$$

Mulțimea  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$  este stelată, deci pe  $\Omega$   $\alpha$  este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular (inclus în  $\Omega$ ) care unește punctele  $A$  și  $B$ . Un potențial scalar pentru  $\alpha$  pe mulțimea  $\Omega$  este:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{y_0}{1 + xy_0} dx + \int_{y_0}^y \frac{x}{1 + xy} dy = \ln(1 + xy) + k, \quad xy > -1,$$



și deci integrala este:

$$\int_{\Gamma} \alpha = f(B) - f(A) = \ln 5.$$

**9.** Să se calculeze circulația câmpului de vectori  $\bar{V}$  de-a lungul curbei  $\Gamma$  în următoarele cazuri:

**a.**  $\bar{V} = -(x^2 + y^2)\bar{i} - (x^2 - y^2)\bar{j}$ ,

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4, y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}.$$

**b.**  $\bar{V} = x\bar{i} + xy\bar{j} + xyz\bar{k}$ ,

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 3\}.$$

**Soluție**

Câmpului de vectori  $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  i se asociază, prin definiție, 1-forma diferențială  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ ; circulația lui  $\bar{V}$  de-a lungul lui  $\Gamma$  este, prin definiție integrala curbilinie:  $\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \int_{\Gamma} \omega$ .

**a.** Notăm:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4, y < 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}.$$

O parametrizare (în sens trigonometric pozitiv) pentru  $\Gamma$  se obține astfel:

$$\Gamma_1 : x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, t \in [\pi, 2\pi),$$

$$\Gamma_2 : x(t) = 1 + \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, \pi].$$

**b.** Parametrizarea este:  $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 3 - \cos t, t \in [0, 2\pi)$ .

**10.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinie de prima speță:

**a.**  $\int_{\Gamma} y ds, \Gamma : x(t) = \ln(\sin t) - \sin^2 t, y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ .

**b.**  $\int_{\Gamma} xy ds, \Gamma : x(t) = |t|, y(t) = \sqrt{1 - t^2}, t \in [-1, 1]$ .

**c.**  $\int_{\Gamma} |x - y|, \Gamma : x(t) = |\cos t|, y(t) = \sin t, t \in [0, \pi]$ .

**Soluție**

**a.** Cu definiția, obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y ds &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2t \sqrt{(\operatorname{ctgt} - \sin 2t)^2 + \cos^2 2t} dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos^2 t - 1) \sin t dt = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

b. Integrala se descompune într-o sumă de două integrale:

$$\int_{\Gamma} xy ds = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt = 1.$$

c. Aplicând definiția, obținem:

$$\int_{\Gamma} |x - y| ds = \int_0^{\pi} |\cos t| - \sin t | dt = 4(\sqrt{2} - 1).$$

**11.** Să se calculeze lungimea  $L$  a arcului de parabolă

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}, y \in [-p, p].$$

**Soluție**

Cu parametrizarea

$$y(t) = t, x(t) = \frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}, t \in [-p, p],$$

avem:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Gamma} ds = \int_{-p}^p \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} dt = \frac{2}{p} \int_0^p \sqrt{t^2 + p^2} dt = \\ &= \frac{2}{p} \int_0^p \frac{t^2 + p^2}{\sqrt{t^2 + p^2}} dt = 2p \int_0^p \frac{dt}{\sqrt{t^2 + p^2}} + \frac{2}{p} \int_0^p \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + p^2}} dt = \\ &= 4p \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{p} \int_0^p t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + p^2}} dt = \\ &= 4p \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{p} \left( t\sqrt{t^2 + p^2} \Big|_0^p - \int_0^p \sqrt{t^2 + p^2} dt \right). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$L = p \left( \sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

**12.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui arc de cerc de rază  $R$  și de măsură  $\alpha \in (0, \pi)$ , presupus omogen.

**Soluție**

Coordonatele centrului de greutate  $G$  ale unei curbe plane  $\Gamma$  omogene sunt:

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x ds, y_G = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} y ds,$$

unde  $L$  este lungimea firului. Considerăm originea axelor de coordonate în centrul cercului și fie  $A$  și  $B$  două puncte simetrice față de axa  $Ox$  cu măsura

arcului  $AB$  egală cu  $\alpha$ .

Cu parametrizarea  $x(t) = R \cos t$ ,  $y(t) = R \sin t$ ,  $t \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$ , obținem:

$$x_G = \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R \cos t dt = \frac{2R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad y_G = 0.$$

**13.** Să se calculeze masa firului material  $\Gamma$  de ecuații parametrice:

$$x(t) = t, \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad z(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad t \in [0, 1],$$

și având densitatea  $F(x, y, z) = \sqrt{2y}$ .

**Soluție**

Conform formulei masei:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2(1+t^2+t^4)} dt = \\ &= \int_0^1 t \sqrt{1+t^2+t^4} dt = \int_0^1 t \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} du = \frac{3}{8} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} du = \\ &= \frac{3}{8} \ln \left( u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} du. \end{aligned}$$

Ultima integrală este  $M$ , deci (după calcule) se obține:

$$M = \frac{3}{8} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4} (3\sqrt{3} - 1).$$

**14.** Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate ale firului material  $\Gamma$  cu parametrizarea:

$$x(t) = t, \quad y(t) = cht, \quad t \in [0, 1]$$

și densitatea  $f(x, y) = y$ .

**Soluție**

Masa firului este:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} y ds = \int_0^1 \operatorname{cht} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} dt = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2). \end{aligned}$$

Coordonatele centrului de greutate:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^1 t \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2M} \int_0^1 (t + t \operatorname{ch} 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2M} \left( \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} 2t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sh} 2t dt \right) = \frac{1}{8M} (3 + 2 \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2). \\ y_G &= \frac{1}{M} \int_0^1 \operatorname{ch}^3 t dt = \frac{1}{M} \int_0^1 (1 + \operatorname{sh}^2 t) \operatorname{sh} t dt = \\ &= \frac{1}{M} \left( \operatorname{sh} t + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{M} \left( \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1 \right). \end{aligned}$$

### 8.3 Integrale de suprafață

**15.** În fiecare din exemplele următoare se dă o pânză parametrizată  $D \ni (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \in R^3$ .

Să se calculeze vectorii tangenți la suprafață și versorul normalei la suprafață.

Să se găsească în fiecare caz și ecuația în coordonate carteziene.

**a.** Sfera; fie  $R > 0$ ;  $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta).$$

**b.** Paraboloidul; fie  $a > 0, h > 0$ ;  $\Phi : [0, h] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2).$$

**c.** Elipsoidul; fie  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;  $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta).$$

d. Conul; fie  $h > 0$ ;  $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v).$$

e. Cilindrul; fie  $a > 0$ ,  $0 \leq h_1 \leq h_2$ ;  $\Phi : [0, 2\pi) \times [h_1, h_2] \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z).$$

f. Parametrizare carteziană; fie  $D \subset R^2$  și fie  $f : D \mapsto R$ ,  $f \in C^1(D)$ .

$$\Phi : D \mapsto R^3, \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

g. Suprafață de rotație în jurul axei Oz:

Fie  $0 < r_1 < r_2$  și fie  $f : [r_1, r_2] \mapsto R$ ,  $f \in C^1(D)$ .

$$\Phi : [r_1, r_2] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3, \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, f(r)).$$

h. Torul; fie  $0 < a < b$ ;  $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$ ,

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u).$$

### Soluție

Vectorii tangenți la suprafață sunt  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ , iar versorul normalei este

$$\frac{1}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

**16.** În continuare,  $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  este o 2-formă diferențială iar  $\Sigma$  este imaginea unei pânze parametrizate; să se calculeze integrala de suprafață  $\int_{\Sigma} \omega$ .

**a.**  $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$ ,

$\Sigma : X(u, v) = u \cos v, Y(u, v) = u \sin v, Z(u, v) = cv$ ,

$(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$ .

**b.**  $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ ,

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**c.**  $\omega = yzdy \wedge dz + zxdz \wedge dx + xydx \wedge dy$ ,

$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**d.**  $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ ,

$\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]$ .

**e.**  $\omega = (y + z)dy \wedge dz + (x + y)dx \wedge dy$ ,

$\Sigma : x^2 + y^2 = a^2, z \in [0, 1]$ .

**Soluție**

Aplicăm definiția integralei de suprafață de speța a doua.

**a.** Iacobienii:

$$\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} = c \sin v, \quad \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} = -c \cos v, \quad \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = u,$$

și deci:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_a^b du \int_0^{2\pi} (cu \sin^2 v - c^2 v \cos v + u^2 \cos v) dv = \frac{1}{2} \pi c (b^2 - a^2)$$

**b.** Parametrizăm sfera de centru  $O$  și rază  $R$ :

$$X(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, \quad Y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi, \quad Z(\theta, \varphi) = R \cos \theta,$$

domeniul parametrizării  $(\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ .

$$\frac{D(Y, Z)}{D(\theta, \varphi)} = R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{D(Z, X)}{D(\theta, \varphi)} = R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi,$$

$$\frac{D(X, Y)}{D(\theta, \varphi)} = R^2 \sin \theta \cos \theta$$

Rezultă  $\int_{\Sigma} \omega = 4\pi R^3$ .

**c.** Parametrizarea canonică a elipsoidului este:

$$X(\theta, \varphi) = aR \sin \theta \cos \varphi, \quad Y(\theta, \varphi) = bR \sin \theta \sin \varphi, \quad Z(\theta, \varphi) = cR \cos \theta,$$

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

În continuare calculul este asemănător cu cel de la punctul anterior.

