Ejercicio 15? Obtenga una solución particular para cada uno de esos valores de r.

17. Intente plantear la forma de una solución particular de $x^2y'' + xy' - y = x$, y a partir de aquí obtener la solución general de esta ecuación en el intervalo $(0, \infty)$.

18. Utilice el método de variación de parámetros para resolver $x^2y'' + xy' - y = x$.

19. Considere la ecuación lineal no homogénea

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = x^3$$

Utilice el hecho de que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$ son soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (*véase* el Ejercicio 5 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

20. Considere la ecuación de Bessel no homogénea

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$$

Utilice el hecho de que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (*véase* el Ejercicio 6 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

17.7 Soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en series

En la Sección 17.5 presentamos un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

y ecuaciones de Euler de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Muchas de las ecuaciones diferenciales homogéneas lineales y de segundo orden que surgen en las aplicaciones no tienen coeficientes constantes, y no son del tipo de Euler. Si las funciones coeficiente de dichas ecuaciones son suficientemente bien comportadas, a menudo se pueden obtener soluciones en forma de series de potencias (series de Taylor). Estas series solución se utilizan frecuentemente para definir nuevas funciones, cuyas propiedades se deducen parcialmente del hecho de que son la solución de ecuaciones diferenciales particulares. Por ejemplo, las funciones de Bessel de orden ν se definen como ciertas soluciones basadas en series de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Las soluciones basadas en series de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas se obtienen más fácilmente cerca de un **punto ordinario** de la ecuación. Un punto ordinario es un punto $x = a$ tal que la ecuación se puede expresar en la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son **analíticas** en $x = a$ (recuérdese que una función f es analítica en $x = a$ si $f(x)$ se puede expresar como la suma de su desarrollo de Taylor en serie de potencias de $x - a$ en un intervalo de radio positivo centrado en $x = a$). Por tanto, asumimos

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - a)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - a)^n$$

donde ambas series convergen en algún intervalo de la forma $a - R < x < a + R$. Frecuentemente $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y, por tanto, son funciones analíticas en todas partes. Un cambio de la variable independiente $\xi = x - a$ situará el punto $x = a$ en el origen $\xi = 0$, por lo que podemos asumir que $a = 0$.

El siguiente ejemplo ilustra la técnica de solución basada en series alrededor de un punto ordinario.

Ejemplo 1 Calcule dos soluciones independientes basadas en series de potencias de x para la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \nu y = 0$$

¿Para qué valores de ν tiene la ecuación una solución polinómica?

Solución Probamos una solución en forma de series de potencias como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \text{ de forma que}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Hemos sustituido n por $n+2$ para obtener x^n en la suma de y''. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \nu a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n - \nu) a_n] x^n = 0$$

Esta identidad se cumple para todo x suponiendo que los coeficientes de todas las potencias de x se anulan; es decir,

$$a_2 = -\frac{\nu a_0}{2}, \qquad a_{n+2} = \frac{(2n-\nu) a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

La última de estas fórmulas se denomina **relación de recurrencia**.

Podemos escoger cualquier valor para a_0 y a_1; después, las condiciones iniciales determinarán todos los coeficientes restantes con a_n, $(n \geqslant 2)$. Podemos encontrar una solución escogiendo, por ejemplo, $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Entonces, por la relación de recurrencia,

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0, \quad \ldots, \quad \text{y}$$

$$a_2 = -\frac{\nu}{2}$$

$$a_4 = \frac{(4-\nu) a_2}{4 \times 3} = -\frac{\nu(4-\nu)}{2 \times 3 \times 4} = -\frac{\nu(4-\nu)}{4!}$$

$$a_6 = \frac{(8-\nu) a_4}{6 \times 5} = -\frac{\nu(4-\nu)(8-\nu)}{6!}$$

$$\cdots$$

El patrón resulta obvio:

$$a_{2n} = -\frac{\nu(4-\nu)(8-\nu)\cdots(4n-4-\nu)}{(2n)!}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Una solución de la ecuación de Hermite es

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\nu(4-\nu)(8-\nu)\cdots(4n-4-\nu)}{(2n)!} x^{2n}$$

Observamos que si $\nu = 4n$ para algún entero no negativo n, entonces y_1 es un polinomio par de grado $2n$, porque $a_{2n+2} = 0$ y todos los coeficientes pares posteriores por tanto también se anulan.

La segunda solución, y_2, se puede obtener de la misma forma, escogiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Es

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\nu)(6-\nu)\cdots(4n-2-\nu)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y es un polinomio impar de grado $2n+1$ si $\nu = 4n+2$.

Ambas soluciones basadas en series convergen para todo x. El test de la razón se puede aplicar directamente a la relación de recurrencia. Como los términos consecutivos distintos de cero de cada serie tienen la forma $a_n x^n$ y $a_{n+2}x^{n+2}$, podemos calcular

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n-\nu}{(n+2)(n+1)} \right| = 0$$

para todo x, de forma que la serie converge por el test de la razón.

Si $x = a$ no es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces se denomina **punto singular** de dicha ecuación. Esto significa que al menos una de las funciones $p(x)$ y $q(x)$ no es analítica en $x = a$. Sin embargo, si $(x-a)p(x)$ y $(x-a)^2q(x)$ son analíticas en $x = a$, entonces se dice que el punto singular es un **punto singular regular**. Por ejemplo, el origen $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

ya que $p(x) = 1/x$ y $q(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$ satisfacen $xp(x) = 1$ y $x^2q(x) = x^2 - \nu^2$, que son ambas polinomios y por tanto analíticas.

Las soluciones de ecuaciones diferenciales son en general no analíticas en puntos singulares. Sin embargo, es todavía posible calcular al menos una solución basada en series alrededor de esos puntos. El método requiere buscar una solución basada en series de la forma x^μ multiplicada por una serie de potencias, es decir,

$$y = (x-a)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^{n+\mu}, \qquad \text{con } a_0 \neq 0$$

La sustitución en la ecuación diferencial produce una **ecuación indicial** cuadrática, que determina uno o dos valores de μ donde se pueden obtener estas soluciones, y una **relación de recurrencia** que permite el cálculo de los coeficientes a_n para $n \geqslant 1$. Si las raíces indiciales no son iguales y su diferencia no es un entero, se pueden calcular dos soluciones independientes. Si las raíces indiciales son iguales o difieren en un entero, se puede calcular una solución de este tipo (correspondiente a la raíz indicial mayor), pero el cálculo de una segunda solución independiente (y, por tanto, de la solución general) requiere técnicas que se salen del alcance de este libro. Se remite al lector a textos estándar en ecuaciones diferenciales para una presentación más amplia y ejemplos. Nos contentaremos aquí con un ejemplo final.

Ejemplo 2 Calcule una solución, en potencias de x, de la ecuación de Bessel de orden $\nu = 1$, concretamente,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Solución Probamos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu+n}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu+n)a_n x^{\mu+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu+n)(\mu+n-1)a_n x^{\mu+n-2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [((\mu + n)(\mu + n - 1) + (\mu + n) - 1)a_n x^n + a_n x^{n+2}] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\mu + n)^2 - 1]a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$(\mu^2 - 1)a_0 + (\mu + 1)^2 - 1)a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [((\mu + n)^2 - 1)a_n + a_{n-2}]x^n = 0$$

Todos los términos deben anularse. Como $a_0 \neq 0$ (podemos tomar $a_0 = 1$), obtenemos

$$\mu^2 - 1 = 0, \qquad \text{ecuación indicial}$$

$$[(\mu + 1)^2 - 1]a_1 = 0,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\mu + n)^2 - 1}, \quad (n \geqslant 2) \quad \text{relación de recurrencia}$$

Evidentemente, $\mu = \pm 1$; por lo tanto, $a_1 = 0$. Si tomamos $\mu = 1$, entonces la relación de recurrencia es $a_n = -a_{n-2}/(n)(n+2)$. Entonces,

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0, \quad \cdots$$

$$a_2 = \frac{-1}{2 \times 4}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \times 4 \times 4 \times 6}, \quad a_6 = \frac{-1}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8}, \quad \cdots$$

De nuevo el patrón es obvio:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!}$$

y una solución de la ecuación de Bessel de orden 1 es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} x^{2n+1}$$

Por el test de la razón, esta serie converge para todo x.

Observación Obsérvese que si intentáramos calcular una segunda solución utilizando $\mu = -1$ obtendríamos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2)}$$

y no seríamos capaces de calcular a_2. Esto demuestra lo que puede suceder si las raíces indiciales difieren en un entero.

Ejercicios 17.7

1. Calcule la solución general de $y'' = (x-1)^2 y$ en forma de una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$.

2. Calcule la solución general de $y'' = xy$ en forma de una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 y a_1 arbitrarios.

3. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

4. Calcule la solución de $y'' + xy' + y = 0$ que cumple $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

5. Calcule los tres primeros términos distintos de cero de una solución en forma de serie de potencias de x del problema de valor inicial $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6. Calcule la solución, en forma de serie de potencias de x, del problema de valor inicial

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

7. Calcule dos soluciones en forma de serie de potencias de x de la ecuación $3xy'' + 2y' + y = 0$.

8. Calcule una solución en forma de serie de potencias de la ecuación de Bessel de orden $\nu = 0$, es decir, de la ecuación $xy'' + y' + xy = 0$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ ED ordinaria
  - ◇ ED en derivadas parciales
  - ◇ Solución general de una ED
  - ◇ Combinación lineal de soluciones de una ED
  - ◇ Orden de una ED
  - ◇ ED lineal
  - ◇ ED separable
  - ◇ ED exacta
  - ◇ Factor de integración
  - ◇ ED de coeficientes constantes
  - ◇ Ecuación de Euler
  - ◇ Ecuación auxiliar
- **Explique cómo resolver:**
  - ◇ Una ED separable
  - ◇ Una ED lineal de primer orden
  - ◇ Una ED de primer orden homogénea
  - ◇ Una ED de coeficientes constantes
  - ◇ Una ecuación de Euler
- **¿Qué condiciones implican que un problema de valor inicial para una ED de primer orden tendrá solución única cerca del punto inicial?**
- **Explique los siguientes métodos de resolución numérica de ED de primer orden:**
  - ◇ El método de Euler
  - ◇ El método de Euler mejorado
  - ◇ El método de Runge-Kutta de cuarto orden
- **Explique los siguientes métodos de resolución de ED lineales homogéneas:**
  - ◇ Coeficientes indeterminados
  - ◇ Variación de parámetros
- **¿Qué son los puntos ordinarios y los puntos singulares regulares en las ED lineales de segundo orden? Explique cómo se pueden utilizar las series para resolver estas ecuaciones cerca de tales puntos.**

Ejercicios de repaso

Calcule las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 1-16.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\operatorname{sen} x$

3. $\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{y - x}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + e^x}{x + e^y}$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

8. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

9. $4y'' - 4y' + 5y = 0$

10. $2x^2y'' + y = 0$

11. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

12. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16\dfrac{dy}{dt} = 0$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^x + e^{3x}$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = xe^{2x}$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = x^2$

16. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^3$

Resuelva los problemas de valor inicial de los Ejercicios 17-26.

