Analiza matematica
Subiecte posibile
Anul 1, semestrul 1, 2008/2009

Bibliografie

1. R. Trandafir, I. Duda – Elemente de analiza matematica. Culegere de probleme, Editura Fundatiei *Romania de Maine*;
2. I. Duda – Elemente de analiza matematica, Editura Fundatiei *Romania de maine*
3. Duda I., Gradinaru S. – Calcul integral cu aplicatii, Editura Fundatiei *România de Mâine*

Teorie

1. Sa se studieze natura urmatoarelor serii:

a) seria armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

b) seria geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

c) seria armonica generalizata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ unde $\alpha \in R$

La partea de teorie se va verifica cunoasterea definitiilor si enunturilor de teoreme, propozitii, leme, corolarii din toate capitolele care se regasesc in programa analitica.

Capitolul siruri si serii de numere reale (vezi [1] p. 9-11 si 21-26, respectiv [2] p. 7-39):

- definitiile notiunilor de sir de numere reale, monotonie, marginire, limita unui sir, sir convergent, sir divergent, sir Cauchy
- criterii de convergenta (d. ex. criteriul lui Cauchy, criteriul Cesaro-Stolz, criteriul d'Alembert, criteriul clestelui etc.)
- proprietati ale calculului cu limite de siruri (d. ex. lema lui Cesaro, orice sir monoton si marginit este convergent, trecerea la limita in inegalitati, etc.)
- definitiile notiunilor de serie de numere reale, termen general al unei serii, sirul sumelor partiale, serie convergenta, serie divergenta, serie oscilanta, suma unei serii, rest de ordin *p* al unei serii, serie alternata, serie absolut convergenta, serie semiconvergenta
- proprietati generale ale seriilor de numere reale;
- criterii de convergenta (d. ex. criteriul general al lui Cauchy, criteriul lui Abel, criteriul lui Leibniz, criteriile de comparatie, criteriul radacinii (Cauchy), corolarul criteriului radacinii, criteriul raportului (d'Alembert), corolarul criteriului raportului, criteriul Raabe-Duhamel, corolarul criteriului Raabe-Duhamel, criterul logaritmic, corolarul criteriului logaritmic.

Capitolul funcții reale de o variabilă reală (vezi [1] p. 39-46):

- definițiile noțiunilor de limită a unei funcții într-un punct (definiții echivalente), continuitate a

unei funcții într-un punct (definiții echivalente), continuitate la stânga (respectiv la dreapta), limite laterale, punct de discontinuitate, proprietatea lui Darboux, continuitate uniformă, derivabilitate, derivata unei funcții într-un punct, derivate laterale, diferențiabilitate
- operații cu limite de funcții, criterii de existență a limitelor de funcții, criteriul lui Cauchy, legatura dintre continuitate şi proprietatea lui Darboux, legatura dintre continuitate şi continuitatea uniformă, teoremele lui Rolle, Cauchy şi Lagrange, regulile lui l'Hospital

Capitolul serii de funcții (vezi [1] p. 69-72, respectiv [2] p. 39-65):
- definițiile noțiunilor de serie de funcții, convergență a unei serii de funcții, mulțime de convergență, convergență simplă, convergență uniformă, rest de rang *n*
- criterii de convergență pentru serii de funcții, criteriul lui Cauchy, criteriul lui Weierstrass, continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea seriilor uniform convergente

Capitolul serii de puteri (vezi [1] p. 78-80, respectiv [2] capitolul 4, p. 65-)
- definițiile noțiunilor de serie de puteri, rază de convergență, serie Taylor, seria Taylor a unei funcții într-un punct, seria Mac-Laurin
- teorema lui Abel, teoremele Cauchy-Hadamard (T. 5.1.3 şi 5.1.4 din [1] p. 79) proprietăți ale seriilor de puteri şi ale seriei Taylor

Capitolul integrala Riemann şi integrala Riemann generalizată (vezi [3] capitolele 1 si 2):
- definițiile noțiunilor de primitivă(integrală nedefinită) a unei funcții, sumă Riemann, integrală Riemann, integrală Riemann pe interval necompact (integrală Riemann generalizată), integrala în sensul valorii principale
- teorema lui Darboux, teorema Leibniz-Newton, teorema de schimbare de variabilă, proprietăți ale primitivelor şi ale integralei Riemann

Siruri, serii (vezi [1] p. 9-11 si 21-26, respectiv [2] p. 7-39)