**d.** Parametrizarea canonică a conului este:

$$X(u, v) = v \cos u, \quad Y(u, v) = v \sin u, \quad Z(u, v) = v,$$

$$(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times [1, 2].$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} = v \cos u, \quad \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} = v \sin u, \quad \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = -v.$$

Rezultă integrala:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \int_D (v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u) dudv = \frac{14}{3}\pi.$$

e. Parametrizarea canonică a cilindrului este:  $(\varphi, z) \in D = [0, 2\pi) \times [0, 1]$ ,

$$X(\varphi, z) = a \cos \varphi, Y(\varphi, z) = a \sin \varphi, Z(\varphi, z) = z, .$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y, Z)}{D(\varphi, z)} = a \cos \varphi, \frac{D(Z, X)}{D(\varphi, z)} = a \sin \varphi, \frac{D(X, Y)}{D(\varphi, z)} = 0.$$

Rezultă integrala:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \int_D (a \sin \varphi + z) a \cos \varphi d\varphi dz = 0.$$

**17.** Să se calculeze integralele de suprafață:

a.  $\int_{\Sigma} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x+y)dx \wedge dy,$

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = a^2, x > 0, y > 0, 0 < z < h\}.$$

b.  $\int_{\Sigma} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

**Soluție**

a. Parametrizarea lui  $\Sigma$  (o submulțime a unui cilindru) este:

$$X(\varphi, z) = a \cos \varphi, Y(\varphi, z) = a \sin \varphi, Z(\varphi, z) = z,$$

domeniul parametrizării fiind  $(\varphi, z) \in D = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, h)$ . Rezultă:

$$\int_{\Sigma} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x+y)dx \wedge dy = \int \int_D a^2 z d\varphi dz = \frac{a^2 h^2}{4} \pi.$$

b. Porțiunea de sferă  $\Sigma$  are parametrizarea:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, Y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi, Z(\theta, \varphi) = R \cos \theta,$$

domeniul parametrizării  $(\theta, \varphi) \in D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2})$ .

În continuare calculul este similar cu cel din exercițiul anterior (punctul b).

18. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma$$

în următoarele cazuri:

a.  $F(x, y, z) = |xyz|$ ,  $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \in [0, 1]$ .

b.  $F(x, y, z) = y\sqrt{z}$ ,  $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z$ ,  $z \in [0, 2]$ .

c.  $F(x, y, z) = z^2$ ,  $\Sigma = \{(x, y, z); z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 6y \leq 0\}$ .

**Soluție**

Se aplică definiția integralei de suprafață de prima speță.

a. Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |xyz| d\sigma &= \int \int_D |xy| \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \int \int_D |xy| \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{4\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

b. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2), D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} y\sqrt{z} d\sigma &= \int \int_D y \sqrt{\frac{1}{6}(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \frac{1}{9}(x^2 + y^2)} dx dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \rho^3 \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{9}} \sin \varphi d\rho = 0. \end{aligned}$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6y\}.$$

rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} z^2 d\sigma &= \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{6 \sin \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$



19. Să se calculeze ariile suprafețelor:

- a. sfera de rază  $R$ .  
 b. conul  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \in [0, h]$ .  
 c. paraboloidul  $z = x^2 + y^2$ ,  $z \in [0, h]$ .

**Soluții**

a. Parametrizarea canonică a sferei este:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, Y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi, Z(\theta, \varphi) = R \cos \theta,$$

domeniul parametrizării  $(\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ .

Notând  $\Phi(\theta, \varphi) = (X(\theta, \varphi), Y(\theta, \varphi), Z(\theta, \varphi))$ , rezultă:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \\ & = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta) \times (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0) = \\ & = (R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi, R^2 \sin \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Elementul de suprafață este:

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = R^2 \sin \theta.$$

Rezultă aria sferei  $S_R$

$$\int_{S_R} d\sigma = \int \int_D r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

b. Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

Rezultă aria conului  $C_h$ :

$$\int_{C_h} d\sigma = \int \int_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \pi h^2.$$

c. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z = x^2 + y^2, (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq h\}.$$

Rezultă aria paraboloidului  $P_h$ :

$$\int_{P_h} d\sigma = \int \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} \rho \sqrt{1+4\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{6} \left( \sqrt{(1+4h)^3} - 1 \right).$$

**20.** Să se calculeze aria  $\mathcal{A}$  a suprafeței  $\Sigma$  în următoarele cazuri:

- $\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$ .
- $\Sigma$  este submulțimea de pe sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , situată în interiorul conului  $x^2 + y^2 = z^2$ .
- $\Sigma$  este submulțimea de pe sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , situată în interiorul cilindriului  $x^2 + y^2 - Ry = 0$ .
- $\Sigma$  este submulțimea de pe paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  situată în interiorul cilindriului  $x^2 + y^2 = 2y$ .
- $\Sigma$  este torul.

**Soluție**

Aria suprafeței  $\Sigma$  este  $\mathcal{A} = \int_{\Sigma} d\sigma$ .

- $\mathcal{A} = \int \int_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy, D = \{(x, y); 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
- $\mathcal{A} = 2 \int \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ .
- $\mathcal{A} = 2 \int \int_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq Ry\}$ .
- $\mathcal{A} = \int \int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2y\}$ .
- $\mathcal{A} = \int \int_D (a + b \cos u) du dv, D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

**21.** Să se calculeze fluxul câmpului de vectori  $\bar{V}$  prin suprafața  $\Sigma$  în următoarele cazuri:

- $\bar{V} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \Sigma : z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$ .
- $\bar{V} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}, \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$ .
- $\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (y\bar{i} - x\bar{j} + \bar{k}), \Sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$ .

**Soluție**

Fluxul câmpului de vectori  $\bar{V}$  prin suprafața  $\Sigma$  în raport cu normala  $\bar{n}$  este, prin definiție,  $\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) = \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} d\sigma$ ,  $\bar{n}$  fiind versorul normalei la suprafața  $\Sigma$ .

Dacă  $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$  este o parametrizare a lui  $\Sigma$ , atunci fluxul este:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) &= \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} d\sigma = \int \int_D (\bar{V} \circ \Phi) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv = \\ &= \int \int_D \left( \bar{V} \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv, \end{aligned}$$

ultima paranteză fiind produsul mixt al vectorilor  $\bar{V} \circ \Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ .

a. Considerând parametrizarea carteziană  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obținem

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \left( -x\bar{i} - y\bar{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\bar{k} \right)$$

și deci fluxul este 0 deoarece vectorii  $\bar{V}$  și  $\bar{n}$  sunt ortogonali.

b. Considerând parametrizarea carteziană

$$z = x^2 + y^2, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\},$$

obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{V}) = \int \int_D (x^2 + y^2)^2 dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = 4 - x^2 - y^2, D = \{(x, y); 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{V}) = \int \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\sqrt{3}}^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{3}).$$

**22.** Fie  $a < b$  două numere reale și  $f, g : [a, b] \mapsto R$  două funcții continue astfel încât  $f(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$ . Fie  $\Gamma$  o curbă (situată în planul  $y = 0$ ) de parametrizare

$$x(t) = f(t), y(t) = 0, z(t) = g(t)$$

și fie  $\Sigma$  suprafața de rotație obținută prin rotirea curbei  $\Gamma$  în jurul axei  $Oz$ . Să se calculeze aria suprafeței  $\Sigma$ .

**Soluție**

Parametrizarea suprafeței  $\Sigma$  este

$$\Phi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), (u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

și deci aria este:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \int_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b |f(u)| \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} du = \\ &= 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} du. \end{aligned}$$

Abscisa centrului de greutate al curbei (omogene)  $\Gamma$  este

$$x_G = \frac{\int_{\Gamma} x ds}{\int_{\Gamma} ds} = \frac{1}{L} \int_a^b f(u) \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} du,$$

unde,  $L$  este lungimea lui  $\Gamma$ . Rezultă deci  $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi L x_G$ .

**23.** Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate ale unei semisfere  $\mathcal{S}$  de rază  $R$  și având densitatea constantă  $c$ .

**Soluție**

Masa este dată de formula  $M = \int_{\mathcal{S}} c d\sigma$ , iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cx d\sigma, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cy d\sigma, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cz d\sigma.$$

Considerând semisfera cu centrul în origine și situată în semiplanul  $z > 0$ , parametrizarea este:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi,$$

$$Y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi,$$

$$Z(\theta, \varphi) = R \cos \theta, \quad (\theta, \varphi) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi].$$

Rezultă:

$$M = \int_{\mathcal{S}} c d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 c.$$

Din motive de simetrie (sau calcul direct) rezultă  $x_G = y_G = 0$ .

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cz d\sigma = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^3 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{R}{2}.$$

## Capitolul 9

# Formule integrale

### 9.1 Noțiuni teoretice

#### Formula Green-Riemann

Fie  $(K, \partial K)$  un compact cu bord orientat inclus în  $R^2$  (orientarea pe  $\partial K$  este sensul trigonometric pozitiv) și fie

$$\alpha = Pdx + Qdy$$

o 1-formă diferențială de clasă  $C^1$  pe o vecinătate a lui  $K$ ; atunci:

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dacă  $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j}$  este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferențiale  $\alpha$ , atunci formula se scrie sub forma:

$$\int_{\partial K} \bar{V} d\bar{r} = \int \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

O consecință este următoarea formulă pentru arie (notațiile și orientarea pe bordul  $\partial K$  sunt cele de mai sus):

$$\text{aria}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} xdy - ydx.$$

#### Formula Gauss-Ostrogradski

Fie  $K \subset R^3$  un compact cu bord orientat (bordul  $\partial K$  orientat după normala exterioară). Atunci, pentru orice 2-formă diferențială

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe o vecinătate a lui  $K$ , are loc egalitatea:

$$\int_{\partial K} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int \int \int_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Dacă notăm cu  $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  câmpul vectorial asociat (în mod canonic) 2-formei diferențiale  $\omega$ , atunci formula de mai sus se scrie:

$$\int_{\partial K} \bar{V} \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \operatorname{div}(\bar{V}) dxdydz,$$

unde,  $\bar{n}$  este normala exterioară la  $\partial K$ , iar  $\operatorname{div}(\bar{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  este divergența lui  $\bar{V}$ . Observăm că membrul stâng este fluxul câmpului  $\bar{V}$  prin suprafața  $\partial K$ , de aceea formula Gauss-Ostrogradski se mai numește și formula flux-divergență.

### Formula lui Stokes

Fie  $(\Sigma, \partial\Sigma)$  o suprafață bordată orientată (orientarea pe  $\Sigma$  este compatibilă cu orientarea pe bordul  $\partial\Sigma$ ) și fie  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1-formă diferențială de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe o vecinătate a lui  $\Sigma$ ; atunci:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \\ & = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Dacă  $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferențiale  $\alpha$ , atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \bar{V} d\bar{r} = \int_{\Sigma} (\operatorname{rot}\bar{V}) \bar{n} d\sigma,$$

orientările pe curba (închisă)  $\partial\Sigma$  și pe suprafața  $\Sigma$  fiind compatibile.