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 2\cos x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \pi^2)y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \pi \end{cases}$

23. $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = e^{-5} \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(e) = e^2 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 8e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6 + 7e^{x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

27. Indique para qué valores de las constantes A y B es exacta la ecuación

$$[(x+A)e^x \operatorname{sen} y + \cos y]\,dx + x[e^x \cos y + B \operatorname{sen} y]\,dy = 0$$

¿Cuál es la solución general de la ecuación si A y B tienen esos valores?

28. Calcule un valor de n para que x^n sea un factor de integración de

$$(x^2 + 3y^2)\,dx + xy\,dy = 0$$

y resuelva la ecuación.

29. Demuestre que $y = x$ es una solución de

$$x^2 y'' - x(2 + x\cot x)y' + (2 + x\cot x)y = 0$$

y calcule la solución general de la ecuación.

30. Utilice el método de variación de parámetros y el resultado del Ejercicio 29 para calcular la solución general de la ecuación no homogénea

$$x^2 y'' - x(2 + x\cot x)y' + (2 + x\cot x)y = x^3 \operatorname{sen} x$$

31. Suponga que $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas en todo el plano xy y que $f(x, y)$ está acotada en dicho plano, es decir, $|f(x, y)| \leqslant K$. Demuestre que ninguna solución de $y' = f(x, y)$ puede tener una asíntota vertical. Describa la región del plano donde debe estar la solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

APÉNDICE I

Números complejos

Old Macdonald had a farm,
Minus E-Squared O

Canción para niños matemáticamente simplificada

Muchos de los problemas a los que se aplica la matemática requieren la solución de ecuaciones. A lo largo de los siglos los sistemas de numeración se han tenido que ampliar muchas veces para proporcionar soluciones a más y más clases de ecuaciones. Los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

son inadecuados como soluciones de ecuaciones de la forma

$$x + n = m, \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

Se pueden añadir el cero y los números negativos para crear los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

donde esa ecuación tiene como solución $x = m - n$ incluso si $m < n$ (históricamente, esta extensión del sistema numérico apareció mucho más tarde que algunas de las que se mencionan posteriormente). Algunas ecuaciones de la forma

$$nx = m, \qquad (m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0)$$

no se pueden resolver mediante los enteros. Es necesaria otra extensión para incluir números de la forma m/n, lo que lleva al conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0\right\}$$

Toda ecuación lineal

$$ax = b, \qquad (a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0)$$

tiene una solución $x = b/a$ en $\mathbb{Q}$, pero la ecuación cuadrática

$$x^2 = 2$$

no tiene solución en $\mathbb{Q}$, como se demostró en la Sección P.1. Una nueva extensión enriquece el conjunto de los números racionales para formar el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ en el que algunas ecuaciones como $x^2 = 2$ tienen solución. Sin embargo, otras ecuaciones cuadráticas, por ejemplo,

$$x^2 = -1$$

no tienen solución incluso dentro del conjunto de los números reales, por lo que el proceso de extensión no está completo. Para poder resolver cualquier ecuación cuadrática, necesitamos extender el sistema de los números reales para formar un conjunto mayor que se denomina **sistema de los números complejos**. En este apéndice definiremos los números complejos y desarrollaremos algunas de sus propiedades básicas.

Definición de números complejos

Empezaremos por definir el símbolo i, denominado **unidad imaginaria**[1], que tiene la propiedad

$$i^2 = -1$$

Por tanto, también denominaremos a i **raíz cuadrada de** -1 y lo expresaremos como $\sqrt{-1}$. Por supuesto, i no es un número real; ningún número real tiene un cuadrado negativo.

DEFINICIÓN 1

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi \quad \text{o} \quad a + ib$$

siendo a y b *números reales*, e i la unidad imaginaria.

Por ejemplo, $3 + 2i$, $\frac{7}{2} - \frac{2}{3}i$, $i\pi = 0 + i\pi$ y $-3 = -3 + 0i$ son todos números complejos. El último de estos ejemplos muestra que todo número real se puede considerar como un número complejo (utilizaremos normalmente $a + bi$ a menos que b sea una expresión complicada, en cuyo caso escribiremos $a + ib$; cualquier forma es aceptable).

A menudo es conveniente representar un número complejo mediante una única letra; w y z se utilizan frecuentemente para este fin. Si a, b, x e y son números reales, y

$$w = a + bi \quad \text{y} \quad z = x + yi$$

podemos entonces referirnos a los números complejos w y z. Nótese que $w = z$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$. Son de especial importancia los números complejos

$$0 = 0 + 0i, \qquad 1 = 1 + 0i \quad \text{y} \quad i = 0 + 1i$$

DEFINICIÓN 2

Si $z = x + yi$ es un número complejo (siendo x e y reales), denominaremos a x **parte real** de z y la indicaremos como $\mathrm{Re}\,(z)$. Denominaremos a y **parte imaginaria** de z y la indicaremos como $\mathrm{Im}\,(z)$:

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(x + yi) = x, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(x + yi) = y$$

Nótese que tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales:

$$\mathrm{Re}\,(3 - 5i) = 3 \qquad \mathrm{Im}\,(3 - 5i) = -5$$

$$\mathrm{Re}\,(2i) = \mathrm{Re}\,(0 + 2i) = 0 \qquad \mathrm{Im}\,(2i) = \mathrm{Im}\,(0 + 2i) = 2$$

$$\mathrm{Re}\,(-7) = \mathrm{Re}\,(-7 + 0i) = -7 \qquad \mathrm{Im}\,(-7) = \mathrm{Im}\,(-7 + 0i) = 0$$

[1] En algunos campos, por ejemplo, la ingeniería eléctrica, la unidad imaginaria se denomina j en vez de i. Como «negativo», o «irracional», el término «imaginario» sugiere el recelo con que se acogía la nueva clase de números que se presentaban por primera vez.

Representación gráfica de números complejos

Como los números complejos se construyen a partir de parejas de números reales (sus partes real e imaginaria), es natural representar gráficamente a los números complejos como puntos en un plano cartesiano. Utilizaremos el punto de coordenadas (a, b) para representar al número complejo $w = a + ib$. En particular, el origen $(0, 0)$ representa al número complejo 0, el punto $(1, 0)$ representa al número complejo $1 = 1 + 0i$ y el punto $(0, 1)$ representa al número complejo $i = 0 + 1i$ (*véase* la Figura I.1).

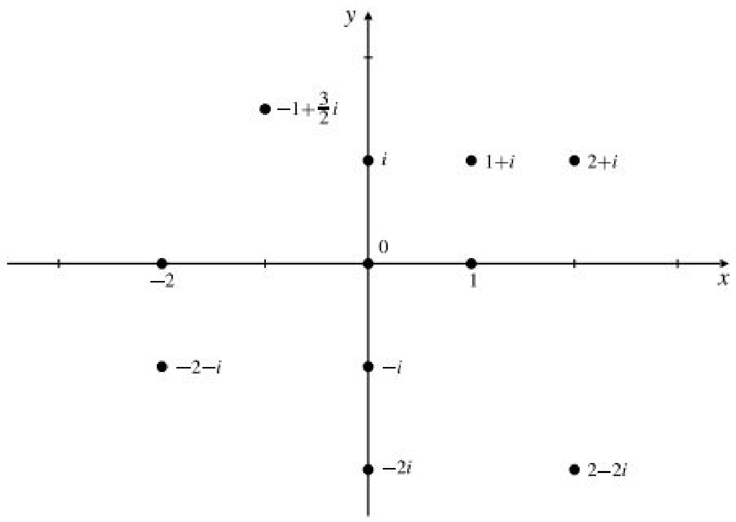

Figura I.1 Un diagrama de Argand que representa el plano complejo.

Esta representación de los números complejos como puntos en un plano se denomina **diagrama de Argand**. Como todo número complejo está representado por un único punto del plano, el conjunto de todos los números complejos se denomina frecuentemente **plano complejo**. El símbolo $\mathbb{C}$ se utiliza para representar al conjunto de todos los números complejos y, de forma equivalente, al plano complejo:

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y, \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos del eje x del plano complejo corresponden a los números reales ($x = x + 0i$), por lo que el eje x se denomina **eje real**. Los puntos del eje y corresponden a números **imaginarios puros** ($yi = 0 + yi$), por lo que el eje y se denomina **eje imaginario**.

Puede ser de utilidad emplear las *coordenadas polares* de un punto en el plano complejo.

DEFINICIÓN 3

La distancia desde el origen hasta el punto (a, b) correspondiente al número complejo $w = a + bi$ se denomina **módulo** de w y se escribe $|w|$ o $|a + bi|$:

$$|w| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

DEFINICIÓN 4

Si la recta que va desde el origen hasta (a, b) forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje real (midiéndose los ángulos positivos en el sentido contrario al de las agujas del reloj), entonces θ se denomina **fase** del número complejo $w = a + bi$ y se escribe $\arg(w)$ o $\arg(a + bi)$ (*véase* la Figura I.2).

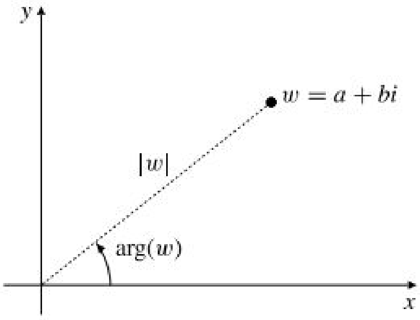

Figura I.2 Módulo y fase de un número complejo.

El módulo de un número complejo es siempre real y no negativo. Es positivo a menos que el número complejo sea 0. El papel que juega el módulo en los números complejos es similar al del valor absoluto en los números reales. De hecho, a veces el módulo se denomina valor absoluto.

Las fases de los números complejos no son únicas. Si $w = a + bi \neq 0$ entonces todos los posibles valores de $\arg(w)$ difieren en un múltiplo entero de 2π. El símbolo $\arg(w)$ no representa realmente un único número, sino un conjunto de números. Cuando escribimos $\arg(w) = \theta$ estamos diciendo que el conjunto $\arg(w)$ contiene a todos los números de la forma $\theta + 2k\pi$, siendo k un entero. De forma similar, la afirmación $\arg(z) = \arg(w)$ dice que los dos conjuntos son idénticos.

Si $w = a + bi$, con $a = \mathrm{Re}(w) \neq 0$, entonces

$$\tan \arg(w) = \tan \arg(a + bi) = \frac{b}{a}$$

Esto significa que $\tan\theta = b/a$ para todo θ en el conjunto $\arg(w)$.

Algunas veces es conveniente restringir $\theta = \arg(w)$ a un intervalo de amplitud 2π, es decir, al intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$ o $-\pi < \theta \leqslant \pi$, de forma que los números complejos distintos de cero tendrán fases únicas. Denominaremos al valor de $\arg(w)$ en el intervalo $-\pi < \theta \leqslant \pi$ **fase principal** de w y lo escribiremos $\mathrm{Arg}(w)$. Todo número complejo w excepto el cero tiene una fase principal única $\mathrm{Arg}(w)$.

Ejemplo 1 **(Algunos módulos y fases principales)** *Véase* la Figura I.3.

