Ion COLŢESCU Gheorghe DOGARU

ANALIZĂ MATEMATICĂ
CALCUL DIFERENŢIAL

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

EDITURA ACADEMIEI NAVALE
"MIRCEA CEL BĂTRÂN"
CONSTANŢA, 2012

Ion COLŢESCU Gheorghe DOGARU
ANALIZĂ MATEMATICĂ
CALCUL DIFERENŢIAL

ISBN 978-606-642-022-8

ION COLȚESCU **GHEORGHE DOGARU**

ANALIZĂ MATEMATICĂ
CALCUL DIFERENȚIAL

Colecția „Matematică”

ION COLȚESCU GHEORGHE DOGARU

ANALIZĂ MATEMATICĂ
CALCUL DIFERENȚIAL

Editura Academiei Navale "Mircea cel Bătrân"
Constanța, 2012

Referenți științifici: **Conf. univ. dr. Ioan POPOVICIU**
Conf. univ. dr. Alexandru SOTIR

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
COLȚESCU, ION
Analiză matematică : Calcul diferențial / Colțescu Ion, Dogaru Gheorghe.- Constanța : Editura Academiei Navale ”Mircea cel Bătrân”, 2012
Bibliogr.
ISBN 978-606-642-022-8

I. Dogaru, Gheorghe

517

Corector: Ozana CHAKARIAN
Editare computerizată: Florentina PETRIȘ
Copertă: Gabriela SECU

Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”
Str. Fulgerului nr. 1, 900218, Constanța
Tel. 0241/626200/1219, fax 0241/643096
Email: editura@anmb.ro

ISBN 978-606-642-022-8

CUPRINS

PREFAȚĂ

În ultimele decenii, majoritatea disciplinelor de matematică şi-au schimbat mult aspectul fie printr-o precizare a conținutului, fie adoptând o formă nouă de expunere care să corespundă procesului general de modernizare a matematicii. Evident că analiza matematică nu poate rămâne în afara acestei evoluții. Dacă nu poate fi vorba de o schimbare de fond a conținutului analizei matematice, atunci credem că forma de expunere trebuie să sufere unele modificări.

În ansamblul disciplinelor care fac parte din planul de învățământ al unei facultăți tehnice, analiza matematică trebuie să se coreleze cu alte discipline ca algebra, matematici speciale, analiză numerică şi altele.

În cartea de față pe care autorii o prezintă, printre altele, o importanță deosebită s-a acordat modernizării ca formă a analizei matematice. O modernizare exagerată şi forțată în detrimentul conținutului clasic al analizei matematice ar constitui un eşec. Din această cauză, una din direcțiile importante a fost aceea de a găsi măsura potrivită de expunere care să echilibreze într-un tot forma şi conținutul, intuiția rămânând în unele locuri o metodă de bază pentru înțelegerea anumitor noțiuni.

Cartea "Analiză matematică – Calcul diferențial" constituie o ediție revizuită şi adăugită a cărții „**Calcul diferențial. Teorie. Exemple. Aplicații**" a aceloraşi autori. În volumul de față sunt studiate unele noțiuni fundamentale, cum ar fi cele de limită, continuitate, diferențiabilitate, schimbări de variabilă şi de funcție, folosindu-se conceptul de spațiu topologic, spațiu metric şi spațiu vectorial normat.

Am ales acest cadru întrucât permite, pe de o parte, o tratare unitară a unor probleme fundamentale, fiind suficient de larg pentru a include principalele probleme ce intervin frecvent în diferite domenii teoretice şi practice, iar pe de altă parte, permite o deschidere spre abordarea lor într-un cadru mai general.

Având în vedere că problemele care fac obiectul analizei matematice nu sunt uşor accesibile, am urmărit introducerea motivată a noțiunilor şi problemelor, o tratare care să se sprijine pe exemple cât mai sugestive şi am încheiat fiecare capitol cu un paragraf de **exerciții rezolvate** în care sunt prezentate un număr mare de exerciții de dificultăți diferite, rezolvate complet.

Cartea cuprinde nouă capitole, ultimul propunând spre rezolvare un număr foarte mare de exerciții corespunzătoare fiecărui capitol tratat, din dorința de a da posibilitatea cititorului să se autoverifice în ce grad a înțeles noțiunile prezentate.

Sperăm ca lucrarea să fie utilă atât studenților ce studiază în programa universitară analiza matematică, profesorilor de licee care-şi pregătesc examenele de definitivat sau grad, cât şi tuturor celor care doresc să învețe şi să aprofundeze matematica modernă a zilelor noastre, facilitându-le înțelegerea mai precisă şi mai aprofundată a unor noțiuni şi modele matematice de mare finețe.

I.C. Constanța 2012
G.D.

CAPITOLUL I: RELAȚII. MULȚIMI NUMĂRABILE ȘI NENUMĂRABILE

1. RELAȚII. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI GENERALE

Se consideră cunoscute noțiunile de: mulțime, clasă, operații cu mulțimi şi logică matematică.

DEFINIȚIA 1.1.1 Fie A şi B două mulțimi oarecare. Se numeşte **relație de corespondență** între mulțimile A şi B tripletul notat $\Re = (G; A; B)$, unde:
$G = A \times B$ este numit graficul (graful) relației $\Re$, A este domeniul de definiție sau sursa relației $\Re$, iar B este codomeniul sau adresa relației $\Re$.

OBSERVAȚIA 1.1.1
a) Dacă $B \equiv A$, atunci relația $\Re$ este notată cu (G, A) şi se numeşte relație în A, iar graficul său este mulțimea $G \subseteq A^2$;
b) $(x, y) \in G$ dacă şi numai dacă $x \Re y$ (x este în relația $\Re$ cu y);
c) $(x, y) \notin G$ dacă şi numai dacă $x \overline{\Re} y$; (x nu este în relația $\Re$ cu y);
d) Fie $P(A \times B)$ numărul părților mulțimii $A \times B$. Mulțimea tuturor relațiilor $\Re = (G; A; B)$ este în **corespondență biunivocă** cu mulțimea $P(A \times B)$;
e) Dacă $card\, A = n$, atunci $card\, P(A) = 2^n$. Într-adevăr C_n^k prin definiție reprezintă mulțimea tuturor submulțimilor cu k elemente formate dintr-o mulțime cu n elemente şi $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$.

Exemple.
a) $A = \{1, 2, 3\}$,
$P(A) = \{1, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\{2\} \in P(A)$, $\{2\} \subset A$, $2 \in A$;
b) Dacă M este o mulțime şi $P(M)$ mulțimea părților lui M, atunci mulțimea $G = \{(a, A) \in A \times P(M) \mid a \in A\}$ este graficul relației de apartenență.

DEFINIȚIA 1.1.2 Fie A și B două mulțimi oarecare și $\Re = (G;A;B)$ o relație între cele două mulțimi. Se numește **relație inversă** (reciprocă sau simetrică) a relației $\Re$ relația $\Re^{-1} = (G^{-1};B;A)$ definită astfel: $(x,y) \in G^{-1}$ dacă și numai dacă $(x,y) \in G$ sau $y\Re^{-1}x$ dacă și numai dacă $x\Re y$.

DEFINIȚIA 1.1.3 Fie A, B, C trei mulțimi oarecare și $\Re_1 = (G_1;A;B)$ și $\Re_2 = (G_2;B;C)$ două relații oarecare. Relația $\Re = \Re_2 \circ \Re_1$, dată de tripletul (G,A,C), în cazul în care există, se numește **compusa relațiilor** $\Re_1$ și $\Re_2$ și este definită astfel: $x\Re z$ dacă și numai dacă există $y \in B$ astfel încât $x\Re_1 y$ și $y\Re_2 z$.

PROPOZIȚIA 1.1.1 Dacă $\Re_1 = (G_1;A;B)$, $\Re_2 = (G_2;B;C)$ și există $\Re = \Re_2 \circ \Re_1$, atunci există $\Re^{-1}$ și are loc relația:

$$\Re^{-1} = (\Re_2 \circ \Re_1)^{-1} = \Re_1^{-1} \circ \Re_2^{-1}$$

PROPOZIȚIA 1.1.2 Compunerea relațiilor este o operație asociativă. Adică, dacă $\Re_1$, $\Re_2$, $\Re_3$ sunt relații care se pot compune în ordinea $\Re_3 \circ \Re_2 \circ \Re_1$ atunci:

$$(\Re_3 \circ \Re_2) \circ \Re_1 = \Re_3 \circ (\Re_2 \circ \Re_1) = \Re_3 \circ \Re_2 \circ \Re_1 .$$

OBSERVAȚIA 1.1.2 Relația este generalizarea noțiunii de funcție. Adică, fie $\Re = (G;A;B)$ o relație care verifică proprietatea: $x\Re y$ și $x\Re z$. Rezultă $y = z$, atunci relația $\Re$ este funcția $f : A \to B$.

2. TIPURI DE RELAȚII

Vom defini câteva tipuri de relații care sunt foarte întâlnite în practică.

DEFINIȚIA 1.2.1 Dacă $\Re = (G,A)$ îndeplinește următoarele proprietăți:

1) $x\Re y$ implică $y\Re x$, pentru orice $x, y \in A$ (**simetria**),
2) $x\Re x$, pentru orice $x \in A$ (**reflexivitatea**),
3) $x\Re y$ și $y\Re z$ implică $x\Re z$, oricare ar fi $x, y, z \in A$ (**tranzitivitatea**),

atunci $\Re$ se numește **relație de echivalență** în mulțimea A.

DEFINIȚIA 1.2.2 Dacă relația $\Re = (G, A)$ verifică proprietatea

$$x \Re y \text{ şi } y \Re x \text{, implică } x = y,$$

atunci relația $\Re$ este o **relație antisimetrică**.

DEFINIȚIA 1.2.3 O relație $\Re$ definită în mulțimea A care este reflexivă şi antisimetrică se numeşte **relație de preordine**.
Orice relație de preordine care este şi tranzitivă se numeşte **relație de ordine**.

Exemple.
a) Fie A şi B două mulțimi oarecare. Relația " $:$ ", numită **relația de echipotență,** definită astfel:

$$A : B \text{ dacă şi numai dacă există } f : A \to B,\ f \text{ bijectivă},$$

este o relație de echivalență.
Soluție. Verificăm cele trei proprietăți de mai sus.
1) $A : A$. Într-adevăr dacă se consideră funcția identică:

$$1_A : A \to A,\ 1_A(x) = x.$$

Este evident că această funcție este o funcție bijectivă.
Conform cu definiția relației " $:$ " se obține: $A : A$.
2) $A : B$ implică $B : A$. Într-adevăr din $A : B$ rezultă că există $f : A \to B$ bijectivă. Dar se ştie că orice funcție bijectivă este şi inversabilă şi inversa sa este bijectivă. Deci, există $f^{-1} : B \to A$ bijectivă din care rezultă $B : A$.
3) Trebuie arătat că $A : B$ şi $B : C$ implică $A : C$. Într-adevăr, din faptul că $A : B$ şi $B : C$ rezultă că există $f : A \to B$ bijectivă şi $g : B \to C$ bijectivă. Deci, există $h : A \to C$, $h = g \circ f$ bijectivă. Atunci $A : C$.
Verificând proprietățile din definiția 1.2.1, s-a demonstrat că relația de echipotență este o relație echivalentă.

b) În mulțimea numerelor reale se ştie că există relația "$\le$" definită astfel: $x \le y$ dacă x are imaginea pe axa reală la stânga imaginii lui y. Relația "$\le$" este o relație de ordine pe mulțimea numerelor reale:
1) $x \le x$ (reflexivitatea);
2) $x \le y$ şi $y \le x$ implică $x = y$ (antisimetria);
3) $x \le y$ şi $y \le z$ implică $x \le z$ (tranzitivitatea).
Orice mulțime înzestrată cu o relație de ordine de numeşte **mulțime ordonată**.

DEFINIȚIA 1.2.4 Fie $\Re = (G, A)$ o relație de echivalență definită în mulțimea A și $x \in A$, un element oarecare al lui A, atunci mulțimea notată astfel $\hat{x}$ sau C_x și definită astfel $\hat{x} = C_x = \{y \in A / y\Re x\}$ poartă denumirea de **clasă de echivalență** a elementului x, definită de relația de echivalență $\Re$.

DEFINIȚIA 1.2.5 Mulțimea tuturor claselor de echivalență a mulțimii A definită de relația de echivalență $\Re$ se numește **mulțimea cât** a mulțimii A, determinată de relația de echivalență $\Re$ și se notează astfel: $A/\Re$ (A factorizat la $\Re$).

PROPOZIȚIA 1.2.1 Fie $\Re = (G, A)$ o relație de echivalență a mulțimii A.
Atunci au loc relațiile:
a) $x \in C_2 = \hat{x}$, pentru orice $x \in A$;
b) $\hat{x} = \hat{y}$ dacă și numai dacă $x\Re y$.

Demonstrație
a) Fie $x \in A$ un element oarecare, deoarece $\Re = (G, A)$ este o relație de echivalență, datorită reflexivității acestei relații se poate scrie că $x\Re x$. Deci $x \in \hat{x}$.
b) "$\Rightarrow$" Se presupune că $\hat{x} = \hat{y}$. Rezultă $x, y \in \hat{y}$. Deci, $x\Re y$ sau $y\Re x$.
"$\Leftarrow$" Să presupunem că $x\Re y$ și trebuie să demonstrăm că $\hat{x} \equiv \hat{y}$, dar pentru aceasta trebuie arătat că: $\hat{y} \subseteq \hat{x}$ și $\hat{x} \subseteq \hat{y}$.
Fie $z \in \hat{x}$. Trebuie arătat că $z \in \hat{y}$. Într-adevăr din faptul că $z \in \hat{x}$, rezultă $z\Re x$. Dar, din ipoteză se știe că $x\Re y$. Cum relația $\Re$ este o relație de echivalență ea este și tranzitivă. Deci rezultă $z\Re y$. Așadar, rezultă $\hat{x} \subseteq \hat{y}$.
Cealaltă incluziune se demonstrează în mod asemănător.

OBSERVAȚIA 1.2.1
a) Din Propoziția 1.2.1 rezultă că două clase de echivalență ori sunt disjuncte ori sunt egale și este evident că $A = \bigcup_{x \in A} \hat{x}$.
b) Orice relație de echivalență pe A determină o partiție a acestei mulțimi în clase de echivalență modulo $\Re$. Mulțimea claselor de echivalență poartă denumirea de **mulțime factor**.
c) Exemplu: un parlamentar este o clasă de echivalență, iar parlamentul este mulțime factor.

3. NUMERE CARDINALE

Într-unul din exemplele anterioare s-a definit noțiunea de “echipotență” şi s-a arătat că această relație este o relație de echivalență. Cu ajutorul acestei relații se definesc numerele cardinale şi se clasifică mulțimile după numărul elementelor lor.

DEFINIȚIA 1.3.1 Fie A o mulțime oarecare. Dacă $A \sim N$, se spune că A este o **mulțime numărabilă**. (Orice mulțime echipotență cu mulțimea numerelor naturale este o mulțime numărabilă).

Exemplu

1. $\mathbb{N}_{2p}, \mathbb{N}_{2p+1}$ - sunt mulțimi numărabile, unde $\mathbb{N}_{2n}$ este mulțimea numerelor naturale pare şi $\mathbb{N}_{2n+1}$ este mulțimea numerelor naturale impare;
2. $\mathbb{Q}$ mulțime numărabilă.

Soluție

1. După cum se ştie, pentru a arăta că mulțimea $\mathbb{N}_{2p}$ este numărabilă, trebuie arătat că este echipotentă cu $\mathbb{N}$. Adică trebuie construită o funcție cu domeniul $\mathbb{N}$ şi codomeniul $\mathbb{N}_{2p}$, funcție care să fie bijectivă. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2p}$, $f(n) = 2n$. Este evident că această funcție este atât injectivă, cât şi bijectivă.

În mod asemănător se arată că $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_{2p+1}$, construind funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2p+1}$, $f(n) = 2n+1$.

2. Acest punct se lasă ca exercițiu.

Fie $\boldsymbol{T}$ mulțimea totală şi $\mathcal{P}(\boldsymbol{T})$ mulțimea părților acestei mulțimi. Fie $A \in \mathcal{P}(\boldsymbol{T})$ o mulțime oarecare.

DEFINIȚIA 1.3.2 Mulțimea $card\, A = \{B \in \mathcal{P}(\boldsymbol{T}) / B \sim A\}$ se numeşte **cardinalul mulțimii** A sau **clasa de echivalență** definită de A în mulțimea $\mathcal{P}(\boldsymbol{T})$.

Dacă:

a) A are un element, rezultă $card\, A = 1$;

b) A are două elemente, $card\, A = 2$;

c) $A \sim \mathbb{N}$, atunci $card\, A = \aleph_0$ se citeşte “alef zero” şi reprezintă cel mai mic infinit.

d) $A \sim \mathbb{R}$, atunci $card\, A = \aleph_C$ se citeşte “puterea continuului” şi este un infinit mai mare decât $\aleph_0$.

DEFINIȚIA 1.3.3 O mulțime infinită care nu este echipotentă cu mulțimea numerelor naturale se numeşte **mulțime nenumărabilă**.

O categorie foarte importantă de mulțimi nenumărabile sunt mulțimile din clasa de echivalență puterea continuului, adică cele echipotente cu mulțimea numerelor reale.
Cu numerele cardinale se pot defini operații de adunare, înmulțire şi ridicare la putere (când numerele cardinale sunt finite, aceste operații se cunosc). Definiția care urmează pentru aceste operații poate fi folosită şi în cazul în care numerele cardinale sunt infinite.

DEFINIȚIA 1.3.4 Fie $n = \text{card}\, A$, $m = \text{card}\, B$, unde A şi B sunt două mulțimi oarecare din $\mathcal{P}\ (\boldsymbol{T})$.

1) $n + m = \text{card}\ (A \cup B)$ cu $A \cap B = \emptyset$;

2) $n \times m = \text{card}\ (A \times B)$;

3) $n^m = \text{card}\, A^B$, unde $A^B = \{ f \,/\, f : B \to A \}$ este mulțimea tuturor funcțiilor ce pot fi definite pe B cu valori în A.

Exemplu. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $A = \mathbb{N}_{2p}$, $B = \mathbb{N}_{2p+1}$, $A \cup B = \mathbb{N}_{2p} \cup \mathbb{N}_{2p+1} = \mathbb{N}$.

Mulțimea tuturor numerelor cardinale infinite este o mulțime ordonată care are un prim element şi acesta este $\aleph_0$, dar care nu are un ultim element. Deci, cu alte cuvinte, mulțimea numerelor cardinale infinite nu este mărginită superior (vezi exercițiul 5b).

PROPOZIȚIA 1.3.4 (TEOREMA LUI CANTOR): Mulțimea tuturor numerelor reale cuprinse în intervalul $[0,1]$ este o mulțime nenumărabilă.

Demonstrație. Se presupune prin absurd că mulțimea numerelor reale din intervalul $[0,1]$ este numărabilă. Atunci, aceste numere pot fi puse în corespondență biunivocă cu termenii unui şir după cum urmează:

$b_1 = 0,\ a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots a_n^1 \ldots$, $\quad b_2 = 0,\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_n^2 \ldots$, $\quad \ddots$,

$b_n = 0,\ a_1^n a_2^n a_3^n \ldots a_n^n \ldots$, $\ddots$,

unde: $a_i^j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

Se arată prin construcție că mai există încă un număr subunitar care nu face parte din şirul anterior. Într-adevăr, dacă se consideră numerele: $b = 0,\ a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$, unde: $a_1 \neq 0; a_1 \neq 9; a_1 \neq a_1^1$, $a_2 \neq 0; a_2 \neq 9; a_2 \neq a_2^2$, $\ldots$, $a_n \neq 0; a_n \neq 9; a_n \neq a_n^n$, $\ldots$.

Se observă că:

$b \neq b_1$ cel puțin prin prima cifră, $b \neq b_2$ cel puțin prin a doua cifră, $\ldots$, $b \neq b_n$ cel puțin prin a n-a cifră, $\ldots$.

Deci, acest număr b este subunitar, dar nu face parte din mulțimea $\{b_n\}_{n\geq 1}$, ceea ce arată că presupunerea că numerele reale din intervalul $[0,1]$ este o mulțime numărabilă este falsă.

4. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 1.4.1 Fie relațiile binare $\Re_1, \Re_2, \Re_3$ care au următoarele grafice:

$$G_{\Re_1} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\}, \qquad G_{\Re_2} = \{(1,2),(1,3),(2,2)\},$$

$$G_{\Re_3} = \{(1,2),(2,3)\}.$$

a) Să se determine domeniul, codomeniul şi simetricile acestor relații;

b) Să se studieze reflexivitatea, simetria, antisimetria şi tranzitivitatea acestor relații.

Rezolvare.

a) Fie A şi B două mulțimi. Dacă $\forall x \in A$ şi $\forall y \in B$, $x \Re y$ atunci $\mathrm{A} = \mathrm{Dom}\Re$ (domeniul lui $\Re$), $\mathrm{B} = \mathrm{Ran}\Re$ (codomeniul lui $\Re$). Ținând cont de acestea se observă că:

$$G_{\Re_1^{-1}} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3)\},\ \mathrm{G}_{\Re_2^{-1}} = \{(2,1),(3,1),(2,2)\},$$

$$\mathrm{G}_{\Re_3^{-1}} = \{(3,1),(3,2)\};$$

$$\mathrm{Dom}\Re_1 = \{1,2,3\},\ \mathrm{Dom}\Re_2 = \{1,2\},\ \mathrm{Dom}\Re_3 = \{1,2\};$$

$$\mathrm{Ran}\Re_1 = \{1,2\};\ \mathrm{Ran}\Re_2 = \{2,3\};\ \mathrm{Ran}\Re_3 = \{2,3\}.$$

b) • $\Re$ este simetrică dacă $G_{\Re^{-1}} \subseteq G_{\Re}$;

• $\Re$ este reflexivă dacă $G_{i_A} \subset G_R$, unde $i_A(x) = x, \forall x \in A$ (funcția identitate pe A)

• $\Re$ este antisimetrică dacă $G_R \cap G_{R^{-1}} \subseteq G_{i_A}$;

• $\Re$ este tranzitivă dacă $G_{R \circ R} \subseteq G_R$.

Este evident că $G_{\mathfrak{R}_1^{-1}} \not\subset G_{\mathfrak{R}_1}$; $G_{\mathfrak{R}_2^{-1}} \not\subset G_{\mathfrak{R}_2}$ şi $G_{\mathfrak{R}_3^{-1}} \not\subset G_{\mathfrak{R}_3}$. Deci, relațiile $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ nu sunt simetrice.

S-a arătat că:

$$\mathrm{Dom}\mathfrak{R}_1 = \{1,2,3\} = A_1,\ G_{i_{A_1}} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Cum $G_{\mathfrak{R}_1} \cap G_{\mathfrak{R}_1^{-1}} = \{(1,1),(2,2)\} \subset G_{i_{A_1}}$, rezultă că $\mathfrak{R}_1$ este antisimetrică.

Analog se arată că $\mathfrak{R}_2$ şi $\mathfrak{R}_3$ sunt antisimetrice.

Cum $G_{i_{A_1}} = \{(1,1),(2,2)(3,3)\} \not\subset \{(1,1),(1,2)(2,2),(3,2)\} = G_{\mathfrak{R}_1}$, rezultă că $\mathfrak{R}_1$ nu este reflexivă. Analog se arată că $\mathfrak{R}_2$ şi $\mathfrak{R}_3$ nu sunt reflexive.

Cum $G_{\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_1} = \{(1,1),(1,2)(2,2),(3,2)\} = G_{\mathfrak{R}_1}$, atunci $\mathfrak{R}_1$ este tranzitivă. Se observă că $(1,2) \in G_{\mathfrak{R}_3}$, $(2,3) \in G_{\mathfrak{R}_3}$, $(1,3) \notin G_{\mathfrak{R}_3}$. Deci $G_{\mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_3} \not\subset G_{\mathfrak{R}_3}$. Aşadar, $\mathfrak{R}_3$ nu este tranzitivă.

EXERCIȚIUL 1.4.2 Fie relația $\mathfrak{R}$ care are următorul grafic:

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(m,n) \mid m,n \in \text{¢},\ m \mid n\}.$$

Să se arate că $\mathfrak{R}$ este o relație de preordine pe ¢.

Rezolvare. Pentru ca relația $\mathfrak{R}$ să fie relație de preordine trebuie ca $\mathfrak{R}$ să fie reflexivă şi tranzitivă.

Este evident că $G_{i_{¢}} = \{(m,n) \mid m \in \text{¢}\}$ şi, de asemenea, este evident că $G_{i_{¢}} \subseteq G_R$. Deci $\mathfrak{R}$ este tranzitivă. Cum $\mathfrak{R}$ este reflexivă şi tranzitivă, rezultă că $\mathfrak{R}$ este o relație de preordine.

EXERCIȚIUL 1.4.3 Fie $\mathfrak{R}$ o relație al cărei grafic este:

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(m,n) \mid m \in \text{¢}, n \in \text{¢};\ 3 \mid m-n\}.$$

Să se arate că:

a) $\mathfrak{R}$ este o relație de echivalență pe ¢.

b) Să se scrie clasa de echivalență $\hat{x},\ x \in \text{¢}$

c) Să se determine mulțimea factor $\text{¢}/\mathfrak{R}$.

Rezolvare.

a) Trebuie arătat că $\mathfrak{R}$ este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Cum $3 \mid x-x,\ (\forall) x \in \text{¢}$, se obține că $G_{i_{¢}} \subset G_{\mathfrak{R}}$. De aici rezultă că $\mathfrak{R}$ este reflexivă. Cum $3 \mid m-n \Rightarrow 3 \mid n-m$, se obține că $G_{\mathfrak{R}^{-1}} = G_{\mathfrak{R}}$. De aici rezultă că $\mathfrak{R}$ este simetrică.

Deoarece $3 \mid m-n$ şi $3 \mid n-p$, implică $3 \mid m-p$. Se obține că $G_{\Re \circ \Re} \subseteq G_{\Re}$. De aici rezultă că $\Re$ este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Deci, $\Re$ este relație de echivalență.

b) $\hat{x} = \left\{ y \in \text{¢} \mid 3 \mid y - z,\ x \in \text{¢} \right\} = \left\{ 3k + x \mid k \in \text{¢},\ x \in \text{¢} \right\}$

c) Dacă $x > 3$ atunci $x = 3k + r$, $r \in \{0,1,2\}$. Atunci $x - r = 3k$. Rezultă

$$\hat{r} = \left\{ x \in \text{¢} \mid x - r = 3k \right\} = \hat{x}.$$

Deci $\hat{x} = \hat{r}$. Dar $\hat{0} = \{3k\}_{k \in \text{¢}}$, $\hat{1} = \{3k+1\}_{k \in \text{¢}}$, $\hat{2} = \{3k+2\}_{k \in \text{¢}}$. De aici rezultă că mulțimea factor $\text{¢}/\Re$ este $\text{¢}/\Re = \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2} \right\}$.

Observație. Relația $\Re$ al cărei grafic este dat în acest exercițiu se poate generaliza la relația $\Re^*$ al cărei grafic este:
$G_{\Re^*} = \left\{ (m,n) \mid p \mid m-n,\ m,n \in \text{¢},\ p \in \text{¢}^* \right\}$.
Se arată în mod analog că această relație este o relație de echivalență şi $\text{¢}/\Re^* = \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, p \dot{-} 1 \right\}$.

Această relație $\Re^*$ este relația de congruență modulo p.

EXERCIȚIUL 1.4.4 Fie $A \subset X$ şi $j_A : X \to S = \{0,1\}$ astfel încât:

$$j_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Să se arate că pentru $A, B \subset X$ au loc proprietățile:

a) $A = B \Leftrightarrow j_A = j_B$;

b) $j_{A \cap B} = j_A \cdot j_B$;

c) $A \cap B = f \Leftrightarrow j_{A \cup B} = j_A \cdot j_B$;

d) $j_{CA} = 1 - j_A$, unde CA este complementara mulțimii A, adică $CA = X \setminus A$;

e) $j_{A \setminus B} = j_A - j_A \cdot j_B$;

f) $j_{A \cup B} = j_A + j_B - j_A \cdot j_B$.

Rezolvare.

a) Din definiția funcției caracteristice este evident că $A = B \Leftrightarrow j_A = j_B$.

b) Din $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ şi $x \in B \Rightarrow j_{A \cap B}(x) = 1 \Rightarrow j_A(x) = 1$ şi $j_B(x) = 1 \Rightarrow$ $j_{A \cap B}(x) = j_A(x) \cdot j_B(x)$.

Dacă $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A$ şi $x \notin B$ sau $x \notin A$ şi $x \in B$ sau $x \notin A$ şi $x \notin B$.
Deci $x \notin A \cap B \Rightarrow j_{A \cap B}(x) = 0$ şi $j_A(x) \cdot j_B(x) = 0$.

Deci $x \notin A \cap B \Rightarrow j_{A \cap B}(x) = j_A(x) \cdot j_B(x)$.

c) Se raționează ca la punctul a).

d) $A \cup CA = X$; $A \cap CA = f$. Ținând cont de c), se obține $j_A + j_{CA} = 1 \Rightarrow j_{CA} = 1 - j_A$.

e) Deoarece $A - B = A \cap CB \Rightarrow j_{A \setminus B} = j_{A \cap CB} = j_A \cdot j_B = j_A(1 - j_B) = j_A - j_A \cdot j_B$.

f) Deoarece $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, se obține:

$$j_{A \cup B} = j_{A \setminus B} + j_{B \setminus A} + j_{A \cap B} = j_A - j_A \cdot j_B + j_B - j_A \cdot j_B + j_A \cdot j_B = j_A + j_B - j_A \cdot j_B.$$

EXERCIȚIUL 1.4.5 Fie M o mulțime oarecare. Să se arate că:

$$card P(M) = 2^{card\, M}$$

Rezolvare. Fie mulțimea $S = \{0,1\}$ şi S^M mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în A.
Se consideră funcția $f : P(M) \to S^M$

definită astfel $f(A) = j_A, (\forall) A \subset M$.

Este evident că proprietatea $A = B \Leftrightarrow j_A = j_B$ arată că f este injectivă. Surjectivitatea este evidentă. Deci f este bijectivă. Atunci:

$$card P(M) = card\, S^M = 2^{card\, M}.$$

Observație. Din rezolvarea anterioară rezultă că egalitatea $card P(M) = 2^{card\, M}$ este adevărată atât pentru $card\, M$ finit, cât şi infinit. În cazul în care $card\, M$ este finit, adică $card\, M = n$, atunci relația $card P(M) = 2^n$ se poate demonstra şi după cum urmează. Se ştie că $P(M)$ este formată din toate submulțimile mulțimii M. Conform cu definiția combinărilor, numărul submulțimilor cu k elemente, $0 \le k \le n$, care se pot forma dintr-o mulțime cu n elemente este C_n^k. Atunci,

$$card P(M) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

EXERCIȚIUL 1.4.6 Orice reuniune finită sau numărabilă de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Rezolvare. Exercițiul se mai poate scrie şi astfel:

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 = \aleph_0$$

şi

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0 .$$

Prima egalitate se arată inductiv.

Se ştie că: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{2n} \cup \mathbb{N}_{2n+1}$ şi $\mathbb{N}_{2n} \cap \mathbb{N}_{2n+1} = \emptyset$. De aici rezultă că:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 .$$

Se presupune adevărat că $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n-1\ ori} = \aleph_0$ şi se demonstrează că:

$$\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n\ ori} = \aleph_0 .$$

Într-adevăr $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n\ ori} = \left(\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n-1\ ori} \right) + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 .$

Atunci, conform cu principiul inducției $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n\ ori} = \aleph_0$ pentru orice n finit.

Pentru a demonstra a doua egalitate se procedează astfel. Fie $A_k = \left\{ a_0^k, a_1^k, \ldots, a_k^k, \ldots \right\}$, $k = 1, 2, \ldots$ o familie numărabilă disjunctă de mulțimi numărabile. Se consideră funcția $f : \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel $f\left(a_i^j\right) = (i, j)$. Este evident că această funcție este bijectivă. Dacă se arată că mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă problema este rezolvată.

Dacă se consideră funcția $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $g(n) = (n, 0)$, este evident că această funcție este injectivă. Deci,

$$card\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \geq \aleph_0 . \qquad (1)$$

Fie $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

Se arată că această funcție este injectivă.

Fie $(m, n) \neq (m', n') \Rightarrow m + n \neq m' + n'$. Fără a micşora generalitatea, se consideră $m' + n' = m + n + 1$, $h(m', n') > \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n = h(m, n)$.

Deci, $(m, n) \neq (m', n') \Rightarrow h(m, n) \neq h(m', n')$. Astfel rezultă că funcția h este injectivă. Deci,

$$card\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\le\aleph_0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ este numărabilă.

EXERCIȚIUL 1.4.7 Să se arate că orice două intervale de numere reale cu capete finite sunt echipotente.

Rezolvare. Se arată că $[0,1]\sim[a,b]$. Într-adevăr, funcția $f:[0,1]\to[a,b]$ definită prin $f(x)=a+x(b-a)$ este bijectivă. Deci,

$$[0,1]\sim[a,b]. \tag{1}$$

Analog se arată că:

$$[0,1]\sim[c,d]. \tag{2}$$

Cum relația " $\sim$ " este tranzitivă din (1) şi (2) se obține că $[a,b]\sim[c,d]$.

EXERCIȚIUL 1.4.8 Orice interval este de puterea continuului.

Rezolvare. Pentru a rezolva această problemă trebuie arătat că $(a,b)\sim\mathbb{R}$ ($card\ \mathbb{R}=\aleph_c$, $\aleph_c$ este numărul cardinal infinit numit puterea continuului).

Se consideră funcția $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=tgx$. Această funcție este evident bijectivă. Deci $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\sim\mathbb{R}$. Cum $(a,b)\sim\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (conform cu exercițiul 7) datorită tranzitivității relației de echipotență $(a,b)\sim\mathbb{R}$. Se mai poate spune că $(a,b)\in\aleph_c$.

EXERCIȚIUL 1.4.9 Să se arate că mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Rezolvare. Fie $A_k=\left\{\frac{m}{k}\middle| n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,...\right\}$, $k\in\mathbb{N}$.

Este evident că $\mathbb{Q}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. Cum $A_k\in\aleph_0$, conform cu Exercițiul 1.4.6. $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\aleph_0$. Deci, $\mathbb{Q}$ este o mulțime numărabilă.

EXERCIȚIUL 1.4.10 Să se arate că mulțimea numerelor prime P este o mulțime numărabilă.

Rezolvare. Pentru a arăta că P este numărabilă, trebuie arătat că P nu este finită ($P \subset \mathbb{N}$ evident). Se presupune $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Fie $q = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Acest q este evident prim şi este mai mare decât toate numerele prime $p_1, p_2, ..., p_n$. Deci, $q \in P$. Aşadar, mulțimea numerelor prime nu poate fi finită. Atunci P este numărabilă.

EXERCIȚIUL 1.4.11 Să se arate că produsul cartezian al unui număr finit de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Rezolvare. Ținând cont de operațiile cu numere cardinale, exercițiul se reduce la egalitatea $\aleph_0^n = \aleph_0$, n finit. Se demonstrează inductiv.
În rezolvarea Exercițiului 1.4.6 s-a arătat că $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, adică $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ este numărabilă. Se presupune adevărat că $\aleph_0^{n-1} = \aleph_0$ şi se demonstrează că $\aleph_0^n = \aleph_0$.
Într-adevăr $\aleph_0^n = \aleph_0^{n-1} \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Atunci conform inducției $\aleph_0^n = \aleph_0$, pentru orice n finit.

EXERCIȚIUL 1.4.12 Mulțimea şirurilor de numere naturale este o mulțime de puterea continuului.

Rezolvare. Deoarece mulțimea şirurilor de numere naturale este $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, atunci exercițiul se reduce la egalitatea $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_c$. Deoarece mulțimea $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ conține mulțimea funcțiilor constante, atunci evident că $\aleph_0^{\aleph_0} \geq \aleph_C$.
Se presupune că $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ este o mulțime numărabilă, adică $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Se consideră funcția $g = 1 + f_n$.
Deoarece $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ şi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ numărabilă, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $g = f_n$. Atunci $f_n(n) = 1 + f_n(n) \Rightarrow 1 = 0$, absurd. Deci, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nu este numărabilă. Aşadar, $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_C$. Deci $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_c$.

CAPITOLUL II: SPAȚIU TOPOLOGIC. SPAȚIU METRIC. SPAȚIU BANACH

1. SPAȚIU TOPOLOGIC

În matematică există două categorii de structuri: structuri algebrice şi structuri topologice.
Cu ajutorul structurilor algebrice, după cum se ştie, plecând de la elementele cunoscute ale unei mulțimi, se generează alte elemente ale acesteia.
În cadrul structurilor topologice poate fi definită noțiunea de vecinătate, noțiune cu ajutorul căreia poate fi definită noțiunea de limită care, după cum se ştie, este o noțiune fundamentală a analizei matematice.

DEFINIȚIA 2.1.1 Fie E o mulțime oarecare şi $P(E)$ mulțimea părților acestei mulțimi. Dacă $t \subseteq P(E)$, satisface proprietățile:

i) $f \in t$, $E \in t$;

ii) Fie $\Im$ o mulțime de indici şi $A_i \in t$, oricare ar fi $i \in \Im$ rezultă $\bigcup_{i\in\Im} A_i \in t$ (orice reuniune de mulțimi din t aparține tot lui t).

iii) Fie $A_i \in t$, $i = \overline{1,n}$ rezultă $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in t$ (orice intersecție finită de mulțimi din t este tot o mulțime din t), atunci t se numeşte **topologie a mulțimii** E. Cupletul (E,t) se numeşte **spațiu topologic**.

Exemplu.

a) $t = \{f, E\}$ este o topologie a mulțimii E (şi se numeşte **topologia banală**, t_b **).**

b) $t = P(E)$ este o topologie a mulțimii E (şi se numeşte **topologia discretă**, t_d **).**

Soluție. Pentru a arăta că aceste mulțimi sunt topologii trebuie verificate cele trei axiome din Definiția 2.1.1.

a) i) $f \in t$, $E \in t$ în mod evident;

ii) + iii) Mulțimea maximală de indici este $\Im = \{1, 2\}$ pentru că t are două elemente:

$$f \cup E = E \in t \ , \ f \cap E = f \in t \ .$$

b) i) $f \in t$ şi $E \in t$ în mod evident ținând cont de forma lui $P(E)$;

ii) Fie $A_i \in \mathcal{P}(E)$, pentru orice $i \in \Im$ avem $\bigcup\limits_{i \in \Im} A_i \in \mathcal{P}(E) = \tau$;

iii) Fie $A_i \in \mathcal{P}(E)$, pentru orice $i = \overline{1,n}$ rezultă $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}(E) = \tau$.

OBSERVAȚIA 2.1.1
a) Mulțimile oricărei topologii se numesc mulțimi deschise în topologia dată.
b) Oricare ar fi E, ea poate fi înzestrată cu o structură de spațiu topologic deoarece i se pot asocia cel puțin topologia banală şi topologia discretă.
c) Cea mai bogată mulțime de indici este $\mathbb{N}$. Alte mulțimi de indici infinite sunt multipli de 3, multipli de 5 etc.

DEFINIȚIA 2.1.2 Fie τ_1 şi τ_2 două topologii ale mulțimii E. Se spune că **topologia τ_2 este mai fină decât topologia** τ_1, dacă are loc relația $\tau_2 \supset \tau_1$ şi se notează astfel: $\tau_2 \geq \tau_1$.
Relația de finețe definită de Definiția 2.1.2 este o relație de ordine pe mulțimea tuturor topologiilor mulțimii E. În raport cu această relație de ordine, topologia banală este un prim element, iar topologia discretă este un ultim element în mulțimea topologiilor. Între aceste două topologii există alte topologii. Una dintre acestea este **topologia optimă** din punct de vedere al rezultatelor matematice pe mulțimea respectivă.

DEFINIȚIA 2.1.3 Fie E o mulțime înzestrată cu topologia τ şi $x_0 \in E$ un punct oarecare. Mulțimea V este o **vecinătate a punctului** x_0, dacă există o mulțime $G \in \tau$ astfel încât $x_0 \in G \subset V$.

Exemplu.
Dacă $E \equiv \mathbb{R}$, atunci $\tau_{\mathbb{R}}(x) = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \geq 0\}$ este o topologie pe mulțimea numerelor reale. Această topologie este **topologia naturală a numerelor reale**.
Soluție. Se verifică i) –iii) din Definiția 2.1.1.
Ținând cont de Definiția 2.1.3 rezultă că orice interval deschis este o vecinătate pentru orice punct conținut de acest interval. Într-adevăr, $x_0 \in (a,b)$. Se consideră $\varepsilon = \min\{a - x_0, b - x_0\}$. Deci, (a,b) este vecinătate a lui x_0. Se consideră $G = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Este evident că

$x_0 \in G \subset (a,b)$. De exemplu, fie $V_0 = (-2,4)$, $x_0 = 0$, $G = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Rezultă $0 \in G \subset V_0$.

În spațiul topologic $\left(\text{¡}, t_{\text{¡}}(x)\right)$ se poate defini noțiunea de mulțime deschisă astfel.

DEFINIȚIA 2.1.4 $E \subset \text{¡}$ este **mulțime deschisă** dacă $E = f$ sau oricare ar fi $x \in E$ există $r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset E$.

OBSERVAȚIA 2.1.2 Mulțimile unei topologii sunt mulțimi deschise.

O noțiune importantă este noțiunea de topologie indusă. Cu ajutorul acestei noțiuni, pornind de la o topologie dată t se pot crea alte topologii, conform următoarei propoziții.

PROPOZIȚIA 2.1.1 (TOPOLOGIA INDUSĂ) Fie (E,t) - spațiu topologic şi $F \subset E$ o submulțime oarecare a acestuia. Atunci $t_F = \{F \cap D,\ D \in t\}$ (t restrâns la F) este o topologie pe mulțimea F şi se numeşte **topologia indusă pe F de topologia t**.

Demonstrație. Trebuie verificate cele trei axiome din definiția topologiei.
i) $f \in t_F$ şi $F \in t_F$. Într-adevăr, deoarece t este o topologie a mulțimii E şi $f \in t$ şi $E \in t$, atunci pe rolul lui D pot fi considerate:
$f = D$
sau
$E = D$ rezultă $F \cap D = F \cap f \in t_F$
sau
$F \cap D = F \cap E \in t_F$
ii) Fie $G_i \in t_F$ oricare ar fi $i \in \Im$. Rezultă $\bigcup_{i \in \Im} G_i \in t_F$. Într-adevăr, dacă $G_i \in t_F$, oricare ar fi $i \in \Im$, rezultă că există $D_i \in t$ astfel încât $G_i = F \cap D_i$, pentru orice $i \in \Im$. Atunci:

$$\bigcup_{i \in \Im} G_i = \bigcup_{i \in \Im} (F \cap D_i) = F \cap \left(\bigcup_{i \in \Im} D_i \right) \in t_F .$$

iii) Fie $G_i \in t_F$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, rezultă $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in t_F$. Într-adevăr, dacă $G_i \in t_F$, pentru orice $i = \overline{1,n}$ există $D_i \in t$ astfel încât $G_i = F \cap D_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Atunci:

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \bigcap_{i=1}^{n} (F \cap D_i) = F \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i \right) \in t_F .$$

2. CARACTERIZAREA TOPOLOGICĂ A PUNCTELOR UNEI MULȚIMI

Noțiunea de vecinătate permite clasificarea punctelor unei mulțimi.

DEFINIȚIA 2.2.1 Fie (E,t) un spațiu topologic şi $A \subset E$ o mulțime oarecare.

1) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct interior** al mulțimii A, dacă există V_{x_0} (vecinătatea punctului x_0) astfel încât $V_{x_0} \subset A$.

2) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct exterior** al mulțimii A, dacă există V_{x_0} (vecinătatea punctului x_0) astfel încât $V_{x_0} \subset C_A$ (complementara lui A).

3) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct frontieră** al mulțimii A, dacă pentru orice V_{x_0} (vecinătate a punctului x_0) are loc relația:

$$V_{x_0} \cap A \neq f \neq V_{x_0} \cap C_A .$$

4) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct aderent** pentru mulțimea A, dacă pentru orice V_{x_0} (vecinătate a punctului x_0) are loc relația:

$$V_{x_0} \cap A \neq \Phi .$$

5) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct de acumulare** pentru mulțimea A, dacă pentru orice V_{x_0} (vecinătate a punctului x_0) are loc relația:

$$V_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\} \neq \Phi .$$

6) Punctul $x_0 \in E$ se numeşte **punct izolat** al mulțimii A, dacă există V_{x_0} (vecinătate a punctului x_0) astfel încât $V_{x_0} \cap A = \{x_0\}$.

OBSERVAȚIA 2.2.1

1) Mulțimea tuturor punctelor interioare mulțimii A formează **interiorul mulțimii** A şi se notează astfel: $Int\,A$ sau $\overset{0}{A}$.

2) Mulțimea tuturor punctelor exterioare mulțimii A formează **exteriorul lui** A şi se notează astfel: $Ext\,A$.

3) Mulțimea tuturor punctelor frontieră ale mulțimii A formează **frontiera lui** A şi se notează $Fr\,A$ sau ∂A.

4) Mulțimea tuturor punctelor aderente mulțimii A formează **închiderea sau aderența mulțimii** A şi se notează astfel: $\overline{A}$.

5) Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A formează **derivata mulțimii** A şi se notează astfel: A'.

6) Mulțimea tuturor punctelor izolate ale mulțimii A formează **partea discretă a mulțimii** A şi se notează astfel: $Iz\,A$.

Dacă se consideră $E \equiv \mathbb{R}$ şi t topologia naturală, adică topologia intervalelor deschise simetrice, atunci are loc următoarea propoziție.

Propoziția 2.2.1

a) În topologia naturală a lui $\mathbb{R}$ (topologia intervalelor deschise), interiorul oricărui interval de numere reale este intervalul deschis.

b) Interiorul oricărei reuniuni de intervale din $\mathbb{R}$ este reuniunea intervalelor deschise.

Demonstrație. a) Fie $A = [a,b]$ rezultă $\overset{0}{A} = (a,b)$. Este evident că spațiul topologic în care se află intervalul $[a,b]$ este $\mathbb{R}$ înzestrat cu topologia naturală a intervalelor deschise simetrice. Punctele lui $\mathbb{R}$ raportate la intervalul $[a,b]$ sunt de mai multe tipuri după cum urmează:

1° $x \in \mathbb{R} \,|\, x < a$,

2° $x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [a,b]$,

3° $x \in \mathbb{R} \,|\, x > b$.

1° Punctele $x \in \mathbb{R} \,|\, x < a$ nu pot să fie puncte interioare ale intervalului $[a,b]$. Într-adevăr, oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $x_0 < a$ rezultă:

$$(x_0 - d, x_0 + d) \not\subset A, \quad d = \frac{|a - x_0|}{2}.$$

Orice interval deschis de acest tip nu poate să fie inclus în mulțimea A.
Ceea ce arată că aceste puncte nu sunt puncte interioare lui $[a,b]$.

Se consideră $x_0 = a$. În topologia naturală a lui $\mathbb{R}$, orice vecinătate a lui x_0 este de forma $(a-e, a+e)$, $e > 0$. Dar, se observă că pentru orice $e > 0$, avem $(a-e, a+e) \not\subset [a,b]$, ceea ce arată că nu este un punct interior.

În mod asemănător se arată că punctul $x_0 = b$ nu este un punct interior al intervalului $[a,b]$. Se arată că oricare ar fi $x > b$ acesta nu este punct interior al intervalului $[a,b]$.

2° Fie $x_0 \in \mathbb{R} \mid a < x_0 < b$ se notează cu $d = \inf\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$, atunci este evident că intervalul $\left(x_0 - \frac{d}{2}, x_0 + \frac{d}{2}\right) \subset [a,b] = A$. Deci, rezultă că x_0 este punct interior al intervalului $[a,b]$ rezultă $\overset{0}{A} = [a,b] = (a,b)$. Interiorul oricărui interval de numere reale este intervalul deschis de numerele reale.

Mulțimea vecinătăților în topologia naturală este mult mai bogată decât mulțimea tuturor intervalelor deschise simetrice, centrate în x. Dar, I_x (mulțimea tuturor intervalelor deschise simetrice) este un sistem fundamental de vecinătăți pe x.

3. SPAȚIU METRIC

Dacă în cadrul structurii de spațiu topologic densitatea elementelor putea fi dată numai cu ajutorul vecinătăților în cadrul structurii de spațiu metric poate fi stabilită și în alt mod.

DEFINIȚIA 2.3.1 (DISTANȚĂ SAU METRICĂ) Fie E o mulțime oarecare și aplicația $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$. Dacă:

i) $d(x,y) > 0$ oricare ar fi $x, y \in E$ și $d(x,y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x)$, oricare ar fi $x, y \in E$;

iii) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, $(\forall)$ $x, y, z \in E$ (**inegalitatea triunghiului**),

atunci aplicația d este **distanță** sau **metrică** pe mulțimea E. Cupletul (E,d) poartă denumirea de **spațiu metric**.

PROPOZIȚIA 2.3.1 Orice mulțime E poate fi metrizabilă (înzestrată cu structură de spațiu metric).

Demonstrație. Pentru a arăta această afirmație este suficient să se construiască pe $E \times E$ o aplicație d, care să verifice axiomele Definiției 2.3.1. Într-adevăr, dacă se consideră:

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+,\ d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

atunci d este o distanță pe E deoarece verifică toate cele trei axiome:

i) Prima axiomă este evidentă din modulul de construcție;
ii) Pentru orice $x, y \in E \mid x \neq y$ rezultă $d(x, y) = 1 = d(y, x)$;
iii) Pentru axioma a 3-a pot exista mai multe posibilități:

$x \neq y \neq z \neq x$ sau $x \neq y = z$ sau $y \neq x = z$ sau $x = y = z$ etc.

Pentru $x \neq y \neq z \neq x$ avem:

$$d(x, y) = 1,\ d(x, z) = 1,\ d(z, y) = 1.$$

Rezultă:

$$d(x, y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x, z) + d(z, y).$$

În mod analog se demonstrează axioma 3 pentru celelalte cazuri, astfel rezultă că orice mulțime poate fi metrizabilă.

OBSERVAȚIA 2.3.1 Pe o mulțime E pot fi considerate mai multe metrici care au proprietatea că pe acea mulțime una măsoară mai fin decât cealaltă. Pornind de la o metrică dată pe o mulțime, se pot construi şi alte metrici așa cum arată următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 2.3.2 Fie (E, d) un spațiu metric. Aplicația $r(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ este o metrică pe E. Metrica r este metrica indusă de metrica d.

Demonstrație. Este evident că aplicația r verifică axiomele i) şi ii) ale metricii. Arătăm în continuare că este verificată şi axioma iii). Deoarece d este metrică, atunci

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),\ x, y, z \in E. \tag{1}$$

Se ştie că, dacă $0 \leq a \leq b$, atunci

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

$$\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}, x, y, z \in E.$$

Deci, $r(x, y) \leq r(x, z) + r(z, y)$, $x, y, z \in E$.

Exemple.

Aplicațiile definite mai jos sunt metrici sau distanțe pe mulțimile specificate:

a) $d:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=|x-y|$ este metrică pe $\mathbb{R}$.

b) $d:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, unde $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ este metrică pe $\mathbb{R}^2$.

c) $d:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$, unde $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ este metrică pe $\mathbb{R}^3$.

d) $d:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}$, unde $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ este metrică pe $\mathbb{R}^m$.

Aceste distanțe se numesc **distanțe euclidiene**.

În mulțimea $\mathbb{R}^m$ sunt uzuale următoarele distanțe:

$$r(x,y)=\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i| \text{ și } r(x,y)=\max_{1\le i\le m}|x_i-y_i|,$$

unde $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, $y=(y_1,y_2,...,y_m)$.

DEFINIȚIA 2.3.2 Fie d_1 și d_2 două distanțe definite pe o mulțime E. Spunem că d_1 și d_2 sunt **distanțe echivalente** dacă există $a>0$ și $b>0$, astfel încât

$$d_1\le a\,d_2 \text{ și } d_2\le b\,d_1.$$

Exemplu. Distanțele d, r (date mai sus) și distanța euclidiană sunt distanțe echivalente pe $\mathbb{R}^m$.

Soluție. Se arată că $d(x,y)\ge d(x,y)\ge r(x,y)\ge \frac{1}{n}d(x,y)$.

DEFINIȚIA 2.3.3 Fie (E,d) spațiu numeric. Mulțimile:

$$S(x_0,r)=\{x\in E\,|\,d(x_0,x)<r,\ r\ge 0, x_0\in E \textit{ fixat}\}$$

și:

$$\bar{S}(x_0,r)=\{x\in E\,|\,d(x_0,x)<r; r\ge 0, x_0\in E \textit{ fixat}\}$$

se numesc **sferele deschise,** respectiv **închise** ale spațiului metric (E,d).

OBSERVAȚIA 2.3.2

a) $E\equiv\mathbb{R}$, d metrică euclidiană, atunci:

$$S(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r) \text{ și } \bar{S}(x_0,r)=[x_0-r,x_0+r].$$

b) $E\equiv\mathbb{R}^2$ și d metrică euclidiană, atunci:

$$S(x_0,r)=\left\{(x_1,x_2)=x\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2<r^2\right\}$$

şi se numeşte **discul plan deschis**, iar:

$$\overline{S}(x_0,r)=\left\{(x_1,x_2)=x\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2\leq r^2\right\}$$

şi se numeşte **discul plan închis**.

c) $S(x_0,r)=\left\{(x_1,x_2,x_3)=x\in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2+(x_3-x_{03})^2<r^2\right\}$ şi se numeşte **sfera deschisă din $\mathbb{R}^3$**, iar

$$\overline{S}(x_0,r)=\left\{(x_1,x_2,x_3)=x\in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2+(x_3-x_{03})^2\leq r^2\right\}$$

şi se numeşte **sfera închisă din $\mathbb{R}^3$**.

PROPOZIȚIA 2.3.2 Orice spațiu metric (E,d) este un spațiu topologic. Reciproca nu este în general adevărată.

Demonstrație. Se arată că $\tau_M=\left\{S(x,r)\,\middle|\,x\in E,\ r\geq 0\right\}$ formează o topologie. Această topologie mai poartă denumirea şi de **topologie metrică**.

Pentru a arăta că τ_M este o topologie se arată că $S(x_0,r)$ sunt mulțimi deschise, pentru orice $x_0\in E$ fixat şi orice $r\geq 0$.

Indicație. Se arată că $S(x_0,r)\equiv \overset{\circ}{S}(x_0,r)$ (interior).

În mod analog, se arată că dacă $G_1,G_2,...,G_n\in\tau_M$ (sunt mulțimi deschise) atunci $G_1\cap G_2\cap...\cap G_n\in\tau_M$.

Dacă $G_i\in\tau_M$ pentru orice $i\in\Im$ avem $\bigcup\limits_{i\in\Im}G_i\in\tau_M$, de unde rezultă că într-adevăr τ_M este o topologie.

4. NORMĂ. SPAȚIU VECTORIAL NORMAT

DEFINIȚIA 2.4.1 Fie E un spațiu vectorial şi $\varphi:E\to\mathbb{R}_+$ o aplicație. Dacă:

i) $\varphi(x)>0$, pentru orice $x\in E$, $x\neq 0_E$ şi $\varphi(x)=0$ dacă $x=0_E$ (0_E elementul neutru în raport cu adunarea în spațiul vectorial E);

ii) $\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$, pentru orice $x,y\in E$;

iii) $\varphi(\alpha x)=|\alpha|\varphi(x)$, pentru orice $x\in E$, $\alpha\in K$,

atunci aplicația $\varphi(x)$ este o **normă** pe E. Cupletul (E,φ) se numeşte **spațiu vectorial normat**, iar norma φ mai are şi următoarea notație $\varphi(x)\equiv\|x\|$.

Exemple. i) $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$; ii) $E = \mathbb{R}^m$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$ - norma euclidiană,

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$, $\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$.

DEFINIȚIA 2.4.2 Fie $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ norme definite pe spațiul vectorial E
Spunem că $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ sunt echivalente dacă există $a, b > 0$ astfel încât:

$$\|\cdot\|_1 \le a \, \|\cdot\|_2 \text{ şi } \|\cdot\|_2 \le b \, \|\cdot\|_1 .$$

Exemplu. Normele din exemplele de mai sus sunt echivalente. Se arată că $\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1$.

PROPOZIȚIA 2.4.1 Orice normă defineşte o distanță.

Demonstrație. Fie $(E, \|\cdot\|)$ un spațiu vectorial normat. Aplicația $d(x,y) = \|x - y\|$, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ este o distanță (metrică) pe mulțimea E. Pentru aceasta trebuie verificate axiomele metricii, ținând cont că axiomele normei sunt verificate.

i) $d(x,y) > 0$, pentru orice $x, y \in E$, $x \ne y$ şi $d(x,y) = 0$ rezultă $x = y$.

Într-adevăr, $d(x,y) = \|x - y\| > 0$, pentru orice $x - y \ne 0$. Dar, $x - y \ne 0$ dacă şi numai dacă $x \ne y$ şi din $d(x,y) = 0$ rezultă $\|x - y\| = 0$. Dar, $x - y = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.

ii) Trebuie arătat că $d(x,y) = d(y,x)$, pentru orice $x, y \in E$. Într-adevăr:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|-1(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x).$$

iii) Trebuie arătat că $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, oricare ar fi $x, y, z \in E$. Într-adevăr:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Astfel am demonstrat că orice normă defineşte o distanță.

OBSERVAȚIA 2.4.1 Ținând cont de Propoziția 2.4.1, orice spațiu vectorial normat este şi un spațiu metric, dar reciproca nu este în general adevărată.
Într-un spațiu vectorial normat se poate opera cu elementele şi se pot crea vecinătăți în care se poate determina precis densitatea elementelor prin măsurarea distanței dintre ele, dar într-o astfel de structură nu se poate defini noțiunea de direcție, deci de unghi. Această direcție poate fi stabilită cu ajutorul noțiunii de produs scalar.

DEFINIȚIA 2.4.3 Fie E un spațiu vectorial normat peste câmpul K şi aplicația $p: E \times E \to K$, dacă:

i) $p(x,y) = \overline{p(y,x)}$, oricare ar fi $x, y \in E$;

ii) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y)$, oricare ar fi $x_1, x_2, y \in E$;

iii) $p(a\, x, y) = a\, p(x,y)$, oricare ar fi $x, y \in E$;

iv) $p(x,x) > 0$, oricare ar fi $x \in E$, $x \neq 0$ şi $p(x,x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$,

atunci aplicația p se numeşte **produs scalar** pe spațiul vectorial normat E.

Produsul scalar $p(x,x)$ se notează şi astfel $x \cdot y$ sau (x,y) sau $\langle x, y \rangle$.

OBSERVAȚIA 2.4.2 Fie E spațiu vectorial. Dacă acest spațiu vectorial este înzestrat cu un produs scalar, atunci poartă denumirea de **spațiu prehilbertian**.

PROPOZIȚIA 2.4.2 Fie E spațiu vectorial şi $p: E \times E \to K$ un produs scalar (E un spațiu prehilbertian), atunci au loc următoarele relații:

i) $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$;

ii) $\langle x, a\, y \rangle = \overline{a}\, \langle x, y \rangle$;

iii) $\left| \langle x, y \rangle \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz).

Demonstrație.

i) Ținând cont de axioma i) din Definiția 2.4.2 rezultă:

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle \overset{i)}{=} \overline{\langle y_1 + y_2, x \rangle} \overset{ii)}{=} \overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\langle y_2, x \rangle} \overset{i)}{=} \overline{\overline{\langle x, y_1 \rangle}} + \overline{\overline{\langle x, y_2 \rangle}} = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

ii) $\langle x, a \cdot y \rangle \overset{i)}{=} \overline{\langle a \cdot y, x \rangle} \overset{iii)}{=} \overline{a \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{a} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} \overset{i)}{=} \overline{a} \cdot \langle x, y \rangle$

iii) Fie $l \in$ ¡ atunci conform definiției produsului scalar se poate scrie că:

$$0 \leq \langle x + l\, y, x + l\, y \rangle = \langle x, x + l\, y \rangle + l\, \langle y, x + l\, y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + l\, \langle x, y \rangle + l\, \langle y, x \rangle + l^2 \langle y, y \rangle = l^2 \langle y, y \rangle + 2\, l\, \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle .$$

Deci, pentru orice $l \in$ ¡ avem:

$$l^2 \langle y, y \rangle + 2\, l\, \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ (trinom de gradul doi în } l \text{)},$$

de unde $\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Din proprietățile trinomului de gradul doi, este evident că $\Delta \leq 0$. Aşadar:

$$\left| \langle x, y \rangle \right| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} = \|x\| \cdot \|y\| .$$

PROPOZIȚIA 2.4.3 Orice produs scalar defineşte o normă.
Demonstrație.
Într-adevăr, dacă se consideră aplicația:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ ,\ \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+ ,$$

atunci această aplicație este o normă pe mulțimea E. Ținând cont că proprietățile produsului scalar sunt verificate, trebuie arătat că această aplicație verifică proprietățile normei.

i) $\|x\| > 0$, pentru orice $x \in E$, $x \neq 0$ şi $\|x\| = 0$ rezultă $x = 0$.

Într-adevăr, din $\langle x, x\rangle \overset{iv)}{>} 0$, pentru orice $x \neq 0$, rezultă $\sqrt{\langle x, x\rangle} > 0$, echivalent cu $\|x\| > 0$, pentru orice $x \in E$, $x \neq 0$. Pentru cea de-a doua parte,

$\left[\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0\right] \Leftrightarrow$

$\left[\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0\right]$.

ii) Trebuie arătat că $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, pentru orice $x \in E$, $a \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, $\langle ax; ax\rangle = a^2 \langle x, x\rangle \Rightarrow \sqrt{\langle ax; ax\rangle} = |a|\sqrt{\langle x, x\rangle} \Rightarrow \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$.

iii) Trebuie arătat că $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pentru orice $x, y \in E$.

Într-adevăr:

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\left|\langle x, y\rangle\right| + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 .$$

Deci, $\|x + y\|^2 \leq \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplu. Fie $E = \mathbb{R}^n$. Să se arate că aplicația:

a) $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

b) Dacă $\langle \overline{a}, \overline{b}\rangle = a \cdot b \cos\theta$, $\theta = \left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ este un produs scalar.

Soluție. Vezi Exercițiul 2.5.14.

DEFINIȚIA 2.4.4 Fie (E, τ) un spațiu topologic. Acest spațiu topologic se numeşte **topologic separat** dacă, pentru orice $x, y \in E$ cu $x \neq y$ există vecinătățile V_x, V_y astfel încât $V_x \cap V_y = \varphi$.

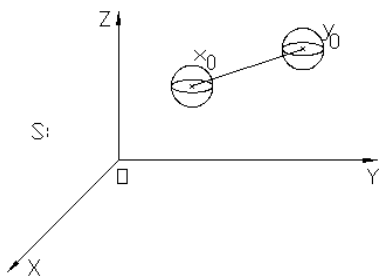
Spațiu topologic separat prezintă o importanță deosebită deoarece numai într-un astfel de spațiu topologic, atunci când limita există, ea este unică. Noțiunea de convergență este binedefinită într-un spațiu topologic separat.

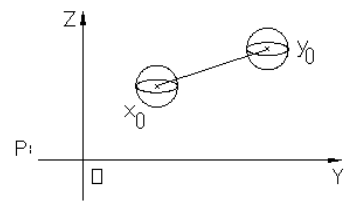
PROPOZIȚIA 2.4.4 Orice spațiu vectorial normat este un spațiu topologic separat.

Demonstrație. Fie $(E, \|\cdot\|)$ spațiu vectorial normat. Fie $x_0, y_0 \in E \mid x_0 \neq y_0$ arbitrare. Se consideră $r_1 = \dfrac{\|x_0 - y_0\|}{3}$. Se consideră sferele:

$$S(x_0, r_1) = \{y \in E \mid \|x_0 - y\| < r_1\},\ S(y_0, r_1) = \{y \in E \mid \|y_0 - y\| < r_1\}.$$

Aceste mulțimi sunt vecinătăți ale lui x_0, respectiv y_0, în topologia metrică. Dar, este evident că $S(x_0, r_1) \cap S(y_0, r_1) = \emptyset$.





PROPOZIȚIA 2.4.5 Spațiile $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$ sunt spații topologice separate în cazul în care sunt înzestrate cu topologia metrică.

PROPOZIȚIA 2.4.6 Într-un spațiu prehilbertian au loc proprietățile:

i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ - regula paralelogramului;

ii) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$;

iii) $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = a \cdot x$.

5. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 2.5.1 Fie $B_{\mathbb{R}}(x)$ familia intervalelor deschise ce îl conțin pe $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că această mulțime formează o topologie pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Trebuie arătat că $B_{\mathbb{R}}(x)$ verifică proprietățile unei topologii.

i) $\emptyset \in B_{\mathbb{R}}(x)$ deoarece $\emptyset = (x, x)$ şi $\mathbb{R} \in B_{\mathbb{R}}(x)$ deoarece $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

ii) Fie $I_k^x \in B_{¡}(x)$, $k \in \Im$ (mulțime de indici). Aceste intervale sunt de forma $I_k^x = (a_k, b_k)$ cu proprietatea că $x \in (a_k, b_k)$, $(\forall) k \in \Im$. Fie $r_k = b_k - x$ şi $e_k = x - a_k$. Se notează $r = \max\limits_{k \in \Im}\{b_k - x\}$ şi $e = \max\limits_{k \in \Im}\{x - a_k\}$. Atunci $\bigcup\limits_{k \in \Im} I_k^x = (x - e, x + r)$ şi $x \in (x - e, x + r)$. Deci, $\bigcup\limits_{k \in \Im} I_k^x = B_{¡}(x)$.

iii) Fie $I_k^x \in B_{¡}(x)$, $k \in \overline{1,n}$. Fie $r = \min\limits_{k \in \Im}\{b_k - x\}$ şi $e = \min\limits_{k \in \Im}\{x - a_k\}$. Atunci, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k^x = (x - e, x + r)$ şi $x \in (x - e, x + r)$. Deci, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k^x \in B_{¡}(x)$.

Observație.

i) $t_{¡}(x) = \{(x - e, x + e) | x \in ¡,\ e > 0\} \subset B_{¡}(x)$.

ii) Dacă se consideră

$$D_{¡}(x) = \{D \subset ¡ \,|(\exists) e > 0 \text{ astfel încât } (x - e, x + e) \subset D, x \in ¡\},$$

atunci este evident că $B_{¡}(x) \subset D_{¡}(x)$.

EXERCIȚIUL 2.5.2 Fie $t_{¡^2}(\overline{x}) = \{D_{¡^2}(\overline{x}, e) | \overline{x} \in ¡^2;\ e > 0\}$ mulțimea discurilor deschise de centru $\overline{x}$ şi rază e şi $t_{¡^3}(\overline{x}) = \{D_{¡^3}(\overline{x}, e) | \overline{x},\ e > 0\}$ mulțimea sferelor deschise de centru $\overline{x}$ şi rază e. Să se arate că $t_{¡^2}(\overline{x})$ şi $t_{¡^3}(\overline{x})$ sunt topologii pe $¡^2$ şi respectiv $¡^3$.

Soluție. Verificăm cele trei axiome ale topologiei. Când $e \to \infty$, $D_{¡^2}(\overline{x}, e) \equiv ¡^2$. Deci, $¡^2 \in t_{¡^2}(\overline{x})$. Când $e \to 0$, $D_{¡^2}(\overline{x}, e) = f$. Deci, $f \in t_{¡^2}(\overline{x})$.

Fie $\Im$ o familie de indici şi $D_{¡^2}(\overline{x}, e_k) \in t_{¡^2}(\overline{x})$, $k \in \Im$.

Dacă $e = \max\limits_{k \in I}\{e_k\}$, atunci $\bigcup\limits_{k \in \Im} D^k_{¡^2}(\overline{x}, e_k) = D_{¡^2}(\overline{x}, e)$.

Deci, $\bigcup\limits_{k \in \Im} D^k_{¡^2}(\overline{x}, e_k) \in t_{¡^2}(\overline{x})$.

Fie $D_{¡^2}(\overline{x}, e_k) \in t_{¡^2}(\overline{x})$, $k = \overline{1,n}$.

Dacă $e = \min\limits_{k = \overline{1,n}}\{e_k\}$, atunci $\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_{¡^2}(\overline{x}, e_k) = D_{¡^2}(\overline{x}, e)$.

Deci, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_{¡^2}(\overline{x}, e_k) \in t_{¡^2}(\overline{x})$.

Astfel s-a arătat că $\tau_{\mathbb{R}^2}(\overline{x})$ este topologie în $\mathbb{R}^2$. Analog se arată că $\tau_{\mathbb{R}^3}(\overline{x})$ este topologie în $\mathbb{R}^3$.

Observație.

- Topologiile $\tau_{\mathbb{R}^2}(\overline{x})$ şi $\tau_{\mathbb{R}^3}(\overline{x})$ sunt topologiile naturale ale lui $\mathbb{R}^2$ şi respectiv $\mathbb{R}^3$.
- Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci $\left\{(x_0-\varepsilon, x_0+r) \mid \varepsilon > 0\right\}$ reprezintă mulțimea vecinătăților lui x_0 în topologia $\tau_{\mathbb{R}}(x)$.
- Dacă $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, atunci $\left\{D_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}_0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\right\}$ este mulțimea vecinătăților lui $\overline{x}_0$ în topologia $\tau_{\mathbb{R}^2}(\overline{x})$.
- Dacă $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, atunci $\left\{D_{\mathbb{R}^3}(\overline{x}_0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\right\}$ este mulțimea vecinătăților lui $\overline{x}_0$ în topologia $\tau_{\mathbb{R}^3}(\overline{x})$.
- În general, dacă τ este o topologie oarecare a lui X, atunci $\left\{G \in \tau \mid x_0 \in G\right\}$ este mulțimea vecinătăților lui $x_0 \in X$. O astfel de mulțime se notează V_{x_0} iar mulțimea vecinătăților lui x_0 se notează cu $\mathcal{V}_{x_0}$.

EXERCIȚIUL 2.5.3

Fie (X, τ) spațiu topologic. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A \in \tau$;

b) $A \in \mathcal{V}_x$, pentru orice $x \in A$.

Soluție. a)$\Rightarrow$b) Fie $A \in \tau$. Atunci $x \in A \subseteq A$, pentru orice $x \in A$. Deci A este o vecinătate a lui x. Aşadar, $A \in \mathcal{V}_x$.

b)$\Rightarrow$a) Fie $A \in \mathcal{V}_x$, pentru orice $x \in A$. Deci, există $G_x \in \tau$ astfel încât $x \in G_x \subseteq A$. Cum $A = \bigcup\limits_{x \in A}\{x\}$, din $G_x \subseteq A$ se obține $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} G_x$. Din $G_x \subseteq A$ rezultă că $\bigcup\limits_{x \in A} G_x \subseteq A$. Aşadar, avem că $A = \bigcup\limits_{x \in A} G_x \in \tau$.

EXERCIȚIUL 2.5.4 Fie (X, τ) spațiu topologic şi $x \in X$. Atunci $\mathcal{V}_x$ are următoarele proprietăți:

a) dacă $V \in \mathcal{V}_x$ şi $U \supset V$, atunci $U \in \mathcal{V}_x$;

b) dacă $V_i \in \mathcal{V}_x$, $i = \overline{1,n}$, atunci $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}_x$

c) pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$, atunci $x \in V$.

Soluție. a) Dacă $V \in \mathcal{V}_x$, atunci există $G \in \tau$ astfel încât $x \in G \subset U$. Cum $U \supset V$, atunci $x \in G \subset U$. Deci, $U \in \mathcal{V}_x$.

b) Dacă $V_i \in \mathcal{V}_x$, $i = \overline{1,n}$, atunci există $G_i \in \tau$ astfel încât $x \in G_i \subset V_i$, $i = \overline{1,n}$. Aşadar, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Dar cum $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$, atunci $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}_x$.

c) Evident, ținând cont de definiția vecinătății.

EXERCIȚIUL 2.5.5 Orice interval deschis de numere reale este o mulțime deschisă.

Soluție. Conform cu Definiția 2.1.4 trebuie arătat că pentru orice $x \in (a,b)$ există $r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset (a,b)$. Fie $d := \min\{x-a, b-x\}$. Atunci este evident că $\left(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}\right) \subset (a,b)$. Deci (a,b) este mulțime deschisă.

Observație. Analog se arată că:

$$D_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, r) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < r^2\right\},$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$, este o mulțime deschisă în $\tau_{\mathbb{R}^2}$, iar

$$D_{\mathbb{R}^3}(\overline{x}_0, \gamma) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2 < r^2\right\},$$

unde

$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ este mulțime deschisă în $\tau_{\mathbb{R}^3}(\overline{x})$.