În exercițiile care urmează, se subînțelege, atunci când este cazul, că orientările pe curbe și suprafețe sunt compatibile, adică sunt îndeplinite ipotezele formulilor de mai sus.

## 9.2 Formula Green-Riemann

1. Să se calculeze direct și aplicând formula Green-Riemann integrala curbilinie  $\int_{\Gamma} \alpha$  în următoarele cazuri:

a.  $\alpha = y^2 dx + x dy$ ,

$\Gamma$  este pătratul cu vârfurile  $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$ .

b.  $\alpha = y dx + x^2 dy$ ,  $\Gamma$  este cercul cu centrul în origine și de rază 2.

c.  $\alpha = y dx - x dy$ ,  $\Gamma$  este elipsa de semiaxe  $a$  și  $b$  și de centru  $O$ .

### Soluție

Calculul direct al integralelor îl lăsăm ca exercițiu. Calculăm integralele aplicând formula Green-Riemann; notăm cu  $K$  compactul mărginit de  $\Gamma$ .

a. Compactul  $K$  este interiorul pătratului:

$$\int y^2 dx + x dy = \int \int_K (1 - 2y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 (1 - 2y) dy = -4.$$

b. Compactul  $K$  este discul de centru  $O$  și rază 2; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare  $(\rho, \varphi)$ :

$$\int_{\Gamma} y dx + x^2 dy = \int \int_K (2x - 1) dx dy = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\varphi = -4\pi.$$

c. Compactul  $K$  este interiorul elipsei; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare generalizate:

$$\int_{\Gamma} y dx - x dy = \int \int_K 2 dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} 2ab\rho d\varphi = 2\pi ab.$$

2. Fie  $\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ .

a. Să se calculeze integrala curbilinie  $\int_{\mathcal{C}(O, R)} \alpha$ , unde, am notat cu  $\mathcal{C}(O, R)$

cercul de centru  $O$  și rază  $R > 0$ .

b. Să se calculeze  $\int_{\Gamma} \alpha$ , unde,  $\Gamma$  este o curbă arbitrară închisă astfel încât  $O \notin \Gamma$ .

### Soluție

a. Să observăm, mai întâi că  $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$ , deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiția integralei curbilinie; parametrizăm cercul:

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

și obținem:

$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

**b.** Notăm cu  $K$  compactul mărginit de curba  $\Gamma$ . Distingem două cazuri: dacă  $O \notin K$  (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă  $O \in K$  (nu se poate aplica formula Green-Riemann).

Presupunem mai întâi că  $O \notin K$ ; atunci:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int \int_K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = 0.$$

Presupunem acum că  $O \in K$ ; fie  $R > 0$  astfel încât  $\mathcal{C}(O, R)$  este inclus în interiorul lui  $K$ . Notăm cu  $D(O, R)$  discul deschis de centru  $O$  și rază  $R$ . Fie  $A$  compactul  $A = K \setminus D(O, R)$ . Bordul orientat al lui  $A$  este reuniunea  $\partial A = \Gamma \cup \mathcal{C}(O, R)$ , sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece  $O \notin A$ , avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int \int_A 0 dx dy = 0.$$

Rezultă:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

**3.** Fie  $\alpha = \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$ . Să se calculeze integrala curbilinie

$\int_{\Gamma} \alpha$ , unde  $\Gamma$  este o curbă arbitrară închisă cu  $O \notin \Gamma$ .

**Soluție**

Observăm că  $\alpha$  este o 1-formă diferențială închisă. În continuare aplicăm raționamentul de la exercițiul precedent.

**4.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinie direct și aplicând formula Green-Riemann:

**a.**  $\int_{\Gamma} e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} (-y dx + x dy)$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ .

**b.**  $\int_{\Gamma} xy dx + \frac{x^2}{2} dy$ ,

$\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x, y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$ .

**Soluție**

Pentru calculul direct se parametrizează cele două curbe și se aplică definiția integralei curbilinie. Vom calcula acum integralele cu ajutorul formulei Green-Riemann.

**a.** Elipsa  $\Gamma$  este închisă iar 1-forma diferențială este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $R^2$ ,



deci putem aplica formula Green-Riemann (notăm  $K$  mulțimea compactă mărginită de  $\Gamma$ ):

$$\int_{\Gamma} e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} (-ydx + xdy) = \int \int_K 2e^{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy,$$

integrala dublă calculându-se cu coordonate polare generalizate.

**b.** Curba  $\Gamma$  nu este închisă, deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie  $A(0, -1)$  și  $B(0, 1)$  și fie  $[AB]$  segmentul orientat (de la  $A$  către  $B$ ) determinat de aceste puncte. Fie  $\Lambda = \Gamma \cup [AB]$ ; atunci  $\Lambda$  este o curbă închisă și deci, aplicând formula Green-Riemann, obținem (notăm cu  $K$  compactul mărginit de  $\Lambda$ ):

$$\int_{\Lambda} xydx + \frac{x^2}{2} dy = \int \int_K 0 dx dy = 0.$$

Rezultă deci:

$$\int_{\Gamma} xydx + \frac{x^2}{2} dy = - \int_{[AB]} xydx + \frac{x^2}{2} dy = 0,$$

ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiția.

**5.** Să se calculeze aria mulțimii mărginite de curba  $\Gamma$  în următoarele cazuri:

- a.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ).
- b.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ .

**Soluție**

Aria mulțimii mărginite de curba  $\Gamma$  este  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx$ .

**a.** Cu parametrizarea  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ , obținem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

**b.** Cu parametrizarea  $x(t) = \cos^3 t$ ,  $y(t) = \sin^3 t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ , obținem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi.$$

**6. a.** Fie  $\rho = \rho(t)$ ,  $t \in [a, b]$  ecuația în coordonate polare a unei curbe închise  $\Gamma$ . Să se demonstreze că aria interiorului lui  $\Gamma$  este  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) dt$ . Fie  $a > 0$ ,  $b > 0$ ; să se calculeze ariile mulțimilor mărginite de curbele de ecuații (în coordonate polare):

**b.**  $\rho(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**c.**  $\rho(t) = a(1 + \cos t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

**Soluție**

**a.** Cu parametrizarea  $x(t) = \rho(t) \cos t$ ,  $y(t) = \rho(t) \sin t$ ,  $t \in [a, b]$ , obținem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) dt.$$

**b.**  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 2a^2 b^2 \int_0^{\infty} \frac{du}{a^2 u^2 + b^2} = \pi ab$ .

**c.** Analog.

**7.** Să se calculeze circulația câmpului de vectori  $\bar{V}$  pe curba  $\Gamma$  în cazurile:

**a.**  $\bar{V} = y^2 \bar{i} + xy \bar{j}$ ,

$$\Gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{(x, y); y = x^2 - 1, y \leq 0\}.$$

**b.**  $\bar{V} = e^x \cos y \bar{i} - e^x \sin y \bar{j}$ .

$\Gamma$  este o curbă arbitrară conținută în semiplanul superior care unește punctele  $A(1, 0)$  și  $B(-1, 0)$ , sensul fiind de la  $A$  către  $B$ .

**Soluție**

**a.** Vom aplica formula Green-Riemann; notând cu  $K$  interiorul curbei  $\Gamma$ , obținem:

$$\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \int \int_K -y dx dy = - \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} y dy.$$

**b.** Curba nu este închisă; fie  $[BA]$  segmentul orientat (de la  $B$  către  $A$ ) și fie curba închisă  $\Lambda = \Gamma \cup [BA]$ . Calculăm circulația lui  $\bar{V}$  pe curba  $\Lambda$  cu ajutorul formulei Green-Riemann (notăm cu  $K$  compactul mărginit de  $\Lambda$ ):

$$\int_{\Lambda} \bar{V} d\bar{r} = \int \int_K 0 dx dy = 0,$$

deci circulația pe curba  $\Gamma$  este egală cu circulația pe segmentul orientat  $[AB]$ :

$$\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \int_{[AB]} \bar{V} d\bar{r} = - \int_0^1 e^t dt = 1 - e.$$

**8.** Fie  $a < b$ , fie  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , un drum parametrizat închis ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), orientat în sens trigonometric pozitiv și fie  $K$  compactul mărginit de imaginea lui  $\gamma$ . Într-un punct arbitrar  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , considerăm vectorul normal la  $\gamma$ ,  $\bar{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$ . Să se demonstreze că pentru orice câmp de vectori  $\bar{V}$  de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe o vecinătate a lui  $K$ , avem:

$$\int_a^b \bar{V}(\gamma(t)) \bar{n}(t) dt = \iint_K \operatorname{div}(\bar{V}) dx dy.$$

### Soluție

Din definiția integralei curbilini, rezultă:

$$\int_a^b \bar{V}(\gamma(t)) \bar{n}(t) dt = \int_{\gamma} P dy - Q dx.$$

Aplicând ultimei integrale curbilini formula Green-Riemann, obținem:

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{V}(\gamma(t)) \bar{n}(t) dt &= \int_{\gamma} P dy - Q dx = \\ &= \iint_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_K \operatorname{div}(\bar{V}) dx dy. \end{aligned}$$

### 9. Formula de medie pentru funcții armonice

O funcție  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  se numește armonică pe  $U$  dacă

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ pe } U.$$

Fie  $f$  o funcție armonică pe discul unitate. Atunci:

$$f((0, 0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos t, \rho \sin t) dt, \forall \rho \in (0, 1),$$

egalitate numită formula de medie pentru funcții armonice.

### Soluție

Fie  $\rho \in (0, 1)$  și fie

$$g(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos t, \rho \sin t) dt.$$

Vom demonstra că funcția  $g$  este constantă.

Pentru aceasta, calculăm derivata sa:

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos t, \rho \sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos t, \rho \sin t) \sin t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos t, \rho \sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos t, \rho \sin t) \right) \cdot (\rho \cos t, \rho \sin t) dt.$$

Vom aplica acum rezultatul exercițiului 8 de mai sus.