$\|2\| = 2$	$\mathrm{Arg}(2) = 0$
$\|1 + i\| = \sqrt{2}$	$\mathrm{Arg}(1 + i) = \pi/4$
$\|i\| = 1$	$\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$
$\|-2i\| = 2$	$\mathrm{Arg}(-2i) = -\pi/2$
$\|-\sqrt{3} + i\| = 2$	$\mathrm{Arg}(-\sqrt{3} + i) = 5\pi/6$
$\|-1 - 2i\| = \sqrt{5}$	$\mathrm{Arg}(-1 - 2i) = -\pi + \tan^{-1}(2)$

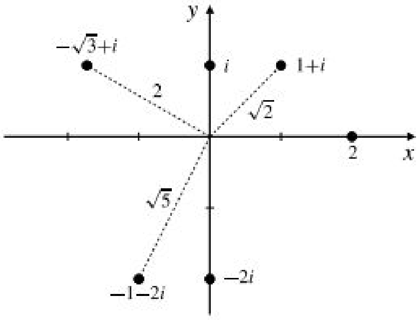

Figura I.3 Algunos números complejos con sus módulos.

Observación Si $z = x + yi$ y $\mathrm{Re}(z) = x > 0$, entonces $\mathrm{Arg}(z) = \tan^{-1}(y/x)$. Muchas hojas de cálculo de computador y paquetes de software matemático implementan una función arctan denominada atan2(x, y) que proporciona el ángulo polar de (x, y) en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Por tanto,

$$\mathrm{Arg}(x + yi) = \mathrm{atan2}(x, y)$$

Dado el módulo $r = |w|$ y cualquier valor de la fase $\theta = \arg(w)$ de un número complejo $w = a + bi$, tenemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, por lo que w se puede expresar en función de su módulo y fase como

$$w = r\cos\theta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La expresión del miembro derecho se denomina **representación polar** de w.

¡¡ ATENCIÓN !! Revise la nota de atención al final de la presentación de la función arcotangente en la Sección 3.5; programas diferentes implementan la función arcotangente de dos variables utilizando notaciones diferentes y/o diferente orden de variables.

DEFINICIÓN 5

El **conjugado** o **complejo conjugado** de un número complejo $w = a + bi$ es otro número complejo, simbolizado por $\bar{w}$, y dado por

$$\bar{w} = a - bi$$

Ejemplo 2 $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$, $\quad \bar{3} = 3$, $\quad \overline{2i} = -2i$. ■

Obsérvese que

$$\mathrm{Re}(\bar{w}) = \mathrm{Re}(w) \qquad |\bar{w}| = |w|$$

$$\mathrm{Im}(\bar{w}) = -\mathrm{Im}(w) \qquad \arg(\bar{w}) = -\arg(w)$$

En un diagrama de Argand el punto $\bar{w}$ es la reflexión del punto w con respecto al eje real (*véase* la Figura I.4).

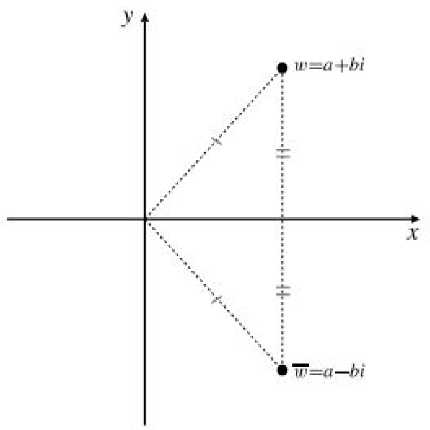

Figura I.4 Un número complejo y su conjugado son imágenes especulares entre sí con respecto al eje real.

Nótese que w es real ($\mathrm{Im}(w) = 0$) si y sólo si $\bar{w} = w$. Además, w es imaginario puro ($\mathrm{Re}(w) = 0$) si y sólo si $\bar{w} = -w$ (en este caso, $-w = -a - bi$ si $w = a + bi$).

Aritmética compleja

Como los números reales, los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Dos números complejos se suman o restan como si fueran vectores bidimensionales cuyas componentes son sus partes real e imaginaria.

Suma y diferencia de números complejos

Si $w = a + bi$ y $z = x + yi$, siendo a, b, x e y números reales, entonces

$$w + z = (a + x) + (b + y)i$$
$$w - z = (a - x) + (b - y)i$$

En un diagrama de Argand los puntos $w + z$ y $w - z$ son los puntos cuyos vectores de posición son, respectivamente, la suma y la diferencia de los vectores de posición de los puntos w y z (*véase* la Figura I.5). En particular, el número complejo $a + bi$ es la suma del número real $a = a + 0i$ y el número imaginario puro $bi = 0 + bi$.

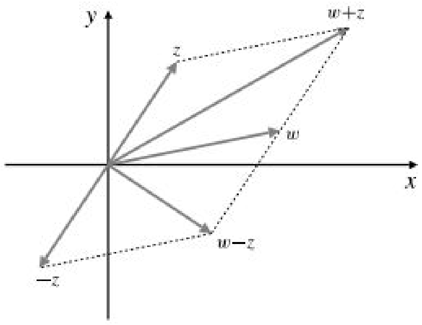

Figura I.5 Dos números complejos se suman y se restan vectorialmente. Obsérvense los paralelogramos.

La suma compleja obedece a las mismas reglas que la suma real: si w_1, w_2 y w_3 son tres números complejos, las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

$$w_1 + w_2 = w_2 + w_1 \qquad \text{La suma es conmutativa.}$$
$$(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3) \qquad \text{La suma es asociativa.}$$
$$|w_1 \pm w_2| \leqslant |w_1| + |w_2| \qquad \text{desigualdad del triángulo.}$$

Nótese que $|w_1 - w_2|$ es la distancia entre los w_1 y w_2 en el plano complejo. Por tanto, la desigualdad del triángulo dice que en el triángulo cuyos vértices son w_1, $\mp w_2$ y 0, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Se puede verificar también fácilmente que el conjugado de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de los conjugados:

$$\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$$

Ejemplo 3

(a) Si $w = 2 + 3i$ y $z = 4 - 5i$, entonces

$$w + z = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$$
$$w - z = (2 - 4) + (3 - (-5))i = -2 + 8i$$

(b) $3i + (1 - 2i) - (2 + 3i) + 5 = 4 - 2i$.

La multiplicación de dos números complejos $w = a + bi$ y $z = x + yi$ se realiza multiplicando formalmente las expresiones binomiales y sustituyendo i^2 por -1:

$$\begin{aligned} wz &= (a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i \end{aligned}$$

Producto de números complejos

Si $w = a + bi$ y $z = x + yi$, siendo a, b, x e y números reales, entonces

$$wz = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Ejemplo 4

(a) $(2 + 3i)(1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 8 - i$.

(b) $i(5 - 4i) = 5i - 4i^2 = 4 + 5i$.

(c) $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

El apartado (c) del ejemplo anterior muestra que el cuadrado del módulo de un número complejo es el producto de dicho número con su complejo conjugado:

$$w\bar{w} = |w|^2$$

La multiplicación compleja comparte muchas propiedades con la multiplicación real. En particular, si w_1, w_2 y w_3 son números complejos, entonces

$w_1w_2 = w_2w_1$	La multiplicación es conmutativa.
$(w_1w_2)w_3 = w_1(w_2w_3)$	La multiplicación es asociativa.
$w_1(w_2 + w_3) = w_1w_2 + w_1w_3$	La multiplicación es distributiva respecto de la suma.

El conjugado de un producto es el producto de los conjugados:

$$\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$$

Para ver que esto es así, sean $w = a + bi$ y $z = x + yi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{wz} &= \overline{(ax - by) + (ay + bx)i} \\ &= (ax - by) - (ay + bx)i \\ &= (a - bi)(x - yi) = \bar{w}\bar{z} \end{aligned}$$

Es particularmente sencillo determinar el producto de módulos complejos expresados en forma polar. Si

$$w = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \qquad \text{y} \qquad z = s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$$

siendo $r = |w|$, $\theta = \arg(w)$, $s = |z|$, y $\phi = \arg(z)$, entonces

$$\begin{aligned} wz &= rs(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) \\ &= rs((\cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi) + i(\text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi)) \\ &= rs(\cos(\theta + \phi) + i\,\text{sen}\,(\theta + \phi)) \end{aligned}$$

Véase la Figura I.6. Como las fases sólo están determinadas hasta un múltiplo entero de 2π, hemos demostrado que

Módulo y fase de un producto

$$|wz| = |w||z| \quad \text{y} \quad \arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$$

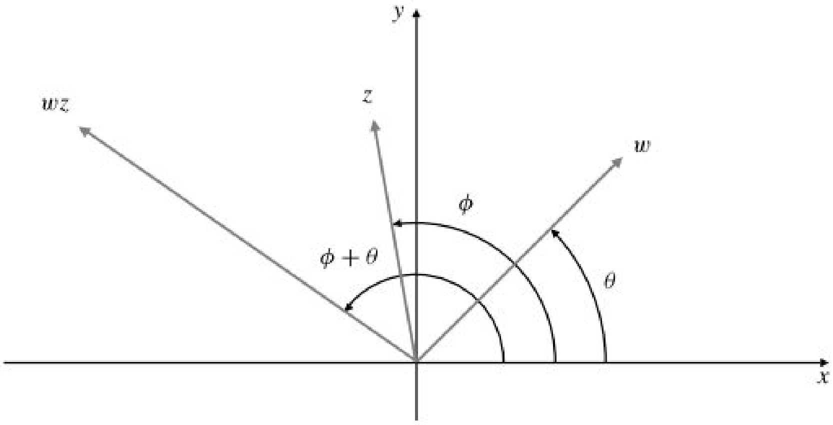

Figura I.6 La fase de un producto es la suma de las fases de los factores.

La segunda de estas ecuaciones dice que el conjunto $\arg(wz)$ está formado por todos los números $\theta + \phi$, donde θ pertenece al conjunto $\arg(w)$ y ϕ al conjunto $\arg(z)$.

De forma más general, si $w_1, w_2, ..., w_n$ son números complejos, entonces

$$|w_1 w_2 \cdots w_n| = |w_1||w_2| \cdots |w_n|$$

$$\arg(w_1 w_2 \cdots w_n) = \arg(w_1) + \arg(w_2) + \cdots + \arg(w_n)$$

La multiplicación de un número complejo por i tiene una interpretación geométrica particularmente simple en un diagrama de Argand. Como $|i| = 1$ y $\arg(i) = \pi/2$, la multiplicación de $w = a + bi$ por i no modifica el módulo de w pero aumenta su fase en $\pi/2$ (*véase* la Figura I.7). Por tanto, la multiplicación por i gira el vector de posición de w en sentido contrario al de las agujas del reloj 90º alrededor del origen.

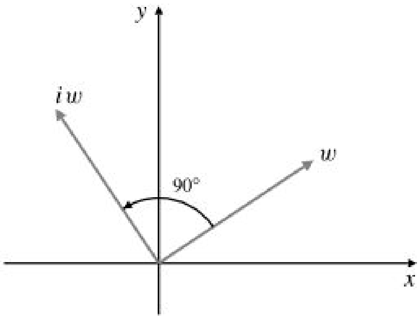

Figura I.7 La multiplicación por i corresponde a una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj de 90º.

Sea $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Entonces $|z| = 1$ y $\arg(z) = \theta$. Como el módulo de un producto es el producto de los módulos de los factores y la fase de un producto es la suma de las fases de los factores, tenemos $|z^n| = |z|^n = 1$ y $\arg(z^n) = n\arg(z) = n\theta$. Por tanto,

$$z^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$$

y hemos demostrado el Teorema de de Moivre.