EXERCIȚIUL 2.5.6 Fie (X, τ) spațiu topologic şi $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $\overset{0}{A} = A$;

b) $A \subset C \Rightarrow \overset{0}{A} \subset \overset{0}{B}$

c) $\overset{0}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$

d) $\overset{0}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Soluție. Conform cu Definiția 2.2.1 punctele a) şi b) sunt evidente.

c) Se arată dubla incluziune:

$$\overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \overset{0}{A}\cap \overset{0}{B} \text{ şi } \overset{0}{A}\cap \overset{0}{B} \subseteq \overset{0}{\widehat{A\cap B}}.$$

Într-adevăr, fie $x\in \overset{0}{\widehat{A\cap B}}$. Atunci există V_x astfel încât $V_x \subset A\cap B$. Deci, $V_x \subset A$ şi $V_x \subset B$. Aşadar, $x\in \overset{0}{A}\cap \overset{0}{B}$. De aici rezultă că $\overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subseteq \overset{0}{A}\cap \overset{0}{B}$. Fie acum $x\in \overset{0}{A}\cap \overset{0}{B}$. Atunci $x\in \overset{0}{A}$ şi $x\in \overset{0}{B}$. Aşadar, $V_x \subset A\cap B$. Atunci, $x\in \overset{0}{\widehat{A\cap B}}$. Deci, $\overset{0}{A}\cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A\cap B}}$.

d) Fie $x\in \overset{0}{A}\cup \overset{0}{B}$. Atunci $x\in \overset{0}{A}$ sau $x\in \overset{0}{B}$. Deci, există V_x astfel încât $V_x \subset A$ sau $V_x \subset B$. Atunci, conform cu Definiția 2.2.1, avem $x_0 \in \overset{0}{\widehat{A\cup B}}$.

Observație. Punctele c) şi d) se generalizează astfel:

$$\overset{0}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{0}{A_i},\ \overset{0}{\widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}} \supset \bigcup_{i\in I} \overset{0}{A_i}.$$

EXERCIȚIUL 2.5.7 Fie (X,τ) spațiu topologic şi $A, B\subset X$. Să se arate că:

a) $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\subset \overline{B}$

b) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup \overline{B}$

c) $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap \overline{B}$

d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Soluție.

a) Este evident ținând cont de Definiția 2.2.1.

b) Cum $A, B\subset A\cup B$, atunci conform cu a) avem $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A\cup B}$. Aşadar $\overline{A}\cup\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$. Fie $x\in \complement\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = \complement\overline{A}\cap\complement\overline{B}$. Aşadar, $x\notin \overline{A}$ şi $x\notin \overline{B}$. Atunci, există U_x şi V_x astfel încât $U_x\cap A=\emptyset$ şi $V_x\cap A=\emptyset$. Cum $W_x = U_x\cap V_x$ (vezi Exercițiul 2.5.4), atunci conform cu distributivitatea intersecției față de reuniune se obține $W_x\cap(A\cup B)=\emptyset$. Deci, $x\notin \overline{A\cup B}$. Cu alte cuvinte, $x\in \complement\overline{A\cup B}$. Aşadar, am arătat că $x\in \complement\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) \Rightarrow x\in \complement\overline{A\cup B}$. Deci, $\overline{A\cup B} \subset \overline{A}\cup\overline{B}$.

c) Se procedează ca la punctul b).

d) Fie $x\in \overline{\overline{A}}$. Conform cu Definiția 2.2.1, pentru orice V_x, $V_x\cap \overline{A}\neq \phi$. Fie $y\in V_x\cap \overline{A}$. Atunci, $y\in V_x$ şi $y\in \overline{A}$. Deci, $V_x\cap A\neq \phi \Rightarrow x\in \overline{A}$. Ținând cont de faptul că $\overline{\overline{A}}\subset \overline{A}$ şi de punctul a) se obține $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

Observație. Proprietățile b) şi c) se generalizează astfel:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\subset\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n} \text{ şi } \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}.$$

Generalizarea lui b) se poate verifica uşor pe mulțimile $A_n=\left[\frac{1}{n},1\right]$, iar generalizarea lui c) se poate verifica uşor pe mulțimile $B_n=\left\{\frac{m}{n},(m,n)\in \mathbb{N}^*,(m,n)=1\right\}$.

EXERCIȚIUL 2.5.8 Fie (X,τ) spațiu topologic şi $A,B\subset X$. Să se arate că:

a) $A\subset B\Rightarrow A'\subset B'$;

b) $(A\cup B)'=A'\cup B'$;

c) $(A\cap B)'\subset A'\cap B'$;

d) $(A')'=A'$.

Soluție. Aceste proprietăți se pot demonstra folosind definiția punctului de acumulare. Se poate folosi şi următoarea proprietate

$$x\in A'\Leftrightarrow\left[(\forall)V\,\middle|\,V\in \mathcal{V}_x\Rightarrow \text{card }(V\cap A)\geq \aleph_0\right].$$

Folosind această proprietate se arată că $(A\cup B)'=A'\cup B'$. Într-adevăr, fie $x\in(A\cup B)'$. Atunci, orice vecinătate $V\in V_x$ conține o infinitate de puncte din $A\cup B$. Aceasta implică faptul că conține o infinitate de puncte din A, deci $x\in A'$ sau o infinitate de puncte din B, deci $x\in B'$. Aşadar, $x\in A'\cup B'$. Deci, $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$. Fie $x\in A'\cup B'$, atunci $x\in A'$ sau $x\in B'$. Deci, în orice vecinătate $V\in V_x$ se află o infinitate de puncte din A sau infinitate de puncte din B. Deci, în orice vecinătate $V\in V_x$ se află o infinitate de puncte din $A\cup B$. Deci, $x\in(A\cup B)'$. Aşadar, $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$. În mod analog se arată celelalte proprietăți.

EXERCIȚIUL 2.5.9 Să se arate că mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este densă în mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

Soluție. Se ştie că mulțimea A este densă în mulțimea X dacă $\overline{A} = X$. Ținând cont de aceasta, trebuie arătat că $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Incluziunea $\mathbb{R} \supseteq \overline{\mathbb{Q}}$ este evidentă. Trebuie arătat că $\overline{\mathbb{Q}} \supseteq \mathbb{R}$. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $q \in \mathbb{Q}$. Deci, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Atunci, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Aşadar, $\overline{\mathbb{Q}} \supseteq \mathbb{R}$.

EXERCIȚIUL 2.5.10 Fie $[0,1]$. Se împarte acest interval în trei părți egale şi se obține $E_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ treimea mijlocie. Intervalele rămase $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ se împart fiecare în trei părți egale şi se obține: $E_2 = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$. Intervalele rămase $\left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $\left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right]$, $\left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right]$, $\left[\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right]$ se împart fiecare în câte trei părți egale şi se rețin treimile mijlocii ale fiecăruia, deci se obține mulțimea $E_3 = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \cup \left(\frac{19}{3^2}, \frac{20}{3^2}\right) \cup \left(\frac{25}{3^2}, \frac{26}{3^2}\right)$ şi se continuă indefinit procedeul.

Să se arate că mulțimea $C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ are proprietățile:

a) $C = C'$;

b) $\overline{\overset{0}{C}} = \emptyset$.

Soluție. Din modul de construcție al mulțimii C se observă că în această mulțime rămân toate numerele reale care se scriu în baza de numerație trei numai cu ajutorul cifrelor 0 şi 2.

a) Deoarece pentru orice $x = a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cu proprietatea că $a_i \in \{0, 2\}$, atunci în orice interval care îl conține se află şi numere reale care în scrierea triadică conțin cifra 1 şi nu aparțin lui C. Deci $C = C'$.

b) Este evident că $[0,1]$ nu include niciun interval deschis ale cărui elemente să fie numai cu ajutorul lui 0 şi 2. De aici este evident că $\overset{0}{C} = \emptyset$ şi $\overline{\overset{0}{C}} = \overset{0}{C}$. Deci, $\overline{\overset{0}{C}} = \emptyset$.

Observație. Mulțimea $C=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ se numeşte **mulțimea lui Cantor**.

EXERCIȚIUL 2.5.11 Să se determine interiorul, exteriorul, frontiera, aderența şi partea discretă pentru mulțimile $\mathbb{Q}$ şi $E=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Soluție. Ținând cont de Definiția 2.2.1 şi de faptul că: Oricare ar fi $x\in\overline{\mathbb{R}}$ intervalul $(x-e,x+e)$, $e>0$ conține o infinitate de numere raționale şi o infinitate de numere iraționale se obține imediat că: $\overset{0}{\mathbb{Q}}=\varphi$, $Ext\,\mathbb{Q}=\varphi$, $Fr\,\mathbb{Q}=\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q}'=\overline{\mathbb{R}}$, $Iz\,\mathbb{Q}=\varphi$ şi $\overset{0}{E}=\varphi$, $Fr\,E=\left\{0,1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},...\right\}$, $Ext\,E=\overline{\mathbb{R}}-Fr\,E$, $\overline{E}=Fr\,E$, $E'=\{0\}$, $Iz\,E=E$.

EXERCIȚIUL 2.5.12 Fie $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, unde $d(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, $\overline{x}=(x_1,...,x_n)$, $\overline{y}=(y_1,...,y_n)$. Să se arate că această aplicație este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.

Soluție. În rezolvarea acestui exercițiu este nevoie de inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$, $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Ținând cont de Propoziția 2.4.2. iii), avem: $\|\overline{x}\|=\sqrt{\langle\overline{x},\overline{x}\rangle}$, iar $\langle\overline{x},\overline{x}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski este evidentă. Pentru ca $d(\overline{x},\overline{y})$ să fie metrică sau distanță trebuie să verifice Definiția 2.3.1.

i) $d(\overline{x},\overline{y})=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0\Leftrightarrow(x_i-y_i)^2=0\Leftrightarrow x_i=y_i$, $i=\overline{1,n}\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{y}$. Deci, $d(\overline{x},\overline{y})=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{y}$. Deoarece $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\ge0$, $i=\overline{1,n}$ este evidentă, atunci $d(\overline{x},\overline{y})\ge0,\ x,y\in\mathbb{R}^n$.

ii) $d(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(\overline{y},\overline{x})$.

Deci, $d(\overline{x},\overline{y})=d(\overline{y},\overline{x})$.

iii)

$$\left[d(\overline{x},\overline{y})+d(\overline{y},\overline{x})\right]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-y_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2$$

.

$$\geq\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2=d^2(x,z).$$

Aşadar, $d^2(\overline{x},\overline{y})\leq\left[d(\overline{x},\overline{y})+d(\overline{y},\overline{x})\right]^2$. De aici rezultă faptul că $d(\overline{x},\overline{y})\leq d(\overline{x},\overline{y})+d(\overline{y},\overline{x})$.

Aşadar, $d(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ verifică Definiția 2.3.1. şi deci este metrică pe $\mathbb{R}^n$.

EXERCIȚIUL 2.5.13 Fie $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$

unde $d(\overline{x},\overline{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\geq 1$, $\overline{x}=(x_1,...,x_n)$, $\overline{y}=(y_1,...,y_n)$. Să se arate că aplicația este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.

Soluție. În rezolvarea acestui exercițiu este nevoie de inegalitatea lui Minkowski. Dacă $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ şi $p\geq 1$,

atunci $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Pentru $p=1$ inegalitatea se reduce la inegalitatea cunoscută – modulul sumei este mai mic sau egal decât suma modulelor.

În continuare se consideră $p>1$ şi atunci:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1}.$$

Dacă se consideră $q=\dfrac{p}{p-1}$ atunci folosind inegalitatea lui Hölder rezultă inegalitatea lui Minkowski.

Inegalitatea lui Hölder este următoarea. Dacă $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ şi $p, q > 0$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Această inegalitate se obține imediat din următoarea inegalitate. Dacă $p, q > 0$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci $|a,b| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Trebuie arătat că aplicația $d(\overline{x}, \overline{y})$ verifică Definiția 2.3.1.

i)

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i|^p = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

Deci, $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$. Cum:

$$|x_i - y_i| \ge 0 \Rightarrow |x_i - y_i|^p \ge 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ge 0 \Leftrightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) \ge 0.$$

ii) Cum $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, rezultă $|x_i - y_i|^p = |y_i - x_i|^p$.

Deci, $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x}) (\forall) \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

iii) Avem $|x_i - y_i|^p = |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^p \le (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^p$.

Deci,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru $p > 1$ este evident că $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p$.

Aşadar, $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Deci, $d(\overline{x}, \overline{y}) \le d(\overline{y}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$.

EXERCIȚIUL 2.5.14 Să se arate că:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \quad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Soluție. Trebuie arătat că această aplicație verifică Definiția 2.4.3.

i) Relația $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \overline{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}$ este evidentă deoarece $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \in \mathbb{R}$ și $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i$.

ii) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$.

iii) $\langle a \cdot \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i \cdot y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = a \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

iv) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \ \forall \ \bar{x} \neq (0, 0, ..., 0) = \bar{0}$

și $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \ i = \overline{1, n} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Observație. Ținând cont de Propoziția 2.4.3, rezultă că $\|\bar{x}\| = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

EXERCIȚIUL 2.5.15 Mulțimile $S(x, r) = \{ y \in E \mid d(y, x) < r \}$, unde (E, d) este spațiu metric, sunt mulțimi deschise.

Soluție. Trebuie arătat că $\overset{0}{S}(x, r) = S(x, r)$. Fie $y \in S(x, r)$ și $r' = r - d(x, y)$. Fie $z \in S(y, r')$.

Atunci, $d(z, x) \le d(z, y) + d(y, x) < r' + r - r' = r$. Deci, $z \in S(x, r')$. Se obține că $S(y, r') \subset S(x, r)$. Această incluziune arată că orice punct al mulțimii $S(x, r)$ este punct interior al său. Deci, $S(x, r) \subseteq \overset{0}{S}(x, r)$. Incluziunea $\overset{0}{S}(x, r) \subseteq S(x, r)$ este evidentă. Deci, $\overset{0}{S}(x, r) = S(x, r)$.

EXERCIȚIUL 2.5.16 Folosind inegalitatea lui Schwarz, să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy – Buniacovski.

Soluție. Trebuie demonstrat că, pentru $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, avem că:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

Ținând cont de produsul scalar din Exercițiul 2.5.14 şi de faptul că el defineşte norma euclidiană conform cu inegalitatea lui Schwarz şi luând $x_i = a_i$ şi $y_i = b_i$ în relația $\left(\langle x, y\rangle\right)^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$, obținem astfel inegalitatea din enunț.

CAPITOLUL III: CARACTERIZAREA TOPOLOGICĂ A MULȚIMILOR. ŞIRURI ÎN SPAȚII TOPOLOGICE, ŞIRURI ÎN SPAȚII METRICE, ŞIRURI ÎN SPAȚII VECTORIALE NORMATE

1. MULȚIMI MĂRGINITE

Problema mărginirii mulțimilor este o problema prioritară în ceea ce priveşte controlul rezultatelor matematice ce se pot obține pe acest tip de mulțimi.
Cadrul general în care poate fi definită noțiunea de mărginire este cel de spațiul vectorial normat şi cel de spațiu metric.

DEFINIȚIA 3.1.1 Fie (E,d) spațiu metric. Mulțimea $A \subset E$ se spune că este o **mulțime mărginită** în acest spațiu metric dacă există $x_0 \in E$ arbitrat dar fixat şi $r > 0$, astfel încât $d(x_0, x) \le r$, pentru orice $x \in A$.

OBSERVAȚIA 3.1.1
a) Mulțimile mărginite nu sunt echivalente cu mulțimile cu un număr finit de elemente.
b) Dacă A este o mulțime mărginită, atunci $\sup\limits_{x,y \in A}\{d(x,y)\}$ se numeşte **diametrul mulțimii** A şi se notează diam A.

Exemple.
a) Dacă $E = \mathbb{R}$ şi d este metrica euclidiană, se spune că mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită, dacă există $r > 0$ astfel încât $A \subset [-r, r]$.
b) Dacă $E = \mathbb{R}^2$ şi d este metrica euclidiană, se spune că mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ este mărginită dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le r$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in A$ adică există un disc cu centrul în origine care să includă mulțimea A.
c) Dacă $E = \mathbb{R}^3$ şi d este metrica euclidiană, se spune că mulțimea $A \subset \mathbb{R}^3$ este mărginită dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \le r$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$, adică există o sferă cu centrul în origine care să includă pe A.

d) Dacă $E=\mathbb{R}^n$, se spune că $A\subset\mathbb{R}^n$ este mărginită dacă şi numai dacă există $r>0$ astfel încât $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\le r$ oricare ar fi $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in A$.

PROPOZIȚIA 3.1.1 Fie $A\subset\mathbb{R}^n$. Se spune că mulțimea A este mărginită dacă şi numai dacă mulțimea proiecțiilor elementelor lui A sunt mulțimi mărginite de numere reale.

Demonstrație. Se presupune că $A\subset\mathbb{R}^n$ este mărginită. Conform cu exemplul anterior punctul d) rezultă $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\le r$, $\forall x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in A$, unde $r>0$ este un număr real fixat. Ținând cont de această inegalitate se poate afirma că: $\left|x_1\right|\le\frac{r}{\sqrt{n}},\left|x_2\right|\le\frac{r}{\sqrt{n}},\ldots,\left|x_n\right|\le\frac{r}{\sqrt{n}}$. Deci, cu alte cuvinte, mărginirea mulțimii A implică faptul că există $r>0$ astfel încât $\frac{-r}{\sqrt{n}}\le x_i\le\frac{r}{\sqrt{n}}$, oricare ar fi $i=\overline{1,n}$ rezultă că mulțimea proiecțiilor de indice i fixat ale elementelor mulțimii A este o mulțime mărginită. Să arătăm acum reciproca. Se presupune că fiecare proiecție este mărginită şi se demonstrează că $A\subset\mathbb{R}^n$ este mărginită.

Într-adevăr, dacă fiecare proiecție este mărginită, atunci are loc relația: $\frac{-r}{\sqrt{n}}\le x_i\le\frac{r}{\sqrt{n}}$, pentru $r>0$ şi orice $i=\overline{1,n}$. Deci, $\left|x_i\right|\le\frac{r}{\sqrt{n}}$, oricare ar fi $i=\overline{1,n}$ sau, echivalent, $x_i^2\le\frac{r^2}{n}$, pentru orice $i=\overline{1,n}$. Atunci $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le r^2\Rightarrow\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\le r$. Deci, $A\subset\mathbb{R}^n$ este mărginită.

Aşadar conform propoziției anterioare, pentru a studia mărginirea mulțimilor din $\mathbb{R}^n$ este suficient să se studieze mărginirea mulțimilor din $\mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 3.1.2 Fie $A\subset\mathbb{R}$. Mulțimea A este mărginită dacă există un interval $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$, unde a şi b sunt numere reale finite astfel încât $A\subset\left[a,b\right]$. Vom spune că $a\in\mathbb{R}$ este **un minorant** pentru mulțimea A şi $b\in\mathbb{R}$ este **un majorant** pentru A.

OBSERVAȚIA 3.1.2 Din Definiția 3.1.2 este evident că o mulțime mărginită are o infinitate de minoranți şi o infinitate de majoranți.

DEFINIȚIA 3.1.3 Cel mai mare minorant al mulțimii A poartă denumirea de **margine inferioară** a mulțimii A şi se notează cu m_A, iar cel mai mic majorant poartă denumirea de **margine superioară** a mulțimii A şi se notează cu M_A.

OBSERVAȚIA 3.1.3

a) Dacă M_A este margine superioară a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, atunci are următoarele proprietăți:

i) pentru orice $x \in A$, $x \leq M_A$;

ii) pentru orice $e > 0$, există $x \in A$ astfel încât $x > M_A - e$.

b) Dacă m_A este margine inferioară a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, atunci are următoarele proprietăți:

i) pentru orice $x \in A$, $x \geq m_A$;

ii) pentru orice $e > 0$, există $x \in A$ astfel încât $x < m_A + e$.

PROPOZIȚIA 3.1.2 (Unicitatea şi existența marginilor unei mulțimi). Orice mulțime de numere reale mărginită are o margine superioară, respectiv o margine inferioară. Aceste margini sunt unice.

Demonstrație. Fie $A \subset \mathbb{R}$ mărginită. Existența marginii superioare M_A se arată prin construcția efectivă a acesteia. Procedeul de construcție este următorul. Fie n primul număr întreg care verifică proprietatea $x < n$, pentru orice $x \in A$. Acest număr există deoarece mulțimea A este mărginită, deci majorată superior. $n-1$ reprezintă partea întreagă a marginii superioare M_A. Se împarte intervalul $(n-1, n)$ în zece părți egale. Fie $n_1 \in (n-1, n)$ cel mai mic număr de diviziune astfel încât $x < n_1$, oricare ar fi $x \in A$. Numărul $n_1 - 0{,}1$ reprezintă pe M_A cu o zecimală exactă. Se consideră intervalul $(n_1 - 0{,}1,\ n_1)$. Acest interval se împarte în zece părți egale. Fie $n_2 \in (n_1 - 0{,}1,\ n_1)$ cel mai mic număr de diviziune pentru care are loc proprietatea: $x < n_2$ pentru orice $x \in A$. Numărul $n_2 - 0{,}1$ reprezintă pe M_A cu două zecimale exacte. Se poate continua procedeul pentru determinarea lui M_A cu oricâte zecimale exacte. În acest mod, teoretic rezultă existența lui M_A (deşi, uneori, practic este imposibil să se determine

M_A). Unicitatea lui M_A se demonstrează prin reducere la absurd. Adică se presupune că mai există o margine superioară a lui A notată M_{1A} astfel încât $M_{1A} > M_A$. Fie $e = \frac{M_{1A} - M_A}{2}$. Atunci, conform proprietății marginii superioare se afirmă că există un $x' \in A$ astfel încât:

$$x' > M_{1A} - e = M_{1A} - \frac{M_{1A} - M_A}{2} = \frac{M_{1A} + M_A}{2} > \frac{2M_A}{2} = M_A$$

deci, $x' > M_A, x' \in A$. Dar aceasta contrazice faptul că M_A este marginea superioară. Contradicția provine din faptul că s-a presupus că mai există încă o margine superioară. Aşadar marginea superioară este unică. În mod analog se raționează pentru marginea inferioară.

PROPOZIȚIA 3.1.3 Fie (E,d) spațiu metric şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii $A \subset E$. Orice vecinătate a punctului x_0 conține o infinitate de puncte din mulțimea A.

Demonstrație. Se raționează prin reducere la absurd. Se presupune că există o vecinătate $\overline{S}(x_0, r)$ a lui x_0 care să conțină un număr finit de puncte din A. Fie acestea $y_1, y_2, ..., y_n$. Fie $d_i = d(x_0, y_i)$ distanța de la x_0 la y_i. Se notează $d = \min\{d_1, d_2, ..., d_n\}$. Atunci $\overline{S}(x_0, y_i) \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Se ajunge la contradicție cu definiția punctului de acumulare. Dacă $E \equiv \mathbb{R}$, atunci $\overline{S}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$.

OBSERVAȚIA 3.1.4

a) Ținând cont de Propoziția 3.1.3, rezultă că mulțimile cu un număr finit de elemente nu au puncte de acumulare.

b) După cum se ştie $\mathbb{N}' = \emptyset$. Deci, există şi mulțimi cu o infinitate de elemente care nu au puncte de acumulare. Atunci se pune problema care sunt mulțimile care au puncte de acumulare.

PROPOZIȚIA 3.1.4 (Teorema lui Weirstrass-Bolzano). Orice mulțime infinită şi mărginită are cel puțin un punct de acumulare.

Demonstrație. Se consideră că mulțimea A este o mulțime de numere reale. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime mărginită cu o infinitate de elemente. Datorită faptului că mulțimea este mărginită rezultă că există $[a,b]$ astfel încât $A \subset [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Fie $c = \frac{a+b}{2}$ mijlocul acestui interval. Deoarece A

este infinită, cel puțin unul din intervalele $[a,c]$ sau $[c,b]$ conțin o infinitate de elemente şi se notează $[a_1,b_1]$ intervalul cu o infinitate de puncte din A. Din modul cum a fost construit, rezultă că $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Fie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ mijlocul intervalului $[a_1,b_1]$. Atunci cel puțin unul din intervalele $[a_1,c_1]$ sau $[c_1,b_1]$ conține o infinitate de elemente ale mulțimii A şi se notează $[a_2,b_2]$ intervalul care conține infinitatea de puncte. Din modul cum a fost construit, rezultă $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$. Fie $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ mijlocul intervalului $[a_2,b_2]$. Deoarece acest interval conține o infinitate de puncte ale mulțimii A, atunci cel puțin unul din intervalele $[a_2,c_2]$ sau $[c_2,b_2]$ conține o infinitate de elemente ale mulțimii A şi se notează $[a_3,b_3]$ intervalul ce conține o infinitate de puncte. Din modul cum a fost construit, rezultă $b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^3}$. Continuând astfel, se obține intervalul $[a_n,b_n]$ ce conține o infinitate de puncte din mulțimea A şi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. În acest mod s-au construit şirurile de numere raționale $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ care verifică următoarele proprietăți:

i) $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1$;

ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Două şiruri de numere raționale care verifică aceste proprietăți au limită şi limita lor este comună. Deci, există $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi $x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. Se arată în continuare că punctul x_0 astfel construit este un punct de acumulare al mulțimii A. Fie $e > 0$ un număr pozitiv arbitrar, atunci există un rang $N \in$ ¥ astfel încât pentru orice $n > N$ să rezulte că intervalul $[a_n,b_n]$ este inclus în intervalul $(x_0 - e, x_0 + e)$ care este o vecinătate oarecare a lui x_0 în cazul topologiei metrice a lui ¡ cu metrica euclidiană. Dar, intervalul $[a_n,b_n]$ conține o infinitate de termeni ai mulțimii A. Deci, rezultă $(x_0 - e, x_0 + e) \cap A \setminus \{x_0\} \neq f$. Cum e a fost ales arbitrar, rezultă $x_0 \in A'$, adică x_0 este punct de acumulare al mulțimii A.

Observația 3.1.5

a) Demonstrația anterioară este dată pentru mulțimi de numere reale $(A \subset \mathbb{R})$, dar ea este adevărată şi pentru mulțimi $A \subset \mathbb{R}^m$ şi în acest caz intervalul $[a,b]$ care s-a considerat în demonstrație se înlocuieşte cu o sferă închisă $\overline{S}(x_0, r)$ ce include mulțimea A.

b) Dacă $x_0 \in A$ nu este punct de acumulare al mulțimii A, atunci el este un punct izolat al acesteia.

c) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită, rezultă că A' este o mulțime mărginită.

Marginea superioară a mulțimii A' se notează L_A, iar marginea inferioară se notează cu l_A şi mai poartă denumirea de **limită superioară**, respectiv **limită inferioară** a mulțimii A. Se mai scrie astfel: $L_A = \overline{\lim} A$ şi $l_A = \underline{\lim} A$.

Limita superioară L_A are următoarele proprietăți:

1) la dreapta lui $L_A + e$, oricare ar fi $e > 0$, există un număr finit de puncte din mulțimea A;

2. la dreapta lui $L_A - e$, oricare ar fi $e > 0$, există o infinitate de puncte ale mulțimii A.

Limita inferioară l_A are proprietăți analoage cu L_A.

Între cele patru numere importante pentru o mulțime mărginită A există următoarea relație:

$$m_A \le l_A \le L_A \le M_A.$$

Punctul c) al Observației 3.1.5 este evident ținând cont de aceste inegalități.

2. TIPURI DE MULȚIMI

2.1 MULȚIMI COMPACTE

DEFINIȚIA 3.2.1 O familie de mulțimi $\{ A_i \mid i \in I \}$ constituie **o acoperire a mulțimii** B, dacă $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Dacă mulțimile A_i sunt toate mulțimi deschise, se spune că familia de mulțimi este o acoperire deschisă a lui B. Dacă I este finită atunci acoperirea este finită.

OBSERVAȚIA 3.2.1 Mulțimea A este deschisă dacă $A = \overset{0}{A}$, iar A este închisă dacă $A = \overline{A}$ sau $\complement A$ este deschisă.

DEFINIȚIA 3.2.2 O mulțime $C \subset \mathbb{R}$ este **compactă** dacă este închisă şi mărginită.

Exemple.

i) Dacă $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, atunci A este compactă.

ii) $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, intervalul $[a, b]$ este mulțime compactă.

iii) În $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $\overline{S}(x_0, r)$, $r < \infty$ este o mulțime compactă.

PROPOZIȚIA 3.2.1 Dacă $C \subset \mathbb{R}$ este o mulțime compactă, atunci din orice acoperire a sa cu intervale deschise se poate extrage o acoperire finită (**Borel-Lebesque**).

2.2 MULȚIMI CONEXE

Noțiunea de mulțime conexă poate fi exprimată intuitiv spunând că este formată dintr-o singură bucată.

DEFINIȚIA 3.2.3 Fie A şi B două mulțimi. Se spune că A şi B **sunt separate** dacă:

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varphi .$$

DEFINIȚIA 3.2.4 Mulțimea M este **conexă** dacă nu poate fi scrisă ca o reuniune a două mulțimi nevide şi separate.

Un criteriu destul de intuitiv care exprimă conexitatea unei mulțimi din $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ este dat de propoziția următoare.

PROPOZIȚIA 3.2.2 Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = \overline{1, 2}$, este conexă dacă orice două puncte $x, y \in A$ pot fi legate între ele cu o linie poligonală L ale cărei puncte aparțin în totalitate lui A.

Exemple

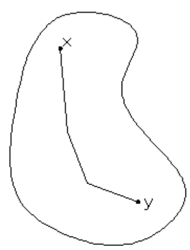


Figura 1

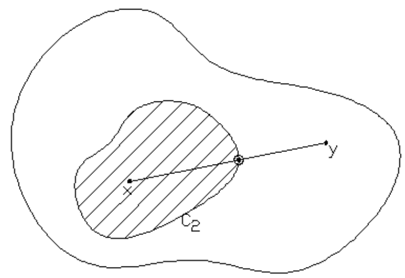


Figura 2

Mulțimea din figura 1 este conexă, iar mulțimea din figura 2 (nu se consideră punctele curbei C_2) nu este conexă.

DEFINIȚIA 3.2.5
a) O mulțime D deschisă şi conexă se numeşte **domeniu**.
b) O mulțime F închisă şi conexă se numeşte **continuu**.

Exemple.
1) (a,b), $S(x_0,r)$, $r>0$, este domeniu
2) $[a,b]$, $\overline{S}(x_0,r)$, $r>0$, este continuu.

O categorie foarte importantă de mulțimi sunt cele definite în continuare.

DEFINIȚIA 3.2.6
a) A este mulțime **rară** dacă $\overline{\overset{0}{A}}=f$.
b) Dacă $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şi A_n sunt mulțimi rare atunci A este mulțime **slabă** sau de **categoria I-a Baire**.
c) Dacă $A=A'$, atunci A este mulțime **perfectă**.

Un exemplu de mulțime rară şi perfectă este mulțimea lui Cantor (vezi Exercițiul 2.5.10)

3. ŞIRURI ÎN SPAŢII TOPOLOGICE, SPAŢII METRICE, SPAŢII VECTORIALE NORMATE

DEFINIŢIA 3.3.1 Fie E o mulţime oarecare şi $f:\mathbb{N}\to E$ o funcţie, $x_n = f(n)$ poartă denumirea de **termenul general al şirului**, generat de funcţia f în mulţimea E, iar şirul de elemente din mulţimea E ce are acest termen general se mai notează şi astfel:

$(x_n)_{n\geq 0}$ (nu interesează forma termenilor şirului)

sau

$\{x_n\}_{n\geq 0}$ (şirul este considerat ca o mulţime; interesează elementele lui).

OBSERVAŢIA 3.3.1

a) Se observă din definiţia anterioară că şirul este mulţimea valorilor unei funcţii oarecare f, dar care are domeniul de definiţie $\mathbb{N}$.

b) Natura elementelor mulţimii E dă tipul şirului. Astfel:

- $E = \mathbb{R}$ - şir de numere reale;
- $E = \mathbb{C}$ - şirul este de numere complexe;
- $E = \mathbb{R}^n$ - şir de elemente din $\mathbb{R}^n$;
- $E = B^A$ - şirul funcţiilor $f: A\to B$.

c) Pentru a putea fi făcut un studiu complet al şirurilor, mulţimea E trebuie să fie organizată cu structura de spaţiu vectorial normat. Dar studiul şirurilor mai poate fi efectuat şi dacă E este înzestrată cu structura de spaţiu metric sau de spaţiu topologic (nu se pot face operaţii cu şiruri).

Problema care se pune în legătură cu şirurile, după cum se ştie, este monotonia, mărginirea şi convergenţa acestora.

Monotonia. Monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n\in E$, are sens numai dacă E este o mulţime ordonată şi această noţiune se defineşte astfel:

DEFINIŢIA 3.3.2 Fie $\Re$ o relaţie de ordine pe mulţimea E. Se spune că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este **monoton** dacă oricare ar fi $n,m\in\mathbb{N}$, cu $n>m$, rezultă $x_n \Re x_m$.

Dacă $E=\mathbb{R}$, atunci $\Re \equiv "<"$ sau $\Re\equiv "\leq"$.

După cum se ştie, monotonia şirurilor de numere reale este:

a) $n<m$ rezultă $x_n<x_m$ - şirul strict crescător;

b) $n<m$ rezultă $x_n\leq x_m$ - şirul crescător.

În mod asemănător se definesc şirurile descrescătoare.

Aceste afirmaţii sunt cazuri particulare ale Definiţiei 3.2.2.

Mărginirea. Noțiunea de mărginire a unui şir este posibilă dacă mulțimea E este un spațiu metric cel puțin. Cum şirul este de fapt mulțimea $\{x_n\}_{n\geq 0}$, definiția mărginirii este următoarea.

DEFINIȚIA 3.3.3 Fie (E,d) spațiu metric, şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $x_n \in E$, este **mărginit**, dacă există $x_0 \in E$ fixat şi $r > 0$, astfel încât $d(x_0, x_n) \leq r$, pentru orice $x_n \in \{x_n\}$, $n \geq 0$.

Cum orice şir poate fi considerat ca o mulțime, folosind notația $\{x_n\}_{n\geq 0}$ toate afirmațiile legate de mulțimi mărginite sunt valabile şi pentru şiruri.
Dacă $E = \mathbb{R}^m$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in \mathbb{R}^m$ are următoarea formă:

$$x_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^{m-1}, x_n^m\right),$$

unde $\left(x_n^i\right)_{n\geq 0}$, $i = \overline{1,m}$ sunt şiruri de numere reale care se mai numesc proiecțiile şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Deoarece un şir este o mulțime, propoziția referitoare la mărginirea mulțimilor din $\mathbb{R}^m$ se transpune şi la mărginirea şirurilor astfel.

PROPOZIȚIA 3.3.1 Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in \mathbb{R}^m$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^m$. Acest şir este mărginit dacă şi numai dacă fiecare proiecție a sa $\left(x_n^i\right)_{n\geq 0}$, $i = \overline{1,m}$, este un şir mărginit.

Convergența. Noțiunea de convergență a unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este posibilă dacă mulțimea E este înzestrată cu structura de spațiu topologic, spațiu metric, spațiu vectorial normat. Definirea convergentei în aceste structuri este următoarea.

DEFINIȚIA 3.3.4 Fie (E,t) un spațiu topologic şi $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir din acest spațiu. Se spune că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este **convergent în topologia** t dacă există $x_0 \in E$ astfel încât pentru orice V_{x_0}, o vecinătate a punctului x_0, există un rang N astfel încât pentru orice $n > N$ rezultă $x_n \in V_{x_0}$. Definiția 3.3.4 se mai poate enunța şi astfel. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge către x_0, dacă orice vecinătate conține un număr infinit de termeni, iar în afara oricărei vecinătăți se află un număr finit de termeni ai şirului.

DEFINIȚIA 3.3.5 Fie (E,d) un spațiu metric și $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir din acest spațiu. se spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ este **convergent în metrica** d, dacă există $x_0 \in E$ astfel încât oricare ar fi $e > 0$, există $N(e) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(e)$ rezultă $d(x_0, x_n) < e$.
Dacă $E =$ ¡ și d este metrica euclidiană pe ¡, adică modulul, atunci Definiția 3.2.5 are forma: $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in$ ¡ este convergent, dacă există $x_0 \in$ ¡ astfel încât oricare ar fi $e > 0$, există $N(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi $n > N(e)$ rezultă $|x_n - x_0| < e$.

DEFINIȚIA 3.3.6 Fie $(E, \|\cdot\|)$ spațiu vectorial normat. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in E$ este **convergent** dacă există $x_0 \in E$ astfel încât oricare ar fi $e > 0$, există $N(e) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(e)$ rezultă $\|x_n - x_0\| < e$.

OBSERVAȚIA 3.3.2
a) Elementul $x_0 \in E$ care apare în Definițiile 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6 poartă denumirea de limită a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și acest lucru se scrie astfel:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ sau } x_n \to x_0 .$$

b) Definițiile 3.3.4., 3.3.5., 3.3.6. sunt echivalente.

PROPOZIȚIA 3.3.2 (Unicitatea limitei) Fie (E,t) spațiu topologic separat și $x_n \xrightarrow{t} x_0$. Atunci x_0 este unică.
Demonstrație. Se presupune că x_0 nu este unică, adică există $y_0 \in E$ astfel încât $x_n \xrightarrow{t} y_0$. Conform Definiției 3.3.4 se poate scrie că:

$$x_n \xrightarrow{t} x_0 \Leftrightarrow \left[(\forall) V_{x_0}\ (\exists) N_1 \in \text{¥ a.î. } (\forall) n > N_1 \Rightarrow x_n \in V_{x_0} \right]$$

și

$$x_n \xrightarrow{t} y_0 \Leftrightarrow \left[(\forall) V_{y_0}\ (\exists) N_1 \in \text{¥ a.î. } (\forall) n > N_1 \Rightarrow x_n \in V_{y_0} \right]..$$

Dacă se notează $N = \max\{N_1,\ N_2\}$, atunci din cele două afirmații rezultă că pentru orice $n > N$ avem $x_n \in V_{x_0}$ și $x_n \in V_{y_0}$, de unde rezultă $V_{x_0} \cap V_{y_0} \neq f$, contradicție cu faptul că E este spațiu topologic separat. Deci, rezultă $x_0 \equiv y_0$, ceea ce demonstrează unicitatea limitei.

OBSERVAȚIA 3.3.2 Dacă spațiul topologic nu este separat, un şir convergent poate avea mai multe limite, ceea ce arată că în spații topologice neseparate convergența nu este bine definită. În spațiul metric şi spațiul vectorial normat convergența este bine definită deoarece se ştie că orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric şi orice spațiu metric este spațiu topologic separat.

PROPOZIȚIA 3.3.3 Fie $(x_n)_{n\ge 0}$, $x_n \in \mathbb{R}^n$. Şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este convergent dacă şi numai dacă orice proiecție a sa este convergentă.

Demonstrație.

Se presupune că $(x_n)_{n\ge 0}$, $x_n \in \mathbb{R}^n$ este un şir convergent. Se demonstrează că $(x_n^i)_{n\ge 0}$ este convergent, oricare ar fi $i=\overline{1,m}$. Fie $x_n \in \mathbb{R}^m \Rightarrow x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, ..., x_n^m)$. Datorită faptului că şirul este convergent către $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, ..., x_0^m)$, rezultă conform Definiției 3.3.5 că: $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists) N(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall) n > N(\varepsilon)$, rezultă:

$$\sqrt{(x_n^1 - x_0^1)^2 + (x_n^2 - x_0^2)^2 + ... + (x_n^m - x_0^m)^2} < \varepsilon \ .$$

Din această inegalitate se obține:

$$\begin{cases} \left|x_n^1 - x_0^1\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon', \\ \left|x_n^2 - x_0^2\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon', \\ \vdots \\ \left|x_n^m - x_0^m\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon'. \end{cases}$$

Deci, rezultă că proiecțiile $(x_n^i)_{n\ge 0}$, $i=\overline{1,m}$ sunt convergente către numerele reale x_0^i, $i=\overline{1,m}$.

Reciproc. Se presupune că $x_n^i \to x_0^i$, $i=\overline{1,m}$ şi se demonstrează că $x_n \to x_0$. Raționamentul se face în mod analog. Într-adevăr, $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists) N(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall) n > N(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \left|x_n^1 - x_0^1\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \\ \vdots \\ \left|x_n^m - x_0^m\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Prin ridicare la pătrat se obține:

$$\begin{cases} \left(x_n^1 - x_0^1\right) < \dfrac{\varepsilon^2}{n}, \\ \vdots \\ \left(x_n^m - x_0^m\right) < \dfrac{\varepsilon^2}{n}. \end{cases}$$

Adunând inegalitățile termen cu termen se obține:

$$(x_n^i - x_0^1)^2 + \ldots + (x_n^m - x_0^m)^2 < \frac{n\varepsilon^2}{n},$$

deci

$$\sqrt{(x_n^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x_n^m - x_0^m)^2} < \varepsilon .$$

OBSERVAȚIA 3.3.4

a) Propoziția 3.3.3 reduce convergența șirurilor din $\mathbb{R}^m$ la convergența a m șiruri de numere reale $\left(x_n^i\right)_{n\geq 0}$, $i=\overline{1,m}$, numite proiecțiile șirului din $\mathbb{R}^m$.

b) Conform Propoziției 3.3.3, dacă $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$, $x_n \in \mathbb{R}^m$ este convergent către $x_0 \in \mathbb{R}^m$, atunci are loc următoarea egalitate:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n^m\right).$$

c) Ținând cont de definiția mărginirii și definiția convergenței, rezultă că orice șir convergent este mărginit, dar reciproca nu este în general valabilă.

Exemple

1. Fie $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(\dfrac{1}{n+1}, \sqrt[n]{n}, n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$. Să se studieze convergența acestui șir și în caz afirmativ să se calculeze limita sa.

Soluție. Proiecțiile șirului sunt:

$$x_n^1 = \frac{1}{n+1},\ x_n^2 = \sqrt[n]{n},\ x_n^3 = n\sin\frac{\pi}{n}.$$

Conform Propoziției 3.3.3, șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent dacă fiecare proiecție a sa este convergentă și are loc relația:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \lim_{n\to\infty} x_n^3\right).$$

Se studiază convergența proiecțiilor calculând direct limitele:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ (s-a aplicat consecința lemei lui Stolz),

$$\lim_{n\to\infty} x_n^3 = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{p}{n} = \lim_{n\to\infty} p\,\frac{\sin\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}} = p\ \text{. Deci, } \lim_{n\to\infty} x_n = (0, 1, p)\,.$$

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}, \sum\limits_{K=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}\right)$. Să se studieze convergența acestui şir şi în caz afirmativ să se calculeze limita sa.

Soluție. Avem:

$$x_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\,,$$

$$x_n^2 = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\text{. Deci,}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2\right) = \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\, 1\right) = \left(\arcsin\Big|_0^1,\, 1\right) = \left(\frac{p}{2},\, 1\right).$$

4. ŞIRURI CAUCHY

Noțiunea de şir Cauchy sau fundamental este o noțiune utilă în studiul convergenței şirurilor atunci când limita este greu sau imposibil de calculat. Această noțiune se defineşte astfel.

DEFINIȚIA 3.4.1 Fie (E,d) spațiul metric şi $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in E$, un şir de elemente ale acestui spațiu. Se spune că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir **Cauchy** sau **şir fundamental**, dacă pentru orice $e > 0$, există $N(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi $n,m > N(e)$ rezultă că $d(x_n, x_m) < e$.

OBSERVAȚIA 3.4.1

a) Este simplu de observat că dacă $E = ¡$ sau $E = ¡^p$, atunci condiția din Definiția 3.4.1 devine:

$$\left|x_n - x_m\right| < e \text{ sau } \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(x_n^i - x_m^i\right)^2} < e \,..$$

b) Deoarece $n,m \in$ ¥, dacă se consideră $m > n$, atunci există un număr natural p oarecare, dar fixat astfel încât $m = n + p$.

c) Ținând cont de "b)" condiția din Definiția 3.3.1 în acest caz devine $d(x_n, x_{n+p}) < e$, pentru orice $p \in$ ¥, p fixat.

PROPOZIȚIA 3.4.1 Orice şir convergent este un şir fundamental sau un şir Cauchy.

Demonstrație. Fie $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ un şir convergent către $x_0 \in E$, unde E este un spațiu metric înzestrat cu metrica d. Conform definiției convergenței în spații metrice, au loc următoarele afirmații:

- pentru orice $e > 0$, există $N_1\left(e\right) > 0$ astfel încât $n > N_1\left(e\right)$ rezultă $d(x_0, x_n) < e$.
- pentru orice $e > 0$, există $N_2\left(e\right) > 0$ astfel încât $m > N_2\left(e\right)$ rezultă $d(x_0, x_m) < e$.

Fie $N\left(e\right) = \max\left\{N_1\left(e\right), N_2\left(e\right)\right\}$. Atunci au loc simultan relațiile:

- oricare ar fi $n > N\left(e\right)$ rezultă $d(x_0, x_n) < e$
- oricare ar fi $m > N\left(e\right)$ rezultă $d(x_0, x_m) < e$. Atunci rezultă că pentru orice $n,m > N\left(e\right)$ avem:

$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_n) + d(x_0, x_m) < 2e = e'$. Deci, $d(x_n, x_m) < e$.

Conform cu Definiția 3.4.1 şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ este un şir Cauchy.

OBSERVAȚIA 3.4.2 Reciproca Propoziției 3.4.1 nu este în general valabilă, aşa cum reiese din exemplul următor:

Exemplu. Fie $x_n \in$ ¤ definit astfel $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, … şirul care aproximează prin lipsă pe $\sqrt{2}$. Este evident că oricare ar fi $e > 0$, există $N\left(e\right) > 0$, astfel încât $\left(\forall\right) n,m > N\left(e\right)$ rezultă că $\left|x_n - x_m\right| < e$. Deci $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este un şir **Cauchy**.

Dar în spațiul metric (¤$, d$), spațiu din care fac parte toți termenii şirului, acesta nu este convergent pentru că el are limita $\sqrt{2} \notin$ ¤.

Acest exemplu arată că există şiruri **Cauchy** care nu sunt convergente în spațiul termenilor şirurilor.

PROPOZIȚIA 3.4.2 Orice şir **Cauchy** este un şir mărginit.

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in E$, E spațiu metric înzestrat cu metrica d. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir **Cauchy**, atunci conform Definiției 3.4.1 se poate afirma că pentru orice $e > 0$ există $N(e) = n_0 > 0$, astfel încât oricare ar fi $n, m > n_0$, rezultă $d(x_n, x_m) < e$. Aceasta înseamnă că pentru termenii $x_0, x_1, ..., x_n$ are loc relația: $d\left(x_{n_0}, x_i\right) \geq e$, $(\forall) i = \overline{0, n_0}$. Fie $d = \max\limits_{i=\overline{0,n_0}} \left\{d\left(x_{n_0}, x_i\right)\right\}$. Atunci, $d\left(x_{n_0}, x_m\right) < d + e = r$, $r > 0$, pentru orice $m \in$ ¥. Ceea ce arată că mulțimea $\left\{x_0, x_1, ..., x_{n_0}, ...\right\}$ este mărginită, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir mărginit.

OBSERVAȚIA 3.4.3

a) S-a văzut că nu orice şir **Cauchy** este şi şir convergent. Spațiile metrice în care are loc această afirmație se numesc **spații metrice complete** sau **spații BANACH**. Deci, un spațiu BANACH este un spațiu metric care verifică următoarea proprietate: **Orice şir de elemente din spațiul BANACH este convergent şi are limită în acest spațiu.**

b) • $E =$ ¤, d - metrică euclidiană, nu este spațiu BANACH;

• $E =$ ¡$^m, m \geq 1$, d - metrică euclidiană, este spațiu BANACH.

• $E = [a, b] \subset$ ¡, d - metrică euclidiană, este spațiu BANACH.

PROPOZIȚIA 3.4.3 (**Criteriul de convergență al lui Cauchy pentru şiruri**) Într-un spațiu metric complet, un şir este convergent dacă şi numai dacă este un şir **Cauchy**.

Demonstrație. Faptul că orice şir convergent este un şir **Cauchy** s-a demonstrat. Se presupune că şirul este **Cauchy** şi se va arăta că este convergent. Pentru a uşura scrierea se presupune $E =$ ¡, iar metrica se consideră ca fiind cea euclidiană. Fie $x_n \in$ ¡ termenul general al unui şir **Cauchy.** Rezultă că pentru orice $e > 0$, există $N(e) > 0$, astfel încât $(\forall) n > N(e)$ avem $\left|x_{n+p} - x_n\right| < e$, pentru orice $p \in$ ¥. Ținând cont de proprietatea modulului, relația anterioară devine:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < e \iff x_n - e < x_{n+p} < x_n + e .$$

Dacă în această inegalitate se fixează $n = n_0$, rezultă $x_{n_0} - e < x_{n_0+p} < x_{n_0} + e$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că mulțimea $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$, este o mulțime mărginită, adică şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ este mărginit. Dar se ştie conform **teoremei Weierstrass-Bolzano** că orice mulțime infinită şi mărginită are cel puțin un punct de acumulare. Dacă în cazul de față punctul de acumulare este unic, teorema este demonstrată. Se presupune că există mai multe puncte de acumulare pentru şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$. Fie L cel mai mare dintre acestea şi l cel mai mic dintre acestea. Deci, vor avea loc relațiile:

$$x_{n_0} - e < L < x_{n_0} + e \text{ echivalent cu } \left|L - x_{n_0}\right| < e$$

şi

$$x_{n_0} - e < l < x_{n_0} + e \text{ echivalent cu } \left|l - x_{n_0}\right| < e\ .$$

Rezultă:

$$\left|L - x_{n_0}\right| + \left|x_{n_0} - l\right| < 2e = e'$$

şi

$$\left|L - l\right| < e'\ .$$

Cum e' este orice număr pozitiv, rezultă $L = l$, adică nu pot exista mai multe puncte de acumulare.

5. SUBŞIRURI. PRINCIPIUL CONTRACȚIEI

DEFINIȚIA 3.5.1 Fie $x_n = f(n)$ termenul general al unui şir de elemente din spațiul metric E, generat de funcția f şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcție oarecare. Atunci $x_{g(n)} = (f \circ g)(n)$ este termenul general al unui subşir al şirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de funcția g.

OBSERVAȚIA 3.5.1
a) Cum mulțimea $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ este o mulțime de puterea conținutului, rezultă că un şir are o infinitate de puterea conținutului de subşiruri.
b) Este evident că $\{x_n\}_{n \geq 0} \supseteq \{x_{g(n)}\}_{n \geq 0}$.

Exemplu. Dacă $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 2n$, atunci subşirul extras de această funcție din şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este format numai din termenii indice par ai şirului inițial, adică $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, x_{2n+2}, \ldots$.

Subşirurile pot fi considerate ca şiruri dacă ele nu se raportează la şirurile din care sunt extrase.
Subşirurile prezintă un rol de seamă în studiul convergenței şirului din care ele sunt extrase, aşa cum rezultă din următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 3.5.1
a) Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr oarecare, dar fixat. Atunci funcțiile $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definite prin $g_i(k) = pk + i$, $i = \overline{0, p-1}$, generează p subşiruri ale şirului dat $(x_n)_{n\geq 0}$. Acestea sunt $\{x_{pk}\}_{k\geq 0}, \{x_{pk+1}\}_{k\geq 0}, \{x_{pk+2}\}_{k\geq 0}, \ldots, \{x_{pk+p+1}\}_{k\geq 0}$.
Dacă fiecare din aceste subşiruri sunt convergente şi au fiecare aceeaşi limită l, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi are limita l.
b) Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită ca a şirului.

PROPOZIȚIA 3.5.2 (**Lema lui Cesaro**). Din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent.
Demonstrație. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit de numere reale. Deci, conform definiției mărginirii rezultă că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq x_n \leq b$, pentru orice $n \geq 0$. Dacă mulțimea valorilor şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ are un număr finit de elemente, atunci cu siguranță şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ conține cel puțin un subşir constant. Şi cum orice şir constant este convergent, rezultă că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent. Dacă mulțimea $\{x_n\}_{n\geq 0} \in \aleph_0$, atunci aceasta fiind şi o mulțime mărginită, conform cu **teorema Weierstrass-Bolzano**, rezultă că are cel puțin un punct de acumulare. Fie x_0 unul dintre punctele de acumulare. Atunci, conform definiției punctului de acumulare, în interiorul intervalului $(x_0 - 1,\ x_0 + 1)$ există o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Fie $x_1' \neq x_0$ unul dintre acestea. În vecinătatea $\left(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2}\right)$, de asemenea, există o infinitate de termeni ai şirului. Fie x_2' unul dintre aceştia cu proprietatea că $x_2' \neq x_0$ şi $x_1' \neq x_2'$. Continuând raționamentul, rezultă că în vecinătatea $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ există o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Fie x_n' unul dintre aceştia cu proprietatea că $x_n' \neq x_k'$, pentru orice $k = \overline{0, n-1}$. În acest

fel s-a construit şirul $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$ care din modul de construcţie este evident că are limita x_0. Dar acest şir aşa cum a fost construit este un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Aşadar, lema a fost demonstrată.

PROPOZIŢIA 3.5.3 Orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent.

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in \mathbb{R}$ şir monoton şi mărginit. Fără a micşora generalitatea propoziţiei presupunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător. Mulţimea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ fiind mărginită nu poate avea puncte de acumulare infinite. Fie $L = \overline{\lim}\{x_n\}$ şi $l = \underline{\lim}\{x_n\}$. Se consideră $e = \dfrac{L-l}{3}$. Atunci, conform definiţiei punctului de acumulare rezultă că în vecinătatea $(l-e, l+e)$ şi $(L-e, L+e)$ există câte o infinitate de termeni ai şirului. Fie $x_{n_1} \in (l-e,\, l+e)$, $x_{n_2} \in (L-e,\, L+e)$ astfel încât $n_1 \geq n_2$. Datorită faptului că vecinătăţile conţin o infinitate din termenii şirului, această alegere este posibilă. În plus, există $x_{n_3} \in (l-e,\, l+e)$ astfel încât $n_2 < n_3$. Dar, $x_{n_1} < x_{n_2}$ şi $x_{n_2} > x_{n_3}$ contrazic faptul că şirul este crescător. Contradicţia provine din faptul că a fost admisă existenţa celor două vecinătăţi $(l-e, l+e)$ şi $(L-e, L+e)$. Cum aceste vecinătăţi nu pot exista simultan, rezultă $L = l$, adică şirul trebuie să fie convergent.

PROPOZIŢIA 3.5.4 (**Lema lui Stolz**). Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale care satisfac proprietăţile:

i) $(x_n)_{n\geq 0}$ şir oarecare;

ii) $(y_n)_{n\geq 0}$ şir monoton şi nemărginit;

iii) $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \to l$.

Atunci, $\dfrac{x_n}{y_n} \to l$.

Această lemă, pe lângă faptul că contribuie direct la determinarea limitei unor şiruri, are două consecinţe importante:

Consecinţa 1. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = l$

Consecința 2. Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

În continuare, cu ajutorul şirurilor se va demonstra propoziția intitulată "*Principiul contracției*" care are o importanță deosebită în demonstrarea unor importante teoreme de analiză matematică, cum ar fi: Teorema de existență şi unicitate pentru funcțiile implicite şi Teorema de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy pentru ecuații şi sisteme de ecuații diferențiale.

DEFINIȚIA 3.5.2 Fie (X,d) un spațiu metric şi $j:X\to X$ o aplicație oarecare. Dacă există $c\in[0,1)$ astfel încât $d(j(x),j(y))\le c\cdot d(x,y)$, oricare ar fi $x,y\in X$, atunci aplicația j se numeşte **contracția** spațiului metric X şi $c\in[0,1)$ este **coeficientul de contracție**.

OBSERVAȚIA 3.5.2

a) Dacă $f:[a,b]\to[a,b]$ este o funcție monotonă, atunci f are un punct fix.

b) Dacă $f:[a,b]\to[a,b]$ este o funcție derivabilă şi $c=\sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|<1$, atunci f este contracție pe $[a,b]$.

PROPOZIȚIA 3.5.5 (**Principiul contracției**) Fie (X,d) spațiu metric complet şi $j:X\to X$ o contracție a acestuia. Există şi este unic punctul $x\in X$ astfel încât $j(x)=x$.

Demonstrație. Punctul x care verifică condiția din Propoziția 3.5.5 poartă denumirea de punct fix al contracției j. Pentru demonstrarea propoziției trebuie demonstrată unicitatea şi existența acestui punct.

Unicitatea. Se presupune prin absurd că există $x'\ne x$ două puncte fixe ale lui j. Atunci, ținând cont de faptul că j este o contracție, rezultă: $d(j(x),j(x'))\le c\cdot d(x,x')$. Din faptul că x şi x' sunt puncte fixe rezultă: $j(x)=x$, $j(x')=x'$. Deci, rezultă că $d(x,x')\le c\cdot d(x,x')$. Adică, $d(x,x')(1-c)\le 0$. Din această inegalitate se obține $d(x,x')\le 0$. Dar se ştie că d este o metrică şi deci, $d(x,x')\ge 0$. Din cele două inegalități, rezultă că $d(x,x')=0 \Leftrightarrow x=x'$.

Existența. Pentru a demonstra existența punctului fix se construieşte în spațiul metric X şirul aproximațiilor succesive şi se demonstrează că acest

şir este un şir **Cauchy**. Fie $x_0 \in X$ un punct arbitrar, dar fixat. Şirul aproximaţiilor succesive se construieşte astfel:
$x_1 = j(x_0),\ x_2 = j(x_1),\ \ldots,\ x_n = j(x_{n-1}),\ \ldots$. Se arată că acest şir este un şir Cauchy. Pentru aceasta se procedează astfel. Fie:

$$d = d(x_0, x_1),$$

$$d(x_1, x_2) = d(j(x_0), j(x_1)) \le c \cdot d(x_0, x_1) = c \cdot d,$$

$$d(x_2, x_3) = d(j(x_1), j(x_2)) \le c \cdot d(x_1, x_2) \le c^2 \cdot d,$$

$$d(x_3, x_4) = d(j(x_2), j(x_3)) \le c \cdot d(x_2, x_3) \le c^3 \cdot d,$$

…………………………...................................

$$d(x_{n-1}, x_n) \le c^{n-1} \cdot d.$$

…………………………...................................

Ţinând cont de aceste relaţii, rezultă că $d(x_{n+p}, x_n) < e$, pentru orice $e > 0$. Aşadar, şirul aproximaţiilor succesive este un şir Cauchy, şi cum spaţiul metric (X, d) este complet (spaţiul Banach), rezultă că acest şir este convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Atunci $0 \le d(j(x_n), j(x)) = d(x_{n-1}, j(x)) \le c \cdot d(x_{n-1}, x)$. Aşadar se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = j(x)$. Deoarece orice şir convergent are limită unică, rezultă că $j(x) = x$. Deci, contracţia $j : X \to X$ are punct fix.

OBSERVAŢIA 3.5.2

a) Propoziţia 3.5.5. se mai numeşte şi Teorema de punct fix a lui Banach.

b) Metoda aproximaţiilor succesive utilizată în demonstrarea Principiului contracţiei se mai numeşte şi Metoda iteraţiei care este una din cele mai importante metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor algebrice sau transcedentale. Vitezele de convergenţă ale şirurilor care intervin în Metoda iteraţiei de rezolvare a ecuaţiilor de forma $x = f(x)$ are o importanţă foarte mare. Pentru a putea construi şiruri cu viteze diferite de convergenţă sunt necesare următoarele noţiuni.

DEFINIŢIA 3.5.3 Şirul $x_n \to a$ cu **ordinul de convergenţă** p dacă există $c \ne 0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{(x_n - a)^p} = c$. Constanta c se numeşte **eroare asimptotică**.

DEFINIȚIA 3.5.4 Fie $x_n \to a$ și $x_n' \to a$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n' - a}{x_n - a} = 0$, atunci $(x_n')_n$ converge mai repede decât $(x_n)_n$.

PROPOZIȚIA 3.5.6 Dacă $x_n \to a$ cu ordinul de convergență 1, atunci șirul $x_n' = x_n - \dfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$ converge la a mai repede decât $(x_n)_n$.

6. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 3.6.1 Să se determine marginea inferioară m, marginea superioară M, limita inferioară l, limita superioară L a mulțimilor:

a) $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $x_i < x_j$, $(\forall)\ i < j$;

b) $E = [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\}$;

c) $E = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{N}$;

d) $E = \left\{ \dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

e) $E = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} E_p$, unde $E_p = \left\{ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. După cum se știe l, respectiv L, reprezintă marginea inferioară m, respectiv marginea superioară M a mulțimii E'.

a) $E' = \emptyset$. Este evident că $m = x_1$, $M = x_n$, iar l și L nu există.

b) $E' = [1,2] \cup [3,4]$. Este evident că $m = 1$, $M = 5$, $l = 1$, $L = 4$.

c) $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$; Este evident că nu există (în sensul că nu sunt finite) m, M, l, L. Deci, $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q}'$ nu sunt mărginite. $\mathbb{N}' = \emptyset$ (în spațiu topologic $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}(x))$. Este evident că $m = 0$, M nu există. Cum $\mathbb{N}' = \emptyset$, nu există l și L (în sensul că pot fi orice numere finite).

d) $E' = \{0\}$. Este evident că $M = 1$, $m = 0$ și $l = L = 0$.

e) $E' = \left\{ \dfrac{1}{p} \middle| p \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$. Se observă că $m = 0$, $M = 2$, $L = 1$, $l = 0$.

EXERCIȚIUL 3.6.2 Orice mulțime compactă din $\mathbb{R}$ este mulțimea perfectă, dar nu orice mulțime perfectă de numere reale este compactă.

Soluție. În spațiu topologic $\left(\mathbb{R}, t_{\mathbb{R}}(x)\right)$ singurele mulțimi compacte sunt intervalele $I=[a,b]$, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Dar ținând cont de Definiția 2.2.1 punctul 5), $I'=I$. Deci, $I=[a,b]$ este mulțime perfectă. Fie mulțimea $A=[a,b]\cup[c,d]$, $b<c$. Ținând cont de aceeaşi definiție, se observă că $A'=A$. Deci, A este o mulțime perfectă. Conform cu Propoziția 3.2.2 segmentul de dreaptă ce uneşte punctul $x=b$ cu $y=c$ nu este conținut în A, deci A nu este compactă.

Observație. Din rezolvarea acestui exercițiu, reiese că nu întotdeauna reuniunea a două mulțimi compacte este o mulțime compactă (în $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$).

EXERCIȚIUL 3.6.3 Fie $ll=\underline{\lim}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi $L=\overline{\lim}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă $l=L$.

Soluție. Dacă $l=L$ atunci nu mai există un alt punct de acumulare al mulțimii $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi în acest caz a este limita şirului. Într-adevăr, în orice vecinătate $(a-e,a+e)$ există o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conform cu Propoziția 3.1.3. Dacă ar exista o vecinătate $(a-e,a+e)$ astfel încât în afara ei să fie o infinitate de termeni ai şirului (îi presupunem la stânga vecinătății), aceşti termeni îi putem include într-o vecinătate (y_0-e_1,y_0+e_1), $y_0<a$. Deci, y_0 este punct de acumulare al şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aceasta contrazice faptul că există un singur punct de acumulare $x=a$. Deci, în orice vecinătate $(a-e,a+e)$ există o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, iar în afară un număr finit. Deci, $x=a$ este limita şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă $l\neq L$, atunci există cel puțin două puncte de acumulare. Fie acestea $x=a$ şi $y=b$. Este evident că $x=a$ şi $y=b$ şi niciun alt număr real diferit de acestea nu poate fi limită a şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deoarece există cel puțin o vecinătate a acestora în afara căreia există o infinitate de elemente ale şirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCIȚIUL 3.6.4 Să se cerceteze dacă şirurile cu termeni generali:

a) $x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n+n}{n-1}$

b) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$

sunt convergente.

Soluție. a) $\{x_n\}'_{n\in\mathbb{N}} = \{0,2\} \Rightarrow l = 0$ şi $L = 2$. Deci, şirul nu este convergent.

b) $\{x_n\}'_{n\in\mathbb{N}} = \{0\} \Rightarrow l = L = 0$. Deci, şirul este convergent şi $x_n \to 0$.

Observație. Pentru a determina pe $\{x_n\}'_{n\in\mathbb{N}}$ s-a procedat astfel: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\{x_n\}'_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{2n}\}'_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_{2n+1}\}'_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCIȚIUL 3.6.5 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Soluție. Pentru a avea sens exercițiul, este evident că $x_n > 0,\ (\forall)\ n \geq 2$. Fie $y_n = \sqrt[n]{x_n} = \dfrac{\ln x_n}{n}$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n} \overset{LemaStolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1} - \ln x_N}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln l .$$

Deci, $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}\right) = \ln l$. Ținând cont de injectivitatea logaritmului se obține că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Observație. Exercițiul 3.6.5 este dat în paragraful 5 ca şi consecință a lemei lui Stolz.

EXERCIȚIUL 3.6.6 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = l$.

Soluție.

Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \overset{LemaStolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}) - (x_1 + \ldots + x_n)}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l .$$

Observație. Exercițiul 3.6.6 este dat în paragraful 5 ca şi consecință a lemei Stolz.

EXERCIȚIUL 3.6.7 Să se arate că şirul $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2\right)$, unde $x_n^1 = \dfrac{n}{n+1}$, $x_n^2 = \dfrac{2n}{n+2}$, are limita $\overline{l} = (1,2)$ şi să se determine rangul începând de la care toţi termenii şirului sunt la o distanţă mai mică decât $\dfrac{1}{300}$ de $(1,2)$.

Soluţie. Ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \overline{l}$ dacă $(\forall) e > 0$, există $N(e)$ finit, astfel încât oricare ar fi $n > N(e)$, $d\left(\overline{x}_n, \overline{l}\right) < e$. Aşadar:

$$\sqrt{\left(x_n^1 - 1\right)^2 + \left(x_n^2 - 2\right)^2} < e \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{2n}{n+2} - 2\right)^2} < e \Rightarrow \sqrt{\frac{17n^2 + 36n + 20}{(n+1)^2 (n+2)^2}} < e.$$

Deoarece $\sqrt{\dfrac{17n^2 + 36n + 20}{(n+1)^2 (n+2)^2}} < \dfrac{5}{n+2}$, atunci este suficient să se rezolve inegalitatea $\dfrac{5}{n+2} < e \Rightarrow n + 2 > \dfrac{5}{e} \Rightarrow n > \dfrac{5-2e}{e}$. Deci, $N(e) = \left[\dfrac{5-2e}{e}\right]$.

Cum $N(e)$ este finit pentru orice $e > 0$, $(1,2)$ este limita şirului $\overline{x}_n$. Fie

$$e_0 = \frac{1}{300},\ N\left(\frac{1}{300}\right) = \left[\frac{5 - \frac{2}{300}}{\frac{1}{300}}\right] = 1498.$$

Deci, $\left\{\left(x_k^1, x_k^2\right)\right\}_{k \geq 1498} \subset D\left((1,2), \dfrac{1}{300}\right)$, unde $D\left((1,2), \dfrac{1}{300}\right)$ este discul cu centrul în punctul $(1,2)$ şi de rază $\dfrac{1}{300}$.

EXERCIȚIUL 3.6.8 Fie şirul cu termenul general $\overline{x}_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k!}{k(k+1)}, \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$. Folosind criteriul de convergenţă a lui Cauchy pentru şiruri din $\mathbb{R}^2$, să se studieze convergenţa şirului $\overline{x}_n$.

Soluţie. Trebuie arătat că $(\forall) e > 0$, $(\exists) N(e)$ finit astfel încât $(\forall) n > N(e)$ $d\left(\overline{x}_{n+p}, \overline{x}_n\right) < e$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}$.

Deci, $d\left(\overline{x}_{n+p}, \overline{x}_n\right) < e \Rightarrow \sqrt{\left(x_{n+p}^1 - x_n^1\right)^2 + \left(x_{n+p}^2 - x_n^2\right)^2} < e$, unde $x_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$ şi $x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. Aşadar,

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)!}{(n+k)(n+k+1)}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!}\right)^2} < e\ .$$

Dar, $\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)!}{(n+k)(n+k+1)} \le \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} =$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}. \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p}\right] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{1 - \frac{1}{n+1}} <$$

$$< \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), avem:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)!}{(n+k)(n+k+1)}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!}\right)^2} < \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n!)^2 n^2}} < \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Este suficient să se rezolve inegalitatea $\frac{\sqrt{2}}{n} < e \Rightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{e} \Rightarrow N(e) = \left[\frac{\sqrt{2}}{e}\right]$ care este finit pentru orice $e > 0$. Deci, şirul $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2\right)$ este un şir Cauchy în ¡^{2}, deci este un şir convergent.

Observație. Ținând cont de Propoziția 3.2.3 şi Propoziția 3.3.3 rezultă că şirul $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m\right)$ este şir Cauchy dacă şirurile $\left(x_n^k\right)_{n\geq 0}$ $k = \overline{1,n}$ sunt şiruri Cauchy.

EXERCIȚIUL 3.6.9 Fie $\overline{x}_n = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}, \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}}{n^a}, \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$, unde $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $a_n > 0$ şi $a > 0$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n$.

Soluție. Conform cu Propoziția 3.2.3, avem $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \lim_{n\to\infty} x_n^3\right)$, unde $x_n^1 = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$, $x_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}}{n^a}$, $x_n^3 = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. Atunci,

$\lim_{n\to\infty} x_n^1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1.a_2...a_n.a_{n+1}}{a_1.a_2...a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ (vezi Exercițiul 3.6.5),

$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}}{n^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{a-1}}{(1+n)^a - n^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^a}$ (vezi Exercițiul 3.6.6).

Deci, $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^a} = \frac{1}{a}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n^3 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Aşadar, $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \left(l, \frac{1}{a}, e\right)$.

EXERCIȚIUL 3.6.10 Fie şirul $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2\right)$, unde $x_0^1 = 0$ şi $x_{n+1}^1 = \frac{1}{2}\left(\left(x_n^1\right)^2 + b\right)$, $n \geq 0$, $b \in [0,1]$, iar $x_1^2 = \sqrt{a}$, $x_n^2 = \sqrt{a + x_{n-1}^2}$, $n \geq 2$, $a > 0$. Să se cerceteze dacă şirul este convergent şi în caz afirmativ să se calculeze limita sa.

Soluție. Ținând cont de Propoziția 3.2.3, șirul $(\overline{x}_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă șirurile $(x_n^1)_{n\geq 0}$ și $(x_n^2)_{n\geq 0}$ sunt convergente și $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x}_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1, \lim\limits_{n\to\infty}x_n^2\right)$. Se știe că un șir de numere reale, monoton și mărginit este convergent. Fie $x_0^1 = 0$, $x_1^1 = \frac{1}{2}\left(\left(x_0^1\right)^2 + b\right) = \frac{b}{2} < 1$, $x_2^1 = \frac{1}{2}\left(\left(x_1\right)^2 + b\right) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Se propune că $x_n^1 < 1$ și se demonstrează că $x_{n+1}^1 < 1$. Într-adevăr, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(x_n^1\right)^2 + b\right) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Așadar, conform inducției $x_n^1 < 1$, $(\forall)\ n \geq 0$. Deci,

$x_n^1 \in [0,1]$,

$x_0^1 = 0$, $x_1^1 = \frac{1}{2}\left[\left(x_0^1\right)^2 + b\right] = \frac{b}{2} > x_0^1$,

$x_2^1 = \frac{1}{2}\left[\left(x_1^1\right)^2 + b\right] > \frac{1}{2}\left[\left(x_0^1\right)^2 + b\right] = x_1^1$,

$x_3^1 = \frac{1}{2}\left[\left(x_2^1\right)^2 + b\right] > \frac{1}{2}\left[\left(x_1^1\right)^2 + b\right] = x_2^1, \ldots$

Se presupune că $x_n^1 > x_{n-1}^1$ și se demonstrează că $x_{n+1}^1 > x_n^1$. Într-adevăr, $x_{n+1}^1 = \left[\left(x_n^1\right)^2 + b\right] > \frac{1}{2}\left[\left(x_{n-1}\right)^2 + b\right] = x_n^1$. Așadar, $x_{n+1}^1 > x_n^1$. Atunci, conform inducției, șirul $(x_n^1)_{n\geq 0}$ este crescător. Așadar, rezultă că șirul este convergent.

Deci, există $\mathbf{l}$ finit astfel încât $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^1$. Trecând la limită în relația de recurență se obține $\mathbf{l}^2 - 2\mathbf{l} + b = 0$, $\mathbf{l}_1 = 1 - \sqrt{1-b}$, $\mathbf{l}_2 = 1 + \sqrt{1-b}$. Cum $\mathbf{l}_2 \notin [0,1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = 1 - \sqrt{1-b}$. Pentru șirul $(x_n^2)_{n\geq 1}$ se obține:

$$x_1^2 = \sqrt{a}\,,\ x_2^2 = \sqrt{a + x_1^2} = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1^2,$$

$$x_3^2 = \sqrt{a + x_2^2} > \sqrt{a + x_1^2} = x_2^2, \ldots$$

Se presupune că $x_n^2 > x_{n-1}^2$ și se demonstrează că $x_{n+1}^2 > x_n^2$. Într-adevăr, $x_{n+1}^2 = \sqrt{a + x_n^2} > \sqrt{a + x_{n-1}^2} = x_n^2$. Așadar, $x_{n+1}^2 > x_n^2$. Deci conform inducției, șirul (x_n^2) este crescător. Avem:

$x_1^2 = \sqrt{a} < 1 + \sqrt{a+1}$ evident.

$x_2^2 = \sqrt{a + x_1} < \sqrt{a + 1 + \sqrt{a+1}} < \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a+1} + 1} = 1 + \sqrt{a+1}$ ...

Se presupune că $x_n^2 < 1 + \sqrt{a+1}$ şi se demonstrează că $x_{n+1}^2 < 1 + \sqrt{1+a}$.