Vectorul  $\bar{n} = (\rho \cos t, \rho \sin t)$  este vectorul normal (exterior) la cercul de centru  $O$  și rază  $\rho$ , iar câmpul vectorial  $\bar{V} = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j}$ . Obținem (notăm cu  $K$  discul de centru  $O$  și rază  $\rho$ ):

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \iint_K \Delta f dx dy = 0.$$

Rezultă deci că funcția  $g$  este constantă pe intervalul  $(0, 1)$ ; în consecință, avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos t, \rho \sin t) dt &= g(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f((0, 0)) = f((0, 0)). \end{aligned}$$

### 9.3 Formula Gauss-Ostrogradski

**10.** Să se calculeze integrala de suprafață  $\int_{\Sigma} \omega$  în următoarele cazuri:

**a.**  $\omega = x^2 dy \wedge dz - 2xy dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy.$

$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$

**b.**  $\omega = yz dy \wedge dz - (x + z) dz \wedge dx + (x^2 + y^2 + 3z) dx \wedge dy.$

$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 4 - 2z, z \geq 1\} \cup \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 4 - 2z, z = 1\}.$

**c.**  $\omega = x(z + 3) dy \wedge dz + yz dz \wedge dx - (z + z^2) dx \wedge dy.$

$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$

**Soluție**

**a.** Fie  $K = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\};$

aplicând formula Gauss-Ostrogradski (sunt verificate ipotezele), obținem:

$$\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz - 2xy dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy = \iiint_K 3z^2 dx dy dz,$$

integrala triplă calculându-se folosind coordonate sferice.

**b.** Fie  $K$  compactul mărginit de suprafața (închisă)  $\Sigma$  și fie

$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2\}$  proiecția lui  $K$  pe planul  $xOy$ ; aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iiint_K 3z dx dy dz = 3 \iint_D dx dy \int_1^{2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dz.$$

c. Suprafața  $\Sigma$  nu este închisă, deci formula Gauss-Ostrogradski nu se poate aplica.

Fie  $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  și fie  $S = \Sigma \cup D$ , orientată cu normala exterioară (pe  $D$  normala este  $-\bar{k}$ ). Fie  $K$  compactul al cărui bord (orientat) este suprafața (închisă)  $S$ . Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\int_S x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = \int \int \int_K 2dx dy dz = \frac{4\pi}{3}.$$

Rezultă deci:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = \\ & = \frac{4\pi}{3} - \int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Calculând ultima integrală de suprafață cu definiția, obținem:

$$\int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = - \int \int_D 0dx dy = 0,$$

$$\text{și deci } \int_{\Sigma} \omega = \frac{4\pi^3}{3}.$$

**11.** Să se calculeze integrala de suprafață  $\int_{\Sigma} \omega$  direct și folosind formula Gauss-Ostrogradski în următoarele cazuri:

**a.**  $\omega = x(y-z)dy \wedge dz + y(z-x)dz \wedge dx + z(x-y)dx \wedge dy.$

$\Sigma = \{(x, y, z); z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\} \cup \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$

**b.**  $\omega = x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy.$

$\Sigma = \{(x, y, z); z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq 1\}.$

**Soluție**

Analog cu exercițiul anterior; în cazul b trebuie să reunim la  $\Sigma$  discul  $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ , orientat după normala  $\bar{k}$ . Obținem

$$\int_{\Sigma} \omega = - \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0.$$

**12.** Fie  $a, b, c$  trei numere strict pozitive. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial:

$$\bar{V} = x(xy + az)\bar{i} - y(xy - az)\bar{j} + z^3\bar{k}$$

prin suprafața  $\Sigma$  de ecuație:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Soluție**

Ecuția suprafeței  $\Sigma$  se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

deci  $z \in [-c, c]$ . Intersecțiile suprafeței  $\Sigma$  cu plane horizontale ( $z = \text{constant}$ ) sunt elipsele  $S(z)$  de ecuații:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Semiaxele acestor elipse sunt

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \quad \text{și} \quad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Fie  $D(z)$  mulțimea (din planul orizontal  $z = \text{constant}$ ) mărginită de elipsa  $S(z)$ ; atunci aria lui  $D(z)$  este:

$$\mathcal{A}(z) = \pi ab \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Pentru calculul fluxului se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fie  $\bar{n}$  normala exterioară la  $\Sigma$  și fie  $\Omega$  compactul mărginit de  $\Sigma$ ; atunci:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} \, d\sigma &= \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{V}) \, dx dy dz = \int_{-c}^c dz \int \int_{D(z)} (2az + 3z^2) \, dx dy = \\ &= \pi ab \int_{-c}^c (2az + 3z^2) \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \, dz = 3\pi ab \int_{-c}^c z^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \, dz = \\ &= 6\pi ab \int_0^c z^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \, dz = 6\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (c \sin t)^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \, c \cos t \, dt = \\ &= \frac{3}{2} \pi abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = \frac{3}{8} \pi^2 abc^3. \end{aligned}$$

**13. Legea lui Gauss**

Pentru orice  $q > 0$ , considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

și fie câmpul de gradienti:

$$\bar{E} = -\text{grad}f.$$

Câmpul scalar  $f$  reprezintă potențialul electric (sau potențial Newtonian) asociat sarcinii electrice  $q$  plasate în  $O$ , iar  $\bar{E}$  este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).

**a.** Să se expliciteze  $\bar{E}$  și să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică:  $\text{div}\bar{E} = 0$ .

**b.** Să se demonstreze că fluxul câmpului  $\bar{E}$  prin orice suprafață închisă ce nu conține originea în interior este nul.

**c.** Să se demonstreze că fluxul câmpului  $\bar{E}$  prin orice suprafață închisă ce conține originea în interior este  $q$ , (legea lui Gauss).

#### Soluție

**a.** Putem calcula  $\bar{E}$  direct cu definiția, sau aplicând proprietățile gradientului; obținem:

$$\bar{E} = -\text{grad}f = \frac{q}{4\pi} \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că  $\bar{E}$  este solenoidal:

$$\text{div}\bar{E} = -\text{grad}(\text{div}f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6} (3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)) = 0.$$

**b.** Fie  $\Sigma$  o suprafață închisă ce nu conține originea în interior. Deoarece câmpul electric  $\bar{E}$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $R^3 \setminus \{O\}$ , sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski și deci, (notăm cu  $K$  compactul mărginit de  $\Sigma$  și cu  $\bar{n}$  versorul normalei exterioare la  $\Sigma$ ), obținem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{E}) = \int_\Sigma \bar{E} \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \text{div}\bar{E} dx dy dz = 0.$$

**c.** Fie acum  $\Sigma$  o suprafață închisă ce conține originea în interior. Deoarece  $\bar{E}$  nu este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe compactul  $K$  mărginit de  $\Sigma$ , ( $\bar{E}$  nefiind de clasă  $\mathcal{C}^1$  în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui  $\bar{E}$  prin  $\Sigma$ . Fie  $R > 0$  astfel încât sfera de centru  $O$  și rază  $R$  (notată în continuare cu  $S$ ), să fie inclusă în interiorul lui  $\Sigma$ . Fie suprafața (închisă)  $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$ , orientată după normala exterioară (deci pe  $S$  este normala interioară la sferă). Fie  $K_1$  mulțimea compactă mărginită de  $\Sigma_1$ . Deoarece  $O \notin K_1$ , fluxul lui  $\bar{E}$  prin  $\Sigma_1$  este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui  $\bar{E}$  prin  $\Sigma$  este egal cu fluxul lui  $\bar{E}$  prin  $S$  (orientată după normala exterioară  $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{R}$  la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\bar{E}) = \int_S \bar{E} \bar{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = q.$$

**14.** Fie  $n \in \mathbb{N}$  și fie  $q_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Fie  $A_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$  puncte în  $R^3$  de coordonate  $(x_i, y_i, z_i)$ . Notăm cu  $\bar{r}_i$  vectorul de poziție al punctului  $A_i$ . Potențialul electric generat de sarcinile electrice  $q_i$  plasate în punctele  $A_i$  este

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\|\bar{r} - \bar{r}_i\|},$$

unde,  $\|\cdot\|$  este norma euclidiană în  $R^3$ . Fie  $\bar{E} = -\text{grad}f$  câmpul electric asociat potențialului  $f$ . Să se demonstreze că fluxul câmpului electric  $\bar{E}$  printr-o suprafață arbitrară închisă ce conține toate punctele  $A_i$  în interiorul ei este egal cu  $\sum_{i=1}^n q_i$ .

**Soluție**

Se aplică raționamentul din exercițiul anterior.

**15. Legea lui Arhimede**

Considerăm un recipient (conținut în semispațiul  $z < 0$ ) în care s-a turnat un lichid având densitatea constantă  $c$ .

Scufundăm în lichid un corp pe care îl asimilăm cu un compact cu bord orientat  $(K, \partial K)$ . Presupunând că presiunea exercitată de lichid asupra corpului scufundat crește proporțional cu adâncimea, obținem pentru câmpul presiunilor formula  $\bar{V} = cz\bar{k}$ . Forța ascensională pe care lichidul o exercită asupra corpului scufundat este, prin definiție, egală cu fluxul câmpului presiunilor prin suprafața (bordul)  $\partial K$ , în raport cu normala exterioară,  $\bar{n}$ . Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\partial K}(\bar{V}) &= \int_{\partial K} \bar{V} \bar{n} d\sigma = \\ &= \int \int \int_K \text{div} \bar{V} \, dx dy dz = \int \int \int_K c \, dx dy dz = c \, \text{vol}(K), \end{aligned}$$

adică forța ascensională este egală cu masa lichidului dezlucuit de corpul scufundat.

**16.** Fie  $\Sigma$  o suprafață închisă și fie  $K$  compactul mărginit de  $\Sigma$ . Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \bar{r} \bar{n} d\sigma = \text{vol}(K),$$



unde,  $\bar{n}$  este normala exterioară la  $\Sigma$ .

**Soluție**

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski:

$$\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \bar{r} \bar{n} d\sigma = \frac{1}{3} \int \int \int_K \operatorname{div}(\bar{r}) \, dx dy dz = \int \int \int_K dx dy dz = \operatorname{vol}(K).$$

**17.** Fie câmpul vectorial  $\bar{V} = \bar{r} + \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \bar{r}$  și fie suprafața

$$\Sigma = \{(x, y, z); z = 3 - x^2 - y^2, 1 \leq z\} \cup \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}.$$

Să se calculeze fluxul lui  $\bar{V}$  prin  $\Sigma$  (orientată după normala exterioară).