TEOREMA 1 Teorema de Moivre

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$$

Observación Una gran parte del estudio de las funciones complejas de variable compleja se sale del alcance de este libro. Sin embargo, en el Apéndice II presentaremos una versión compleja de la exponencial que tiene la siguiente propiedad: si $z = x + iy$ (siendo x e y reales), entonces

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$$

Por tanto, el módulo de e^z es $e^{\text{Re}(z)}$ e $\text{Im}(z)$ es un valor de $\arg(e^z)$. En este contexto, el Teorema de de Moivre dice simplemente que

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ejemplo 5 Exprese $(1+i)^5$ en la forma $a + bi$.

Solución Como $|(1+i)^5| = |1+i|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ y $\arg((1+i)^5) = 5\arg(1+i) = \dfrac{5\pi}{4}$, tenemos

$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4 - 4i$$

El Teorema de Moivre se puede utilizar para generar identidades trigonométricas de los múltiplos de un ángulo. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos

$$\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$$

Por tanto, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$ y $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$.

El **inverso** de un número complejo distinto de cero $w = a + bi$ se puede calcular multiplicando el numerador y el denominador de la expresión del inverso por el conjugado de w:

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $|\bar{w}| = |w|$ y $\arg(\bar{w}) = -\arg(w)$, tenemos

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{|\bar{w}|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg(w)$$

El **cociente** z/w de dos números complejos $z = x + yi$ y $w = a + bi$ es el producto de z y $1/w$, por lo que

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{xa + yb + i(ya - xb)}{a^2+b^2}$$

Tenemos

Módulo y fase de un cociente

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

El conjunto $\arg(z/w)$ está formado por todos los números $\theta - \phi$ donde θ pertenece al conjunto $\arg(z)$ y ϕ pertenece al conjunto $\arg(w)$.

Ejemplo 6 Simplifique (a) $\dfrac{2+3i}{4-i}$ y (b) $\dfrac{i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solución

(a) $$\frac{2+3i}{4-i}=\frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\frac{8-3+(2+12)i}{4^2+1^2}=\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i.$$

(b) $$\frac{i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{i(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+i}{1^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i.$$

Por otra parte, como $|1+i\sqrt{3}|=2$ y $\arg(1+i\sqrt{3})=\tan^{-1}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, el módulo del cociente de (b) es $\dfrac{1}{2}$ y su fase es $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$. Por tanto,

$$\frac{i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

Raíces de números complejos

Si a es un número real positivo, existen dos números reales diferentes cuyo cuadrado es a. Se denominan

$$\sqrt{a} \qquad \text{(la raíz cuadrada positiva de } a\text{)}$$

$$-\sqrt{a} \qquad \text{(la raíz cuadrada negativa de } a\text{)}$$

Todo número complejo $z=x+yi$ distinto de cero (siendo $x^2+y^2>0$) tiene dos raíces cuadradas; si w_1 es un número complejo tal que $w_1^2=z$, entonces $w_2=-w_1$ también cumple $w_2^2=z$. Es interesante señalar una de esas raíces para denominarla $\sqrt{z}$.

Sea $r=|z|$, de forma que $r>0$. Sea $\theta=\operatorname{Arg}(z)$. Por tanto, $-\pi<\theta\leqslant\pi$. Como

$$z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$$

el número complejo

$$w=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

cumple claramente $w^2=z$. Denominaremos a w **raíz cuadrada principal** de z y lo escribiremos $\sqrt{z}$. Las dos soluciones de la ecuación $w^2=z$ son, por tanto, $w=\sqrt{z}$ y $w=-\sqrt{z}$.

Obsérvese que la parte real de $\sqrt{z}$ es siempre no negativa puesto que $\cos(\theta/2)\geqslant 0$ para $-\pi/2<\theta\leqslant\pi/2$. En este intervalo $\operatorname{sen}(\theta/2)=0$ sólo si $\theta=0$ en cuyo caso $\sqrt{z}$ es real y positiva.

Ejemplo 7

(a) $\sqrt{4}=\sqrt{4(\cos 0+i\operatorname{sen}0)}=2.$

(b) $$\sqrt{i}=\sqrt{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

(c) $$\sqrt{-4i}=\sqrt{4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

(d) $$\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Dado un número complejo z distinto de cero, se pueden obtener n números complejos distintos w que cumplen $w^n = z$. Estos n números se denominan las raíces n-ésimas de z. Por ejemplo, si $z = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$, entonces todos los números

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1 \\
w_2 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\
w_3 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\
w_4 &= \cos\frac{6\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} \\
&\vdots \\
w_n &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

cumplen $w^n = 1$ y, por tanto, son raíces n-ésimas de 1 (estos números se denominan generalmente raíces n-ésimas de la unidad). La Figura I.8 muestra las tres raíces cúbicas de 1. Obsérvese que están en los tres vértices de un triángulo equilátero cuyo centro está en el origen y uno de sus vértices está en 1. En general, las n raíces n-ésimas de la unidad estarán en una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y sus vértices formarán un polígono regular de n lados con uno de sus vértices en 1.

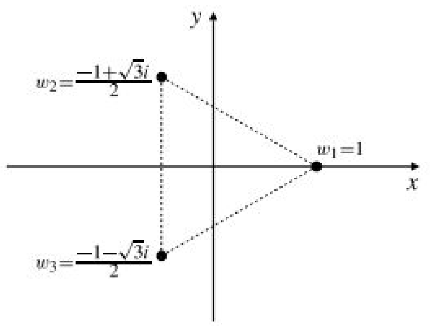

Figura I.8 Las raíces cúbicas de la unidad.

Si z es un número complejo distinto de cero y θ es la fase principal de $z(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, entonces el número

$$w_1 = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$

se denomina raíz **principal** n-ésima de z. Todas las raíces n-ésimas de z están en una circunferencia de radio $|z|^{1/n}$ centrada en el origen y ocupan los vértices de un polígono regular de n lados con uno de sus vértices en w_1 (*véase* la Figura I.9). Las otras n raíces son

$$\begin{aligned}
w_2 &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{n}\right) \\
w_3 &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{n}\right) \\
&\vdots \\
w_n &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

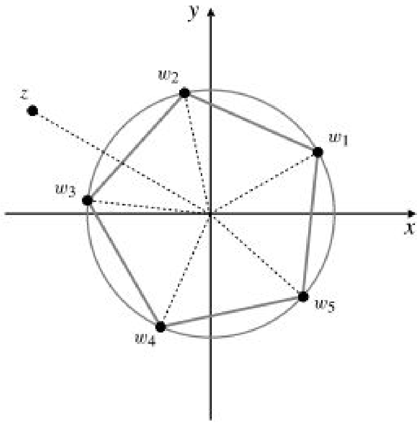

Figura I.9 Las cinco raíces quintas de z.

Podemos obtener todas las raíces n-ésimas de z multiplicando la raíz principal n-ésima por las raíces n-ésimas de la unidad.

Ejemplo 8 Calcule las raíces cuartas de -4. Dibújelas en un diagrama de Argand.

Solución Como $|-4|^{1/4} = \sqrt{2}$ y $\arg(-4) = \pi$, la raíz cuarta principal de -4 es

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

Las otras tres raíces cuartas están en los vértices de un cuadrado cuyo centro es el origen y uno de sus vértices está en $1 + i$ (*véase* la Figura I.10). Por tanto, las otras raíces son

$$w_2 = -1 + i, \qquad w_3 = -1 - i, \qquad w_4 = 1 - i$$

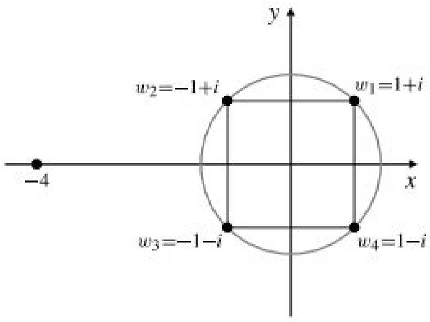

Figura I.10 Las cuatro raíces cuartas de -4.

Ejercicios: Apéndice I

En los Ejercicios 1-4, calcule las partes reales e imaginarias ($\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$) de los números complejos z dados, y dibuje la posición de cada uno de los números en el plano complejo (es decir, en un diagrama de Argand).

1. $z = -5 + 2i$

2. $z = 4 - i$

3. $z = -\pi i$

4. $z = -6$

En los Ejercicios 5-15, calcule los módulos $r = |z|$ y las fases principales $\theta = \text{Arg}(z)$ de los números complejos dados z, y exprese z en función de r y θ.

5. $z = -i + i$

6. $z = -2$

7. $z = 3i$

8. $z = -5i$

9. $z = 1 + 2i$

10. $z = -2 + i$

11. $z = -3 - 4i$

12. $z = 3 - 4i$

13. $z = \sqrt{3} - i$

14. $z = -\sqrt{3} - 3i$

15. $z = 3\cos\dfrac{4\pi}{5} + 3i\,\text{sen}\dfrac{4\pi}{5}$

16. Si $\operatorname{Arg}(z) = 3\pi/4$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi/2$, calcule $\operatorname{Arg}(zw)$.

17. Si $\operatorname{Arg}(z) = -5\pi/6$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi/4$, calcule $\operatorname{Arg}(z/w)$.

En los Ejercicios 18-23, exprese en la forma $z = x + yi$ los números complejos z con los módulos y fases dados.

18. $|z| = 2, \quad \arg(z) = \pi$

19. $|z| = 5, \quad \arg(z) = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

20. $|z| = 1, \quad \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

21. $|z| = \pi, \quad \arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$

22. $|z| = 0, \quad \arg(z) = 1$

23. $|z| = \dfrac{1}{2}, \quad \arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$

En los Ejercicios 24-27, calcule los complejos conjugados de los números complejos dados.

24. $5 + 3i$

25. $-3 - 5i$

26. $4i$

27. $2 - i$

Describa geométricamente (o realice un dibujo) del conjunto de puntos z en el plano complejo que cumplen las ecuaciones o desigualdades de los Ejercicios 28-33.

28. $|z| = 2$

29. $|z| \leqslant 2$

30. $|z - 2i| \leqslant 3$

31. $|z - 3 + 4i| \leqslant 5$

32. $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$

33. $\pi \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{7\pi}{4}$

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 34-43.

34. $(2 + 5i) + (3 - i)$

35. $i - (3 - 2i) + (7 - 3i)$

36. $(4 + i)(4 - i)$

37. $(1 + i)(2 - 3i)$

38. $(a + bi)\overline{(2a - bi)}$

39. $(2 + i)^3$

40. $\dfrac{2 - i}{2 + i}$

41. $\dfrac{1 + 3i}{2 - i}$

42. $\dfrac{1 + i}{i(2 + 3i)}$

43. $\dfrac{(1 + 2i)(2 - 3i)}{(2 - i)(3 + 2i)}$

44. Demuestre que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

45. Demuestre que $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

46. Exprese los números complejos $z = 3 + i\sqrt{3}$ y $w = -1 + i\sqrt{3}$ en forma polar (es decir, en función de su módulo y fase). Utilice estas expresiones para calcular zw y z/w.

47. Repita el Ejercicio 46 para $z = -1 + i$ y $w = 3i$.

48. Utilice el Teorema de de Moivre para obtener una identidad trigonométrica de $\cos 3\theta$ en función de $\cos\theta$, y otra para $\operatorname{sen} 3\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$.