Într-adevăr,

$x_{n+1}^2 = \sqrt{a + x_n^2} < \sqrt{a + 1 + \sqrt{a+1}} < \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a+1} + 1} = 1 + \sqrt{a+1}$. Aşadar, $x_{n+1}^2 < 1 + \sqrt{a+1}$. Atunci, conform inducției, rezultă că $x_n^2 < 1 + \sqrt{a+1}$, pentru orice $n \geq 1$. Deci $x_n^2 \in \left(0, 1 + \sqrt{a+1}\right)$, pentru orice $n \geq 1$. Aşadar, rezultă că şirul $\left(x_n^2\right)_{n\geq 1}$ este convergent. Adică există $\mathbf{l}$ finit astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \mathbf{l}$. Trecând la limită în relația de recurență se obține:

$$\mathbf{l} = \sqrt{a + \mathbf{l}} \Rightarrow \mathbf{l}^2 - \mathbf{l} - a = 0,\ \mathbf{l}_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}, \mathbf{l}_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2},$$

$$\mathbf{l}_1 \notin \left(0, 1 + \sqrt{1+a}\right),\ \mathbf{l}_2 \in \left(0, 1 + \sqrt{1+a}\right).$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Aşadar, am obținut că şirul $\left(\overline{x}_n\right)_{n\geq 0}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2\right) = \left(1 - \sqrt{1-b}, \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}\right).$$

EXERCIȚIUL 3.6.11 Fie $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, x_n^3\right)$ unde:

$$x_n^1 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5};\ x_n^2 = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + \ldots + n^2\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n+1}};\ x_0^3 = x_1^3 = 0;$$

$$x_{n+1}^3 = \frac{1}{3}\left[a + x_n^3 + \left(x_{n-1}^3\right)^2\right]$$

cu $a \in [0,1]$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n$.

Soluție. Dacă $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, atunci are loc următoarea relație:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^1 S_k + n. \qquad (1)$$

Pentru a demonstra relația de recurență se porneşte de la egalitatea:

$(a+1)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k a^k + C_{k+1}^{k+n}$.

În această egalitate se dau lui a succesiv valorile $1,2,\ldots,n$ şi se adună membru cu membru cele n egalități. Dacă în egalitatea (1) se consideră $k=4$ se obține:

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1 S_4 + C_5^2 S_3 + C_5^3 S_2 + C_5^4 S_1 + n. \qquad (2)$$

În această egalitate $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ținând cont de S_1, S_2, S_3 din egalitatea (2) se obțin $S_4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$.

Atunci $x_4^1 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30n^5} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \dfrac{1}{5}$.

Conform cu lema lui Stolz, şirul $(x_n^2)_{n\geq 1}$ are aceeaşi limită cu şirul $y_n = \dfrac{(n+1)^2\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt{n+1} - n^3\sqrt{n}}$. Acum,

$$\frac{\sqrt{n}(n+1)^2}{\sqrt{n+1}(3n^2+3n+1)} \leq y_n \leq \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^2}{\sqrt{n}(3n^2+3n+1)}. \qquad (3)$$

Deci, conform cu inegalitatea (3) se obține $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1}{3}$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \dfrac{1}{3}$.

Pentru $(x_n^3)_{n\geq 1}$ se arată că este monoton şi mărginit.

Monotonia. Avem $x_2^3 = \dfrac{1}{3}a$, $x_3^3 = \dfrac{4}{9}a$. Se observă că $x_1^3 < x_2^3 < x_3^3$. Se presupune că $x_k^3 \leq x_{k+1}^3$.

Avem: $x_k^3 = \dfrac{1}{3}\left(a + x_{k-1}^3 + \left(x_{k-2}^3\right)^2\right) \leq \dfrac{1}{3}\left(a + x_k^3 + \left(x_{k-1}^3\right)^2\right) = x_{k+1}^3$ adică $x_k^3 \leq x_{k+1}^3$.

Deci, conform inducției rezultă că şirul este crescător.

Mărginirea. Avem $x_0^3 \leq 1$, $x_1^3 \leq 1$, $x_2^3 = \dfrac{a}{3} \leq 1$, $x_3^3 \leq \dfrac{4}{9}a \leq 1$. Se presupune că $x_{k-1}^3 \leq 1$, $x_k^3 \leq 1$ şi se demonstrează că $x_{k+1}^3 \leq 1$. Într-adevăr, $x_{k+1}^3 = \dfrac{1}{3}\left(a + x_k^3 + \left(x_{k-1}^3\right)^2\right) \leq \dfrac{1}{3}(1+1+a) \leq 1$. Deci, conform inducției, şirul $(x_n^3)_{n\geq 0}$ este mărginit şi anume $x_n^3 \in [0,1]$, $(\forall) n \geq 0$.

Aşadar, rezultă că şirul este convergent. Există $\mathbf{l}$ finit astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = \mathbf{l}$. Trecând la limită în relația de recurență se obține: $\mathbf{l} = \frac{1}{3}\left[a + \mathbf{l} + \mathbf{l}^2\right] \Rightarrow \mathbf{l}^2 - 2\mathbf{l} + a = 0$, $\mathbf{l}_1 = 1 + \sqrt{1-a} \notin [0,1]$

şi $\mathbf{l}_2 \in 1 - \sqrt{1-a} \in [0,1]$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_4^3 = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1 - \sqrt{1-a}\right)$.

EXERCIȚIUL 3.6.12 Se consideră şirul $\overline{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, x_n^3, x_n^4\right)$, unde

$$x_n^1 = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\quad x_n^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},\quad x_n^3 = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$x_1^4 = \sqrt{a},\quad x_2^4 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \ldots, x_n^4 = \left.\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}\right\}n \text{ ori},\quad a > 0.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n$.

Soluție. Este evident că:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \Leftrightarrow (n+1)\ln\frac{n+1}{n} > 1 > (n)\cdot \ln\frac{n+1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Avem: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$ (s-a ținut cont de inegalitatea (1)). De asemenea, din inegalitatea (1) se obține că $x_n^1 > 0$, $(\forall) n \geq 1$. Aşadar, şirul $\left(x_n^3\right)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit. Deci, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 \in (0,1)$. Această limită este $g = 0,5772...$ şi se numeşte constanta lui Euler.

Dacă scriem $x_n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$, atunci aceasta este suma Riemann a funcției $f : [0,1] \to$ ¡ , $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Funcția fiind integrabilă se observă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Avem $x_n^3 = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} =$

$= \frac{1\cdot 2\cdot 3...n-1}{2\cdot 3...(n-1)+n}\cdot\frac{3\cdot 4...n\cdot(n+1)}{2\cdot 3...n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$. Deci, $x_n^3 = \frac{n+1}{2n}$.

Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = \frac{1}{2}$.

Este evident că şirul $\left(x_n^4\right)_{n\ge 1}$ este crescător şi $x_n^4 > 0$. De asemenea, este evident că $\left(x_n^4\right)^2 = a + x_{n-1}^4 \Rightarrow x_n^4 = \frac{a}{x_n^4} + \frac{x_{n-1}^4}{x_n^4} < \sqrt{a}+1$ (deoarece şirul este crescător). Deci, $\left(x_n^4\right)_{n\ge 1}$ este mărginit, $x_n^4 \in \left(0, \sqrt{a}+1\right)$. Aşadar, avem că şirul este convergent, adică există $\mathbf{l}$ finit astfel încât $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^4$. Trecând la limită în relația de recurență $\left(x_n^4\right)^2 = a + x_{n-1}^4$, se obține $\mathbf{l}^2 - \mathbf{l} - a = 0$ cu $\mathbf{l}_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$ (nu convine) $\mathbf{l}_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $\mathbf{l}_2 \in \left(0, 1+\sqrt{a}\right)$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^4 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Concluzionând, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \left(g, \ln 2, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$.

EXERCIȚIUL 3.6.13

a) Să se arate că $f : ¡ \to ¡$ definită prin $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{3+x^2} - 1$ este o contracție.

b) Să se găsească punctul fix.

Soluție. a) Se observă că $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{2x}{\left(3+x^2\right)^2}$. Fie $g(x) = \frac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$.

Rezultă că $m_g = -\frac{1}{8}$. Atunci $c = \sup\limits_{x\in ¡}\left|f'(x)\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} < 1$. Deci, conform cu Observația 3.5.2 b) rezultă că f este o contracție pe $¡$.

b) Se observă că $f(-1) = -1$. Deci, $x = -1$ este unicul punct fix.

EXERCIȚIUL 3.6.14 Să se arate că ecuația $\ln\sqrt[n]{1+e^x}=x$ are o soluție unică.

Soluție. Conform Principiului contracției, dacă funcția $f(x)=\ln\sqrt[n]{1+e^x}$ este o contracție, cum $[x,y]$ este spațiu metric complet, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ cu $x<y$, atunci rezultă că există $x\in[x,y]$ astfel încât $f(x)=x$. Deci, $\ln\sqrt[n]{1+e^x}=x$. Așadar, dacă f este contracție, atunci exercițiul este rezolvat. Avem, $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{n}e^x}{1+e^x}<\dfrac{1}{n}, (\forall)x\in\mathbb{R}$. Conform teoremei lui Lagrange, există $c\in(x,y)$ astfel încât $f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$. Dar, $|f'(c)|<\dfrac{1}{n}$. Deci, $f(x)-f(y)\le\dfrac{1}{n}(x-y)$, fapt care arată că f este o contracție. Soluția ecuației se găsește din $x_{n+1}=\ln\sqrt[n]{1+e^{x_n}}$, $n\ge 0$, cu x_0 dat.

EXERCIȚIUL 3.6.15 Să se determine condiția ca ecuația $x-q\sin x=m$ (ecuația lui Kepler) să admită o soluție reală unică.
Soluție. Este suficient să se arate că $f(x)=q\sin x+m$ este o contracție pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, $f'(x)=q\cos x$. Deci, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|q||\cos x|=|q|$. Conform cu Observația 3.5.2 b), rezultă că f este contracție dacă $|q|<1$. Soluția se găsește din $x_{n+1}=q\sin x_n+m,\ n\ge 0$ cu x_0 dat.

EXERCIȚIUL 3.6.16 Să se arate că ecuația $2^{-x}=x$ are o soluție unică în intervalul $[0,1]$.
Soluție. Se procedează ca la exercițiul de mai sus. Avem: $f(x)=2^{-x}$. Rezultă $f'(x)=-2^{-x}\ln 2$. Deci, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|-2^{-x}\ln 2|=\ln 2<1$. Deci, există un unic $x_0\in[0,1]$ astfel încât $2^{-x_0}=x_0$.

CAPITOLUL IV: SERII

Cadrul general în care poate fi construită şi studiată o serie este cel de spaţiu vectorial normat complet (spaţiu Banach).

1. SERII. GENERALITĂŢI

DEFINIŢIA 4.1.1 Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu vectorial normat complet şi un şir de elemente din acest spaţiu $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n \in X$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Considerând şirul:

$$S_0 = x_0,\ S_1 = x_0 + x_1,\ S_2 = x_0 + x_1 + x_2,\ \ldots,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_n,$$

cupletul $(x_n, S_n)_{n\geq 0}$ **defineşte o serie** în spaţiul vectorial X, unde x_n este **termenul general al seriei**, iar S_n este **termenul general al şirului** sumelor parţiale.
Seria astfel generată se notează:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ sau } \sum_{n\geq 0} x_n .$$

OBSERVAŢIA 4.1.1
a) Se observă că seria este generalizarea sumei într-un spaţiu vectorial.
b) Denumirea elementelor spaţiului vectorial X dă şi denumirea seriei, adică:
- $X = \mathbb{R}$ - seria este o serie de numere reale;
- $X = \mathbb{C}$ - seria este o serie de numere complexe;
- $X = \mathbb{R}^n$ - seria este o serie de elemente din $\mathbb{R}^n$;
- $X = B^A$ - seria este o serie de funcţii, $f : A \to B$.

Exemple.
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este o serie de numere reale care poartă denumirea şi de **serie armonică**, iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}^*$ este **seria lui Riemann** şi este o serie de numere reale;
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $i = \sqrt{-1}$, este serie de numere complexe;

c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};\sum_{n=0}^{\infty}\ln(n+1),\sum_{n=1}^{\infty}q^n\right)$ este serie de elemente din $\mathbb{R}^3$.

Problematica pusă în legătură cu o serie dintr-un spațiu vectorial este următoarea:

• convergența sau divergența (are sens suma sau nu);
• în cazul convergenței, găsirea efectivă a sumei seriei.

DEFINIȚIA 4.1.2 (**Convergența**) Fie $(X,\|\cdot\|)$ spațiu vectorial normat complet și $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ o serie din acest spațiu. Se spune că **seria este convergentă** dacă șirul sumelor parțiale $S_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$ este convergent și are loc egalitatea $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=S$, unde $S=\lim_{n\to\infty}S_n$.

- Dacă șirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent, atunci seria este **divergentă**.
- În cazul în care șirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent, fără limită, seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ poartă denumirea de **serie oscilantă**.

În marea majoritate a cazurilor, Definiția 4.1.2 este greu sau imposibil să se aplice datorită faptului că șirul $S_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$ este complicat. De aceea, este necesar să se construiască o teorie care să suplinească această definiție.

PROPOZIȚIA 4.1.1 Natura unei serii nu se schimbă dacă se neglijează un număr finit de termeni ai săi. (Prin natura unei serii se înțelege convergența sau divergența seriei).

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$, S suma seriei și $m=\sum_{n=0}^{p}x_n$ o sumă finită din primii p termeni ai seriei. Cu aceste notații, sunt evidente egalitățile:

$$S_1=\sum_{n=p+1}^{\infty}x_n=\sum_{n=0}^{\infty}x_n-\sum_{n=0}^{p}x_n=S-m.$$

Deoarece m este finit, rezultă că în cazul în care S este finită, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ este convergentă, rezultă că și S_1 este finită, adică seria $\sum_{n=p+1}^{\infty}x_n$ este convergentă. Dacă S este infinită, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şi S_1 este infinită, adică seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplu. Să se arate că:

a) seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este o serie divergentă.

b) seria $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$ este convergentă şi să se calculeze suma sa.

Soluție. a) Avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+...=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+... .$$

În urma acestei grupări se pot face următoarele majorări:

$$S_{2^2}>\frac{1}{2},\ S_{2^3}>\frac{1}{2},\ S_{2^4}>\frac{1}{2},...,S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}>\frac{n}{2}.$$

Rezultă că $S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}$ reprezintă unul din termenii generali ai şirului sumelor parțiale pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Conform criteriului majorării, din inegalitatea anterioară rezultă că $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}=\infty$. Conform cu Definiția 4.1.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

b) Conform Definiției 4.1.2, dacă $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ există şi este finită, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ este convergentă şi $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=S$. În cazul de față, $S_n=\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{k^2+k+1}$ care se mai scrie astfel:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(arctg\left(k+1\right) - arctgk \right) = arctg\left(n+1\right).$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\left(n+1\right) = \frac{p}{2}$. Deci, seria din enunț este convergentă și suma este $\frac{p}{2}$.

PROPOZIȚIA 4.1.2 (**Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii**)

Fie $\left(X, \|\cdot\|\right)$ spațiu vectorial normat complet și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie din acest spațiu. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $e > 0$, există un rang $n(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi $n > n(e)$ rezultă:

$$\left\| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p} \right\| < e \text{, pentru orice } p \in ¥^*.$$

Demonstrație. Necesitatea $("\Rightarrow")$ Presupunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă atunci conform cu Definiția 4.1.2, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ este şir convergent. Rezultă $\left(S_n\right)_{n\geq 0}$ şir fundamental sau şir Cauchy. Deci: $\left[(\forall) e > 0,\ (\exists) n(e) > 0 \right.$ astfel încât $(\forall) n > n(e) \Rightarrow \left\| S_{n+p} - S_n \right\| < e$, $\left. (\forall) p \in ¥^*,\ p \text{ fixat } \right]$. Aşadar:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| < e \Rightarrow \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p} \right\| < e,\ (\forall) p \in ¥^*, \text{ fixat}$$

Suficiența $("\Leftarrow")$ Se presupune că relația din enunț este adevărată şi se demonstrează că seria este convergentă. Într-adevăr, din afirmația $\left[(\forall) e > 0,\ (\exists) n(e) > 0 \right.$ astfel încât $(\forall) n > n(e) \Rightarrow \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p} \right\| < e$, $\left. (\forall) p \in ¥,\ p \text{ fixat } \right]$, rezultă $\left\| S_{n+p} - S_n \right\| < e$. Deci, $\left(S_n\right)_{n\geq 0}$ este şir fundamental. Dar spațiul X este un spațiu vectorial complet, deci $\left(S_n\right)_{n\geq 0}$ convergent. Atunci, conform cu Definiția 4.1.2, avem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Exemplu. Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Soluție. Aplicăm criteriul de mai sus. Avem:

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon,\ (\forall)\,p\in\mathbb{N}^*.$$

Deci, conform Criteriului de convergență al lui Cauchy, seria este convergentă.

PROPOZIȚIA 4.1.3 (**Consecință criteriului general de convergență al lui Cauchy**) O condiție necesară pentru convergența unei serii este ca termenul general al seriei, să aibă limita zero.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă în condiția Propoziției 4.1.2 se consideră $p=1$, atunci se obține: $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)n(\varepsilon)>0$ astfel încât $(\forall)n>n(\varepsilon)\Rightarrow\left\|x_{n+1}\right\|<\varepsilon$, atunci $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

Forma practică a Propoziției 4.1.3 este următoarea:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x:\begin{cases}\text{Pentru } x\neq 0, \text{ seria } \sum_{n=0}^{\infty}x_n \text{ este divergentă.}\\ \text{Pentru } x=0, \text{ nu se poate afirma nimic despre natura seriei.}\end{cases}$$

Dacă $\lim_{n\to\infty}x_n$ nu există, atunci seria este divergentă.

Exemplu. Să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}+1}{\sqrt[4]{2n^3}+2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

Soluşie. a) Se observă că:

$$x_n=\frac{\sqrt[4]{n^3}+1}{\sqrt[4]{2n^3}+2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}+1}{\sqrt[4]{2n^3}+2}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\neq 0.$$

Atunci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3}+1}{\sqrt[4]{2n^3}+2}$ este divergentă.

b) Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1 \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$ este divergentă.

O categorie importantă de serii sunt seriile din $\mathbb{R}^m$. Acestea se definesc după cum urmează:

DEFINIȚIA 4.1.3 Fie $\mathbb{R}^m$ înzestrat cu normă euclidiană (spațiu vectorial normat complet) și $x_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m\right)$ un şir din $\mathbb{R}^m$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^1, \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2, ..., \sum_{n=0}^{\infty} x_n^m\right)$ este o serie din $\mathbb{R}^m$, unde $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^i$, $i = \overline{1,m}$ sunt serii de numere reale care poartă denumirea de **proiecțiile seriei** din $\mathbb{R}^m$. Seria din $\mathbb{R}^m$ se mai numeşte şi **serie vectorială**.

PROPOZIȚIA 4.1.5 O serie din $\mathbb{R}^m$ este convergentă dacă şi numai dacă fiecare proiecție este convergentă.

Demonstrație. Necesitatea $("\Rightarrow")$ Se presupune că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m\right)$ este convergentă şi se demonstrează că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^i$, $i = \overline{1,m}$ sunt convergente.

Într-adevăr, din convergența seriei rezultă că şirul sumelor parțiale $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^1, \sum_{k=0}^{n} x_k^2, ..., \sum_{k=0}^{n} x_k^m\right) = \left(S_n^1, S_n^2, ..., S_n^m\right)$ este un şir convergent.

Dar, se ştie că un şir din $\mathbb{R}^m$ este convergent dacă şi numai dacă proiecțiile sale sunt convergente. Rezultă $S_n^i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i$, $i = \overline{1,m}$ sunt şiruri convergente.

Deci, seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^i$, $i = \overline{1,m}$ sunt convergente.

Reciproca se demonstrează în mod asemănător.

OBSERVAȚIA 4.1.2

a) Propoziția 4.1.5 reduce studiul seriilor din $\mathbb{R}^m$ la studiul seriilor de numere reale.

b) Ținând cont de Propoziția 4.1.5, $S=\left(S_1,S_2,...,S_m\right)$, unde S_i, $i=\overline{1,m}$ sunt sumele seriilor proiecții ale seriei din $\mathbb{R}^m$.

2. SERII CU TERMENI POZITIVI

Un caz particular de serii de numere reale îl reprezintă seriile cu **termeni pozitivi**. Aceste serii se definesc astfel.

DEFINIȚIA 4.2.1 Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ se numeşte serie cu termeni pozitivi, dacă există un rang $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > N$, $x_n > 0$.

OBSERVAȚIA 4.2.1 Ținând cont de Propoziția 4.1.1, rezultă, fără a micşora generalitatea, că se poate considera $N = 0$.

PROPOZIȚIA 4.2.1 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Şirul sumelor parțiale ale acestei serii este un şir crescător.

Demonstrație. Şirul sumelor parțiale pentru seria dată este: $S_n=\sum_{k=0}^{n} x_k$. Deoarece $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1} x_k$, se obține: $S_{n+1}-S_n=\sum_{k=0}^{n+1} x_k-\sum_{k=0}^{n} x_k=x_{n+1}>0$, deci $S_{n+1}-S_n>0$. Atunci, şirul S_n este crescător.

PROPOZIȚIA 4.2.2 (**Criteriul monotoniei**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de termeni pozitivi. Dacă şirul $\left(S_n\right)_{n\geq 1}$ este mărginit, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Cum seria este cu termeni pozitivi, din Propoziția 4.2.1, rezultă că şirul este crescător. Cum acest şir este şi mărginit, rezultă că el este şi convergent. Conform definiției convergenței seriei, rezultă că seria este convergentă.

Exemplu. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a>1$ este o serie convergentă.

Soluție. Se aranjează seria sub forma următoare:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}=1+\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right)+\left(\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}\right)+\left(\frac{1}{8^a}+\frac{1}{9^a}+\ldots+\frac{1}{15^a}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{\left(2^m\right)^a}+\frac{1}{\left(2^m+1\right)^a}+\frac{1}{\left(2^m+2\right)^a}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{m+1}-1\right)^a}\right)+\ldots.$$

Se observă că:

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}<\frac{2}{2^a}$$
$$\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}<\frac{4}{4^a}$$
$$\frac{1}{8^a}+\frac{1}{9^a}+\ldots+\frac{1}{15^a}<\frac{8}{8^a}$$

....

$$\frac{1}{\left(2^m\right)^a}+\frac{1}{\left(2^m+1\right)^a}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{m+1}-1\right)^a}<\frac{2^m}{\left(2^m\right)^a},\ldots$$

Deci,

$$S_p=S_{2^{m+1}-1}<1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{2^{2(a-1)}}+\frac{1}{2^{3(a-1)}}+\ldots+\frac{1}{2^{m(a-1)}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^p}{\frac{1}{2^{a-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}.$$

Dacă $a>1$, se observă că $S_{2^{m+1}-1}$ este mărginit deoarece $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}$ este un număr finit cuprins în intervalul $(0,1)$. Dar $S_{2^{m+1}-1}$ este monoton. Fiind şi mărginit, rezultă că este convergent, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, $a>1$ este o serie convergentă.

PROPOZIȚIA 4.2.3 (**Primul criteriu al comparației**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N\in ¥$ astfel încât pentru orice $n>N$, $x_n\le y_n$, şi

i) $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ convergentă;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergentă.

Demonstrație. Se consideră $N = 0$.

i) Fie $\left(S_{nx}\right)_{n\geq 0}$ şi $\left(S_{ny}\right)_{n\geq 0}$ termenii generali ai şirurilor sumelor parțiale pentru seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Deoarece $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \geq N$, rezultă: $S_{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} y_k = S_{ny}$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, rezultă că şirul $\left(S_{ny}\right)_{n\geq 0}$ este convergent. Ținând cont de criteriul majorării pentru şiruri şi de inegalitatea $S_{nx} \leq S_{ny}$, rezultă că şirul $\left(S_{nx}\right)_{n\geq 0}$ convergent. Deci, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Se demonstrează analog ca la punctul i).

PROPOZIȚIA 4.2.4 (**Al doilea criteriu al comparației**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n > N$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ şi

i) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ divergentă.

Demonstrație. Fără a micşora generalitatea se consideră $N = 0$ şi se notează $\left(S_{nx}\right)_{n\geq 0}$ şi $\left(S_{ny}\right)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parțiale ale celor două serii. Deoarece, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$, atunci pentru orice $n \geq 0$ avem $\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq \frac{y_n}{y_{n+1}}$. Prin înmulțirea acestei inegalități cu $\frac{x_{n+1}}{y_n}$, se obține $\frac{x_n}{y_n} \geq \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$, oricare ar fi $n \geq 0$. Deci are loc următorul şir de inegalități:

$$\frac{x_0}{y_0} \geq \frac{x_1}{y_1} \geq \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_2}{y_2} \geq \frac{x_3}{y_3}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}.$$

Dacă se notează $\frac{x_0}{y_0} = a > 0$, atunci şirul anterior de inegalități devine

$$x_1 \le a\, y_1, \quad x_2 \le a\, y_2, \quad \ldots, \quad x_n \le a\, y_n.$$

Adunând membrii acestor inegalități se obține: $\sum_{i=0}^{n} x_i \le a \sum_{i=0}^{n} y_i$. Adică, $S_{nx} \le a\, S_{ny}$.

i) Ținând cont că $S_{nx} \le a\, S_{ny}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci rezultă că şirul $\left(S_{nx}\right)_{n\ge 0}$ este convergent. Deci, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie convergentă.

ii) Din $S_{nx} \le a\, S_{ny}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergentă, rezultă că $S_{ny} \to \infty$, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Exemplu. Să se arate că seria Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă pentru $a < 1$.

Soluție. Deoarece $a < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^a} > \frac{1}{n}$. Se ştie că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Atunci, conform cu Propoziția 4.2.4 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă.

Ținând cont şi de exemplele anterioare, rezultă că natura seriei lui Riemann este următoarea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} : \begin{cases} \text{este divergentă, pentru } a \le 1, \\ \text{este convergentă, pentru } a > 1. \end{cases}$$

LEMĂ. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (seria geometrică). Natura acestei serii este următoarea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} \text{este convergentă, pentru } q \in (-1,1), \\ \text{este divergentă, pentru } q \ge 1, \\ \text{este oscilantă pentru } q \le -1. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ termenul general al şirului sumelor parțiale pentru această serie. Atunci $S_n = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (suma progresiei geometrice cu rația q care are n termeni). Trecând la limită se obține:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \frac{q}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1,1), \\ \infty, \text{ pentru } q \geq 1, \\ \text{nu există, pentru q} \leq \text{-1.} \end{cases}$$

Aşadar, pentru $q \in (-1,1)$ rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este serie convergentă pentru că şirul sumelor parțiale are limită finită şi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. În general, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pentru $q \geq 1$ rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este serie divergentă pentru că şirul numerelor parțiale are limita $+\infty$, iar pentru $q \leq -1$ oscilantă pentru că şirul sumelor parțiale nu are limită.
În general,

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{aq}{1-q},\ a \in \mathbb{R}^*,\ q \in (-1,1).$$

PROPOZIȚIA 4.2.5 (**Criteriul rădăcinii**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există rangul $N \in \mathbb{N}$ astfel încât:

i) $\sqrt[n]{x_n} \leq l < 1$, pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă;

ii) $\sqrt[n]{x_n} \geq l > 1$, pentru orice $n > N$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fără a micşora generalitatea se consideră $N = 0$.
ii) Din inegalitatea $\sqrt[n]{x_n} \leq l$, $(\forall) n \geq 0$, rezultă că $x_n \leq l^n, (\forall) n \geq 0$. Conform lemei anterioare, seria progresie geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ este

convergentă pentru $l \in (0,1)$. Conform primului criteriu al comparației rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Se demonstrează analog ca i).

Forma practică a criteriului rădăcinii

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x : \begin{cases} \text{dacă } x<1, \text{ seria } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este convergentă,} \\ \text{dacă } x>1, \text{ seria } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este divergentă,} \\ \text{dacă } x=1, \text{ nu se poate afirma nimic despre natura seriei.} \end{cases}$$

Criteriul rădăcinii mai poartă denumirea şi de **criteriul lui Cauchy**.

Exemplu. Să se studieze convergența seriilor:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2}{2n^2+3}\right)^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Soluție. Aplicăm criteriul rădăcinii.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{2n^2+3} = \frac{3}{2} > 1$. Deci, avem serie divergentă.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Deci, avem serie convergentă.

PROPOZIȚIA 4.2.6 (**Criteriul raportului sau criteriul d'Alembert**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât:

i) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le l < 1$, pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă;

ii) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge l > 1$, pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea se consideră $N = 0$.

i) Din inegalitatea $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le l$, pentru orice $n \ge 0$, rezultă $x_{n+1} \le l\,x_n$, oricare ar fi $n \ge 0$. Adică are loc următorul şir de inegalități: $x_1 \le l\,x_0, x_2 \le l\,x_1, ..., x_{n+1} \le l\,x_n$. Rezultă $x_n \le l^n x_0$, $(\forall) n \ge 0$. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ este convergentă, pentru orice $l \in (0,1)$, conform primului criteriu al comparației, rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Se demonstrează analog ca la punctul i).

Forma practică a criteriului raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x : \begin{cases} \text{dacă } x < 1, \text{ seria } \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{x_n} \text{ este convergentă,} \\ \text{dacă } x > 1, \text{ seria } \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{x_n} \text{ este divergentă,} \\ \text{dacă } x = 1, \text{ nu se poate afirma nimic despre natura seriei.} \end{cases}$$

Exemplu. Se se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\mathbf{K}(a+n)}$.

Soluție. Vom aplica criteriul raportului.

a) Deoarece $x_n = \frac{4^n n!}{n^n}$, atunci $x_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Deci, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e} > 1$. Aşadar, avem o serie divergentă.

b) Analog, $x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\mathbf{K}(a+n)}$,

$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\mathbf{K}(a+n)(a+n+1)}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+a+1} = 1$. Deci, utilizând acest criteriu, nu putem afirma nimic despre natura seriei.

OBSERVAȚIA 4.2.3 Se ştie că limita $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ (consecința lemei lui Stolz). Rezultă că cele două criterii anterioare, al raportului şi al rădăcinii, sunt criterii echivalente, adică au aceeaşi sferă de aplicabilitate.

PROPOZIȚIA 4.2.7 (**Criteriul logaritmic**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $N\in$ ¥ şi

i) $\frac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}\geq l>1$, $(\forall)n\geq N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ este convergentă;

ii) $\frac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}\leq l<1$, $(\forall)n\geq N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fără a micşora generalitatea se consideră $N=2$.

i) Pentru demonstrație se consideră baza logaritmului supraunitară (raționamentul făcându-se în mod analog dacă baza este subunitară). Din $\frac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}\geq l$, obținem $\log\frac{1}{x_n}\geq\log n^l$, oricare ar fi $n>1$. Datorită faptului că logaritmul în bază supraunitară este crescător, rezultă $\frac{1}{x_n}\geq n^l$, deci $x_n\leq\frac{1}{n^l}$, oricare ar fi $n>1$. Ținând cont de seria Riemann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^l}$ este convergentă pentru $l>1$, conform primului criteriu al comparației rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ este convergentă.

ii) Se demonstrează analog ca la punctul i).

Forma practică a criteriului logaritmic

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}=x:\begin{cases}\text{dacă } x>1, \text{ seria } \sum_{n=0}^{\infty}x_n \text{ este convergentă,}\\ \text{dacă } x<1, \text{ seria } \sum_{n=0}^{\infty}x_n \text{ este divergentă,}\\ \text{dacă } x=1, \text{ nu se poate afirma nimic despre natura seriei.}\end{cases}$$

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

Soluție. Aplicând criteriul logaritmic, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\ln n - \ln(\ln n)}{\ln n} = \frac{3}{2} > 1.$$

Deci, avem serie convergentă.

PROPOZIȚIA 4.2.8 (**Criteriul lui Kummer**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $(a_n)_{n\geq 0}$ şir cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât:

i) $a_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \geq l > 0$, $(\forall) n \geq N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă

ii) $a_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \leq l < 0$, $(\forall) n \geq N$, şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fără a micşora generalitatea se presupune $N = 1$.

i) Din inegalitatea $a_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \geq l > 0$,

se obține $a_n \cdot x_n - a_{n+1} \cdot x_{n+1} \geq l \cdot x_{n+1} > 0$. Deci şirul $(a_n \cdot x_n)_{n\geq 0}$ este un şir descrescător. Fiind şir descrescător şi cu termeni pozitivi înseamnă că este mărginit, deci convergent. Atunci există $\ell \in \mathbb{R}$ finit astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot x_n = \ell$. Se consideră seria cu termenul general $u_n = a_n \cdot x_n - a_{n+1} \cdot x_{n+1}$. Termenul general al şirului sumelor parțiale pentru această serie este: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k x_k - a_{k+1} x_{k+1}) = a_0 x_0 - a_{n+1} x_{n+1}$. Deci, $\lim_{n\to\infty} S_n = a_0 \cdot x_0 - \ell$. Aşadar seria $\sum_{k=0}^{n} (a_k x_k - a_{k+1} x_{k+1})$ este convergentă. Conform primului criteriu al comparației rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Se demonstrează analog ca la punctul i).

PROPOZIȚIA 4.2.9 (**Criteriul Raabe-Duhamel**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

i) Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n \cdot \left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq l > 0$, $(\forall) n \geq N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n \cdot \left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq l < 0$, $(\forall) n \geq N$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Dacă în criteriul lui Kummer se considera $a_n = n$ se obține criteriul lui Raabe-Duhamel. Deci, acest criteriu este un caz particular al criteriului lui Kummer.

Forma practică a criteriului Raabe-Duhamel

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = x : \begin{cases} \text{dacă } x > 1, \text{ seria este convergentă,} \\ \text{dacă } x < 1, \text{ seria este divergentă,} \\ \text{dacă } x = 1, \text{ nu se poate afirma nimic despre natura seriei.} \end{cases}$$

După cum se poate observa, formele practice ale criteriilor de convergență rezultă direct din aceste criterii.

Exemplu. Să se studieze convergența seriilor:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{a(a-1)(a-2)...(a-n)}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel.

a) Se observă că termenul general al seriei este:

$$x_n = \frac{n!}{a(a-1)(a-2)...(a-n)}.$$

Deci,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{a(a-1)(a-2)...(a-n)} \cdot \frac{a(a-1)...a(a-n-1)}{(n+1)!} = \frac{a-n-1}{n+1}.$$

Atunci,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a-n-1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a-2n-2}{n+1}\right) = -\infty < 1.$$

Aşadar, avem serie divergentă.
b) Analog, avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+a+1}{n+1} - 1\right) = a.$$

Deci, seria este convergentă dacă $a > 1$.

OBSERVAȚIA 4.2.4 Criteriul lui Raabe-Duhamel se foloseşte de obicei în studiul convergenței seriilor pentru care criteriul raportului nu poate da natura seriei.

PROPOZIȚIA 4.2.10 (**Al treilea criteriu al comparatiei**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} y_{\mathrm{n}}$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. Dacă:

i) $L \in (0,\infty)$, atunci seriile au aceeaşi natură;

ii) $L = 0$ şi seria $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} y_{\mathrm{n}}$ este convergentă, atunci rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă;

iii) $L = \infty$ şi seria $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} y_{\mathrm{n}}$ este divergentă rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație.

i) Se presupune că seriile nu sunt oscilante. Atunci şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ au limită (finită sau infinită) şi $\lim_{n\to\infty} x_n = L \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$. Cum L este finită, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n$ este finită (infinită) $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} y_n$ finită (infinită). Deci, seriile au aceeaşi natură.

ii) Dacă $L = 0$, atunci $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)n(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)n > n(\varepsilon)$, $\frac{x_n}{y_n} < \varepsilon$. Adică $x_n < \varepsilon \cdot y_n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$. Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci conform primului criteriu al comparației seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

iii) Dacă $L = \infty$, atunci $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)n(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)n > n(\varepsilon)$, $\frac{y_n}{x_n} < \varepsilon$. Adică $y_n < \varepsilon \cdot x_n$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, conform primului criteriu al comparației seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{2n^2}$.

Soluție. Pe lângă seria din enunț considerăm şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ care este o serie convergentă. Fie $x_n = tg\frac{\pi}{2n^2}$ şi $y_n = \frac{1}{n^2}$. Deci, $\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$.

Aplicând criteriul al treilea al comparației, obținem că cele două serii au aceeaşi natură. Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{2n^2}$ este convergentă.

PROPOZIȚIA 4.2.11 (**Criteriul lui Gauss**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\frac{x_n}{x_{n+1}} = a + \frac{b}{n} + \frac{q_n}{n^2}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ şir mărginit.

i) Dacă $a > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Dacă $a < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

iii) Dacă $a=1$ şi $b>1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, iar pentru $a=1$ şi $b\le 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=a$, atunci ținând cont de criteriul raportului avem că:

i) dacă $a>1$, atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{a}<1$ şi deci seria este convergentă;

ii) dacă $a<1$, atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{a}>1$ şi deci seria este divergentă;

iii) dacă $a=1$, atunci egalitatea din ipoteză se pune sub forma $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=b+\frac{q_n}{n}$ şi $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=b$. Atunci, conform cu criteriul lui Raabe-Duhamel, pentru $b>1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi pentru $b\le 1$, seria este divergentă.

PROPOZIȚIA 4.2.12 (**Forma echivalentă a criteriului lui Gauss**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+...+a_p}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+...+b_p}$.

i) Dacă $b_1-a_1>1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

ii) Dacă $b_1-a_1\le 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Se dau în continuare două criterii foarte utile în studiul convergenței seriilor cu termeni pozitivi.

PROPOZIȚIA 4.2.13. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi, atunci ea are aceeaşi natură cu seria $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} v_{\mathrm{n}}$, unde $v_n=x_{k_{n-1}+1}+...+x_{k_n}$, unde $(k_n)_{n\ge 0}$ este şir crescător nemărginit de numere reale.

PROPOZIȚIA 4.2.14 (**Criteriul de condensare al lui Cauchy**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, unde $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir descrescător de numere pozitive şi $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir crescător nemărginit de numere naturale astfel încât şirul $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ este mărginit. Atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x_{a_n}$ au aceeaşi natură.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=3}^{\infty} tg \frac{p}{n}$.

Soluție. Termenul general al seriei $x_n = tg \frac{p}{n}$ este un şir descrescător de numere pozitive. Se consideră $a_n = 2^n$. Acesta este un şir crescător şi mărginit de numere pozitive. Se consideră seria $\sum_{n=3}^{\infty} 2^n tg \frac{p}{2^n}$. Aceasta este o serie divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty} 2^n tg \frac{p}{2^n} = p \neq 0$. Conform criteriului de condensare al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum_{n=3}^{\infty} tg \frac{p}{n}$ este divergentă.

3. SERII CU TERMENI OARECARE

DEFINIȚIA 4.3.1 Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o **serie cu termeni oarecare** dacă are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

OBSERVAȚIA 4.3.1 Seriile cu o infinitate de termeni negativi, dar cu un număr finit de termeni pozitivi pot fi considerate serii cu termeni pozitivi.

Pentru seriile cu termeni oarecare se pune, ca şi la celelalte tipuri de serii, problema convergenței sau divergenței. În acest caz, convergența are două aspecte:
a) convergență absolută;
b) convergență simplă (semiconvergență).
Aceste noțiuni se definesc astfel:

DEFINIȚIA 4.3.1 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni oarecare.

a) Se spune că seria este **absolut convergentă** dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ nu este convergentă, atunci se spune că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **semiconvergentă** sau **simplu convergentă** sau **convergentă**.

Legătura dintre absolut convergență şi semiconvergență este dată de următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 4.3.1 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni oarecare. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă rezultă că este convergentă. Reciproca nu este în general adevărată.

Demonstrație. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. Ținând cont de criteriul de convergență al lui Cauchy se poate afirma că: oricare ar fi $e > 0$, există $n(e) > 0$, astfel încât pentru orice $n > n(e)$ rezultă $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + ... + |x_{n+p}| < e$, pentru orice $p \in$ ¥ fixat. Dar se ştie că modulul sumei este mai mic sau egal decât suma modulelor, adică:

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + ... + |x_{n+p}| \geq |x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}|.$$

Rezultă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Pentru a demonstra că reciproca nu este în general adevărată se consideră seria

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

numită **serie armonică alternantă**. Această serie este convergentă şi are suma $S = \ln 2$.

Într-adevăr, se consideră termenul general al şirului sumelor parțiale

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

Fie $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Atunci este evident că $u_{2n}-2\left(\frac{1}{2}u_n\right)=u_{2n}-u_n$.

Dacă se înlocuieşte efectiv, se obține:

$$u_{2n}-2\left(\frac{1}{2}u_n\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+...+$$
$$+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}. \qquad (1)$$
$$u_{2n}-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}. \qquad (2)$$

Deci, din (1) şi (2) obținem:

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$$

(**identitatea lui Catalan**).

Dar, $S_{2n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ este suma Riemann a funcției $f(x)=\frac{1}{1+x}$ pe $[0,1]$.

Cum funcția este integrabilă, atunci $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$. Deci, într-adevăr seria este convergentă şi are suma $\ln 2$.

Dar se observă că, dacă se porneşte de la seria (1) şi se trece la module, se obține seria $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ care este seria armonică şi care se ştie că este divergentă. Aceasta demonstrează că reciproca nu este în general adevărată.

OBSERVAȚIA 4.3.2

a) Ținând cont de Definiția 4.3.2, rezultă că seriile cu termeni pozitivi sunt serii absolut convergente deoarece $|x_n|=x_n$.

b) Deoarece $|x_n|>0$, pentru studiul absolut convergentei pot fi folosite şi criteriile de la serii cu termeni pozitivi.

PROPOZIȚIA 4.3.2 Seria termenilor pozitivi şi seria termenilor negativi dintr-o serie semiconvergentă sunt serii divergente.

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie semiconvergentă. Atunci, conform cu Definiția 4.3.2, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă. Fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ şi $s_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k|$ termenii generali ai şirurilor sumelor parțiale pentru cele două serii. Atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ finită şi $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Fie a_n termenul general al şirului sumelor parțiale din seria termenilor pozitivi şi b_n termenul general al şirului sumelor parțiale din seria termenilor negativi. Atunci au loc relațiile:

$$\begin{cases} a_n + b_n = S_n, \\ a_n - b_n = s_n. \end{cases}$$

Ținând cont de aceste relații, se obține: $2a_n = S_n + s_n$. Adică $a_n = \dfrac{S_n + s_n}{2}$. Deci, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Adică, seria termenilor pozitivi este divergentă, deoarece şirul sumelor parțiale pentru această serie are limita $+\infty$. Tot din relațiile anterioare se obține $2b_n = S_n - s_n$. Adică, $b_n = \dfrac{S_n - s_n}{2}$. Deci, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Adică seria termenilor negativi este divergentă, deoarece şirul sumelor parțiale pentru această serie are limita $-\infty$.

Pentru studiul convergenței seriilor cu termeni oarecare, pe lângă criteriul general de convergență al lui Cauchy se mai pot folosi:
i) Criteriul lui Abel;
ii) Criteriul lui Dirichlet;
iii) Criteriul lui Leibniz.

PROPOZIȚIA 4.3.3 (**Criteriul lui Abel**) Dacă $(b_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni oarecare, convergentă, atunci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$ este o serie convergentă.

Demonstrație. Fără a micşora generalitatea se poate presupune că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi are limita zero. Fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k x_k$ şi $a_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ termenii generali ai şirurilor sumelor parțiale pentru seriile $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Pentru a arăta că seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$ este o serie convergentă, se arată că şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este un şir fundamental. Cum ¡ este spațiu vectorial normat complet rezultă că $(S_n)_{n\geq 0}$, este convergent. Într-adevăr,

$$S_{n+p} - S_n = b_{n+1}\cdot x_{n+1} + b_{n+2}\cdot x_{n+2} + \ldots + b_{n+p}\cdot x_{n+p} =$$

$$= b_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + b_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1}) + \ldots + b_{n+p}(a_{n+p} - a_{n+p-1}) =$$

$$= (b_{n+p}\cdot a_{n+p} - b_{n+1}\cdot a_n) + \sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})a_{n+k}$$

Se trece la modul în această egalitate şi se obține:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| \leq b_{n+p}\cdot\left|a_{n+p}\right| + b_{n+1}\cdot\left|a_n\right| + \sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})\left|a_{n+k}\right|.$$

Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aşadar:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| \leq b_{n+p}\cdot\left|a_{n+p}\right| + b_{n+1}\cdot\left|a_n\right| + \sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})\left|a_{n+k}\right| \leq$$

$$\leq M\left(b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})\right) = 2M\cdot b_{n+1} \to 0.$$

Aşadar, $\left|S_{n+p} - S_n\right| \leq 2M\cdot b_{n+1} \to 0$. De aici rezultă că şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, deci convergent. Deci, seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$ este convergentă.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} arctg\frac{1}{n}$.

Soluție. Se consideră şirurile $b_n = arctg\frac{1}{n}$ şi $x_n = \frac{1}{n^2}$. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător şi mărginit de zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Atunci, din criteriul lui Abel, seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} arctg \frac{1}{n}$ este convergentă.

PROPOZIȚIA 4.3.4 (**Criteriul lui Dirichlet**) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton cu limita zero şi $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$ şir mărginit. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ este o serie convergentă.

Demonstrație. Se notează cu $(s_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$. Se arată în continuare că şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, ceea ce este echivalent cu faptul că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ este convergentă. Avem:

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|\left(a_{n+p} S_{n+p} - a_{n+1} S_n\right) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(a_{n+k} - a_{n+k+1}\right) S_{n+k}\right| \leq M \cdot \left|a_{n+1}\right| \to 0,$$

deoarece $a_n \searrow 0$ şi $\left|S_n\right| \leq M$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Deci, şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin na}{n^a}$, $a > 0$.

Soluție. Pentru $a = kp$, termenii seriei sunt nuli. Deci, seria este convergentă. Pentru $a \neq kp$, şirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{n^a}$ este descrescător şi convergent către zero.

Cum, $S_n(a) = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na = \sin \frac{na}{2} \sin \frac{(n+1)a}{2}$, rezultă că $\left|S_n(a)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{na}{2}\right|}$. Deci, acest şir este mărginit şi din criteriul lui Dirichlet, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin na}{n^a}$ este convergentă.

O categorie particulară de serii cu termeni oarecare sunt seriile alternante care se definesc astfel.

DEFINIȚIA 4.3.3 Seria

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... + (-1)^{n+1} x_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n,\ x_n > 0,\ (\forall) n \in \mathbb{N}$$

se numeşte **serie alternantă**.

Pentru o astfel de serie pot fi folosite în studiul convergenței atât criteriul lui Abel, cât şi criteriul lui Dirichlet, dar în mod special pentru convergența acestui tip de serie se foloseşte următorul criteriu.

PROPOZIȚIA 4.3.5 (**Criteriul lui Leibniz**) Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ o serie alternantă. Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător cu limita zero, atunci seria alternantă este convergentă.

Demonstrație. Criteriul lui Leibniz este un caz particular al criteriului lui Dirichlet. Într-adevăr, în criteriul lui Dirichlet, dacă se consideră în locul lui $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şirul $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$, iar în rolul şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ din enunț.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg\frac{1}{n}$.

Soluție. Cum $x_n = tg\frac{1}{n} > 0,\ (\forall) n \geq 1$, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg\frac{1}{n}$ este o serie alternantă. Fie $n_1 < n_2$, cu $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Cum $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$, rezultă că $x_{n_1} = tg\frac{1}{n_1} > tg\frac{1}{n_2} = x_{n_2}$. Deci, $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Deoarece, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} tg\frac{1}{n} = 0$, atunci din criteriul lui Leibniz rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg\frac{1}{n}$ este convergentă.

În continuare se pun în evidență câteva rezultate foarte utile în studiul seriilor.

PROPOZIȚIA 4.3.6 Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obține tot o serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă.
PROPOZIȚIA 4.3.7 (**Teorema lui Riemann**) Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria obținută să fie o serie convergentă către un număr dat dinainte, finit sau infinit sau să fie o serie oscilantă.

Cu seriile numerice se pot face operații algebrice, deoarece ele sunt elemente ale unui spațiu vectorial normat. Aceste operații se definesc astfel:

DEFINIȚIA 4.3.4 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii numerice. Atunc, avem:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ - adunarea a două serii;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)$ - scăderea a două serii;

iii) $a \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a\, x_n$ - înmulțirea unei serii cu un număr;

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ - produsul a două serii,

unde $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_{n-1} y_2 + x_n y_1$.

PROPOZIȚIA 4.3.8 Dacă s, S, s , S' sunt sumele seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ şi respectiv $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)$, atunci au loc relațiile:

i) $s = s + S$,

ii) $S' = s - S$.

Exemplu. Fie $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1-k)(n+2-k)} arctg \frac{1}{k^2 + k + 1}$. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Soluție. Ținând cont de produsul a două serii, se observă că $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{1}{n^2+n+1}\right)$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{1}{n^2+n+1}$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{p}{2}$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este convergentă și $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \frac{p}{2}$.

PROPOZIȚIA 4.3.9 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii convergente ale căror sume sunt s și S. Atunci seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este convergentă și are suma q și are loc relația $q = s \cdot S$.

4. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 4.4.1 Să se arate că următoarele serii sunt convergente și să se găsească suma lor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{x}{2^n}, \quad x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$;

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n-3}{n!}$.

Soluție. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ este convergent şi $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ este suma seriei, adică $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

a) Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. Descompunem în fracții simple şi obținem:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A_0}{k} + \frac{A_1}{k+1} + \frac{A_2}{k+2} + \frac{A_3}{k+3},$$

cu $A_0 = \frac{1}{3!}$, $A_1 = -\frac{1}{1!2!}$, $A_2 = \frac{1}{2!1!}$ şi $A_3 = \frac{-1}{3!}$. Deci,

$$S_n = \frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) - \frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Trecând la limită, obținem: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{11}{36} - \frac{1}{4} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{3\cdot 3!}$. Deci, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3\cdot 3!}$.

Acest exercițiu se poate generaliza astfel:

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$ este convergentă şi are loc egalitatea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p\cdot p!}$

b) Avem: $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln k \cdot \ln(k+1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Deci, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\ln 2}$.

Aşadar, seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$ este convergentă şi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2}$.

c) Avem: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{\sqrt{4k^2-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Deci, $\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

Aşadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$ este convergentă şi are suma 1.

d) Avem: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\mathbf{K}\,n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\mathbf{K}\,n}=\ln(n+1)$.

Cum $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

e) Avem:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+(-1)^{k+1}}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{5^k}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right].$$

Deci, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Aşadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}=\frac{5}{6}$.

f) Avem: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}=\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$.

Fie $P=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\mathbf{L}\cdot\cos\frac{x}{2^n}$. Rezultă că $P\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\sin x$.

Deci, $P=\sin x\cdot\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$. Aşadar, $S_n=\ln\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$.

Atunci, $\lim_{n\to\infty}S_n=\ln\frac{\sin x}{x}$. Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{x}{2^n}$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\frac{\sin x}{x}$.

g) Avem: $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-3}{k!}$. Dar,

$$\frac{k^2+k-3}{k!}=\frac{k(k-1)}{k!}+\frac{2(k-1)}{k!}-\frac{1}{k!}=\left(\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}\right)+2\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right).$$

Deci,

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}\right]+2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)=2-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+2-\frac{2}{n!}=4-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{3}{(n)!}\cdot$$

Aşadar, $S_n=4-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{3}{n!}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=4$. Deci, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n-3}{n!}$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n-3}{n!}=4$.

EXERCIȚIUL 4.4.2 Să se studieze convergența următoarelor serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot tg\frac{a}{2^n},\ a\in\left(0,\frac{p}{2}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\,\mathbf{L}\,\cos\frac{a}{2^n},\ a\in(0,p)$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x+x^2+\mathbf{K},+x^n)\cdot \mathrm{tg}(\cos x^{n}),\ x\in(0,1)$.

Soluție. Conform cu Propoziția 4.1.3, dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă.

a) Avem: $x_n=\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{1}{3}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}\neq 0$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ este divergentă.

b) Avem: $x_n=2^n\cdot tg\frac{a}{2^n}=a\cdot\frac{tg\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\frac{tg\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=a\neq 0$ deoarece $a\in\left(0,\frac{p}{2}\right)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot tg\frac{a}{2^n}$ este divergentă.

c) Avem: $x_n = \cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\mathbf{L}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{a}{2^n}$. Înmulțind cu $\sin\frac{a}{2^n}$, obținem:

$$x_n\cdot\sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\mathbf{L}\sin\frac{a}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\mathbf{L}\sin\frac{a}{2^{n-2}} = \mathbf{L} = \frac{1}{2^n}\sin a$$

Deci, $x_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}\cdot\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a}{a}\cdot\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}$.

Cum, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sin a}{a} \neq 0$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{a}{2}\mathbf{L}\cos\frac{a}{2^n}$ este divergentă.

d) Avem: $x_n = (1+x+x^2+\ldots,+x^n)\cdot tg(\cos x^n) = \frac{1-x^n}{1-x}\cdot tg(\cos x^n)$ cu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}\cdot tg(\cos x^n) = \frac{tg1}{1-x}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{tg1}{1-x} \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x+\ldots+x^n)\cdot tg(\cos x^n)$ este divergentă.

EXERCIȚIUL 4.4.3 Folosind criteriul comparației să se arate că următoarele serii sunt convergente:

a) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+n+p},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x+\ldots+x^n)}\right)$, $a>-1, x>0$;

b) $\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^a},\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\right)$;

c) $\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)},\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}\right)$.

Soluție. Conform cu Propoziția 4.1.5, seria $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2,\ldots,\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^m\right)$ este convergentă dacă şi numai dacă fiecare proiecție $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^i$, $i=\overline{1,m}$ este convergentă.

a) Pentru $a>1$, avem $\frac{1}{a^n+n+p}<\frac{1}{a^n}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ este convergentă (vezi natura seriei progresiei geometrice). Conform primului criteriu al comparației seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+n+p}$ este convergentă.

Pentru $|a|<1$, avem $\frac{\frac{1}{a^n+n+p}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+p+a^n}=\frac{1}{1+\frac{p}{n}+\frac{a^n}{n}}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+n+p}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{p}{n}+\frac{a^n}{n}}=1.$$

Conform cu Propoziția 4.2.10, seriile $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+n+p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ au aceeaşi natură şi anume sunt serii divergente (vezi seria armonică).
Studiem natura celei de-a doua proiecții. Pentru $x>1$, avem $\frac{1}{n(1+x+...+x^n)}<\frac{1}{x^n}$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ este convergentă atunci, conform primului criteriu al comparației, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x+\mathbf{K}+x^n)}$ este convergentă.

Pentru $x\in(0,1)$, avem $\frac{\frac{1}{n(1+x+...+x^n)}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+x+...+x^n}=\frac{1-x}{1-x^{n+1}}$. Atunci,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+x_1+...+x^n)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x}{1-x^{n+1}}=1-x.$$

Conform cu Propoziția 4.2.10, seriile $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x_1+\mathbf{K}+x_n)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ au aceeaşi natură. Deci, sunt divergente. Aşadar, se poate concluziona că seria $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+n+p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x_1+x_2+\mathbf{K}+x^n)}\right)$ este convergentă pentru $a>1$ şi $x>1$ şi divergentă $a\in(-1,1)$ sau $x\in(0,1)$.

b) Este evident că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^a}{n}=0$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$. Ținând cont de definiția limitei unui şir, se obține $(\ln n)^a<n$ pentru orice $n>N\in\mathbb{N}$ (N este un rang). Atunci, $\frac{1}{(\ln n)^a}>\frac{1}{n}$. Conform cu Propoziția 4.2.3, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^a}$ este divergentă.

Pentru cea de-a doua proiecție, avem $(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\cdot\ln n}=(e^{\ln n})^{\ln n}=n^{\ln n}$. Aşadar, $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln n}$.

Pentru $n>e^2$, rezultă că $n^{\ln n}>n^2\Rightarrow\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{n^2}$. Deci, rezultă că $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$. Conform cu Propoziția 4.2.3, deoarece seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ este convergentă. Deci, se poate concluziona că seria $\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^a},\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\right)$ este divergentă deoarece prima proiecție este divergentă pentru orice $a\in\mathbb{R}$, deşi a doua proiecție este convergentă.

c) Deoarece $n!<n^n\Rightarrow\ln(n)!<n\cdot\ln n\Rightarrow\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\cdot\ln n}$. Ținând cont de Propoziția 4.2.14, seriile $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\ln 2^n}=\sum\limits_{n=2}\frac{1}{n\cdot\ln 2}$ au aceeaşi natură. Deci, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ este divergentă, deoarece seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln 2}$ este divergentă. Aşadar, conform cu Propoziția 4.2.3 se obține că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ este divergentă.

EXERCIȚIUL 4.4.4 Folosind criteriul raportului şi radicalului să se studieze convergența seriilor:

a) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}\right)$;

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}_{n \text{ ori}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!+(n+3)!}\right)$;

c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1^m+2^m+...+n^m}{n^m}-\frac{n}{m+1}\right)^n\right)$, $m>0$ fixat;

d) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+x)}-n\right]^n\right)$, $a>0,\ x>0$.

Soluție. Conform cu Propoziția 4.1.5 ca şi la exercițiul precedent, se studiază convergența fiecărei proiecții pentru aceste serii din $\mathbb{R}^2$.

a) Fie $x_n=\frac{4^n\cdot n!}{n^n}$ Atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{4^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{4^n\cdot n!}=4\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Dar, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{4}{e}>1$ şi conform cu Propoziția 4.2.6, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n}$ este divergentă.

Pentru cea de-a doua proiecție, fie $x_n=\frac{n!}{n^{2n}}$. Atunci,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{2(n+1)}}\cdot\frac{n^{2n}}{n!}=\frac{1}{n+1}\cdot\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^2.$$

Deci, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^2=0$ şi conform cu Propoziția 4.2.6, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}$ este convergentă. Se poate concluziona că seria $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}\right)$ este divergentă deoarece prima sa proiecție este o serie divergentă, deşi a doua proiecție este convergentă.

b) Fie $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ ori}}$. Deci, avem recurența $x_n^2=2+x_{n-1}$. De aici rezultă că şirul este monoton şi mărginit, deci este convergent şi $l^2-l-2=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=2\neq 0$. Aşadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ ori}}$ este divergentă.

Pentru cea de-a doua proiecție, fie $x_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!+(n+3)!}$. Atunci,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!+(n+4)!} \cdot \frac{(n+1)!+(n+3)!}{2^n} = 2 \cdot \frac{1+(n+2)(n+3)}{n+2+(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Deci,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+(n+2)(n+3)}{n+2+(n+2)(n+3)(n+4)} = 0 < 1.$$

Conform cu Propoziția 4.2.6, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)!+(n+3)!}$ este convergentă.

Se poate concluziona că seria $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}_{n \text{ ori}}, \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)!+(n+3)!} \right)$ este divergentă deoarece prima proiecție a sa este o serie divergentă, deşi a doua proiecție este serie convergentă.

c) Fie $x_n = \left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^n$. Atunci, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ şi conform cu Propoziția 4.2.5, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} \right)^n$ este convergentă.

Pentru cea de-a doua proiecție, fie $x_n = \left[\dfrac{1^m + 2^m + ... + n^m}{n^m} - \dfrac{n}{m+1} \right]^n$. Atunci,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^m + 2^m + ... + n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^{m+1} + (m+1)n^m + ... + 2^m(m+1) + m + 1}{(m+1)n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(n+1)^{m+1} + (n+1)^m \cdot (m+1) + n^{m+1}}{(m+1)[(n+1)^m - n^m]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[(m+1)C_m^1 - C_{m+1}^2]n^{m-1} + ... + m}{(m+1)[C_m^1 n^{m-1} + ... + 1]} = \frac{-m^3 + 2m^2 + 3m}{m^2 + m} = \frac{-m^2 + 2m + 3}{m+1}$$

Dacă $\dfrac{-m^2 + 2m + 3}{m+1} > 1 \left(\Leftrightarrow \dfrac{-m^2 + m + 2}{m+1} > 0 \Rightarrow m \in \{0;1\} \right)$, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$ şi deci seria divergentă. Dacă $m \ge 3$, $m \in ¥$ fixat, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergentă. Pentru $m = 2$, avem

$\sqrt[n]{x_n} = \dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \dfrac{1}{2} < 1$. Aşadar, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}\right]^n$ este convergentă. Deci, se poate concluziona că seria $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1^m+2^m+...+n^m}{n^m} - \dfrac{n}{m+1}\right]^n\right)$ este divergentă pentru $m \in \{0,1\}$ (deoarece proiecția a doua este divergentă) şi convergentă pentru $m \geq 2$, $m \in$ ¥ fixat.

d) Fie $x_n = \left(\dfrac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^{n^2}$. Deci, $\sqrt[n]{x_n} = \left(\dfrac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^n$, iar

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b-c}{a\cdot n+c}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{b-c}{a\cdot n+c}\right)^{\frac{a\cdot n+c}{b-c}}\right]^{\frac{n(b-c)}{a\cdot n+c}} = e^{\frac{b-c}{a}}.$$

Dacă $\dfrac{b-c}{a} > 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^{n^2}$ este divergentă, iar pentru $\dfrac{b-c}{a} < 0$ seria este convergentă. Dacă $b = c$, atunci se obține $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ care este divergentă.

Pentru cea de-a doua proiecție, fie $x_n = \left[\sqrt{(n+1)(n+x)} - n\right]^n$. Atunci, $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{(n+1)(n+x)} - n$, iar:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+x)} - n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(x+1)\cdot n + x}{\sqrt{(n+1)(n+x)}+n} = \frac{x+1}{2}.$$

Pentru $x \in (0,1)$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+x)} - n\right]^n$ este convergentă, iar pentru $x > 1$ este divergentă. Pentru $x = 1$ se obține $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ care este divergentă. Se poate concluziona că seria $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}\right)^{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+x)} - n\right]^n\right)$ este convergentă dacă $b < c$ şi $x \in (0,1)$. Dacă $b \geq c$ sau $x \geq 1$, atunci seria este divergentă.

EXERCIȚIUL 4.4.5 Să se studieze convergența seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{(2+1)(2\cdot 2+\frac{1}{2})...(2n+\frac{1}{n})}$; să se generalizeze;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2(2+r)(2+2r)...(2+(n-1)r)}{3(3+1)(3+2r)...(3+(n-1)r)}\right]^a$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$; să se generalizeze;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)...(\sqrt{2}+n-1)} \cdot \dfrac{1}{n^a}$; $a \in \mathbb{R}$; să se generalizeze;

d) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)...(\sqrt{2}+n-1)\cdot\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)...(\sqrt{3}+n-1)}{n!\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)...(\sqrt{5}+n-1)}$; să se generalizeze.

Soluție.

a) Fie $x_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{(2+1)(2\cdot 2+\frac{1}{2})...(2n+\frac{1}{n})}$. Deci,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2^n \cdot n!}{(2+1)(2\cdot 2+\frac{1}{2})...(2n+\frac{1}{n})} \cdot \frac{(2+1)(2\cdot 2+\frac{1}{2})...(2n+\frac{1}{n})(2n+2+\frac{1}{n+1})}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} = \frac{2n+2+\frac{1}{n+1}}{2n+2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, atunci nu se poate aplica Propoziția 4.2.6. Se aplică Propoziția 4.2.9 și se obține:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{2n+2+\frac{1}{n+1}}{2n+2}-1\right) = n\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{2n+2} = \frac{n}{2(n+1)^2}.$$ Așadar,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)^2} = 0.$$

Conform cu Propoziția 4.2.9, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{(2+1)(2\cdot 2+\frac{1}{2})...(2n+\frac{1}{n})}$ este divergentă.

Generalizarea acestei serii este următoarea: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!b^n}{(b+a_1)(2b+a_2)...(bn+a_n)}$, $b>0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pentru această serie, procedând analog se obține

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{a}{b}$. Atunci, pentru $\frac{a}{b}>1$ este convergentă şi pentru $\frac{a}{b}<1$ seria este divergentă.

b) Fie $x_n=\left[\frac{2(2+r)(2+2r)...[2+(n-1)r]}{3(3+1)(3+2r)...[3+(n-1)r]}\right]^a$. Deci, $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\left(\frac{n\cdot r+3}{n\cdot r+2}\right)^a$. Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ nu poate fi aplicată Propoziția 4.2.6. Se aplică Propoziția 4.2.9

şi se obține $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{\left(\frac{r+3\cdot\frac{1}{n}}{r+2\cdot\frac{1}{n}}\right)^a-1}{\frac{1}{n}}$.

Pentru a se putea calcula $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r+3\cdot\frac{1}{n}}{r+2\cdot\frac{1}{n}}\right)^a-1}{\frac{1}{n}}$ se aplică regula l'Hospital

pentru $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{r+3x}{r+2x}\right)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0} a\cdot\left(\frac{r+3x}{r+2x}\right)^{a-1}\cdot\frac{r}{(r+2x)^2}$.

Deci, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{a}{r}$. Conform Propoziției 4.2.9 pentru $r<a$ seria este convergentă, iar pentru $r>a$ este divergentă.

Generalizarea acestei serii este seria $\sum_{n=1}^{a}\left[\frac{a(a+r)...(a+nr-r)}{b(b+r)...(b+nr-r)}\right]^a$, $a>0,\ b>0,\ r>0,\ a\in$ ¡ .

Procedând analog se găseşte $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{a\,(b-a)}{r}$. Deci, pentru $r<a\,(b-a)$ seria este convergentă, iar pentru $r>a\,(b-a)$ seria este divergentă.

c) Fie $x_n=\frac{n!}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)...(\sqrt{2}+n-1)}\cdot\frac{1}{n^a}$.

Deci, $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{2}+n}{1+n} \cdot \left(\dfrac{1+n}{n} \right)^{a} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^{a-1}$.

Aşadar, $n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^{a-1} - 1}{\dfrac{1}{n}}$.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ se aplică regula lui l'Hospital pentru:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{2}x)(1+x)^{a-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\sqrt{2}(1+x)^{a-1} + (a-1)(1+\sqrt{2}x)(1+x)^{a-2} \right] = \sqrt{2} + a - 1$$

.

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \sqrt{2} + a - 1$. Aşadar, pentru $a > 2 - \sqrt{2}$ seria este convergentă, iar pentru $a < 2 - \sqrt{2}$ seria este divergentă.

Generalizarea acestei serii este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)} \cdot \dfrac{1}{n^{a}}$, $a > 0$, $a \in$ ¡. Procedând analog se găseşte: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = a + a - 1$. Aşadar, pentru $a < 2 - a$ seria este divergentă, iar pentru $a > 2 - a$ seria este convergentă.

Observaţie. Convergenţa acestei serii se poate determina şi cu ajutorul Propoziţiei 4.2.11

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \frac{a+a-1}{n} + \frac{d_n}{n^2}, \qquad (1)$$

unde $\quad d_n = a(a-1) + \dfrac{(a-1)(a-2)}{2} \left(1 + \dfrac{q}{n} \right)^{a-3} + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{2n} \left(1 + \dfrac{q}{n} \right)^{n-3}$,

$q \in (0,1)$.

Se observă că şirul este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} d_n = a(a-1) + \frac{(a-1)(a-2)}{2} = \frac{(a-1)(2a+a-2)}{2}.$$

Deci, şirul este şi mărginit. Din egalitatea (1), conform cu Propoziţia 4.2.11, $a + a - 1 > 1 \Leftrightarrow a > 2 - a$ seria este convergentă, iar pentru $a < 2 - a$ seria este divergentă.

Pentru a pune pe $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ sub forma (1) se foloseşte formula lui Mac-Laurin de ordin 3 pentru funcția $f(n)=(1+n)^{a-1}$ şi $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

d) Fie $x_n=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)...(\sqrt{2}+n-1)\cdot\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)...(\sqrt{3}+n-1)}{n!\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)...(\sqrt{5}+n-1)}$.

Deci, $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{(n+1)(n+\sqrt{5})}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{3})}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$, atunci nu se poate folosi Propoziția 4.2.6 şi se aplică Propoziția 4.2.9. Se obține

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{(n+1)(n+\sqrt{5})}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{3})}-1\right)=\frac{n^2(\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)-n\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{3})}.$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1>0$. Deci, seria din enunț este convergentă.

Observație

- Pentru a arăta că $\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1>0$ se utilizează inegalitățile $\sqrt{5}>2,23$, $\sqrt{2}<1,48$, $\sqrt{3}<1,74$.
- Generalizarea acestei serii este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)\cdot b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)}.$$

- Fie $a=\max\{a,b,c\}$ şi $b=\min\{a,b,c\}$. Dacă $n_0>\max\{|[a]|,|[b]|\}$, atunci termenii seriei au acelaşi semn. Deci, această serie poate fi considerată ca serie cu termeni pozitivi şi aplicând Propoziția 4.2.9 se obține $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{n^2\cdot(c-a-b+1)-n\cdot a\cdot b}{(n+a)(n+b)}$. Dar, $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=c-a-b+1$.

Conform cu Propoziția 4.2.9, pentru $c-a-b<0$ seria este divergentă.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)...(a+n-1)\cdot b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)}$ se numeşte **serie hipergeometrică**.

EXERCIȚIUL 4.4.6 Să se studieze natura următoarelor serii alternante:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$, $a\in\mathbb{R}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^{a}}}$, $a\in\mathbb{R}$.

Soluție. Conform cu Propoziția 4.3.5, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n$ este convergentă dacă $x_n \searrow 0$.

a) Fie $x_n = tg\dfrac{1}{n}$. Deoarece $(\forall)n\geq 1$, $\dfrac{1}{n}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $f(x)=tgx$ este funcție crescătoare pe $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Se obține $n_1<n_2 \Rightarrow \dfrac{1}{n_1}>\dfrac{1}{n_2}\Rightarrow tg\dfrac{1}{n_1}>tg\dfrac{1}{n_2}$. Așadar $(x_n)_n$ este şir descrescător şi este evident că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Deci, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\dfrac{1}{n}$ este convergentă.

Deoarece $tg\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{1}{n}\Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\dfrac{1}{n}$ nu este convergentă. Deci, seria alternantă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\dfrac{1}{n}$ nu este absolut convergentă.

b) Fie $x_n=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n)^{n+2}}=\dfrac{n+1}{n^2}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\cdot e=0$. Se consideră funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}\cdot\dfrac{1}{x}$.

Deci, $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}\left(\dfrac{-2}{x}+\ln\dfrac{x+1}{x}\right)$. Fie $g(x)=\dfrac{-2}{x}+\ln\dfrac{x+1}{x}$, cu $g'(x)=\dfrac{x+2}{x^2(x+1)}>0$. Deci, g este crescătoare și $M_g\to 0$. Deci, $g(x)<0$. Rezultă că $f'(x)<0\Rightarrow$ f descrescătoare. Atunci $x_n=f(n)$

este şir descrescător şi conform cu Propoziția 4.3.5, seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este convergentă.

Deoarece $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n)^{n+2}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n^{2}}>e\cdot\frac{n+1}{n^{2}}>\frac{e}{n}$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este divergentă. Deci, seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ nu este absolut convergentă.

c) Fie $x_n=\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$. Pentru $a<0$, şirul $(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ nu are limită. Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ este oscilantă. Pentru $a>0$, $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ şi $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right]^{a}<1$. Deci, $(x_n)_n$ este şir descrescător. Conform cu Propoziția 4.3.5, seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ este convergentă.

Deoarece $\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}>\frac{1}{(n+1)^{a}}$, $(\forall)a>0$, atunci pentru $a\leq 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ este divergentă. Deci, pentru $a\in(0,1]$, seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ nu este absolut convergentă.

Pentru $a>1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ nu este convergentă deoarece $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left[\ln(k+1)\right]^{a}}>\frac{n}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}\to\infty$.

Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{a}}$ nu este absolut convergentă nici pentru $a>1$.

d) Fie $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^a}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^a}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Aşadar, Propoziția 4.3.5 nu mai poate fi folosită. Dacă se consideră $y_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^a}}$ este evident că $y_{2n} \to -1$, $y_{2n+1} \to 1$. Atunci, $(y_n)_{n\geq 1}$ nu are limită şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^a}}$, $a \in \mathbb{R}$ este oscilantă.

EXERCIȚIUL 4.4.7 Să se arate că seriile de mai jos au sumele indicate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+k)} = \dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\right) = \gamma$, $\gamma = 0,577215...$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{\pi}{4}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{n!} = 15e$.

Soluție.

a) Fie $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+k)}$. Cum $\dfrac{1}{i(i+k)} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+k}\right)$, rezultă că

$$S_n = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+k}\right).$$

Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{k}\right)$

b) Fie $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \ln\dfrac{k+1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k+1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$. S-a arătat în secțiunea 3.6 că şirul $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ este convergent şi are limita $\gamma = 0,577215...$, iar γ se mai numeşte constanta lui Euler.

c) Deoarece $arctg\,\dfrac{1}{k^2+k+1} = arctg\,(k+1) - arctg k$, atunci

$$S_n = arctg\,(n+1) - arctg 1 = arctg\,(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$. Aşadar, seria este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{p}{4}$.

d) Fie $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^4}{k!}$. Dar, $\frac{k^4}{k!} = \frac{1}{(k-4)!} + \frac{6}{(k-3)!} + \frac{7}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!}$. Fie $S_n^i = \sum\limits_{k=1}^{n-i} \frac{1}{k!}$, $i = 1,2,3,4.$ Avem: $S_n = S_n^1 + 7S_n^2 + 6S_n^3 + S_n^4$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^i = e$, $i = 1,2,3,4$, atunci se obține $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 15e$. Deci, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e$.