**Soluție**

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski; pentru aceasta, calculăm

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{V} &= \operatorname{div} \left( \bar{r} + \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \bar{r} \right) = 3 + \left( \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \right) \operatorname{div} \bar{r} + \bar{r} \operatorname{grad} \left( \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} \right) = \\ &= 3 + 3 \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} + \bar{r} \left( \frac{1}{r^4} \operatorname{grad}(\bar{k} \bar{r}) + (\bar{k} \bar{r}) \operatorname{grad} r^{-4} \right) = \\ &= 3 + 3 \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4} + \bar{r} \left( \frac{\bar{k}}{r^4} - 4 \frac{(\bar{k} \bar{r})}{r^6} \bar{r} \right) = 3. \end{aligned}$$

Notând cu  $K$  compactul mărginit de suprafața  $\Sigma$ , rezultă:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\bar{V}) = \int_{\Sigma} \bar{V} \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K 3 dx dy dz = 3 \operatorname{vol}(K).$$

**18.** Să se calculeze fluxul câmpului vectorial  $\bar{V} = \frac{1}{r} (\bar{r} \times \bar{k})$  prin:

- O suprafață închisă arbitrară ce nu conține originea în interior.
- Sfera de centru  $O$  și rază  $R$ .

**Soluție**

**a.** În primul caz se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fluxul este nul deoarece  $\operatorname{div} \bar{V} = 0$ .

**b.** În cazul al doilea, fluxul se calculează cu definiția integralei de suprafață (nu sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski); și în acest caz fluxul este tot 0 deoarece vectorii  $\bar{V}$  și normala exterioară la sferă sunt ortogonali.

**19. Formulele lui Green**

Fie  $(K, \partial K)$  un compact cu bord orientat din  $R^3$ . Fie  $\bar{n}$  normala exterioară la  $\partial K$  și fie  $f, g$  două funcții de clasă  $C^2$  pe o vecinătate a lui  $K$ . Să se demonstreze formulele lui Green:

$$\text{a. } \int_{\partial K} f (\text{grad}g) \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \left( f \Delta g + (\text{grad}f)(\text{grad}g) \right) dx dy dz.$$

$$\text{b. } \int_{\partial K} \left( f (\text{grad}g) - g (\text{grad}f) \right) \bar{n} d\sigma = \int \int \int_K \left( f \Delta g - g \Delta f \right) dx dy dz.$$

**Soluție**

a. Pentru prima formulă se aplică formula Gauss-Ostrogradski câmpului de vectori  $\bar{V} = f \text{grad}g$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f (\text{grad}g) \bar{n} d\sigma &= \int \int \int_K \text{div}(f \text{grad}g) dx dy dz = \\ &= \int \int \int_K \left( f \text{div}(\text{grad}g) + (\text{grad}g) (\text{grad}f) \right) dx dy dz = \\ &= \int \int \int_K \left( f \Delta g + (\text{grad}g) (\text{grad}f) \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

b. A doua formulă rezultă direct din prima.

**20.** Fie  $(K, \partial K)$  un compact cu bord orientat din  $R^3$  și fie  $\bar{n}$  versorul normalei exterioare la suprafața  $\partial K$ . Fie  $h$  o funcție armonică pe o vecinătate a lui  $K$  și fie  $\frac{dh}{d\bar{n}}$  derivata după direcția  $\bar{n}$  a lui  $h$ . Să se demonstreze egalitățile:

$$\text{a. } \int_{\partial K} \frac{dh}{d\bar{n}} d\sigma = 0.$$

$$\text{b. } \int_{\partial K} h \frac{dh}{d\bar{n}} d\sigma = \int \int \int_K \|\text{grad}h\|^2 dx dy dz.$$

**Soluție**

a. Se aplică prima formulă a lui Green pentru:  $f = 1$  și  $g = h$ ; o altă metodă este de a aplica formula Gauss-Ostrogradski câmpului  $\bar{V} = \text{grad}h$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \frac{dh}{d\bar{n}} d\sigma &= \int_{\partial K} (\text{grad}h) \bar{n} d\sigma = \\ &= \int \int \int_K \text{div}(\text{grad}h) dx dy dz = \int \int \int_K \Delta h = 0. \end{aligned}$$

b. Se aplică a doua formulă a lui Green pentru  $f = g = h$ ; o altă metodă constă în a aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru  $\bar{V} = h \text{grad}h$ :

$$\int_{\partial K} h \frac{dh}{d\bar{n}} d\sigma = \int \int \int_K h \text{grad}h \bar{n} d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int \int_K \operatorname{div}(h \operatorname{grad} h) \, dx dy dz = \\
&= \int \int \int_K \left( h \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h) \cdot (\operatorname{grad} h) \right) \, dx dy dz = \\
&= \int \int \int_K \left( h \Delta g + \|\operatorname{grad} h\|^2 \right) \, dx dy dz = \int \int \int_K \|\operatorname{grad} h\|^2 \, dx dy dz.
\end{aligned}$$

## 9.4 Formula lui Stokes

**21.** Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie  $\int_{\Gamma} \alpha$  în următoarele cazuri:

**a.**  $\alpha = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ .

$\Gamma : z = x^2 + y^2, z = 1$ .

**b.**  $\alpha = ydx + zdy + xdz$ ,

$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ .

**Soluție**

**a.** Fie suprafața  $\Sigma = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2 + z^2, z \leq 1\}$ ; atunci  $\Gamma$  este bordul lui  $\Sigma$  și aplicând formula lui Stokes obținem (lăsăm ca exercițiu verificarea compatibilității orientărilor):

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz &= \int_{\Sigma} -2(dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy) = \\
&= -2 \int \int_D (-2x - 2y + 1) \, dx dy,
\end{aligned}$$

unde  $D$  este discul unitate.

**b.** Fie  $\theta$  unghiul făcut de planul  $x + y + z = 0$  cu planul  $xOy$ ; atunci:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \cdot \bar{k} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Intersecția dintre sferă și plan este un cerc mare al sferei, notat  $\Gamma$ . Considerăm drept suprafață  $\Sigma$  porțiunea din planul  $x + y + z = 0$  situată în interiorul sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Evident, aria lui  $\Sigma$  este  $\pi$ . Fie  $D$  proiecția lui  $\Sigma$  pe planul  $xOy$ . Aria lui  $D$  (care este interiorul unei elipse) este:

$$\operatorname{aria}(D) = \operatorname{aria}(\Sigma) \cdot \cos \theta = \pi \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rezultă:

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = - \int_{\Sigma} (dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy) =$$

$$= - \int \int_D 3 dx dy = -3 \text{aria}(D) = -\sqrt{3}\pi.$$

**22.** Să se calculeze circulația câmpului vectorial

$$\bar{V} = (y^2 + z^2)\bar{i} + (x^2 + z^2)\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$$

pe curba  $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, ax + by + cz = 0$ .

**Soluție**

Curba  $\Gamma$  este un cerc mare al sferei (intersecția sferei cu un plan ce trece prin centrul sferei); considerăm drept suprafață  $\Sigma$  oricare din cele două semisfere determinate de plan pe sferă. Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} &= \int_{\Sigma} (\text{rot}\bar{V}) \bar{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma} (2(y-z)\bar{i} + 2(z-x)\bar{j} + 2(x-y)\bar{k}) \cdot \frac{1}{R}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

deoarece versorul normalei (exterioare) la sferă,  $\bar{n} = \frac{1}{R}\bar{r}$  și  $\text{rot}\bar{V}$  sunt perpendiculari.

**23.** Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integralele:

a.  $\int_{\Gamma} y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$ ,  $\Gamma : z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x$ .

b.  $\int_{\Gamma} 2zdx - xdy + xdz$ ,  $\Gamma : z = y + 1, x^2 + y^2 = 1$ .

**Soluție**

a. Integrala este 0.

b. Considerând  $\Sigma$  porțiunea din planul  $z = y + 1$  situată în interiorul cilindriului  $x^2 + y^2 = 1$ , și aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\int_{\Gamma} 2zdx - xdy + xdz = \int_{\Sigma} dz \wedge dx - dx \wedge dy = \int \int_D -2 dx dy = -2\pi,$$

unde,  $D$  este discul unitate (proiecția suprafeței  $\Sigma$  pe planul  $xOy$ ).

**24.** Să se calculeze direct și cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde  $\Gamma$  este poligonul de intersecție dintre cubul  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  și planul  $x + y + z = \frac{3}{2}$ .

**Soluție**

$\Gamma$  este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiția trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul  $xOy$  are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie  $\Sigma$  porțiunea din planul  $x + y + z = \frac{3}{2}$  situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecția lui  $\Sigma$  pe planul  $xOy$  este mulțimea

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este  $\frac{3}{4}$ . O parametrizare (carteziană) a suprafeței  $\Sigma$  este

$$z = \frac{3}{2} - x - y, (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \\ &= -2 \int_{\Sigma} (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx = \\ &= -2 \int \int_D 3dxdy = -6 \text{ aria}(D) = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

**25.** Să se calculeze direct și aplicând formula lui Stokes integrala

$$\int_{\Gamma} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz,$$

pe curba  $\Gamma$  de ecuații:

$$x^2 + y^2 = R^2, z = x + y.$$

**Soluție**

Pentru a calcula integrala direct parametrizăm

$$\Gamma : x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, z(t) = R(\cos t + \sin t), t \in [0, 2\pi).$$

Pentru a aplica formula lui Stokes, considerăm suprafața  $\Sigma$  porțiunea din planul  $z = x + y$  situată în interiorul cilindriului  $x^2 + y^2 = R^2$ . Proiecția lui  $\Sigma$  pe planul  $xOy$  este discul de centru  $O$  și rază  $R$ , notat  $D$ . O parametrizare carteziană pentru  $\Sigma$  este  $z = x + y$ ,  $(x, y) \in D$ . Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz &= \int_{\Sigma} dx \wedge dy + dy \wedge dz - dz \wedge dx = \\ &= \iint_D dx dy = \pi R^2. \end{aligned}$$

**26.** Să se calculeze circulația câmpului de vectori  $\bar{V} = \frac{1}{r}(\bar{k} \times \bar{r})$  pe curba  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , unde:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0, x > 0, y > 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z); y^2 + z^2 = 1, x = 0, y > 0, z > 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z); z^2 + x^2 = 1, y = 0, z > 0, x > 0\}.$$

**Soluție**

Vom aplica formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm mai întâi rotorul câmpului  $\bar{V}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{V} &= \frac{1}{r} \text{rot}(\bar{k} \times \bar{r}) - (\bar{k} \times \bar{r}) \text{grad} \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1}{r} \left( \bar{k} \text{div} \bar{r} - \bar{r} \text{div} \bar{k} + \frac{d\bar{k}}{d\bar{r}} - \frac{d\bar{r}}{d\bar{k}} \right) + (\bar{k} \times \bar{r}) \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{2\bar{k}}{r}. \end{aligned}$$

Fie suprafața  $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ ; evident, bordul lui  $\Sigma$  este  $\Gamma$ . Aplicând formula lui Stokes, obținem:

$$\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \int_{\Sigma} \text{rot} \bar{V} \bar{n} d\sigma,$$

unde,  $\bar{n} = \bar{r}$  este versorul normalei exterioare la  $\Sigma$ . Pentru a calcula integrala de suprafață, putem folosi atât parametrizarea carteziană cât și coordonatele sferice; se obține  $\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \frac{\pi}{2}$ .