49. Describa las soluciones, si existen, de la ecuación (a) $\bar{z} = 2/z$ y (b) $\bar{z} = -2/z$.

50. Dados los números positivos a y b, siempre es cierto que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. ¿Se cumple una identidad similar para $\sqrt{zw}$, siendo z y w números complejos? *Sugerencia*: Considere $z = w = -1$.

51. Calcule las tres raíces cúbicas de -1.

52. Calcule las tres raíces cúbicas de $-8i$.

53. Calcule las tres raíces cúbicas de $-1 + i$.

54. Calcule todas las raíces cuartas de 4.

55. Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$.

56. Calcule todas las soluciones de $z^5 + a^5 = 0$, siendo a un número real positivo.

57. Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero. *Sugerencia*: Demuestre que estas raíces son todas ellas potencias de la raíz principal.

APÉNDICE II

Funciones complejas

El camino más corto entre dos verdades en el dominio real pasa por el dominio complejo.

Jacques Hadamard (1865-1963)
citado en *La inteligencia matemática, v. 13, 1991*

La mayor parte de este libro trata del desarrollo de las propiedades de las **funciones reales**, es decir, funciones de una o más variables reales cuyos valores son a su vez números reales o vectores con componentes reales. La definición de *función* dada en la Sección P.4 se puede adaptar al caso de funciones complejas de variable compleja.

DEFINICIÓN 1

Una **función compleja** f es una regla que asigna un único número complejo $f(z)$ a cada número z de un conjunto de números complejos (denominado **dominio** de la función).

Normalmente utilizaremos $z = x + yi$ para indicar un punto general del dominio de una función compleja y $w = u + vi$ para indicar el valor de la función en z; si $w = f(z)$, entonces las partes real e imaginaria de w ($u = \operatorname{Re}(w)$ y $v = \operatorname{Im}(w)$) son funciones reales de z, y por tanto funciones reales de las dos variables reales x e y:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

Por ejemplo, la función compleja $f(z) = z^2$, cuyo dominio es el plano complejo completo $\mathbb{C}$, asigna el valor z^2 al número complejo z. Si $w = z^2$ (siendo $w = u + vi$ y $z = x + yi$), entonces

$$u + vi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

de forma que

$$u = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$$

No resulta práctico dibujar la *gráfica* de una función compleja. La gráfica de $w = f(z)$ tendría que ser dibujada en un espacio (real) de cuatro dimensiones, ya que se requieren dos dimensiones (un plano z) para la variable independiente y dos dimensiones más (un plano w) para la variable dependiente. En vez de eso, podemos representar gráficamente el comportamiento de una función compleja $w = f(z)$ dibujando el plano z y el plano w separadamente, y mostrando la imagen en el plano w de cierto conjunto de puntos previamente escogido en el plano z. Por ejemplo, la Figura II.1 ilustra el hecho de que para la función $w = z^2$ la imagen del cuarto de disco $|z| \leqslant a$, $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$ es el semidisco $|w| \leqslant a^2$, $0 \leqslant \arg(w) \leqslant \pi$. Para ver por qué esto es así,

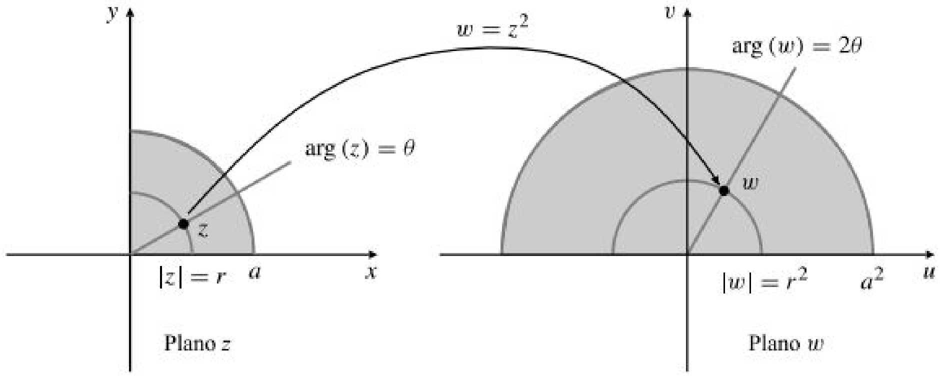

Figura II.1 La función $w = z^2$ transforma un cuarto de disco de radio a en un semidisco de radio a^2 elevando al cuadrado el módulo y doblando la fase de cada punto z.

obsérvese que si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces $w = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$. Por tanto, la función transforma la circunferencia $|z| = r$ en la circunferencia $|w| = r^2$ y la recta radial $\arg(z) = \theta$ en la recta radial $\arg(w) = 2\theta$.

Límites y continuidad

Los conceptos de límite y continuidad se pueden trasladar de manera obvia del campo de las funciones reales a las funciones complejas suponiendo que utilizamos $|z_1 - z_2|$ como la distancia entre los números complejos z_1 y z_2. Se dice que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda$$

suponiendo que podemos asegurar que $|f(z) - \lambda|$ es tan pequeño como deseemos tomando z suficientemente cerca de z_0. Formalmente,

DEFINICIÓN 2

Se dice que $f(z)$ tiende al **límite** λ cuando z tiende a z_0 y se escribe

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda$$

si para todo número real positivo ϵ existe un δ (que depende de ϵ), tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \lambda| < \epsilon$$

DEFINICIÓN 3

La función compleja $f(z)$ es **continua** en $z = z_0$ si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe y es igual a $f(z_0)$.

Todas las leyes de los límites y de la continuidad se aplican como en el caso de funciones reales. Los polinomios, es decir, las funciones de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

son continuas en todo punto del plano complejo. Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

siendo $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, son continuas en todas partes excepto en los puntos donde $Q(z) = 0$. Las potencias enteras z^n son continuas excepto en el origen si $n < 0$. La situación de potencias fraccionarias es más complicada. Por ejemplo, $\sqrt{z}$ (la raíz cuadrada principal) es continua excepto en los puntos $z = x < 0$. La función $f(z) = \bar{z}$ es continua en todas partes, porque

$$|\bar{z} - \bar{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

La derivada compleja

La definición de derivada es la misma que para funciones reales:

DEFINICIÓN 4

La función compleja f es **diferenciable** en z y tiene **derivada** $f'(z)$ en ese punto, siempre que exista

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Nótese, sin embargo, que en esta definición h es un número complejo. El límite debe existir independientemente de cómo h tienda a 0 en el plano complejo. Este hecho tiene profundas implicaciones. La existencia de una derivada en este sentido fuerza a que la función f sea mucho mejor comportada de lo que es necesario en el caso de una función real diferenciable. Por ejemplo, se puede demostrar que si $f'(z)$ existe para todo z en una región abierta D en $\mathbb{C}$, entonces f tiene derivadas de *todos* los órdenes en D. Es más, tal función es la suma de la serie de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

alrededor de todo punto z_0 en D. La serie tiene radio de convergencia positivo R y converge en el disco $|z - z_0| < R$. Por esta razón, las funciones complejas que son diferenciables en conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ se denominan generalmente **funciones analíticas**. La demostración de estas afirmaciones está más allá del alcance de este apéndice introductorio. Se pueden encontrar en cursos y textos de análisis complejo.

Se aplican las reglas habituales de la diferenciación:

$$\frac{d}{dz}(Af(z) + Bg(z)) = Af'(z) + Bg'(z)$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$$

Como se puede esperar, la derivada de $f(z) = z^n$ es $f'(z) = nz^{n-1}$.

Ejemplo 1 Demuestre que la función $f(z) = \bar{z}$ no es diferenciable en ningún punto.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h-z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

Pero $\bar{h}/h = 1$ si h es real, y $\bar{h}/h = -1$ si h es imaginario. Como existen números reales e imaginarios puros arbitrariamente cercanos a 0, el límite anterior no existe, por lo que tampoco existe $f'(z)$. ■

El teorema siguiente relaciona la existencia de la derivada de una función compleja $f(z)$ con ciertas propiedades de sus partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

TEOREMA 1 **La condición de Cauchy-Riemann**

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable en $z = x + yi$, entonces u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Asimismo, si u y v son suficientemente suaves (es decir, si tienen derivadas parciales segundas continuas cerca de (x, y)), y si u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x, y), entonces f es diferenciable en $z = x + yi$ y

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos en primer lugar que f es diferenciable en z. Haciendo $h = s + ti$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \left[\frac{u(x+s,\ y+t) - u(x,\ y)}{s+it} + i\frac{v(x+s,\ y+t) - v(x,\ y)}{s+it}\right] \end{aligned}$$

El límite debe ser independiente del camino por el que h tienda a 0. Haciendo $t = 0$, de forma que $h = s$ tienda a 0 siguiendo el eje real, obtenemos

$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \left[\frac{u(x+s,\ y) - u(x,\ y)}{s} + i\frac{v(x+s,\ y) - v(x,\ y)}{s}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

De forma similar, haciendo $s = 0$, de forma que $h = ti$ tienda a 0 siguiendo el eje imaginario, tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x,\ y+t) - u(x,\ y)}{it} + i\frac{v(x,\ y+t) - v(x,\ y)}{it}\right] \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{v(x,\ y+t) - v(x,\ y)}{t} - i\frac{u(x,\ y+t) - u(x,\ y)}{t}\right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones de $f'(z)$, podemos ver que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Para demostrar la condición inversa, utilizaremos el resultado del Ejercicio 19 de la Sección 12.6. Como se supone que u y v tienen segundas derivadas parciales continuas, debemos tener

$$u(x+s,\, y+t) - u(x,\, y) = s\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial y} + O(s^2 + t^2)$$

$$v(x+s,\, y+t) - v(x,\, y) = s\frac{\partial v}{\partial x} + t\frac{\partial v}{\partial y} + O(s^2 + t^2)$$

donde hemos utilizado la notación O (*véase* la Definición 10 de la Sección 4.8); la expresión $O(\lambda)$ indica un término que cumple $|O(\lambda)| \leqslant K|\lambda|$ para alguna constante K. Por tanto, si u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{s\dfrac{\partial u}{\partial x} + t\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\left(s\dfrac{\partial v}{\partial x} + t\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + O(s^2 + t^2)}{s + it} \\ &= \frac{(s+it)\dfrac{\partial u}{\partial x} + i(s+it)\dfrac{\partial v}{\partial x}}{s + it} + O(\sqrt{s^2 + t^2}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + O(\sqrt{s^2 + t^2})\end{aligned}$$

Por tanto, podemos hacer que $h = s + ti$ tienda a 0 y obtener

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue inmediatamente que las partes real e imaginaria de una función compleja diferenciable son funciones reales armónicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Véase el Ejercicio 15 de la Sección 12.4.

La función exponencial

Consideremos la función

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

siendo $z = x + yi$. Las partes real e imaginaria de $f(z)$,

$$u(x,\, y) = \operatorname{Re}(f(z)) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x,\, y) = \operatorname{Im}(f(z)) = e^x \operatorname{sen} y$$

cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

en todos los puntos del plano z. Por lo tanto, $f(z)$ es diferenciable (analítica) en todas partes y cumple

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z)$$

Evidentemente $f(0) = 1$, y $f(z) = e^x$ si $z = x$ es un número real. Es por tanto natural denominar a la función $f(z)$ función exponencial e^z.