CAPITOLUL V: ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCȚII

1. ŞIRURI DE FUNCȚII

Fie X şi Y spații vectoriale normate. Se ştie că $Y^X = \{ f \mid f : X \to Y;\ f - \text{funcție} \}$ este mulțimea funcțiilor definite pe X cu valori în Y.

DEFINIȚIA 5.1.1 Fie $S : \mathbb{N} \to Y^X$, $S(n) = f_n(x)$ (pune în corespondență fiecare număr natural cu un element din Y^X). Vom spune că $S(n) = f_n(x)$ este **termenul general al unui şir de funcții** şi se notează cu $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$.

OBSERVAȚIA 5.1.1

a) Dacă $X \subset \mathbb{R}$ şi $Y \subset \mathbb{R}$, atunci şirul $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$ se numeşte şir de funcții reale de variabilă reală.

b) Dacă $X \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $Y \subset \mathbb{R}^k$, atunci şirul $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$ se numeşte şir de funcții vectoriale de variabilă vectorială.

c) Fie $x_0 \in X$. Atunci $\left(f_n(x_0) \right)_{n \geq 0}$ este un şir de elemente din spațiul vectorial normat Y.

Un şir de funcții $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$ generează şiruri de elemente $\left(f_n(x_0) \right)_{n \geq 0}$ din spațiul vectorial normat Y. Aceste şiruri de elemente pot fi convergente sau divergente. Numărul acestor şiruri este $card\ X$.

DEFINIȚIA 5.1.2 Punctul $x_0 \in X$ se numeşte **punct de convergență** al şirului de funcții $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$ dacă şirul de elemente $\left(f_n(x_0) \right)_{n \geq 0}$ ale spațiului vectorial normat Y este un şir convergent. Mulțimea tuturor punctelor de convergență ale şirului de funcții $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$ se numeşte **mulțimea de convergență a şirului** şi se notează în general cu M_C.

OBSERVAȚIA 5.1.2

a) Între domeniul de definiție X al tuturor funcțiilor din şir şi mulțimea de convergență există relația $M_C \subseteq X$.

b) Funcția $f : M_C \to Y$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, se numeşte funcția limită a şirului de funcții $\left(f_n(x) \right)_{n \geq 0}$.

c) Punctul $x_0 \in X$ dacă nu este un punct de convergență al şirului de funcții se numeşte **punct de divergență** al acestui şir şi mulțimea tuturor punctelor de divergență ale şirului de funcții se notează cu M_D şi este evidentă relația $M_D = X \setminus M_C$.

Exemple.

1. Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x + 1}{n+2}$ un şir de funcții reale de variabilă reală. Să se arate că:

a) $x_0 = 1$ este punct de convergență al şirului;

b) $M_C = \mathbb{R}$.

Soluție.

a) Dacă în şirul de funcții $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x + 1}{n+2}$ se înlocuieşte x cu 1, atunci se obține şirul de numere reale $f_n(1) = \dfrac{n+1}{n+2}$. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(1) = 1$ (şirul este convergent), rezultă că $x_0 = 1$ este punct de convergență al şirului de funcții.

b) Pentru a determina mulțimea de convergență a şirului de funcții $\left(f_n(x)\right)_{n \geq 0}$ se calculează $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, unde x este considerat ca parametru, iar domeniul de definiție al funcției $f(x)$, care este limita acestui şir, reprezintă chiar mulțimea de convergență a şirului de funcții $\left(f_n(x)\right)_{n \geq 0}$. În cazul de față $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n \cdot x + 1}{n+2} = x$. Rezultă că $f(x) = x$. Cum domeniul de definiție al acestei funcții este $\mathbb{R}$, atunci avem că $M_C = \mathbb{R}$.

2. Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{2n}{p}} \cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}$ un şir de funcții reale de variabilă reală. Să se arate că:

a) $x_0 = 0$ este punct de divergență al şirului de funcții.

b) să se determine M_C.

Soluție.

a) Din $f_n(0) = \sqrt{\dfrac{2n}{p}} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\dfrac{2n}{p}} = \infty \Rightarrow$ şirul $\left(f_n(0)\right)_{n \geq 0}$ este divergent. Deci $x_0 = 0$ este punct de divergență al şirului de funcții.

b) Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{nx^2}{2}}} = 0$ (viteza de convergență a exponențialei este mai mare decât a funcției putere)

$(\forall)\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow M_C = (-\infty, 0)\cup(0,\infty) \Rightarrow M_C = \{0\}$.

În continuare se vor studia şiruri de funcții vectoriale de variabilă vectorială, adică $X \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $Y \subseteq \mathbb{R}^k$. Aşa cum s-a văzut din exemplele anterioare, problema care se pune în legătură cu un şir de funcții este studierea convergenței sau divergenței şi, în cazul de convergență, găsirea funcției limită, dacă acest lucru este posibil.

Pentru şirurile de funcții, convergența este de două tipuri:

• convergență simplă sau punctuală,

• convergență uniformă sau globală.

Aceste noțiuni se definesc după cum urmează.

DEFINIȚIA 5.1.3 (**Convergența simplă**) Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir de funcții vectoriale de variabilă vectorială. Acest şir este convergent simplu sau punctual pe mulțimea X, către funcția $f(x)$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n(x,\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n > n(x,\varepsilon)$, $\left\| f_n(x) - f(x) \right\| < \varepsilon$. Se scrie astfel: $f_n(x) \xrightarrow[X]{s} f(x)$ (converge simplu pe mulțimea X către $f(x)$).

DEFINIȚIA 5.1.4 (**Convergența uniformă**) Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir de funcții vectoriale de variabilă vectorială. Şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$ converge uniform către funcția $f(x)$ pe mulțimea X dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ şi $x \in X$, $\left\| f_n(x) - f(x) \right\| < \varepsilon$. Se scrie astfel: $f_n(x) \xrightarrow[X]{u} f(x)$ (converge uniform pe mulțimea X către $f(x)$).

OBSERVAȚIA 5.1.3

a) Din Definițiile 5.1.3 şi 5.1.4 se observă că orice şir uniform, convergent este şi un şir simplu convergent, pe când reciproca nu este în general adevărată.

b) O consecință imediată a Definiției 5.1.4 este următoarea:

Fie $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un şir de funcții reale de variabilă reală. Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $f_n\left(x\right) \xrightarrow[X]{u} f\left(x\right)$;

ii) $\sup\limits_{x\in A}\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$;

iii) $\left\|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Exemple.

1. Fie $f_n : \left(0,1\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, un şir de funcții reale de variabilă reală. Să se arate că acest şir converge simplu către $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(0,1\right) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, dar nu converge uniform către această funcție.

Soluție. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in \left(0,1\right) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

rezultă că $f_n\left(x\right) \xrightarrow[(0,1]]{s} f\left(x\right)$.

Dacă se consideră $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, cum $x_n \in \left(0,1\right)$ şi $\left|f_n\left(x_n\right) - 0\right| = \left|\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right| \to \dfrac{1}{e}$ rezultă, conform Definiției 5.1.4 că diferența $\left|f_n\left(x_n\right) - f\left(x\right)\right|$ nu poate fi făcută oricât de mică deoarece pentru $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ diferența se află într-o vecinătate a lui $\dfrac{1}{e}$. Deci, convergența şirului $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$ nu este o convergență uniformă.

Observație. a) Dacă se consideră $f_n : \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n\left(x\right) = x^n$, atunci $\left|f_n\left(x_n\right) - f\left(x\right)\right| = x^n < \dfrac{1}{3^n} < e$, $\forall e > 0$ şi $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$. Deci, $f_n\left(x\right) \xrightarrow[\left[0,\frac{1}{3}\right]]{u} 0$.

b) Dacă se consideră $X = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, atunci pe această mulțime convergența nu este uniformă, deoarece pentru $e = \dfrac{1}{5}$ avem că $\exists\, x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt[n]{5}}, 1\right)$ astfel încât $\left|f_n\left(x_n\right) - f\left(x\right)\right| = x^n > e = \dfrac{1}{5}$.

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2 + x^2}$. Să se arate că acest şir este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către $f(x) = 0$.

Soluţie. Într-adevăr limita acestui şir este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f(x) = 0$, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2} + \frac{1}{(n+1)^2+x^2}\right) = 0.$$

Această convergenţă este uniformă pe $\mathbb{R}$ deoarece:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{n^2+x^2} + \frac{1}{(n+1)^2+x^2} - 0\right| \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \to 0.$$

Înseamnă că $\left|f_n(x) - f(x)\right| < e$, $(\forall) e > 0$ indiferent de valoarea lui $x \in \mathbb{R}$. Deci, acest şir converge uniform pe $\mathbb{R}$ către $f(x) = 0$.

Cu ajutorul Definiţiilor 5.1.3 şi 5.1.4 poate fi studiată convergenţa simplă sau uniformă numai în cazul în care se cunoaşte funcţia limită. Sunt însă şiruri de funcţii pentru care funcţia limită nu poate fi determinată şi convergenţa acestora nu poate fi studiată cu ajutorul Definiţiilor 5.1.3 şi 5.1.4. Ea se va studia cu una din propoziţiile următoare:

PROPOZIŢIA 5.1.1 (**Criteriul de uniform convergenţă al lui Cauchy pentru şiruri de funcţii**) Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir de funcţii vectoriale de variabilă vectorială. Condiţia necesară şi suficientă ca acest şir de funcţii să fie uniform convergent pe mulţimea X este: oricare ar fi $e > 0$, există un rang $n(e)$ astfel încât pentru orice $n > n(e)$, $\left\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right\| < e$, oricare ar fi $p \ge 1$ şi $x \in X$.

Demonstraţie. Se presupune că $\left(f_n(x)\right)_{n\ge0}$ este un şir uniform convergent pe mulţimea X către o anumită funcţie limită $f(x)$. Atunci, conform Definiţiei 5.1.4 au loc relaţiile:

$$(\forall) e > 0,\ (\exists) n_1(e) > 0 \text{ a.î. } (\forall) n > n_1(e) \Rightarrow \left\|f_n(x) - f(x)\right\| < e,$$
$$(\forall) x \in X,$$

şi

$$(\forall) e > 0,\ (\exists) n_2(e) > 0 \text{ a.î. } (\forall) n > n_2(e) \Rightarrow \left\|f_{n+p}(x) - f(x)\right\| < e,$$
$$(\forall) x \in X.$$

Dacă se notează $n(e) = \max\{n_1(e), n_2(e)\}$, atunci are loc relația:

$$\left\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right\| = \left\| f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| f_{n+p}(x) - f(x) \right\| + \left\| f_n(x) - f(x) \right\| < e + e = 2e = e'.$$

Aşadar, $\left\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right\| < e$, pentru orice $e > 0$ şi $p \geq 1$.

Reciproc. Presupunem că relația din Propoziția 5.1.1 este îndeplinită, adică: pentru orice $e > 0$, există $n(e) > 0$ astfel încât pentru orice $n > n(e)$, $\left\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right\| < e$, oricare ar fi $p \geq 1$ şi $x \in X$. Conform definiției unui şir fundamental rezultă că şirul $(f_n(x))_{n\geq 0}$ este un şir fundamental pentru orice $x \in X$.

Cum spațiul vectorial normat $\mathbb{R}^k$ este un spațiu Banach (spațiu metric complet) rezultă că există o funcție $f(x)$ ($f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$) astfel încât: $f_n(x) \to f(x)$, oricare ar fi $x \in X$. Atunci în inegalitatea $\left\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right\| < e$ dacă se trece la limită după $p \to \infty$, se obține că: $(\forall) e > 0$, $(\exists) n(e) > 0$ a.î. $(\forall) n > n(e) \Rightarrow \left\| f_n(x) - f(x) \right\| < e$, $(\forall) x \in X$. De aici rezultă că şirul este uniform convergent conform Definiției 5.1.4.

PROPOZIȚIA 5.1.2 (Criteriul Weierstrass de convergență uniformă) Fie $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir de funcții vectoriale de variabilă vectorială. Dacă există un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive convergent către 0 şi are loc inegalitatea $\left\| f_n(x) - f(x) \right\| \leq a_n$ începând de la un anumit rang $n_0(e)$, oricare ar fi $x \in X$, atunci $f_n(x)$ converge uniform pe mulțimea X către $f(x)$, $\left(f_n(x) \xrightarrow[x]{u} f(x) \right)$.

Demonstrație. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ conform cu definiția convergenței unui şir de numere reale se poate afirma că $(\forall) e > 0$, $(\exists) n(e) > 0$ astfel încât $(\forall) n > n(e)$, $a_n < e$. Ținând cont de această inegalitate şi de inegalitatea din enunțul propoziției rezultă că $\left\| f_n(x) - f(x) \right\| < e$, $(\forall) e > 0$ şi $n > n(e)$. Aceasta arată că $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge uniform pe X către $f(x)$.

Exemple.

1. Se consideră şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$, $f_n(x) = x \cdot arctg\ nx$. Să se arate că şirul este uniform convergent, $(\forall)\, x \in [0, \infty)$.

Soluție. Deoarece funcția limită $f(x)$ nu poate fi determinată, în acest caz nu poate fi folosită definiția convergenței şi atunci se va folosi Propoziția 5.1.1 şi rezultă că:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|x \cdot arctg(n+p) \cdot x - x \cdot arctg\ n \cdot x\right| =$$

$$= x\left|arctg(n+p) \cdot x - arctg\ n \cdot x\right| = x\left|arctg\ \frac{p \cdot x}{1+(n+p) \cdot n \cdot x^2}\right| \leq$$

$$\leq x\frac{p \cdot x}{1+(n+p) \cdot nx^2} < \frac{x \cdot p \cdot x}{(n+p) \cdot n \cdot x^2} = \frac{p}{(n+p) \cdot n} \leq \frac{p}{n \cdot p} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Deoarece $\frac{1}{n} \to 0$ atunci există $n_0(e) \geq 0$ astfel încât pentru orice $e > 0$ şi $n > n_0(e)$ rezultă $\frac{1}{n} < e$ şi $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < e$ în condițiile date. Conform criteriului de uniform convergență al lui Cauchy rezultă că şirul este uniform convergent.

2. Să se arate că şirul $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in X$ este uniform convergent pe mulțimea numerelor reale către $f(x) = 0$.

Soluție. Deoarece Definiția 5.1.4 este greu de aplicat, în acest caz se va folosi Propoziția 5.1.2. Avem:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \to 0.$$

Conform Propoziției 5.1.2 rezultă că $\frac{\sin nx}{n^2} \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$.

Se ştie că noțiunile de limită, continuitate, derivabilitate şi integrabilitate sunt noțiuni de bază pentru funcțiile reale de variabilă reală.
În continuare, se vor da condițiile în care aceste noțiuni se transferă de la termenii unui şir de funcții la funcția limită a şirului.

PROPOZIȚIA 5.1.3 (**Continuitatea**) Fie $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 0}$ un şir de funcții continue, uniform convergente către funcția $f(x)$ pe mulțimea $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Atunci funcția limită $f(x)$ este continuă.

Demonstrație. Ținând cont că $f_n(x) \xrightarrow[X]{u} f(x)$, atunci conform Definiției 5.1.4 se poate scrie că pentru orice $e > 0$, există $n_1(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi $n > n_1(e)$, avem:

$$\left\| f_n(x) - f(x) \right\| < e \,,\ \forall\ x \in X \,. \tag{1}$$

Datorită faptului că funcțiile $f_n(x)$ sunt continue în punctul x_0, conform definiției continuității, se poate scrie că oricare ar fi $e > 0$ există $d(e, x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu $\left\| x - x_0 \right\| < d(e)$, are loc inegalitatea:

$$\left\| f_n(x) - f_n(x_0) \right\| < e \,. \tag{2}$$

Pentru a demonstra că funcția limită $f_n(x)$ este continuă în punctul x_0, trebuie arătat că $\left\| f(x) - f(x_0) \right\|$ poate fi făcută oricât de mică (adică mai mică decât o mărime de tip e).
Avem:

$$\begin{aligned}\left\| f(x) - f(x_0) \right\| &= \left\| \left(f(x) - f_n(x) \right) + \left(f_n(x) - f_n(x_0) \right) + \left(f_n(x_0) - f(x_0) \right) \right\| \le \\ &\le \left\| f_n(x) - f(x) \right\| + \left\| f_n(x) - f_n(x_0) \right\| + \left\| f_n(x_0) - f(x_0) \right\| \le e + e + e = 3e = e'.\end{aligned}$$

S-a ținut cont de inegalitățile (1) și (2) de unde rezultă că funcția $f(x)$ este o funcție continuă în punctul x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar în X, rezultă că $f(x)$ este continuă pe mulțimea X.

PROPOZIȚIA 5.1.4 (**Derivabilitatea**) Fie $\left(f_n(x) \right)_{n \ge 0}$ un șir de funcții derivabile pe mulțimea $X \subseteq$ ¡ care este convergent către funcția $f(x)$. Dacă șirul $\left(f'_n(x) \right)_{n \ge 0}$ este uniform convergent pe mulțimea X către funcția $g(x)$, atunci funcția $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea X și are loc relația $f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in X$.

PROPOZIȚIA 5.1.5 (**Integrabilitatea**) Fie $\left(f_n(x) \right)_{n \ge 0}$ un șir de funcții continue pe intervalul închis $[a, b]$ și uniform convergent pe acest interval către funcția $f(x)$. Atunci funcția $f(x)$ este integrabilă și are loc egalitatea $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

OBSERVAȚIA 5.1.4

a) Dacă X este interval compact de numere reale, atunci în Propoziția 5.1.4 se poate considera că $\left(f_n(x)\right)_{n\ge 0}$ este convergent într-un singur punct $x_0 \in X$.

b) Egalitatea din Propoziția 5.1.5 se poate scrie şi astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt,\ (\forall)[a,x]\subseteq[a,b].$$

c) Propozițiile 5.1.4 şi 5.1.5 au o mare utilitate în practică atunci când şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\ge 0}$ este dificil de studiat, dar şirurile obținute din acestea prin derivare sau integrare sunt şiruri mai simple care pot fi studiate.

Exemple.

1. Să se determine limita următorului şir de funcții cu termenul general:

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1},\quad f_n:[0,1)\to \mathbb{R}.$$

Soluție. Se observă că $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k$ atunci $f_n'(x)=x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}$. Trecând la limită se obține $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\frac{x}{1-x}$ (convergența este uniformă). Deci, fiind îndeplinite condițiile Propoziției 5.1.4, rezultă că funcția $f(x)$, limita şirului $\left(f_n(x)\right)_{n\ge 0}$, este derivabilă şi are loc relația $f'(x)=\frac{x}{1-x}$. Integrând în această egalitate se obține:

$$f(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t}\,dt=\ln|1-x|-x,\ (\forall)[0,x]\subset[0,1).$$

Deci, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\ln|1-x|-x$.

2. Fie şirul de funcții cu termenul general $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k$, $x\in[0,1]$.

Să se determine limita acestui şir.

Soluție. Se integrează de la 0 la x şirul, termen cu termen şi obținem:

$$\int_0^x f_n(x)dx=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\int_0^x x^k dx=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^x=\sum_{k=1}^{n}x^{k+1},\ [0,x]\subseteq[0,1].$$

Rezultă:

$$\int_0^x f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} = x^2\,\frac{1-x^n}{1-x}.$$

Trecând la limită în această egalitate, conform cu Propoziția 5.1.5 se obține:

$$\int_0^x f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} x^2\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}.$$

Deci, $\int_0^x f_n(t)dt = \frac{x^2}{1-x}$. Derivând această egalitate conform cu Propoziția 5.1.5, rezultă $\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{1-x}$ deci $f(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$. Așadar, limita șirului este:

$$f(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Există un rezultat mai puternic decât Propoziția 5.1.4 și anume următorul rezultat.

PROPOZIȚIA 5.1.6 (**Teorema Weierstrass-Stone**) Orice funcție continuă pe un interval compact $I=[a,b]\subset$ ¡ este limita uniformă pe I a unui șir de polinoame.

2. SERII DE FUNCȚII

DEFINIȚIA 5.2.1 Fie $(f_n(x))_{n\geq 0}$ un șir de funcții unde $f_n : X \to Y$, X, Y spații vectoriale normate. Se consideră șirul cu termenul general $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Atunci cupletul $(f_n(x), S_n(x))$ definește o **serie de funcții** care se notează $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ unde:

- $f_n(x)$ - termenul general al seriei de funcții;
- $S_n(x)$ - termenul general al șirului sumelor parțiale.

Problema care se pune în legătură cu o serie de funcții este problema convergenței seriei de funcții și atunci când este posibil, determinarea sumei seriei de funcții, care este o funcție notată cu $S(x)$. Definirea acestei noțiunise face astfel.

Definiția 5.2.2 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, ($f_n : X \to Y$, unde X, Y spații vectoriale normate) o serie de funcții.

a) Seria este convergentă simplu pe mulțimea X către funcția $f(x)$, dacă şirul sumelor parțiale $S_n(x) \xrightarrow[X]{s} S(x)$.

b) Seria de funcții este uniform convergentă pe mulțimea X către funcția $S(x)$, dacă şirul sumelor parțiale $S_n(x) \xrightarrow[X]{u} S(x)$.

c) Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este absolut convergentă, dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n(x) \right|$ este convergentă.

OBSERVAȚIA 5.2.1

a) Se observă că pentru o serie de funcții există trei tipuri de convergență: convergență simplă, uniformă şi absolută, iar problema convergenței unei serii este rezolvată prin convergența şirului de funcții $(S_n(x))_{n\geq 0}$.

b) Deoarece, de cele mai multe ori, studiul convergenței şirului $(S_n(x))_{n\geq 0}$ este dificil, problema convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ nu poate fi în aceste cazuri rezolvată cu ajutorul Definiției 5.2.2. Din acest motiv, se apelează la următoarele propoziții în care se consideră serii de funcții vectoriale de variabilă vectorială $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$.

PROPOZIȚIA 5.2.1 (**Criteriul general de uniform convergență al lui Cauchy pentru serii de funcții**) Condiția necesară şi suficientă ca seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ să fie uniform convergentă pe mulțimea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ este: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $n > n(\varepsilon)$ şi $p \geq 1$, $\left\| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x) \right\| < \varepsilon$, pentru orice $x \in X$.

Demonstrație. Conform Definiției 5.2.2, punctul b), seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe X dacă şirul $(S_n(x))_{n\geq 0}$ este uniform convergent pe mulțimea X. Din criteriul de uniform convergență al lui Cauchy pentru şirul $\left(S_n(x)\right)_{n\geq 0}$ se obţine condiţia necesară şi suficientă de uniform convergenţă a acestui şir pe mulţimea X: pentru orice $e>0$, există $n(e)>0$ astfel încât oricare ar fi $n>n(e)$ şi $p\geq 1$, $\left\|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right\|<e$, pentru orice $x\in X$. Dar,

$$\left\|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right\|=\left\|\sum_{k-0}^{n+p} f_k(x)-\sum_{k-0}^{n} f_k(x)\right\|=\left\|f_{n+1}(x)+...+f_{n+p}(x)\right\|.$$

Astfel, se obţine condiţia din enunţul Propoziţiei 5.2.1.
O consecinţă imediată a Propoziţiei 5.2.1 este următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 5.2.2 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ o serie de funcţii simplu convergentă pe mulţimea $X\subset\mathbb{R}$ către funcţia $f(x)$. Condiţia necesară şi suficientă ca seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ să conveargă uniform pe mulţimea A către funcţia $f(x)$ este ca mulţimea $\left\{N(e,x)\middle| x\in A, e>0\right\}$ să fie mărginită, ($N(e,x)$ este rangul începând de la care $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-f(x)\right|<e$).

PROPOZIŢIA 5.2.3 (**Criteriul lui Weierstrass**) Condiţiile necesare de uniform convergenţă pe mulţimea X a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sunt:

i) $\left\|f_n(x)\right\|\leq a_n$, $n\in\mathbb{N}$;

ii) seria de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Ştiind că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă, conform criteriului general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii numerice, are loc afirmaţia: pentru orice $e>0$, există $n(e)>0$ astfel încât oricare ar fi $n>n(e)$ şi $p\geq 1$, $a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}<e$, pentru orice $x\in X$ şi $p\in\mathbb{N}$.
Din ipoteza i) se obţine următorul şir de inegalităţi:

$$\left\|f_{n+1}(x)\right\|\leq a_{n+1}, \left\|f_{n+2}(x)\right\|\leq a_{n+2}, ..., \left\|f_{n+p}\right\|\leq a_{n+p}.$$

Adunând termen cu termen aceste inegalităţi, rezultă:

$$\left\|f_{n+1}(x)\right\|+\left\|f_{n+2}(x)\right\|+...+\left\|f_{n+p}(x)\right\|\leq a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}<e.$$

Ştiind că norma este mai mică decât suma normelor, rezultă:

$$\left\| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots f_{n+p}(x) \right\| < e \, .$$

Conform cu Propoziția 5.2.1 rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe X.

Ca şi la şirurile de funcții şi pentru seriile de funcții se pune problema transferării proprietăților de continuitate, derivabilitate şi integrabilitate de la termenii seriei la suma seriei de funcții. Această problemă este rezolvată de următoarele propoziții.

PROPOZIȚIA 5.2.4 (**Continuitatea**) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ o serie de funcții, $f_n : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^k$. Dacă $f_n(x)$ sunt funcții continue pe X, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă către funcția $f(x)$ pe mulțimea X, atunci $f(x)$ este continuă pe X.

PROPOZIȚIA 5.2.5 (**Derivabilitatea**)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ o serie de funcții reale de variabilă reală. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este simplu convergentă pe $[a,b]$ către funcția $f(x)$, $f_n(x)$, sunt funcții derivabile pe $[a,b]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ către $g(x)$, atunci $f(x)$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi are loc relația $f'(x) = g(x)$.

PROPOZIȚIA 5.2.6 (**Integrabilitatea**)

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o serie de funcții. Dacă $f_n(x)$ sunt funcții integrabile pe $[a,b]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniform pe intervalul $[a,b]$ către funcția $f(x)$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

OBSERVAȚIA 5.2.2

a) Demonstrația Propozițiilor 5.2.4, 5.2.5 şi 5.2.6 se face aplicând propozițiile similare de la şirurile de funcții, şirului $\left(S_n(x)\right)_{n\geq 0}$.

b) Propozițiile 5.2.4 şi 5.2.5 se folosesc de obicei în calculul sumei anumitor serii atunci când $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ este dificil sau imposibil de calculat.

c) Dacă în Propoziția 5.2.4, X este interval compact de numere reale, atunci proprietatea ca $f_n(x)$ sunt funcții continue pe X, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, poate fi înlocuită cu faptul că seria $\sum f_n(x)$ să fie convergentă într-un punct $x \in X$.

3. SERII DE PUTERI

DEFINIȚIA 5.3.1 O serie de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, unde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ se numeşte **serie de puteri**.

OBSERVAȚIA 5.3.1

a) Se observă că orice serie de puteri este un caz particular de serie de funcții, unde $f_n(x) = a_n x^n$. De aceea teoria de la seriile de funcții se aplică şi seriilor de puteri.

b) Fiind un caz particular de serie de funcții, există şi alte propoziții în plus care se vor trata în cele ce urmează.

c) Suma unei serii de puteri se numeşte **funcție analitică**.

d) Mulțimea de convergență a unei serii de puteri nu este vidă.

Există serii de puteri pentru care $M_C = \{0\}$ şi există serii de puteri pentru care $M_C = \mathbb{R}$ (exemplu: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$).

PROPOZIȚIA 5.3.1 (**Teorema lui Abel**) Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Atunci există $R \geq 0$, astfel încât:

i) seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pentru $x \in (-R, R)$;

ii) seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

Numărul R se numeşte **rază de convergenţă** a seriei de puteri.

Demonstraţie. i) Se observă că pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x = 0$ este punct de convergenţă.

Dacă nu există un alt punct de convergenţă pentru seria de puteri, luând $R = 0$, teorema lui Abel este satisfăcută. Să presupunem că există $x_0 \neq 0$ punct de convergenţă pentru seria de puteri. Conform consecinţei criteriului general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii numerice, rezultă că şirul cu termenul general $f_n(x_0) = a_n x_0^n$ are limita zero. Fiind un şir convergent, el este şi un şir mărginit. Deci, există $M > 0$ astfel încât $\left|a_n \cdot x_0^n\right| \leq M$. Dacă se consideră $|x| < |x_0|$ atunci au loc relaţiile:

$$\left|a_n \cdot x^n\right| = \left|a_n \cdot x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M\left(\frac{x}{x_0}\right)^n, \text{ unde } \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Dar seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $|q| < 1$. Luând $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă. Deci, conform primului criteriu al comparaţiei, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n \cdot x^n\right|$ este convergentă, pentru orice $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Cum x_0 este un punct de convergenţă arbitrar, dacă se notează cu $R = \sup\{x_0\}$ rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n \cdot x^n\right|$ este convergentă, pentru orice $x \in (-R, R)$. Deci, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n \cdot x^n\right|$ este absolut convergentă, oricare ar fi $x \in (-R, R)$.

ii) Dacă x_1 este un punct de divergenţă al seriei de puteri, atunci rezultă că oricare ar fi x cu $|x| > |x_1|$ şi conform criteriului comparaţiei avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă. Continuând raţionamentul ca la punctul i), rezultă că oricare ar fi $x \in \left(-\infty, -|x_1|\right) \cup \left(|x_1|, +\infty\right)$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă. Dar, este evident că şi în acest caz $\sup\{x_1\} = R$. Deci, rezultă că mulțimea de divergență este $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

OBSERVAȚIA 5.3.2

a) Se observă că teorema lui Abel afirmă existența razei de convergență pentru orice serie de puteri, dar nu indică modul de determinare a acesteia.

b) Cu ajutorul razei de convergență a seriei de puteri, teorema lui Abel determină mulțimea de absolut convergență şi divergență a seriei de puteri fără punctele $x = -R$ şi $x = R$.

c) Pentru a stabili natura seriei de puteri în aceste puncte se consideră seriile numerice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \cdot R^n$. În funcție de natura acestor serii este şi natura seriei de puteri în cele două puncte.

d) Dacă M_C este muțimea de convergență a seriei de puteri, atunci $(-R, R) \subseteq M_C \subseteq [-R, R]$.

PROPOZIȚIA 5.3.2 (**Cauchy-Hadamard**) Raza de convergență R pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este dată de relația $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

DEMONSTRAȚIE. Se consideră punctul $x = x_0$ fixat. Atunci seria:

$$|a_0| + |a_1 \cdot x_0| + |a_2 \cdot x_0^2| + \ldots + |a_n \cdot x_0^n| + \ldots$$

poate fi considerată o serie de puteri. Conform cu Propoziția 5.3.1, rezultă că aceasta este convergentă pentru orice:

$$x_0 \in (-R, R). \qquad (1)$$

Dar seria anterioară, concomitent, poate fi considerată şi o serie cu termeni pozitivi şi pentru stabilirea naturii acesteia poate fi aplicat criteriul lui D'Alembert şi, conform formei practice a acestui criteriu, se obține:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x_0^{n+1}}{a_n x_0^n} \right| = |x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Dacă:

$$\begin{cases} |x_0| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \text{ atunci seria este convergentă,} \\ |x_0| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1, \text{ atunci seria este divergentă.} \end{cases}$$

Deci, pentru orice $|x_0| < \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, adică

$$x_0 \in \left(-\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) \tag{2}$$

seria este convergentă.
Comparând (1) cu (2) rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

OBSERVAŢIA 5.3.3

a) Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ se foloseşte o formă echivalentă şi se obţine: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

b) Dacă R este raza de convergență a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci

i) seria derivatelor de ordin n are aceeaşi rază de convergență;

ii) dacă $S(x) = \sum a_n x^n$, $S^{(n)}(x)$ este suma seriei derivatelor de ordin n.

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right) x^n$. Să se determine mulțimea de convergență M_C și mulțimea de divergență M_D.

Soluție. Deoarece seria este o serie de puteri conform teoremei lui Abel, pentru a determina pe M_C și M_D, trebuie determinată raza de convergență R. Conform formulei lui Cauchy-Hadamard rezultă că:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right| = 1.$$

Deci, pentru orice $x \in (-1,1)$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ este convergentă şi oricare ar fi $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ este divergentă.

Se studiază natura acestei serii în punctele $x = 1$ şi $x = -1$.

Pentru aceasta se studiază următoarele serii numerice: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Cum $\frac{n}{n+1} > \frac{1}{n+1}$ şi cum seria armonică este divergentă, conform criteriului comparației rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ este divergentă. Deci, punctul $x = 1$ este punct de divergență pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

Folosim operația cu serii numerice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este serie divergentă şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ este divergentă. Deci, $x = -1$ este punct de divergență pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$. Aşadar, $M_D = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, $M_C = (-1,1)$.

La seriile de funcții, pe lângă convergența simplă, se pune şi problema convergenței uniforme. Seriile de puteri fiind serii particulare de funcții, această problemă a convergenței uniforme se pune şi pentru seriile de puteri.

PROPOZIȚIA 5.3.3 Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Atunci oricare ar fi $x \in [-R+e, R-e]$, unde $e \in (0,R)$, seria este uniform convergentă.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $|x| \le R-e$, rezultă că $|a_n \cdot x^n| \le |a_n (R-e)^n|$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (R-e)^n|$ este convergentă, conform cu criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă.

OBSERVAȚIA 5.3.4
a) Se observă că cel mai mare interval de uniform convergență este $(-R, R)$.
b) Ținând cont de Propoziția 5.3.3, se poate afirma că $(-r, r)$, $r \in (0, R)$ este intervalul de uniform convergență pentru seria de puteri.

4. FORMULA TAYLOR PENTRU POLINOAME ȘI FUNCȚII

PROPOZIȚIA 5.4.1 Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Dacă se consideră $x_0 = a \in \mathbb{R}$, atunci are loc relația:

$$P(x) = P(a) + \frac{x-a}{1!} P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} P''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a) \cdot$$

Demonstrație. Dacă în polinomul $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$, se consideră că $x \to x + h$, obținem: $P(x+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+h)^k$. Dacă se ordonează după puterile lui h, atunci acest polinom are forma:

$$P(x+h) = \sum_{k=0}^{n} A_k h^k , \qquad (1)$$

unde A_k sunt coeficienți care de fapt sunt expresii de x ce urmează a fi determinați.
În relația (1), dacă se face $h = 0$, rezultă $P(x) = A_0$. Se derivează relația (1) și se obține

$$P'(x+h) = A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + ... + nA_n h^{n-1} . \qquad (2)$$

În această relație, dacă se consideră $h = 0$, se obține $P'(x) = A_1$. Dacă se derivează relația (2), obținem:

$$P''(x+h) = 2A_2 + 6A_3 h + ... + n(n-1) A_n h^{n-2} . \qquad (3)$$

În relația (3), dacă se consideră $h = 0$, atunci se obține $P''(x) = 2A_2 = 2!A_2$.
Procedând în mod analog, se obține că $P^{(k)}(x) = k!A_k$, oricare ar fi $k = \overline{0,n}$.
Cu coeficienții A_k astfel determinați, dacă se revine în relația (1), se obține

$$P(x+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}P^{(k)}(x).$$

Dacă se consideră $x=a$ şi $x+h=y$, se obține $h=y-a$. Cu aceste notații egalitatea anterioară devine

$$P(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(y-a)^k}{k!}P^{(k)}(a).$$

Făcând schimbarea $y\to x$, se obține $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^n}{n!}P^{(k)}(a)$ care este tocmai **formula lui Taylor pentru polinoame**.

Observația 5.4.1

a) Formula lui Taylor pentru polinoame are o importanță calculatorie, în sensul că permite dezvoltarea polinomului $P(x)$ după puterile lui $x\pm a$.

b) În formula lui Taylor pentru polinoame, dacă se consideră $a=0$, se obține **formula lui Mac-Laurin**, care are următoarea formă:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}P^{(k)}(0).$$

Exemplu. Folosind formula lui Taylor pentru polinoame să se descompună în fracții simple fracția:

a) $\dfrac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{(x-1)^5}$;

b) $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{(x-x_0)^m}$, $m>n$

Soluție. a) Se consideră polinomul $P(x)=x^4+3x^3+2x^2+x+1$. Se scrie formula lui Taylor pentru acest polinom, pentru punctul $a=1$. Avem:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(x-1)^k}{k!}P^{(k)}(1).$$

Trebuie calculate derivatele până la ordinul patru inclusiv ale polinomului $P(x)$ în punctul $x=1$. Avem:

$P(1)=8$,

$P'(x)=4x^3+9x^2+4x+1$, deci $P'(1)=18$,

$P''(x)=12x^2+18x+4$, deci $P''(1)=34$,

$P'''(x)=24x+18$, deci $P'''(1)=42$,

$P^{(4)}(x)=24$, deci $P^{(4)}(1)=24$.

Aşadar, $P(x)=8+\frac{18}{1!}(x-1)+\frac{34}{2!}(x-1)^2+\frac{42}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4$, adică

$$P(x)=8+18(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^4.$$

Atunci,

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{(x-1)^5}=\frac{8+18(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^4}{(x-1)^5}=$$

$$=\frac{8}{(x-1)^5}+\frac{18}{(x-1)^4}+\frac{17}{(x-1)^3}+\frac{7}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}.$$

b) Fie polinomul $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k}$ pentru care scriem formula lui Taylor pentru punctul $a=x_0$:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}P^{(k)}(x_0).$$

Deci,

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^m}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-x_0)^{m-k}}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

PROPOZIȚIA 5.4.2 (Formula lui Taylor pentru funcții care nu sunt polinoame) Fie $f:I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori în punctul $x_0\in I$ şi $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)$ polinomul lui Taylor ataşat funcției $f(x)$ pe intervalul $I=[a,b]$. Atunci $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ (**formula lui Taylor**), unde: $R_n(x)=\frac{(b-x)^{n+1-p}(x-a)^p}{n!\cdot p}\cdot f^{(n+1)}(x)$, $x\in(a,b)$. $R_n(x)$ se numeşte **restul de ordinul** n din formula lui Taylor.

Demonstrație. Pentru a determina restul $R_n(x)$ este evident că el trebuie luat sub forma:

$$R_n(x)=(x-a)^p A, \tag{1}$$

unde A este un număr real care se determină. Evidența constă în faptul că trebuie continuat $P_n(x)$. Pentru determinarea lui A se consideră funcția:

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}\cdot f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f''(x)+\ldots+\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x)+(b-x)^p\cdot A\cdot$$

Se observă că funcția $F(x)$ este o funcție Rolle raportată la intervalul $[a,b]$, adică ea are proprietățile:

i) $F(x)$ continuă pe $[a,b]$,

ii) $F(x)$ derivabilă pe $[a,b]$,

iii) $F(a)=F(b)$.

Deci, conform teoremei lui Rolle, există $x\in(a,b)$ astfel încât $F'(x)=0$. Dar:

$$F'(x)=f'(x)-f'(x)+\frac{b-x}{1!}\cdot f''(x)-\frac{b-x}{1!}\cdot f''(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f'''(x)-\ldots-$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x)+\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)-p(b-x)^{p-1}\cdot A.$$

Așadar:

$$F'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)-p(b-x)^{p-1}\cdot A.$$

Ținând cont de aceasta, se obține:

$$\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)-p(b-x)^{p-1}\cdot A=0.$$

Deci, $A=\frac{(b-x)^{n+1-p}}{n!\cdot p}\cdot f^{(n+1)}(x)$. Cu A astfel determinat, conform (1) rezultă că:

$$R_n(x)=\frac{(b-x)^{n+1-p}(x-a)^p}{n!\cdot p}\cdot f^{(n+1)}(x).$$

Dacă $x\in(a,x)\subset[a,b]$, atunci $R_n(x)=\frac{(x-x)^{n+1-p}(x-a)^p}{n!\cdot p}\cdot f^{(n+1)}(x)$.

Deoarece $x\in(a,x)$, rezultă că $x=a+(x-a)q$, $q\in(0,1)$.

OBSERVAȚIA 5.4.2

a) Restul $R_n(x)$ din Propoziția 5.4.2 se numeşte **restul lui Taylor sub forma generală** sau **restul Schlömlich-Roche**.

• Dacă în restul sub formă generală se consideră $p=n+1$, se obține **restul sub forma Lagrange** care are evident forma:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(x),\ x=a+(x-a)q\ ,\ q\in(0,1).$$

• Dacă se consideră $p=1$ în forma generală a restului, se obține **restul sub forma lui Cauchy**:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)(x-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)$$

sau:

$$R_n(x)=\frac{(1-q)^n}{n!}\cdot x^{n+1}f^{(n+1)}(q\cdot x),\ q\in(0,1),\text{ numai dacă } x\in(0,x)\subset[a,b].$$

• **Restul sub forma integrală** este:

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\ f^{(n+1)}(t)\,dt,\ [x_0,x]\subset[a,b].$$

b) Resturile din formula lui Taylor au o importanță deosebită în stabilirea erorii prin care formula lui Taylor aproximează funcția $f(x)$ prin polinomul lui Taylor $P_n(x)$. Dacă se consideră restul sub forma lui Lagrange şi se notează $x-a=h$ şi $M_n=\sup\left\{\left|f^{(n)}(x)\right|\,\middle|\,a\le x\le a+h\right\}$, atunci eroarea absolută de aproximare a funcției $f(x)$ cu polinomul Taylor $P_n(x)$ este $O\left(h^{n+1}\right)=\dfrac{h^{n+1}}{(p+1)!}M_{n+1}$ şi este evident că $R_n(x)\le O\left(h^{n+1}\right)$. Se pot rezolva probleme de utilitate practică, şi anume:

i) dându-se n şi h, se determină $O\left(h^{n+1}\right)$;

ii) dându-se n şi $O\left(h^{n+1}\right)$, se determină h;

iii) dându-se h şi $O\left(h^{n+1}\right)$, se determină n.

c) Formula lui Taylor pentru funcții are o importanță practică deosebită, deoarece permite tabelarea funcțiilor derivabile de $n+1$ ori.

d) Dacă se consideră $x_0=0$, formula lui Taylor pentru funcții capătă forma:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+R_n(x)$$
numită **formula lui Mac-Laurin pentru funcții**.

PROPOZIȚIA 5.4.3 Dacă $R_n(x)$ este restul din formula lui Taylor pentru funcția $f(x)$ dezvoltată în jurul punctului $x=a$, are loc relația:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

Exemplu. Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$.

Soluție. Deoarece $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+R_3(x)$, atunci:

$$\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{\frac{x^3}{3!}+R_3(x)}{x^3}=\frac{1}{6}+\frac{R_3(x)}{x^3}.$$

Rezultă că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

OBSERVAȚIA 5.4.3 Relația din propoziția anterioară prezintă o importanță deosebită în calculul limitelor diverselor funcții, folosind dezvoltarea lor din formula lui Taylor.

Exemplu. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde

a) $f(x)=\sin x$,

b) $f(x)=\cos x$,

c) $f(x)=e^x$.

Să se dezvolte funcțiile folosind formula Mac-Laurin cu restul lui Lagrange.
Soluție. Este evident că formula Mac-Laurin cu restul lui Lagrange are forma:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(q\cdot x),\ q\in(0,1).$$

Pentru a găsi această dezvoltare este suficient să se găsească $f^{(k)}(0)$.

a) Dar, se ştie că $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. Atunci $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2}$. Rezultă

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Deci aceasta este egalitatea cu ajutorul căreia se tabelează funcția $\sin x$.

b) În mod analog se găseşte că:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

şi

c) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

1. **Formula Leibniz:**
$(f \cdot g)^n(x) = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)g'(x) + \ldots + C_n^{n-1} f(x)g^{(n-1)}(x) + C_n^n f(x)g^{(n)}(x)$,
$(\forall)\, x \in I$;

2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

3. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

4. $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$;

5. $(a \cdot e^x)^{(n)} = a \cdot e^x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

6. $(x^m)^{(n)} = A_m^n x^{m-n}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $1 \le n \le m$;

7. $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, $a > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

8. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

9. $(\mathrm{sh}x)^{(2n)} = \mathrm{sh}x$, $(\mathrm{sh}x)^{(2n-1)} = \mathrm{ch}x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$;

10. $(\mathrm{ch}x)^{(2n)} = \mathrm{ch}x$, $(\mathrm{ch}x)^{(2n-1)} = \mathrm{sh}x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$;

11. $y = \mathrm{arctg}x$,

$$y^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin\left(y + n\frac{\pi}{2}\right),\ (\forall)\, x \in \mathbb{R},\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ n \geq 1;$$

12. $\left(\dfrac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x \pm a)^{n+1}}$.

5. SERIA TAYLOR

DEFINIȚIA 5.5.1 Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x = a \subset I$. Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$ se numeşte **seria Taylor ataşată funcției** $f(x)$ pentru $x = a$.

Dacă seria Taylor ataşată funcției $f(x)$ este convergentă şi are ca sumă funcția $f(x)$, atunci ea se numeşte **serie Taylor a funcției** $f(x)$.

PROPOZIȚIA 5.5.1 (**Seria Taylor pentru funcția** $y = f(x)$) Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x = a$ şi $R_n(x)$ restul din formula Taylor pentru funcția $f(x)$. Condiția necesară şi suficientă ca funcția $f(x)$ să fie dezvoltabilă în serie Taylor în punctul $x = a$ este ca:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Demonstrație. Trebuie arătat că în condițiile Propoziției 5.5.1, seria Taylor ataşată funcției $f(x)$ devine seria Taylor a funcției $f(x)$, adică are loc egalitatea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a).$$

Se consideră formula Taylor pentru funcția $f(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

unde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)$ este polinomul Taylor al funcției.

Dacă se consideră $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, atunci se obține:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

Deci, $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. Dar, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)$ este de fapt termenul general al şirului sumelor parțiale pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$. Cum acest termen general are o limită finită $f(x)$, rezultă că seria este convergentă pe o vecinătate a punctului $x = a$ către $f(x)$ şi are loc egalitatea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a).$$

OBSERVAȚIA 5.5.1

a) Clasa funcțiilor dezvoltabile în serie Taylor conform Propoziției 5.5.1 este inclusă în clasa funcțiilor ce admit dezvoltarea după formula lui Taylor.

b) Dacă în seria Taylor a funcției $f(x)$ se consideră $x = a$, atunci se obține

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0)$$

care se numeşte **seria lui Mac-Laurin ataşată funcției** $f(x)$.

PROPOZIȚIA 5.5.2 Funcția $f(x)$ este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin (serie de puteri) pe $(-e,e)$, dacă există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, oricare ar fi $x \in (-e,e)$.

Demonstrație. Se ştie că restul $R_n(x)$ sub forma lui Lagrange pentru funcția $f(x)$ este:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(qx).$$

Pentru demonstrație se consideră $q \in (0,1)$. Din această formă rezultă:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \left|f^{(n+1)}(qx)\right| < M \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Se notează: $u_n = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$. Atunci, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{x}{n+2}\right|$. Deci, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$.

Deci, conform criteriului lui D'Alembert (al raportului), rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă. Dar, conform consecinței criteriului general de convergență al lui Cauchy pentru serii numerice rezultă $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Conform criteriului majorării, rezultă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Conform Propoziției 5.5.1 rezultă că funcția $f(x)$ este dezvoltabilă în serie Taylor.

Exemple.

1. Să se cerceteze dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, este dezvoltabilă în serie de puteri şi în caz afirmativ să se determine această dezvoltare.

Soluție. Pentru a cerceta dacă funcția $f(x)=e^x$ este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin (Taylor), conform Propoziției 5.5.2 trebuie arătat că există V_0 astfel încât oricare ar fi $x\in V_0$, să avem $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Într-adevăr, $f^{(n)}(x)=e^x$. Se ştie că pentru orice $x\in(-a,a)$, are loc relația $e^{-a}<e^x<e^a$ datorită monotoniei funcției $f(x)=e^x$. Deci, rezultă că pentru orice $x\in(-a,a)$, $\left|f^{(n)}(x)\right|<e^a=M$. Deoarece intervalul $(-a,a)$ este o vecinătate oarecare a lui 0, rezultă că funcția $f(x)=e^x$ este dezvoltabilă în serie Mac-Laurin şi avem: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot f^{(n)}(0)$. Cum $f^{(n)}(0)=1$, atunci $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

Afirmațiile anterioare rămân valabile şi pentru $a\to\infty$. Deci, $f(x)=e^x$ este dezvoltabilă în serie de puteri $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

2. Să se cerceteze dacă funcția $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie de puteri şi în caz afirmativ să se determine această dezvoltare.

Soluție. Se ştie că:

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Cum $\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\le 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ rezultă că $\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1=M$, pentru orice $x\in(-\infty,\infty)$ care poate fi considerată cea mai mare vecinătate a lui 0. Conform Propoziției 5.5.2 rezultă că $f(x)=\sin x$ este dezvoltabilă în serie de puteri sau serie Mac-Laurin. Avem:

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{np}{2}=\begin{cases}0, & n=4p\\ 1, & n=4p+1\\ 0, & n=4p+2\\ -1, & n=4p+3.\end{cases}$$

Deci, seria de puteri este:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin\frac{np}{2}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Să se cerceteze dacă funcția $f(x)=\cos x$, $x\in$ ¡ este dezvoltabilă în serie de puteri şi în caz afirmativ să se determine această dezvoltare.
Soluție. Se ştie că:

$$f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{np}{2}\right).$$

Rezultă că $\left|\cos\left(x+\frac{np}{2}\right)\right|\le 1$. Deci, $f^{(n)}(x)\le 1=M$, pentru orice $x\in(-\infty,\infty)$ care poate fi considerată cea mai mare vecinătate a punctului 0. Conform Propoziției 5.5.2 rezultă $f(x)=\cos x$ este dezvoltabilă în serie de puteri şi aceasta este:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos\frac{np}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Exerciții. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcțiile:
1) $f(x)=\ln(1+x)$;
2) $f(x)=\ln(1-x)$;
3) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}$, $n=1,2,3$;
4) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^n}$, $n=1,2,3$;
5) $f(x)=arctgx$.

PROPOZIȚIA 5.5.3 (**Formulele lui Euler**) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \ i = \sqrt{-1},$$

numite **formulele lui Euler**.

Demonstrație. Se ştie că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \dots \tag{1}$$

şi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots . \tag{2}$$

Se consideră funcția $f(x) = e^{ax}$. Deoarece $f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax}$, rezultă că $f^{(n)}(0) = a^n$.

Deci, seria Mac-Laurin pentru funcția $f(x) = e^{ax}$ este:

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + a\frac{x}{1!} + a^2\frac{x^2}{2!} + a^3\frac{x^3}{3!} + a^4\frac{x^4}{4!} + a^5\frac{x^5}{5!} + a^6\frac{x^6}{6!} + a^7\frac{x^7}{7!} + \dots$$

În această egalitate dacă se consideră $a = i$ şi $a = -i$ se obțin următoarele relații:

Se ştie că:

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \tag{3}$$

şi

$$e^{-ix} = 1 - i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + i\frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{4}$$

Conform relațiilor (1) şi (2), relațiile (3) şi (4) devin:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \ e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Dacă se adună cele două relații se obține:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

iar dacă se scad, se obține:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Astfel s-au obținut formulele lui Euler.

PROPOZIȚIA 5.5.4 (**Seria binomială**) Dacă $|x|<1$, atunci seria binomială $1+\frac{l}{1!}x+\frac{l(l-1)}{2!}x^2+...+\frac{l(l-1)...(l-n+1)}{n!}x^n+...$ este convergentă către $f(x)=(1+x)^l$, oricare ar fi $l\in\mathbb{R}$.

Demonstrație. Se scrie formula lui Mac-Laurin cu restul sub forma lui Cauchy pentru funcția $f(x)=(1+x)^l$. Într-adevăr, pentru a putea scrie această formulă, se ştie că:

$$R_n(x)=\frac{(1-q)^n}{n!}\cdot x^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(q\cdot x),\ q\in(0,1)$$

este restul sub forma lui Cauchy pentru funcția $y=f(x)$. Deoarece în cazul de față

$$f^{(n)}(x)=l(l-1)(l-2)...(l-n+1)(1+x)^{l-n},$$

rezultă:

$$f^{(n+1)}(q\cdot x)=l(l-1)(l-2)...(l-n)(1+qx)^{l-n-1},$$

iar restul sub forma lui Cauchy este:

$$R_n(x)=\frac{(1-q)^n}{n!}\cdot x^{n+1}\cdot l(l-1)(l-2)...(l-n)\cdot(1+qx)^{l-n-1}.$$

Conform Propoziției 5.5.1, ca această funcție să fie dezvoltabilă în serie de puteri (Mac-Laurin), trebuie ca $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Pentru a arăta această egalitate se fac următoarele notații:

$$u_n=\frac{l(l-1)(l-2)...(l-n)}{n!}\ \text{şi}\ v_n=\left(\frac{1-q}{1+qx}\right)^n\cdot(1+qx)^{l-1}.$$

Cu aceste notații rezultă că:

$$R_n(x)=v_n\cdot u_n. \qquad (1)$$

Dacă se aplică criteriul raportului seriei $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, rezultă:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{l(l-1)(l-2)...(l-n-1)\cdot x^{n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{l(l-1)...(l-n)}\cdot x^{-n-1}\right|=\left|\frac{l-n-1}{n+1}x\right|.$$

Deci, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|<1$, oricare ar fi $x\in(-1,1)$. Aşadar, seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este convergentă pentru $x\in(-1,1)$. Atunci,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0. \qquad (2)$$

Cum:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-q}{1+q\,x}\right)^n (1+q\,x)^{l-1} = 0\,, \qquad (3)$$

din (1), (2) şi (3) se obține:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot v_n = 0\,,\ (\forall)\, x\in(-1,1)\,.$$

Din Propoziția 5.5.1 rezultă că funcția $f(x) = (1+x)^l$ este dezvoltabilă în serie de puteri pe intervalul $(-1,1)$.

Ținând cont de faptul că $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot f^{(n)}(0)$, avem că:

$$f^{(n)}(x) = l\,(l-1)(l-2)\ldots(l-n+1)(1+x)^{l-n}\,.$$

Deci,

$$f^{(n)}(0) = l\,(l-1)(l-2)\ldots(l-n+1)\,.$$

Aşadar,

$$(1+x)^l = 1 + \frac{l}{1!}x + \frac{l\,(l-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{l\,(l-1)(l-2)\ldots(l-n-1)}{2!}x^n + \ldots\,.$$

Exemplu. Să se dezvolte în serie de puteri funcția $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x\in(-1,1)$.

Rezolvare. Evident $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Deci, pentru a obține dezvoltarea în serie a acestei funcții se înlocuieşte în seria binomială $l = \dfrac{1}{2}$ şi se obține:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots\,.$$

6. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 5.6.1 Să se studieze convergența (simplă şi uniformă) pentru următoarele şiruri de funcții cu termenul general:

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$;

b) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n\cdot x}{1+nx}$;

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$;

d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2}\sin x$;

e) $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

Soluție. După cum se știe, sunt adevărate următoarele afirmații:

1° Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ atunci $f_n(x) \underset{A}{\overset{S}{\to}} f(x)$

2° $f_n \underset{A}{\overset{u}{\to}} f(x)$ dacă şi numai dacă

i) $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

sau

ii) există un şir de numere pozitive $a_n \to 0$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ $(\forall) x \in A$

sau

iii) există şirul de funcții $q_n(x) \underset{A}{\overset{u}{\to}} 0$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| \le q_n(x)$ $(\forall) x \in A$

sau

iv) $\| f_n(x) - f(x) \|_\infty \to 0$.

a) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

Deci, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ este funcția spre care şirul de funcții converge simplu. Avem:

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Deci, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$, $(\forall) n \ge 1$. Deoarece este evident că nu este satisfăcut 2° i), atunci şirul nu este uniform convergent.

Observație. Dacă $a \in (0,1)$, atunci $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Aşadar, $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ şi, conform cu 2° i), şirul converge uniform la $f(x)$ pe $[0,a]$.

b) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$. Deci, funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ este funcția spre care şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\ge1}$ converge simplu. Deci,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} \Rightarrow \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-f(x)|=1$ şi, conform cu 2° i), şirul $f_n(x)$ nu converge uniform la $f(x)$.

Observație. Fie $a>0$, atunci $\sup\limits_{x\in[a,\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{1}{1+na}$. Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,\infty)}|f_n(x)-f(x)|=0$ şi, conform cu 2° i), $f_n(x)\underset{[a,\infty)}{\overset{u}{\to}} f(x),\ \ a>0.$

c) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Deci, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$ este funcția spre care şirul converge simplu. Deci,

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x}{1+nx^2}.$$

Se calculează $\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=\|f_n(x)\|_\infty$. Pentru aceasta se foloseşte relația:

$$\|f\|_\infty=\max_{x\in\mathbb{R}}\left\{|f(-\infty)|,\ |f(x_1)|,\ ...,\ |f(x_p)|, f(+\infty)\right\},$$

unde $x_1,x_2,...,x_p$ sunt rădăcinile ecuației $f'(x)=0$. În acest caz, $f'(x)=0\Rightarrow 1-nx^2=0\Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n_2=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Deci, $\left|f_n\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Atunci, $\|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\to 0$. Deci, conform cu 2° iv), $f_n(x)\underset{\mathbb{R}}{\overset{u}{\to}}0$.

d) Avem: $|f_n(x)|=|e^{-nx^2}\cdot\sin nx|\le e^{-nx^2}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}^*$. Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

Cum, $f_n(0)=0$, rezultă că $f_n(x)\underset{\mathbb{R}}{\overset{s}{\to}}0.$

Deci, $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|>e^{-\frac{1}{n}}\cdot\sin 1>e^{1}\cdot\sin 1>0$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\right)\neq 0$.

Deci, $\left(f_n(x)\right)_n$ nu converge uniform pe $[0,1]$.

Fie $a>0$. Atunci, $\sup\limits_{|x|\ge a}|f_n(x)|<e^{-na^2}\to 0$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{|x|\ge a}|f_n(x)|=0$.

Conform cu 2° iv), $f_n(x)\underset{A}{\overset{u}{\to}}0$, unde $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus x\ge a\}$.

EXERCIȚIUL 5.6.2 Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un şir de funcții definit astfel: $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ şi $f_n(x)=\left(f_1\circ f_{n-1}\right)(x)$, $(\forall)\ n\ge 2$. Să se arate că $f_n\underset{\mathbb{R}}{\overset{u}{\to}}0$.

Soluție. Din relația de recurență $f_n(x)=\dfrac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}^2(x)}}$, se obține $f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $f_3(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$, ... Se presupune adevărat că $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ și se demonstrează că $f_{n+1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

Într-adevăr,

$$f_{n+1}(x)=\frac{f_n(x)}{\sqrt{1+f_n^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+nx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+nx^2}}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

Aşadar, $f_{n+1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+\left(n+1\right)x^2}}$ ceea ce trebuia demonstrat. Atunci, conform inducției, rezultă că $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $(\forall)\ n\geq 1$.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Așadar $f_n(x)\xrightarrow[\mathbb{R}]{s}0$. Se cercetează dacă convergența este şi uniformă. Avem:

$$f_n'(x)=\left(\sqrt{1+nx^2}-\frac{x\cdot nx}{\sqrt{1+nx^2}}\right)\cdot\frac{1}{1+nx^2}=\frac{1+nx^2-nx^2}{(1+nx^2)\sqrt{1+nx^2}}=$$
$$\frac{1}{(1+nx^2)\sqrt{1+nx^2}}.$$

Deoarece

$f_n'(x)=0$ nu are rădăcini, atunci $\| f_n\|_\infty=\max\{f_n(+\infty), f_n(+\infty)\}=0$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\| f_n\|_\infty=0$ şi atunci, conform cu 2° iv), $f_n(x)\xrightarrow[\mathbb{R}]{u}0$.

Observație. Faptul că şirul $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$ la 0 se poate arăta folosind Propoziția 5.1.2. Într-adevăr,

$$|f_n(x)|=\frac{|x|}{\sqrt{1+nx^2}}\leq\frac{|x|}{|x|\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0,\quad (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

EXERCIȚIUL 5.6.3 Să se arate că şirul de funcții $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x}{k(k+1)}$ este uniform convergent pe $\left[a,b\right]$ şi funcția limită $f\left(x\right)$ este o funcție uniform continuă.

Rezolvare. Deoarece nu se poate determina funcția limită $f\left(x\right)$ pentru a studia uniform convergența, se utilizează Propoziția 5.1.1. Avem:

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}=$$

$$=\frac{n+p-1}{(n+1)(n+p)}<\frac{n+p}{(n+1)(n+p)}=\frac{1}{n+1}<e,$$

$(\forall)\ n>[N(e)]=\left[\frac{1-e}{e}\right]$ care este finit $(\forall)\ e>0$. Cum, $(\forall)\ e>0$ şi $(\forall)\ n>\left[\frac{1-e}{e}\right]$, $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<e$, $(\forall)\ p\in\mathbb{N}$, conform cu Propoziția 5.1.1 şirul $\left(f_n(x)\right)_n$ este uniform convergent pe $[a,b]$ către funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Cum funcțiile $f_n(x)=\frac{\sin x}{n(n+1)}$ sunt continue pe $[a,b]$, atunci conform cu Propoziția 5.1.3, funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă. Domeniul de definiție fiind compactul $[a,b]$ ea este uniform continuă.

EXERCIȚIUL 5.6.4 Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k^2x}{k^4}$. Să se arate că şirul de funcții este uniform convergent către o funcție derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Soluție. Avem:

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k^2x}{k^4}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\cos k^2x|}{k^4}\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^4}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\le$$

$$\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

Dar, $\frac{1}{n}<e$, $(\forall)\ e>0$. Deci, $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<e$, $(\forall)\ e>\ 0$

şi $(\forall)\ n > \left[\frac{1}{e}\right]$.

Aşadar, conform cu Propoziția 5.1.3 există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f_n(x)\xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f(x)$. Funcțiile $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k^2x}{k^4}$ sunt derivabile şi $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k^2x}{k^2}$.

În mod analog se arată că acest şir al derivatelor este, de asemenea, uniform convergent către o funcție $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Conform cu Propoziția 5.1.4 funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi $f'(x)=q(x)$.

EXERCIȚIUL 5.6.5 Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-\sqrt{x})...(2-\sqrt[n]{x}),\ x>0$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^x},\ a>0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$.

Rezolvare. a) Pentru $x=2$ seria este evident convergentă. Fie $x>0$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$. Deci, există un rang N_0 astfel încât $(\forall)\ n>N_0$ termenii seriei vor fi pozitivi. Deci, seria poate fi considerată ca serie cu termeni pozitivi. I se aplică acestei serii criteriul Raabe-Duhamel şi se obține:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\ln x.$$

Deci pentru $\ln x>1\Leftrightarrow x\in(e,\infty)$, seria este convergentă. Pentru $x=e$ seria este divergentă. Deci, mulțimea de convergență a seriei este (e,∞).

b) Seria este evident o serie cu termeni pozitivi $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ şi $a>0$. Folosind criteriul raportului se obține:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^x\cdot\frac{\ln(1+a^{n+1})}{\ln(1+a^n)}=a\,.$$

Dacă $a<1$, adică pentru $a\in(0,1)$, seria este convergentă $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Pentru $a=1$, seria este $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^x}$ care este convergentă oricare ar fi $n>1$.

Pentru $a>1$ are loc egalitatea:

$$\frac{\ln(1+a^n)}{n^x}=\frac{\ln a^n\left(1+\frac{1}{a^n}\right)}{n^x}=\frac{\ln a}{n^{x-1}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)}{n^x}.$$

Deci, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a}{n^{x-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)}{n^x}$. Ținând cont de seria lui Reimann, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a}{n^{x-1}}$ este convergentă $(\forall)\ x>2$.

Deoarece $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)}{n^x}<\frac{\ln 2}{n^x}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)}{n^x}$ este convergentă pentru $x>1$. Deci, pentru $x>2$, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^x}$ este convergentă pentru $(\forall)\ a>1$.

c) Se observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$ este o serie cu termeni pozitivi $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Folosind al treilea criteriu al comparației se obține: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{(x^2+n)^a}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+x^2}\right)^a=1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Deci, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ și $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$ au aceeași natură $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Așadar, pentru $a>1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$ este convergentă $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, iar pentru $a\le 1$ seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$ are mulțimea de convergență vidă.

EXERCIȚIUL 5.6.6 Se consideră seria de funcții $1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$. Să se determine mulțimea de convergență a seriei şi să se arate că mulțimea $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ este o mulțime de uniform convergență.

Rezolvare. Termenul general al şirului sumelor parțiale al seriei $1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ este $S_n = 1+\sum_{k=1}^{n}(x^k - x^{k-1}) = x^n$.

Cum $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} 0, & x\in(-1,1) \\ 1, & \mathrm{x}=1 \\ \infty, & x>1 \\ \text{nu există pentru } x\le -1. \end{cases}$

Deci, mulțimea de convergență a seriei este $(0,1]$. Din cele arătate anterior, rezultă că $1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n + x^{n-1}) \xrightarrow[{\left[0,\frac{1}{2}\right]}]{s} 0$. Deci, $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to ¡$, $f(x)=0$ este suma seriei.

Din $|S_n - 0| < e \Leftrightarrow x^n < e$, $(\forall)\ e>0$, se obține $N(e,x)=\left[\frac{\ln e}{\ln x}\right]$.

Se observă că mulțimea $\left\{N(e,x) \middle| x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], e>0\right\}$ este mărginită de 0 şi $\left[\frac{\ln e}{\ln 0,5}\right]$. Deci, conform Propoziției 5.2.2 rezultă că $1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n + x^{n-1}) \xrightarrow[{\left[0,\frac{1}{2}\right]}]{u} 0$.

EXERCIȚIUL 5.6.7 Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot x^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n^2+1)^n}\cdot \cos^n \frac{2np}{3}\cdot x^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n$.

Rezolvare.

a) Avem: $\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\sup\sqrt[n]{\dfrac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}}=\sup\dfrac{n\cdot\sqrt[n^2]{n}}{n+\dfrac{1}{n}}=\sup\dfrac{\sqrt[n^2]{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{\sqrt[n]{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$.

Deci, $w=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$. Deoarece conform cu Observația 5.3.3,

$R=\dfrac{1}{w}$. Din seria dată, pentru $x=1$ şi $x=-1$, se obțin seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$. Datorită faptului că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{n}{n+\dfrac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}=1\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^0=1,$$

rezultă că seriile nu sunt convergente. Deci, mulțimea de convergență a seriei este $(-1,1)$.

b) Avem: $\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{n^{2n}}{n^2+1}\cdot\left|\cos\dfrac{2np}{3}\right|$. Cum $\left|\cos\dfrac{6np}{3}\right|=1$

şi $\left|\cos\dfrac{2(3n+1)p}{3}\right|=\left|\cos\dfrac{2(3n+2)p}{3}\right|=\dfrac{1}{2}$ (s-au folosit schimbările de funcție

$n\to 3n,\ n\to 3n+1,\ n\to 3n+2$), se obține $\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{n^{2n}}{n^2+1}$. Deci,

$w=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}==\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}=1$. Atunci $R=\dfrac{1}{w}=1$.

Pentru $x=1$ şi $x=-1$, se obțin seriile numerice $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(n^2+1)^n}\cdot\cos^n\dfrac{2np}{3}$ şi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n^{2n}}{(n^2+1)^n}\cdot\cos^n\dfrac{2np}{3}$. Se observă că şirul $a_n=\dfrac{n^{2n}}{(n^2+1)^n}\cdot\cos^n\dfrac{2np}{3}$

nu este convergent deoarece $a_{3n}\to 1$ şi $a_{3n+1}\to 0$. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} a_{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^{6n}}{[(3n)^2+1]^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{m^{2m}}{(m^2+1)^m} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^m}\right]^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$$

$$(m=3n),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^{2(3n+1)}}{[(3n+1)^2+1]^{3n+1}}\cdot\frac{1}{2^{3n+1}} = \lim_{p\to\infty}\frac{p^{2p}}{(p^2+1)^{p2}}\cdot\frac{1}{2^p} = 1\cdot 0 = 0,$$

$$(p=3n+1).$$

Cum termenul general al celor două serii nu are limită, rezultă că seriile sunt divergente. Deci, mulțimea de convergență a seriei de puteri este $(-1,1)$.

c) Avem: $w = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$. Deci, $R = \frac{1}{w} = e$.

Pentru $x=-e$ şi $x=e$ se obțin seriile $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}.$$

Se consideră funcția $f(x) = \left(\frac{e^x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Se calculează:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{e^x-x-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{e^x-x-1}}\right]^{\frac{e^x-x-1}{(1+x)x^2}}, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x+3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2+6x} = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) avem că $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{e}$. Deci,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{e}\ .$$

Aşadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ este divergentă.

Dacă se consideră $x_n=\frac{(-1)^n\cdot e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ $\Rightarrow x_{2n}\to\sqrt{e}$ şi $x_{2n+1}\to-\sqrt{e}$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ nu este convergentă. Deci, seria de puteri are mulțimea de convergență $(-e,e)$.

EXERCIȚIUL 5.6.8 Să se determine raza de convergență şi suma seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|<1$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, $|x|<1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, $|x|<1$.

Rezolvare. a) Avem: $a_n=\frac{1}{2n-1}$, $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1$. Seria este uniform convergentă pe intervalul $[0,x]\subset(-1,1)$. Se consideră seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-2}$, $t\in[0,x]$ care, de asemenea, este uniform convergentă şi se poate integra termen cu termen. Deci,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

b) Avem: $a_n=\frac{1}{4n-1}$, $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{4n-1}=1$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n-2}$ este uniform convergentă pe intervalul $[0,x]\subset(-1,1)$ şi se poate integra termen cu termen şi astfel se obține:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n-2}dt=\int_0^x\frac{t^2dt}{1-t^4}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{2}arctgx.$$

c) Avem: $a_n=\dfrac{1}{4n-3}$, $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{4n-3}=1$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{4n-4}$ este uniform convergentă pe intervalul $[0,x]\subset(-1,1)$ şi se integrează termen cu termen. Deci,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n-4}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1-t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{2}arctgx.$$

EXERCIȚIUL 5.6.9 Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^n$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+1)\cdot x^n$.

Rezolvare. a) Se observă că $M_C=(-1,1)$. Se consideră seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ care este uniform convergentă pe $(-1,1)$ şi se poate deriva termen cu termen. Deci, dacă se derivează egalitatea $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$, se obține $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Se înmulțeşte această egalitate cu x şi se obține: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Se derivează termen cu termen şi se obține: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$. Se înmulțeşte această egalitate cu x şi se rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

b) Se obține uşor că $M_C=$ ¡ . Acum, se ştie că:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots.$$

Se observă că: $\frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2\cos x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

c) Evident $M_C = (-1,1)$. Se ştie că seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}$ este uniform convergentă pe $(-1,1)$. Dacă se derivează termen cu termen egalitatea $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x}$, se obține:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{-2x^3 + 3x^2}{(1-x)^2}.$$

Se derivează această egalitate termen cu termen şi se obține:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) \cdot x^{n+1} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3}.$$

În fine, dacă se derivează termen cu termen, obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) \cdot x^n = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

EXERCIȚIUL 5.6.10 Să se descompună în funcții simple funcția $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{(x-1)^6}$.

Rezolvare. Fie $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$. Folosind formula lui Taylor pentru polinoame, se obține:

$$P(x) = P(1) + \frac{x-1}{1!} \cdot P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot P''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot P'''(1) + \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot P^{(4)}(1),$$

$P(1) = 15$, $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$, $P'(1) = 20$,

$P''(x) = 12x^2 + 12x + 6$, $P''(1) = 30$, $P'''(x) = 24x + 12$, $P'''(1) = 36$,

$P^{(4)}(x) = 24$, $P^{(4)}(1) = 24$.

Ținând cont de acestea, se obține:

$$P(x) = 15 + \frac{(x-1)}{1!} \cdot 20 + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot 30 + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 36 + \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot 24,$$

Deci:

$$P(x)=15+20(x-1)+15(x-1)^2+6(x-1)^3+(x-1)^4. \qquad (1)$$

Ținând cont de egalitatea (1), se obține:

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{(x-1)^6}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^3}+\frac{15}{(x-1)^4}+\frac{20}{(x-1)^5}+\frac{15}{(x-1)^6}.$$

Observație. Această modalitate de descompunere în fracții simple (în cazuri de acest tip) este mult mai comodă din punct de vedere al calculului, decât metoda clasică de descompunere.

EXERCIȚIUL 5.6.11 Să se dezvolte în serie de puteri funcțiile:

a) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ |x|<1$;

b) $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6},\ x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,\infty)$;

c) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=\cos^4 x,\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x,\ x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Avem: $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}=(1-x^2)^{-1},\ |x|<1$. Dacă se înlocuieşte $-x^2=t$ se obține

$$(1-x^2)^{-1}=(1+t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}.$$

Deci,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ |x|<1. \qquad (1)$$

Se ştie că pentru $|x|<1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ este uniform convergentă, deci se poate integra termen cu termen pe $[0,x]\subset(-1,1)$. Aşadar, din egalitatea (1) se obține:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$$

Deci, $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

b) Se observă că $\frac{3x}{x^2+5x+6}=\frac{9}{x+3}-\frac{6}{x+2}$. Deci, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, unde $f_1(x)=\frac{9}{x+3}$, $f_2(x)=-\frac{6}{x+2}$. Dar, $f_1(x)=3\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$, $f_2(x)=-3\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}$. Funcția $f_1(x)$ se poate dezvolta în serie de puteri pentru $|x|<3$, iar $f_2(x)$ se poate dezvolta în serie de puteri pentru $|x|<2$. Ținând cont de acestea, rezultă că funcția $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ este dezvoltabilă în serie de puteri pentru $|x|<2$. Deci,

$$f_1(x)=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n} \text{ şi } f_2(x)=-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}.$$

Aşadar, $\frac{3x}{x^2+5x+6}=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n$, $|x|<2$.

c) Avem: $f'(x)=-2\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}=-2(x+1)\cdot\frac{1}{1+(x+1)^2}$.