**27.** Fie  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , și fie punctele  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$  și  $C(0, 0, c)$ . Fie  $\Gamma$  reuniunea segmentelor  $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$  (cu acest sens).

Să se calculeze  $\int_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ .

**Soluție**

Vom calcula integrala aplicând formula lui Stokes (lăsăm ca exercițiu calculul direct). Fie  $\Sigma$  interiorul triunghiului  $ABC$ ; obținem:

$$\int_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz = \int_{\Sigma} 2dx \wedge dy + 2dy \wedge dz + 2dz \wedge dx.$$

Proiecția lui  $\Sigma$  pe planul  $xOy$  este interiorul triunghiului  $OAB$ , iar parametrizarea carteziană este

$$z = c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right).$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz &= 2 \int \int_{OAB} \left( \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \right) dx dy = \\ &= ab + bc + ca. \end{aligned}$$

**28.** Fie  $\bar{V} = (x^2 + y - 4)\bar{i} + 3xy\bar{j} + (2xz + z^2)\bar{k}$  și fie semisfera

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}.$$

Să se calculeze fluxul câmpului rot( $\bar{V}$ ) prin  $\Sigma$ , orientată cu normala exterioară (la sferă).

**Soluție**

Fluxul cerut este:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\text{rot}(\bar{V})) = \int_{\Sigma} \text{rot}(\bar{V}) \cdot \bar{n} d\sigma,$$

unde,  $\bar{n}$  este normala exterioară la  $\Sigma$ . Integrala de suprafață se poate calcula atât direct (cu definiția) cât și cu formula lui Stokes; pentru aceasta, fie  $\Gamma$  cercul de intersecție dintre  $\Sigma$  și planul  $xOy$ . Ecuațiile lui  $\Gamma$  sunt:

$$x^2 + y^2 = 16, z = 0.$$

Orientarea pe  $\Gamma$  este orientarea pozitivă a cercului în planul  $xOy$ . Aplicând formula lui Stokes, rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot}(\bar{V}) \cdot \bar{n} d\sigma &= \int_{\Gamma} \bar{V} \cdot d\bar{r} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( (16 \cos^2 t + 4 \sin t - 4)(-4 \sin t) + (48 \sin t \cos^2 t) \right) dt = -16\pi. \end{aligned}$$

**29.** Fie  $a > 0$ ,  $b > 0$  și fie  $\Gamma$  intersecția cilindrului  $x^2 + y^2 = a^2$  cu planul  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ . Să se calculeze, (aplicând formula lui Stokes), circulația câmpului vectorial  $\bar{V} = x\bar{i} + (y-x)\bar{j} + (z-x-y)\bar{k}$  de-a lungul curbei  $\Gamma$  (orientarea pe  $\Gamma$  nu este precizată).

**Soluție**

Fie  $\Sigma$  porțiunea din planul  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$  din interiorul cilindrului  $x^2 + y^2 = a^2$ :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1, x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Atunci, conform formulei lui Stokes, rezultă:

$$\int_{\Gamma} \bar{V} d\bar{r} = \int_{\Sigma} \text{rot}(\bar{V}) \cdot \bar{n} d\sigma,$$

orientările pe  $\Gamma$  și  $\Sigma$  fiind compatibile. Parametrizăm cartezian  $\Sigma$ :

$$z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right), (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Rezultă vectorii tangenți la  $\Sigma$ :

$$\left(1, 0, -\frac{b}{a}\right) \text{ și } (0, 1, 0),$$

și deci versorul normalei la  $\Sigma$  indus de parametrizarea aleasă este  $\bar{n} = \frac{b}{a}\bar{i} + \bar{k}$ .

Rotorul câmpului  $\bar{V}$  este  $\text{rot}\bar{V} = -\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ . Rezultă circulația:

$$\int_{\Gamma} \bar{V} \bar{r} = \int_{\Sigma} \text{rot}(\bar{V}) \cdot \bar{n} d\sigma = -\pi a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

**30.** Fie  $(\Sigma, \partial\Sigma)$  o suprafață cu bord orientat, fie  $\bar{n}$  versorul normalei la  $\Sigma$  și fie  $\bar{c}$  un vector constant. Să se demonstreze că circulația câmpului vectorial  $\bar{V} = (\bar{c}\bar{r})\bar{r}$  pe curba  $\partial\Sigma$  este egală cu  $\int_{\Sigma} \bar{c}(\bar{r} \times \bar{n}) d\sigma$ .

**Soluție**

Aplicăm formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (\bar{c}\bar{r})\bar{r} d\bar{r} = \int_{\Sigma} \text{rot}\left((\bar{c}\bar{r})\bar{r}\right) \bar{n} d\sigma =$$



$$= \int_{\Sigma} \left( (\bar{c}\bar{r}) \operatorname{rot}\bar{r} - \bar{r} \times \operatorname{grad}(\bar{c}\bar{r}) \right) \bar{n} d\sigma = \int_{\Sigma} (\bar{c} \times \bar{r}) \bar{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \bar{c}(\bar{r} \times \bar{n}) d\sigma.$$

**31.** Fie  $(\Sigma, \partial\Sigma)$  o suprafață cu bord orientat, fie  $\bar{n}$  versorul normalei la  $\Sigma$  și fie  $f$  și  $g$  două funcții de clasă  $\mathcal{C}^2$  pe o vecinătate a lui  $\Sigma$ . Să se demonstreze relațiile:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} f \operatorname{grad}g d\bar{r} &= \int_{\Sigma} \left( (\operatorname{grad}f) \times (\operatorname{grad}g) \right) \bar{n} d\sigma. \\ \int_{\partial\Sigma} \left( f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left( f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left( f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz &= 0. \end{aligned}$$

**Soluție**

Se aplică formula lui Stokes. Pentru prima egalitate:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} f \operatorname{grad}g d\bar{r} &= \int_{\Sigma} \operatorname{rot}(f \cdot (\operatorname{grad}g)) \cdot \bar{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma} \left( f \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{grad}g) - \operatorname{grad}g \times \operatorname{grad}f \right) \cdot \bar{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma} \left( (\operatorname{grad}f) \times (\operatorname{grad}g) \right) \bar{n} d\sigma. \end{aligned}$$

Pentru a doua egalitate, calculăm rotorul:

$$\operatorname{rot} \left( \left( f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \bar{i} + \left( f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bar{j} + \left( f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \right) \bar{k} \right) = 0,$$

deci circulația este nulă (s-a folosit teorema de simetrie a lui Schwartz).

**32.** Fie  $(\Sigma, \partial\Sigma)$  o suprafață cu bord orientat și fie  $\bar{n}$  versorul normalei la suprafața  $\Sigma$ .

**a.** Dacă  $f$  este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $(0, \infty)$ , să se calculeze circulația câmpului vectorial  $\bar{V} = f(r)\bar{r}$  pe curba  $\partial\Sigma$ .

**b.** Dacă  $g$  este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe o vecinătate a lui  $\Sigma$  și  $\bar{c}$  este un vector constant, să se demonstreze că circulația câmpului de vectori  $\bar{W}(x, y, z) = g(x, y, z)\bar{c}$  pe curba  $\partial\Sigma$  este

$$\int_{\Sigma} \bar{c} (\bar{n} \times \operatorname{grad}g) d\sigma.$$

**Soluție**

**a.** Aplicăm formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm

$$\operatorname{rot}\bar{V} = f(r) \operatorname{rot}\bar{r} - \bar{r} \times \operatorname{grad}f(r) = -\bar{r} \times \frac{f'(r)}{r} \bar{r} = \bar{0},$$

deci circulația este nulă.

**b.** Aplicăm formula lui Stokes; calculând rotorul câmpului  $\overline{W}$ , obținem

$$\operatorname{rot}\overline{W} = -\overline{c} \times \operatorname{grad}g,$$

ceea ce conduce la rezultatul cerut.

**33.** Fie  $(\Sigma, \partial\Sigma)$  o suprafață cu bord orientat, fie  $f \in \mathcal{C}^1(R)$ ,  $a \in R^3$  și fie  $\overline{V} = (\overline{a} \operatorname{grad}f(r)) \overline{r}$ , unde,  $\overline{r}$  este vectorul de poziție. Să se demonstreze:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V} d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r} f'(r) \overline{n} d\sigma,$$

unde,  $\overline{n}$  este versorul normalei la  $\Sigma$ .

**Soluție**

Se aplică formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V} d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r} f'(r) \overline{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}((\overline{a} \operatorname{grad}f(r)) \overline{r}) \overline{n} d\sigma.$$

Calculăm acum rotorul lui  $\overline{V}$ ; pentru aceasta, calculăm mai întâi:

$$\operatorname{grad}f(r) = f'(r) \operatorname{grad}r = f'(r) \frac{\overline{r}}{r}.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}((\overline{a} \operatorname{grad}f(r)) \overline{r}) &= \operatorname{rot}\left(\frac{(\overline{a} \overline{r})}{r} f'(r) \cdot \overline{r}\right) = \\ &= \frac{(\overline{a} \overline{r})}{r} f'(r) \operatorname{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \operatorname{grad}\left(\frac{(\overline{a} \overline{r})}{r} f'(r)\right) \\ &= -\overline{r} \times \left(f'(r) \operatorname{grad}\left(\frac{(\overline{a} \overline{r})}{r}\right) + \frac{(\overline{a} \overline{r})}{r} \operatorname{grad}f'(r)\right) = \\ &= -\overline{r} \times \left(f'(r) \frac{r \overline{a} - (\overline{a} \overline{r}) \frac{\overline{r}}{r}}{r^2} + \frac{(\overline{a} \overline{r})}{r} f''(r) \frac{\overline{r}}{r}\right) = \\ &= \frac{f'(r)}{r} (\overline{a} \times \overline{r}), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația.