La función exponencial compleja

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad \text{para} \quad z = x + yi$$

En particular, si $z = yi$ es imaginario puro, entonces

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

un resultado que también se puede obtener separando las partes real e imaginaria de la serie de Maclaurin de e^{yi}:

$$\begin{aligned} e^{yi} &= 1 + (yi) + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} |e^z| &= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} = e^x \\ \arg(e^z) &= \arg(e^{yi}) = \arg(\cos y + i \operatorname{sen} y) = y \\ \overline{e^z} &= e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

En resumen:

Propiedades de la función exponencial

Si $z = x + yi$, entonces $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$. Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^z) &= e^x \cos y, & |e^z| &= e^x \\ \operatorname{Im}(e^z) &= e^x \operatorname{sen} y, & \arg(e^z) &= y \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Dibuje la imagen en el plano w del rectángulo

$$R: a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

en el plano z bajo la transformación $w = e^z$.

Solución Las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ se transforman en las circunferencias concéntricas $|w| = e^a$ y $|w| = e^b$. Las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$ se transforman en las rectas radiales $\arg(w) = c$ y $\arg(w) = d$. Por tanto, el rectángulo R se transforma en la región polar P y se muestra en la Figura II.2.

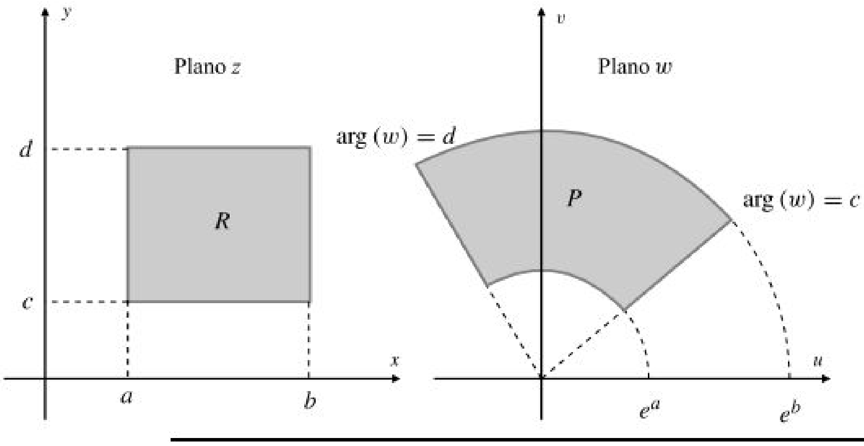

Figura II.2 Mediante la función exponencial $w = e^z$ las rectas verticales se transforman en circunferencias centradas en origen, y las rectas horizontales se transforman en semirrectas que radian desde el origen. ■

Obsérvese que si $d - c \geqslant 2\pi$, entonces la imagen de R será la región anular completa $e^a \leqslant |w| \leqslant e^b$, que se puede cubrir más de una vez. La función exponencial e^z es periódica de periodo $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \text{para todo} \qquad z$$

y no es, por tanto, uno a uno en todo el plano complejo. Sin embargo, $w = e^z$ es uno a uno desde cualquier banda horizontal de la forma

$$-\infty < x < \infty, \qquad c < y \leqslant c + 2\pi$$

en todo el plano w excluyendo el origen.

El Teorema Fundamental del Álgebra

Como se observa al principio del Apéndice I, la extensión del sistema de numeración para incluir los números complejos permite que una mayor clase de ecuaciones tenga solución. Concluiremos este apéndice verificando que las ecuaciones polinómicas siempre tienen solución utilizando números complejos.

Un **polinomio complejo** de grado n es una función de la forma

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son números complejos y $a_n \neq 0$. Los números $a_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ se denominan **coeficientes** del polinomio. Si todos ellos son números reales, entonces $P_n(x)$ se denomina polinomio real.

Un número complejo z_0 que cumple la ecuación $P(z_0) = 0$ se denomina **cero** o **raíz** del polinomio. Todo polinomio de grado 1 tiene un cero: si $a_1 \neq 0$, entonces $a_1 z + a_0$ tiene un cero $z = -a_0/a_1$. Este cero es real si a_1 y a_0 son reales.

De forma similar, todo polinomio complejo de grado 2 tiene dos ceros. Si el polinomio es

$$P_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

con $a_2 \neq 0$, entonces los ceros se pueden obtener mediante la *fórmula de la ecuación de segundo grado*

$$z = z_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \qquad \text{y} \qquad z = z_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

En este caso $P_2(z)$ tiene dos factores lineales:

$$P_2(z) = a_2(z - z_1)(z - z_2)$$

Incluso si cada $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$, de modo que $z_1 = z_2$, podemos considerar todavía que el polinomio tiene dos ceros (iguales), cada uno correspondiente a cada factor. Si los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son números reales, los ceros serán reales siempre que $a_1^2 \geqslant 4a_2a_0$. Cuando los coeficientes reales cumplen $a_1^2 < 4a_2a_0$, entonces los ceros son complejos, de hecho, complejos conjugados: $z_2 = \overline{z_1}$.

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación $z^2 + 2iz - (1 + i) = 0$.

Solución Los ceros de esta ecuación son

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 4(1 + i)}}{2} \\ &= -i \pm \sqrt{i} \\ &= -i \pm \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + (1 - \sqrt{2})i) \quad \text{o} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + (1 + \sqrt{2})i) \end{aligned}$$

■

El Teorema Fundamental del Álgebra asegura que todo polinomio complejo de grado positivo tiene un cero complejo.

TEOREMA 2 **El Teorema Fundamental del Álgebra**

Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio complejo de grado $n \geqslant 1$, entonces existe un número complejo z_1 tal que $P(z_1) = 0$.

DEMOSTRACIÓN (Daremos solamente un planteamiento informal de la demostración). Podemos suponer que el coeficiente de z^n en $P(z)$ es $a_n = 1$, ya que podemos dividir la ecuación $P(z) = 0$ por a_n sin cambiar sus soluciones. Podemos suponer también que $a_0 \neq 0$; si $a_0 = 0$, entonces $z = 0$ es ciertamente un cero de $P(z)$. Por tanto, consideraremos el polinomio

$$P(z) = z^n + Q(z)$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado menor que n que tiene un término constante distinto de cero. Si R es suficientemente grande, entonces $|Q(z)|$ será menor que R^n para todos los números z que cumplan $|z| = R$. A medida que z se mueve por la circunferencia $|z| = R$ en el plano z, $w = z^n$ se mueve por la circunferencia $|w| = R^n$ en el plano w (n veces). Como la distancia desde z^n hasta $P(z)$ es igual a $|P(z) - z^n| = |Q(z)| < R^n$, se deduce que la imagen de la circunferencia $|z| = R$ bajo la transformación $w = P(z)$ es una curva que rodea al origen n veces (si se sigue una circunferencia de radio r n veces, paseando un perro con una cadena de longitud menor que r, y el perro vuelve al punto de origen, entonces aquél habrá recorrido la circunferencia n veces). En la Figura II.3 se ilustra esta situación para el caso particular

$$P(z) = z^3 + z^2 - iz + 1, \qquad |z| = 2$$

La imagen de $|z| = 2$ es la curva grande en el plano w que rodea al origen tres veces. Cuando R disminuye, la curva que traza $w = P(z)$ para $|z| = R$ cambia de forma continua. Cuando R se acerca a 0, hay una pequeña curva cerca del término constante a_0 de $P(z)$. Cuando R es lo suficientemente pequeño, la curva no encerrará al origen (en la Figura II.3 la imagen de $|z| = 0.3$ es la curva pequeña que está cerca del punto 1 en el plano w). Por tanto, para algún valor de R, por ejemplo $R = R_1$, la curva debe pasar por el origen. Es decir, debe existir un número complejo z_1, con $|z| = R_1$, tal que $P(z_1) = 0$.

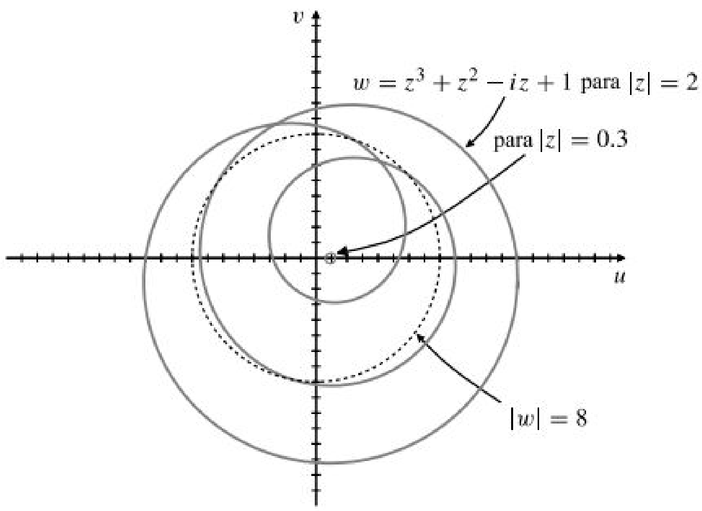

Figura II.3 La imagen de la circunferencia $|z| = 2$ rodea al origen en el plano w tres veces, pero la imagen de $|z| = 0.3$ no rodea al origen en absoluto.

Observación La demostración anterior sugiere que deberían existir n soluciones de la ecuación $P(z) = 0$; la curva tendría que pasar de rodear n veces al origen a rodear 0 veces al origen cuando R tiende a cero. Podemos formalizar esto como sigue. $P(z_1) = 0$ implica que $z - z_1$ es un factor de $P(z)$:

$$P(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$$

donde P_{n-1} es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n > 1$, entonces P_{n-1} debe tener también un cero, z_2, por el Teorema Fundamental. Podemos continuar este razonamiento de forma inductiva para obtener n ceros y factorizar $P(z)$ como un producto de la constante a_n y n factores lineales:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Por supuesto, algunos de los ceros pueden ser iguales.

Observación Si P es un polinomio real, es decir, un polinomio cuyos coeficientes son números reales, entonces $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Por tanto, si z_1 es un cero no real de $P(z)$, entonces también lo es $z_2 = \bar{z}_1$:

$$P(z_2) = P(\bar{z}_1) = \overline{P(z_1)} = \bar{0} = 0$$

Los polinomios reales pueden tener ceros complejos, pero éstos siempre deben aparecer en pares conjugados. Todo polinomio real de grado impar debe tener al menos un cero real.

Ejemplo 4 Demuestre que $z_1 = -i$ es un cero del polinomio

$$P(z) = z^4 + 5z^3 + 7z^2 + 5z + 6$$

y calcule todos los ceros restantes de dicho polinomio.

Solución Obsérvese primero que $P(z_1) = P(-i) = 1 + 5i - 7 - 5i + 6 = 0$, por lo que $z_1 = -i$ es de hecho un cero. Como los coeficientes de $P(z)$ son reales, $z_2 = i$ debe ser también un cero. Por tanto, $z + i$ y $z - i$ son factores de $P(z)$, y también lo es

$$(z + i)(z - i) = z^2 + 1$$

Dividiendo $P(z)$ por $z^2 + 1$ se obtiene

$$\frac{P(z)}{z^2 + 1} = z^2 + 5z + 6 = (z + 2)(z + 3)$$

Por tanto, los cuatro ceros de $P(z)$ son $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ y $z_4 = -3$. ∎

Ejercicios: Apéndice II

En los Ejercicios 1-12, la región D del plano z está formada por los números complejos $z = x + yi$ que cumplen las condiciones dadas. Describa (o dibuje) la imagen R de D en el plano w bajo las funciones dadas $w = f(z)$.