Se observă că funcția $f_1(x)=\frac{1}{1+(n+1)^2}$ este dezvoltabilă în jurul punctului $x_0=-1$ pe orice interval $[-1,x]\subset(-2,0)$ şi se obține $f_1(x)=[1+(x+1)^2]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^{2n}$ pentru $x\in(-2,0)$. Aşadar, se obține: $f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+x)^{2n+1}$. Integrând această egalitate pe intervalul $[-1,x]\subset(-2,0)$, se obține $\ln\frac{1}{x^2+2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x+1)^{2n+1}}{n+1}$, $x\in(-2,0)$.

d) Deoarece $\cos^4 x=\frac{3}{4}+\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 4x$, se ştie că:

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$, $x\in\mathbb{R}$. De aici rezultă că:

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n\cdot x^{2n}}{(2n)!!} \text{ şi } \cos 4x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{16^n\cdot x^{2n}}{(2n)!!}.$$

Ținând cont de acestea, se obține:

$$\cos^4 x=\frac{3}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}+16^n}{4\cdot(2n)!!}\cdot x^{2n},\ x\in\mathbb{R}.$$

e) Deoarece $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x$ şi $\cos 4x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16^n \cdot x^{2n}}{(2n)!!}$, atunci $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16^n \cdot x^{2n}}{(2n)!!}$.

EXERCIȚIUL 5.6.12 Să se calculeze:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

b) $\lim_{x \to \infty} \left[x - x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$.

Rezolvare Dacă $R_n(x)$ este restul de ordinul n din formula lui Taylor a funcției $f(x)$ dezvoltată în jurul punctului $x = a$, atunci are loc relația

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0 . \tag{1}$$

a) Ştim că:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_4^1(x) \tag{2}$$

şi

$$e^{-\frac{n^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + R_4^2(x) . \tag{3}$$

Din (2) şi (3) se obține: $\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{R_4^1(x)}{x^4} - \frac{R_4^2(x)}{x^4}$. Atunci ținând cont de (1), se obține:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12} .$$

b) Dacă se face substituția $x = \frac{1}{t}$ se obține:

$$\lim_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \cdot \ln(1+t) \right) = \lim_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} ,$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + R_2(t) .$$

Atunci, $\lim_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2} + \lim_{t \to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

EXERCIȚIUL 5.6.13 Să se calculeze cu patru zecimale exacte $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Rezolvare. Seria Mac-Laurin a funcției $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ este $e^{-\frac{x^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$. Se integrează această egalitate pe intervalul $[0,x]\subset\mathbb{R}$ şi se obține:

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Considerând $x=1$, obținem:

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\ldots.$$

Dacă se adună aceşti termeni, eroarea făcută este mai mică decât $\frac{1}{75600}<\frac{1,5}{10^5}$. Calculând suma acestor fracții prin lipsă şi prin adaos la zecimala a cincea se obține:

$$0,74681<\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx<0,74685.$$

Deci, $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx<0,7468\ldots$.

CAPITOLUL VI: FUNCȚII REALE ŞI FUNCȚII VECTORIALE

1. LIMITĂ. DEFINIȚII. PROPRIETĂȚI GENERALE

După cum se ştie, tipurile de funcții se clasifică în funcție de natura domeniului, respectiv codomeniului. În acest sens, există următoarele tipuri de funcții:

DEFINIȚIA 6.1.1

a) Funcțiile $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ se numesc funcții reale de variabilă reală şi au forma generală $y = f(x)$. De exemplu, $f : (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

b) Funcțiile $F : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}^m$ se numesc funcții vectoriale din variabilă reală şi au următoarea formă: $F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)\right)$ unde $f_1(x)$, oricare ar fi $i = \overline{1,m}$ se numesc protecțiile funcției vectoriale $F(x)$ şi aceste protecții sunt funcții reale de variabilă reală. De exemplu, $F : (-1,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = \left(\dfrac{x}{1-x^2}, \ln(x+1)\right)$.

c) Funcțiile $f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}$ se numesc funcții reale de variabilă vectorială şi au forma generală $y = f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Aceste funcții mai poartă denumirea de funcții de mai multe variabile. De exemplu, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}$.

d) Funcțiile $F : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}^p$ se numesc funcții vectoriale de variabilă vectorială şi au forma $F(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_n(\overline{x})\right)$ unde $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ iar funcțiile $f_i(\overline{x})$, oricare ar fi $i = \overline{1,p}$ sunt funcții reale de variabilă vectorială. De exemplu, $F : D((0,0),1) \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \left(\ln(1+x^2+y^2), \sqrt{\dfrac{x^2y^2}{1-x^2-y^2}}\right)$, unde $D((0,0),1)$ este discul cu centrul în origine şi de rază 1.

Aceste tipuri de funcții vor fi studiate în cele ce urmează din punct de vedere al limitei şi continuității.

Cel mai general cadru în care poate fi definită noțiunea de limită este atunci când domeniul şi codomeniul sunt înzestrate cu structura de spațiu topologic.
Cum spațiul metric şi spațiul vectorial normat sunt spații topologice, noțiunea de limită are sens şi atunci când domeniul şi codomeniul sunt înzestrate cu aceste structuri.
Limita unei funcții în punctul de acumulare x_0 a lui X se defineşte după cum urmează:

DEFINIȚIA 6.1.2 (**Limita în spațiu topologic**) Fie $f : X \to Y$, unde (X, t_1) şi (Y, t_2) sunt două spații topologice oarecare. Se spune că funcția $f(x)$ are limita $\mathbf{l}$ în punctul x_0 şi se scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{l}$ dacă pentru orice W vecinătate a lui $\mathbf{l}$, există o vecinătate V a punctului x_0, astfel încât pentru orice $x \neq x_0 \,|\, x \in V \cap X$, rezultă $f(x) \in W$.

OBSERVAȚIA 6.1.1 Ca noțiunea de limită dată de Definiția 6.1.2 să aibă sens (limita să fie unică) trebuie ca spațiile topologice (X, t_1) şi (Y, t_2) să fie spații topologice separate (Haussdorf).

DEFINIȚIA 6.1.3 (**Limita în spații metrice**) Fie $f : X \to Y$, iar (X, d) şi (Y, r) spații metrice. Funcția $f(x)$ are limită $\mathbf{l} \in Y$ în punctul x_0 şi se scrie $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \mathbf{l}$ dacă pentru orice $e > 0$, există $d(e) > 0$ astfel încât pentru orice $x \neq x_0 \,|\, d(x, x_0) < d(e)$ rezultă $r(f(x), \mathbf{l}) < e$.

OBSERVAȚIA 6.1.2
a) Se ştie că spațiul metric este un spațiu topologic separat, de aceea limita definită de Definiția 6.1.3 este unică, deci noțiunea este bine definită.
b) Dacă se particularizează metricile d şi r se obțin diverse forme echivalente ale acestei definiții.

Exemple.
1. $X \subset$ ¡, $Y \subset$ ¡ d metrica euclidiană a lui ¡, adică modulul, atunci Definiția 6.1.3 capătă forma cunoscută, adică: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \mathbf{l}$ dacă oricare ar

fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice $x \in X \,|\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

2. Definiția 6.1.3, dacă $X \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, pentru cazurile:

a) $p \geq 2$, $m = 1$,

b) $m \geq 2$, $p = 1$,

are următoarele forme:

a) Funcția este de forma $F : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)\right)$ şi în acest caz definiția este:

$\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \bar{L}$, $\bar{L} = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\right)$ dacă $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $(\forall) x \neq x_0 \in X \,|\, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p}\left(f_k(x) - \lambda_k\right)^2} < \varepsilon$.

b) Funcția este de forma $f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to Y \subseteq \mathbb{R}$ şi în acest caz definiția este:

$\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lambda$, dacă $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$(\forall)\bar{x} \neq \bar{x}_0 \in X \,|\, \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\left(x_k - x_{0k}\right)^2} < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(\bar{x}) - \lambda| < \varepsilon$.

DEFINIȚIA 6.1.4 (**Limita în spațiu vectorial normat**) Fie $f : X \to Y$ o funcție şi $\left(X, \|\cdot\|_1\right)$, $\left(Y, \|\cdot\|_2\right)$ spații vectoriale normate. Se spune că funcția f are limita $\lambda \in Y$ în punctul x_0 şi se scrie $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lambda$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \neq x_0 \,|\, \|x - x_0\|_1 < \delta(\varepsilon)$ rezultă $\|f(x) - \lambda\|_2 < \varepsilon$.

OBSERVAȚIA 6.1.3

a) Deoarece spațiile vectoriale normate sunt spații topologice separate, limita definită de Definiția 6.1.4 este unică. Particularizând normele $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ se obțin definiții echivalente cu Definiția 6.1.4.

b) Definițiile 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4 sunt definiții echivalente, adică considerând-o pe una ca definiție, celelalte două devin propoziții care pot fi demonstrate.

În cele ce urmează se vor considera funcțiile vectoriale de variabilă vectorială, adică funcții de forma $F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to Y \subseteq \mathbb{R}^m$,
$F(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}) \right)$,
unde $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Dacă $n = 1$ şi $m \geq 2$, atunci se obțin funcții vectoriale de variabilă reală, care au forma $F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x) \right)$, $x \in \mathbb{R}$.
Dacă avem simultan $n = 1$ şi $m = 1$, atunci se obțin funcții reale de variabilă reală.
Deoarece mulțimea numerelor reale este o mulțime ordonată, se poate stabili dacă x converge către punctul de acumulare x_0, crescător sau descrescător şi astfel se poate defini limita la stânga, respectiv limita la dreapta în punctul x_0 pentru funcția $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$.

OBSERVAȚIA 6.1.4
a) Definițiile limitei unei funcții într-un punct au fost date considerând limita λ, cât şi punctul x_0 finite. Cea mai utilizată dintre cele trei definiții ale limitei funcției într-un punct este Definiția 6.1.3.
b) Pentru funcțiile vectoriale de variabilă vectorială, dacă se consideră metrica euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$, atunci Definiția 6.1.3 are următoarea formă:

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} F(\overline{x}) = \overline{L} \quad \left(\overline{L} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \right)$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice $\overline{x} \in X$ cu proprietatea că:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})} < \delta(\varepsilon) \text{ rezultă } \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\overline{x}) - \lambda_j \right)^2} < \varepsilon .$$

c) Definițiile 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4 pot fi particularizate pentru funcțiile reale de variabilă reală şi în cazul în care $\lambda = \infty$ sau $x_0 = \infty$, λ finit, $x_0 = \infty$, x_0 finit, $\lambda = \infty$.

PROPOZIȚIA 6.1.1 Fie $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in X'$ un punct de acumulare al domeniului de definiție:
a) Dacă există λ_s, λ_d în punctul x_0 pentru funcția f şi $\lambda_s = \lambda_d = \lambda$, atunci funcția f are limită în punctul x_0 şi această limită are valoarea λ.
b) Dacă funcția f are limită λ în punctul x_0, atunci există λ_s şi λ_d şi $\lambda_s = \lambda_d = \lambda$.

Dacă se consideră $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to Y \subset \mathbb{R}$ şi $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in X'$, atunci, spre deosebire de cazul când $X \subset \mathbb{R}$ există o infinitate de posibilități ca punctul $\overline{x} = (x_1, x_2)$ să conveargă către punctul $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$. Aceste posibilități sunt date de toate drumurile plane ce trec prin punctul $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$. Prin drum se înțelege orice curbă plană regulată (continuă şi simplă). De exemplu, graficele funcțiilor elementare definite pe intervale $[a,b]$ din domeniul de definiție sunt drumuri.

PROPOZIȚIA 6.1.2 Funcția $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to Y \subset \mathbb{R}$ are limita în punctul $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in X'$ dacă şi numai dacă pe orice drum ce trece prin acest punct, funcția f are limită şi aceste limite sunt egale.

Folosind Propoziția 6.1.2, se poate arăta că o funcție nu are limită într-un punct ca în exemplul următor.

Exemplu. Fie $f = f(x,y)$ şi (x_0, y_0) punctul în care se pune problema limitei şi $y = g(x)$, $y = h(x)$ curbe ce trec prin punctul (x_0, y_0).

Dacă:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ y = g(x)}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, g(x)) = \mathbf{l}_1$$

şi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ y = h(x)}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, h(x)) = \mathbf{l}_2$$

şi

$$\mathbf{l}_1 \neq \mathbf{l}_2 .$$

Atunci funcția $f = f(x,y)$ nu are limită în punctul (x_0, y_0).

Propoziția 6.1.3 (**Limita funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială**) Fie $F(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}))$, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcție vectorială de variabilă vectorială. Funcția $F(\overline{x})$ are limita $\overline{L} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, ..., \mathbf{l}_m)$ în punctul $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_j(\overline{x}) = \mathbf{l}_j$, oricare ar fi $j = \overline{1, m}$.

Demonstrație. Într-adevăr, ținând cont de Definiția 6.1.4, punctul b) rezultă $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} F(\overline{x}) = L$ dacă:

$$\left[(\forall)e>0,(\exists)d(e)>0 \text{ a.î. } (\forall)\bar{x}\in X\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2}<d(e)\Rightarrow\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(f_j(\bar{x})-\mathbf{l}_j\right)^2}<e\right.\right]$$

Rezultă că $\left|f_j(\bar{x})-\mathbf{l}_j\right|<\dfrac{e}{\sqrt{m}}=e'$, oricare ar fi $j=\overline{1,m}$. Dar, ținând cont de limita unei funcții reale de variabilă vectorială, rezultă $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_j(\bar{x})=\mathbf{l}_j$, $j=\overline{1,m}$.

Reciproca se demonstrează în mod analog.

Observația 6.1.5

a) Funcția $F(\bar{x})$ are limita $\bar{L}$ în punctul $\bar{x}_0$ dacă și numai dacă fiecare proiecție a sa are limită în acel punct.

b) Ținând cont de Propoziția 6.1.3, dacă funcția $F(\bar{x})$ are limită în punctul $\bar{x}_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$, atunci are loc egalitatea

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}F(\bar{x})=\left(\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f_1(\bar{x}),\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f_2(\bar{x}),...\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f_m(\bar{x})\right).$$

c) Dacă funcțiile $F(\bar{x})$ și $G(\bar{x})$, $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ au limita în punctul $\bar{x}_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$, atunci funcțiile $F(\bar{x})\pm G(\bar{x})$; $l\cdot F(\bar{x})$, $l\in$ ¡ au limită în $\bar{x}_0$ și au loc egalitățile:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\left(F(\bar{x})\pm G(\bar{x})\right)=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}F(\bar{x})\pm\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}G(\bar{x});\ \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}l\cdot F(\bar{x})=l\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}F(\bar{x}).$$

Un rol deosebit din punct de vedere practic îl are limita unei funcții definită cu ajutorul șirurilor. Această problemă este rezolvată de următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 6.1.4 Fie $f:X\subset$ ¡ $^p\to Y\subset$ ¡ ^{m}. Condiția necesară și suficientă ca funcția $F(\bar{x})$ să aibă limita $\bar{L}$ în punctul $\bar{x}_0\in X'$ este ca oricare ar fi $(\bar{x}_n)_{n\geq 0}\left|\bar{x}_n\neq\bar{x}_0\right.$; $\bar{x}_n\in X$ și $\bar{x}_n\to\bar{x}_0$ să rezulte că șirul $\left(F(\bar{x}_n)\right)_{n\geq 0}\to L$ (unic).

Demonstrație. În definiția dată de Observația 6.1.4, punctul b), dacă se înlocuiește:

$$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_p) \text{ cu } \bar{x}_n=(\bar{x}_{n1},\bar{x}_{n2},...,\bar{x}_{np})$$

și

$$F(\bar{x})=\left(f_1(\bar{x}),f_2(\bar{x}),...,f_m(\bar{x})\right) \text{ cu } F(\bar{x}_n)=\left(f_1(\bar{x}_n),f_2(\bar{x}_n),...,f_m(\bar{x}_n)\right)$$

se obține Propoziția 6.1.4 care mai poartă denumirea de **teorema lui Heine**.

OBSERVAȚIA 6.1.6 a) Această propoziție se enunță mai general pentru funcții $f : X \to Y$, X, Y organizate ca spații topologice.

b) Ținând cont de Propoziția 6.1.4, rezultă că dacă există $x_n' \to x_0$ și $x_n'' \to x_0$ astfel încât unul din șirurile $F\left(x_n'\right)$ sau $F\left(x_n''\right)$ nu este convergent sau aceste șiruri sunt convergente cu limite diferite, atunci funcția $F(x)$ nu are limită în x_0.

PROPOZIȚIA 6.1.5. (**Criteriul Cauchy – Bolzano**) Fie $f : X \to Y$, (X, d) și (Y, ρ) spații metrice complete. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x', x'' \in X \setminus \{x_0\} \big|\ d(x', x_0) < \delta(\varepsilon), d(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$ să rezulte că $\rho\left(f(x'), f(x'')\right) < \varepsilon$.

Algoritm pentru calculul limitelor pentru funcțiile reale de variabilă vectorială

Fără a afecta generalitatea problemei, se vor considera funcțiile reale de două variabile.

Pentru a studia existența limitei $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ și eventual a o determina se procedează astfel:

i) se consideră fascicolul de drepte care trec prin punctul (x_0, y_0). Acest fascicol are următoarea ecuație $y = y_0 + m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$.

ii) se calculează limita pe o dreaptă oarecare din fascicol

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ (y = y_0 + m(x - x_0))}} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} f\left(x, y_0 + m(x - x_0)\right) = \lambda(m).$$

iii) a) dacă $\lambda = \lambda(m)$, adică limita depinde de parametrul m, funcția nu are limită în punctul (x_0, y_0) (vezi Propoziția 6.1.2.)

b) dacă $\lambda = c$ (nu depinde de m) funcția poate să aibă sau să nu aibă limită în punctul (x_0, y_0) conform Propoziția 6.1.2.

În cazul 3^0 b) studiul se continuă astfel:

iv) dacă funcția nu are limită, există cel puțin un drum de ecuație $y = g(x)$ care trece prin punctul (x_0, y_0) şi are loc relația:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, g(x)) \neq \mathbf{l}.$$

v) dacă funcția are limită, ea nu poate fi decât constanta $\mathbf{l}$ şi se demonstrează acest lucru folosind Definiția 6.1.3 particularizată la funcțiile reale de două variabile ($p = 2$, $n = 1$) sau criterii ale majorării.

Pentru calculul limitelor funcțiilor de mai multe variabile se poate folosi acest algoritm combinat cu tabelul limitelor fundamentale pentru funcții de mai multe variabile.

Acest tabel este următorul:

1^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{\sin^m [f(x,y)]}{[f(x,y)]^m} = 1$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

2^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{tg^m [f(x,y)]}{[f(x,y)]^m} = 1$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

3^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{\arcsin^m [f(x,y)]}{[f(x,y)]^m} = 1$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

4^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{arctg^m [f(x,y)]}{[f(x,y)]^m} = 1$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

5^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [1 + f(x,y)]^{\frac{1}{f(x,y)}} = e$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

6^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{\ln(1 + a\, f(x,y))}{f(x,y)} = a$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$;

7^0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{a^{f(x,y)} - 1}{f(x,y)} = \ln a$, dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$.

Tabelul se poate generaliza la funcții de trei sau mai multe variabile.

DEFINIȚIA 6.1.4 Limitele $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \right]$, $\lim\limits_{y \to y_0} \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) \right]$ se numesc **limite iterate**. Mai general,

$$\lim_{x_{s(n)} \to x_{0s(n)}} \left(\mathbf{K} \left(\lim_{x_{s(1)} \to x_{0s(1)}} f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n) \mathbf{K} \right) \right) = l_s ,$$

unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, iar l_σ se numeşte **limită iterată**. Pot exista $n!$ limite iterate în $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$.

Între limita funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) şi limitele iterate în acest punct există următoarea legătură:

PROPOZIȚIA 6.1.6 Dacă există limita funcției într-un punct şi una din limitele iterate în acest punct, atunci acestea sunt egale.

OBSERVAȚIA 6.1.7 a) Dacă există două limite iterate distincte ale funcției $f(\overline{x})$ în punctul $\overline{x}_0$, atunci funcția nu are limită în acel punct.

b) Existența şi egalitatea limitelor iterate nu implică existența limitei în punctul $\overline{x}_0$.

c) Existența limitei funcției $f(\overline{x})$ în $\overline{x}_0$ nu implică existența limitelor iterate.

DEFINIȚIA 6.1.5 Fie $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$. Se defineşte limita funcției $f(\overline{x})$ în punctul $\overline{x}_0$ după direcția $\overline{v}$ ca fiind $\lim\limits_{t \to 0} f(\overline{x} + t\overline{v})$.

PROPOZIȚIA 6.1.7 Dacă $\exists \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x})$, atunci există şi limita funcției $f(\overline{x})$ în punctul $\overline{x}_0$ după orice direcție.

Exemplu. Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} (x^2 + 2xy) = 8$.

Soluție. Trebuie să arătam că $\forall\, \varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$ şi $|y - 1| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte că $|f(x, y) - 8| < \varepsilon$, unde $f(x, y) = x^2 + 2xy$. Într-adevăr,

$$f(x, y) - 8 = (x - 2)^2 + 2(x - 2)(y - 1) + 6(x - 2) + 4(y - 1).$$

Deci,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 8| &< |x - 2|^2 + 2|x - 2||y - 1| + 6|x - 2| + 4|y - 1| \\ &< \delta^2 + 2\delta^2 + 6\delta + 4\delta = 3\delta^2 + 10\delta < 13\delta, \end{aligned}$$

unde am considerat că $d \in (0,1)$. Pentru $13d < e$, rezultă că $|f(x,y) - 8| < e$ şi conform cu Definiţia 6.1.3, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} f(x,y) = 8$ ..

2. CONTINUITATEA

Noţiunea de continuitate a derivat din aspectul fizic sau geometric a numeroase procese practice. Astfel, drumul parcurs de un proiectil în spaţiu este o linie continuă. Din punct de vedere matematic, noţiunea de continuitate a unei funcţii are sens (poate fi pusă) numai dacă domeniul şi codomeniul funcţiei sunt organizate ca: spaţii topologice, spaţii metrice sau spaţii vectoriale normate.

În aceste cazuri, noţiunea de continuitate este definită după cum urmează.

DEFINIŢIA 6.2.1 (**Continuitatea în spaţii topologice**) Fie (X, t_1) şi (Y, t_2) spaţii topologice şi $f : X \to Y$ o funcţie oarecare. Funcţia f este continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă oricare ar fi W vecinătate a lui $f(x_0) \in Y$, există V vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(V) \subseteq W$. Punctul $x_0 \in X$ care satisface aceste proprietăţi este punct de continuitate a funcţiei $f(x)$.

DEFINIŢIA 6.2.2 (**Continuitatea în spaţii metrice**) Fie (X, d) şi (Y, r) spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie oarecare. Funcţia f este continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă oricare ar fi $e > 0$, există $d(e) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X \setminus \{x_0\} \big| \; d(x, x_0) < d(e)$ rezultă $r\big(f(x), f(x_0)\big) < e$.

DEFINIŢIA 6.2.3 (**Continuitatea în spaţii vectoriale normate**) Fie $(X, \|\cdot\|_1)$ şi $(Y, \|\cdot\|_2)$ spaţii vectoriale normate şi $f : X \to Y$ o funcţie oarecare. Funcţia f este continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă oricare ar fi $e > 0$, există $d(e) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X \setminus \{x_0\} \big| \; \|x - x_0\|_1 < d(e)$ rezultă $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < e$.

OBSERVAŢIA 6.2.1

a) Spre deosebire de noţiunea de limită care are sens numai în punctele de acumulare ale domeniului de definiţie, noţiunea de continuitate are sens, după cum se observă din cele trei definiţii, numai în punctele domeniului de definiţie.

b) Noțiunea de continuitate este o particularizare a noțiunii de limită. Particularizarea constă în faptul că limita **l** este înlocuită cu $f(x_0)$, iar $x_0 \in X$.

c) Cea mai des utilizată definiție a continuității este Definiția 6.2.2, această definiție pentru funcțiile vectoriale capătă următoarea formă:

Funcția $F : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$, $F(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}) \right)$ unde $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ este continuă în punctul $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in X$ dacă oricare ar fi $e > 0$, există $d(e) > 0$ astfel încât pentru orice

$$x \in X \setminus \{x_0\} \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2} < d(e) \right. \text{ rezultă } \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{x}_0) \right)^2} < e .$$

PROPOZIȚIA 6.2.1 Fie $F : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială de variabilă vectorială. Condiția necesară şi suficientă ca funcția $F(\overline{x})$ să fie continuă în punctul $\overline{x}_0 \in X$ este ca orice proiecție a sa să fie continuă în acest punct.

Demonstrație. Se consideră $F(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}) \right)$ continuă în $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ şi se demonstrează că $f_j(\overline{x})$, $j = \overline{1, m}$ sunt continue în $\overline{x}_0$.

Într-adevăr, ținând cont de Observația 6.2.1 b), rezultă $F(\overline{x})$ continuă în $\overline{x}_0$ dacă:

$$(\forall) e > 0, (\exists) d(e) > 0 \text{ a.î. } (\forall) \overline{x} \in X \setminus \{x_0\} \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2} < d(e) \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{x}_0) \right)^2} < e.$$

Deci, rezultă că:

$$\left| f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{x}_0) \right| < \frac{e}{\sqrt{m}}, \text{ oricare ar fi } j = \overline{1, m}.$$

Dar, ținând cont de continuitatea funcțiilor reale de variabilă vectorială, rezultă $f_j(\overline{x})$ continuă în $\overline{x}_0 \in X$, oricare ar fi $j = \overline{1, m}$.

Reciproca se demonstrează în mod analog.

Ținând cont de definiția limitei și definiția continuității sunt evidente următoarele propoziții care au o mare utilitate practică în studiul continuității.

PROPOZIȚIA 6.2.2 Fie $f : X \to Y$ o funcție oarecare. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

PROPOZIȚIA 6.2.3 Fie $f : X \to Y$ o funcție oarecare. Funcția f continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0} | x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ rezultă $(f(x_n))_{n \geq 0}$ este șir convergent și are limita $f(x_0)$.

Pentru funcțiile de mai multe variabile există două tipuri de continuități, continuitate parțială și continuitate globală. Legătura dintre aceste tipuri de continuitate este dată în următoarele două propoziții.

PROPOZIȚIA 6.2.4 Fie $f : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă vectorială. Dacă funcția f este continuă în $\overline{x}_0 \in X$, atunci f este continuă în raport cu fiecare variabilă x_i, $i = \overline{1,n}$ în parte (continuă parțial).

Demonstrație. Fie f continuă în $\overline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$. Ținând cont de continuitatea funcțiilor reale de variabilă vectorială rezultă că pentru orice $e > 0$ există $d(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi

$\overline{x} \in X \setminus \{x_0\} \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2} < d(e) \right.$ rezultă $\left| f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \right| < e$. Relația anterioară $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2} < d(e)$ este satisfăcută și de $\overline{x}' = (x_1, x_{02}, ..., x_{0n})$.

Dar această relație pentru $\overline{x}'$ capătă următoarea formă: oricare ar fi $x_1 \in pr_{0x_1} X$ verifică relația $|x_1 - x_{01}| < d(e)$

și $\left| f(x_1, x_{02}, x_{03}, ..., x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \right| < e$. Deci, rezultă că funcția $f(\overline{x})$ este continuă în punctul x_0 în raport cu variabila x_1.

În mod analog se demonstrează continuitatea cu $x_2, x_3, ..., x_n$.

PROPOZIȚIA 6.2.5 Dacă funcția $F : X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}$ este continuă în punctul $\overline{x}_0 \in X$ în raport cu fiecare dintre variabilele x_i, $i = \overline{1,n}$ în parte nu se poate afirma nimic despre continuitatea globală a funcției în punctul $\overline{x}_0$ (în raport cu ansamblul variabilelor).

Demonstrație. Se consideră un contraexemplu, adică se alege o funcție care este continuă parțial în raport cu variabilele sale, dar care nu este continuă global. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4\cdot y}{x^6+y^3}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$ şi se arată că, deşi în punctul $O(0,0)$ este continuă, atât în raport cu x, cât şi în raport cu y nu este continuă global în acest punct.

Într-adevăr, din:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cdot y}{x^6+y^3}=0 \text{ şi } f(0,y)=0$$

rezultă că $f(x,y)$ este continuă în raport cu x în punctele $(0,y), y\in\mathbb{R}$ deci şi în $(0,0)$.

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x^4\cdot y}{x^6+y^3}=0 \text{ şi } f(0,y)=0$$

rezultă $f(x,y)$ este continuă în raport cu y în punctele $(x,0)$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ deci şi în $(0,0)$. Dar,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x=y)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^6+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=0, \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=x^2)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6+x^6}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că funcția $f(x,y)$ nu are limită în punctul $(0,0)$, deci ea nu este continuă în acest punct în raport cu ansamblul variabilelor.

OBSERVAȚIA 6.2.2

a) Ținând cont de Propozițiile 6.2.4 şi 6.2.5 rezultă că pentru funcțiile reale de variabilă vectorială (funcțiile de mai multe variabile) există continuitate globală şi continuitate parțială şi că orice funcție continuă globală este continuă şi parțial, dar reciproc nu.

b) Punctul $\overline{x}_0$ care nu este punct de continuitate pentru funcția f se va numi punct de discontinuitate al acestei funcții.

c) Pentru funcțiile reale de variabilă reală există trei tipuri de discontinuități:

- discontinuitate de speța întâi;
- discontinuitate de speța a doua;
- discontinuitate de speța a treia;

Acestea se definesc astfel.

DEFINIȚIA 6.2.4
a) Punctul $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ este punct de **discontinuitate de speța întâi** pentru funcția $f: X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ dacă există l_s, l_d finite şi diferite sau $l_s = l_d \neq f(x_0)$.
b) Punctul $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ este punct de **discontinuitate de speța a doua** pentru funcția $f: X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ dacă l_s sau l_d au valori infinite.
c) Punctul $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ este punct de **discontinuitate de speța a treia** pentru funcția $f: X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ dacă l_s sau l_d nu există.

DEFINIȚIA 6.2.5 (**Prelungirea prin continuitate**) Fie $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi x_0 punct de acumulare ce nu aparține lui $X \subset \mathbb{R}$. Dacă $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, y_0 finit, atunci funcția

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

se numește **prelungirea prin continuitate în punctul** x_0 a funcției $f(x)$.
Pentru funcțiile reale de variabilă reală, pe lângă noțiunea de continuitate mai apare şi noțiunea de continuitate uniformă care se defineşte după cum urmează.

DEFINIȚIA 6.2.5 (**Continuitatea uniformă**) Fie $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se spune că funcția $f(x)$ este **uniform continuă** pe mulțimea X dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in X \,\big|\, |x'' - x'| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte că $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

OBSERVAȚIA 6.2.3 a) Dacă continuitatea este o noțiune punctuală, adică ea are sens într-un punct $x_0 \in X$, continuitatea uniformă este o proprietate globală, adică ea are sens sau se pune pe o întreagă mulțime X.
Fenomenele practice a căror modelare matematică conduce către funcții uniform continue sunt fenomene pentru care se poate asigura un proces de prognoză. De aceea, uniform continuitatea este foarte importantă.

b) Uniform continuitatea se poate generaliza pentru funcții în care domeniile şi codomeniile sunt spații metrice, astfel: funcția $f : X \to Y$, unde $(X, d), (X, r)$ sunt spații metrice, este uniform continuă pe X dacă $e > 0$, $\exists d(e) > 0$ astfel încât $\forall x', x'' \in X \,\middle|\, d(x'', x') < d(e)$ să rezulte că $r\left(f(x''), f(x')\right) < e$.

În continuare, se dau câteva proprietăți ale funcțiilor continue şi uniform continue. Proprietățile se enunță pentru funcții reale de variabilă, dar sunt valabile pentru orice funcție definită pe un spațiu metric şi având ca şi codomeniu tot un spațiu metric.

PROPOZIȚIA 6.2.6 Fie $f : [a, b] \to$ ¡ .

a) Dacă f este o funcție monotonă, atunci aceasta poate avea numai puncte de discontinuitate de speța I şi acestea formează o mulțime cel mult numărabilă.

b) Dacă f este continuă, atunci f este o funcție mărginită şi îşi atinge marginile.

PROPOZIȚIA 6.2.7 Fie $f : [a, b] \to$ ¡ . Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$, atunci ea este uniform continuă pe $[a, b]$.

Demonstrație. Se presupune că f nu este uniform continuă pe $[a, b]$. Deci $(\exists) e > 0$, $(\forall) d(e) > 0$ astfel încât $(\exists) x'$, $x'' \in [a, b] \,\big|\, |x' - x''| < d(e)$ să rezulte:

$$\left| f(x') - f(x'') \right| > e . \tag{1}$$

Dacă se consideră $d(e) = \dfrac{1}{n}$ şi se dau lui n valorile $1, 2, 3, \mathbf{K}$, se obțin două şiruri $(x'_n)_{n \ge 1}$ şi $(x''_n)_{n \ge 1}$ cu proprietatea că $x'_n, x''_n \in [a, b]$ şi $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Deci, şirurile sunt mărginite şi conform lemei lui Cesaro există subşirurile convergente $\left(x'_{n_p}\right)$, $\left(x''_{n_p}\right)$ către aceeaşi limită x deoarece $\left|x'_{n_p} - x''_{n_p}\right| < \dfrac{1}{n}$. Cum f este continuă pe $[a, b]$, rezultă $f\left(x'_{n_p}\right) \to f(x)$ şi $f\left(x''_{n_p}\right) \to f(x)$, adică $\left| f\left(x'_{n_p}\right) - f\left(x''_{n_p}\right) \right| < e$. Această inegalitate intră în contradicție cu egalitatea (1). Deci, presupunerea că $f(x)$ nu este uniform continuă pe $[a,b]$ este falsă. Această propoziție se numeşte **Teorema lui Cantor**.

OBSERVAȚIA 6.2.4 Ținând cont de definiția celor două noțiuni rezultă că, continuitatea uniformă implică continuitatea, dar reciproca nu este general valabilă. Propoziția 6.2.7 pune în evidență condițiile particulare în care şi reciproca este adevărată.

DEFINIȚIA 6.2.7 Fie $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală. Dacă pentru orice $x', x'' \in X$, există $M > 0$ astfel încât $|f(x'') - f(x')| < M|x'' - x'|$, atunci funcția f se numeşte **funcție de tip Lipschitz** sau o **funcție lipschitziană**.

PROPOZIȚIA 6.2.8 Orice funcție lipschitziană este o funcție uniform continuă.

Demonstrație. Într-adevăr, în definiția uniform continuității, dacă se alege $d(e) = \frac{e}{M}$, pentru orice $e > 0$ atunci din condiția Lipschitz se obține că $|f(x'') - f(x')| < M\frac{e}{M} = e$. Deci,

$$\left[|x'' - x'| < d(e) = \frac{e}{M} \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < e\right],$$

relație care defineşte uniform continuitatea.

PROPOZIȚIA 6.2.9 Fie $f: X \to \mathbb{R}$ o funcție continuă în punctul $x_0 \in X$ astfel încât $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), unde (X, d) este un spațiu metric. Atunci funcția f este pozitivă (negativă) pe o vecinătate a lui x_0.

PROPOZIȚIA 6.2.10 Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă:

i) f continuă,

ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$,

atunci există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

PROPOZIȚIA 6.2.11 Dacă f este o funcție continuă pe intervalul compact $[a,b]$, atunci f are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. După cum se ştie, pentru a arăta că o funcție are proprietatea lui Darboux trebuie arătat că atunci când trece de la o valoare y_0 la o valoare y_1, ia toate valorile cuprinse între y_0 şi y_1 cel puțin o dată ($y_0 < y_1$). În condițiile din ipoteză, ținând cont de Propoziția 6.2.6 b), rezultă că există m_f şi M_f. Deci, în mod normal, pentru a arăta că o funcție are proprietatea lui Darboux trebuie arătat că există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $f(x_0) = a$, oricare ar fi $a \in (m_f, M_f)$. Într-adevăr, se consideră funcția $g(x) = f(x) - a$. Cum funcția f este o funcție continuă pe $[a,b]$, rezultă g este continuă pe $[a,b]$. Fie $x', x'' \in [a,b]$ astfel încât $m_f = f(x')$ şi $M_f = f(x'')$. Atunci,

$$\left.\begin{cases} g(x') = f(x') - a = m_f - a < 0 \\ g(x'') = f(x'') - a = M_f - a > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(x')g(x'') < 0$$

Cum funcția g este continuă pe $[a,b]$, conform Propoziției 6.2.10 rezultă că există $x_0 \in (x', x'')$ astfel încât $g(x_0) = 0$, $g(x_0) = f(x_0) - a = 0$. Deci, $f(x_0) = a$.

OBSERVAȚIA 6.2.5

a) Proprietatea lui Darboux nu este o proprietate caracteristică funcțiilor continue, adică există funcții care nu sunt continue, dar au proprietatea lui Darboux.

b) Dacă $C^0[a,b]$ este mulțimea funcțiilor continue pe intervalul $[a,b]$ şi $D[a,b]$ este mulțimea funcțiilor care au proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$, atunci are loc relația:

$$C^0[a,b] \subset D[a,b].$$

Definiția 6.2.6 poate fi generalizată şi pentru funcțiile $F : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel.

DEFINIȚIA 6.2.8 Funcția $F(\overline{x})$ este uniform continuă pe E dacă pentru orice $e > 0$, există $d(e) > 0$ astfel încât oricare ar fi $\overline{x}', \overline{x}'' \in E$, cu $\|\overline{x}' - \overline{x}''\| < d(e)$, să avem $\|F(\overline{x}') - F(\overline{x}'')\| < e$.

PROPOZIȚIA 6.2.12 Funcția vectorială de variabilă vectorială $F: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe E dacă şi numai dacă toate proiecțiile sale $f_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$ sunt uniform continue pe E.

Demonstrație. Se folosesc inegalitățile evidente:

$$\left\| f_i(\overline{x}') - f_i(\overline{x}'') \right\| \le \left\| F(\overline{x}') - F(\overline{x}'') \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left| f_i(\overline{x}') - f_i(\overline{x}'') \right|^2 .$$

PROPOZIȚIA 6.2.13 Dacă $F(\overline{x})$ este uniform continuă (în raport cu ansamblul variabilelor) pe E, atunci ea este uniform continuă cu fiecare variabilă în parte x_i pe $pr_{Ox_i} E$, $i = \overline{1,n}$.

Reciproca nu este în general valabilă.

Demonstrație. Modul de raționare este cel din Propoziția 6.2.4 ținând cont de Definiția 6.2.8.

Pentru a arăta că reciproca nu este în general valabilă se foloseşte un contraexemplu.

Fie $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Fie $(x_0, y_0) \in [-1,1] \times [-1,1]$ arbitrar, dar fixat. Funcțiile parțiale $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x, y_0) = \dfrac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$ şi $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x_0, y) = \dfrac{x_0 y}{x_0^2 + y^2}$ sunt uniform continue.

Dar, $f(x,y)$ nu este continuă în origine. Deci, nu este uniform continuă pe $[-1,1] \times [-1,1]$.

Propoziția 6.2.14 Fie $F : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

a) Dacă E este compactă şi F este continuă pe E, atunci F este mărginită.

b) Dacă E este compactă şi F continuă pe E, atunci F este uniform continuă pe E.

c) Dacă F continuă şi E compactă, atunci $F(E)$ este compactă.

Demonstrație. Pentru demonstrațiile proprietăților a), b), c) se raționează ca la funcțiile reale de variabilă reală (înlocuind modulul cu norma euclidiană pe $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$).

OBSERVAȚIA 6.2.6 Dacă funcția este reală de mai multe variabile atunci proprietatea a) din Propoziția 6.2.13 are următoarea formă:
O funcție reală de mai multe variabile continuă pe mulțimea compactă $E \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită şi îşi atinge marginile.

PROPOZIȚIA 6.2.15 Suma şi produsul unui număr finit de funcții uniform continue este o funcție uniform continuă.

3. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 6.3.1 Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},\dfrac{(\sin x)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}}{x}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x},\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^x-a^a}{x-a},\dfrac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}\right],\ a>0$

Soluție. Dacă $F: X\subset \mathbb{R}\to Y\subseteq \mathbb{R}^2$ unde $F(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x),\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\right)$

a) Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},\frac{(\sin x)^{\frac{\sin x}{x-\cos x}}}{x}\right]=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^{\frac{\sin x}{x-\cos x}}}{x}\right].$$

Pentru a calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ se procedează astfel:

$$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt[6]{\cos^3 x}-\sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}=\frac{\cos^3 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot \overline{E}(x)},$$

unde $\overline{E}(x)=\sqrt[6]{\cos^{15} x}+\sqrt[6]{\cos^{14} x}+\sqrt[6]{\cos^{13} x}+\sqrt[6]{\cos^{12} x}+\sqrt[6]{\cos^{11} x}+\sqrt[6]{\cos^{10} x}$.

Este evident că $\lim\limits_{x\to 0}\overline{E}(x)=6$. Dar,

$$\frac{\cos^3 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot \bar{E}}=\frac{\cos^2 x-(\cos x-1)}{\sin^2 x\cdot \bar{E}}=\frac{-2\cos^2 x\cdot \sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot \bar{E}(x)}=$$

$$=-\frac{\cos^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}\cdot \bar{E}(x)}.$$

Deci, $\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}\cdot \bar{E}(x)}$.

Aşadar, avem că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}\cdot \bar{E}(x)}=-\frac{1}{12}.$$

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{\sin x}-1}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{\frac{x}{\sin x}-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{e}.$$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}\right]=\left(-\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{e}\right)$.

b) Se procedează ca la punctul anterior şi se calculează:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} \text{ şi } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}.$$

Avem:

$$\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}=\frac{e^{\sin x}\cdot\left(e^{\sin 2x-\sin x}-1\right)}{x}=e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\sin 2x-\sin x}}{\sin 2x-\sin x}\cdot\frac{\sin 2x-\sin x}{x}=$$

$$=e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\sin 2x-\sin x}-1}{\sin 2x-\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot(2\cos x-1).$$

Ținând cont de aceasta se obține:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\sin 2x-\sin x}-1}{\sin 2x-\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(2\cos x-1\right)=1\cdot\ln e\cdot 1\cdot 1=1.$$

Cum

$$\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}=\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{arctg\frac{2x}{2-x^2}}=\frac{\ln\left[1+\frac{2x}{1-x}\right]}{\frac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{arctg\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{2-x^2}{1-x},$$

obținem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{arctg\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{2-x^2}{1-x}=1\cdot 1\cdot 2=2\cdot$$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x},\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}\right)=(1,2).$

c) Avem:

$$\frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)\cdot x^n+1}{(x-1)^2}=\frac{n\cdot x^n(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-x^{n-3}-\ldots-x-1}{x-1}=$$

$$=\frac{x^{n-1}(x-1)+x^{n-2}(x-1)(x+1)+x^{n-3}(x-1)\left(x^2+x+1\right)+\ldots+(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}{x-1}=$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}(x+1)+x^{n-3}\left(x^2+x+1\right)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right).$$

Deci,

$$\lim_{x\to 0}\frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\left[x^{n-1}+x^{n-2}(x+1)\ldots+\left(x^{n+1}+x+1\right)\right]=$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Avem:

$$\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\ldots+(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}{x-1}=$$

$$=1+(x+1)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right).$$

Deci:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1+(x+1)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)\right)=$$

$$=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Aşadar,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},\frac{(x+x^2+...+x^n-n)}{x-1}\right)=\left(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

d) Avem: $\frac{x^x-a^a}{x-a}=\frac{x^x-x^a}{x-a}+\frac{x^a-a^a}{x-a}$. Dar,

$$\frac{x^x-x^a}{x-a}=x^a\cdot\frac{x^{x-a}-1}{x-a}=x^a\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\ln x,$$

unde $t=x^{x-a}-1$.

Deci, $\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(x^a\cdot\ln x\right)\cdot\lim_{t\to 0}=\frac{t}{\ln(1+t)}=a^a\cdot\ln a$.

Acum,

$$\frac{x^a-a^a}{x-a}=\frac{e^{a\ln x}-e^{a\ln a}}{x-a}=a^a\frac{e^{a\ln x-a\ln a}-1}{a\ln x-a\ln a}\cdot\frac{a\ln x-a\ln a}{x-a}=$$

$$=a^a\cdot\frac{e^{a\ln x-a\ln a}-1}{a\ln x-a\ln a}\cdot a\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}.$$

Deci, $\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}=a^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln x-a\ln a}-1}{a\ln x-a\ln a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}}=a^a\cdot 1\cdot 1=a^a$.

Aşadar, am obținut că:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\ln a+a^a=a^a(\ln a+1).$$

Limita anterioară se poate generaliza astfel:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}.$$

Cum: $\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}=a^{a^a}\cdot\frac{a^{a^x-a^a}-1}{a^x-a^a}\cdot a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}$, atunci:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-a^a}-1}{a^x-a^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a^{x-a}-1}{x-a}=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln^2 a.$$

Deci, avem că:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^x-a^a}{x-a},\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}\right)=\left(a^a\cdot(\ln a+1),a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln^2 a\right).$$

EXERCIȚIUL 6.3.2 Să se cerceteze dacă funcțiile au limită în punctele specificate şi în caz afirmativ să se calculeze:

a) $f(x,y)=\frac{1}{x\cdot y}\cdot arctg\frac{x+y}{1-xy},\ (x,y)=(0,0)$;

b) $f(x,y)=\frac{1}{x\cdot y}\cdot \ln\left(1+x^2+y^2\right),(x,y)=(0,0)$;

c) $f(x,y)=\frac{x^3\cdot y^2}{x^4+y^4},\ (x,y)=(0,0)$;

d) $f(x,y)=\frac{y}{x}\cdot arctg\frac{x+y}{1-xy},\ (x,y)=(0,0)$;

e) $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2},\ (x,y)=(0,0)$;

f) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\ (x,y)=(0,0)$;

g) $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ (x,y)=(0,0)$;

h) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)=(0,0)$;

i) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x,y)=(0,0)$.

Soluție. a) Fie $y=mx$ un fascicul de drepte ce trece prin punctul $(0,0)$. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{mx^2}\cdot arctg\frac{(1+m)x}{1-mx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{arctg\frac{(1-m)x}{1-mx^2}}{\frac{(1+m)x}{1-mx^2}}\cdot\frac{(1-m)x}{\left(1-mx^2\right)\cdot mx^2}.$$

Această limită nu există deoarece pentru funcția $g(x)=\frac{1+m}{\left(1-mx^2\right)\cdot mx}$, $\lim\limits_{x\nearrow 0}g(x)$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0}g(x)$ sunt infinite şi de semn contrar. Deci, nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{xy}\cdot arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

b) Se procedează analog ca la punctul a) şi avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{mx^2}\cdot\ln\left[1+\left(1+m^2\right)\cdot x^2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(1+m^2\right)\cdot x^2\right]}{\left(1+m^2\right)\cdot x^2}\cdot\frac{\left(1+m^2\right)\cdot x^2}{mx^2}=\frac{1+m^2}{m}$$

.

Deoarece această limită depinde de m, rezultă că nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{xy}\cdot\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

c) Ca şi la punctele anterioare, se calculează:

$$\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^5}{\left(1+m^4\right)x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4}=0.$$

Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3\cdot y^2}{x^4+y^4}$ există, ea nu poate fi decât 0. Dar, este evident că $\left|\frac{x^3\cdot y^2}{x^4+y^4}\right|<\left|\frac{x^3\cdot y^2}{2x^2y^2}\right|=\frac{1}{2}|x|\to 0$. Deci, conform criteriului majorării avem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3\cdot y^2}{x^4+y^4}=0$.

d) Se observă că $f(x,y)=\dfrac{arctg\,\frac{x+y}{1-xy}}{\frac{x+y}{1-xy}}\cdot\dfrac{y(x+y)}{x(1-xy)}$.

Dar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{arctg\,\frac{x+y}{1-xy}}{\frac{x+y}{1-xy}}=1$. Se cercetează dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y(x+y)}{x(1-xy)}$. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx(x+mx)}{x\left(1-mx^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{mx(1+m)}{1-mx^2}=0.$$

Se consideră curba $y=\sqrt{x}$ care trece prin $(0,0)$ şi avem că:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}}\frac{y(x+y)}{x(1-xy)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)}{x\left(1-x\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{1-x\sqrt{x}}=1$$

Deci, rezultă că limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y(x+y)}{x(1-xy)}$ nu există. Deci, nici limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{x} \cdot arctg\, \frac{x+y}{1-xy}$ nu există.

e) Avem: $\frac{\sqrt{x^2 \cdot y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 \cdot y^2 + 1}}$.

Dar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 \cdot y^2 + 1}} = \frac{1}{2}$. Se cercetează dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$. Avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^4}{\left(1 + mx^2\right) x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^2}{1 + m^2} = 0.$$

Dacă există această limită nu poate fi decât 0. Cum:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} < \frac{x^2 \cdot y^2}{2|x \cdot y|} = \frac{1}{2}|x \cdot y| \to 0,$$

atunci conform criteriului majorării avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0$. Aşadar, am obținut că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2 \cdot y^2 + 1} - 1}{x^2 \cdot y^2} = 0$.

f) Avem: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot m}{1 + m^2} = 0$. Cum $\left|\frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}\right| < \left|\frac{x^2 \cdot y}{2xy}\right| = \frac{1}{2}|x| \to 0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$.

g) Avem: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 + m^3 x^3}{x^2 + m^2 x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\left(1 + m^3\right)}{1 + m^2} = 0$. Cum

$$\left|\frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x+y|\left|x^2 - xy + y^2\right|}{x^2 + y^2} \le \frac{|x+y|\left[x^2 + y^2 + |xy|\right]}{x^2 + y^2} \le$$

$$\le \frac{3}{2} \frac{|x+y|\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{3}{2}|x+y| \to 0.$$

Deci, conform criteriului majorării $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

h) Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2}{x^2\left(1+m^2\right)x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$.

Deci, limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ nu există.

i) Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-m^2\right)x^2}{x^2\left(1+m^2\right)x^2}=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$.

Deci, limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ nu există.

EXERCIȚIUL 6.3.3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x^2\cdot y}{x+y}}$, $a>0$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$.

Soluție. a) Se face substituirea $u=\dfrac{1}{x}$ şi $v=\dfrac{1}{y}$ şi se obține

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}}\frac{u^2v^2\left(u^2+v^2\right)}{u^4+v^4}.$$

Se foloseşte fascicolul de dreapta $v=mu$. Avem:

$$\lim_{u\to 0}\frac{m^2u^6\left(1+m^2\right)}{u^4+\left(1+m^4\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{m^2\left(1+m^2\right)\cdot u^2}{1+m^4}=0.$$

Dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ nu poate fi decât 0. Cum:

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}<\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\xrightarrow[y\to\infty]{x\to\infty}0,$$

atunci conform criteriului majorării $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

b) Se procedează ca la punctul a) şi se obține $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$. Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2-xy}=\lim\limits_{\substack{u\to0\\ v\to0}}\dfrac{u\cdot v(u+v)}{u^2-uv+v^2}$. Se foloseşte fascicolul de drepte $v=mu$ şi obținem că $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{m(1+m)u^3}{\left(1+m^2-m\right)u^2}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{m(1+m)u}{1+m^2-m}=0$. Dacă există limita $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2-xy}$, atunci aceasta nu poate fi decât 0. Cum

$$\frac{x+y}{x^2+y^2-xy}<\frac{x+y}{|xy|}=\frac{\pm1}{|x|}+\frac{\pm1}{|y|}\xrightarrow[y\to\infty]{x\to\infty}0,$$

atunci conform criteriului majorării $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2-xy}=0$.

c) Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x^2\cdot y}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{\frac{a\,xy}{x+y}}$. Se notează $f(x)=\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}$ şi $g(x,y)=\dfrac{a\,xy}{x+y}$. Evident $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e$. Se cercetează dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{a\,xy}{x+y}$. Procedând ca mai sus, avem: $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{a\,xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{u\to0\\ v\to0}}\dfrac{a}{u+v}=\infty$. Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x^2\cdot y}{x+y}}=e^{\infty}=\infty$.

d) Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$. Se notează $f(x,y)=(1+xy)^{\frac{1}{xy}}$ şi $g(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Evident $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)=e$. Se cercetează dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ există. Cum:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| < \left|\frac{xy}{2\sqrt[4]{xy}}\right| = \frac{1}{2}|xy|^{3/2} \xrightarrow[y\Rightarrow 0]{x\to 0} 0,$$

atunci conform cu criteriul majorării $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$.

Deci, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^0 = 1$.

EXERCIȚIUL 6.3.4 Să se cerceteze continuitatea globală şi continuitatea parțială a funcțiilor:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (\mathrm{x,y}) \neq (0,0) \\ a & , (\mathrm{x,y}) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}, & \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \neq 0 \\ a & , \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin xy}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Ox \cup Oy \\ a & , (x,y) \in Ox \cup Oy. \end{cases}$

Soluție. Se ştie că $f(x,y)$ este continuă în punctul (x_0, y_0) dacă:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

unde (x_0, y_0) este punct al domeniului de definiție. De asemenea, se ştie că dacă o funcție $f(x,y)$ este continuă într-un punct, ea este continuă parțial în acel punct, dar reciproca nu este valabilă.

a) Se consideră fascicolul de drepte $y = mx$ şi se calculează $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+m}}$. Deci, nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Aşadar, funcția nu este continuă în $(0,0)$. Se consideră funcția $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{|x|}$. Avem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|} = 1$. Deci, pentru $a = 1$, funcția $f(x,y)$ este continuă parțial în raport cu x în punctul $(0,0)$. Se consideră funcția $f(0,y)=0$. Funcția $f(x,y)$ este continuă parțial în raport cu y în punctul $(0,0)$ pentru $a=0$.

b) Se consideră fascicolul de drepte $y=mx$ şi se calculează $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\frac{m}{1+m^2}$. Deci, limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nu există. Atunci această funcție nu poate fi continuă în $(0,0)$, $(\forall) a\in\mathbb{R}$. Se observă că $f(x,0)=a$ şi $f(0,y)=a$. Deci, sunt continue în punctul $(0,0)$. Aşadar, pentru $(\forall) a\in\mathbb{R}$ funcția $f(x,y)$ este continuă parțial în $(0,0)$ atât cu variabila x cât şi cu variabila y.

c) Fie $y=mx$, $m\neq 0$. Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+m^2\right)}{\sin mx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sin mx^2}\cdot\frac{1+m^2}{m}=\frac{1+m^2}{m}$. Deci, funcția $f(x,y)$ nu are limită în $(0,0)$. Aşadar $f(x,y)$ nu este continuă în $(0,0)$, $(\forall) a\in\mathbb{R}$. Cum $f(x,0)=a$ şi $f(0,y)=a$, atunci aceste funcții sunt continue în $(0,0)$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$. Aşadar, funcția $f(x,y)$ este continuă parțial în $(0,0)$, $(\forall) a\in\mathbb{R}$. În punctul $(x_0,0)$ funcția $f(x,y)$ nu este continuă deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sin xy}=\pm\infty$. Analog funcția nu este continuă în punctul $(0,y_0)$. Deci, punctele de discontinuitate ale funcției sunt $Ox\cup Oy$. Deoarece $f(x,0)=a$ este continuă în $(x_0,0)$, $(\forall) a\in\mathbb{R}$ rezultă că funcția $f(x,y)$ este continuă parțial în raport cu x pe mulțimea $Ox\setminus\{(0,0)\}$. Avem:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y_0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y_0^2}{\sin y_0 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+y_0^2\right)}{y_0 x}\cdot\frac{y_0 x}{\sin y_0 x}=\pm\infty .$$

Deci, funcția $f(x,y_0)$ nu este continuă în punctele $(0,y_0)$, $(\forall) a\in\mathbb{R}$. Aşadar, funcția $f(x,y)$ nu este continuă parțial în raport cu x pe mulțimea $Ox\setminus\{(0,0)\}$. Analog se studiază continuitatea parțială în raport cu y.

EXERCIȚIUL 6.3.5 Să se studieze uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+x$;

b) $f:(-1,\infty)\to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+x$;

c) $f:(0,1)\to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$;

d) $f:[e,e]\to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, $e\in(0,e)$.

Soluție. a) Fie $x_1,x_2>0$. Avem:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\frac{x_1}{x_1+1}+x_1-\frac{x_2}{x_2+1}-x_2\right|=\left|(x_1-x_2)+\frac{x_1x_2+x_1-x_1x_2-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\right|=$$

$$=|x_1-x_2|\left|1+\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\right|<2|x_1-x_2|=d\,.$$

Dacă se consideră $d=\dfrac{e}{2}$, atunci

$(\forall)\,x_1,x_2\in(0,\infty)$, $|x_1-x_2|<\dfrac{e}{2}\Rightarrow\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<e$. Deci, $f(x)$ este uniform continuă pe $(0,\infty)$, deşi se observă că este nemărginită pe acest interval deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

b) Fie $x'=-\dfrac{n+2}{n+3}$ şi $x_2=-\dfrac{n+1}{n+2}$. Avem: $|x'-x''|=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Rezultă că x' şi x'' sunt suficient de apropiate pentru n suficient de mare. Deci,

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}>1.$$

Aşadar, funcția $f(x)$ nu este uniform continuă pe $(-1,\infty)$.

c) Fie $x'=\dfrac{1}{e^n}$, $x''=\dfrac{1}{e^{n+1}}$, $x',x''\in(0,1)$. Avem: $|x'-x''|=\left|\dfrac{1}{e^n}-\dfrac{1}{e^{n+1}}\right|=\dfrac{e-1}{e^{n+1}}$. Rezultă că x' şi x'' sunt suficient de apropiate când n este suficient de mare. Deci,

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\ln\frac{1}{e^n}-\ln\frac{1}{e^{n+1}}\right|=|-n+n+1|=1.$$

Deci, $f(x)$ nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

d) Este evident că $f(x)=\ln x$ este continuă pe $[e,e]$, $e\in(0,e)$. Deci, $f(x)$ este continuă pe intervalul compact $[e,e]$. Conform cu Propoziția 6.2.7, funcția $f(x)$ este uniform continuă.

EXERCIȚIUL 6.3.6 Să se studieze uniform continuitatea funcției $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x+y+\dfrac{x+y+2xy}{(x+1)(y+1)}$.

Soluție. Fie $(x',y'),(x'',y'')\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ cu proprietatea $|x'-x''|<d$ şi $|y'-y''|<d$. Atunci:

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|=\left|x'+y'+\frac{x'+y'+2x'y'}{(x'+1)(y'+1)}-x''-y''-\frac{x''+y''+2x''y''}{(x''+1)(y''+1)}\right|\le$$

$$\le|x'-x''|+\left|\frac{x'}{1+x'}\right|+\left|\frac{y'}{1+y'}\right|+|y'-y''|+\left|\frac{x''}{1+x''}\right|+\left|\frac{y''}{1+y''}\right|<$$

$$<2d+4.$$

Luând $d'=\dfrac{e}{2}$, atunci $(\forall)(x',y'),(x'',y'')\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ cu proprietatea $|x'-x''|<d$ şi $|y'-y''|<d$, rezultă că $|f(x',y')-f(x'',y'')|<\dfrac{e}{2}$ şi funcția $f(x,y)$ este uniform continuă pe $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

CAPITOLUL VII: DERIVATA ŞI DIFERENȚIALA

1. DERIVATA

Pentru funcțiile reale de variabilă reală, definiția derivatei, precum şi formulele şi regulile de derivare ca şi unele proprietăți legate de derivată cum ar fi teoremele: Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange, l'Hospital se consideră cunoscute. În cazul acestor funcții se discută în continuare despre: derivata funcției compuse, derivata funcției inverse, teorema lui Darboux.

PROPOZIȚIA 7.1.1 (**Derivata funcției compuse pentru funcții reale de variabilă reală**) Fie $u: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$, I, J - intervale de numere reale. Dacă funcția u este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi f este derivabilă în punctul $u(x_0) \in J$, atunci funcția $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(u(x))$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc relația: $F'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$.

Demonstrație. Ştiind că funcțiile u şi f sunt derivabile în punctul x_0, respectiv $u_0 = u(x_0)$, conform definiției derivatei unei funcții reale de variabilă reală au loc relațiile:

$$u'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \text{ şi } \lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = f'(u_0).$$

Pentru a arăta că funcția $F(x)$ este derivabilă în punctul x_0 trebuie arătat că există şi că este finită $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$. Într-adevăr,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Trecând la limite şi ținând de relațiile anterioare, rezultă că există şi este finită:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$$

(limitele din membrul drept există şi sunt finite din ipoteză)
Aşadar, $F'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$.

OBSERVAȚIA 7.1.1 Dacă funcția u este derivabilă în orice punct $x \in I$ şi funcția f este derivabilă în orice punct $u(x) \in J$, atunci funcția $F(x)$ este derivabilă pe intervalul I şi are loc egalitatea: $F'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Aceasta reprezintă formula de derivare a funcțiilor compuse reale de variabilă reală.

PROPOZIȚIA 7.1.2 (**Derivata funcției inverse pentru funcții reale de variabilă reală**). Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, I, J - intervale. Dacă funcția f este bijectivă pe intervalul I şi derivabilă în punctul $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) \neq 0$, atunci există $f^{-1} : J \to I$ derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ şi are loc egalitatea $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Demonstrație. Funcția f este bijectivă $\Leftrightarrow$ f este inversabilă. Deci, există $f^{-1} : J \to I$. Cum f este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci f este continuă în acest punct. Adică, pentru orice $y_n \to y_0$, există $x_n \to x_0$ astfel încât $y_n = f(x_n)$. Deci, $x_n = f^{-1}(y_n)$. Ținând cont de acestea, rezultă că există şi este finită $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0}$. Deci, $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

OBSERVAȚIA 7.1.2 Dacă funcția f este derivabilă în orice punct $x \in I$, rezultă că funcția f^{-1} derivabilă în orice punct $y = f(x) \in J$ şi are loc egalitatea $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ care reprezintă formula de derivare a funcției inverse.

PROPOZIȚIA 7.1.3 (**Teorema lui Darboux**) Dacă funcția $f(x)$ este funcție derivată, atunci funcția f are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. Funcția f este funcție derivată dacă există o funcție derivabilă $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g'(x) = f(x)$. Pentru a demonstra că funcția f are proprietatea lui Darboux trebuie arătat că oricare ar fi $a \in (f(a), f(b))$, există $c_a \in (a,b)$ astfel încât $f(c_a) = a$. Deci, după cum se observă, fără a micşora generalitatea, se consideră că dacă $a < b$, $a,b \in I$ şi $f(a) < f(b)$. Se consideră funcția $h(x) = g(x) - a \cdot x$. Pentru că funcția g este o funcție derivabilă pe I, rezultă că $h(x)$ este derivabilă pe I, deci şi pe intervalul $[a,b]$ şi are loc egalitatea $h'(x) = g'(x) - a$. Rezultă că $h'(x) = f(x) - a$. Cum h este derivabilă pe intervalul $[a,b]$, înseamnă că funcția h este continuă. Deci, dacă se consideră $[a,b]$ ca fiind domeniul de definiție al acestei funcții, rezultă că funcția h este o funcție mărginită şi îşi atinge marginile. Se observă că $h'(a)<0$ şi $h'(b)>0$. Într-adevăr, $h'(a)=f(a)-a<0$ şi $h'(b)=f(b)-a>0$. Cum funcția este şi o funcție continuă, rezultă că aceste două proprietăți sunt valabile pe o vecinătate întreagă a punctului a, respectiv b. Deci, se poate afirma că există $V\in\mathcal{V}(a)$ şi $W\in\mathcal{V}(b)$ astfel încât $\frac{h(x)-h(a)}{x-a}<0$, pentru orice $x\in V\cap[a,b]$ şi $\frac{h(x)-h(b)}{x-b}>0$, oricare ar fi $x\in W\cap[a,b]$. Dar,

$$\begin{cases} x-a>0 \Rightarrow h(x)-h(a)<0, & (\forall)x\in J\cap[a,b], \\ x-b<0 \Rightarrow h(x)-h(b)<0, & (\forall)x\in W\cap[a,b]. \end{cases}$$

Rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât $h(c)=m_h$ (valoarea minimă a funcției h). Conform teoremei lui Fermat, rezultă că $h'(c)=0$. Dar, $h'(c)=f(c)-a$. Deci, $f(c)=a$. Dacă se consideră $c_a=c,$ atunci proprietatea este demonstrată.

OBSERVAȚIA 7.1.3
a) O funcție derivată nu are puncte de discontinuitate de speța I.
b) Funcțiile care nu au proprietatea lui Darboux nu sunt funcții derivate.

O altă categorie de funcții pentru care se studiază noțiunea de derivată sunt funcțiile vectoriale de variabilă reală.

PROPOZIȚIA 7.1.4
Fie $F: X\subset \mathbb{R}\to Y\subset\mathbb{R}^n$; $F(x)=\left(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)\right)$ o funcție vectorială de variabilă reală. Funcția $F(x)$ este derivabilă în punctul $x_0\in X$ dacă şi numai dacă $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ sunt derivabile în x_0 şi are loc relația:

$$F'(x_0)=\left(f_1'(x_0),f_2'(x_0),...,f_n'(x_0)\right).$$

Demonstrație. Se presupune că funcția $F(x)$ este derivabilă în x_0 şi se demonstrează că $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ sunt derivabile în x_0. Într-adevăr, din derivabilitatea lui $F(x)$ în punctul x_0 rezultă că există şi este finită $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$. Dar,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\left(\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0},\frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0},\ldots,\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Ținând cont de egalitatea anterioară şi de limita funcțiilor vectoriale de variabilă reală rezultă că fiecare raport $\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0}$ are limită finită în punctul x_0. Deci, funcțiile $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ sunt derivabile în punctul x_0. Din egalitatea evidentă

$$\lim_{x \to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\left(\lim_{x \to x_0}\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0},\lim_{x \to x_0}\frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0},\ldots,\lim_{x \to x_0}\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right),$$

rezultă $F'(x_0)=\left(f_1'(x_0), f_2'(x_0),\ldots, f_n'(x_0)\right)$.

Afirmația reciprocă se demonstrează în mod asemănător.

OBSERVAȚIA 7.1.4 Dacă funcția $F(x)$ este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiție $X \subset ¡$, atunci prin înlocuirea lui x_0 cu x are loc egalitatea:

$$F'(x)=\left(f_1'(x), f_2'(x),\ldots, f_n'(x)\right).$$

Aceasta reprezintă formula de derivare a funcțiilor vectoriale de variabilă reală.

Exemplu. Fie $F(x)=\left(f_1(x), f_2(x)\right)$, $f_1(x)=\frac{1}{x-a}$, $f_2(x)=\ln(x-a)$. Să se cerceteze dacă funcția $F(x)$ este derivabilă pe domeniul maxim de definiție şi să se găsească derivata acesteia.

Soluție. Se observă că $D_F=(a,+\infty)$. Cum funcțiile f_1 şi f_2 sunt funcții elementare definite pe $(a,+\infty)$ şi cum orice funcție elementară este derivabilă pe domeniul său de definiție, rezultă f_1 şi f_2 sunt derivabile simultan, pentru orice $x\in(a,+\infty)$. Conform Propoziției 7.1.4, rezultă $F(x)$ este derivabilă, oricare ar fi $x\in(a,+\infty)$ şi are loc egalitatea:

$$F'(x)=\left(f_1'(x),\, f_2'(x)\right)=\left(\frac{-1}{(x-a)^2},\frac{1}{x-a}\right).$$

DEFINIȚIA 7.1.1 Funcția $F(x)=\left(f_1(x),\, f_2(x),...,\, f_n(x)\right)$ este derivabilă de două ori în punctul x_0 din domeniul său de definiție dacă funcția $H(x)=\left(f_1'(x),\, f_2'(x),...,\, f_n'(x)\right)=F'(x)$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc relația $F''(x)=\left(f_1''(x),\, f_2''(x),...,\, f_n''(x)\right)=H'(x)$.

OBSERVAȚIA 7.1.5

a) Ținând cont de Definiția 7.1.1 şi continuând raționamentul din aproape în aproape, se spune că funcția $F(x)$ este derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D_F$, dacă funcția $G(x)=\left(f_1^{(n-1)}(x),\, f_2^{(n-1)}(x),...,\, f_n^{(n-1)}(x)\right)$ este derivabilă în x_0.

b) Dacă se înlocuieşte x_0 cu x, adică funcția este derivabilă pe întregul său domeniu de definiție, atunci se obține egalitatea:

$$F^{(n)}(x)=\left(f_1^{(n)}(x),\, f_2^{(n)}(x),...,\, f_n^{(n)}(x)\right).$$

Această formulă reprezintă formula de calcul a derivatei de ordinul n pentru o funcție vectorială de variabilă reală.

c) Funcția $F(x)$ este derivabilă de n ori pe domeniul de definiție, dacă proiecțiile sale $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ sunt derivabile de n ori pe acest domeniu.

Exemplu. Dacă se consideră funcția din exemplul anterior, atunci

$$F^{(n)}(x)=\left(f_1^{(n)}(x),\, f_2^{(n)}(x)\right),\ F^{(n)}(x)=\left(\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-a)^{n+1}},\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x-a)^n}\right).$$

Un alt tip de funcții pentru care se studiază derivabilitatea şi derivata sunt funcțiile reale de variabilă vectorială $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 7.1.2 Fie $\overline{a},\overline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{a} \neq \overline{b}$.

a) mulțimea $\left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \overline{x}=\overline{a}+t\left(\overline{b}-\overline{a}\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ se numeşte dreapta ce trece prin $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

b) mulțimea $\left\{\overline{x}\in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \overline{x}=\overline{a}+t\left(\overline{b}-\overline{a}\right),\ t\geq 0\right\}$ este semidreapta ce pornește din $\overline{a}$ și trece prin $\overline{b}$.

c) mulțimea $\left\{\overline{x}\in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \overline{x}=\overline{a}+t\left(\overline{b}-\overline{a}\right),\ t\in[0,1]\right\}$ este segmentul de dreaptă de capete $\overline{a}$, $\overline{b}$ și se notează $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$.

d) Orice semidreaptă ce pornește din $O\in \mathbb{R}^n$ se numește direcție în $\mathbb{R}^n$.

OBSERVAȚIA 7.1.6

a) Dacă se consideră semidreapta $\left\{\overline{x}\in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \overline{x}=\overline{a}+t\left(\overline{b}-\overline{a}\right),\ t\geq 0\right\}$, atunci direcția determinată de această semidreaptă este $\overline{s}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\left\|\overline{b}-\overline{a}\right\|}$.

b) Fie $f:A\subset \mathbb{R}^n\to \mathbb{R}$ și $\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\in A$ fixat, iar $\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in A$ punct curent și $\overline{s}=\left(s_1,s_2,...,s_n\right)\in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\left\|\overline{s}\right\|=1$. Cu aceste notații este bine definită funcția $g:(-r,r)\to \mathbb{R}$, $g(t)=f(a+ts)$, $r>0$ astfel încât $S\left(\overline{a},r\right)\subset A$.

DEFINIȚIA 7.1.3 Funcția $f:A\subset \mathbb{R}^n\to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $\overline{a}\in A$ după direcția $\overline{s}$, dacă funcția g este derivabilă în $t=0$ și are loc egalitatea

$$\frac{df\left(\overline{a}\right)}{d\overline{s}}=g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t},$$

iar $\dfrac{df\left(\overline{a}\right)}{d\overline{s}}\overset{not.}{=}f'\left(\overline{a},\overline{s}\right)$ este derivata lui f după direcția $\overline{s}$ în punctul $\overline{a}\in \mathbb{R}^n$.

OBSERVAȚIA 7.1.7 Dacă în locul lui $\overline{s}$ se consideră versorii $\overline{e}_1=(1,0,0,...,0)$, $\overline{e}_2=(0,1,0,...,0)$, ..., $\overline{e}_n=(0,0,...,0,1)$, atunci din derivata lui f după direcția $\overline{s}$ se obțin derivatele parțiale, în raport cu variabilele $x_1,x_2,...,x_n$. În mod explicit acestea se definesc după cum urmează.

DEFINIȚIA 7.1.4 Fie $f:X\subset \mathbb{R}^n\to Y\subset \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă vectorială definită prin $f=f\left(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n\right)$. Funcția este derivabilă în punctul $\overline{x}_0 = \left(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0k-1}, x_{0k}, x_{0k+1}, ..., x_{0n}\right)$ în raport cu variabila x_k dacă există şi este finită:

$$\lim_{x_k \to x_{0k}} \frac{f\left(\overline{x}_0^k - \overline{x}_0\right)}{x_k - x_{0k}} =$$

$$= \lim_{x_k \to x_{0k}} \frac{f\left(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0k-1}, x_k, x_{0k+1}, ..., x_{0n}\right) - f\left(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0k-1}, x_{0k}, x_{0k+1}, ..., x_{0n}\right)}{x_k - x_{0k}},$$

unde $x_0^k = \left(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0k-1}, x_k, x_{0k+1}, ..., x_{0n}\right)$.

Limita de mai sus, în cazul în care există şi este finită, se notează astfel cu $\frac{\partial f\left(\overline{x}_0\right)}{\partial x_k}$ sau $f'_{x_k}\left(\overline{x}_0\right)$ şi poartă denumirea de **derivata parțială a funcției** f **în raport cu** x_k **calculată în punctul** $\overline{x}_0$.