I. Sa se studieze natura seriilor:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(-1)^n}$ =este divergenta

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ =este serie alternata

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{9n^2-1}$ =este divergenta deoarece este serie cu termeni strict pozitivi

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{\pi}{2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ =este convergenta deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$ =este divergenta

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n+5}+2}$ =este divergenta, deoarece termenul general nu tinde la 0

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}$ =este divergenta, din criteriul raportului

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ =este convergenta din criteriul raportului

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ =este convergenta din criteriul raportului

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ =este convergenta din criteriul raportului

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ =este convergenta din criteriul raportului

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ =este convergenta din criteriul raportului

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ =este convergenta din criteriul radicalului

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ =este divergenta din criteriul radicalului

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n+1)^n}$ =este convergenta din criteriul radicalului

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (arctg\ n)^{-n}$ =este convergenta din criteriul radacinii

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-n}}{n}$ =este convergenta din criteriul radacinii

22. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha^n$ unde $\alpha \in R$ =seria este convergenta pentru |a |< 1 si divergenta pentru |a |= 1

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

II. Sa se calculeze urmatoarele limite:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ = 0

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+7}$ = 2

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+23}{n^8+7n^3-11}$ = 0

4. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n-1}-n)$ =+ ∞

5. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+4n-1}-2n)$ = 1

6. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{64n^3-3n^2+3}-5n)$ = - ∞

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 4^n - 11\cdot 3^n}{2\cdot 5^n + 13\cdot 2^n}$ = 0

8. $\lim_{n\to\infty} tg\ \frac{1}{n}$ = 0

9. $\lim_{n\to\infty} n\cdot tg\ \frac{1}{n}$ = 1

10. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ = 1

11. Aplicand criteriul clestelui calculeaza limita sirului $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$ = 0

12. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+6}$ = $\frac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+7}{11n+3} = \frac{5}{11}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = 1$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) = \frac{5}{6}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^3} = 0$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n^2} = 0$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$ cand $0<\alpha<1$ $= 0$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ daca $\alpha>1$ $= 0$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\alpha^n}$, daca $\alpha>1$ $= 0$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{\alpha^n}$ daca $\alpha>1$ $= 0$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ daca $\alpha>1$ $= 0$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+4n-5} = 0$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = +\infty$

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$, daca $\alpha>1$ $= +\infty$

32. $\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$

33. $\lim_{n \to \infty} n^n$ =+ ∞

34. $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{3^n}$ =+ ∞

35. $\lim_{n \to \infty} (n^2 - 5n + 144)$ =+ ∞

36. Determina limita sirului $a_n = \frac{1}{n} + (0,75)^n$ =0

37. Determina limita sirului $a_n = 5\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n + 8\right)$ =40

38. Determina limita sirului $a_n = \frac{3}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}, n \geq 1$ $= \frac{3}{\sqrt{e}}$

39. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ =e

40. Determina limita sirului $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 3$ $= \frac{1}{e}$

41. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ =+ ∞

42. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ =e

43. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ $=e^2$

44. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3\sqrt{n}+2}$ $=e^3$

45. Determina limita sirului $a_n = \left(1 + \frac{\alpha n}{n^2 + 1}\right)^{\frac{\alpha n}{\beta}}$ =alfa la puterea 2 / beta

III.

1. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sa se studieze natura sa. =este strict descrescator, marginit superior, convergent

2. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $x_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}, n \in N^*$.
=nu este monoton, este marginit, este divergent

Sa se studieze natura sa.

3. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ cu termenul general $x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}, n \in N^*$. Sa se studieze natura sa.

=nu este un sir Cauchy (sir fundamental), este un sir divergent.

4. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ cu termenul general $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, n \in N^*$. Sa se studieze natura sa.

=nu este un sir Cauchy (sir fundamental), este un sir convergent

5. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ cu termenul general $x_n = \frac{\cos^2 n}{n}, n \in N^*$. Sa se sudieze natura sa. =este un sir convergent $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

6. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ cu termenul general $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \in N^*$. Sa se sudieze natura sa.

=este un sir convergent, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

7. Se considera sirul de numere reale $(x_n)_{n\in N^*}$ cu termenul general $x_n = (1+\cos n\pi)\frac{n}{n+1}, n \in N^*$. Sa se sudieze natura sa.

=este un sir convergent, $\lim x_n = 0$

8. Se considera sirul $(x_n)_{n\in N^*}$ dat prin $x_n = \frac{n^a}{n^2+1}$. Sa se determine a astfel incat sirul $(x_n)_{n\in N^*}$ sa fie convergent. =sirul este convergent daca si numai daca $a \le 2$.