1. $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2;\quad w = \bar{z}$.

2. $x + y = 1;\quad w = \bar{z}$

3. $1 \leqslant |z| \leqslant 2,\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{3\pi}{4};\quad w = z^2$.

4. $0 \leqslant |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2};\ w = z^3$.

5. $0 < |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2};\quad w = \dfrac{1}{z}$.

6. $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{3};\quad w = -iz$.

7. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3};\quad w = \sqrt{z}$.

8. $x = 1;\quad w = z^2$.

9. $y = 1;\quad w = z^2$.

10. $x = 1;\quad w = \dfrac{1}{z}$.

11. $-\infty < x < \infty,\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2};\quad w = e^z$.

12. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \infty$; $w = e^{iz}$.

En los Ejercicios 13-16, verifique que las partes reales e imaginarias de las funciones $f(z)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y calcule $f'(z)$.

13. $f(z) = z^2$.

14. $f(z) = z^3$.

15. $f(z) = \frac{1}{z}$.

16. $f(z) = e^{z^2}$.

17. Utilice el hecho de que $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ (para y real) para demostrar que

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

El Ejercicio 16 sugiere que se pueden definir las funciones complejas

$$\cos z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

así como extender las definiciones de las funciones hiperbólicas a

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Los Ejercicios 18-26 desarrollan propiedades de estas funciones y relaciones entre ellas.

18. Demuestre que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son periódicas con periodo 2π, y que $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$ son periódicas con periodo $2\pi i$.

19. Demuestre que $(d/dz)\operatorname{sen} z = \cos z$ y $(d/dz)\cos z = -\operatorname{sen} z$. ¿Cuáles son las derivadas de $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$?

20. Verifique las identidades $\cos z = \cosh(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz)$. ¿Cuáles son las identidades correspondientes para $\cosh z$ y $\operatorname{senh}(z)$ en función de cos y sen?

21. Calcule todos los ceros complejos de $\cos z$ (es decir, todas las soluciones de $\cos z = 0$).

22. Calcule todos los ceros complejos de $\operatorname{sen} z$.

23. Calcule todos los ceros complejos de $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$.

24. Demuestre que $\operatorname{Re}(\cosh z) = \cosh x \cos y$ e $\operatorname{Im}(\cosh z) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

25. Calcule las partes real e imaginaria de $\operatorname{senh} z$.

26. Calcule las partes real e imaginaria de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

Calcule los ceros de los polinomios de los Ejercicios 27-32.

27. $P(z) = z^2 + 2iz$

28. $P(z) = z^2 - 2z + i$

29. $P(z) = z^2 + 2z + 5$

30. $P(z) = z^2 - 2iz - 1$

31. $P(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z$

32. $P(z) = z^4 - 2z^2 + 4$

33. El polinomio $P(z) = z^4 + 1$ tiene dos parejas de ceros complejos conjugados. Calcúlelos y, a partir de aquí, exprese $P(z)$ como un producto de dos factores cuadráticos con coeficientes reales.

En los Ejercicios 34-36, compruebe que los números dados z_1 son ceros de los polinomios dados, y calcule todos los ceros de dichos polinomios.

34. $P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 16$; $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.

35. $P(z) = z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 3z + 1$; $z_1 = i$.

36. $P(z) = z^5 - 2z^4 - 8z^3 + 8z^2 + 31z - 30$; $z_1 = -2 + i$.

37. Demuestre que la imagen de la circunferencia $|z| = 2$ bajo la transformación $w = z^4 + z^3 - 2iz - 3$ rodea al origen en el plano w cuatro veces.

APÉNDICE III

Funciones continuas

> La geometría parece a veces adelantarse al análisis, pero de hecho lo precede en la misma forma que un discípulo precede a su maestro para limpiar e iluminar su camino. El intervalo entre los dos es tan grande como el existente entre el empirismo y la ciencia, entre la comprensión y la razón o entre lo finito y el infinito.
>
> **J. J. Sylvester (1814-1897)**
> de *Philosophic Magazine, 1866*

El desarrollo del cálculo depende de un modo esencial del concepto de límite de una función y, por tanto, de las propiedades del sistema de los números reales. En el Capítulo 1 presentamos estas nociones de una manera intuitiva sin intentar demostrarlas, excepto en la Sección 1.5, donde se presentó la definición *formal* de límite y se utilizó para verificar algunos límites elementales y demostrar algunas propiedades sencillas de los límites.

Muchos resultados sobre límites y continuidad de funciones presentados en el Capítulo 1 pueden parecer bastante obvios; la mayoría de los estudiantes y usuarios del cálculo no se preocupan al aplicarlos sin demostración. No obstante, las matemáticas son una disciplina altamente lógica y rigurosa, y cualquier afirmación, aunque sea obvia, que no se pueda demostrar mediante argumentos estrictamente lógicos debe considerarse sospechosa. En este apéndice partiremos de la definición formal de límite dada en la Sección 1.5 y la combinaremos con la noción de *completitud* del sistema de los números reales que apareció por primera vez en la Sección P.1 para presentar demostraciones formales de los resultados más importantes sobre funciones continuas dados en los Teoremas 8 y 9 de la Sección 1.4, el Teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio. La mayor parte del desarrollo del cálculo realizado en este libro se basa en esos dos teoremas.

La rama de las matemáticas que trata de las demostraciones de este tipo se denomina análisis matemático. Se trata de una materia que no es seguida habitualmente por los estudiantes de matemáticas en los primeros cursos, sino que se pospone a cursos superiores para los estudiantes que siguen cursos de especialización en matemáticas. Es nuestra intención que el material que se presenta aquí sea de interés en esos cursos para los estudiantes con mayor interés en la comprensión del cálculo.

Límites de funciones

La definición formal de límite está en el corazón del análisis matemático, y es la Definición 9 de la Sección 1.5, que volvemos a presentar a continuación:

Definición formal de límite

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para todo número positivo ϵ existe un número positivo δ que depende de ϵ (es decir, $\delta = \delta(\epsilon)$), tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

La Sección 1.5 se marcó como «opcional», ya que la comprensión del contenido de esa sección no es esencial para la comprensión del cálculo. Sin embargo, esa sección es un requisito previo *esencial* para este apéndice. Es muy recomendable volver a la Sección 1.5 y leerla cuidadosamente, prestando especial atención a los Ejemplos 2 y 4, y realizando al menos los Ejercicios 31-36. En estos ejercicios se demuestran las leyes estándar de los límites planteadas en la Sección 1.2.

Funciones continuas

Consideremos las siguientes definiciones de continuidad, equivalentes a las proporcionadas en la Sección 1.4.

DEFINICIÓN 1 **Continuidad de una función en un punto**

Se dice que una función f, definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, es continua en dicho punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

es decir, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

DEFINICIÓN 2 **Continuidad de una función en un intervalo**

Una función f es continua en un intervalo si es continua en todo punto de dicho intervalo. En el caso de un extremo de un intervalo cerrado, sólo es necesario que f sea continua por un lado. Por tanto, f es continua en el intervalo $[a, b]$ si

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

para todo x que cumpla $a < x < b$ y

$$\lim_{t \to a+} f(t) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to b-} f(t) = f(b)$$

La Figura III.1 ilustra estos conceptos.

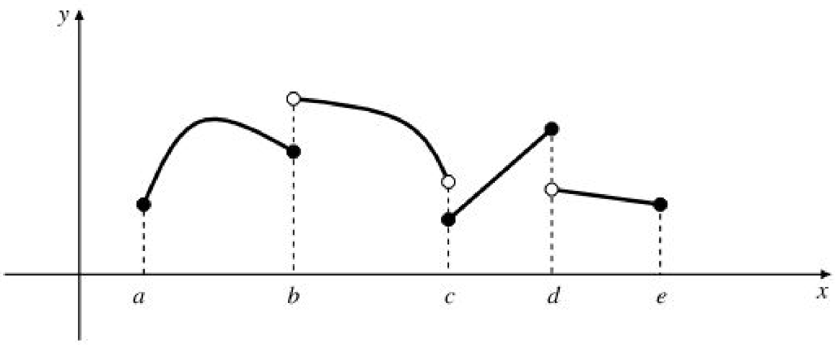

Figura III.1 f es continua en los intervalos $[a, b]$, (b, c), $[c, d]$ y $(d, e]$.

Los Teoremas 6 y 7 de la Sección 1.4 presentan unos resultados importantes que repetimos aquí:

TEOREMA 1 **Combinación de funciones continuas**

(a) Si f y g son continuas en el punto a, entonces también lo son $f+g$, $f-g$, fg y, si $g(a) \neq 0$, f/g.

(b) Si f es continua en el punto L y si $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces tenemos

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

En particular, si g es continua en el punto a (de forma que $L = g(a)$), entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$, es decir, $f \circ g(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

(c) Las funciones $f(x) = C$ (constante) y $g(x) = x$ son continuas en toda la recta real.

(d) Para todo número racional r la función $f(x) = x^r$ es continua en todo número real donde esté definida.

DEMOSTRACIÓN El apartado (a) es un replanteamiento de varias reglas de combinación de límites; por ejemplo,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x)) = f(a)g(a)$$

El apartado (b) se puede demostrar como sigue. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua en L, existe un $k > 0$ tal que $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ siempre que $|g(x) - L| < k$. Puesto que $\lim_{x\to a} g(x) = L$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < k$. Por tanto, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ y $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$.

Las demostraciones de los apartados (c) y (d) se dejan planteadas al estudiante en los Ejercicios 3-9 de este apéndice.

Completitud y límites secuenciales

DEFINICIÓN 3

Se dice que un número real u es una **cota superior** de un conjunto no vacío S de números reales si $x \leqslant u$ para todo x de S.

El número u^* se denomina **cota superior mínima** de S si u^* es una cota superior de S y $u^* \leqslant u$ para toda cota superior u de S.

Análogamente, ℓ es una **cota inferior** de S si $\ell \leqslant x$ para todo x de S. El número ℓ^* es la **cota inferior máxima** de S si ℓ^* es una cota inferior y $\ell \leqslant \ell^*$ para toda cota inferior ℓ de S.

Ejemplo 1 Sean $S_1 = [2, 3]$ y $S_2 = (2, \infty)$. Cualquier número $u \geqslant 3$ es una cota superior de S_1. S_2 no tiene cota superior; se denomina no acotado superiormente. La cota superior mínima de S_1 es 3. Todo número real $\ell \leqslant 2$ es una cota inferior de S_1 y S_2. $\ell^* = 2$ es la cota inferior máxima de los dos conjuntos. Nótese que la cota superior mínima y la cota inferior máxima de un conjunto pueden pertenecer o no a dicho conjunto.

Recordaremos ahora el axioma de completitud de los números reales, que se presentó brevemente en la Sección P.1.

Axioma de completitud de los números reales

Un conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior debe tener una cota superior mínima.

De forma equivalente, un conjunto no vacío de números reales que tenga una cota inferior debe tener una cota inferior máxima.