OBSERVAȚIA 7.1.8

a) Dacă funcția este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k pe întreg domeniul său de definiție, atunci se obține, prin înlocuirea lui $\overline{x}_0$ cu $\overline{x}$, funcția $\frac{\partial f\left(\overline{x}\right)}{\partial x_k}$ sau $f'_{x_k}\left(\overline{x}\right)$ care poartă denumirea de **derivata parțială a funcției** f **în raport cu variabila** x_k.

b) În cazul în care funcția are două sau trei variabile nu se mai notează acestea cu $\left(x_1, x_2\right)$ sau $\left(x_1, x_2, x_3\right)$. În acest caz, notațiile sunt $\left(x, y\right)$ sau $\left(x, y, z\right)$ şi atunci Definiția 7.1.4 are următoarele forme particulare:

i) Dacă $f = f\left(x, y\right)$, atunci se spune că funcția f este derivabilă în punctul $\left(x_0, y_0\right)$ în raport cu variabila x, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\left(x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{x - x_0}$ există şi este finită, iar această limită se notează cu $\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}$ sau $f'_x\left(x_0, y_0\right)$.

ii) În mod asemănător, $f\left(x, y\right)$ este derivabilă în raport cu y dacă $\lim\limits_{x \to y_0} \frac{f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{y - y_0}$ există şi este finită, iar această limită se notează cu $\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}$ sau $f'_y\left(x_0, y_0\right)$.

c) Ținând cont de definiția derivatei unei funcții reale de variabilă reală şi de Definiția 7.1.4, se poate afirma că pentru a determina derivatele parțiale ale unei funcții reale de variabilă vectorială se folosesc formulele şi regulile de derivare de la funcții reale de variabilă reală, considerând ca variabilă doar variabila specificată în procesul de derivare, iar celelalte variabile se consideră constante.

d) Funcția derivabilă $F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x}) \right)$ este derivabilă parțial în $\overline{x}_0 \in X$ dacă fiecare proiecție $f_1, f_2, \ldots, f_m$ este derivabilă parțial în $\overline{x}_0$, în raport cu toate variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Matricea cu m linii şi n coloane:

$$J_F(\overline{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\overline{x}_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(\overline{x}_0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\overline{x}_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2(\overline{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\overline{x}_0)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(\overline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea jacobiană** a lui F în $\overline{x}_0$. Dacă $m = n$, atunci $\det J_F(\overline{x}_0) = \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\overline{x}_0)$ se numeşte **jacobianul** funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Exemplu. Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^3 + 2\right)$. Să se calculeze: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Soluție. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^3 + 2\right) \right)'_x = \frac{\left(x^2 + y^3 + 2\right)'_x}{x^2 + y^3 + 2} = \frac{2x}{x^2 + y^3 + 2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^3 + 2\right) \right)'_y = \frac{\left(x^2 + y^3 + 2\right)'_y}{x^2 + y^3 + 2} = \frac{3y^2}{x^2 + y^3 + 2}.$$

Exemplu.

Fie $F : [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(r, \varphi, z) = \left(f_1(r, \varphi, z), f_2(r, \varphi, z), f_3(r, \varphi, z) \right)$,

$f_1(r,\varphi,z)=r\cos\varphi$, $f_2(r,\varphi,z)=r\sin\varphi$, $f_3(r,\varphi,z)=z$. Să se scrie matricea jacobiană şi jacobianul funcțiilor f_1, f_2, f_3.

Soluție. Avem:

$$J_F(r,\varphi,z)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

iar:

$$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(r,\varphi,z)}=r^2$$

şi reprezintă legătura dintre coordonatele polare şi cele carteziene în spațiu.

DEFINIȚIA 7.1.5 Funcția $f:X\subset\mathbb{R}^n\to Y\subset\mathbb{R}$ este derivabilă parțial de două ori în raport cu variabila x_k dacă funcția $h(x_1,x_2,...x_n)=\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_k}$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k şi se obține relația:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}=\frac{\partial h(\overline{x})}{\partial x_k},\ \overline{x}=(x_1,x_2,...x_n).$$

Din aproape în aproape, se spune că funcția $f=f(\overline{x})$ este derivabilă de n ori în raport cu variabila x_k dacă funcția $g(\overline{x})=\dfrac{\partial^{n-1}f(\overline{x})}{\partial x_k^{n-1}}$ este derivabilă în raport cu variabila x_k şi se obține egalitatea:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_k^n}=\frac{\partial g(\overline{x})}{\partial x_k}=f_{x_k^n}^{(n)}(\overline{x}).$$

DEFINIȚIA 7.1.6 Se spune că funcția $f=f(\overline{x})$ este derivabilă în raport cu variabila x_k şi x_l (în această ordine) dacă funcția $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_k}=h(\overline{x})$ este derivabilă în raport cu variabila x_l şi se obține relația:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}=\frac{\partial h(\overline{x})}{\partial x_l},$$

care poartă denumirea de **derivată mixtă de ordinul al doilea al funcției** f în raport cu x_k şi x_l. Aceasta se mai notează şi cu $f''_{x_k x_l}(\overline{x})$.

OBSERVAȚIA 7.1.9 Numărul derivatelor mixte de ordinul k pentru funcția $f = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ este C_{n+k-1}^{k}. Deci, pentru funcția de trei variabile $f = f\left(x, y, z\right)$ numărul derivatelor mixte de ordinul al doilea este $C_4^2 = 6$. În general, derivatele parțiale mixte nu sunt egale, conform cu exemplul următor.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \left(x, y\right) \neq \left(0,0\right) \\ 0, & \left(x, y\right) = \left(0,0\right). \end{cases}$$

Să se calculeze derivatele mixte ale funcției în origine.
Soluție. Utilizând definiția, obținem:

$$\frac{\partial f\left(x,0\right)}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f\left(0,y\right)}{\partial y} = 0.$$

Deci,

$$\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(0,0\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f\left(x,0\right)}{\partial y} - \dfrac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

iar analog, se obține:

$$\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial y \partial x} = 0.$$

Aşadar, în origine, derivatele parțiale mixte nu sunt egale.

Dar, în anumite situații, derivatele mixte pot fi egale. Acest lucru este dat de următoarea teoremă.

PROPOZIȚIA 7.1.5 (**Teorema lui Schwarz**) Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, X un deschis din $\mathbb{R}^2$. Dacă $f \in C^2\left(X\right)$, atunci $f''_{xy}\left(x, y\right) = f''_{yx}\left(x, y\right)$, $\forall \left(x, y\right) \in X$.

Demonstrație. Se consideră expresia:

$$E = f\left(x+h, y+k\right) - f\left(x+h, y\right) - f\left(x, y+k\right) + f\left(x, y\right).$$

Se notează $j\left(x\right) = f\left(x, y+k\right) - f\left(x, y\right)$. În urma acestei notații, expresia E capătă forma:

$$E = j\left(x+h\right) - j\left(x\right).$$

Se observă că funcția j este continuă şi derivabilă şi are loc egalitatea:

$$j'(x) = f_x'(x, y+k) - f_x'(x, y). \tag{1}$$

Se aplică formula lui Lagrange expresiei E şi se obține:

$$E = h \cdot j'(x),\ x \in [x, x+h]. \tag{2}$$

Ținând cont de relațiile (1) şi (2), rezultă:

$$E = h\left[f_x'(x, y+k) - f_x'(x, y)\right]. \tag{3}$$

Prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției f_x', obținem:

$$f_x'(x, y+k) - f_x'(x, y) = k \cdot f_{xy}''(x, h),\ h \in [y, y+k]. \tag{4}$$

Ținând cont de relațiile (3) şi (4), rezultă:

$$E = h \cdot k \cdot f_{xy}''(x, h). \tag{5}$$

Revenind la funcția j, se poate observa că:

$$\lim_{k \to 0} \frac{j(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{y+k-y} = f_y'(x, y). \tag{6}$$

Ținând cont de expresia lui E în raport de funcția j, rezultă:

$$\lim_{k \to 0} \frac{E}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{k} = f_y'(x+h, y) - f_y'(x, y). \tag{7}$$

Din continuitatea lui $f_{xy}''(x, y)$ şi relația (5), rezultă că:

$$\lim_{k \to 0} \frac{E}{k} = \lim_{k \to 0} h \cdot f_{xy}''(x, h) = h \cdot f_{xy}''(x, y). \tag{8}$$

Din (7) şi (8), rezultă:

$$h \cdot f_{xy}''(x, y) = f_y'(x+h, y) - f_y'(x, y),$$

deci,

$$f_{xy}''(x, y) = \frac{f_y'(x+h, y) - f_y'(x, y)}{h}.$$

Prin trecere la limită când $h \to 0$ şi ținând cont de continuitatea lui $f_{xy}''(x, y)$, se obține $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$
şi astfel teorema este demonstrată.

Alte forme ale teoremei sunt:

A) Dacă: i) există f_x', f_y' şi f_{xy}'' pe $V_{(a,b)}$ ii) f_{xy}'' este continuă în (a, b), atunci există $f_{yx}''(a, b)$ şi $f_{xy}''(a, b) = f_{yx}''(a, b)$.

B) **Criteriul lui Young**

Dacă: i) există $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ într-o vecinătate $V_{(a,b)}$ a lui (a, b),

ii) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ sunt diferenţiabile în (a,b),

atunci există $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}$ şi avem $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}$.

(Diferenţiabilitatea se studiază în paragraful următor)

OBSERVAŢIA 7.1.10

Teorema (criteriul) lui Schwarz este valabilă şi pentru funcţiile de trei sau mai multe variabile şi are următorul enunţ.

Fie $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(X)$, X un deschis din $\mathbb{R}^n$. Atunci, pentru orice $\overline{x} \in X$ şi pentru orice indici $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le n$, are loc egalitatea:

$$f''_{x_i x_j}(\overline{x}) = f''_{x_j x_i}(\overline{x}).$$

Problema derivatelor parţiale se pune şi pentru funcţiile compuse de mai multe variabile. Această problemă este rezolvată de următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 7.1.6 Fie $u : X \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ şi $v : X \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, funcţii derivabile în punctul $x_0 \in X$ cu derivata continuă. Dacă funcţia $f : Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Y = A \times B$, are derivate parţiale continue pe mulţimea Y, atunci funcţia compusă $F(x) = f\left[u(x), v(x)\right]$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea:

$$F'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du(x_0)}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv(x_0)}{dx}.$$

Demonstraţie. Pentru a arăta că funcţia $F(x)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ trebuie arătat că raportul $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ are limită finită în punctul x_0. Se notează:

$$u_0 = u(x_0),\ v_0 = v(x_0),\ u = u(x),\ v = v(x).$$

Atunci:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(u(x), v(x)) - f(u_0, v(x)) + f(u_0, v(x)) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} =$$

$$=\frac{\left[f\left(u(x),v(x)\right)-f\left(u_0,v(x)\right)\right]+\left[f\left(u_0,v(x)\right)-f\left(u_0,v_0\right)\right]}{x-x_0}.$$

Ținând cont de teorema lui Lagrange, se obține:

$$f(u,v)-f(u_0,v)=(u-u_0)\cdot f'_u\ (x,v)\text{, unde } u_0\le x\le u$$

şi

$$f(u_0,v)-f(u_0,v_0)=(v-v_0)\cdot f'_v\ (u_0,h)\text{, unde } v_0\le h\le v.$$

Deci,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{u-u_0}{x-x_0}\cdot f'_u\ (x,v)+\frac{v-v_0}{x-x_0}\cdot f'_v\ (u_0,h). \tag{1}$$

În egalitatea (1), datorită faptului că funcțiile u şi v sunt derivabile în punctul x_0 şi datorită continuităţii derivatelor parţiale pentru funcţia f rezultă că membrul drept al egalităţii are limită finită în punctul x_0. Deci şi membrul stâng al egalităţii (1) are limită finită în punctul x_0, ceea ce arată că funcţia $F(x)$ este derivabilă în x_0 şi are loc egalitatea:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u-u_0}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}f'_n\ (z\ ,v)+\lim_{x\to x_0}\frac{v-v_0}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}f'_n\ (u_0,h).$$

Rezultă că:

$$F'(x_0)=u'(x_0)\cdot f'_u(u_0,v_0)+v'(x_0)\cdot f'_v\ (u_0,v_0)$$

sau

$$F'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du(x_0)}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{dv(x_0)}{dx}.$$

Dacă se consideră că funcțiile u şi v sunt derivabile pe întreg domeniul lor de definiție, iar funcția f admite derivate parțiale continue în orice punct al domeniului de definiție, atunci rezultă că $F(x)$ este derivabilă pe întreg domeniul de definiție şi are loc egalitatea:

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du(x)}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv(x)}{dx},$$

relație care reprezintă **formula de derivare a unei funcții compuse** care conține doi intermediari care sunt funcții reale de variabilă reală.

OBSERVAȚIA 7.1.9

a) Propoziția 7.1.6 este adevărată şi în cazul în care $f:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ şi conține n intermediari, adică: dacă funcția compusă are forma

$F(x) = f\left(u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)\right)$, unde $u_i : A \subset \mathbb{R} \to B_i \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ şi $X = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$, atunci:

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i(x)}{dx}.$$

b) Propoziția 7.1.6 se poate generaliza şi astfel: Fie funcția compusă $F : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(u_1(x_1, x_2, ..., x_n), u_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., u_m(x_1, x_2, ..., x_n)\right),$$

unde funcțiile $u_i : A \subset \mathbb{R}^n \to B_i \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$ sunt derivabile în raport cu x_k, pentru orice $i = \overline{1,m}$ şi funcția f admite derivate parțiale continue în raport cu fiecare din variabilele sale u_i, pentru orice $i = \overline{1,m}$. Atunci F este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k şi are loc egalitatea:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{x_k}$$

numită formula pentru **derivata parțială a funcției compuse F care are m intermediari**, care sunt funcții de n variabile.

Exemplu. Fie $F : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f\left(\ln\left(x^2 + 2x + 1\right), \sin\left(x^2 + 1\right)\right)$ şi $G : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x, y) = g\left(\cos\left(x^2 + y^2\right), \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Să se calculeze $F'(x)$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$.

Soluție. Calculăm $F'(x)$. Dacă se consideră $u_1(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 1\right)$, $u_2(x) = \sin\left(x^2 + 1\right)$, atunci avem că $F(x) = f\left(u_1(x), u_2(x)\right)$. Ținând cont de Propoziția 7.1.6, rezultă că:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx}.$$

Dar,

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{2x + 2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}, \quad \frac{du_2}{dx} = 2x\cos\left(x^2 + 1\right).$$

Deci,

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{2}{x+1} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot 2x\cos\left(x^2 + 1\right),$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial u_2}$ rămân sub această formă deoarece funcția f este derivabilă, dar necunoscută.

Dacă $f(u_1,u_2)$ era înlocuită spre exemplu cu $f(u_1,u_2)=\sqrt{u_1+u_2}$, atunci $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{u_1+u_2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{u_1+u_2}}$.

Pentru calculul derivatelor $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ considerăm $u_1(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$, $u_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Avem $G(x,y)=g\left(u_1(x,y),u_2(x,y)\right)$. Ținând cont de Observația 7.1.9 b), rezultă:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} \text{ şi } \frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Dar,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=-2x\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=-2y\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial u_2}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ținând cont de acestea, rezultă că:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{\partial g}{\partial u_1}\cdot 2x\sin\left(x^2+y^2\right)+\frac{\partial g}{\partial u_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Analog pentru $\dfrac{\partial G}{\partial y}$.

PROPOZIȚIA 7.1.7 (**Teorema lui Euler pentru funcții omogene**) Fie $f : X\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă vectorială. Dacă:

i) f este omogenă de ordin $m\in\mathbb{R}$,

ii) există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$,

atunci are loc egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}=m\cdot f\left(x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Demonstrație. Dacă funcția f este omogenă de ordin m are loc egalitatea:

$$f\left(tx_1,tx_2,...,tx_n\right)=t^m f\left(x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Dacă membrul stâng se consideră ca fiind funcția compusă:

$$F(t) = f(u_1, u_2, ..., u_n),\ u_1 = tx_1,\ u_2 = tx_2,\ ...,\ u_n = tx_n,$$

atunci, conform cu Observația 7.1.9 a), rezultă că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial(tx_i)} \cdot x_i = F'(t).$$

Dacă se derivează şi membrul drept în raport cu t se obține:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial(tx_i)} \cdot x_i = m \cdot t^{m-1} \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

egalitate adevărată pentru orice t număr real.

Dacă se particularizează $t = 1$ în această egalitate rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = m \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

care este **relația lui Euler pentru funcții omogene de ordin** m. Această relație se poate generaliza la derivatele parțiale de ordinul al doilea (vezi Exercițiul 7.4.5).

Se cunoaşte că pentru funcțiile reale de variabilă reală există **teorema lui Lagrange**. Această teoremă a lui Lagrange este valabilă şi pentru funcțiile reale de variabilă vectorială şi ea se prezintă sub următoarea formă.

PROPOZIȚIA 7.1.8 (**Teorema lui Lagrange**) Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in X$. Dacă funcția $f = f(x, y)$ admite derivate parțiale pe o vecinătate $V \in V_{(a,b)}$, atunci pentru orice $(x, y) \in V$ există $x \in (a, x)$ şi $h \in (b, y)$ astfel încât:

$$f(x, y) - f(a,b) = (x-a) \cdot f'_x\ (x, y) + (y-b) \cdot f'_y\ (a,h).$$

OBSERVAȚIA 7.1.10 Dacă derivatele parțiale sunt continue pe V, atunci egalitatea din **teorema lui Lagrange** are următoarea formă:

$$f(x, y) - f(a,b) = (x-a) \cdot f'_x\ (x,h) + (y-b) \cdot f'_y\ (x,h).$$

Această egalitate este valabilă şi pentru funcții de n variabile, unde $n \geq 3$:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i},\ x_i \in (a_i, x_i),$$

$i = \overline{1,n}$.

2. DIFERENȚIALA

DEFINIȚIA 7.2.1 Fie $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală. Funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in X$ dacă există $L \subset \mathbb{R}$ și $q : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = 0$ astfel încât $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + q(x)(x - x_0)$.

OBSERVAȚIA 7.2.1

a) Dacă egalitatea din Definiția 7.2.1 se împarte cu $(x - x_0)$ și se trece la limită, atunci se obține $L = f'(x_0)$.

Așadar, $f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + q(x)(x - x_0)$.

b) Dacă se notează $x - x_0 = h$, atunci $f(x) - f(x_0) \cong h \cdot f'(x_0)$. Funcția $h \cdot f'(x_0)$, care depinde liniar de h, se numește **diferențiala funcției f în punctul** x_0 și se notează cu $df(x_0)$ și are loc egalitatea $df(x_0) = h \cdot f'(x_0)$. Pe o vecinătate foarte mică a punctului x_0, diferența $x - x_0 = h$ este foarte mică și deci ea poate fi notată cu dx. Atunci, diferențiala funcției f în punctul x_0 capătă următoarea formă:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx.$$

Dacă funcția f este diferențiabilă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci diferențiala sa este: $df(x) = f'(x)\,dx$.

Se observă că diferențiabilitatea și diferențiala nu sunt noțiuni echivalente. O funcție diferențiabilă are o diferențială. Diferențiabilitatea este o proprietate, diferențiala este o expresie. Diferențiala $df(x_0)$ aproximează diferența $f(x) - f(x_0)$.

DEFINIȚIA 7.2.2 Se spune că funcția f este diferențiabilă de n ori în punctul x_0 dacă funcția $f^{(n-1)}(x)$ este diferențiabilă în punctul x_0 și diferențiala de ordin n este $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n$.

Problema diferențiabilității poate fi pusă și pentru funcțiile reale de variabilă vectorială și se definește astfel.

DEFINIȚIA 7.2.3 Fie $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se spune că $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este diferențiabilă în punctul $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, dacă există $A_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ și $q_i : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ cu proprietatea $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} q_i(\overline{x}) = 0$, $i = \overline{1,n}$ astfel încât:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i}) \cdot A_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})\, q_i(\overline{x}).$$

Dacă funcția f are 2 sau 3 variabile, atunci egalitatea care defineşte diferențiabilitatea are una din formele:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)A_1 + (y-y_0)A_2 + (x-x_0)q_1(x,y) + (y-y_0)q_2(x,y)$$
$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + (x-x_0)A_1 + (y-y_0)A_2 + (z-z_0)A_3 + (x-x_0)q_1(x,y,z) +$$
$$+ (y-y_0)q_2(x,y,z) + (z-z_0)q_3(x,y,z).$$

OBSERVAȚIA 7.2.2 În Definiția 7.2.3 expresia $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})\, q_i(\overline{x})$ se poate înlocui cu $q_i(\overline{x}) \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2}$, unde $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} q(\overline{x}) = 0$.

În cele ce urmează se pune problema legăturii ce există între diferențiabilitate şi derivabilitate.

PROPOZIȚIA 7.2.1 Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in X$. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a,b), atunci f este continuă în (a,b) şi derivabilă în (a,b) în raport cu variabilele sale.

Demonstrație. Funcția f fiind diferențiabilă şi ținând cont de definiția diferențiabilității funcțiilor de două variabile, se poate afirma că există $A, B \in \mathbb{R}$ şi $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$, cu proprietatea $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} q_i(x,y) = 0$, $i = \overline{1,2}$, astfel încât:

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + q_1(x,y)(x-a) + q_2(x,y)(y-b). \quad (*)$$

Trecând la limită în egalitatea (*), se obține $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$, ceea ce arată că $f(x,y)$ este continuă în (a,b). În egalitatea (*) se pune $y = b$ şi se obține:

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=A+q_1(x,y). \qquad (**)$$

Trecând la limită în (**), se obține:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=A.$$

Deci, $f(x,y)$ este derivabilă în (a,b) în raport cu x. Raționând analog se obține că $f(x,y)$ este derivabilă în (a,b) în raport cu y, $A=f'_x(a,b)$, $B=f'_y(a,b)$.

OBSERVAȚIA 7.2.3 Propoziția 7.2.1 este adevărată şi pentru funcții de trei sau mai multe variabile.

PROPOZIȚIA 7.2.2 **1** Fie $f:X\subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Dacă funcția f admite derivabile parțiale de ordinul întâi continue pe o vecinătate V a punctului $(a,b)\in X$, atunci această funcție este diferențiabilă în punctul (a,b).

Demonstrație. Ținând cont că funcția f admite derivate parțiale continue pe o vecinătate V a punctului (a,b), acesteia i se poate aplica teorema lui Lagrange pentru funcții de două variabile şi se obține:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\,f'_x\,(x,y)+(y-b)\,f'_y\,(a,h).$$

Această egalitate se poate scrie sub forma:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\,f'_x\,(a,b)+(y-b)\,f'_y\,(a,b)+\left[f'_x\,(x,y)-f'_x\,(a,b)\right](x-a)+$$
$$+\left[f'_y\,(a,h)-f'_y\,(a,b)\right](y-b).$$

Dacă se notează:

$$f'_x\,(x,y)-f'_x\,(a,b)=q_1(x,y),\ f'_y\,(a,h)-f'_y\,(a,b)=q_2(x,y)$$

şi ținând cont de continuitatea derivatelor parțiale, rezultă:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} q_i(x,y)=0,\ i=\overline{1,2}.$$

În aceste condiții va avea loc egalitatea:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)A+(y-b)B+(x-a)q_1(x,y)+(y-b)q_2(x,y),$$

unde $A=f'_x\,(a,b)$, $B=f'_y\,(a,b)$. Această egalitate exprimă faptul că funcția f este diferențiabilă în punctul (a,b).

OBSERVAȚIA 7.2.4 Propoziția 7.2.2 are o importanță deosebită în studiul diferențiabilității funcțiilor de două variabile (ea se poate generaliza şi la funcții de trei sau mai multe variabile) deoarece reduce studiul diferențiabilității la existența şi continuitatea derivatelor parțiale.

DEFINIȚIA 7.2.4 Funcția liniară în x şi y, $(x-a)\cdot f'_x\ (a,b)+(y-b)\,f'_y\ (a,b)$ se numeşte **diferențiala de ordinul întâi** a funcției $f(x,y)$ în (a,b) şi se notează $df(a,b)$. Diferențiala pe o întreaga vecinătate a lui (a,b) este:

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Aceasta se poate generaliza la funcțiile de n variabile şi se obține $df(\overline{x})=\sum_{i=n}^{n}\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}dx_i$.

Operatorul $d\cdot=\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\cdot}{\partial y}dy$ se numeşte **operatorul de diferențiere de ordinul întâi** pentru funcția $f(x,y)$. Pentru funcțiile de n variabile, acest operator are forma $d\cdot=\sum_{i=n}^{n}\frac{\partial\,\cdot}{\partial x_i}dx_i$. Dacă operatorul de diferențiere se aplică în mod repetat unei funcții de două sau mai multe variabile se obține diferențiala de ordin superior a acesteia.

Pentru funcțiile de două variabile, diferențiala de ordinul n are următoarea formă:

$$d^n f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}C_n^i\,\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\,dx^i dy^{n-i}$$

sau, scrisă ținând cont de modul recursiv în care se defineşte diferențiala de ordinul n, aceasta poate fi pusă sub următoarea formă:

$$d^n f(x,y)=\left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\cdot}{\partial y}dx\right)^{(n)}f(x,y),$$

unde se ridică formal la putere după formula binomului lui Newton, ridicând efectiv la puteri lungimile dx, dy, iar operatorilor $\frac{\partial\,\cdot}{\partial x},\frac{\partial\,\cdot}{\partial y}$ li se măreşte ordinul de derivare specificat după formula binomului.

Pentru funcțiile $f:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $n\geq 3$, nu există o formulă pentru diferențiala de ordinul n a lui f, deoarece nu se cunoaşte formula pentru $(A_1+A_2+...+A_n)^n$. În acest caz, diferențialele de ordinul n se obțin după procedeul recursiv de definire a diferențialei de ordin n.

Se consideră cel mai simplu caz care nu se încadrează în formula anterioară, adică se calculează $d^3 f\left(x,y,z\right)$.

$$d^3 f = d^2 f \circ df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy\right)\circ$$

$$\circ\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}dy^2 dx + \ldots .$$

Deoarece se cunoaşte formula:

$$\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right)^2 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} A_i A_j ,$$

rezultă:

$$d^2 f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j .$$

Diferențiala definită anterior este o particularizare a diferențialei Gâteaux. Aceasta se defineşte astfel: fie $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, X un deschis din $\mathbb{R}^n$ şi $\overline{x}_0 \in X$. Se spune că funcția f este **diferențiabilă Gâteaux** (slab) în $\overline{x}_0$ dacă este derivabilă după orice direcție $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$ în $\overline{x}_0$. Numărul $f'\left(\overline{x}_0, \overline{s}\right)$ se numeşte **diferențiala Gâteaux** a funcției f în punctul $\overline{x}_0$, iar funcționala $df\left(\overline{x}_0\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $df\left(\overline{x}_0\right)\left(\overline{s}\right) = f'\left(\overline{x}_0, \overline{s}\right)$, $\forall \overline{s} \in \mathbb{R}^n$, se numeşte **diferențiala Gâteaux a funcției f în punctul** $\overline{x}_0$.

Dacă se consideră vectorul $\nabla f\left(\overline{x}_0\right) = \left(\frac{\partial f\left(\overline{x}_0\right)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f\left(\overline{x}_0\right)}{\partial x_n}\right)$ (care reprezintă gradientul funcției f), atunci $df\left(\overline{x}_0\right)\left(\overline{s}\right) = \left(\nabla f\left(\overline{x}_0\right), \overline{s}\right)$, $df\left(\overline{x}_0\right)\left(\overline{s}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$, $a_i, s_i \in \mathbb{R}$, este o aplicație liniară. Înlocuind $\overline{s} = \overline{e}_i$, $i = \overline{1,n}$, se obține:

$$df\left(\overline{x}_0\right)\left(\overline{e}_i\right) = f'\left(\overline{x}_0, \overline{e}_i\right) = \frac{\partial f\left(\overline{x}_0\right)}{\partial x_i} = a_i ,\ i = \overline{1,n}.$$

Considerând aplicațiile liniare $pr : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_i \overline{x} = x_i$, şi înlocuind $x_i = dx_i$, se obține:

$$df\left(\overline{x}_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\overline{x}_0\right)}{\partial x_i}dx_i\ .$$

Exemplu. Fie funcțiile:

$$f\left(x,y,z,u\right)=\ln\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right),\ g\left(x,y,z\right)=\ln\left(x^x\cdot y^y\cdot z^z\right).$$

Să se calculeze: df, d^2f, dg, d^2g, d^ng , $n\geq 3$.

Soluție. Se știe că $df\left(x,y,z,u\right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial u}du$.

Dar,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+u^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u}{x^2+y^2+z^2+u^2}.$$

Rezultă că:

$$df\left(x,y,z,u\right)=\frac{2}{x^2+y^2+z^2+u^2}\left(xdx+ydy+zdz+udu\right).$$

Se știe că:

$$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2+2\frac{2\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}dxdu+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial u}dydu+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial u}dzdu\ .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2\left(-x^2+y^2+z^2+u^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2\left(x^2-y^2+z^2+u^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2\left(x^2+y^2-z^2+u^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2-u^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2}.$$

Analog se calculează derivate mixte de ordin doi.
Înlocuind în formula diferențialei de ordinul al doilea a funcției f, se obține $d^2f\left(x,y,z,u\right)$.

Funcției $g\left(x,y,z\right)$, pentru a-i putea găsi în mod simplu derivate ce intervin în diferențialele cerute, i se face următoarea transformare:

$$g\left(x,y,z\right)=x\ln x+y\ln y+z\ln z\ .$$

Se ştie că:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz,$$

unde: $\frac{\partial g}{\partial x} = \ln x + 1$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \ln y + 1$, $\frac{\partial g}{\partial z} = \ln z + 1$. Deci,

$$dg = (\ln x + 1)\,dx + (\ln y + 1)\,dy + (\ln z + 1)\,dz.$$

Se ştie că:

$$d^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}dydz,$$

unde $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{z}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = 0$. Deci,

$$d^2 g = \frac{1}{x}dx^2 + \frac{1}{y}dy^2 + \frac{1}{z}dz^2.$$

Pentru calculul lui $d^n g$, $n \geq 3$, nefiind o formulă pentru astfel de diferenţiale în mod general, se aplică principiul de deducere al acesteia din aproape în aproape. Dar, după cu s-a văzut acesta este destul de greoi. Totuşi se ştie că diferenţiala de ordinul n a unei funcţii de mai multe variabile conţine două sume distincte: suma în care intervin derivatele parţiale de ordinul n în raport cu fiecare variabilă în parte şi suma în care intervin derivatele parţiale mixte de ordinul n. În cazul funcţiei $g(x, y, z)$ suma derivatelor parţiale mixte de ordinul n este 0, deoarece derivatele parţiale mixte de ordin doi după cum se observă sunt nule.

Deci, $d^n g = \frac{\partial^n g}{\partial x^n}dx^n + \frac{\partial^n g}{\partial y^n}dy^n + \frac{\partial^n g}{\partial z^n}dz^n$.

Dar, $\frac{\partial^n g}{\partial x^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{x^{n-1}}$, $\frac{\partial^n g}{\partial y^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{y^{n-1}}$, $\frac{\partial^n g}{\partial z^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{z^{n-1}}$.

Aşadar,

$$d^n g(x, y, z) = (-1)^n \cdot (n-1)!\left(\frac{1}{x^{n-1}}dx^n + \frac{1}{y^{n-1}}dy^n + \frac{1}{z^{n-1}}dz^n\right).$$

O clasă importantă de funcţii sunt funcţiile compuse. În continuare, se pun în evidenţă câteva reguli pentru determinarea diferenţialei funcţiilor compuse.

PROPOZIŢIA 7.2.3 Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ două mulţimi deschise. Dacă $j : D \to E$ şi $f : E \to \mathbb{R}^p$ sunt două aplicaţii cu proprietăţile:

i) φ diferențiabilă în $\overline{a} \in D$,

ii) f diferențiabilă în $\overline{b} = \varphi\left(\overline{a}\right)$,

atunci funcția compusă $f \circ \varphi$ este diferențiabilă în $\overline{a}$ și $d\left(f \circ \varphi\right)\left(\overline{a}\right) = df\left(\overline{b}\right) \circ df\left(\overline{a}\right)$.

Se știe că matricea asociată compunerii a două aplicații liniare este produsul matricelor celor două aplicații. Ținând cont de Propoziția 7.2.3, se obține egalitatea:

$$J_{f \circ \varphi}\left(\overline{a}\right) = J_f\left(\overline{b}\right) J_\varphi\left(\overline{a}\right).$$

Exemplu. Fie $D, E \subset \mathbb{R}^2$ două mulțimi deschise și $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(x, y\right) = \left(u, v\right)$, $f : E \to \mathbb{R}$, $f\left(u, v\right) = w$, $w\left(x, y\right) = f\left(u\left(x, y\right), v\left(x, y\right)\right)$. Ținând cont de egalitatea anterioară, se obține:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

În continuare se pun în evidență câteva propoziții care arată utilitatea practică a diferențialei.

PROPOZIȚIA 7.2.4 Condiția necesară și suficientă ca $df\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ să fie identic nulă pe $X \subset \mathbb{R}^n$, este ca funcția $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ să fie constantă pe $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

PROPOZIȚIA 7.2.5 Dacă expresia diferențială $E = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(\overline{x}\right) dx_j$, $\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ este diferențiala unei funcții $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = P_i\left(x\right)$ și reciproc.

Demonstrațiile acestor două propoziții sunt imediate.

3. UNELE APLICAȚII ALE DIFERENȚIALEI
A. FORMULA LUI TAYLOR

Într-un capitol anterior s-a demonstrat formula lui Taylor pentru funcții reale de variabilă reală. Această formulă poate fi generalizată și pentru funcții de două sau mai multe variabile. În cele ce urmează se dă formula lui Taylor pentru funcții de două variabile.

PROPOZIȚIA 7.2.6 (**Formula lui Taylor pentru funcții de două variabile**) Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferențiabilă de n ori în (a,b), $(a,b) \in X$. Atunci are loc egalitatea:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot(y-a)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\cdot(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\cdot(y-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cdot\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\right] + \ldots + R_n(x,y),$$

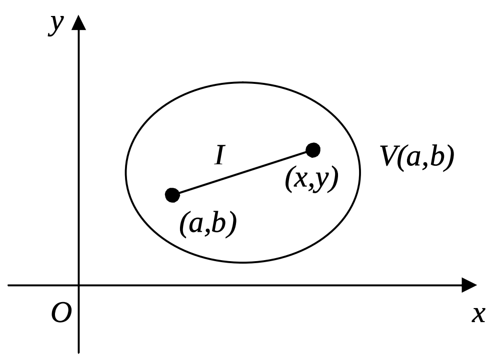
unde:

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^{(n+1)} f\left[a+(x-a)\cdot q, b+(y-b)\cdot q\right], q \in (0,1).$$

Această egalitate poartă denumirea de **formula lui Taylor pentru funcții de două variabile**.

Demonstrație. Restul $R_n(x,y)$ este dat în expresia anterioară sub forma unui operator aplicat funcției f. Operatorul este similar cu operatorul pentru determinarea diferențialei de ordinul $n+1$ în funcțiile de două variabile.

În continuare, raționamentele se fac pe segmentul care unește pe (a,b) cu (x,y) ca în figura alăturată.



Fie $j(t) = f\left(a+(x-a)t,\ b+(y-b)t\right)$, $t \in [0,1]$. Se observă că $j(0) = f(a,b)$ iar $j(1) = f(x,y)$. Deoarece funcția $f(x,y)$ este derivabilă de $n+1$ ori, rezultă că şi funcția j este derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul închis $[0,1]$. Deci, acesteia i se aplică formula lui Mac-Laurin. Conform acestei formule se obține relația:

$$j(t)=j(0)+\frac{t}{1!}\cdot j'(0)+\frac{t^2}{2!}j^{n}(0)+\ldots+\frac{t^n}{n!}j^{n}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}j^{(n+1)}(q\cdot t),$$

$$q\in(0,1).$$

Dar, pentru $t=1$ se obține:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{j'(0)}{1!}+\frac{j''(0)}{2!}+\ldots+\frac{j^{(n)}(0)}{n}+\frac{j^{(n+1)}(q)}{(n+1)!}.$$

Pentru a calcula derivatele $j'(0), j''(0),\ldots, j^{(n)}(0), j^{(n+1)}(q)$ se calculează derivatele funcției $j(t)=f(x(t),y(t))$ considerată că o funcție compusă cu doi intermediari pe segmentul I care uneşte punctul (a,b) cu un punct arbitrar $(x,y)\in V_{(a,b)}$ fixat, unde: $x(t)=a+(x-a)t$, $y(t)=b+(y-b)t$, variabila independentă fiind t. Deci, $(x(t),y(t))\in I$. Ținând cont de aceasta, se obține:

$$j'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-b).$$

Rezultă că:

$$j'(0)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b),$$

$$j''(t)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)\right]\cdot(x-a)+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x-a)\right](y-b)\cdot$$

Ținând cont de egalitatea derivatelor mixte obținem că:

$$j''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2+\frac{2\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2.$$

Deci,

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2=j''(0).$$

Astfel, s-a obținut al treilea termen din formula lui Taylor pentru funcții de două variabile. În mod analog se calculează $j'''(0)$, ..., $j^{(n)}(0)$, $j^{(n+1)}(0)$ şi prin înlocuire în formula lui Mac-Laurin pentru funcția $j(t)$ se obține formula lui Taylor pentru funcții de două variabile.

OBSERVAȚIA 7.3.1

a) Egalitatea din Propoziția 7.2.6 se mai scrie şi astfel:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^k f(a,b)}{\partial x^i \partial x^{k-i}}(x-a)^i (y-b)^{k-i}\right]+R_n(x,y),$$

unde $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}\sum\limits_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^{k}\dfrac{\partial^{n+1} f(u,v)}{\partial x^k \partial x^{n-k}}(x-a)^k (y-b)^{n-k}$,

iar $u=a+(x-a)q$, $v=b+(y-b)q$, $q\in(0,1)$.

b) Dacă în formula lui Taylor se consideră $n=0$, atunci se obține formula lui Lagrange pentru funcții de două sau mai multe variabile.

c) Folosind diferențiala, formula lui Taylor pentru $f(x,y)$ în punctul $(a,b)\in\overset{0}{X}$ este:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}df(a,b)+\frac{1}{2!}d^2 f(a,b)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(a,b)+R_n(x,y).$$

d) Dacă $f(x,y)$ este diferențiabilă de $n+1$ ori pe $V_{(a,b)}$, atunci $(\forall)(x,y)\in V_{(a,b)}$, $(\exists)(x,h)$ pe segmentul care uneşte pe (a,b) cu (x,y) astfel încât $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x,h)$.

e) Dacă $f:X\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ o funcție de n ori diferențiabilă pe deschisul X, atunci $\forall\overline{a}\in X$ fixat şi $\overline{x}\in X$, există $\overline{h}\in[\overline{a},\overline{x}]$ astfel încât

$$f(\overline{x})=f(\overline{a})+\frac{1}{1!}df(\overline{a})+\frac{1}{2!}d^2 f(\overline{a})+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(\overline{a})+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\overline{h}).$$

B. PUNCTE DE EXTREM

În cele ce urmează se consideră $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dar rezultatele obținute pentru această funcție se vor generaliza pentru funcțiile de n variabile.

DEFINIȚIA 7.3.1. Fie $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi $(a,b)\in\overset{0}{X}$. Dacă există $V\in V(a,b)$ astfel încât:

i) $f(a,b)-f(x,y)<0$, pentru orice $(x,y)\in V$, atunci punctul $(a,b)\in\overset{0}{X}$ se numeşte **punct de minim local** pentru $f(x,y)$;

ii) $f(a,b)-f(x,y)>0$, pentru orice $(x,y)\in V$, atunci punctul $(a,b)\in \overset{0}{X}$ se numeşte **punct de maxim local** pentru $f(x,y)$.

Dacă inegalităţile i) şi ii) sunt satisfăcute pentru orice $(x,y)\in X$, atunci extremele se numesc **globale**. Condiţia necesară ca (a,b) să nu fie extrem global este $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y=mx}} f(x,mx)=\pm\infty$.

Se ştie că pentru funcţiile reale de variabilă reală, minimele şi maximele verifică **teorema Fermat**. Această teoremă poate fi generalizată şi pentru funcţiile de mai multe variabile astfel:

PROPOZIŢIA 7.3.2 (**Teorema lui Fermat**) Dacă $f: X\subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi $(a,b)\in \overset{0}{X}$ este un punct de extrem local al funcţiei $f(x,y)$, atunci rezultă că:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=0$$

(se presupune că derivatele parţiale există).

Demonstraţie. Dacă punctul (a,b) este un punct de extrem local al funcţiei $f(x,y)$, atunci acest punct este de extrem local şi pentru funcţiile $g(x)=f(x,b)$, $h(y)=f(a,y)$. Dar, aceste funcţii sunt funcţii de o singură variabilă şi rezultă că $g'(a)=0$, $h'(b)=0$. Deci, rezultă: $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=0$ şi $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=0$.

OBSERVAŢIA 7.3.2

a) Ca şi la funcţiile reale de variabilă reală, reciproca acestei teoreme nu este în general valabilă.

b) Punctele interioare ale lui X pentru care $df(x,y)=0$ se numesc **puncte staţionare** ale funcţiei $f(x,y)$.

c) Ţinând cont de punctele a) şi b) rezultă că mulţimea punctelor de extrem a unei funcţii de mai multe variabile este inclusă în mulţimea punctelor staţionare.

d) Punctele staționare ale funcției $f(x,y)$ care nu sunt puncte de extrem se numesc **puncte şa** şi sunt echivalente punctelor de inflexiune ale funcțiilor de variabilă reală.

PROPOZIȚIA 7.3.3 (**Determinarea punctelor de extrem**) Fie $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție care admite derivate parțiale mixte de ordinul al doilea continue pe o vecinătate V a lui (a,b) şi $(a,b) \in \overset{0}{X}$ un punct staționar. Dacă se notează:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\right]^2,$$

atunci:

i) pentru $\Delta > 0$ şi $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$, rezultă că (a,b) punct de maxim local.

ii) pentru $\Delta > 0$ şi $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$, rezultă că (a,b) punct de minim local.

iii) pentru $\Delta < 0$, rezultă că (a,b) nu este punct de extrem.

Demonstrație. Se consideră formula lui Taylor de ordinul al doilea pentru funcția $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-a)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \cdot (x-a)^2 + 2(x-a)(y-b) \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \cdot (y-b)^2\right] + R_2(x,y).$$

Ținând cont de faptul că (a,b) este punct staționar şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} R_2(x,y) = 0$ rezultă:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \cdot (x-a)^2 + (x-a)(y-b) \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \cdot (y-b)^2,$$

pentru orice $(x,y) \in V$, unde V este o vecinătate foarte mică a punctului (a,b). Dacă se notează:

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} = a_{12}, \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = a_{22},$$

atunci rezultă că:

$$E = f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2}\cdot(y-b)^2\left[a_{11}\left(\frac{x-a}{y-b}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x-a}{y-b} + a_{22}\right].$$

Se observă că pe vecinătatea V a punctului (a,b), semnul expresiei E este dat de expresia din paranteza dreaptă. Dar, această expresie poate fi considerată un trinom de gradul al doilea în variabila $t = \frac{x-a}{y-b}$. Cum $D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}\cdot a_{22} = -4\Delta$, atunci dacă $D<0$, (deci, $\Delta>0$) trinomul are peste tot semnul lui a_{11}. Deci, cu alte cuvinte, dacă:

i) $\Delta>0$ şi $a_{11} = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$, rezultă că $f(x,y) - f(a,b) < 0$, adică punctul (a,b) este un punct de maxim;

ii) $\Delta>0$ şi $a_{11} = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$, rezultă că $f(x,y) - f(a,b) > 0$, adică punctul (a,b) este un punct de minim.

iii) pentru $\Delta<0$, $f(x,y) - f(a,b)$ are variaţie de semn pe vecinătatea V, deci punctul (a,b) nu mai este punct de extrem.

OBSERVAŢIA 7.3.3

a) Dacă $\Delta = 0$, nu se poate afirma nimic despre natura punctului (a,b), adică (a,b) poate fi punct de extrem sau nu. Această afirmaţie rezultă din exemplul următor.

Exemplu. Se consideră funcţiile $f(x,y) = x^2 + y^4$ şi $g(x,y) = x^2 + y^3$ şi $(a,b) = (0,0)$. Se observă că $(0,0)$ este punct de minim pentru $f(x,y)$ şi nu este punct de extrem pentru $g(x,y)$, dar în ambele cazuri $\Delta = 0$.

b) Propoziţia anterioară este valabilă şi pentru funcţiile de trei sau mai multe variabile. În cazul în care $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \overset{0}{X}$ este punct staţionar pentru funcţia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, se face notaţia $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j}$.

c) Se consideră forma pătratică $q(x)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$. Spunem că $q(x)$ este **pozitiv definită** dacă $q(x)>0,\ \forall \overline{x}\in \mathbb{R}^n\setminus\{\overline{0}\}$.

d) Dacă $q(x)$ este pozitiv definită, atunci există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $q(x)\ge k\|\overline{x}\|^2,\ \forall \overline{x}\in\mathbb{R}^n$.

e) Fie $X\subset\mathbb{R}^n$ un deschis, $f\in C^2(X)$ şi $\overline{a}\in X$ un punct staționar (critic) pentru f. Dacă $d^2f(\overline{a})$ este pozitiv (negativ) definită, atunci $\overline{a}$ este un punct de minim (maxim) pentru f (generalizarea Propoziției 7.3.3).

f) Dacă matricea $H(\overline{a})=\left(\dfrac{\partial^2 f(\overline{a})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ are toate valorile proprii strict pozitive (strict negative), atunci $d^2f(\overline{a})$ este pozitiv (negativ) definită.

Ținând cont de observația 7.3.3. e) + f) se obține următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 7.3.4 (**Teorema lui Sylvester**) Fie $f:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ şi $(a_1,a_2,...,a_n)\in \overset{0}{X}$ punct staționar al funcției $f(\overline{x})$.

i) Dacă $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0$, ..., $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$, atunci punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$ este punct de minim local pentru $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

ii) Dacă $a_{11}<0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}<0$, ..., $(-1)^n\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$, atunci punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$ este punct de maxim local pentru funcția $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Exemplu. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2(x+y+z) + 7.$$

Soluție. Algoritmul de determinare a punctelor de extrem pentru funcțiile de mai multe variabile are două etape distincte. Mai întâi determinăm puncte staționare ale funcției $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, adică rezolvăm sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$

Apoi, separăm punctele de extrem din mulțimea punctelor staționare folosind teorema Sylvester.

Concret, din exemplul dat, rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 4y + 2x + 2z + 2 = 0 \\ 2z + 2y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Acest sistem are soluția $(-3, 5, -8)$, adică $x = -3$, $y = 5$, $z = -8$. Deci, mulțimea punctelor staționare are doar un singur element.

Se verifică cu ajutorul teoremei Sylvester dacă punctul $(-3,5,-8)$ este punct de extrem. Pentru aceasta este nevoie de numerele a_{ij} care reprezintă valorile derivatelor de ordinul al doilea şi derivatelor mixte de ordinul al doilea în punctul $(-3,5,-8)$. Obținem: $a_{11} = 4$, $a_{21} = a_{12} = 2$, $a_{22} = 4$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{33} = 2$.

Dar,

$$a_{11} = 4 > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Conform teoremei Sylvester**,** rezultă $(-3,5,-8)$ este un minim local al funcției $f(x,y,z)$.

OBSERVAȚIA 7.3.4 Exercițiul anterior poate fi enunțat și sub forma:
Să se arate că $2x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz+2(x+y+z)-40>0$, pentru orice $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exemplu. Să se cerceteze dacă $(0,l)$, $l\in\mathbb{R}$, sunt puncte de extrem pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2ye^{2x+3y}$.

Soluție. Găsim punctele staționare:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xye^{2x+3y}(1+x)=0\\ x^2e^{2x+3y}(1+3y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy=0\\ x^2=0\end{cases}\text{ sau }\begin{cases}1+x=0\\ 1+3y=0\end{cases}.$$

Așadar, obținem punctele critice $(0,y)_{y\in\mathbb{R}}$ și $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$. Deci,

$$f(x,y)-f(0,y)=x^2ye^{2x+3y}.$$

Distingem cazurile:
i) $y<0$. În acest caz, $(0,y)$ este punct de maxim pentru funcția f, deoarece există o vecinătate a lui $(0,y)$ astfel încât $f(x,y)-f(0,y)<0$.
ii) $y>0$. În acest caz, $(0,y)$ este punct de minim pentru funcția f, deoarece există o vecinătate a lui $(0,y)$ astfel încât $f(x,y)-f(0,y)>0$.
iii) Expresia $f(x,y)-f(0,y)$ nu are semn constant pe nicio vecinătate a lui $(0,0)$. Deci, $(0,0)$ nu este punct de extreme pentru f.

Pentru $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ nu se poate stabili cu ajutorul definiției dacă acesta este sau nu punct de extreme și se folosește teorema lui Sylvester. Obținem: $a_{11}=\dfrac{2}{3e^3}$, $a_{22}=\dfrac{3}{e^3}$, $a_{12}=a_{21}=0$, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\dfrac{3}{e^6}>0$. Deci, $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ este punct de minim local.

Așadar, se poate afirma că $x^2ye^{2x+3y}+\dfrac{1}{3e^3}>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\ \mid\ \exists r>0$, $9x^2+9y^2+18x+6y+10<9r^2$.

În cele ce urmează se pune problema aflării **punctelor de extrem cu legături** pentru o funcție cu n variabile, dându-se algoritmul de rezolvare al acestei probleme. Problema se formulează astfel.

Să se afle punctele de extrem pentru funcția $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, ştiind că acestea îndeplinesc condițiile:

$$\begin{cases} j_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ j_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ \mathrm{M} \\ j_m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \end{cases}, \; m < n, \; \frac{\Delta\left(j_1, j_2, ..., j_m\right)}{\Delta\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)} \neq 0,$$

unde $\dfrac{\Delta\left(j_1, j_2, ..., j_m\right)}{\Delta\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial x_1} & \frac{\partial j_1}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial j_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial j_2}{\partial x_1} & \frac{\partial j_2}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial j_2}{\partial x_m} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ \frac{\partial j_m}{\partial x_1} & \frac{\partial j_m}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial j_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}.$

Condițiile din această problemă mai poartă denumirea şi de **legături pentru puncte de extrem**. Pentru a rezolva această problemă se urmăreşte următorul algoritm:

i) Se construieşte **funcția lui Lagrange**:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n, l_1, l_2, ..., l_m\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} l_1 j_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = F\left(\overline{x}\right),$$

unde $l_i \; i = \overline{1, m}$ sunt variabile noi şi poartă denumirea de **multiplicatorii lui Lagrange**. $\left(\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right)$.

ii) Se determină **punctele staționare ale funcției lui Lagrange**.

iii) Fie $\left(a_1, a_2, ..., a_n, m_1, m_2, ..., m_m\right)$ unul din punctele staționare ale funcției lui Lagrange (adică, punctul $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ este punct staționar al funcției $f\left(\overline{x}\right)$).

Se calculează diferențiala $d^2 F\left(\overline{x}\right)$ ($F\left(\overline{x}\right) = \Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, m_1, m_2, ..., m_m\right)$).

iv) Se rezolvă sistemul $\begin{cases} dj_1(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \\ dj_2(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \\ \vdots \\ dj_m(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \end{cases}$

în care necunoscute sunt $dx_1, dx_2, ..., dx_m, dx_{m+1}, ..., dx_n$.

Se exprimă $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ în funcție de celelalte necunoscute $dx_{m+1}, ..., dx_n$.

v) Aceste valori se înlocuiesc în diferențiala de la punctul iii), în care se înlocuiesc şi $x_1, x_2, ..., x_n$ cu $a_1, a_2, ..., a_n$ şi se obține următoarea egalitate:

$$d^2F(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$$

care este o formă pătratică.

vi) Acestei forme pătratice i se aplică **teorema lui Sylvester** pentru a decide natura punctului staționar $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Dacă $\sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$ este pozitiv (negativ) definită punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct de minim (maxim) al lui $f(\overline{x})$ ce verifică legăturile.

OBSERVAȚIA 7.3.5 Etapele acestui algoritm sunt prezentate pe larg în capitolul 8 paragraful 5.

Exemplu. Să se afle paralelipipedul de volumul maxim ale cărui dimensiuni sunt supuse condițiilor:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - z = 8 \end{cases}$$

Rezolvare. Din punct de vedere matematic, problema mai poate fi enunțată şi astfel.

Să se afle punctele de extrem ale funcției $f(x, y, z) = xyz$ care îndeplinesc condițiile:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - z = 8 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme se foloseşte algoritmul prezentat.

i) Se construieşte **funcția lui Lagrange**:

$$f(x, y, z, l_1, l_2) = f(x, y, z) + l_1 \cdot j_1(x, y, z) + l_2 j_2(x, y, z)$$

şi se obține:

$$f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z+l_1(x+y-z-4)+l_2(x-y-z-8).$$

ii) Se determină punctele staționare ale acestei funcții, rezolvând următorul sistem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial l_1}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial l_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}yz+l_1+l_2=0\\ xz+l_1-l_2=0\\ xy-l_1-l_2=0\\ x+y-z-4=0\\ x-y-z-8=0\end{cases}.$$

Soluția acestui sistem este: $\begin{cases}x=3\\ y=-2\\ z=-3\\ l_1=3/2\\ l_2=-15/2\end{cases}$.

Deci, funcția lui Lagrange admite un singur punct staționar şi acesta este $\left(3,-2,-3,\dfrac{3}{2},-\dfrac{15}{2}\right)$.

iii) $F(x,y,z)=f\left(x,y,z,\dfrac{3}{2},-\dfrac{15}{2}\right)=x\cdot y\cdot z+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{3}{2}z-6-\dfrac{15}{2}x+$

$$+\frac{15}{2}y+\frac{15}{2}z+60=x\cdot y\cdot z-6x+9y+6z+54.$$

Acestei funcții îi aflăm diferențiala de ordinul al doilea:

$$d^2F(x,y,z)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}dz^2+\frac{2\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{2\partial^2F}{\partial x\partial z}dxdz+\frac{2\partial^2F}{\partial y\partial z}dydz.$$

Deci,

$$d^2F(x,y,z)=2dxdy+2dxdz+2dydz.$$

iv) Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} d\varphi_1(3,-2,-3)=0 \\ d\varphi_2(3,-2,-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx+dy-dz=0 \\ \underline{dx-dy-dz=0} \end{cases}$$

$$2dx-2dy=0 \Rightarrow dx=dz\ ,$$

$$2dy=0 \Rightarrow dy=0\,.$$

Se înlocuieşte $dy=0$ şi $dz=dx$, $x=3$, $y=-2$; $z=-3$ în diferențiala de la punctul iii) şi se obține:

$$d^2F(3,-2,-3)=2dxdz \Rightarrow d^2F(3,-2,-3)=2dz^2 \Rightarrow d^2f(3,-2,-3)>0\,.$$

Rezultă că punctul staționar determinat este un **punct de minim** al funcției $f(x,y,z)=xyz$ care verifică legăturile date.

4. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 7.4.1 Folosind definiția derivatei, să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $F(x)=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,,\dfrac{1}{\cos^n x}\right)$;

b) $F(x)=\left(\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,arctg\,\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Soluție. Se observă că funcțiile date sunt funcții vectoriale de variabilă reală de forma $F(x)=(f_1(x),f_2(x))$. Derivata funcțiilor are sens numai în domeniul de definiție. Dacă x_0 este un punct al domeniului de definiție, atunci se ştie că $F(x)$ este derivabilă în acest punct dacă există şi este finită

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \text{ şi această limită este } F'(x_0)\,.$$

a) Fie $F(x)=(f_1^3(x),f_2(x))$, unde $f_1^3(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ şi $f_2(x)=\dfrac{1}{\cos^n x}$.

Indicele superior din f_1 reprezintă numărul radicalilor. Se observă că

$$F: D=[0,\infty)\cap\left[\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right]_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^2\,.$$

Fie $x_0\in D$. Avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1^3(x)-f_1^3(x_0)}{x-x_0},\frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}\right),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1^3(x)-f_1^3(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x_0+\sqrt{x_0+\sqrt{x_0}}}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{1}{2f_1^3(x_0)}+\frac{1}{2f_1^2(x_0)}+\frac{1}{2f_1^1(x_0)},$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\cos^n x}-\frac{1}{\cos^n x_0}}{x-x_0}=\frac{1}{\cos^n x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{\cos^n x_0-\cos^n x}{\cos^n x(x-x_0)}=$$

$$=\frac{n\sin x_0}{\cos^n x_0}\cdot\cos^{n-1}x_0=n\cdot tgx_0.$$

Deci, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{f_1^k(x_0)},n\cdot\frac{tgx_0}{\cos^n x_0}\right)$. Rezultă că:

$$F'(x_0)=\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{f_1^k(x_0)},n\frac{tgx_0}{\cos^n x_0}\right).$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar în domeniul de definiție, rezultă că:

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{f_1^k(x)},\frac{ntgx_0}{\cos^n x}\right).$$

OBSERVAȚIE. Se poate generaliza luând *n* radicali, adică $f_1^n(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x}}}$ şi atunci $F'(x)=\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_1^k(x)},\frac{ntgx_0}{\cos^n x}\right)$.

b) Fie $F(x)=(f_1(x),f_2(x))$, unde $f_1(x)=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x)=arctg\frac{x}{1+x}$, $F:D=\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^2$. Fie $x_0\in\mathbb{R}_+$. Atunci $\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}\in[0,1)$ şi $\frac{x_0}{1+x_0}\in[0,1)$. Avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0},\frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}\right).,$$

Dar, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}}{x-x_0}$.

Se ştie că $\arccos a - \arccos b = \arcsin(b - \sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2})$, $(\forall) a, b \in [0,1)$.

Deci, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = -\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\arcsin \dfrac{x - x_0}{\sqrt{(1+x_0^2)(1+x^2)}}}{x - x_0} = -\dfrac{1}{1+x_0^2}$.

şi,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{arctg\,\dfrac{x}{1+x} - arctg\,\dfrac{x_0}{1+x_0}}{x - x_0}.$$

Se ştie că $arctg a - arctg b = arctg \dfrac{a-b}{1+a\cdot b}$, $(\forall) a, b > 0$. Deci,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x\to x_0} \frac{arctg\,\dfrac{x - x_0}{xx_0 + (1+x)(1+x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{1+2x_0+2x_0^2}.$$

Deci, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \left(-\dfrac{1}{1+x_0^2}, \dfrac{1}{1+2x_0+2x_0^2}\right)$. Rezultă că:

$$F'(x_0) = \left(\frac{-1}{1+x_0^2}, \frac{1}{1+2x_0+2x_0^2}\right).$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar în domeniul de definiție, rezultă că:

$$F'(x) = \left(\frac{-1}{1+x^2}, \frac{1}{1+2x+2x^2}\right).$$

EXERCIȚIUL 7.4.2 Fie $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = \overline{0,m}$, funcții continue pe $[a,b]$ şi derivabile pe (a,b) şi $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b$. Să se arate că există $x \in (x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, m-1}$, astfel încât $\begin{vmatrix} f_0'(x) & f_1'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(x_m) & f_1(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} = 0$.

Soluție. Se consideră funcția:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(x_m) & f_1(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}.$$

Se observă că $F(x)$ este o funcție Rolle pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, $(\forall)\ k=\overline{1,m-1}$. Deci, există $x\in(x_k, x_{k+1})$ astfel încât $F'(x)=0$. Dar, dacă $D(x)=\left|f_{ij}(x)\right|_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le n}}$, unde $f_{ij}(x)$ sunt derivabile, atunci $D(x)$ este o funcție derivabilă. Se notează $D_{L_i}(x)$ funcția care se obține din $D(x)$ prin derivarea liniei *i*. Deci, $D'(x)=\sum_{i=1}^{n} D_{L_i}(x)$. Ținând cont de acest rezultat, rezultă că $F'(x)$ este:

$$F'(x)=\begin{vmatrix} f_0'(x) & f_1'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(x_m) & f_1(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}$$

şi exercițiul este rezolvat.

EXERCIȚIUL 7.4.3 Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $F(x)=\left(\cos(ax\pm b),\sin(ax\pm b)\right)$. Să se arate că $F(x)$ este indefinit derivabilă şi să se calculeze $F^{(n)}(x)$.

Soluție. Funcția $F(x)=(f_1(x), f_2(x))$ este indefinit derivabilă, dacă funcțiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sunt indefinit derivabile şi $F^{(n)}(x)=(f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x))$, $(\forall)\ n\ge 1,\ n\in\mathbb{N}$.

Funcțiile $f_i:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $i=\overline{1,2}$, unde $f_1(x)=\cos(ax\pm b)$ şi $f_2(x)=\sin(ax\pm b)$ sunt indefinit derivabile,

deci $F(x)=\left(\cos(ax\pm b),\sin(ax\pm b)\right)$ este indefinit derivabilă.

Acum: $f_1(x)=\cos(ax\pm b)$, $f_1'(x)=-a\sin(ax\pm b)=-a\cos(ax\pm b+\frac{\pi}{2})$ şi

$f_1''(x)=a^2\sin(ax\pm b+\frac{\pi}{2})=a^2\cos(ax\pm b+\frac{2\pi}{2})$. Se observă că:

$$f_1^{(n)}(x)=a^n\cos(ax\pm b+\frac{n\pi}{2}).$$

Se presupune această lege adevărată şi se demonstrează că $f_1^{(n+1)}(x) = a^{n+1}\cos(ax \pm b + \frac{n+1}{2} \cdot \pi)$. Avem:

$$f_1^{(n+1)}(x) = \left(f_1^{(n)}(x) \right)' = \left[a^n \cdot \cos(ax \pm b + \frac{n\pi}{2}) \right]' = -a^{n+1} \cdot \sin(ax \pm b + \frac{n\pi}{2}) =$$

$$= a^{n+1} \cdot \cos(ax \pm b + \frac{(n+1)\pi}{2}).$$

Deci, conform inducției, rezultă că $f_1^{(n)}(x) = a^n \cos(ax \pm b + \frac{n\pi}{2}),\ (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Analog se procedează cu $f_2(x)$ şi se obține $f_2^{(n)}(x) = a^n \sin(ax \pm b + \frac{n\pi}{2})$.

Deci,

$$F(x) = \left(a^n \cdot \cos(ax \pm b + \frac{n\pi}{2}), a^n \cdot \sin(ax \pm b + \frac{n\pi}{2}) \right).$$

EXERCIȚIUL 7.4.4 Fie $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ax \pm b > 0\}$ şi $F : D \to \mathbb{R}^2$, unde $F(x) = \left(\frac{1}{ax \pm b}, \ln(ax \pm b) \right)$. Să se arate că $F(x)$ este indefinit derivabilă şi să se calculeze $F^{(n)}(x)$.

Soluție. Funcțiile $f_1(x) = \frac{1}{ax \pm b}$ şi $f_2(x) = \ln(ax \pm b)$ sunt indefinit derivabile, deci funcția $F(x)$ este indefinit derivabilă şi $F^{(n)}(x) = (f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x))$.

Avem: $f_1'(x) = \frac{-a}{(ax \pm b)^2}$ $\quad f_1''(x) = \frac{1 \cdot 2a^2}{(ax \pm b)^3}$ $\quad f_1'''(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3a^3}{(ax \pm b)^4}$, ... Se presupune că $f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!a^n}{(ax \pm b)^{n+1}}$ este adevărată şi se demonstrează că $f_1^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!a^{n+1}}{(ax \pm b)^{n+2}}$. Într-adevăr:

$$f_1^{(n+1)}(x) = \left(f_1^{(n)}(x) \right)' = \left(\frac{(-1)^n \cdot n!a^n}{(ax \pm b)^{n+1}} \right)' = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!a^{n+1}}{(ax \pm b)^{n+2}}.$$

Atunci, conform cu principiul inducției , avem că $f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!a^n}{(ax \pm b)^{n+1}}$.

Analog, $f_2'(x)=\dfrac{a}{ax\pm b}$, $f_2''(x)=\dfrac{-a^2}{(ax\pm b)^2}$, $f_2'''(x)=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3a^3}{(ax\pm b)^3},\dots$. Se presupune că $f_2^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!a^n}{(ax\pm b)^n}$ este adevărată şi se demonstrează că $f_2^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+2}\cdot n!a^{n+1}}{(ax\pm b)^{n+1}}$. Într-adevăr:

$$f_2^{(n+1)}(x)=\left(f_2^{(n)}(x)\right)'=\left(\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!a^n}{(ax\pm b)^n}\right)'=\frac{(-1)^{n+2}\cdot n!a^{n+1}}{(ax\pm b)^{n+1}}.$$

Aşadar, conform cu principiul inducției, avem că: $f_2^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!a^n}{(ax\pm b)^n}$, $(\forall)n\in \mathbb{N}$.

Deci,

$$F^{(n)}(x)=\left(\frac{(-1)^n\cdot n!a^n}{(ax\pm b)^{n+1}},\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!a^n}{(ax\pm b)^n}\right).$$

EXERCIȚIUL 7.4.5 Fie $f(x,y,z)$ o funcție omogenă de ordinul n, care admite derivate parțiale de ordinul doi continue. Să se arate că:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=$$
$$n(n-1)\cdot f(x,y,z).$$

(**relația Euler de ordin doi pentru funcții de două variabile**).

Soluție. Conform relației lui Euler se obține:

$$(n-1)\cdot x\frac{\partial f}{\partial x}+(n-1)\cdot y\frac{\partial f}{\partial y}+(n-1)\cdot z\frac{\partial f}{\partial z}=n(n-1)\cdot f(x,y,z). \qquad (1)$$

Funcțiile $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sunt omogene de ordinul $(n-1)$. Deoarece $f(x,y,z)$ este omogenă de ordin n, atunci are loc egalitatea $f(tx,yt,tz)=t^n\cdot f(x,y,z)$. Se derivează egalitatea în raport cu x şi se obține:

$$f_x'(tx,yt,tz)=t^n\cdot f_x'(x,y,z)\Rightarrow f_x'(tx,ty,tz)=t^{n-1}\cdot f_x'(x,y,z).$$

De aici rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este omogenă de ordin $(n-1)$. Analog se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt omogene de ordinul $(n-1)$. Aşadar, funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$ verifică relaţia lui Euler şi se obţine:

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=(n-1)\cdot f_x'(x,y,z), \qquad (2)$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=(n-1)\cdot f_y'(x,y,z), \qquad (3)$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(n-1)\cdot f_z'(x,y,z). \qquad (4)$$

Înmulţind relaţia (2) cu x, relaţia (3) cu y, relaţia (4) cu z, adunând relaţiile obţinute şi ţinând cont de relaţia (1), se obţine

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=$$
$$n(n-1)\cdot f(x,y,z).$$

OBSERVAŢIE. Dacă funcţia $f(x_1,x_2,...,x_n)$ este omogenă de ordin n şi admite derivate parţiale mixte de ordinul doi continue, atunci

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+2\sum_{k\neq j}x_kx_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}=n(n-1)\cdot f(x_1,x_2,...,x_n).$$

EXERCIŢIUL 7.4.6 Fie $f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}$. Să se calculeze:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+2\sum_{k\neq j}x_kx_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}.$$

Soluţie. Se observă că funcţia este omogenă de ordin $n=-1$. Conform cu exerciţiul 7.4.5, avem că: $\sum_{k=1}^{n}x_k^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+2\sum_{k\neq j}x_kx_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}=\frac{2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}$.

EXERCIŢIUL 7.4.7 Fie $f(x,y)=\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Să se arate, folosind definiţia derivatelor parţiale, că $f(x,y)$ este derivabilă parţial în raport cu

x şi în raport cu y în orice punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi să se calculeze $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Soluție. Funcția $f(x,y)$ este derivabilă în raport cu x în punctul (x_0, y_0) dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$ există şi este finită şi această limită este chiar $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} - \arcsin \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}}{x - x_0}.$$

Se ştie că:

$\arcsin a - \arcsin b = \arcsin(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2})$, $(\forall) a, b \in (0,1)$.

Se observă că $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \in (0,1)$. Deci,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin(x - x_0) \cdot \dfrac{y_0}{\sqrt{(x^2 + y_0^2)(x_0^2 + y_0^2)}}}{x - x_0} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}.$$

Deci, această limită există şi este finită, ceea ce arată că funcția $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ este derivabilă parțial în raport cu x în $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ şi $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}$. Cum (x_0, y_0) a fost ales arbitrar se obține: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$.

Analog,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{\arcsin(y_0 - y) \cdot x \dfrac{y_0}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x_0^2 + y^2)}}}{y - y_0} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0}.$$

Cum $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, limita există şi este finită, ceea ce arată că funcția $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ este derivabilă parțial în raport cu y şi

$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0}$. Cum $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ a fost ales arbitrar rezultă că $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2}{x}$.

EXERCIȚIUL 7.4.8 Să se calculeze $\frac{\partial^n f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i^n}$ şi $\frac{\partial^{n+m} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i^n \partial x_j^m}$ pentru funcțiile:

i) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$;

ii) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$;

iii) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k}$;

iv) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$.

Soluție. Fie $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

i) Avem:

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = -a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) = +a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \frac{p}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i^2} = -a_i^2 \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \frac{p}{2}\right) = a_i^2 \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + 2 \cdot \frac{p}{2}\right).$$

Se consideră $\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = a_i^n \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + n \cdot \frac{p}{2}\right)$ şi se demonstrează că $\frac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = a_i^{n+1} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + (n+1)\frac{p}{2}\right)$. Într-adevăr,

$$\frac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}\right) = -a_i^{n+1} \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + n\frac{p}{2}\right) =$$

$$a_i^{n+1} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + (n+1)\frac{p}{2}\right).$$

Atunci, conform principiului inducției,

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = a_i^n \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \ (\forall)\ n\in \mathbb{N}^*.$$

ii) Se raționează analog ca la punctul i) şi se obține:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i} = a_i^n \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \ (\forall)\ n\in \mathbb{N}^*.$$

iii) Avem: $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = \dfrac{-a_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i^2} = \dfrac{1\cdot 2a_i^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^3}$, $\dfrac{\partial^3 f(\overline{x})}{\partial x_i^3} = \dfrac{-1\cdot 2\cdot 3a_i^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^4}$.

Se presupune că $\dfrac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \dfrac{(-1)^n\cdot n!a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+1}}$ este adevărată şi se demonstrează că $\dfrac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot (n+1)!a_i^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+2}}$. Într-adevăr:

$$\frac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}\right) = \left(\frac{(-1)^n\cdot n!a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+1}}\right)'_{x_i} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot (n+1)!a_i^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+2}}.$$

Atunci, conform principiului inducției, $\dfrac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \dfrac{(-1)^n\cdot n!a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+1}}$ $(\forall)\ n\in \mathbb{N}^*$.

iv) Avem: $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = \dfrac{a_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}$, $\dfrac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i^2} = \dfrac{-a_i^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2}$, $\dfrac{\partial^3 f(\overline{x})}{\partial x_i^3} = \dfrac{1\cdot 2a_i^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^3}$.

Se presupune că $\dfrac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot (n-1)!a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^n}$ este adevărată şi se demonstrează că $\dfrac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n+2}\cdot n!a_i^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+1}}$. Într-adevăr,

$$\frac{\partial^{n+1} f(\overline{x})}{\partial x_i^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}\right) = \left(\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\,a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^n}\right)'_{x_i} = \frac{(-1)^{n+2}\cdot n!\,a_i^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+1}}.$$

Atunci, conform principiului inducției, $\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\,a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^n}$, $(\forall)\ n \in$ ¥*.

Ținând cont de faptul că $\frac{\partial^{n+m} f(\overline{x})}{\partial x_i^n \partial x_j^m} = \frac{\partial^m}{\partial x_j^m}\left(\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}\right)$ se raționează în mod asemănător cum s-a raționat la punctele anterioare şi se obține:

i) $\frac{\partial^{n+m} f(\overline{x})}{\partial x_i^n \partial x_j^m} = a_i^n \cdot a_j^m \cdot \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k + (n+m)\frac{p}{2}\right)$, $(\forall)\ n,m \in$ ¥*;

ii) $\frac{\partial^{n+m} f(\overline{x})}{\partial x_i^n \partial x_j^m} = a_i^n \cdot a_j^m \cdot \sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k + (n+m)\frac{p}{2}\right)$, $(\forall)\ n,m \in$ ¥*;

iii) $\frac{\partial^{n+m} f(\overline{x})}{\partial x_i^n \partial x_j^m} = \frac{(-1)^{n+m}\cdot(n+m)!\,a_i^n \cdot a_j^m}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+m+2}}$, $(\forall)\ n,m \in$ ¥*;

iv) $\frac{\partial^{n+m} f(\overline{x})}{\partial x_i^n \partial x_j^m} = \frac{(-1)^{n+m+2}\cdot(n+m-1)!\,a_i^n \cdot a_j^m}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^{n+m}}$, $(\forall)\ n,m \in$ ¥*.

EXERCIȚIUL 7.4.9 Să se calculeze $\frac{\partial^n f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i^n}$ pentru funcțiile:

i) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^3\right)\cdot e^{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k}$;

ii) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^3\right)\cdot \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$;

iii) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k}$;

iv) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^3\right) \cdot \sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$.