9. Sa se calculeze suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $=1;$

10. Se considera sirul $(x_n)_{n\in N^*}$ dat prin $x_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. Sa se determine (daca exista) limita sa. =sirul este divergent.

11. Fie a un numar real. Se considera seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$. Sa se studieze natura sa.

=seria este convergenta daca si numai daca $a > 1$;

12. Sa se calculeze limita sirului $(x_n)_{n\in N^*}$ dat prin $x_n = \sqrt{n+100} - \sqrt{n}$. $=0$

Continuitate derivabilitate (vezi [1] p. 39-46)

I.

1 Fie functia $f(x)=\begin{cases} x+3 & ,x\le 0 \\ ae^x & x>0 \end{cases}$. Sa se determine *a* astfel incat *f* sa fie continua. = 3

2. Fie *a* si *b* numere reale. Se defineste functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin

$f(x)=\begin{cases} ax+b, & daca \quad x<0 \\ x^2 & daca \quad x\ge 0 \end{cases}$. Sa se determine *a* si *b* astfel incat *f* sa fie derivabila pe $\mathbb{R}$.
=functia *f* este derivabila daca si numai daca a=b=0.

3. Fie $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ si fie *n* un numar natural nenul. Sa se calculeze, in caz ca exista $f^{(n)}(x)$. $=f^{(n)}(x)=(-1)^n(n+1)!\,x^{-n-2}$ pentru orice $x\in R$;

4. Fie $f:R\to R$, definita prin $f(x)=|x|$. Sa se stabileasca domeniul unde *f* este continua, respectiv unde *f* este derivabila.

5. Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde

$f(x)=\begin{cases} mx^2+1, & \text{daca } x<1 \\ x+2, & \text{daca } x\ge 1 \end{cases}$ =2

6. Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde $f(x)=\begin{cases} x+7, & \text{daca } x<7 \\ mx, & \text{daca } x\ge 7 \end{cases}$ =2

7. Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde

$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{daca } x<0 \\ x+m, & \text{daca } x\ge 0 \end{cases}$ =1

Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde

8.

$f(x)=\begin{cases} x+m, & \text{daca } x<0 \\ \ln(1+x), & \text{daca } x\ge 0 \end{cases}$ =0

Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde

9.

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{daca } x\ne 0 \\ m, & \text{daca } x=0 \end{cases}$ =1

Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa fie continua. unde

10.

$f(x)=\begin{cases} 5\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{daca } x\ne 0 \\ m, & \text{daca } x=0 \end{cases}$ =5

Sa se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fie continua. unde

11.
$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{daca } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$$ =1

Sa se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel incat functia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fie continua, unde

12.
$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{daca } x \le 0 \\ \dfrac{(1+x)^a - 1}{x}, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$$ si $a \in \mathbb{R}$ =a

13. Fie functia $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{x^3} + 1)x$. Sa se scrie ecuatia tangentei la graficul lui f in origine. = $y = x$

14. Se considera functia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2 + x + 2\right)^{\frac{3}{2}}$. Sa se scrie ecuatia tangentei la graficul lui f in punctul de abscisa $x = 1$. = $y - 9 = x - 1$

II. Calculeaza urmatoarele limite

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 1}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ = -1

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1} = \dfrac{n}{m}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^6 + 1} - \sqrt[3]{x + 2}\right) = \infty$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{4x^2 + 6}\right) = \infty$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \infty$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{x}$ = 1

9. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \ln x) = +\infty$

10. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$ $= +\infty$

11. $\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$, daca $a > 0$ $= \frac{1}{a}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ = a-b

13. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$

14. $\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

III. Sa se calculeze derivatele urmatoarelor functii:

1. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$ $= 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$

2. $f:(0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$ $= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3. $f:(0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$ $= \frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}} + \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}} - 48\sqrt[6]{27x^2}\right)$

4. $f:(1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ $= -\frac{2}{(x - 1)^2}$

5. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$ $= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

6. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$ $= \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x - 1)^2}$

7. $f:\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$ $= \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

8. $f:\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$ $= -\frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$

9. $f:\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x^3 - 1}$ $= -\frac{6x^2}{(x^3 - 1)^2}$

10. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{a^2 - 3}, a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$ $= \frac{2x - 1}{a^2 - 3}$

11. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1 - x^3}{\sqrt{\pi}}$ $= -\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$

12. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1} = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

13. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+6} = \dfrac{-2x+3}{(x^2-3x+6)^2}$

14. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax+bx^2}{am+bm^2},\ a,b,m \in \mathbb{R},\ m(a+bm) \neq 0. = \dfrac{a+2bx}{am+bm^2}$

15. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = f'(0) = 11, f'(1) = 2, f'(2) = -1$

16. $f:\mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{x^2+1} = f'(0) = -\dfrac{1}{4}; f'(-1) = \dfrac{1}{2}$

17. $f:\mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3}{5-x} + \dfrac{x^2}{5} = f'(0) = \dfrac{3}{25}; f'(2) = \dfrac{17}{15}$

18. $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = (1+x^3)\left(5 - \dfrac{1}{x^2}\right) = f'(1) = 16$

19. $f:\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1-x^2} = f'(0) = 1; f'(2) = \dfrac{5}{9}$

20. $f:\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{a-x}{1+x},\ a \in \mathbb{R} = f'(1) = -\dfrac{a+1}{4}$

21. $f:[-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-x^2} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos x = \cos x - \sin x$

23. $f:\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in Z\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1-\cos x} = -\dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

24. $f:\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.\ f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}x}{x} = \dfrac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}$

25. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sin x + \cos x = x\cos x$

26. $f:\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in Z\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{1+\cos x}$

27. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos^2 x = -\sin 2x$

28. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x = -\sin^3 x$

29. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\sin^2 x - \sin^3 x = \dfrac{3}{2}\sin 2x \cdot (2 - \sin x)$

30. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin 3x = 3\cos 3x$

31. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot \cos\dfrac{x}{3} = -\dfrac{a}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

32. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\sin(3x+5) = 9\cos(3x+5)$

33. $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$

34. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$

35. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^3 4x$ $=$ $-12\cos^2 4x\sin 4x$

36. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^2(\cos 3x)$ $=$ $-3\sin 3x\cdot\sin(2\cos 3x)$

37. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^n x\cos nx$

38. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^n x\sin nx$

39. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^n x\sin nx$

40. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^n x\cos nx$

41. $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\arcsin x$ $=$ $\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

42. $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $=$ $\arcsin x$

43. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x$ $=$ $\dfrac{\mathrm{arctg}x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

44. $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(\arcsin x+\arccos x)^n,\ n\in\mathbb{N}^*$ $=0$

45. $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin(x-1)$ $=$ $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

46. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{arctg}x^2$ $=$ $\dfrac{2x}{1+x^4}$

47. $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{arctg}^2\dfrac{1}{x}$ $=$ $-\dfrac{2\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$

48. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\log_3 x$ $=$ $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$

49. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln^2 x$ $=$ $\dfrac{2\ln x}{x}$

50. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\lg x$ $=$ $\dfrac{\ln x+1}{\ln 10}$

51. $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ $=$ $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

52. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$ $=$ $\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$

53. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*.$ $=$ $x^{n-1}(n\ln x+1)$

54. $f:\left(\infty,\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1-2x)$ $=$ $-\dfrac{2}{1-2x}$

55. $f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\sin x$ $=$ $\mathrm{ctg}x$

56. $f:(-\infty,0)\cup(4,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2-4x)$ $=$ $\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$

57. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x10^x$ $=$ $10^x(1+x\ln 10)$

58. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$ $=$ $e^x(1+x)$

59. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ $=$ $\dfrac{1-x}{e^x}$

60. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cos x$ $=$ $e^x(\cos x-\sin x)$

61. $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in Z\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$ $=$ $\dfrac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$

62. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$ $=$ $-\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$

63. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3^x$ $=$ $3x^2-3^x\ln 3$

64. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1+e^x}$ $=$ $\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

65. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 10^{2x-3}$ $=$ $2 \cdot 10^{2x-3} \ln 10$

66. $f:[-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$ $=$ $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$

67. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3^{\sin x}$ $=$ $3^{\sin x} \cos x \cdot \ln 3$

68. $f:[e,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ $=$ $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$

69. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ae^{-b^2x^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $=$ $-2abxe^{-b^2x^2}$

70. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$ $=$ $e^{\cos x}\left(\cos x - \sin^2 x\right)$

71. $f:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2} \ln x$ $=$ $e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x} - 2x\ln x\right)$

72. $f:\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$ $=$ $-\dfrac{1}{1+x^2}$

73. $f:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x \cdot \ln x$ $=$ $\dfrac{\cos 2x}{x} - 2\sin 2x \ln x$

<u>Serii de funcții</u> (vezi [1] p. 69-72, respectiv [2] p. 39-65)