Recalcamos que esto es un *axioma* que aceptamos sin demostración. No se puede deducir a partir de las propiedades más elementales algebraicas o de otro tipo de los números reales. Esas otras propiedades son compartidas por los números racionales, un conjunto que no es completo. El axioma de completitud es esencial para la demostración de los resultados más importantes sobre funciones continuas, en particular, el Teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio. Sin embargo, antes de plantear estas demostraciones, debemos realizar algún trabajo previo.

En la Sección 9.1 planteamos una versión del axioma de completitud en el ámbito de *secuencias* de números reales; concretamente, que una secuencia creciente que está acotada superiormente converge a un límite. Comenzaremos por verificar que esto se deduce de la versión planteada anteriormente (ambas versiones son, de hecho, equivalentes). Como se indicó en la Sección 9.1, la secuencia

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

es una función de los enteros positivos, es decir, $x_n = x(n)$. Se dice que la secuencia converge al límite L, y se expresa como $\lim x_n = L$, si la correspondiente función $x(t)$ cumple $\lim_{t\to\infty} x(t) = L$, tal como se definió antes. Más formalmente,

DEFINICIÓN 4 Límite de una secuencia

Se dice que $\lim x_n = L$ si para todo número positivo ϵ existe un número positivo $N = N(\epsilon)$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$ se cumple siempre que $n \geqslant N$.

TEOREMA 2 Si $\{x_n\}$ es una secuencia creciente acotada superiormente, es decir,

$$x_{n+1} \geqslant x_n \quad \text{y} \quad x_n \leqslant K \quad \text{para } n = 1, 2, 3, ...$$

entonces $\lim x_n = L$ existe (en otras palabras, si $\{x_n\}$ es decreciente y acotada interiormente, entonces $\lim x_n$ existe).

DEMOSTRACIÓN Sea $\{x_n\}$ creciente y acotada superiormente. El conjunto S de números reales x_n tiene una cota superior, K, y por tanto tiene también una cota superior mínima, L. De este modo, $x_n \leqslant L$ para todo n, y si $\epsilon > 0$, entonces existe un entero positivo N tal que $x_N > L - \epsilon$ (si no fuera así, $L - \epsilon$ sería una cota superior de S que sería menor que la cota superior mínima). Si $n \geqslant N$, entonces tenemos $L - \epsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant L$, por lo que $|x_n - L| < \epsilon$. Por consiguiente, $\lim x_n = L$. La demostración para el caso de una secuencia decreciente acotada inferiormente es similar.

TEOREMA 3 Si $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo n, y si $\lim x_n = L$, entonces $a \leqslant L \leqslant b$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $L > b$. Sea $\epsilon = L - b$. Como $\lim x_n = L$, existe un n tal que $|x_n - L| < \epsilon$. Por consiguiente, $x_n > L - \epsilon = L - (L - b) = b$, que es una contradicción, ya que se supone que $x_n \leqslant b$. Entonces, $L \leqslant b$. Un argumento similar permite demostrar que $L \geqslant a$.

TEOREMA 4 Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, si $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo n y si $\lim x_n = L$, entonces $\lim f(x_n) = f(L)$.

La demostración es similar a la del Teorema 1(b), y se deja como Ejercicio 15 al final de este apéndice.

Funciones continuas en un intervalo cerrado y finito

Ya estamos preparados para demostrar los resultados principales sobre funciones continuas en intervalos cerrados y finitos.

TEOREMA 5 **Teorema de la acotación**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces está acotada en dicho intervalo; es decir, existe una constante K tal que $|f(x)| \leqslant K$ si $a \leqslant x \leqslant b$.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos que f está acotada superiormente; la demostración de que f está acotada inferiormente es similar. Para todo entero positivo n, sea S_n el conjunto de puntos x en $[a, b]$ tal que $f(x) > n$:

$$S_n = \{x : a \leqslant x \leqslant b \quad \text{y} \quad f(x) > n\}$$

Desearíamos demostrar que S_n es vacío para algún n. Se deduciría entonces que $f(x) \leqslant n$ para todo x en $[a, b]$; es decir, n sería una cota superior de f en $[a, b]$.

Supongamos, por el contrario, que S_n es no vacío para todo n. Demostraremos que esto lleva a una contradicción. Como S_n está acotado inferiormente (a es una cota inferior), por completitud, S_n tiene una cota inferior máxima; llamémosla x_n (*véase* la Figura III.2). Evidentemente $a \leqslant x_n$. Como $f(x) > n$ en algún punto de $[a, b]$ y f es continua en dicho punto, $f(x) > n$ en algún intervalo contenido en $[a, b]$. Entonces $x_n < b$. Se deduce entonces que $f(x_n) \geqslant n$ (si $f(x_n) < n$, entonces, por continuidad, $f(x) < n$ para alguna distancia a la derecha de x_n, y x_n no podría ser la máxima cota inferior de S_n).

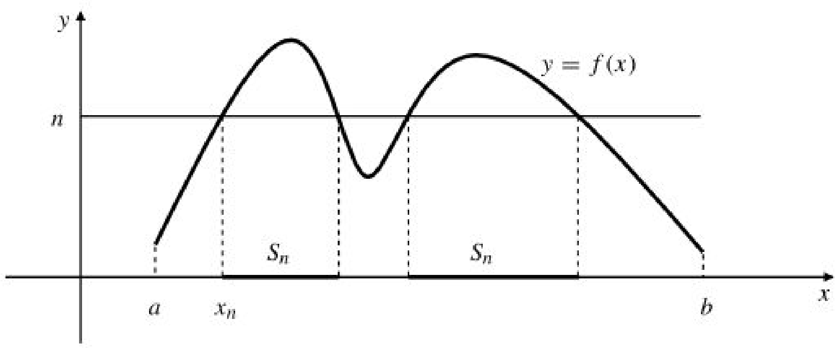

Figura III.2 El conjunto S_n

Para todo n tenemos $S_{n+1} \subset S_n$. Por tanto, $x_{n+1} \geqslant x_n$ y $\{x_n\}$ es una secuencia creciente. Como está acotada superiormente (b es una cota superior) esta secuencia converge, por el Teorema 2. Sea $\lim x_n = L$. Por el Teorema 3, $a \leqslant L \leqslant b$. Como f es continua en L, $\lim f(x_n) = f(L)$ existe por el Teorema 4. Pero como $f(x_n) \geqslant n$, $\lim f(x_n)$ no puede existir. Esta contradicción completa la demostración.

TEOREMA 6 **El Teorema Max-Min**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existen puntos v y u en $[a, b]$ tales que para todo x en $[a, b]$ tenemos

$$f(v) \leqslant f(x) \leqslant f(u)$$

es decir, f toma sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Por el Teorema 5 sabemos que el conjunto $S = \{f(x): a \leqslant x \leqslant b\}$ tiene una cota superior y, por tanto, por el axioma de completitud, una cota superior mínima. Denominemos M a esta cota superior mínima. Supongamos que no existe ningún punto u en $[a, b]$ tal que $f(u) = M$. Entonces por el Teorema 1(a), $1/(M - f(x))$ es continua en $[a, b]$. Por el Teorema 5, existe una constante K tal que $1/(M - f(x)) \leqslant K$ para todo x en $[a, b]$. Entonces $f(x) \leqslant M - 1/K$, lo que contradice el hecho de que M es la *mínima* cota superior de los valores de f. Por tanto, debe existir algún punto u en $[a, b]$ tal que $f(u) = M$. Como M es una cota superior de los valores de f en $[a, b]$, tenemos que $f(x) \leqslant f(u) = M$ para todo x en $[a, b]$.

La demostración de que debe existir un punto v en $[a, b]$ tal que $f(x) \geqslant f(v)$ para todo x en $[a, b]$ es similar.

TEOREMA 7 **El Teorema del Valor Medio**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y s es un número real comprendido entre los números $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en $[a, b]$ tal que $f(c) = s$.

DEMOSTRACIÓN Para ser concretos, supongamos que $f(a) < s < f(b)$ (la demostración para el caso $f(a) > s > f(b)$ es similar). Sea $S = \{x: a \leqslant x \leqslant b$ y $f(x) \leqslant s\}$. S es no vacío (a pertenece a S) y acotado superiormente (b es una cota superior) y por tanto, por completitud, S tiene una cota superior mínima; llamémosla c.

Supongamos que $f(c) > s$. Entonces $c \neq a$ y, por continuidad, $f(x) > s$ en algún intervalo $(c - \delta, c]$, con $\delta > 0$. Pero esto dice que $c - \delta$ es una cota superior de S menor que la mínima cota superior, lo que es imposible. Por tanto, $f(c) \leqslant s$.

Supongamos que $f(c) < s$. Entonces $c \neq b$ y, por continuidad, $f(x) < s$ en algún intervalo de la forma $[c, c + \delta)$ para algún $\delta > 0$. Pero esto dice que $[c, c + \delta) \subset S$, lo que contradice el hecho de que c es una cota superior de S. Por consiguiente, no podemos tener $f(c) < s$ y entonces $f(c) = s$.

En la Sección 1.4 se puede encontrar más material sobre estos teoremas y algunas aplicaciones.

Ejercicios: Apéndice III

1. Sea $a < b < c$ y supongamos que $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant c$. Si $\lim_{x \to b} f(x) = L$ y $\lim_{x \to b} g(x) = M$, demuestre que $L \leqslant M$. *Sugerencia*: Suponga que $L > M$ y deduzca que $f(x) > g(x)$ para todo x suficientemente cercano a b. Esto contradice la condición de que $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Si $f(x) \leqslant K$ en los intervalos $[a, b)$ y $(b, c]$, y si $\lim_{x \to b} f(x) = L$, demuestre que $L \leqslant K$.

3. Utilice definición formal de límite para demostrar que $\lim_{x \to 0+} x^r = 0$ para todo número racional positivo r.

Demuestre las afirmaciones de los Ejercicios 4-9.

4. $f(x) = C$ (constante) y $g(x) = x$ son ambas continuas en toda la recta real.

5. Todo polinomio es continuo en toda la recta real.

6. Una función racional (cociente de polinomios) es continua en todas partes excepto donde el denominador sea cero.

7. Si n es un entero positivo y $a > 0$, entonces $f(x) = x^{1/n}$ es continua en $x = a$.

8. Si $r = m/n$ es un número racional, entonces $g(x) = x^r$ es continua en todo punto $a > 0$.

9. Si $r = m/n$, siendo m y n enteros y n impar, demuestre que $g(x) = x^r$ es continua en todo punto $a < 0$. Si $r \geqslant 0$, demuestre que g es también continua en 0.

10. Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua en la recta real.

Utilice las definiciones del Capítulo 3 de las funciones de los Ejercicios 11-14 para demostrar que estas funciones son continuas en sus respectivos dominios.

11. $\operatorname{sen} x$

12. $\cos x$

13. $\ln x$

14. e^x

15. Demuestre el Teorema 4.

16. Suponga que toda función continua y acotada en $[a, b]$ debe tomar un valor máximo y mínimo en dicho intervalo. Sin utilizar el Teorema 5, demuestre que toda función f que sea continua en $[a, b]$ debe estar acotada en dicho intervalo. *Sugerencia*: Demuestre que $g(t) = t/(1 + |t|)$ es continua y creciente en la recta real. Considere después $g(f(x))$.