Soluție. Fie $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $f(\overline{x}) = u(\overline{x}) \cdot v(\overline{x})$. Conform formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n a produsului $f(\overline{x}) = u(\overline{x}) \cdot v(\overline{x})$ se obține

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \sum_{\mathbf{1}=0}^{n} C_n^{\mathbf{1}} \frac{\partial^{\mathbf{1}} u(\overline{x})}{\partial x_i^{\mathbf{1}}} \cdot \frac{\partial^{n-\mathbf{1}} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-\mathbf{1}}}.$$

i) Se observă că $f(\overline{x}) = u(\overline{x}) \cdot v(\overline{x})$, unde $u(\overline{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^3$ şi $v(\overline{x}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}$.

Avem:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n} = C_n^0 u(\overline{x}) \cdot \frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n} + C_n^1 \cdot \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{n-1} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-1}} + C_n^2 \cdot \frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-2}} +$$

$$+ C_n^3 \cdot \frac{\partial^3 u(\overline{x})}{\partial x_i^3} \cdot \frac{\partial^{n-3} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-3}} = C_n^0 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k^3 \cdot a_i^n \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k} + C_n^1 3a_i \cdot x_i^3 \cdot a_i^{n-1} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k} +$$

$$+ C_n^2 6a_i \cdot x_i \cdot a_i^{n-2} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k} + + C_n^3 6a_i \cdot a_i^{n-3} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k} =$$

$$= a_i^{n-2} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k} \left(a_i^2 \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k^3 + 3a_i^2 \cdot C_n^1 \cdot x_i^2 + 6a_i \cdot C_n^2 \cdot x_i + 6C_n^3 \right).$$

(derivatele de ordinul 4, 5, ... ale lui $u(\overline{x})$ sunt zero)

ii) Ținând cont de exercițiul 7.4.8 iv), avem că $\dfrac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!\, a_i^n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k\right)^n}$.

Se observă că $f(\overline{x}) = u(\overline{x}) \cdot v(\overline{x})$, unde $u(\overline{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^3$ şi $v(\overline{x}) = \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$. Conform formulei lui Leibniz se obține:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}=C_n^0 u(\overline{x})\cdot\frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n}+C_n^1\cdot\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^{n-1}v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-1}}+C_n^2\cdot\frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial^{n-2}v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-2}}+$$

$$C_n^3\cdot\frac{\partial^3 u(\overline{x})}{\partial x_i^3}\cdot\frac{\partial^{n-3}v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-3}}=C_n^0\cdot\sum_{k=1}^n a_k x_k^3\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!a_i^n}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^n}+$$

$$+C_n^1 3a_i x_i^2\cdot\frac{(-1)^n\cdot(n-2)!a_i^{n-1}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^{n-1}}+C_n^2 6a_i x_i\cdot\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-3)!a_i^{n-2}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^{n-2}}+$$

$$C_n^3 6a_i\cdot\frac{(-1)^{n-2}\cdot(n-4)!a_i^{n-3}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^{n-3}}=$$

$$\frac{(-1)^{n-2}\cdot(n-4)!a_i^{n-2}}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^{n-3}}\cdot\left[-a_i^2(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\frac{\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k^3}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\cdot x_k\right)^3}+3a_i^2(n-2)(n-3)C_n^1\cdot\frac{x_i^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)^2}-\right.$$

$$\left.-6a_i(n-3)\cdot C_n^2\cdot\frac{x_i}{\sum_{k=1}^n a_k x_k}+6\cdot C_n^3\right].$$

(derivatele de ordinul 4, 5, ... ale lui $u(\overline{x})$ sunt zero)

iii) Se observă că $f(\overline{x})=u(\overline{x})\cdot v(\overline{x})$, unde $u(\overline{x})=\sum_{k=1}^n a_k x_k$ şi $v(\overline{x})=\frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k x_k}$. Ținând cont de exercițiul 7.4.8 c), avem că: $\frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n}=\frac{(-1)^n\cdot n!b_i^n}{\left(\sum_{k=1}^n b_k\cdot x_k\right)^{n+1}}$. Conform formulei lui Leibniz, se obține:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}=C_n^0 u(\overline{x})\cdot\frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n}++C_n^1\cdot\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^{n-1}v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-1}}=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!b_i^n}{\left(\sum_{k=1}^n b_k\cdot x_k\right)^{n+1}}+C_n^1 a_i\cdot\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!b_i^{n-1}}{\left(\sum_{k=1}^n b_k\cdot x_k\right)^n}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!b_i^{n-1}}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\cdot x_k\right)^n}\left[-n\cdot b_i\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot x_k+a_i C_n^1\right].$$

(derivatele de ordinul 4, 5, ... ale lui $u(\overline{x})$ sunt zero)

iv) Se observă că $f(\overline{x})=u(\overline{x})\cdot v(\overline{x})$, unde $u(\overline{x})=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^3$ şi $v(\overline{x})=\sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$. Ținând cont de exercițiul 7.4.8 b, avem că: $\frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n}=a_i^n\sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot x_k+n\cdot\frac{p}{2}\right)$. Conform formulei lui Leibniz, se obține:

$$\frac{\partial^n f(\overline{x})}{\partial x_i^n}=C_n^0 u(\overline{x})\cdot\frac{\partial^n v(\overline{x})}{\partial x_i^n}+C_n^1\cdot\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^{n-1} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-1}}+C_n^2\cdot\frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial^{n-2} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-2}}+$$

$$+C_n^3\cdot\frac{\partial^3 u(\overline{x})}{\partial x_i^3}\cdot\frac{\partial^{n-3} v(\overline{x})}{\partial x_i^{n-3}}.$$

(derivatele de ordinul 4, 5, ... ale lui $u(\overline{x})$ sunt zero)

EXERCIȚIUL 7.4.10 Presupunând că f şi y sunt derivabile de două ori, să se arate că:

i) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+a\,y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+b\,z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=nx\cdot u(x,y,z)$, $u(x,y,z)=e^{nx}\cdot f\left(\frac{y}{x^a},\frac{z}{x^b}\right)$;

ii) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u(x,y,z)=f\left(\frac{y}{x},\frac{y}{z}\right)$;

iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad u=f(x-at)+y\,(x+at)$;

iv) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\quad u=x\cdot f(x+y)+y\cdot y\,(x+y)$;

v) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)\cdot u(x,y,z)$,

$u=x^n\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)+y^n\cdot y\left(\frac{y}{x}\right)$.

Soluție. Fie $F(x_1,x_2,...,x_n)=f(u_1(x_1,x_2,...,x_n),...,u_m(x_1,x_2,...,x_n))$, atunci

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1}.$$

i) Fie $v_1(x,y,z)=\dfrac{y}{x^a}$, $v_2(x,y,z)=\dfrac{z}{x^b}$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=n\cdot e^{nx}\cdot f+e^{nx}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=n\cdot e^{nx}\cdot f-a\cdot e^{nx}\cdot\frac{y}{x^{a+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}-b\cdot e^{nx}\cdot\frac{z}{x^{b+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{nx}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)=e^{nx}\cdot\frac{1}{x^a}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{nx}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)=e^{nx}\cdot\frac{1}{x^b}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2}.$$

Înmulțind aceste egalități cu x, $a\,y$, respectiv $b\,z$ şi adunându-le, se obține:

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+a\,y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+b\,z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=nxe^{nx}\cdot f-a\,e^{nx}\cdot\frac{y}{x^a}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}-b\,e^{nx}\cdot\frac{z}{x^b}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2}+a\,e^{nx}\cdot\frac{y}{x^a}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}+$$

$$+a\,e^{nx}\cdot\frac{y}{x^a}\cdot\frac{\partial j}{\partial v_1}+b\,e^{nx}\cdot\frac{z}{x^b}\cdot\frac{\partial j}{\partial v_2}=nxe^{nx}\cdot j\ .$$

Deci, $x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\,y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+b\,z\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}=nx\cdot u(x,y,z)$.

ii) Fie $v_1(x,y,z)=\dfrac{y}{x}$, $v_2(x,y,z)=\dfrac{y}{z}$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2}.$$

Înmulțind cu x, y respectiv z aceste egalități şi adunându-le, se obține:

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_1}+\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_2}=0.$$

Deci, $x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

OBSERVAȚIE.

Din $u(x,y,z)=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{y}{z}\right)$, rezultă $u(tx,ty,tz)=t^0\cdot u(x,y,z)$. Deci, $u(x,y,z)$ este omogenă de grad zero. Conform relației lui Euler,

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

iii) Fie $v_1(x,t)=x-at$, $v_2(x,t)=x+at$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f'\frac{\partial v_1}{\partial t}+y'\frac{\partial v_2}{\partial t}=-a\cdot f'+a\cdot y',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\cdot f''\cdot\frac{\partial v_1}{\partial t}+a\cdot y''\frac{\partial v_2}{\partial t}=+a^2(f''+y'').$$

Deci, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(f''+y'')$. (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}=f'+y'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=j''\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}+y''\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}=j''+y''$$

Deci, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''+y''$ (2)

Din (1) şi (2) se obține: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (ecuația coardei vibrante).

iv) Fie $v(x,y)=x+y$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f+x\cdot f'\frac{\partial v}{\partial x}+y\cdot y'\frac{\partial v}{\partial x}=f+x\cdot f'+y\cdot y',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot f'\frac{\partial v}{\partial y}+y+y\cdot y'\frac{\partial v}{\partial y}=x\cdot f'+y+y\cdot y',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=j'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+j'+x\cdot j''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+y\cdot y''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2j'+x\cdot j''+y\cdot y'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\cdot j''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+y'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+y'+y\cdot y''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\cdot j''+2y'+y\cdot y'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=j'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+x\cdot j''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+y'+y\cdot y''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=j'+y'+xj''+yy''.$$

Ținând cont de acestea se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y^2}=2f'+xf''+yy''-2f'-2y'-2xf''-2yy''+xf''+2y'+yy''=0$$

Deci, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y^2}=0$.

v) Fie $v(x,y)=\dfrac{y}{x}$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=n\cdot x^{n-1}\cdot f+x^n\cdot f'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+y^n\cdot y'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=n\cdot x^{n-1}\cdot f-x^{n-2}\cdot y\cdot f'-\frac{y^{n+1}}{x^2}\cdot y'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=n(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot f+n\cdot x^{n-1}\cdot f'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot y\cdot f'-x^{n-2}\cdot f''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2y^{n+1}}{x^3}\cdot y\,'-\frac{y^{n+1}}{x^2}\cdot y\,''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=n(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot f-n\cdot x^{n-3}\cdot y\cdot f'-(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot y\cdot f'+x^{n-4}\cdot y^2\cdot f''+2\cdot\frac{y^{n+1}}{x^3}\cdot y\,'+\frac{y^{n+2}}{x^4}\cdot y\,''=$$

$$=n(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot f-2(n-1)\cdot x^{n-3}\cdot y\cdot f'+2\cdot\frac{y^{n+1}}{x^3}\cdot y\,'+x^{n-4}\cdot y^2\cdot f''+\frac{y^{n+2}}{x^4}\cdot y\,'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^n\cdot f'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+n\cdot y^{n-1}\cdot y\;+y^n\cdot y\,'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x^{n-1}\cdot f'+n\cdot y^{n-1}\cdot y\;+\frac{y^n}{x}\cdot y\,',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^{n-1}\cdot j\,''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+n(n-1)\cdot y^{n-2}\cdot y\;+n\cdot y^{n-1}\cdot y\,'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+n\cdot\frac{y^{n-1}}{x^3}\cdot y\,'+\frac{y^n}{x}\cdot y\,''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=x^{n-2}\cdot j\,''+n(n-1)\cdot\frac{y^{n-2}}{x}\cdot y\;+n\cdot\frac{y^{n-1}}{x}\cdot y\,'+n\cdot\frac{y^{n-1}}{x}\cdot y\,'+\frac{y^n}{x^2}\cdot y\,''.$$

Deci, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^{n-2}\cdot f''+n(n-1)\cdot\dfrac{y^{n-2}}{x}\cdot y\;+2n\cdot\dfrac{y^{n-1}}{x}\cdot y\,'+\dfrac{y^n}{x^2}\cdot y\,''$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=n\cdot x^{n-1}\cdot j\,'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-x^{n-2}\cdot j\,'-x^{n-2}\cdot j\,''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-(n+1)\cdot\frac{y^n}{x^2}\cdot y\,'-\frac{y^{n+1}}{x^2}\cdot y\,''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=n\cdot x^{n-2}\cdot f'-x^{n-2}\cdot f'-x^{n-3}\cdot y\cdot f''-(n+1)\cdot\frac{y^n}{x^2}\cdot y\,'-\frac{y^{n+1}}{x^3}\cdot y\,''.$$

Ținând cont de aceste egalități, se obține:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y^2}=n(n-1)\cdot x^n\cdot f-2(n-1)\cdot x^{n-1}\cdot y\cdot f'+2\cdot\frac{y^{n+1}}{x}\cdot y\,'+x^{n-2}\cdot y^2\cdot f''+$$

$$+\frac{y^{n+2}}{x^2}\cdot y\,''+2n\cdot x^{n-1}\cdot y\cdot f'-2x^{n-1}\cdot y\cdot f'-2(n+1)\cdot\frac{y^{n+1}}{x}\cdot y\,'-2\frac{y^{n+2}}{x^2}\cdot y\,''+x^{n-2}\cdot y^2\cdot f''+n(n-1)\cdot\frac{y^n}{x}\cdot y\;+$$

$$+2n\cdot\frac{y^{n+1}}{x}\cdot y\,'+\frac{y^{n+2}}{x}\cdot y\,''=n(n-1)\cdot[x^n\cdot f+y^n\cdot y\,]=n(n-1)\cdot u(x,y).$$

OBSERVAȚIE. Ținând cont de exercițiul 7.4.5, egalitatea este evidentă deoarece din $u(x,y)=x^n\cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)+y^n\cdot y\left(\dfrac{y}{x}\right)$ se obține:

$u(tx,ty)=t^n\left[x^n\cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)+y^n\cdot y\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]=t^n\cdot u(x,y)$. Deci, $u(x,y)$ este omogenă de ordin n.

EXERCIȚIUL 7.4.11 Să se calculeze diferențialele indicate pentru fiecare funcție în parte:

i) $f(x,y)=(ax+by)\cdot e^{ax+by}$, df, d^2f, d^nf;

ii) $f(x,y)=(ax+by)\cos(ax+by)$, df, d^2f, d^nf;

iii) $f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}$, df, d^2f, d^3f;

iv) $f(x,y,z)=\cos(ax+by+cz)$, df, d^2f, d^nf.

Soluție. Se ştie că dacă $f(x,y)$ este diferențiabilă de n ori în domeniul său de definiție, atunci:

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy,$$

$$d^nf(x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}dx^k\cdot dy^{n-k}.$$

Se ştie că dacă $f(x,y,z)$ este diferențiabilă de 3 ori în domeniul de definiție, atunci:

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$d^2f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz,$$

$$d^3f(x,y,z)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}dz^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}dx^2dz+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}dxdz^2+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}dy^2dz+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}dydz^2+6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}dxdydz\cdot$$

i) Avem: $df(x,y)=(ax+by+1)\cdot e^{ax+by}(adx+bdy)$,

$$d^2f(x,y)=(ax+by+2)e^{ax+by}(a^2dx^2+2abdxdy+b^2dy^2)=$$
$$=(ax+by+2)\cdot e^{ax+by}(adx+bdy)^2,$$

$$d^nf(x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}dx^k\cdot dy^{n-k}.$$

Folosind formula lui Leibniz pentru derivata de ordin n a produsului $f(x,y)=(ax+by)\cdot e^{ax+by}$, se obține $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=a^k\cdot b^{n-k}(ax+by+n)\cdot e^{ax+by}$.

Deci, avem că:

$$d^nf(x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^k\cdot b^{n-k}\cdot(ax+by+n)\cdot e^{ax+by}\cdot dx^kdy^{n-k}=$$
$$=(ax+by+n)\cdot e^{ax+by}(adx+bdy)^n.$$

Deci, $d^nf(x,y)=(ax+by+n)\cdot e^{ax+by}(adx+bdy)^n$.

ii) Se procedează analog ca la punctul i) şi se obține:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=[a\cos(ax+by)+a(ax+by)\cdot\cos(ax+by+\frac{p}{2})]dx+$$

$$+[b\cos(ax+by)+b(ax+by)\cdot\cos(ax+by+\frac{p}{2})]dy=$$

$$=\cos(ax+by)(adx+bdy)+(ax+by)\cdot\cos(ax+by+\frac{p}{2})(adx+bdy)=$$

$$=[\cos(ax+by)+(ax+by)\cos(ax+by+\frac{p}{2})](adx+bdy)\,.$$

Deci, $df(x,y)=[\cos(ax+by)+(ax+by)\cos(ax+by+\frac{p}{2})](adx+bdy)$,

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=[2a^2\cos(ax+by+\frac{p}{2})+$$

$$a^2(ax+by)\cdot\cos(ax+by+2\cdot\frac{p}{2})]dx^2+[4ab\cdot\cos(ax+by+\frac{p}{2})+2ab(ax+by)\cdot$$

$$\cdot\cos(ax+by+2\cdot\frac{p}{2})]dxdy+[2b^2\cos(ax+by+\frac{p}{2})+b^2(ax+by)\cdot\cos(ax+by+2\cdot\frac{p}{2}]dy^2=$$

$$=2\cos(ax+by+\frac{p}{2})(adx+bdy)^2+(ax+by)\cdot\cos(ax+by+2\frac{p}{2})(adx+bdy)^2=$$

$$=[2\cos(ax+by+\frac{p}{2})+(ax+by)\cdot\cos(ax+by+2\cdot\frac{p}{2})](adx+bdy)^2\,.$$

Deci,

$$d^2f(x,y)=[2\cos(ax+by+\frac{p}{2})+(ax+by)\cdot\cos(ax+by+2\cdot\frac{p}{2})](adx+bdy)^2,$$

$$d^nf(x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}dx^k\cdot dy^{n-k}\,.$$

Folosind formula lui Leibniz pentru derivata de ordin n a produsului $(ax+by)\cos(ax+by)=f(x,y)$, obținem:

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=a^kb^{n-k}[(ax+by)\cdot\cos(ax+by+n\frac{p}{2})+n\cos(ax+by+(n-1)\frac{p}{2}]\,.$$

Deci,

$$d^nf(x,y)=[(ax+by)\cdot\cos(ax+by+\frac{np}{2})+$$

$$+n\cos(ax+by+(n-1)\frac{p}{2}]\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}dx^kdy^{n-k},$$

$$d^nf(x,y)=[(ax+by)\cdot\cos(ax+by+\frac{np}{2})+n\cos(ax+by+(n-1)\frac{p}{2}](adx+bdy)^n\,.$$

iii) Avem:

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=e^{ax+by+cz}\cdot adx+e^{ax+by+cz}\cdot bdy+e^{ax+by+cz}\cdot cdz=$$

$$=e^{ax+by+cz}\cdot(adx+bdy+cdz),$$

$$df(x,y,z)=e^{ax+by+cz}\cdot(adx+bdy+cdz),$$

$$d^2f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz=$$

$$=e^{ax+by+cz}(a^2dx^2+b^2dy^2+c^2dz^2+2abdxdy+2acdxdz+2bcdydz)=$$

$$=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^2,$$

$$d^3f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}(a^3dx^3+b^3dy^3+c^3dz^3+3a^2bdx^2dy+3ab^2dxdy^2+3a^2cdx^2dz+$$

$$+3ac^2dxdz^2+3b^2cdy^2dz+3bc^2dydz^2+6abcdxdydz).$$

Deci, $d^3f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}\cdot(adx+bdy+cdz)^3$.

OBSERVAȚIE. Se observă că: $d^nf(x,y,z)=e^{ax+by+cz}\cdot(adx+bdy+cdz)^n$, egalitate care se poate demonstra prin inducție.

iv)

Avem:

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=\cos(ax+by+cz+\frac{p}{2})(adx+bdy+cdz),$$

$$d^2f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz=$$

$$=\cos(ax+by+cz+2\frac{p}{2})(a^2dx^2+b^2dy^2+c^2dz^2+2abdxdy+2acdxdz+2bcdydz)=$$

$$=\cos(ax+by+cz+2\frac{p}{2})(adx+bdy+cdz)^2,$$

$$d^3f(x,y,z)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}dz^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}dx^2dz+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}dxdz^2+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}dy^2dz+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}dydz^2+6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}dxdydz=$$

$$=\cos(ax+by+cz+\frac{3p}{2})(adx+bdy+cdz)^3.$$

Deci, $d^3f(x,y,z)=\cos(ax+by+cz+\frac{3p}{2})(adx+bdy+cdz)^3$.

OBSERVAȚIE.

i) Se observă că $d^nf(x,y,z)=\cos(ax+by+cz+\frac{np}{2})(adx+bdy+cdz)^n$, egalitate care se poate demonstra prin inducție.

ii) Dacă se analizează exercițiul 7.4.11 c), iv) se poate face următoarea generalizare.

Dacă $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k\right)$ este diferențiabilă de *n* ori, atunci

$$d^n f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^{(n)}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k\right) \cdot (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + ... + a_n dx_n)^n .$$

EXERCIȚIUL 7.4.12 Să se calculeze diferențialele de ordinul specificat pentru funcțiile următoare:

i) $F(x, y) = f\left(x^2, \dfrac{x}{y}\right),\ dF,\ d^2F$;

ii) $G(x, y) = g\left(x^y, y^x\right),\ dG$;

iii) $H(x, y, z) = h\left(x + y + z, x \cdot y \cdot z\right),\ dH,\ d^2H$.

Soluție. a) Avem: $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy$. Notăm: $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

Deci,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy .$$

Aşadar,

$$dF = \left(2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right)dx - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} dy ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right)'_x = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2x + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(-\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right)'_y = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right)'_x = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{2x^2}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Deci,

$$d^2F=\left(2\frac{f}{\partial u}+4x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)dx^2+\left(\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)dy^2+$$

$$+\left(-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-2\cdot\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)dxdy.$$

b) Avem: $dG(x,y)=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy$. Notăm: $u=x^y$, $v=y^x$, adică $u=e^{y\ln x}$, $v=e^{x\ln y}$. Deci,

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{y}{x}\cdot x^y+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot y^x\cdot\ln y,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot x^y\cdot\ln x+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{x}{y}\cdot y^x.$$

Deci,

$$dG(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{y}{x}\cdot x^y+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot y^x\cdot\ln y\right)dx+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot x^y\cdot\ln x+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{x}{y}\cdot y^x\right)dy.$$

c) Avem: $dH(x,y,z)=\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{\partial H}{\partial y}dy+\frac{\partial H}{\partial z}dz$. Notăm: $u=x+y+z$, $v=x\cdot y\cdot z$. Deci,

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}+yz\cdot\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial u}+xz\cdot\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial u}+xy\cdot\frac{\partial h}{\partial v}.$$

Aşadar,

$$dH=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+yz\cdot\frac{\partial h}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{\partial h}{\partial u}+xz\cdot\frac{\partial h}{\partial v}\right)dy+\left(\frac{\partial h}{\partial u}+xy\cdot\frac{\partial h}{\partial v}\right)dz=$$

$$=\frac{\partial h}{\partial u}\left(dx+dy+dz\right)+\frac{\partial h}{\partial v}\left(yzdx+xzdy+xydz\right).$$

Avem:

$$d^2H(x,y,z)=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z}dydz\cdot$$

Deci,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+yz\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_x=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+yz\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+2yz\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+y^2z^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+xz\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_y=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+xz\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+2xz\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+x^2z^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+xy\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_z=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+xy\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+x^2y^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+yz\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_y=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial h}{\partial v}+yz\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+(xz+yz)\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+z\cdot\frac{\partial h}{\partial v}+xyz^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+yz\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_z=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+y\frac{\partial h}{\partial v}+yz\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+(xy+yz)\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+y\cdot\frac{\partial h}{\partial v}+xy^2z\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z}=\left(\frac{\partial h}{\partial u}+xz\frac{\partial h}{\partial v}\right)'_z=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+x\frac{\partial h}{\partial v}+xz\left(\frac{\partial^2 h}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+(xy+xz)\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}+x\cdot\frac{\partial h}{\partial v}+x^2yz\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

Aşadar,

$$d^2H=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(dx+dy+dz\right)+\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}[2yzdx^2+2xzdy^2+2xydz^2+(xz+yz)dxdy+(xy+yz)dxdz+$$

$$+(xy+xz)dydz]+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}[y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2+xyz(zdxdy+ydxdz+xdydz)]+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial v}(zdxdy+ydxdz+xdydz)\,.$$

EXERCIȚIUL 7.4.13 Să se calculeze punctele de extrem ale funcțiilor:

i) $f(x,y)=xy\cdot\ln(x^2+y^2),\quad (x,y)\neq(0,0)$;

ii) $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y),\ (x,y)\in[0,\frac{p}{2}]\times[0,\frac{p}{2}]$;

iii) $f(x,y,z)=xy^2z^3(a-x-2y-3z),\quad a>0$.

Soluție. i) Se determină punctele staționare ale funcției $f(x,y)$ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\cdot\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0\\ x\cdot\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\left[\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right]=0\\ x\left[\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

sau $\begin{cases}x=0\\ \ln y^2=0\end{cases}$ sau $\begin{cases}y=0\\ \ln x^2=0\end{cases}$ sau $\begin{cases}\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0\\ \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}=0.\end{cases}$

Punctul $A_1(0,0)$ nu convine, $A_2(0,1)$, $A_3(0,-1)$, $A_4(1,0)$, $A_5(1,0)$. Ultimul sistem este echivalent cu sistemele $\begin{cases}x=y\\ \ln 2x=-1\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=-y\\ \ln 2x=-1\end{cases}$. De aici se obțin $A_6\left(\dfrac{1}{2e},\dfrac{1}{2e}\right)$, $A_7\left(\dfrac{1}{2e},-\dfrac{1}{2e}\right)$, $A_8\left(-\dfrac{1}{2e},\dfrac{1}{2e}\right)$. Se cercetează care din aceste opt puncte staționare sunt puncte de extrem. Cercetarea se face pentru fiecare punct în parte. În continuare se va studia doar punctul $A_7\left(\dfrac{1}{2e},-\dfrac{1}{2e}\right)$. Avem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=-2\\ a_{22}=-2\\ a_{12}=a_{21}=-1-\ln 2.\end{cases}$$

Cum $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1-\ln 2\\-1-\ln 2&-2\end{vmatrix}=4-(1+\ln 2)^2>0$, deoarece $1+\ln 2<2$, conform cu Propoziția 7.3.3 (teorema Sylvester), punctul $A_7\left(\dfrac{1}{2e},-\dfrac{1}{2e}\right)$ este un punct de maxim local al funcției $f(x,y)$.

Analog se cercetează celelalte puncte.
ii) Se determină punctele staționare ale funcției $f(x,y)$ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x - \sin(x-y) = 0 \\ -\sin y + \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin y \\ \cos x = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\dfrac{p}{2} - y\right) \\ \cos x = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x + \dfrac{p}{2} + 2kp \\ \cos x = -\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + \dfrac{p}{2} + 2kp \\ \cos x = -1 \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} y = -x + \dfrac{p}{2} + 2kp \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -p + 2kp \\ y = -\dfrac{p}{2} + 2kp \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = \dfrac{p}{3} + 2kp \\ y = \dfrac{p}{6} + 2kp \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5p}{3} + 2kp \\ y = -\dfrac{p}{3} + 2kp. \end{cases}$$

Singurul punct staționar care satisface condițiile inițiale adică este din $[0,\frac{p}{2}]\times[0,\frac{p}{2}]$ este $A\left(\frac{p}{3},\frac{p}{6}\right)$. Se cercetează dacă acesta este sau nu punct de extrem. Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} = \cos(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ a_{22} = -1 \\ a_{12} = a_{21} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Cum $\begin{vmatrix} -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} > 0$, conform cu Propoziția 7.3.3 (teorema Sylvester), punctul $A\left(\frac{p}{3},\frac{p}{6}\right)$ este un punct de maxim local.

iii) Se determină punctele staționare ale funcției $f(x,y)$ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 z^3 (a - x - 2y - 3z) - xy^2 z^3 = 0 \\ 2xyz^3 (a - x - 2y - 3z) - 2xy^2 z^3 = 0 \\ 3xy^2 z^2 (a - x - 2y - 3z) - 3xy^2 z^3 = 0. \end{cases}$$

Din fiecare ecuație a sistemului rezultă câte două ecuații. Cu aceste ecuații se pot forma mai multe sisteme. În continuare se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x + 3y + 3z = a \\ x + 2y + 4z = a. \end{cases}$$

Calculăm determinanții:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 7, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 3 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{vmatrix} = a, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} = a,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a.$$

Deci, $x = \dfrac{a}{7}$, $y = \dfrac{a}{7}$, $z = \dfrac{a}{7}$. Se cercetează dacă punctul staționar $A\left(\dfrac{a}{7}, \dfrac{a}{7}, \dfrac{a}{7}\right)$ este sau nu punct de extrem. Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^2 z^3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xz^3 (a - x - 6y - 3z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6xy^2 z(a - x - 2y - 6z) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2yz^3 (a - 2x - 3y - 3z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3y^2 z^2 (a - 2x - 2y - 4z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 6xyz^2 (a - x - 3y - 4z). \end{matrix}$$

Deci,

$$a_{11} = -\frac{2a^5}{7^5}, \; a_{22} = -\frac{6a^5}{7^5}, \; a_{33} = -\frac{12a^5}{7^5}, \; a_{12} = a_{21} = -\frac{2a^5}{7^5}, \; a_{13} = a_{31} = -\frac{3a^5}{7^5},$$

$$a_{23} = a_{32} = -\frac{2a^5}{7^5},$$

$$a_{11} = -\frac{2a^5}{7^5},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2a^5}{7^5} & -\frac{2a^5}{7^5} \\ -\frac{2a^5}{7^5} & -\frac{6a^5}{7^5} \end{vmatrix} = \frac{4a^{10}}{7^{10}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{8a^{10}}{7^{10}} > 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2a^5}{7^5} & -\frac{2a^5}{7^5} & -\frac{3a^5}{7^5} \\ -\frac{2a^5}{7^5} & -\frac{6a^5}{7^5} & -\frac{6a^5}{7^5} \\ -\frac{3a^5}{7^5} & -\frac{6a^5}{7^5} & -\frac{12a^5}{7^5} \end{vmatrix} = -\frac{6a^{15}}{7^{15}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{42a^{15}}{7^{15}} < 0.$$

$(a > 0)$

Ținând cont de Propoziția 7.3.4 ii), punctul $A\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ este punct de maxim local.

EXERCIȚIUL 7.4.14 Să se găsească extremele ce verifică legăturile specificate pentru funcțiile:

i) $f(x, y, z) = xy^2z^3,\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0$;

ii) $f(x, y) = xy,\ x + y = a$;

iii) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y,\ x - y = \frac{p}{4}$.

Soluție. i) Se construiește funcția lui Lagrange:

$$f(x, y, z, l) = xy^2z^3 + l\,(x + 2y + 3z - a).$$

Se află punctele staționare ale funcției lui Lagrange rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2z^3 + l = 0 \\ 2xyz^3 + 2l = 0 \\ 3xy^2z^2 + 3l = 0 \\ x + 2y + 3z - a = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem și ținând cont de faptul că $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0$, obținem:

$$x=\frac{a}{6},\ y=\frac{a}{6},\ z=\frac{a}{6},\ l=\frac{a^5}{6^5}.$$

Se calculează diferențiala de ordinul doi a funcției:

$$f(x,y,z,l)=xy^2z^3-\frac{a^5}{6^5}(x+2y+3z-a)$$

în punctul $A\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}\right)$ şi se obține:

$$d^2f=2\frac{a^4}{6}dy^2+6\frac{a^4}{6^4}dz^2+4\frac{a^4}{6^4}dxdy+12\frac{a^4}{6^4}dydz+3\frac{a^4}{6^4}dzdx.$$

Diferențiind legătura, se obține $dx=-2dy-3dz$. Se înlocuieşte aceasta în d^2f şi se obține următoarea formă pătratică:

$$d^2f=\frac{a^4}{6^4}(-6dy^2-3dz^2-6dydz).$$

De aici rezultă: $a_{11}=-6$, $a_{22}=-3$, $a_{12}=a_{21}=-3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}=18-9=9>0.$$

Conform cu teorema lui Sylvester, forma pătratică este negativ definită, deci $A\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}\right)$ este un punct de maxim.

ii) Se construieşte funcția lui Lagrange: $f(x,y,l)=xy+l(x+y-a)$

Se află punctele staționare ale funcției lui Lagrange rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial l}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+l=0 \\ x+l=0 \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-x \\ x=y \\ x=\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Deci, funcția are ca punct staționar punctul $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

Se calculează diferențiala de ordinul doi a funcției $f(x,y)=xy-\frac{a}{2}(x+y-a)$ în punctul $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ şi se obține $d^2f=2dxdy$. Se diferențiază legătura şi se obține $dx=-dy$. Înlocuind în diferențiala de ordinul doi, se obține următoarea formă pătratică $d^2f=-2(dy)^2$ care evident este negativ definită. Deci, punctul $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ este punct de maxim al funcției $f(x,y)$ care verifică legătura $x+y=a$.

OBSERVAȚIE. Din legătură se poate explicita $y=a-x$ şi se obține funcția de o singură variabilă $f(x)=ax-x^2$. Aceasta este o parabolă care admite un maxim în punctul $x=\frac{a}{2}$. Deci, $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ este un punct de maxim pentru funcția $f(x,y)$ care satisface legătura $x+y=a$.

iii) Se construieşte funcția lui Lagrange:

$f(x,y,l)=\cos^2 x+\cos^2 y+l\,(x-y-\frac{p}{4})$.

Se află punctele staționare ale funcției lui Lagrange rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial l}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sin x\cos x+l=0\\ -2\sin y\cos y-l=0\\ x-y-\dfrac{p}{4}=0.\end{cases}$$

Deci,

$$\begin{cases}l=\sin 2x\\ \sin 2x+\sin 2y=0\\ x-y=\dfrac{p}{4}\end{cases}\Rightarrow A_k\left(k\cdot\frac{p}{2},(2k-1)\cdot\frac{p}{4},0\right).$$

Se determină diferențiala de ordinul doi a funcției $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$ în punctul $\left(k\frac{p}{2},(2k-1)\cdot\frac{p}{4}\right)$. Se deosebesc două situații: k par şi k impar. Pentru k par, se obține $d^2f=-2d^2x$. Deci, în acest caz, punctele sunt de maxim. Pentru k impar, se obține $d^2f=2dx^2$. Deci, în acest caz, punctele sunt de minim.

CAPITOLUL VIII: FUNCȚII IMPLICITE. DEPENDENȚĂ FUNCȚIONALĂ. SCHIMBĂRI DE VARIABILĂ

1. FUNCȚII IMPLICITE

Fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. După cum se ştie, graficul acestei funcții reprezintă o suprafață având ecuația:

$$z = F(x, y),\ (x, y) \in D. \tag{1}$$

Intersectând graficul cu planul xOy se obține o mulțime de puncte, soluții ale ecuației:

$$F(x, y) = 0,\ (x, y) \in D. \tag{2}$$

Este firesc să ne întrebăm dacă această mulțime de puncte din plan reprezintă graficul unei funcții de o variabilă. După cum se ştie, pentru aceasta este necesar şi suficient ca orice paralelă la Oy să intersecteze mulțimea cel mult într-un punct. Într-adevăr, dacă această condiție este îndeplinită, notând cu D_0 mulțimea punctelor $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care paralela la Oy intersectează efectiv mulțimea într-un punct, iar prin $\varphi : D_0 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $\varphi(x) = y$, $x \in D_0$, unde y este ordonata punctului de intersecție, atunci graficul funcției φ coincide cu mulțimea soluțiilor ecuației (2)

$$\left\{ (x, \varphi(x)) \middle| x \in D_0 \right\} \equiv \left\{ (x, y) \middle| F(x, y) = 0,\ (x, y) \in D \right\}.$$

În acest caz, spunem că ecuația (2) defineşte o **funcție implicită**, adică funcția φ este **definită implicit prin ecuația** (2).

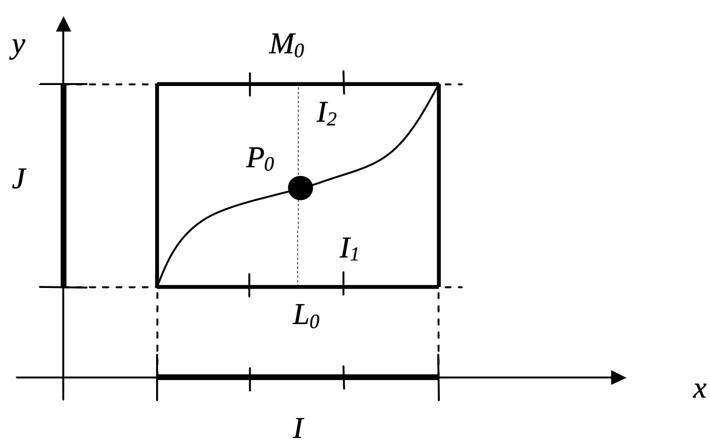
OBSERVAȚIA 8.1.1

i) Este posibil ca o funcție F să nu definească o funcție implicită, dar să admită restricții care definească o funcție implicită.

ii) Mai mult, ne-ar interesa următorul aspect: dacă fixăm o soluție (x_0, y_0) a ecuației (2), este posibil să punem în evidență o vecinătate convenabilă a punctului astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației (2) din această vecinătate să reprezinte graficul unei funcții de o variabilă? Răspunsul la această întrebare este dat de următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 8.1.1 (**Teorema de existență şi unicitate a funcțiilor definite implicit**) Fie $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde Δ este un dreptunghi cu centrul într-un punct $P_0(x_0, y_0)$ cu laturile paralel cu axele de coordonate.

Dacă:
i) $F(x_0, y_0) = 0$,
ii) F este continuă pe Δ,
iii) pentru fiecare x fixat (din intervalul de pe axa Ox corespunzător lui Δ paralele cu Ox), funcția $y \to F(x_0, y)$ este strict crescătoare (sau strict descrescătoare), atunci există un interval $I \subset \mathbb{R}$ cu x_0 în interior şi o funcție $j : I \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:
1) $j(x_0) = y_0$,
2) $F(x, j(x)) = 0$, pentru orice $x \in I$,
3) j este continuă pe I,
4) dacă $(x, y) \in \Delta$ şi $F(x, y) = 0$, cu $x \in I$, atunci $y = j(x)$.
Funcția j este unica funcție cu proprietățile 1)-4) pe I.
Demonstrație. Conform enunțului, fie un dreptunghi cu centrul în $P_0(x_0, y_0)$ şi cu laturile paralele cu axele de coordonate ca în figură:



şi prin P_0 o paralelă la Oy şi se cercetează comportarea funcției F în punctele acestei paralele, adică valorile funcției $y = F(x_0, y)$ când $y \in J$.
Deoarece $F(x_0, y_0) = 0$, rezultă:

$$F(x_0, y_0) < 0, \text{ pentru } y < y_0$$

şi

$$F(x_0, y_0) > 0, \text{ pentru } y > y_0.$$

De aici, rezultă că $F(L_0) < 0$. Cum F este continuă, conform ipotezei ii), rezultă că există I_1 pe latura inferioară a dreptunghiului cu centrul în L_0 pe care F este negativă. În mod analog, există I_2 pe latura superioară a dreptunghiului cu centrul în M_0 pe care F este pozitivă. Proiectăm aceste intervale pe axa Ox şi notăm cu $I = \min\{I_1, I_2\}$. Fie $x \in I$ un punct arbitrar. Paralela după acest punct la Oy intersectează laturile dreptunghiului în punctele L, respectiv M şi $F(L) < 0$ şi $F(M) > 0$. Restricția lui F la această paralelă este tocmai funcția de o variabilă $u \to F(x, y)$, $u \in J$, funcție continuă, deoarece F este o funcție continuă pe Δ. Din proprietatea lui Cauchy, rezultă că există $y \in J$, astfel încât $F(x, y) = 0$. Acest punct $y \in J$ este unic determinat de $x \in I$, deoarece în caz contrar am ajunge la o contradicție cu condiția iii) de strict monotonie.

Definim funcția $\varphi : I \to \mathbb{R}$ prin $\varphi(x) = y$, unde y este deci un punct unic din J astfel încât $F(x, y) = 0$. Deci, proprietățile 2) şi 4) sunt îndeplinite. Dacă $x = x_0$, atunci $y = y_0$. Deoarece $F(x_0, y_0) = 0$, înseamnă că $\varphi(x_0) = y_0$. Deci, are loc proprietatea 1).

Să observăm că φ este continuă în x_0, deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, cu $\delta > 0$, astfel încât, oricare ar fi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ecuația $F(x, y) = 0$ să aibă o soluție unică $y \in (\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon)$, pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Cu alte cuvinte, $|x - x_0| < \delta$, deci $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$.

OBSERVAȚIA 8.1.2 Condiția ii) din Propoziția 8.1.1 se poate înlocui cu condiția mai slabă ca F să fie continuă separat cu fiecare variabilă.

PROPOZIȚIA 8.1.2 (Teorema de existență, derivabilitate şi unicitate) Fie $F : \Delta \to \mathbb{R}$, unde Δ este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate având centrul în $P_0(x_0, y_0)$ cu următoarele proprietăți:

i) $F(x_0, y_0) = 0$,

ii) F are derivate parțiale continue pe Δ,

iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pe Δ.

Atunci, există un interval I cu centrul în x_0 şi o funcţie $j : I \to$ ¡ având următoarele proprietăţi:

1) $j\left(x_0\right) = y_0$,

2) $F\left(x, j\left(x\right)\right) = 0$, pentru orice $x \in I$,

3) dacă $\left(x, y\right) \in \Delta$ şi $F\left(x, y\right) = 0$, cu $x \in I$, atunci $y = j\left(x\right)$,

4) j este derivabilă pe I şi:

$$j'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x, j\left(x\right)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, j\left(x\right)\right)}. \tag{3}$$

Funcţia j este unică cu proprietăţile 1)-4) pe I.

Demonstraţie. Observăm în primul rând că sunt asigurate condiţiile din ipoteza teoremei precedente, după cum urmează:

- prima condiţie este aceeaşi în amblele teoreme;
- întrucât prin ii) din Propoziţia 8.1.2, F are derivate parţiale continue pe Δ, din criteriul de diferenţiabilitate rezultă că F este diferenţiabilă pe Δ, deci cu atât mai mult este continuă pe Δ. Aşadar este îndeplinită condiţia ii) din Propoziţia 8.1.1.
- din condiţa iii) a Propoziţiei 8.1.2, rezultă $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y\right) \neq 0$. Se presupune

fără a restrânge generalitatea că $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y\right) > 0$. Prin urmare, pentru fiecare x fixat, funcţia $y \to F\left(x, y\right)$ este strict crescătoare. Deci, toate ipotezele Propoziţiei 8.1.1 sunt îndeplinite. Există $I \subset$ ¡ cu centrul în x_0 şi $j : I \to$ ¡ cu proprietăţile 1)-4) din Propoziţia 8.1.1. Deci, funcţia j are şi proprietăţile 1), 2) şi 3) din Propoziţia 8.1.2. Conform criteriului de diferenţiabilitate, F este diferenţiabilă pe Δ. În particular, F este diferenţiabilă în $\left(x_0, y_0\right)$. Deci, există $a : \Delta \to$ ¡, $b : \Delta \to$ ¡ continue în $\left(x_0, y_0\right)$, cu $a\left(x_0, y_0\right) = b\left(x_0, y_0\right) = 0$, astfel încât pentru orice $\left(x, y\right) \in \Delta$ are loc relaţia:

$$F\left(x, y\right) - F\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right) + a\left(x, y\right)\left(y - y_0\right).$$

Luând $x \in I$, $y = j\left(x\right)$, avem $F\left(x, j\left(x\right)\right) = 0$. Deci, relaţia precedentă devine:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(j\left(x\right) - j\left(x_0\right)\right) + a\left(x, y\right)\left(x - x_0\right) +$$

$$+b\,(x,y)\big(j\,(x)-j\,(x_0)\big)=0\,.$$

Împărțind cu $x-x_0$, obținem:

$$\frac{j\,(x)-j\,(x_0)}{x-x_0}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+a\,(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)+b\,(x,y)}\,.$$

Dacă $x\to x_0$, rezultă $j\,(x)\to j\,(x_0)$, deoarece j este continuă în x_0.

OBSERVAȚIA 8.1.4 Aplicând regula de derivare a unui cât şi regula de derivare a funcțiilor compuse din relația (3), avem:

$$j\,''(x)=-\frac{\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right]\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\partial F}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right]}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

Se generalizează Propoziția 8.1.2 la funcțiile definite implicit de n ori variabile, astfel:

PROPOZIȚIA 8.1.3 Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime convexă deschisă şi $F:D\times I_k\to\mathbb{R}$, $I_k=[y_0-k,y_0+k]$, $k>0$, unde $F\in C^1_{D\times I_k}$. Dacă:

i) există $(\overline{x}_0,y_0)\in\overset{0}{D\times I_k}$, astfel încât $F(\overline{x}_0,y_0)=0$,

2) F este derivabilă în raport cu y pe $\overset{0}{D\times I_k}$ şi $F'_y(\overline{x},y)\neq 0$,

atunci există $h_i>0$, astfel încât $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}[x_{0i}-h_i,x_{0i}+h_i]\times[y_0-k,y_0+k]\subset D\times I_k$

şi există $f:\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}[x_{0i}-h_i,x_{0i}+h_i]\to I_k$, cu proprietățile:

a) $f(\overline{x}_0)=y_0$

b) $F(\overline{x},f(\overline{x}))=0$, $(\forall)\,\overline{x}\in\mathop{\mathrm{X}}\limits_{i=1}^{n}[x_{0i}-h_i,x_{0i}+h_i]$

c) f admite derivate parțiale continue pe domeniul său de definiție şi $f'_{x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}(\overline{x},y)}{F'_y(\overline{x},y)}$, f este unică cu aceste proprietăți.

Aplicație geometrică

Fie curba dată implicit.

$$F(x, y) = 0\,. \tag{5}$$

Graficul acestei curbe este mulțimea punctelor (x, y) din plan care verifică ecuația (5). Dacă sunt îndeplinite, în vecinătatea unui punct (x_0, y_0) de pe curbă, condițiile din Propoziția 8.1.1, rezultă că pe o vecinătate a acestui punct graficul coincide cu graficul funcției $y = j(x)$. Mai mult, dacă j este derivabilă în x_0 atunci, după cum se ştie, curba admite tangentă în punctul (x_0, y_0) a cărei pantă este $j'(x)$. Prin urmare, ținând seama de relația (3), ecuația:

$$y - y_0 = j'(x_0)(x - x_0)$$

devine:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$

Exemplu. Să se calculeze $\dfrac{dy}{dx}$ şi $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ pentru y definit de $F(\sin x + y, \cos y + x) = 0$, cu $F \in C^2(D)$, $D \subset ¡^2$.

Soluție. Notând cu $u = \sin x + y$ şi $v = \cos y + x$, rezultă $F(u, v) = 0$. Se derivează în funcție de x (ținând cont că u şi v sunt funcții de x şi y, iar y este funcție de x):

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

sau:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left[\cos x + \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial F}{\partial v}\left[1 - \sin y \cdot \frac{dy}{dx}\right] = 0\,, \tag{*}$$

de unde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x \cdot \dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}}{\dfrac{\partial F}{\partial u} - \sin y \cdot \dfrac{\partial F}{\partial v}}\,.$$

Dacă se derivează încă o dată relația (*) în raport cu x, se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \left[-\sin x + \frac{d^2y}{dx^2}\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \left(\cos x + \frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(\cos x + \frac{dy}{dx}\right)\left(1 - \sin y \cdot \frac{dy}{dx}\right) +$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(1-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial v}\left[0-\sin y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\cos y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0.$$

Exemplu. Să se arate că funcția $z=z(x,y)$, definită implicit de ecuația $F(x-az,y-bz)=0$, unde $a,b\in ¡$, $F\in C^1(D)$, verifică ecuația $a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Soluție. Se notează cu $u=x-az$ şi $v=y-bz$ şi rezultă:

$$\left(1-a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial u}-b\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}=0,$$

$$-a\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\left(1-b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

Deci,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{a\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+b\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}\cdot\frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+b\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Aşadar, $a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Exemplu. Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}$, dacă $y=y(x)$ este definită implicit de ecuația $\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1=0$.

Soluție. Se notează $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1$. Obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x-3\cdot 2x=6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right],$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y-3\cdot 2y=6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right].$$

Ținând cont de aceste derivate, obținem:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}=-\frac{x}{y},$$

de unde:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot y-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{-y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^2}$$

(s-a ținut cont că $y=y(x)$).

Exemplu. Funcția $y=y(x)$ este definită prin ecuația $\ln\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot arctg\frac{y}{x}$ $(a\neq 0)$. Calculați $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Soluție. Se derivează ecuația ținând cont că $y=y(x)$ şi se obține:

$$\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=a\cdot\frac{\frac{\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Se rezolvă această ecuație în raport cu $\frac{dy}{dx}$.

Exemplu. Să se arate că ecuația $F(x,y)=0$ defineşte implicit pe $y=f(x)$ şi să se calculeze $f'(x)$,

unde $F(x,y)=x^2+2y+x\cdot(\ln x-\ln y)-3$.

Soluție. Se observă că pentru $(1,1)$ se obține:

i) $F(1,1)=1+2+1\cdot(\ln 1-\ln 1)-3=3-3=0$,

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}=2-\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=2-1=1\neq 0$.

De asemenea, există $\frac{\partial F}{\partial x}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ continue în $D((1,1),r)$, $r\in(0,1)$.

Deci, fiind satisfăcute condițiile din Propoziția 8.1.3, $(\exists)\,I=[1-h,1-k]$, $J=[1+h,1+k]$ şi $f:I\to J$, $I\times J\subset D$ o funcție unică cu proprietățile:

a) $f(1)=1$;

b) $F(x,f(x))=0$;

c) $f\in C^1(I)$ şi $f'(x)=-\frac{y(2x+\ln x-\ln y+1)}{2y-x}$.

O altă problemă care se pune în legătură cu funcțiile definite implicit este determinarea diferențialelor (de diverse ordine) ale acestora. Pentru a găsi diferențiala de ordinul întâi, al doilea,... pentru funcția $y = f(\overline{x})$ definită implicit de ecuația $F(\overline{x}, y) = 0$, trebuie calculate derivatele de ordinul întâi, al doilea,... ale funcției $y = f(\overline{x})$. Se ştie că:

$$df(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} dx_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_{x_i}(\overline{x}, y)}{F'_y(\overline{x}, y)} dx_i .$$

Deci, $df(\overline{x}) = -\dfrac{1}{F'_y(\overline{x}, y)} \cdot \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(\overline{x}, y) dx_i$.

Se dă în continuare un algoritm pentru determinarea punctelor de extrem ale funcției $y = f(\overline{x})$ definită implicit de ecuația $F(\overline{x}, y) = 0$.

Acest algoritm are următorii paşi:

1) Se află punctele staționare ale funcției $y = f(\overline{x})$ care satisfac condiția $F'_y(\overline{x}, y) \neq 0$.

Pentru aceasta se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} F(\overline{x}, y) = 0 \\ F'_{x_1}(\overline{x}, y) = 0 \\ \vdots \\ F'_{x_n}(\overline{x}, y) = 0 \ . \end{cases}$$

2) Fie $(\overline{x}_0, y_0)$ o soluție a sistemului anterior. Se calculează $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\overline{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

3) Se calculează determinanții:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ k = \overline{1, n},$$

şi se aplică teorema lui Sylvester [vezi cap. 7, paragraful 3.8].

Exemplu. Să se afle extremele funcției $z(x, y)$ definită implicit de ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

Soluție. Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7$. Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F'_x\ (x,y,z)=0 \\ F'_y\ (x,y,z)=0 \end{cases}$$

şi se obțin soluțiile $(1,\ 1,\ 3)$ şi $(1,\ 1,-3)$. Pentru $(1,\ 1,\ 3)$, se obține $a_{11}=-\frac{1}{3}$, $a_{22}=-\frac{1}{3}$, $a_{12}=a_{21}=0$, $\Delta_1=-\frac{1}{3}<0$, $\Delta_2=\frac{1}{9}>0$. Deci ,$(1,\ 1,\ 3)$ este punct de maxim.

Analog se cercetează cel de-al doilea punct staționar.

2. SISTEME DE FUNCȚII IMPLICITE

DEFINIȚIA 8.2.1

Un sistem de m ecuații:

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)=0 \end{cases} \tag{1}$$

unde $F_k(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_m)=0$, $k=\overline{1,m}$, sunt m funcții de $(n+m)$ variabile definite pe $X\times Y$ cu $X\subset \mathbb{R}^n$, $Y\subset \mathbb{R}^m$ se numeşte **sistem de** m **funcții implicite**.

Un sistem de m funcții

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ y_2=f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ \vdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,...,x_n) \end{cases} \tag{2}$$

de n variabile definite pe $A\subset X\subset \mathbb{R}^n$ este o **soluție a sistemului** (1) în raport cu variabilele $y_1,y_2,...,y_m$ pe mulțimea A, dacă înlocuind pe y_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ în sistem îl verifică identic:

$$F_k\left(x_1,x_2,...,x_n;\ f_1(x_1,x_2,...,x_n),...,\ f_m(x_1,x_2,...,x_n)\right)=0,\ k=\overline{1,m}.$$

OBSERVAȚIA 8.2.1 În cazul în care sistemul (1) are pe mulțimea A o singură soluție (2), se spune că **funcțiile** $f_1,\ f_2,...,\ f_m$ **sunt definite implicit**

de sistemul de ecuații (1) sau că sistemul de funcții (2) s-a obținut din sistemul de ecuații (1) prin rezolvare în raport cu variabilele $y_1, y_2, ..., y_m$.

DEFINIȚIA 8.2.2 Dacă $F_i = F_i(y_1, y_2, ..., y_m)$, $i = \overline{1,m}$ au derivate parțiale în raport cu variabilele $y_1, y_2, ..., y_m$ pe mulțimea E, atunci determinantul de funcții

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

se numeşte **determinantul funcțional** al funcțiilor $F_1, F_2, ..., F_m$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, ..., y_m$ şi se notează cu:

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} \text{ sau } \frac{D(\overline{F})}{D(\overline{y})}$$

sau **iacobian** şi se notează cu J.

PROPOZIȚIA 8.2.1 (**Teorema de existență**) Fie $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ şi $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \in \operatorname{int} E$ şi funcția vectorială

$$\overline{F} = (F_1, F_2, ..., F_m) : E \to \mathbb{R}^m.$$

Dacă:

i) $\overline{F}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = 0$,

ii) funcțiile reale F_k, $(k = \overline{1,m})$ au derivate parțiale continue $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n)$, $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ $(1 \le j \le m)$ într-o vecinătate $U \times V$ a punctului $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$,

iii) iacobianul $\frac{D(\overline{F})}{D(\overline{y})}$ este diferit de 0 în punctul $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, atunci:

1) există o vecinătate $U_0 \times V_0$ a lui $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ cu $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ şi o funcție vectorială unică $\overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x})) : U_0 \to V_0$, astfel încât $\overline{y}_0 = \overline{f}(\overline{x}_0)$ şi $\overline{F}(\overline{x}, \overline{f}(\overline{x})) = 0$, pentru orice $\overline{x} \in U_0$.

2) funcțiile reale $f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x})$ au derivate parțiale continue pe U_0 şi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(x_i, y_2, ..., y_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_{m-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}}, ...$$

3) dacă funcțiile $F_1, F_2, ..., F_m$ au derivate parțiale de ordinul k pe $U \times V$, atunci funcțiile $f_1, f_2, ..., f_m$ au derivate parțiale de ordinul k continue pe U_0.

Demonstrație. Se face prin inducție după m. Pentru $m = 1$ (un sistem format dintr-o singură ecuație care defineşte o singură funcție reală implicită) Propoziția 8.1.1.

3. DEPENDENȚĂ FUNCȚIONALĂ

DEFINIȚIA 8.3.1 Dacă:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$$

sunt m funcții reale definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$, funcția reală $F = F(x_1, x_2, ..., x_n) : X \to \mathbb{R}$ **depinde de funcțiile** $f_1, f_2, ..., f_m$ pe mulțimea X dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi = \Phi(y_1, y_2, ..., y_m) : Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\overline{x} \in X$ să avem identitatea:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \Phi\left[f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)\right]$$

DEFINIȚIA 8.3.2 Funcțiile reale:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \quad ..., \quad y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$$

definite pe $X \subset \mathbb{R}^n$ sunt în **dependență funcțională** pe o mulțime $A \subset X$, dacă cel puțin una din ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Exemplu. Fie funcțiile:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x-y,\ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,y)=xy,$$
$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ h(x,y)=x^2+y^2.$$

Să se cerceteze dacă funcțiile sunt în dependență funcțională.

Soluție. Deoarece $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$, rezultă că $h=f^2+2g$. Deci, h depinde de f și g pe $\mathbb{R}^2$.

PROPOZIȚIA 8.3.1 Condiția necesară şi suficientă pentru ca n funcții de n variabile independente:

$$y_1=f_1(x_1,x_2,...,x_n),\ y_2=f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,y_n=f_n(x_1,x_2,...,x_n)$$

definite pe o mulțime $X\subset\mathbb{R}^n$ cu derivate parțiale continue pe X, să fie în dependență funcțională pe mulțimea $A\subset X$ este ca iacobianul:

$$\frac{D(y_1,y_2,...,y_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe A.

Demonstrație. Necesitatea. Pentru $n=3$. Fie:

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,x_3)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,x_3)\\ y_3=f_3(x_1,x_2,x_3)\end{cases}\tag{3}$$

și să presupunem că între funcțiile y_1, y_2, y_3 avem relația:

$$\Phi(y_1,y_2,y_3)=0.\tag{4}$$

Diferențiind în (4), se obține:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial\Phi}{\partial y_3}dy_3=0.\tag{5}$$

Însă, din (3), se obține evident:

$$dy_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}dx_3,$$

$$dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}dx_3,$$
$$dy_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}dx_3,$$
care, înlocuite în (5) şi regrupate după dx_1, dx_2, dx_3, dau egalitatea:
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)dx_2 +$$
$$+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)dx_3 = 0,$$
relaţie care trebuie să fie adevărată oricare ar fi dx_1, dx_2, dx_3 şi care conduce la sistemul omogen:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_3}\dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_3}\dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_3}\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases}$$
în care necunoscutele sunt $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}$.

Asupra relaţiei $\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0$ am făcut ipoteza că nu este identic nulă în y_1, y_2, y_3, deci $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}$ nu trebuie să fie simultan nule, ceea ce conform teoremei lui Rouché conduce la:
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru orice } (x_1, x_2, x_3) \in A.$$

Reciproc (**suficienţa**). Dacă $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 0$ pe A, atunci există cel puţin o legătură între y_1, y_2, y_3 pe A.

Această propoziție se poate generaliza la un sistem de n funcții cu m variabile astfel:

PROPOZIȚIA 8.3.2 Fie sistemul de funcții $f_1(\overline{x})$, $f_2(\overline{x})$, ..., $f_n(\overline{x})$, $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$. Dacă există un minor r al matricii iacobiene al acestui sistem de funcții, diferit de zero în $\overline{x}_0 \in D$ şi toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli în vecinătatea V a lui $\overline{x}_0$, atunci cele r funcții care apar în minorul de ordinul r sunt independente în V, celelalte $n-r$ funcții depind de aceste r funcții.

DEFINIȚIA 8.3.3 Funcțiile $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ se spune că sunt **independente** într-un punct $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in X$, dacă niciuna din funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$. Funcțiile $f_1,f_2,\ldots,f_n$ sunt independente pe X, dacă sunt independente în orice punct interior al lui X.

PROPOZIȚIA 8.3.2 Fie funcțiile $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ definite pe o mulțime $X\subset R^n$. Dacă funcțiile f_i au derivate parțiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ continue pe X şi dacă rangul matricei:

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

este $s\le m$ pe X, atunci din cele m funcții date, există s dintre ele independente pe X, iar celelalte $m-s$ rămase sunt dependente de acestea.

Exemplu. Sistemul:

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3+u^3=1 \\ xy^2+yz^2+zu^2=2 \\ \ln\left(x^2+y^2\right)+e^{z^2+u^2}=3 \end{cases}$$

defineşte y, z şi u ca funcţii de x în $D \in \mathbb{R}^3$. Să se calculeze $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$.

Soluţie. Derivând în raport cu x ecuaţiile sistemului şi ţinând seama că y, z şi u sunt funcţii de x, obţinem:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \frac{dz}{dx} + 2u \frac{du}{dx} = 0 \\ y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + 2yz \frac{dz}{dx} + u^2 \frac{dz}{dx} + 2zu \frac{du}{dx} = 0 \\ \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} + 2ze^{z^2+u^2} \frac{dz}{dx} + 2ue^{z^2+u^2} \frac{du}{dx} = 0. \end{cases}$$

Sistemul are o unică soluţie dacă:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 & 2u \\ 2xy + z^2 & 2yz + u^2 & 2zu \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2ze^{z^2+u^2} & 2ue^{z^2+u^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3y^2 & 3z^2 & 2u \\ -y^2 & 2yz + u^2 & 2zu \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2ze^{z^2+u^2} & 2ue^{z^2+u^2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3y^2 & -3z^2 & 2u \\ 2xy + z^2 & -y^2 & 2zu \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & -\frac{2x}{x^2+y^2} & 2ue^{z^2+u^2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 & -3x^2 \\ 2xy + z^2 & 2yz + u^2 & -y^2 \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2ze^{z^2+u^2} & -\frac{2x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}.$$

Exemplu. Se dau funcțiile: $u = f\left(\frac{x-y}{y-z}\right), v = g\left(\frac{y-z}{z-x}\right), w = h\left(\frac{z-x}{x-y}\right)$ cu $f, g, h \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^3$. Să se arate că funcțiile sunt în dependență funcțională şi să se găsească legătura dintre ele.

Soluție. Trebuie să arătăm că:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Notând $\alpha = \frac{x-y}{y-z}, \beta = \frac{y-z}{z-x}, \gamma = \frac{z-x}{x-y}$, obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{df}{d\alpha}\frac{1}{y-z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{df}{d\alpha}\frac{z-x}{(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{df}{d\alpha}\frac{x-y}{(y-z)^2}.$$

De aici rezultă că:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = f' \cdot g' \cdot h' \begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \\ y-z & z-x & x-y \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(y-z)^2 (z-x)^2 (x-y)^2} = 0$$

Pe $D' \subset D$, funcțiile *f, g, h* fiind monotone, avem:

$$\frac{x-y}{y-z} = f^{-1}(u), \frac{y-z}{z-x} = g^{-1}(v), \frac{z-x}{x-y} = h^{-1}(w).$$

Deci,

$$f^{-1}(u) \cdot g^{-1}(v) \cdot h^{-1}(w) = 1.$$

Exemplu. Să se determine α astfel încât funcțiile:
$u = f(\alpha x + 2y - z), v = g(-x - y + 2z), w = h(x + 3y - 2z)$
(unde f, g, h sunt funcții derivabile în raport cu argumentul lor într-un domeniu $V \in \mathbb{R}^3$) să fie în dependență funcțională în V.

Soluție. Avem:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = f' \cdot g' \cdot h' \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2 .$$

Pentru a găsi legătura, pentru $\alpha = \frac{5}{4}$, avem:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x + 2y - z = f^{-1}(u) \\ -x - y + 2z = g^{-1}(v) \\ x + 3y - 2z = h^{-1}(w), \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebuie ca:

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} f^{-1}(u) & 2 & -1 \\ g^{-1}(v) & -1 & 2 \\ h^{-1}(w) & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. EXTREME CONDIȚIONATE

În paragraful 3 din capitolul VII este dat algoritmul de determinare a punctelor de extrem condiționate. În continuare se prezintă pe larg extremele condiționate.

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi fie $A \subset E$.

DEFINIȚIA 8.4.1 Se spune că funcția f are în punctul $\overline{a} \in A$ un **extrem relativ** la mulțimea *A*, dacă restricția funcției *f* la mulțimea *A* are în punctul $\overline{a} \in A$ un extrem obişnuit.

DEFINIȚIA 8.4.2 Extremele funcției f relative la o submulțime $A \subset E$ se numesc **extreme condiționate**.

OBSERVAȚIA 8.4.1 Vom considera un sistem de $k<n$ funcții reale $F_1(\overline{x}), F_2(\overline{x}), \ldots, F_k(\overline{x})$ definite pe E, iar mulțimea A va fi definită ca mulțime a soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Aşadar, $A = \left\{ \overline{x} \,\middle|\, \overline{x} \in E, F_1(\overline{x}) = 0, F_2(\overline{x}) = 0, \ldots, F_n(\overline{x}) = 0 \right\}$. În acest caz, extremele funcției f relative la mulțimea A se mai numesc **extreme condiționate de sistemul** (1).

Următoarea propoziție dă condiții necesare de existență a punctului de extrem condiționat.

PROPOZIȚIA 8.4.1 Fie $\overline{a}$ un punct care verifică sistemul (1). Să presupunem că funcția f şi funcțiile $F_1(\overline{x}), F_2(\overline{x}), \ldots, F_k(\overline{x})$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate V a lui $\overline{a}$ şi că matricea funcțională $M = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ are în punctul $\overline{a}$ rangul k (egal cu numărul relațiilor sistemului (1)). Dacă $\overline{a}$ este punctul extrem al funcției f, condiționat de sistemul (1), atunci există k numere λ_i astfel încât să avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\overline{a}) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\overline{a}) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\overline{a}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{a}) + \lambda_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\overline{a}) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\overline{a}) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(\overline{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a}) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\overline{a}) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\overline{a}) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\overline{a}) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Demonstrație. Deoarece matricea funcțională $M = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ are în punctul $\overline{a}$ rangul k, există un determinant de ordinul k al acestei matrici diferit de 0 în punctul $\bar{a}$. Pentru a face o alegere presupunem că: $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0$ în punctul $\bar{a}$. Sistemul (1) se poate rezolva în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ în jurul punctului $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, deoarece:

- prin ipoteză $F_1(\bar{a}) = 0, F_2(\bar{a}) = 0, \ldots, F_n(\bar{a}) = 0;$
- funcțiile $F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \ldots, F_k(\bar{x})$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui $\bar{a}$;
- iacobianul acestor funcții în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ este diferit de zero.

Conform propoziției relative la sisteme de funcții implicite, există $V^k \subset A$ a punctului $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ în spațiul $\mathbb{R}^k$ şi o vecinătate V^{n-k} a punctului $(a_{k+1}, a_{K+2}, \ldots, a_n)$ în spațiul $\mathbb{R}^{n-k}$, astfel încât, pentru orice punct $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$, sistemul (1) să aibă o soluție unică $x_1, x_2, \ldots, x_k$ în V^k:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{3}$$

Avem: $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, \ldots, a_n), \ldots, a_k = \varphi_k(a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ au derivate parțiale continue pe mulțimea V^{n-k}. Să scriem că sistemul (3) este o soluție a sistemului (1), pentru orice $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$. Avem:

$$\begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n); x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n); x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Diferențialele acestor funcții sunt nule pe V^{n-k} (în particular şi în punctul $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} d\varphi_2, \ldots, \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} d\varphi_2, \ldots, \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} d\varphi_2, \ldots, \dfrac{\partial F_k}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

În sistemul (5), $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_k$ reprezintă diferențialele funcțiilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ calculate în punctul $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$, iar $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ sunt variabile independente.

Să considerăm funcția compusă:

$$\bar{F}(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$
$$= f\left(\varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n); (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\right) \quad (6)$$

definită pentru $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$.

Deoarece funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are în punctul $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un extrem condiționat de sistemul (1), funcția $F(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ are în punctul $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$ un extrem obişnuit (lucru evident). În acest caz, diferențiala acestei funcții în punctul $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$ este nulă:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} d\varphi_{k+1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d\varphi_n = 0 \qquad (7)$$

şi aici $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_k$ sunt diferențialele funcțiilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ în punctul $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$, iar $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ sunt variabile independente.

Ținând seama de (5) şi (7), pentru orice sistem de numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, avem:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) d\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) d\varphi_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\right) d\varphi_k +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}\right) d\varphi_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right) d\varphi_n = 0. \qquad (8)$$

Vom alege un număr $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ astfel încât coeficienții diferențialelor $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_k$ să se anuleze.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

derivatele fiind calculate în $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Acest lucru este posibil deoarece determinantul coeficienților lui $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ din (*) este $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0$ calculat în $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Cu aceste valori obținute pentru $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, egalitatea (8) se scrie:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} \right) d\varphi_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) d\varphi_n = 0 .$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori ale variabilelor independente $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$, este necesar și suficient să se anuleze coeficienții acestor variabile, adică:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Egalitățile (*) și (**) formează sistemul doi de egalități.

OBSERVAȚIA 8.4.2 Orice punct $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care verifică sistemul (1) în care matricea $M = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ are rangul k și care verifică sistemul (2) pentru anumite valori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se numește **punct staționar** al funcției f condiționat de sistemul (1).

Coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se numesc **multiplicatorii lui Lagrange.**

OBSERVAȚIA 8.4.3 Se observă că în sistemul (2) apar derivatele parțiale ale funcției $f(\overline{x})+\lambda_1 F_1(\overline{x})+\ldots+\lambda_k F_k(\overline{x})$ definită pentru $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}$.

OBSERVAȚIA 8.4.4 Din cele de mai sus, rezultă că pentru o funcție f cu derivate parțiale continue pe o mulțime deschisă $E\subset\mathbb{R}^n$, calea de urmat pentru aflarea punctelor staționare condiționate de sistemul (1) în care funcțiile $F_1,F_2,\ldots,F_k$ au derivate parțiale continue pe E este:

1) se formează funcția ajutătoare:
$\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=f(\overline{x})+\lambda_1 F_1(\overline{x})+\ldots+\lambda_k F_k(\overline{x})$
cu coeficienții $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ nedeterminați;

2) se formează sistemul de $n+k$ ecuații:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)=0\\ F_1=0\\ F_2=0\\ \vdots\\ F_k=0,\end{cases}$$

cu $n+k$ necunoscute: $x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ şi se caută soluții ale acestui sistem;

3) dacă $x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ este o soluție a acestui sistem atunci punctul $x_1,x_2,\ldots,x_n$ este punct staționar condiționat al funcției f.

Fie $\overline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ un punct staționar al funcției f condiționat de (1). Pentru a vedea dacă $\overline{a}$ este sau nu un punct de extrem condiționat va trebui să studiem semnul diferenței:

$$f(\overline{x})-f(\overline{a})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

pentru punctele $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ care verifică sistemul (1), deci pentru care $F_1(\overline{x})=0, F_2(\overline{x})=0,\ldots,F_k(\overline{x})=0$. Se observă că pentru asemenea puncte $\overline{x}$, avem $\Phi\left(\overline{x}\right)=f\left(\overline{x}\right)$ şi deci $f\left(\overline{x}\right)-f\left(\overline{a}\right)=\Phi\left(\overline{x}\right)-\Phi\left(\overline{a}\right)$. Pe de altă parte, funcția $\Phi\left(\overline{x}\right)$ are derivate parțiale de ordinul al doilea continue într-o vecinătate a lui $\overline{a}$. Deci, putem scrie formula lui Taylor de ordinul al doilea:

$$\Phi\left(\overline{x}\right)-\Phi\left(\overline{a}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\Phi\left(\overline{a}\right)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j+\frac{1}{2}\omega\left(x\right)\rho^2,$$

unde:

$$\lim_{x\to\overline{a}}\omega\left(\overline{a}\right)=0,\quad \rho=\sqrt{\left(x_1-a_1\right)^2+\ldots\left(x_n-a_n\right)^2}.$$

Dacă diferențiem relațiile sistemului (1), obținem k relații liniare în $dx_1,\ldots,dx_n$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n=0.\end{cases}$$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este matricea funcțională $M=\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ care are rangul k, se pot exprima ca diferențiale în funcție de celelalte $n-k$, introducând în formula lui Taylor de mai sus obținem în membrul drept o formă pătratică definită sau nu $\left(\sum A_{ij}dx_i dx_j\right)$. În cazul când $\sum A_{ij}dx_i dx_j$ este definită pozitiv, avem minim condiționat, iar când este definită negativ avem un maxim condiționat.

Exemplu. Să se găsească extremele funcției $f\left(x,y,z\right)=xy+xz+yz$ condiționate de $xyz=1$ în domeniul $x>0,\ y>0,\ z>0$.

Soluție. Fie $\Phi\left(x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)+\lambda\left(xyz-1\right)$. Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ F(x, y, z) = xyz - 1 = 0, \end{cases}$$

obținem $x = 1,\ y = 1,\ z = 1,\ \lambda = -2,\ A(1,1,1)$. De aici rezultă:

$$\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz + 2,\ d^2\Phi\big|_A = -(dxdy + dydz + dxdz).$$

Diferențiind $xyz = 1$ şi calculând în punctul A, rezultă $dx + dy + dz = 0$. Deci, $d^2\Phi\big|_A = dx^2 + dxdy + dy^2$ este definită pozitiv, de unde rezultă A este minim condiționat.

Exemplu. Să se studieze extremele funcției $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu legăturile: $-x + y + z = 1$ şi $x - z = 0$.

Soluție. Vom folosi metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Se consideră funcția ataşată:

$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + yz + zx + \lambda(-x + y + z) + \mu(x - z)$.

Dacă există, extremele se găsesc printre punctele staționare, care sunt soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + z - \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + z + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = x + y + \lambda - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -x + y + z - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = x - z = 0, \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem: $x = -1,\ y = 1,\ z = -1,\ \lambda = 2,\ \mu = 2.$ Avem, $d^2F\big|_A = 2(dx \cdot dy + dx \cdot dz + dy \cdot dz)$. Diferențiind legăturile în punctul $(-1,1,1)$, avem:

$$\begin{cases} -dz+dy+dz=0 \\ dx=dz\ . \end{cases}$$

Înlocuindu-le, se obține $d^2F\big|_A = 2dx^2 > 0$. Rezultă că $(-1,1,1)$ este punct de minim.