1. Calculați domeniul de convergență al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$
2. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$
3. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mathbf{ln}(n)} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$
4. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right), \quad x>0$
5. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$
6. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^n}{a^n+x^n}, \quad a>0, x>0$
7. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$
8. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, \mathbf{sin}\left(\frac{x}{3^n}\right)$
9. Să se studieze natura convergenței seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^x}{1+x+n} - \frac{(n-1)^x}{n+1}\right), \quad x \in [0,1]$
10. Să se studieze natura convergenței seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n+x} - \frac{(n-4)x}{1+(n-1)x}\right), \quad x \in [0,1]$

Serii de puteri (vezi [1] p. 78-80, respectiv [2] capitolul 4, p. 65-)

1. Studiați convergența seriei de puteri $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$
2. Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$
3. Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarei serii de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
4. Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarei serii de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
5. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=e^x$, precizându-se şi domeniul pe care este valabilă dezvoltarea.
6. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=\sin(x)$, precizându-se şi domeniul pe care este valabilă dezvoltarea.
7. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ **,** $\alpha\in\mathbb{R}$, precizându-se şi domeniul pe care este valabilă dezvoltarea.
8. Să se arate că functia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\boldsymbol{ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ este dezvoltabila în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare, stabilindu-se şi intervalul pe care este valabilă dezvoltarea.
9. Să se arate că functia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}$ este dezvoltabila în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare, stabilindu-se şi intervalul pe care este valabilă dezvoltarea.
10. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=2^x$.
11. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x)=e^{-x^2}$.

I. Sa se calculeze urmatoarele integrale definite

1. $\int_0^2 \max(x, x^2)dx = \frac{17}{6}$

2. $\int_0^1 \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$

4. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$

5. $\int_0^1 xe^x dx = 1$

6. $\int_{0+0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$

7. $\int_0^2 \min(x, x^2)\, dx = \frac{11}{6}$

8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx$, $n > 1$ $= \frac{n}{n-1}$

9. $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

10. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x} = \ln \frac{4}{3}$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

13. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ =ln2

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ = $\frac{\pi^2}{4} - 2$

15. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ =1

16. $\int_0^1 e^x dx$ = $e - 1$

17. $\int_0^{10} x dx$ =40

18. $\int_{a-2}^{a+2} x dx$ =4a

19. $\int_{\frac{a}{2}}^{a} x^2 dx$ = $\frac{7a^3}{24}$

20. $\int_a^{2a} \frac{b^2 x^2}{a^2} dx$= $\frac{7}{3} ab^2$

21. $\int_0^m \frac{x^2 + m^2}{m^2} dx$ =$\frac{4}{3} m$

22. $\int_1^{2,5} (2x+1)^2 dx$ =31,5

23. $\int_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a} dx$ = $\frac{a^2}{3}$

24. $\int_0^2 x^3 dx$ =4

25. $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right) dx$ =0

26. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$ = $\frac{3}{4}$

27. $\int_1^9 3\sqrt{x}\, dx$ =52

28. $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$ = $2 - \sqrt{2}$

29. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ $a, b > 0$, = $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$

30. $\int_0^3 e^x dx = e^3 - 1$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = 1$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

33. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

II. Sa se determine urmatoarele primitive:

1. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

2. $\int \sqrt[m]{x^n} dx = \frac{m x^{\frac{n}{m}+1}}{n+m} + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = C - \frac{1}{x}$

4. $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$

5. $\int a^x e^x dx = \frac{(ae)^x}{1+\ln a} + C$

6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$

7. $\int (1-2x)dx = x - x^2 + C$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = C - \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x$

9. $\int (\arcsin x + \arccos x) dx = \frac{\pi}{2} x + C$

10. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

11. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$

12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C$

13. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}} = \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$

14. $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

15. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$

16. $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx = C - \frac{2}{5}\cos^5 x$

17. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3} + C$

18. $\int e^x(\sin e^x)dx = -\cos e^x + C$

19. $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$

20. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1) + C$

21. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln^2 x + C$

22. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}dx$, $m \in \mathbb{N}$ $= \frac{\ln^{m+1} x}{m+1} + C$

23. $\int \cos x e^{\sin x}dx = e^{\sin x} + C$

III.

1. Utilizand integrala definita sa se calculeze limita $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ pentru $p \in \mathbb{N}^*$. $=1$

2. Utilizand integrala definita sa se calculeze limita $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

3. Utilizand integrala definita sa se calculeze limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$