## Capitolul 10

# Exemple de teste pentru examen

### 10.1 Analiză matematică I

#### Testul 1.

**I.** Este spațiul  $(R^2, \| \cdot \|_2)$  complet ? Justificare.

**II.** Să se studieze convergența seriilor:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n, \quad a \in R$$

**III.** Să se construiască un șir al aproximațiilor succesive care să convergă la soluția reală a ecuației  $x^3 + 12x - 1 = 0$ .

**IV.** Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirului de funcții  $f_n : [0, 1] \mapsto R$ ,  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ .

**V.** Să se studieze existența derivatelor parțiale și a diferențialei (în origine)

pentru funcția: 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**VI.** Să se determine maximul și minimul funcției  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$  pe mulțimea  $K = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

#### Testul 2.

**I.** Sunt următoarele afirmații adevărate? Justificare.

**a.** Orice funcție de clasă  $C^1(R^2)$  este diferențiabilă.

**b.** Dacă  $f : R^2 \mapsto R$  are derivate parțiale în origine, atunci ea este

diferențiabilă în origine.

II. Să se studieze convergența uniformă a seriei:  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}, x \in R$ . Se poate

deriva seria termen cu termen (pe  $R$ )?

III. Să se afle extremele locale ale funcției  $f(x, y) = x^2ye^{2x+3y}$ , pe  $R^2$ .

IV. Să se calculeze aproximarea liniară a funcției  $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x+1}{(y+1)(z+1)}}$  în vecinătatea originii.

V. Fie  $\bar{r}$  vectorul de poziție și fie  $f \in C^1(R)$ . Să se calculeze laplacianul funcțiilor  $g(x, y, z) = f\left(\frac{1}{r}\right)$  și  $h(x, y, z) = f(r)$ .

VI. Pe spațiul Banach  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  al funcțiilor continue (reale) considerăm aplicația  $J : C[a, b] \mapsto R, J(f) = \int_a^b f(t)dt$ . Este  $J$  funcțională liniară? Dar continuă?

### Testul 3.

I. Teorema contractției.

II. Să se studieze convergența și convergența absolută seriilor:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n(2+i)^n}{3^n}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

III. În spațiul metric  $R$ , mulțimea  $\{(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \mid n \in N\} \cup \{-1, 1\}$  este închisă sau deschisă? Justificare.

IV. Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcțiile  $f(x) = \sin 2x$  și  $g(x) = \ln(1 + 2x)$ . Să se calculeze apoi suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

V. Fie funcția  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a. Să se arate că  $f$  este de clasă  $C^1$  pe  $R^2$ .

b. Să se arate că  $f$  are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea în orice punct și să se calculeze  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  în origine; este  $f$  de clasă  $C^2$  pe  $R^2$  ?

VI. Să se afle extremele funcției  $y = y(x)$  definite implicit de ecuația  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ .

### Testul 4.

I. Teorema lui Taylor. Este adevărat că orice funcție  $f \in C^\infty(R)$  se poate dezvolta în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct?

II. Să se calculeze rotorul câmpului vectorial  $\bar{V} = \frac{1}{r}(\bar{k} \times \bar{r})$ .

**III.** Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$  soluția reală a ecuației  $x^3 + 4x - 1 = 0$ .

**IV.** Să se determine valorile extreme ale produsului  $xy$  când  $x$  și  $y$  sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuație  $x^2 + 2y^2 = 1$ .

**V.** Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirului  $u_n : R \mapsto R$ ,  $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ ,  $n > 0$ .

**VI.** Să se studieze convergența seriei  $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ ,  $a > -1$ .

### Testul 5.

**I.** Spațiul metric al funcțiilor continue  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  este complet? Justificare.

**II.** Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-2}$  integrala  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

**III.** Fie funcția  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Să se studieze continuitatea, existența derivatelor parțiale de ordinul întâi și diferențiabilitatea în origine.

**IV.** Să se determine extremele locale ale funcției:

$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R$ ,  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ .

**V.** Fie  $g \in C^1(R^2)$  și fie funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $g(y^2 - x^2, z - xy) = 0$ . Să se calculeze expresia  $E = y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**VI.** Se poate deriva termen cu termen seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ ,  $x \in R$ ?

### Testul 6.

**I.** Considerăm pe  $Q$  și  $C$  metrica uzuală:  $d(x, y) = |x - y|$ . Să se stabilească dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false. Justificare.

**a.** Spațiul metric  $(Q, d)$  este complet.

**b.** Spațiul metric  $(C, d)$  este complet.

**II.** Să se studieze convergența seriei  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

**III.** Să se determine mulțimea de convergență (în  $R$ ) a seriei de puteri:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} x^n$ ,  $a > 0$ .

**IV.** Să se calculeze divergența câmpului vectorial  $\bar{V} = \bar{r} + \frac{\bar{k} \bar{r}}{r^4}$ , unde  $\bar{k}$  este versorul axei  $Oz$ , iar  $\bar{r}$  este vectorul de poziție.

- V. Să se determine valorile extreme ale funcției  $f : R^3 \mapsto R$ ,  
 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$  pe mulțimea  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .  
 VI. Fie  $f : (0, 1] \mapsto R$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Să se studieze dacă  $f$  este uniform  
 continuă.

### Testul 7.

- I. Serii de puteri, teorema lui Abel.  
 II. Să se dezvolte în serie în jurul originii funcția  $f(x) = \arctg x$  și să se  
 calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-2}$  integrala  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx$ .  
 III. Fie  $f : R^3 \mapsto R$ ;  $f(x, y, z) = x^2 + yz - xy$  și  $a = (1, 1, 2)$ . Să se deter-  
 mine versorul  $s$  știind că  $\frac{df}{ds}(a)$  este maxim.  
 IV. Să se determine extremele funcției  $z = z(x, y)$ , definite implicit de  
 ecuația  $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$ .  
 V. Să se caracterizeze șirurile Cauchy și cele convergente într-un spațiu met-  
 ric discret.  
 VI. Să se afle  $f \in C^2(R)$  știind că funcția  $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$  este armonică  
 pe  $R^2$ .

### Testul 8.

- I. Să se enunțe și să se demonstreze trei criterii de convergență pentru serii  
 cu termeni pozitivi.  
 II. Fie  $a, b \in R, a < b$ . Să se demonstreze că  $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$   
 este distanță pe mulțimea funcțiilor continue  $C[a, b]$ .  
 III. Să se calculeze suma seriei numerice  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ , folosind seria de puteri  
 $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ .  
 IV. Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în origine  
 ale funcției  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)} & \text{dacă } xy \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } xy = 0 \end{cases}$   
 V. Fie  $F \in C^2(R^2)$ . Funcția  $y = y(x)$  este definită implicit de ecuația

$$F(\sin x + y, \cos y + x) = 0.$$

Să se determine  $y''$  în punctele critice ale lui  $y$ .

- VI. Fie ecuația diferențială  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ . Ce devine ecuația dacă

se face schimbarea de variabile  $(x, y) \mapsto (t, y)$ , unde  $x = e^t$  ?

### Testul 9.

**I.** În  $R$  (cu distanța uzuală) orice șir Cauchy este convergent? Justificare.

**II.** Să se studieze convergența și convergența absolută a seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ .

**III.** Să se dezvolte în serie de puteri centrate în zero funcția  $f(x) = \arcsin x$  și apoi să se calculeze suma seriei  $1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$ .

**IV.** Folosind dezvoltări limitate să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ .

**V.** Fie funcția:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**a.** Să se arate că  $f$  este de clasă  $C^1$  pe  $R^2$ .

**b.** Să se arate  $f$  are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea în origine și să se calculeze  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  în origine; este funcția  $f$  de clasă  $C^2$  pe  $R^2$  ?

**VI.** Fie  $a, b, c \in R$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ; să se determine valorile extreme ale funcției  $f : R^3 \mapsto R$ ,  $f(x, y, z) = ax + by + cz$ , pe mulțimea

$D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ .

### Testul 10.

**I.** Derivarea și integrarea termen cu termen a șirurilor de funcții.

**II.** Să se studieze convergența absolută pentru seria  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$ .

**III.** Pe spațiul Banach complex  $(C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$  considerăm operatorul:  $(Mf)(x) = xf(x)$ ,  $\forall f \in C[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

**a.** Să se demonstreze că  $M$  este liniar și continuu și  $\| M \| = |b|$ .

**b.** Să se demonstreze că spectrul lui  $M$  este :  $\sigma(M) = [a, b]$ .

**c.** Să se determine mulțimea valorilor proprii.

**IV.** Să se calculeze mulțimea de convergență (în  $C$ ) a seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ ,  $z \in C$ .

**V.** Este funcția  $g : R^2 \mapsto R$ ,  $g(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$  de clasă  $C^1(R^2)$  ?

**VI.** Să se determine punctele de extrem local ale funcției:

$f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$ ,  $(x, y) \in R^2$ .

## 10.2 Analiză matematică II

### Testul 1.

**I.** Să se enunțe și să se demonstreze două criterii de convergență absolută pentru integrala Riemann improprie.

**II.** Să se calculeze  $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx$ .

**III.** Să se calculeze integrala:

$$\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - y \leq 0, x \geq 0\}.$$

**IV.** Fie  $0 < k < R$ ; să se calculeze volumul mulțimii:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq k\}.$$

**V.** Fie câmpul vectorial  $\bar{V} = \bar{r} + \frac{k\bar{r}}{r^4} \bar{r}$  și fie suprafața:

$$\Sigma = \{(x, y, z); z = 3 - x^2 - y^2, 1 \leq z\} \cup \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}.$$

Să se calculeze fluxul lui  $\bar{V}$  prin  $\Sigma$  (orientată după normala exterioară).

**VI.** Ce relații de incluziune sunt între mulțimile:

i.  $\ell^1(Z)$  și  $\ell^2(Z)$ ,

ii.  $L^1[0, 2\pi]$  și  $L^2[0, 2\pi]$ ? Justificare.