5. SCHIMBĂRI DE VARIABILĂ ŞI FUNCȚII

Rezolvarea multor probleme se simplifică prin schimbarea variabilelor independente sau a funcțiilor care intervin în aceste probleme.

A. Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de o variabilă

PROPOZIȚIA 8.5.1 Fie $y=f(x)$, $x\in X\subset \text{¡} \to y\in Y\subseteq \text{¡}$ şi funcția $x=j(t)$, $t\in T$, $f,j\in C^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$. Atunci, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{j'(t)}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

Demonstrație. Funcția compusă $y=f(j(t))$, $t\in T$, realizează o aplicație a mulțimii T în mulțimea Y. Aplicând regula de derivare a unei funcții compuse, obținem:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dj}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dj}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{j'(t)}\cdot\frac{dy}{dt},$$

relație care exprimă pe $\dfrac{dy}{dx}$ prin derivata $\dfrac{dy}{dt}$.

OBSERVAȚIA 8.5.1

a) Deci operatorul diferențial este:

$$\frac{d\,\cdot}{dx}=\frac{1}{j'(t)}\cdot\frac{d\,\cdot}{dt}. \tag{1}$$

Ținând cont de regula (1), se obține:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{j'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{j'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{j'(t)}\left(-\frac{j''}{j'^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{j'}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\,\cdot}{dx^2}=\frac{1}{\left[j'(t)\right]^2}\left[-\frac{j''(t)}{j'(t)}\cdot\frac{d\,\cdot}{dt}+\frac{d^2\,\cdot}{dt^2}\right],\text{ etc.}$$

Exemplu. Fie ecuația $(1-x^2)\cdot y''+xy'=0$. Ce devine ecuația dacă se face schimbarea $x=\cos t$?

Soluție. Fie $\varphi(t)=\cos t$. Avem:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varphi'(t)}\left(-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\frac{1}{\sin t}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{ctg}t\cdot\frac{dy}{dt}\right).$$

Așadar, prin înlocuire în ecuația dată, se obține:

$$\left(1-\cos^2 t\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{ctg}t\cdot\frac{dy}{dt}\right)+\cos t\cdot\frac{-1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\mathrm{ctg}t\cdot\frac{dy}{dt}=0.$$

B. Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de două variabile

PROPOZIȚIA 8.5.2 Fie funcția $z=f(x,y)$, $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ și funcțiile $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $\varphi,\psi:V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ astfel încât $(x,y)\in X$, f,φ,ψ au derivatele parțiale de ordinul al doilea continue pe domeniul de definiție. Atunci $\frac{df}{dx}=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dz}{du}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{dz}{dv}\right)$, unde $D=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$.

Demonstrație. Din compunerea funcțiilor f,φ,ψ, rezultă:

$$z(u,v)=f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right).$$

Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, se obține:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial v}.\end{cases}$$

Deci,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

OBSERVAȚIA 8.5.2 Pentru calculul derivatelor de ordinul al doilea se folosesc operatorii:

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x}=\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial\cdot}{du}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial\cdot}{dv}\right),\ \frac{\partial\cdot}{\partial y}=\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial u}\right),$$
aplicați unul altuia sau aplicați în mod repetat.

C. Transformarea punctuală a curbelor plane

Problema se pune astfel: fie o transformare regulată

$$(T):\begin{cases}u=f(x,y)\\ v=g(x,y)\end{cases}\qquad f,g:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

şi $(C):y=y(x)$ o curbă plană. Dacă curbei plane (C) i se aplică transformarea (T), se obține $T(C)=(\Gamma):v=v(u)$. Pentru studiul curbei (Γ) trebuie exprimate derivatele $\frac{dv}{du},\frac{d^2v}{du^2},\ldots$ în funcție de derivatele $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots$

Problema este rezolvată de următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 8.5.3 Dacă există derivatele $\frac{d^ny}{dx^n}$ şi $\frac{d^nv}{du^n}$, $n=1,2,\ldots$, atunci:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}.$$

Demonstrație. Deoarece $u=f(x,y)$ şi $v=g(x,y)$, rezultă că:

$$\begin{cases}du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\\ dv=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy\end{cases}\Rightarrow\frac{dv}{du}=\frac{\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy}{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy}\Rightarrow\frac{dv}{du}=\frac{g'_x+g'_y\cdot\frac{dy}{dx}}{f'_x+f'_y\cdot\frac{dy}{dx}}.$$

OBSERVAȚIA 8.5.3 Din Propoziția 8.4.3 se obține operatorul $\frac{d\cdot}{du}=\frac{1}{u'_x}\cdot\frac{d\cdot}{dx}$. Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale lui $v=v(u)$, se aplică în mod repetat acest operator. Deci,

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{u'_x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{g'_x + g'_y \cdot \dfrac{dy}{dx}}{f'_x + f'_y \cdot \dfrac{dy}{dx}} \right), \dots$$

Exemplu. Să se transforme ecuația diferențială $y'' + x \cdot y'^3 = 0$, unde $y = y(x)$, pentru schimbarea de variabilă:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}$$

în noua funcție $r = r(t)$.

Soluție. Avem:

$$\begin{cases} dy = \left(r'\sin t + r\cos t \right) dt \\ dx = \left(r'\cos t - r\sin t \right) dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{r'\sin t + r\cos t}{r'\cos t - r\sin t}. \qquad (1)$$

Deci,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r'(\cos t - r\sin t)} \cdot \left(\frac{r'\sin t + r\cos t}{r'\cos t - r\sin t} \right)'_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{\left(r'\cos t - r\sin t \right)^3}. \qquad (2)$$

Ținând cont de (1) și (2), ecuația diferențială devine:

$$r \cdot r'' - 2r'^2 - r\cos t\left(r'\sin t + r\cos t \right)^3 - r^2 = 0.$$

D. Transformarea punctuală a suprafețelor

Problema se pune în felul următor: fiind dată suprafața (S) de ecuație $z = z(x, y)$ şi transformarea punctuală regulată:

$$(T): \begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z), \quad f, g, h : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ w = h(x, y, z) \end{cases}$$

atunci dacă suprafeței supraftei (S) i se aplică transformarea (T), se obține suprafața $\Sigma = T(S)$: $w = w(u, v)$.

Pentru a studia suprafața (Σ) trebuie exprimate derivatele $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$,... în raport cu derivatele $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,.... Această problemă se rezolvă astfel:

PROPOZIȚIA 8.5.4 În cazul în care există: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$,... și $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$,... atunci

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} h'_x & g'_x & z'_x \\ h'_y & g'_y & z'_y \\ h'_z & g'_z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x & g'_x & h'_x \\ f'_y & g'_y & h'_y \\ f'_z & g'_z & -1 \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & h'_x & z'_x \\ f'_y & h'_y & z'_y \\ f'_z & h'_z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x & g'_x & h'_x \\ f'_y & g'_y & h'_y \\ f'_z & g'_z & -1 \end{vmatrix}}.$$

Demonstrație. Avem:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv, \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ du = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \end{array} \right\} & (2) \\ dw = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz & (3) \\ dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy & (4) \end{array} \right.$$

Înlocuind relațiile (4) în relațiile (2) și (3), iar după aceea relațiile (2) în relația (1) după care egalând cu (3), se obține:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dx +$$

$$+\left[\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dy.$$

Prin identificare, se obține sistemul liniar în $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$:

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial u}\left(f'_x+f'_z\cdot z'_x\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(g'_x+g'_z\cdot z'_x\right)=h'_x+h'_z\cdot z'_x,\\ \frac{\partial w}{\partial u}\left(f'_y+f'_z\cdot z'_y\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(g'_y+g'_z\cdot z'_y\right)=h'_y+h'_z\cdot z'_y.\end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem, se obține:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\begin{vmatrix}h'_x & g'_x & z'_x\\ h'_y & g'_y & z'_y\\ h'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'_x & g'_x & h'_x\\ f'_y & g'_y & h'_y\\ f'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\begin{vmatrix}f'_x & h'_x & z'_x\\ f'_y & h'_y & z'_y\\ f'_z & h'_z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'_x & g'_x & h'_x\\ f'_y & g'_y & h'_y\\ f'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}}.$$

Exemplu. Ce devine relația $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z;\ \ z=z(x,y)$ dacă se face schimbarea de variabile:

$$(T):\begin{cases}u=x+z\\ v=y+z\\ w=x+y\end{cases}$$

în noua funcție $w=w(u,v)$?

Soluție. Prin diferențiere se obține sistemul:

$$\begin{cases}du=\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\\ dv=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\\ dx+dy=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot dv.\end{cases}$$

În acest sistem, eliminând pe u şi v, se obține:

$$dx+dy=\left[\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right]dx+\left[\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right]dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-\dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}}$$

şi

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-\dfrac{\partial w}{\partial v}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}}. \tag{1}$$

Din transformarea (T), se obține:

$$x=\frac{u+w-v}{2},\ y=\frac{v+w-u}{2},\ z=\frac{u+v-w}{2}. \tag{2}$$

Ținând cont de relațiile (1) şi (2), ecuația din enunț devine:

$$(u+w-v)\frac{\partial w}{\partial u}+(v+w-u)\frac{\partial w}{\partial v}=3w-u-v.$$

6. EXERCIȚII REZOLVATE

EXERCIȚIUL 8.6.1 Se dă ecuația $y^2+x^5=1$. Să se cerceteze dacă această ecuație defineşte pe *y* ca funcție de x.

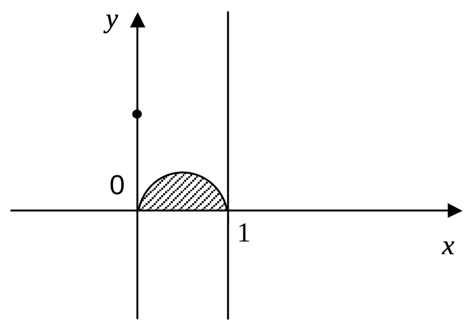
Soluție. Se notează $F(x,y)=y^2+x^5-1$. Ținând cont de faptul că $y^2=1-x^5$, atunci evident $1-x\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,1]$. În acest caz, $y\in(-\infty,0]$ sau $y\in[0,\infty)$. Deci, există două situații pentru ca $F(x,y)$ să fie o funcție de două variabile şi anume:

a) $F:(-\infty,+1]\times[0,\infty)\to \mathbb{R}$;

b) $F:(-\infty,1]\times(-\infty,0]\to \mathbb{R}$.

Considerând $F:(-\infty,1]\times[0,\infty)\to \mathbb{R}$, ecuația $F(x,y)=0$ defineşte pe y ca funcție de x, dacă există $(x_0,y_0)\in(-\infty,1]\times[0,\infty)$ astfel încât $F(x_0,y_0)=0$ şi există $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\neq 0$ într-o vecinătate a lui (x_0,y_0).

Dacă se consideră punctul $(0,1)$, atunci este evident că $F(0,1)=0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\neq 0$, $(\forall)$ $(x,y)\in V_{(0,1)}$. $V_{(0,1)}$ este prezentat în figura alăturată:



Exercițiul 8.6.2 Se dă ecuația $x^2+2y^2+3z^2=1$. În ce condiții ecuația definește pe z ca funcție de x, y. Să se determine mulțimea de continuitate şi diferențiabilitate a funcției $z(x,y)$.

Soluție. Ecuația se mai scrie şi astfel: $3z^2=1-x^2-2y^2$. Este evident că această egalitate are sens în cazul în care $1-x^2-2y^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+2y^2-1\leq 0$.

Se notează $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-1$. În acest caz, $z\in[-1,0]$ sau $z\in[0,1)$. Deci, există situațiile:

a) $F: D\times[0,1]\to \mathbb{R}$;

b) $F: D\times[-1,0]\to \mathbb{R}$, unde $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2-1\leq 0\}$.

Există $(x_0,y_0,z_0)\in D\times[0,1]$ astfel încât $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Într-adevăr, $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{9}}\right)=0$. Deci, $F: D\times[0,1]\to \mathbb{R}$ şi atunci ecuația $F(x,y,z)=0$ definește pe z funcție de (x,y). Dacă se consideră $F: D\times[-1,1]\to \mathbb{R}$, atunci fie $D_1,D_2\subset \mathbb{R}$ astfel încât $D_1\cup D_2=D$ şi $D_1\cap D_2=\emptyset$. În acest caz, $F(x,y,z)=0$ implică:

$$z(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-x^2-2y^2}, & (x,y)\in D_1\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-x^2-2y^2}, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

Deci, ecuația $F(x,y,z)=0$ are o infinitate de soluții $z(x,y)$ pe D. Aceste soluții nu sunt funcții continue. Într-adevăr, fie $(a,b)\in \mathrm{Fr}D_1$ (de exemplu).

Avem:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ (x,y)\in D_1}} z(x,y)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-a^2-2b^2}\neq\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ (x,y)\in D_2}} z(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-a^2-2b^2}\,.$$

Dacă se consideră funcția $F:D\times[0,1]\to\mathbb{R}$, atunci ecuația $F(x,y,z)=0$ definește pe $z(x,y)$ și aceasta este continuă. Analog pentru cazul $F:D\times[-1,0]\to\mathbb{R}$. Deci, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2-1\leq 0\}$ este mulțimea de continuitate pentru funcția $z(x,y)$ definită implicit de ecuația $F(x,y,z)=0$ atât în cazul a), cât și în cazul b).

Pentru ca $z(x,y)$ să fie diferențiabilă, trebuie ca $F(x,y,z)=0$ să admită derivate parțiale continue și $F_z'(x,y,z)\neq 0$. Aceste condiții implică faptul că domeniul de diferențiabilitate a lui $z(x,y)$ este

$D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2-1<0\}$ atât în cazul a), cât și în cazul b).

EXERCIȚIUL 8.6.3 Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ pentru funcția $z(x,y)$ definită implicit de ecuația $\ln(x^2+y^2+z^2)+ax+by+cz=1$.

Soluție.

Fie $F:\mathbb{R}_+^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)+ax+by+cz-1$.

Avem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}+a}{\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}+c}=-\frac{2x+a(x^2+y^2+z^2)}{2z+c(x^2+y^2+z^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+b(x^2+y^2+z^2)}{2z+c(x^2+y^2+z^2)}.$$

Se derivează egalitatea $F(x,y,z)=0$ în raport cu x și apoi în raport cu y, ținând cont că z este funcție de x și y, și se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)[2z+c(x^2+y^2+z^2)]}\left[\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

EXERCIȚIUL 8.6.4 Să se arate că funcția $z(x,y)$ definită de $F(x-mz, y-nz)=0$, $m,n\in \mathbb{R}$, verifică relația $m\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+n\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

Soluție. Fie $u=x-mz$ și $v=y-nz$. Derivând egalitatea $F(x-mz, y-nz)=0$ în raport cu x, se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial u}\left(1-m\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(1-n\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{m\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\dfrac{\partial F}{\partial v}}. \tag{1}$$

Analog,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}}{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}. \tag{2}$$

Ținând cont de egalitățile (1) și (2), se obține:

$$m\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+n\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}}{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}+\frac{n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}=\frac{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}{m\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}+n\cdot\dfrac{\partial F}{\partial v}}=1.$$

EXERCIȚIUL 8.6.5 Să se afle punctele de extrem ale funcției $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuația: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0$.

Soluție. Se notează $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-2y-7$. Punctele staționare sunt soluțiile sistemului $\begin{cases}F'_x\,(x,y,z)=0\\ F'_y\,(x,y,z)=0\\ F(x,y,z)=0\end{cases}$ care verifică condiția $F'_z\,(x,y,z)\neq 0$.

Deci,

$$\begin{cases}2x-2=0\\ 2y-2=0\\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0.\end{cases}$$

Se obțin soluțiile $(1,1,3)$ și $(1,1,-3)$. Cum $F_z'(x,y,z)=2z$, se observă că $F_z'(1,1,3)=6\neq 0$ și $F_z'(1,1,-3)=-6\neq 0$. Deci, atât $(1,1,3)$ cât şi $(1,1,-3)$ sunt puncte staționare. Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z}=\frac{1-x}{z}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z}=\frac{1-y}{z}. \tag{2}$$

Se derivează (1) în raport cu x şi se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-z-(1-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{-z-(1-x)\dfrac{1-x}{z}}{z^2}=-\frac{z^2+(1-x)^2}{z^3}. \tag{3}$$

Se derivează (2) în raport cu y şi se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+(1-y)^2}{z^3}. \tag{4}$$

Se derivează (1) în raport cu y şi se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-(1-x)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{(1-x)(1-y)}{z^3}.$$

Se cercetează dacă $(1,1,3)$ este punct de extrem. Avem:

$$a_{11}=-\frac{9}{27}=-\frac{1}{3},\ a_{22}=-\frac{1}{3},\ a_{12}=a_{21}=0,$$

$$a_{11}=-\frac{1}{3}<0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}>0.$$

Deci, $(1,1,3)$ este punct de maxim pentru funcția definită implicit.
Se cercetează dacă $(1,1,-3)$ este punct de extrem. Avem:

$$a_{11}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}>0,\ a_{22}=\frac{1}{3},\ a_{12}=a_{21}=0,$$

$$a_{11}=\frac{1}{3}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}>0.$$

Deci, $(1,1,-3)$ este punct de minim pentru funcția definită implicit.

EXERCIȚIUL 8.6.6 Funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit de sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = v. \end{cases}$$

Să se calculeze derivata funcției f după direcția $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$ în punctul $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

Soluție. Se notează $F_1(x, y, z, u, v) = x - u \cdot \cos v$, $F_2(x, y, z, u, v) = y - u \cdot \sin v$, $F_3(x, y, z, u, v) = z - v$. Se observă că funcțiile F_1, F_2, F_3 sunt continue şi derivabile în $\mathbb{R}^5$. Avem:

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(z, u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & -\cos v & u \sin v \\ 0 & -\sin v & -u \cos v \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = u .$$

Se observă că:

$$\left.\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(u, v, w)}\right|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4}\right)} = 1 \neq 0 .$$

Conform cu teorema de existență a sistemelor de funcții implicite, din cele arătate anterior, rezultă că sistemul:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, u, v) = 0 \\ F_2(x, y, z, u, v) = 0 \\ F_3(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

defineşte implicit funcțiile $z = f(x, y)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$.

Conform aceleiaşi teoreme, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, z, u, v)}}{\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(z, u, v)}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y, z, u, v)}}{\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(z, u, v)}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{-1}{u} \cdot \sin v, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}.$$

Aşadar,

$$\frac{\partial f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\partial x}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{\partial f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\partial y}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dacă $\vec{s}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}$, atunci $\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}\right)\cdot\vec{s}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot b$.

Dacă $\vec{s}=\vec{i}+2\vec{j}$, atunci $\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCIŢIUL 8.6.7 Sistemul $\begin{cases}x+y+u^2+v^2=1\\ xy+u^3+v^3=2\end{cases}$ defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se determine $du(x,y)$ şi $dv(x,y)$.

Soluţie. Se ştie că $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ şi $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$. Pentru determinarea derivatelor $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ se foloseşte o altă modalitate faţă de cea din exerciţiul anterior şi anume, se derivează sistemul în raport cu x, respectiv în raport cu y, ţinând cont că x şi y sunt variabile independente, iar u şi v sunt funcţii de x şi y. Avem:

$$\begin{cases}2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-1\\ 3u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-y.\end{cases}$$

Deci,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 2v\\ -y & 3v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{2yv-3v^2}{6uv^2-6u^2v}=\frac{2y-3v}{6u(v-u)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 3u^2 & -y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{3u^2-2yu}{6uv^2-6u^2v}=\frac{3u-2y}{6v(v-u)}.$$

Analog se determină $\frac{\partial u}{\partial y}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y}$ rezolvând sistemul $\begin{cases} 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \\ 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -x \end{cases}$

şi se obţine:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ -x & 3v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}} = \frac{2vx - 3v}{6uv^2 - 6u^2 v} = \frac{2x-3}{6u(v-u)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 3u^2 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}} = \frac{3u^2 + 2ux}{6uv^2 - 6u^2 v} = \frac{3u-2x}{6v(v-u)}.$$

Aşadar,

$$du = \frac{2y-3v}{6u(v-u)} dx + \frac{2x-3}{6u(v-u)} dy \Rightarrow du = \frac{1}{6u(v-u)}[(2y-v)dx + (2x-3)dy]$$

$$dv = \frac{1}{6u(v-u)}[(3u-2y)dx + (3u+2x)dy].$$

EXERCIŢIUL 8.6.8 Fie

$$u_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$u_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$u_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ u_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

Să se arate că u_1, u_2, u_3 sunt în dependenţă funcţională.

Soluţie. Este evident $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$. Deci, $u_2^2 = u_1 + 2u_3 \Rightarrow u_1 = u_2^2 - 2u_3$. Se consideră $\varphi(u_2, u_3) = u_2^2 - 2u_3$. Deci, $u_1 = \varphi(u_2, u_3)$, ceea ce arată că u_1 depinde funcţional de u_2 şi u_3.

EXERCIŢIUL 8.6.9 Fie *f*, *g*, *h* bijecţii şi $u, v, w : \mathbb{R}_+^{*3} \to \mathbb{R}$, $u = f\left(\frac{y}{z}\right)$, $v = g\left(\frac{z}{x}\right)$, $w = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Să se arate că u, v, w sunt dependente funcţional şi să se găsească relaţia dintre ele.

Soluţie. Se ştie că u, v, w sunt dependente funcţional dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 .$$

Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} \cdot f' ,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} \cdot f' ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{z}{x^2} \cdot g' , \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x} \cdot g' ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot h' ,\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot h' ,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Deci,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = f' \cdot g' \cdot h' \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{f' \cdot g' \cdot h'}{x \cdot y \cdot z} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{y}{z} \\ -\frac{z}{x} & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{x}{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{f' \cdot g' \cdot h'}{x \cdot y \cdot z} \cdot \left(-\begin{vmatrix} -\frac{z}{x} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \frac{y}{z} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{z}{x} & 0 \\ 1 & -\frac{x}{y} \end{vmatrix} \right) = \frac{f' \cdot g' \cdot h'}{x \cdot y \cdot z} \cdot (1-1) = 0 .$$

Aşadar, u, v, w sunt în dependență funcțională. Cum f, g, h sunt bijecții, atunci există f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} şi:

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = f^{-1}(u) \\ -\frac{z}{x} = g^{-1}(v) \\ \frac{x}{y} = h^{-1}(w). \end{cases}$$

Rezultă că $f^{-1}(u)\cdot g^{-1}(v)\cdot h^{-1}(w)=1$ sau $u=f\left(\dfrac{1}{g^{-1}(v)\cdot h^{-1}(w)}\right)$ care reprezintă relația între funcțiile u,v,w.

EXERCIȚIUL 8.6.10 Fie f,g,h bijecții și $u,v,w:A\to\mathbb{R}$, unde $u=f\left(\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}\right)$, $v=g\left(\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}\right)$, $w=h\left(\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}\right)$. Să se arate că u,v,w sunt în dependență funcțională și să se găsească relația dintre ele.

Soluție. Pentru a arăta ca u,v,w sunt în dependență funcțională trebuie arătat că:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=0.$$

Dar,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x(x-y)(x-z)-x^2(x-z)-x^2(x-y)}{(x-y)^2(x-z)^2}\cdot f'=\frac{2yz-x(y+z)}{(x-y)^2(x-z)^2}\cdot f',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2(x-z)}{(x-y)^2(x-z)}\cdot f'=\frac{x^2}{(x-y)^2(x-z)}\cdot f',\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)^2}\cdot f',$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2}{(y-z)(y-x)^2}\cdot g',\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2xz-y(x+z)}{(y-z)^2(y-x)^2}\cdot g',$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{y^2}{(y-z)^2(y-x)}\cdot g',$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{z^2}{(z-x)^2(z-y)}\cdot h',\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{z^2}{(z-x)(z-y)^2}\cdot h',$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2xy-z(x+y)}{(z-x)^2(z-y)^2}\cdot h'.$$

Atunci,

$$\Delta=\frac{f'\cdot g'\cdot h'}{(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{2yz-x(y+z)}{(x-y)(x-z)} & \frac{x^2}{x-y} & \frac{x^2}{x-z}\\ \frac{y^2}{y-x} & \frac{2xz-y(x+z)}{(y-z)(y-x)} & \frac{y^2}{y-z}\\ \frac{z^2}{z-x} & \frac{z^2}{z-y} & \frac{2xy-z(x+y)}{(z-x)(z-y)}\end{vmatrix}=0.$$

Deci, u,v,w sunt în dependență funcțională pe A (A fiind $\mathbb{R}^3$ mai puțin planele bisectoare). Deoarece f,g,h sunt bijecții, există $f^{-1},g^{-1},h^{-1}:\mathbb{R}\to A$ astfel încât:

$$f^{-1}(u)=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)},\ g^{-1}(v)=\frac{y^2}{(y-x)(y-z)},\ h^{-1}(w)=\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Dar,

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=1.$$

Atunci, $f^{-1}(u)+g^{-1}(v)+h^{-1}(w)=1$.

OBSERVAȚIE. Deoarece pentru a arăta că $\Delta=0$ sunt necesare calcule foarte lungi, se poate arăta dependența funcțională, arătând direct relația dintre u,v,w.

EXERCIȚIUL 8.9.11 Să se arate că funcțiile $u=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $v=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ și $w=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$ sunt în dependență funcțională pe $\mathbb{R}^n$.

Soluție. Pentru ca funcțiile u,v,w să fie în dependență funcțională pe $\mathbb{R}^n$ trebuie ca matricea jacobiană

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n}\\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial x_n}\\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

să nu aibă rangul trei. În acest caz, matricea jacobiană este:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{pmatrix},$$

unde $S_j=\sum_{k=1}^{n} x_k - j$, $j=\overline{1,n}$. Într-adevăr, $rang\ J<3$, deoarece toți minorii de ordin 3 sunt nuli.

Fie $\Delta_{ijk}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_i & 2x_j & 2x_k \\ S_i & S_j & S_k \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{l=1}^{n} x_l & \sum_{l=1}^{n} x_l & \sum_{l=1}^{n} x_l \\ S_i & S_j & S_k \end{vmatrix}=2\sum_{l=1}^{n} x_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ S_i & S_j & S_k \end{vmatrix}=0$.

Rezultă că $\Delta_{ijk}=0$. Cum Δ_{ijk} este un determinant de ordin 3 oarecare al matricii J, rezultă că $rang\ J<3$. Deci, u,v,w sunt în dependență funcțională pe $\mathbb{R}^3$.

OBSERVAȚIE. Dependența funcțională a lui u,v,w se observă şi direct, deoarece $v=u^2-2w$.

EXERCIȚIUL 8.6.12 Se consideră ecuația diferențială

$$(x+1)^2 y''+2(x+1)y'+4y=\ln|x+1|.$$

Care este forma ecuației dacă se utilizează substituția $|x+1|=e^t$, $t\in\mathbb{R}$?

Soluție. Se consideră $x+1>0$. Deci, substituția devine $x+1=e^t$. Deci, $x=e^t-1=f(t)$. Se ştie că:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(t)}\cdot\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{f'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}\right).$$

Deci,

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Ținând cont de acestea, ecuația devine $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+4y=t$.

Dacă se consideră $x+1<0$, atunci $x+1=-e^t$ şi se obține acelaşi rezultat.

EXERCIȚIUL 8.6.13 Ce devine ecuația $y''\cdot \sin x + y'\cdot(\cos x + 1) = 0$ dacă se foloseşte schimbarea de variabilă $t = tg\frac{x}{2}$?

Soluție. Se observă că:

$$x = 2arctgt\,,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,,\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}.$$

Cum $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\frac{dy}{dt}$, atunci:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\frac{dy}{dt}\right] = \frac{1}{2}(t^2+1)\left[t\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right] =$$

$$= \frac{t(t^2+1)}{2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{(t^2+1)^2}{4}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}.$$

De asemenea, se ştie că $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ şi $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ținând cont de toate acestea, se obține: $t\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\frac{dy}{dt} = 0$.

EXERCIȚIUL 8.6.14 Ce devine ecuația $y'' + xy' = e^y$ dacă se consideră x funcție de y?

Soluție. Avem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

$$y'' = \frac{1}{x'}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x'}\cdot\left(\frac{1}{x'}\right)' = \frac{1}{x'}\cdot\frac{-x''}{(x')^2} = -\frac{x''}{(x')^3}.$$

Deci, ecuația devine:

$$-\frac{x''}{(x')^3} + \frac{x}{x'} = e^y\text{, adică } -x'' + x\cdot(x')^2 = e^y.$$

EXERCIȚIUL 8.6.15 Ce devine ecuația $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$ dacă se face schimbarea de variabilă şi funcție $x = u + t$, $y = u - t$, unde $u = u(t)$?

Soluție. Avem: $dx = du + dt$, $dy = du - dt$. Deci,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du-dt}{du+dt}=\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{du}{dt}+1}\cdot\frac{2\cdot\frac{d^2u}{dt^2}}{\left(\frac{du}{dt}+1\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{d^2u}{dt^2}}{\left(\frac{du}{dt}+1\right)^3}.$$

Ținând cont de aceste egalități, ecuația devine $u''+8u\cdot(u')^3=0$.

EXERCIȚIUL 8.6.16 Să se transforme ecuația: $y''+\frac{2}{x}\cdot y'+y=0$ luând pe x ca funcție de t și pe $t=x\cdot y$ ca variabilă independentă.

Soluție. Avem: $dt=y\cdot dx+x\cdot dy$. Atunci,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ydx+xdy}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{1}{y+x\cdot\frac{dy}{dx}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1-y\cdot\frac{dx}{dt}}{x\cdot\frac{dx}{dt}}\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{x-t\cdot\frac{dx}{dt}}{x^2\cdot\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{x-t\cdot\frac{dx}{dt}}{x^2\cdot\frac{dx}{dt}}\right):\frac{dx}{dt}=\frac{-2x\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-x^2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2t\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}{x^3\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Înlocuind acestea în ecuația dată, se obține: $\frac{d^2x}{dt^2}=t\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$.

EXERCIȚIUL 8.6.17 Să se transforme ecuația:

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2\cdot(y-y^3)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\cdot y^2\cdot z^2=0,$$

considerând schimbarea de variabile independente $x=u\cdot v$, $y=\frac{1}{v}$.

Soluție. Avem:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.\end{cases}$$

Ținând cont că $x = u \cdot v$ și $y = \frac{1}{v}$, se obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot v \\ \frac{\partial z}{\partial v} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Deci,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = u \cdot v \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - v^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Ținând cont că $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$, rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$. Din aceste egalități, ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2u \cdot v^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \cdot (v - v^3) \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 0.$$

EXERCIȚIUL 8.6.18 Să se determine $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă se trece de la coordonate carteziene la coordonate polare.

Soluție. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare este dată de relațiile:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot \sin q . \end{cases} \tag{1}$$

Atunci,

$$\begin{cases} \frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \\ \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q}. \end{cases}$$

Ținând cont de egalitățile (1), se obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \cos q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial q} = -r \cdot \sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + r \cdot \cos q \cdot \frac{\partial z}{\partial y} . \end{cases}$$

Rezolvând sistemul în raport cu $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, se obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos q \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{dz}{\partial y} = \sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \end{cases}.$$

Din aceste egalități se obțin următorii operatori de derivare:

$$\begin{cases} \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \cos q \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial r} - \frac{\sin q}{r} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial q} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} = \sin q \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial q} \end{cases}.$$

Ținând cont de aceşti operatori, obținem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) =$$

$$= \cos q \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) - \frac{\sin q}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\sin q \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) =$$

$$= \cos q \cdot \sin q \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\sin q \cdot \cos q}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} + \frac{\cos 2q}{r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial r} -$$

$$- \frac{\cos 2q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\sin q \cdot \cos q}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}.$$

EXERCIȚIUL 8.6.19 Ce devine ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ dacă se fac schimbările de variabile $u = x + z$, $v = y + z$?

Rezolvare:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

Ținând cont că $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{\partial z}{\partial y}$ se obține că:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial v}}{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}} \ . \end{cases} \tag{1}$$

Relațiile (1) se mai pot pune şi sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \right) = \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial u} + \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial y} \right) \dfrac{\partial z}{\partial u} \ . \end{cases} \tag{2}$$

Ținând cont de relațiile (2) se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}}\right) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}}\right) =$$

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^3} \cdot \left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial v}\right]^{(2)} (z)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^3} \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial u} + \left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial v}\right]^{(2)} (z)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^3} \cdot \left\{\left[\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial u} - \left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial v}\right] \cdot \left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial \cdot}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial v}\right]\right\} (z)$$

Ținând cont de acestea se obține că:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^3} \cdot \left[\frac{\partial \cdot}{\partial u} + \frac{\partial \cdot}{\partial v}\right]^{(2)} (z)$$

Deci, ecuația obținută este: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

EXERCIȚIUL 8.6.20 Să se determine $2z\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ dacă se face schimbarea: $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$, $w=z^2$.

Soluție. Sunt evidente relațiile:

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}.$$

Ținând cont că $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$, relațiile anterioare devin:

$$\begin{cases}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+2\cdot x\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}.$$

Atunci,

$$\frac{x-y}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+2(x+y)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

EXERCIȚIUL 8.6.21 Ce devine ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\cdot\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=0$ dacă se face schimbarea de variabilă şi funcție: $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$?

Soluție. Din datele problemei se obține:

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}.$$

Ținând cont că $u=x+y$ şi $v=\frac{y}{x}$, obținem:

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}.$$

Deci,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x \cdot \dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial v} + \dfrac{z}{x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{cases} .$$

Se calculează derivatele de ordinul al doilea şi obținem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Dacă se înlocuiesc valorile lui $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ în ecuația dată se obține $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

CAPITOLUL IX: EXERCIȚII PROPUSE

EXERCIȚIUL 9.1.1 Să se arate că funcția $f : X \to Y$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

EXERCIȚIUL 9.1.2 Să se arate că dacă funcțiile $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ sunt bijective atunci:
a) $g \circ f : X \to Z$ este bijectivă;
b) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

EXERCIȚIUL 9.1.3 Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o mulțime formată dintr-un număr finit de elemente şi $f : X \to X$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:
a) f este injectivă;
b) f este surjectivă;
c) f este bijectivă.

EXERCIȚIUL 9.1.4. Fie $f : X \to Y$ o funcție. Să se arate că:
a) relația $\Re_f$ definită prin $x \Re_f y$ dacă şi numai dacă $f(x) = f(y)$ este o relație de echivalență pe X;
b) există o funcție injectivă $h : X/\Re_f \to Y$ astfel încât diagrama să fie comutativă, unde p este aplicația canonică;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X/R_f \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

c) dacă f este surjectivă, atunci h este bijectivă.

EXERCIȚIUL 9.1.5 Fie M o mulțime arbitrară. Să se arate că:
a) $(\mathcal{P}(M), \subset)$ este o structură de ordine parțială în care f este primul element, iar M ultimul element;
b) oricare ar fi $A_i \in \mathcal{P}(M)$, $i \in I$ au loc relațiile:

i) $\sup\{A_i\}_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} A_i$;

ii) $\inf\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

EXERCIȚIUL 9.1.6 Fie $X = \{\{1\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{5\}\}$ ordonată prin incluziune.
a) Să se determine elementele maximale şi minimale.
b) Există un cel mai mare element?

EXERCIȚIUL 9.1.7 Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi pe care se defineşte relația:

$$x\Re y \Leftrightarrow 3 \text{ divide pe } x-y.$$

a) Să se arate că $\Re$ este o relație de echivalență.
b) Să se determine $C_x \in \mathbb{Z}/\Re$ care conține întregul x.
c) Să se determine mulțimea factor $\mathbb{Z}/\Re$.

EXERCIȚIUL 9.1.8 Fie $f: A \to B$. Să se arate că:
a) f surjecție $\Rightarrow$ $\text{card}B \le \text{card}A$;
b) f injecție $\Rightarrow$ $\text{card}A \ge \text{card}B$.

EXERCIȚIUL 9.1.9 Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este infinită.

EXERCIȚIUL 9.1.10 Să se arate că mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ este numărabilă.

EXERCIȚIUL 9.1.11 Să se arate că:
a) $\text{card}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \aleph_0$, unde $\text{card}A_n = \aleph_0$;
b) $\text{card}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \le \aleph_0$, unde $\text{card}A_n < \aleph_0$;
c) $\text{card}[A\times B] = \aleph_0$, unde $\text{card}A = \aleph_0$, $\text{card}B = \aleph_0$;
d) $\text{card}\left[\prod_{i=1}^{n} A_i\right] = \aleph_0$, unde $\text{card}A_i = \aleph_0$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$.

EXERCIȚIUL 9.1.12 Să se arate că pentru orice numere reale a,b,c,d, cu $a<b$ şi $c<d$, există relațiile:

a) $[a,b] \sim [c,d]$, $(a,b) \sim (c,d)$;
b) $[a,b) \sim (a,b) \sim (a,b] \sim [a,b]$.

EXERCIȚIUL 9.1.13 Să se arate că:
a) $\mathrm{card}(\text{¢}) = \aleph_0$;
b) $\mathrm{card}(\text{¤}) = \aleph_0$;
c) $\mathrm{card}(P) = \aleph_0$, P mulțimea numerelor prime;
d) mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali este numărabilă;
e) $\mathrm{card}(A) = \aleph_0$, A mulțimea numerelor algebrice.

EXERCIȚIUL 9.1.14 Fie M o mulțime oarecare. Să se arate că:
a) $\mathrm{card}P(M) = 2^{\mathrm{card}M}$;
b) $\mathrm{card}M < 2^m$, unde $m = \mathrm{card}M$.

EXERCIȚIUL 9.1.15 Să se arate că:
a) $\mathrm{card}([a,b)) = \mathrm{card}((a,b)) = ([a,b]) = \aleph_c$;
b) $\mathrm{card}(\mathrm{I}) = \aleph_c$, I mulțimea numerelor iraționale;
c) $\mathrm{card}(T) = \aleph_c$; T mulțimea numerelor transcedente;
d) $\mathrm{card}(\text{¥}^{\text{¥}}) = \aleph_0$.

EXERCIȚIUL 9.1.16 Să se arate că:
a) $\mathrm{card}\bigcup_{i=1}^{n}(A_i) = \aleph_c$, $\left[\mathrm{card}A_i = \aleph_c, A_i \cap A_j = f,\ i \neq j\right]$;
b) $\mathrm{card}\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \aleph_c$, $\left[\mathrm{card}A_i = \aleph_c, A_i \cap A_j = f,\ i \neq j\right]$;
c) $\mathrm{card}(A \times B) = \aleph_c$, $[\mathrm{card}A = \mathrm{card}B = \aleph_c]$.

EXERCIȚIUL 9.1.17 Să se afle:
a) $\mathrm{card}P(\text{¥})$;
b) $\mathrm{card}P(\text{¡})$;
c) $\mathrm{card}\ \text{¡}^{\text{¡}}$.

EXERCIȚIUL 9.2.1 Să se arate că familia F a mulțimilor închise din spațiul topologic $(\mathbb{R}, t_{\mathbb{R}})$ are următoarele proprietăți:

a) $\phi, \mathbb{R} \in F$

b) pentru orice $k \in I \Rightarrow \bigcap_{k\in I} F_k \in F$;

c) pentru orice $F_k \in F$, $k = \overline{1,n} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} F_k \in F$.

EXERCIȚIUL 9.2.2 Să se arate folosind mulțimile $F_n = [1/n, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, că proprietatea c) de la Exercițiul 9.2.1 nu este adevărată pentru reuniune infinită.

EXERCIȚIUL 9.2.3 Fie (X, t) un spațiu topologic și $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $\overset{0}{A} \subset A$;

b) $A \subset B \Rightarrow \overset{0}{A} \subset \overset{0}{B}$;

c) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$;

d) $\overset{0}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} = \bigcap_{i\in I} \overset{0}{A_i}$;

e) $\bigcup_{i\in I} \overset{0}{A_i} = \overset{0}{\widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}}$.

EXERCIȚIUL 9.2.4 Fie (X, t) un spațiu topologic și $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $A \subset \overline{A}$;

b) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

d) $\overline{\overline{A}} = A$.

EXERCIȚIUL 9.2.5 Fie (X, t) un spațiu topologic și $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

c) $(A')' = A'$;

d) $A' \subset \overline{A}$.

EXERCIȚIUL 9.2.6 Fie (X, t) un spațiu topologic şi $A \subset X$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
a) A este închisă;
b) $A \supset \overline{A}$, $\left(A = \overline{A}\right)$;
c) $A \supset A'$;
d) $A \supset \mathrm{fr}A$.

EXERCIȚIUL 9.2.7 Fie $(\mathbb{R}, t_{\mathbb{R}})$ spațiu topologic. Se consideră mulțimile:

$$A_p = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\},\ p \in \mathbb{N}^* \text{ şi } A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p .$$

Să se determine punctele lor importante.

EXERCIȚIUL 9.2.8 Să se arate că:
a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{CA}$;
b) $\partial A = A \setminus \overset{0}{A} = \mathrm{Iz}A \cup \left(A' \setminus \overset{0}{A} \right)$;
c) $\overline{\partial A} = \partial A$;
d) $\partial(\partial A) = \partial A \setminus \partial \overset{0}{A}$;
e) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

EXERCIȚIUL 9.2.9 Fie $(\mathbb{R}, t_{\mathbb{R}})$ spațiu topologic real. Să se determine:

$$\overset{0}{E}, extE,\ frE, \overline{E}, E', \mathrm{Iz}E ,$$

dacă:
a) $E = (x_1, x_2, ..., x_n)$;
b) $E = [1,2] \cup (3,4) \cup \{5\}$;
c) $E = \mathbb{Q}$.

EXERCIȚIUL 9.2.10 Fie $S = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N} \right\}$ (mulțimea şirurilor de numere reale). Să se arate că:

$$d : S \times S \to \mathbb{R},\ d(x_n, y_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

este o metrică pe S. Să se calculeze distanța dintre şirurile:

$$x_n = 1 + (-1)^n \text{ şi } y_n = 1 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

EXERCIȚIUL 9.2.11 Se consideră mulțimea:

$$S = C^1[a,b]$$

(mulțimea funcțiilor continue şi cu derivata de ordinul întâi continuă pe $[a,b]$) şi se defineşte funcția $d : S \times S \to \mathbb{R}_+$, astfel:

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)|.$$

Să se arate că d este o metrică.

EXERCIȚIUL 9.2.12 Considerând metrica de la Exercițiul 9.2.11, să se calculeze $d(f,g)$ dacă:

a) $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$, $x \in [e^{-1}, e]$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [0,1]$;

c) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $g(x) = 0$, $x \in [0,1]$;

d) $f_n(x) = \cos\dfrac{nx}{n^2+1}$, $g(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

EXERCIȚIUL 9.2.13 Se dau:

$$d_1(x,y) = |x - y| \text{ şi } d_2(x,y) = |\ln x - \ln y|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = E$.

a) Să se arate că (E, d_1) şi (E, d_2) sunt spații metrice.

b) Cum arată sferele deschise pentru fiecare din cele două spații metrice?

EXERCIȚIUL 9.2.14 Să se arate că dacă (S,d) este spațiu metric, atunci următoarele aplicații sunt metrici:

a) $d_1 : S \times S \to \mathbb{R}_+$, $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, $(\forall)\, x, y \in S$;

b) $d_2 : S \times S \to \mathbb{R}_+$, $d_2(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$, $(\forall)\, x, y \in S$;

c) $d_3 : S \times S \to \mathbb{R}_+$, $d_3(x,y) = (d(x,y))^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $(\forall)\, x, y \in S$

d) Dacă $S = \mathbb{R}^2$ şi d este metrica euclidiană, atunci să se calculeze d_1, d_2, d_3 pentru $x = (1,2)$ şi $y = (-3,-1)$.

EXERCIŢIUL 9.2.15 Fie $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu structura de spaţiu vectorial, real. Să se arate că:

a) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ este normă;

b) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ este normă.

EXERCIŢIUL 9.2.16 Doi vectori x, y ai unui spaţiu prehilbertian sunt ortogonali $\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

EXERCIŢIUL 9.3.1 Să se găsească marginile mulţimilor de numere reale:

a) $A = \left\{ \dfrac{6^n}{n!} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

b) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

c) $A = \left\{ 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

d) $A = \left\{ \dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$;

e) $A = \left\{ n^{(-1)^n} + 1 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

f) $A = \left\{ (-1)^{n-1} + n \cdot \sin n \cdot \dfrac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

EXERCIŢIUL 9.3.2 Să se găsească un interval închis care conţine toţi termenii şirurilor:

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = \sin \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{2}$;

b) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$.

EXERCIȚIUL 9.3.3 Să se precizeze dacă următoarele şiruri sunt mărginite sau nu:

a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \cos ka$, $a \in (0,p)$;

b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos ka$, $a \in (0,p)$;

c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin ka$, $a \in (0,p)$;

d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin ka$, $a \in (0,p)$;

e) $x_n = n^{(-1)^n} + 1$, $a \in (0,p)$;

f) $x_n = (-1)^n n \cdot \sin \frac{np}{2}$;

g) $x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}}}$.

EXERCIȚIUL 9.3.4 Să se studieze monotonia următoarelor şiruri:

a) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

b) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

c) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{3k}\right)$;

d) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{2k}\right)$;

e) $x_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$;

f) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot \sqrt{n}}$.

EXERCIȚIUL 9.3.5 Să se studieze convergența următoarelor şiruri:

a) $x_n = \frac{1}{n^a}$; b) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^a}$; c) $x_n = l^n$;

d) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$; e) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

f) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$, a > 0;

g) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}$; h) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin(n!)}{2n+1}$; i) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^a}$;

j) $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$; k) $x_n = \sin \dfrac{np}{4}$; l) $x_n = \sin n$;

m) $x_n = \cos \dfrac{p}{2^n}$; n) $x_n = tg\, \dfrac{n^2}{n^2+1} \cdot \dfrac{p}{4}$; o) $x_n = \arcsin \dfrac{(-1)^n \cdot n^2 + 1}{n^2 + 2n}$;

p) $x_n = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + (-1)^n \cdot n^2}{1 + n^2}$.

EXERCIȚIUL 9.3.6 Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} tg^2 \dfrac{a}{k}$, $a \in \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k}$, $k \in$ ¢;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} (n+k)}}{n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \cdot 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{\dfrac{3^k}{(2n)!}}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^3 \cdot a^n}{(2n-1)!}}$, $a > 0$; j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n \right)$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos p\, n^2 \cdot \ln \dfrac{n}{n+1} \right)$, $a > 0$; n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2^k}$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right),\ a>0$; p) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}$; s) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; u) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+k}{n^2+k}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+k}}$; w) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(n^2+k^2\right)^2}$;

x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$; z) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^m}{n^{m+1}}$;

a1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^m}{n^{m+1}}-\dfrac{n}{m+1}\right),\ m\in$ ¥; b1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)!}$;

c1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}C_n^k}$; d1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

e1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\int_0^1(\arcsin x)^n$; f1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} arctg\ nx\ dx$.

EXERCIȚIUL 9.3.7 Să se studieze convergența şi în caz afirmativ să se determine limita pentru şirurile definite recurent după cum urmează:

a) $x_n=(n+2)x_{n-1}-(n+1)x_{n-2}$, $x_0=a$, $x_1=2a$;

b) $n\cdot x_{n+2}-(n-1)x_{n+1}-x_n=0$, $n\in$ ¥, $x_0=a$;

c) $(n+1)^2\cdot x_{n-1}-n^2\cdot x_n=2n+1$, $n\in$ ¥;

d) $(n+1)^2\cdot x_{n+1}-n^3\cdot x_n=n+1$, $x_1=a$, $n\in$ ¥;

e) $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{3-2\cdot x_n}$, $n\in$ ¥, $x_0=a\neq\dfrac{3}{2}$;

f) $x_{n+1}=\dfrac{2\cdot x_n-1}{x_n}$, $n\in$ ¥, $x_0=a$.

EXERCIȚIUL 9.3.8 Folosind definiția limitei, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}},\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}\right)=(4,0)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n},\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{(-3)^n+4^n}{(-3)^{n+1}+4^n}\right)=(0,0,1)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)},\dfrac{n!}{n},\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k-\dfrac{n}{2}}{n+2}\right)=(1,0,1)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2+1},\dfrac{1+(-1)^n}{n!},\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)$ nu există.

EXERCIȚIUL 9.3.9 În $\mathbb{R}^2$ se consideră şirul: $x_1=(1,0)$, $x_2=(0,1)$, $x_3=(1,0)$, $x_4=(0,1)$,... Să se arate că:

a) în metrica uzuală acest şir este divergent.

b) şirul $\left(\|x_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

EXERCIȚIUL 9.3.10. Se consideră spațiul metric $(\mathbb{R},d_1)$, unde $d_1(x,y)=|arctgx-arctgy|$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n=n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ este fundamental, dar nu este convergent.

EXERCIȚIUL 9.3.11 Fie $\left(C^0_{[a,b]},d\right)$ spațiu metric, unde $d(f,g)=\sqrt{\int\limits_{[0,1]}\left(f(x)-g(x)\right)^2dx}$. Să se arate că şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$ nu este convergent în $\left(\left(C^0[0,1]\right),d\right)$, dar este şir fundamental.

EXERCIȚIUL 9.3.12 Fie $(\mathbb{R}^2,d)$ spațiu metric, cu metrica euclidiană uzuală. Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze convergența următoarelor şiruri;

a) $\bar{x}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \ \frac{n+1}{n} \right)$;

b) $\bar{x}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k+1)} \right)$;

c) $\bar{x}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k\frac{\pi}{6}}{k(k+1)} \right)$;

d) $\bar{x}_n = \left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{3^n}, \ \frac{(n+1)^2}{3n^2+n+1} \right)$.

EXERCIȚIUL 9.3.13 Să se găsească punctele limită ale şirului $\bar{u}_n = (x_n, y_n, z_n)$ pentru următoarele cazuri:

a) $x_n = 1 + (-1)^n \cdot \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$, $y_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4}$; $z_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$, $y_n = \cos \frac{2n\pi}{3}$, $z_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCIȚIUL 9.3.14 Să se stabilească dacă funcțiile de mai jos admit puncte fixe şi apoi să se găsească:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \alpha > 0, \\ 0, \quad x = 0 \ . \end{cases}$

EXERCIȚIUL 9.3.15 Fie $f : [a,b] \to [a,b]$, $(a < b)$ crescătoare. Să se arate că f admite cel puțin un punct fix.

EXERCIȚIUL 9.3.16 Să se arate că următoarele funcții sunt contracții pe mulțimile indicate, considerate ca spații metrice cu metrica euclidiană:

a) $f:\left[\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right]\to\left[\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right],\ f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$;

b) $f:[-3,-2]\to[-3,-2],\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$;

c) $f:[-1,0]\to[-1,0],\ f(x)=\frac{x-1}{(x-4)^3}-1$;

d) $f:[1,2]\to[1,2],\ f(x)=\sqrt[3]{5-x}$;

e) $f:[-3,-2]\to[-3,-2],\ f(x)=\arcsin\frac{x+1}{4}$.

EXERCIȚIUL 9.3.17 Să se aplice principiul contracției pentru studiul convergenței șirurilor date prin relațiile de recurență:

a) $x_n=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x_{n-1},\ x_0\in\mathbb{R}$ dat, $n\in\mathbb{N}$;

b) $x_n=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x_{n-1},\ x_0\in\mathbb{R}$ dat, $n\in\mathbb{N}$;

c) $x_n=1+\ln\sqrt{x_{n-1}},\ x_0\in[1,+\infty)$ dat, $n\in\mathbb{N}$.

EXERCIȚIUL 9.4.1 Utilizând șirul sumelor parțiale să se studieze natura seriilor următoare și, în caz afirmativ, să se calculeze sumele acestor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right]$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{a}{2^n}\right),\ a\in\mathbb{R}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, unde $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)a}{k^2}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, unde $u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}$.

EXERCIȚIUL 9.4.2 Să se cerceteze dacă seriile următoare satisfac condiția necesară de convergență:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n$, $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot tg \frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2-1}{2n+1}}$.

EXERCIȚIUL 9.4.3 Folosind primul şi al doilea criteriu al comparației să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)^p}{\left(\sqrt[3]{8n^4+1} + \sqrt[3]{n^4+2}\right)^q}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+3} - \sqrt[3]{n^2+n+3}}{\sqrt{n\left(n^3+n^2+2\right)}}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1 + tg \frac{1}{n}}{1 - tg \frac{1}{n}}$.

EXERCIȚIUL 9.4.4 Folosind criteriile de convergență, să se stabilească natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (de $n+1$ ori se repetă radicalul);

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot a^n$, $a>0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$, $a>0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\ldots(nb+1)}$, $a>0$, $b>0$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\cdot(l-2)^n$, $p,q>0$, $l>2$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\cdot\frac{1}{n^a}$, $a>0$; $a\in\mathbb{R}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$, $a>0$;

i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^a n}$, $a\in\mathbb{R}$;

j) $\sum_{n=2}^{\infty}x_n$, $\sum_{n=2}^{\infty}x_n^2$, unde $x_0\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n\sqrt{1-x_n}$, $n\geq 1$.

EXERCIȚIUL 9.4.5 Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$ este convergentă şi să se aproximeze suma sa cu trei zecimale exacte.

EXERCIȚIUL 9.4.6 Să se arate că seria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^3 n}$ este convergentă şi să se determine numărul de termeni ce trebuie însumați pentru a obține suma seriei cu trei zecimale exacte.

EXERCIȚIUL 9.4.7 Să se cerceteze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n} \cdot \ln \frac{n+1}{n-1}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sin \frac{1}{n}$.

EXERCIȚIUL 9.4.8 Să se studieze convergența absolută sau semiconvergența următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin n!}{n^2}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n - \ln n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{n}{5}}{n(n+1)}$.

EXERCIȚIUL 9.4.9 Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător divergent de numere naturale în aşa fel încât şirul cu termenul general să fie mărginit. Să se arate că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot u_n$ au aceeaşi natură.

EXERCIȚIUL 9.4.10 Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, convergentă. Să se arate că:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n} = 0$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

EXERCIȚIUL 9.5.1 Se dă şirul de funcții $f_n(x)=1+x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$, şi se cere:

i) mulțimea de convergență şi funcția limită;

ii) să se arate că nu este uniform convergent pe $(-1,1)$. Să se determine o mulțime de uniform convergență.

EXERCIȚIUL 9.5.2 Se dă şirul de funcții:

$$f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}+\frac{1}{(n+1)^2+x^2}+\frac{1}{(n+2)^2+x^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Să se studieze convergența.

EXERCIȚIUL 9.5.3 Se dă şirul de funcții:

$$f_n(x)=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Să se studieze convergența.

EXERCIȚIUL 9.5.4 Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$, $(\forall)n\geq 1$. Să se studieze convergența şirului $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$.

EXERCIȚIUL 9.5.5 Fie $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Să se studieze convergența şirului.

EXERCIȚIUL 9.5.6 Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^a}$, $a\in\mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+a^n\right)}{n}$, $a\geq 0$.

EXERCIȚIUL 9.5.7 Să se studieze caracterul convergenței următoarelor serii de funcții pe mulțimile indicate:

a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n}-x^{n-1}\right)$, când:

i) $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$;

ii) $x\in[0,1]$;

b) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right]$, $x\in[0,1]$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2np}{3}\cdot x}{\sqrt{x^{2}+n}}$, $x\in$ ¡ ;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, când:

i) $x\in[a,2p-a]$, $a\in(0,2p)$;

ii) $x\in[0,2p]$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^{2}+n^{4}}$, $x\in$ ¡ .

EXERCIȚIUL 9.5.8 Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}2x\left[n^{2}\cdot e^{-n^{2}x^{2}}-(n-1)^{2}\cdot e^{-(n-1)^{2}x^{2}}\right]$, $x\in[0,1]$?

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^{2}+n^{2}}$, $x\in[a,b]$?

EXERCIȚIUL 9.5.9 Este posibilă derivarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx^{2}}-e^{-(n-1)x^{2}}\right],\ x\in[0,1]?$$

EXERCIȚIUL 9.5.10 Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^{n}\right]x^{n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^{n}+3^{n}}$;

c) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}\cdot x^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n!}\cdot x^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}(x-2)^n$.

EXERCIȚIUL 9.5.11 Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\cdot x^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdot x^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot x^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

EXERCIȚIUL 9.5.12 Să se determine dacă funcțiile următoare sunt dezvoltate în serii de puteri şi să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care este valabilă:

a) $f(x)=\sin^2 x,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$;

c) $f(x)=\ln(1-x+x^2),\ x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=\sqrt{x+a^2},\ x\geq -a^2$;

e) $f(x)=\frac{1}{1-x+x^2},\ x\in\mathbb{R}$;

f) $f(x)=\ln x,\ x_0=2$.

EXERCIȚIUL 9.6.1 Se consideră funcția:

$F: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ F(x)=(f_1(x),f_2(x))$. Să se calculeze $\lim_{x\to 0}F(x)$ dacă:

a) $F(x)=\left(\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}, \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}\right)$;

b) $F(x)=\left(\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}, \dfrac{\arcsin x - arctgx}{x^3}\right)$;

c) $F(x)=\left(\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}, \dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin^2 x}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.6.2 Se consideră funcția $F: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ dacă:

a) $F(x)=\left((1+x)^{\frac{1}{mx}}, \left(\cos\dfrac{n}{x}\right)^{x^n}\right)$;

b) $F(x)=\left(\left(\dfrac{x^m}{x^m-1}\right)^{ctg\left(\frac{a}{x}\right)^m}, \dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}\right)$;

c) $F(x)=\left(\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}, \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^x\right)$.

EXERCIȚIUL 9.6.3 Folosind definiția limitei, să se arate că:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x^2}{xy+1}=\dfrac{4}{5}$.

EXERCIȚIUL 9.6.4 Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

a) Să se studieze existența limitei în $(0,0)$ și $(1,0)$.

b) Să se studieze existența limitelor iterate în aceste puncte.

EXERCIȚIUL 9.6.5 Să se arate că pentru funcțiile de mai jos nu există $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}$;

b) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

c) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\,|\,x+y=0\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^3\cdot y^3}{x^3+y^3}$.

EXERCIȚIUL 9.6.6 Pentru funcțiile de mai jos, să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$:

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}$;

b) $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{x\cdot y}\cdot tg\,\dfrac{x\cdot y}{1+xy}$;

c) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{x^4+y^4}\cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

d) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(1-\dfrac{\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2},\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.6.7 Să se studieze continuitatea parțială a funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{cases}x^2\cdot\ln\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

EXERCIȚIUL 9.6.8 Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

EXERCIȚIUL 9.6.9 Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\left(x^2+y^2\right)\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\left(x^2+y^2\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2},\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

EXERCIȚIUL 9.6.10 Să se discute după $a\in\mathbb{R}$ continuitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^a\cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^{2+a}\cdot y^2\right)}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

EXERCIȚIUL 9.6.11 Care din funcțiile de mai jos se pot prelungi prin continuitate?

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$;

b) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$;

c) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\dfrac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2},\left(1+\sin^2 y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.6.12 Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$;

b) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin^2 x^2$;

c) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$;

d) $f:(1,2)\times(1,2)\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\dfrac{x-y}{x+y},\dfrac{x}{y}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.7.1 Pornind de la definiție, să se calculeze derivatele și derivatele parțiale ale funcțiilor de mai jos în punctele specificate:

a) $f(x)=\sqrt{5x+1}$, $x_0=3$;

b) $f(x)=\ln\left(x^2+5x\right)$, $x_0=1$;

c) $f(x,y)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}$, $f'_x\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, $f'_y\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $f(x,y)=e^{\sin xy}$, $f'_x\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f'_y(1,0)$;

e) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$, $f'_x(-2,2)$, $f'_y(-2,2)$, $f''_{xy}(-2,2)$.

EXERCIȚIUL 9.7.2 Să se studieze derivabilitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde

$$f_1(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+3x\right), & 0<x<1\\ \dfrac{5}{4}(x-1)+2\ln 2, & x\geq 1\end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & 0<x\leq e\\ ax+b, & x>e\end{cases},$$

$$f_3(x)=\left|\ln x-1\right|,\ x>0;$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ \ln\left(x^2-2x+x\right), & x>1 \end{cases},\ \ f_2(x)=\max_{x\in\mathbb{R}}\left[\left|1-x^3\right|,3|x|\right],$$

$$f_3(x)=\min_{x\in\mathbb{R}}\left\{x^2+3x,x\right\}.$$

EXERCIȚIUL 9.7.3 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}},\ \ f_2(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}},\ \ f_3(x)=e^{\sin\frac{1}{x}};$$

b) $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=2^{tg^3x^2},\ \ f_2(x)=\frac{x^2-1}{x},\ \ f_3(x)=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}};$$

c) $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \ f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}},\ \ a>0.$$

EXERCIȚIUL 9.7.4 Să se demonstreze următoarele egalități:

a) $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi,\ x\in(-1,0)$;

b) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x\in(-1,\infty)\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x\in(-\infty,-1)\end{cases}$;

c) $\arcsin x+3\arccos x+\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{3\pi}{2},\ x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.7.5 Să se calculeze derivatele de ordinul n pentru funcțiile:

a) $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=\frac{1+x}{1-x},\ \ f_2(x)=\ln\frac{1+x}{1-x},\ \ f_3(x)=\frac{1}{2x^2-3x+5};$$

b) $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)$, unde:

$$f_1(x)=x^3\cdot e^{mx},\ \ f_2(x)=\ln\sqrt[5]{\left(1-5x+6x^2\right)^x},\ \ f_3(x)=\sin 3x\cdot\cos^2 x.$$

EXERCIȚIUL 9.7.6 Să se arate că funcțiile următoare satisfac relația lui Euler şi să se verifice prin calculul direct al derivatelor relația găsită:

a) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\dfrac{x}{y}$;

b) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}$;

c) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

EXERCIȚIUL 9.7.7 Să se calculeze derivatele specificate pentru următoarele funcții:

a) $F(x,y)=\left(\ln(ax+by),\dfrac{x+y}{x-y}\right),\ \dfrac{\partial^{n+m}F}{\partial x^n\partial y^m}$;

b) $F(x,y)=\left(\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{x+y},\cos(x+y)\right),\ \dfrac{\partial^{n+m}F}{\partial x^n\partial y^m}$;

c) $F(x,y)=\left(\sin(ax+by),\sin^6(ax+by)+\cos^6(ax+by)\right),\ \dfrac{\partial^{n+m}F}{\partial x^n\partial y^m}$.

EXERCIȚIUL 9.7.8 Presupunând că funcțiile j şi y sunt derivabile de un număr suficient de ori, să se verifice următoarele egalități:

a) $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z=j\left(x^2+y^2\right)$;

b) $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=3xz,\ z=\dfrac{y^2}{3x}j\left(x\cdot y\right)$;

c) $\left(x^2-y^2\right)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz,\ z=e^y\cdot j\left(y\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$;

d) $x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z},\ u=\dfrac{xy}{z}\cdot\ln x+x\cdot j\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$;

e) $x^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+y^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=j\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\cdot y\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

EXERCIȚIUL 9.7.9 Pornind de la definiția diferențialei, să se arate că funcția:

$$f(x,y)=27x^3+54x^2y+36xy^2-8y^3$$

este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

EXERCIȚIUL 9.7.10 Se consideră funcția:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Să se arate că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

b) Să se arate că f admite în orice punct derivate parțiale de ordinul doi.

c) Să se arate că f''_{xy} și f''_{yx} nu sunt continue în origine.

EXERCIȚIUL 9.7.11 Să se calculeze diferențialele de ordinul indicat pentru următoarele funcții:

a) d^3u, $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$;

b) d^3u, $u=\sin\left(x^2+y^2\right)$;

c) d^4u, $u=\ln\left(x^x\cdot y^y\cdot z^z\right)$;

d) d^nu, $u=e^{ax+by}$;

e) d^nu, $u=e^{ax+by+cz}$.

EXERCIȚIUL 9.7.12 Să se calculeze diferențialele de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

a) $F(t)=f\left(t^2,\ln t\right)$;

b) $G(t)=g\left(t^2,\ln t,e^t\right)$;

c) $U(x,y,z)=u\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)$.

EXERCIȚIUL 9.7.13 Să se scrie formula lui Taylor pentru funcțiile de mai jos în punctele specificate:

a) $f(x,y)=e^{x+y}$, în punctul $(1,-1)$;

b) $f(x,y)=e^x\cdot\sin y$, în punctul $(0,0)$, formula lui Taylor de ordinul al treilea.

EXERCIȚIUL 9.7.14 Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, $x>0,\ y>0$;

b) $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$, $(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$;

d) $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$, $x>0,\ y>0,\ z>0$;

e) $f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{16}$, $x>0,\ y>0,\ z>0$.

EXERCIȚIUL 9.7.15 Să se găsească punctele de extrem şi extremele funcțiilor cu legăturile specificate:

a) $f(x,y)=x^m+y^m$, $(x\ge 0, y\ge 0, m>1)$, cu condiția $x+y-2=0$;

b) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$, cu condiția $x^2+y^2-1=0$;

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, cu condiția $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $(a>0, b>0, c>0)$;

d) $f(x,y,z)=xyz$, cu condițiile $\begin{cases}x+y-z-3=0\\ x-y-z-8=0;\end{cases}$

e) $f(x,y,z)=xyz$, cu condițiile $\begin{cases}x+y+z=5\\ xy+yz+zx=8.\end{cases}$

EXERCIȚIUL 9.7.16 Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2ye^{2x+3y}$. Să se arate că dacă $\exists r>0$ astfel încât $\forall x,y\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2<r^2$, atunci $x^2ye^{2x+3y}+\frac{1}{3e^3}>0$.

EXERCIȚIUL 9.8.1 Să se calculeze derivata întâi şi a doua a funcțiilor definite implicit de următoarele egalități:

a) $x^3+y^3-3axy=0$, $y=y(x)$;

b) $xy-\ln \operatorname{ch} xy=0$, $y=y(x)$.

EXERCIȚIUL 9.8.2 Să se calculeze derivata întâi şi a doua ale funcției $y = y(x)$ definită implicit de ecuația: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\left(x^2 + y^2\right) = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.3 Să se calculeze y' din relația: $x^y - y^x = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.4 Să se calculeze y'' din relația: $\operatorname{ch}2y - 2e^{x^2} = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.5 Să se calculeze y'' din relația:
$x + \sqrt{y+z} + \sqrt[3]{y-x} = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.6 Să se calculeze y'' din relația: $y \cdot e^{-y} - x = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.7 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției $z = z(x, y)$ definită implicit de egalitățile următoare:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;

b) $z \cdot e^{-xz} + y \cdot e^{-xy} - \arcsin\frac{z}{x} = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.8 Ştiind că $z = z(x, y)$ este definită implicit de ecuația:

a) $\ln\left(x^2 + yz\right) - 4 \cdot e^{-z^2 x} = 0$,

b) $\operatorname{tg}\frac{zx}{2} - \operatorname{ch}\frac{zy}{2} = 0$,

să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi al doilea.

EXERCIȚIUL 9.8.9 O funcție $u = u(x, y, z, t)$ este definită implicit de ecuația $f(x, y, z, t, u) = 0$. Să se arate că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_u \\ f'_y & f''_{xy} & f''_{yu} \\ f'_u & f''_{xu} & f''_{u^2} \end{vmatrix}.$$

EXERCIȚIUL 9.8.10 Relațiile:
$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-2t=0 \\ x^3+y^3+z^3-t^3=0 \end{cases}$$
K definesc pe x, y, z ca funcții de t. Să se calculeze: $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$.

EXERCIȚIUL 9.8.11 Relațiile:
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-R^2=0 \\ x^3+y^3+z^3-3xyz-a^3=0 \end{cases}$$
definesc pe y, z ca funcții de x. Să se calculeze: $\dfrac{dy}{dx}$ şi $\dfrac{dz}{dx}$.

EXERCIȚIUL 9.8.12 Să se arate că funcția $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuația $F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$, $z\neq 0$, unde $F(u,v)$ este derivabilă parțial în raport cu u şi v verifică relația $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z$.

EXERCIȚIUL 9.8.13 Să se calculeze z'_x, z'_y, z''_{x^2} dacă $z=z(x,y)$ este definită implicit de ecuația $F(x,x+y,x+y+z)=0$, unde $F(u,v,w)$ este o funcție care admite derivate parțiale de ordinul întâi şi al doilea în raport cu u, v, w.

EXERCIȚIUL 9.8.14 Să se arate că ecuațiile de mai jos definesc implicit o funcție $z=f(x,y)$ în vecinătatea punctelor indicate:

a) $xy+yz+z^3x=1$, $(1,1,0)$;

b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a,b,c>0$, $(0,0,c)$;

c) $z^3-3xyz=a^3$, $a\neq 0$, $(0,1,a)$;

d) $x+y+2z=e^z$, $(1,0,0)$;

e) $2z=\sqrt{x^2+y^2}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1,1,0)$;

f) $(x+y)\cdot e^z-xy-z=0$, $(2,2,0)$.

EXERCIȚIUL 9.8.15 Să se afle extremele funcției $y = f(x)$ definită de ecuațiile:

a) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0$;

b) $y^2 + 2x^2 y - 3 = 0$;

c) $x^3 + y^3 - 3x^2 y - 3 = 0$.

EXERCIȚIUL 9.8.16 Să se găsească punctele de extrem ale funcțiilor $z = f(x, y)$ definite de ecuațiile:

a) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$;

b) $x^3 y - 3xy^2 + y^2 + z^2 + 6x + 7y - 3z - 14 = 0$;

c) $x^4 + y^4 + z^4 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

EXERCIȚIUL 9.8.17 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 + z^2 \\ v = x + y + z \\ w = xy + yz + zx \end{cases}$$

sunt în dependență funcțională şi să se determine relația dintre ele.

EXERCIȚIUL 9.8.18 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ y_2 = x_1 x_4 + x_2 x_3 \\ y_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \\ y_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \end{cases}$$

sunt în dependență funcțională şi să se determine relația dintre ele.

EXERCIȚIUL 9.8.19 Se consideră funcțiile:

$$u = f\left(\frac{y - z}{x + z}\right),\ v = g\left(\frac{x + 2y + z}{x + z}\right),\ w = h\left(\frac{x - y}{y + z}\right)$$

unde f, g, h sunt bijecții. Să se arate că u, v, w sunt în dependență funcțională şi să se determine relația dintre ele.

EXERCIȚIUL 9.8.20 Fie funcțiile:

$$\begin{cases} u = f\left(\dfrac{y+z}{y+z-x}\right) \\ v = g\left(\dfrac{z+x}{z+x-y}\right), \\ w = h\left(\dfrac{x+y}{x+y-z}\right) \end{cases}$$

unde f, g, h sunt bijecții. Să se arate că u, v, w sunt în dependență funcțională şi să se determine relația dintre ele.

EXERCIȚIUL 9.8.21 Fie funcțiile:

$$\begin{cases} u = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 z} \\ v = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3 z}{b_1^1 x + b_2^1 y + b_3^1 z} \\ w = \dfrac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{c_1^1 x + c_2^1 y + c_3^1 z} \end{cases}.$$

Să se arate că u, v, w sunt în dependență funcțională şi să se determine relația dintre ele.

EXERCIȚIUL 9.8.22 Să se determine funcția j derivabilă, astfel încât $u = j\,(x+y)$, $v = \dfrac{j\,(x) + j\,(y)}{1 - j\,(x) \cdot j\,(y)}$ să fie în dependență funcțională.

EXERCIȚIUL 9.8.23 Să se determine funcția j, astfel ca $u = j\,(x+y)$, $v = j\,(x) \cdot j\,(y)$ să fie în dependență funcțională.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă L., Morozan C., *Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral,* vol.1, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964

2. Colțescu I., Dogaru Gh., *Calcul diferențial. Teorie. Exemple. Aplicații,* Editura ExPonto, Constanța, 2004

3. Craiu M., Tănase V., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

4. Demidovitch B., *Recueil d'exercices et problemes d'analyse mathematique*, Editions Mir, Moscou, 1971

5. Dogaru Gh., Colțescu I., *Exerciții şi probleme de analiză matematică*, Institutul de Marină „Mircea cel Bătrân", Constanța, 1990

6. Dogaru Gh., Colțescu I., *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân", Constanța, 1998

7. Dogaru Gh., Andrei T., Colțescu I., *Exerciții şi probleme de analiză matematică*, vol. I, Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân", Constanța, 1990

8. Fihtelhonț G.M., *Curs de calcul diferențial şi integral,* vol. 1, 2, 3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963, 1964, 1965

9. Flondor D., Donciu N., *Culegere de probleme - Algebră şi analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

10. Flondor P., Stănăşilă O., *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, Bucureşti, 1993

11. Găină St, Cîmpu E., Bucur Gh., *Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral, vol. 2,3,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1966, 1967

12. Günter N.M., Kuzmin R., *Culegere de probleme de matematici superioare,* vol. 1, 2, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958

13. Iacob C., *Curs de matematici superioare***,** Editura Tehnică, Bucureşti, 1957

14. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., *Analiză matematică*, vol. I şi II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971

15. Olariu V., *Analiză matematică***,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

16. Olariu V., Halanay A., Turbatu S., *Analiză matematică***,** Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

17. Roşculeț M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968

18. Roşculeț M., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

19. Sirețchi Gh., *Calcul diferențial şi integral***,** vol. 1, 2, Editura Academiei de Studii Economice, Bucureşti, 1985

20. Stănăşilă D., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981