### Testul 2.

**I.** Formula Green-Riemann.

**II.** Să se studieze continuitatea funcției  $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2} dx, \forall y \in \mathbb{R}$ .

**III.** Pe spațiul Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$  considerăm operatorul:

$V : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), (Vx)(0) = 0$  și  $(Vx)(n) = x(n-1), \forall n \geq 1$ . Să se calculeze valorile proprii ale lui  $V$ .

**IV.** Să se calculeze aria mulțimii plane  $D$  mărginite de curba de ecuație:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a$  și  $b$  fiind două constante pozitive.

**V.** Să se calculeze aria submulțimii de pe sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , situate în interiorul conului  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**VI.** Să se calculeze direct și aplicând formula lui Stokes integrala

$$\int_{\Gamma} x dx + (x+y) dy + (x+y+z) dz, \quad \Gamma : x^2 + y^2 = R^2, z = x+y.$$



**Testul 3.**

**I.** Formula Gauss-Ostrogradski.

**II.** Să se calculeze integrala:  $J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \alpha > 0, \alpha \neq 1.$

**III.** Să se calculeze integrala dublă:

$\int \int_D (x + 3y) dx dy$ ,  $D$  fiind mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații  $y = x^2 + 1, y = -x^2, x = -1, x = 3.$

**IV.** Să se calculeze aria paraboloidul  $z = x^2 + y^2, z \in [0, h].$

**V.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui arc de cerc de rază  $R$  și de măsură  $\alpha \in (0, \pi)$ , presupus omogen.

**VI.** Să se calculeze fluxul câmpului vectorial  $\bar{V} = \frac{1}{r} (\bar{r} \times \bar{k})$  printr-o suprafață închisă arbitrară ce nu conține originea în interior.

**Testul 4.**

**I.** Teorema lui Poincare.

**II.** Să se studieze convergența integralei  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} dx$

**III.** Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ , prelun-gită prin periodicitate la întregul  $R$ . Să se deducă apoi suma seriei numerice:  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

**IV.** Fie  $\alpha = \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$ . Să se calculeze integrala curbilinie  $\int_{\Gamma} \alpha$ , unde  $\Gamma$  este o curbă arbitrară închisă cu  $O \notin \Gamma$ .

**V.** Fie  $a > 0, b > 0, c > 0$ , și fie punctele  $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$  și  $C(0, 0, c)$ . Fie  $\Gamma$  reuniunea segmentelor  $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$  (cu acest sens). Să se calculeze  $\int_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$  direct și aplicând formula lui Stokes.

**VI.** Să se calculeze fluxul câmpului de vectori  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ , prin suprafața de ecuație  $z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$

**Testul 5.**

I. Formula lui Stokes.

II. Să se calculeze integrala  $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}$ .

III. Să se determine seria Fourier asociată funcției  $f(x) = e^{ax}, x \in (-\pi, \pi]$  și apoi să se calculeze suma seriei de numere:  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2}, a \neq 0$ .

IV. Să se calculeze volumul mulțimii mărginite de suprafețele de ecuații  $z = 4 - x^2 - y^2, 2z = 5 + x^2 + y^2$ .

V. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori  $\bar{V} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$ , prin suprafața de ecuație  $z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$ .

VI. Să se calculeze masa firului material de ecuații parametrice:

$x(t) = t, y(t) = \frac{1}{2}t^2, z(t) = \frac{1}{3}t^3, t \in [0, 1]$ , cu densitatea  $F(x, y, z) = \sqrt{2y}$ .

**Testul 6.**

I. Baze ortonormale în spații Hilbert și serii Fourier.

II. Să se calculeze integrala  $\int_0^1 \ln^p \left( \frac{1}{x} \right) dx, p > -1$ .

III. Să se calculeze aria mulțimii plane mărginite de curba de ecuație  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, a$  fiind o constantă pozitivă.

IV. Fie  $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ .

a. Să se calculeze integrala curbilinie  $\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha$ , unde, am notat cu  $\mathcal{C}(O, R)$  cercul de centru  $O$  și rază  $R > 0$ .

b. Să se calculeze  $\int_{\Gamma} \alpha$ , unde,  $\Gamma$  este o curbă arbitrară închisă astfel încât  $O \notin \Gamma$ .

V. Să se calculeze volumul mulțimii mărginite de suprafețele de ecuații  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = x^2, x \geq 0$ .

VI. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala:

$\int_{\Gamma} y(y + 2z)dx + 2x(y + z)dy + 2xydz,$

$\Gamma$  fiind curba de ecuații  $\Gamma : z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x$ .

**Testul 7.**

**I.** Serii trigonometrice.

**II.** Fie  $\alpha > 0$ . Să se calculeze  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ .

**III.** Să se calculeze integrala dublă  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$ ,  $D$  fiind mărginit de curbele de ecuații  $x^2 + y^2 = e^2$ ,  $y = x\sqrt{3}$ ,  $x = y\sqrt{3}$ ,  $x \geq 0$ .

**IV.** Fie 1-forma diferențială  $\alpha = ydx + xdy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**i.** Este  $\alpha$  închisă? Dar exactă?

**ii.** Să se calculeze  $\int_{\Gamma} \alpha$  pe un drum cu capetele  $A(2, 1)$  și  $B(1, 3)$ .

**V.** Să se calculeze spectrul și norma operatorului diagonal:

$D_{\alpha} : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $(D_{\alpha}x)(n) = \alpha(n)x(n)$ , unde  $\alpha(n) = \frac{1}{n^2+1}$ .

Este operatorul  $D_{\alpha}$  inversabil ?

**VI.** Să se calculeze integrala de suprafață  $\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz - 2xy dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$ , unde,  $\Sigma = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ .

**Testul 8.**

**I.** Integrale cu parametri.

**II.** Să se calculeze integrala:  $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x) dx$ ,  $\forall y > 0$ .

**III.** Să se calculeze volumul mulțimii:

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ ,

dacă  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , și  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

**IV.** Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate ale unei semisfere  $\mathcal{S}$  de rază  $R$  și având densitatea constantă  $c$ .

**V.** Fie  $\vec{V} = (x^2 + y - 4)\vec{i} + 3xy\vec{j} + (2xz + z^2)\vec{k}$  și fie semisfera

$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}$ .

Să se calculeze fluxul câmpului rot  $(\vec{V})$  prin  $\Sigma$ , orientată cu normala exterioră (la sferă).

**VI.** Să se determine seria Fourier asociată funcției  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi]$ , prelungită prin periodicitate la  $\mathbb{R}$ . Să se calculeze apoi sumele seriilor de

numere:  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ .

**Testul 9.**

**I.** Măsura și integrala Lebesgue.

**II.** Să se calculeze integrala:  $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \right) \frac{dx}{\cos x}$ ,  $|a| < 1$ .

**III.** Să se calculeze:  $\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**IV.** Să se calculeze norma și valorile proprii ale operatorului

$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $(Wx)(n) = x(n-1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**V.** Fie  $P, Q, R : \Omega = \{(x, y, z); y > 0, z \geq 0\} \mapsto \mathbb{R}$ ,

$P = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2}$ ,  $Q = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $R = z^2 - xy$ .

Notând cu  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , să se calculeze  $\int_{\Gamma} \omega$ , unde  $\Gamma$  este un drum parametrizat arbitrar (inclus în  $\Omega$ ) ce unește punctele  $A(1, 1, 0)$  și  $B(-1, 1, 0)$ .

**VI.** Fie  $\Sigma$  o suprafață închisă și fie  $K$  compactul mărginit de  $\Sigma$ . Să se demonstreze că:  $\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \bar{r} \bar{n} d\sigma = \text{vol}(K)$ ,  $\bar{n}$  fiind normala exterioră la  $\Sigma$ .

**Testul 10.**

**I.** Funcțiile lui Euler.

**II.** Fie  $f : [0, 1] \times (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$  și fie integrala parametru

$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ . Să se calculeze:  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y)$  și  $\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx$ .

**III.** Să se calculeze volumul mulțimii mărginite de suprafețele de ecuații  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ .

**IV.** Să se calculeze aria submulțimii de pe paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  situat în interiorul cilindrului  $x^2 + y^2 = 2y$ .

**V.** Să se calculeze, aplicând formula Green-Riemann,  $\int_{\Gamma} xy dx + \frac{x^2}{2} dy$ ,

$\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x, y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$ .

**VI.** Să se calculeze integrala de suprafață:

$\int_{\Sigma} x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy$ ,

unde  $\Sigma = \{(x, y, z); z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq 1\}$ .

# Bibliografie

## Lucrări teoretice

### 1. I. Colojoară

*Analiză matematică, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1983.*

### 2. R. Courant

*Differential and Integral Calculus, vol.1,2, Nordeman Publishing Co, 1945.*

### 3. G.M. Fihtengolț

*Curs de calcul diferențial și integral, vol.1,2,3, Ed. Tehnică, 1965.*

### 4. P. Flondor, O. Stănășilă

*Lecții de analiză matematică, Ed. ALL, 1993.*

### 5. L.V. Kantorovici, G.P. Akilov

*Analiză funcțională, Ed. Științifică și enciclopedică, 1986*

### 6. M. Olteanu

*Curs de analiză funcțională, Ed. Printech 2000.*

### 7. C. P. Niculescu

*Fundamentele analizei matematice, Ed. Academiei Române, 1996.*

### 8. W. Rudin

*Principles of mathematical analysis, Mc Graw Hill, N.Y. 1964.*

### 9. O. Stănășilă

*Analiză liniară și geometrie, Ed. ALL, 2000*

### 10. O. Stănășilă

*Matematici speciale, Ed. ALL, 2001.*

## Culegeri de probleme

### 11. C.M. Bucur, M. Olteanu, Roxana Vidican

*Calcul diferențial - caiet de seminar, Ed. Printech, 2000.*

### 12. N. Donciu, D. Flondor

*Algebră și analiză matematică, Ed. Did. Ped., București, 1979.*

### 13. Ioana Luca, Gh. Opreșan

*Matematici avansate, Ed. Printech, 2001.*

### 14. Ana Niță, Tatiana Stănășilă

*1000 de probleme rezolvate și exerciții fundamentale, Ed. ALL, 1997.*

