I Compendi OpenSource

di Giacomo Marciani

Analisi Matematica

Teoria, Formulario e Suggerimenti Pratici

dalle dispense del professor Roberto Tauraso

1

Numeri complessi

Nel corso dello studio della matematica si assiste ad una progressiva estensione del concetto di numero. Dall'insieme degli interi naturali $\mathbb{N}$ si passa a quello degli interi relativi $\mathbb{Z}$ per poi giungere ai razionali $\mathbb{Q}$ e ancora ai reali $\mathbb{R}$. Spesso questi ampliamenti vengono giustificati con l'incapacità di risolvere in un certo insieme un determinato problema. Ad esempio l'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzione nell'insieme dei razionali, mentre ne ha ben due nell'estensione $\mathbb{R}$, ossia $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. La necessità di ampliare ulteriormente i numeri reali si presenta invece quando si prova a risolvere un'altra equazione di secondo grado:

$$x^2 = -1.$$

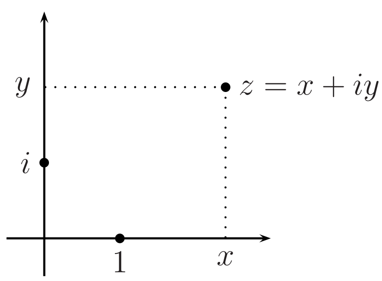
Il problema in questo caso è comune a tutte le risoluzioni di equazioni di secondo grado con discriminante negativo e consiste nel fatto che la funzione reale radice quadrata non è definita per numeri negativi. Come vedremo l'insieme dei numeri complessi, che denoteremo con il simbolo $\mathbb{C}$, permetterà di dare una risposta a questo problema.

1. La definizione di numero complesso e le sue rappresentazioni

L'estensione consiste nel passaggio dalla dimensione uno della retta (reale) alla dimensione due del piano (complesso). Un *numero complesso* z si identifica dunque come un punto nel piano e comunemente viene rappresentato in due modi: nella forma cartesiana e nella forma esponenziale.
Nella *forma cartesiana* il numero complesso z viene individuato dalle sue coordinate (reali) x e y e si può scrivere

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

dove i particolari numeri complessi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono stati identificati rispettivamente con l'*unità reale* 1 e l'*unità immaginaria* i.



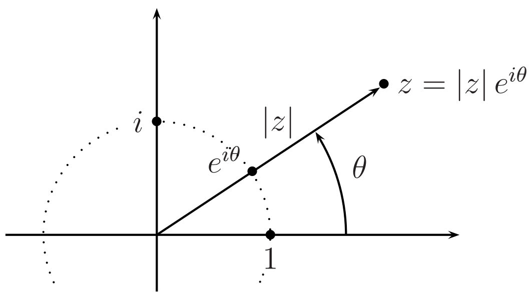
La coordinata x è la *parte reale* di z mentre y è la *parte immaginaria* di z:

$$x = \mathrm{Re}(z)\ , \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Nella *forma esponenziale* il numero complesso z viene invece individuato dal *modulo* $|z|$, ossia la distanza del punto z dall'origine, e dall'*argomento*, ossia l'angolo θ compreso tra la direzione positiva dell'asse delle x e la semiretta uscente dall'origine e passante per z. Tale angolo viene espresso in radianti e non è definito quando $z = 0$, mentre per $z \neq 0$ è determinato a meno di multipli di 2π (che corrisponde ad un angolo giro). In questo modo possiamo scrivere

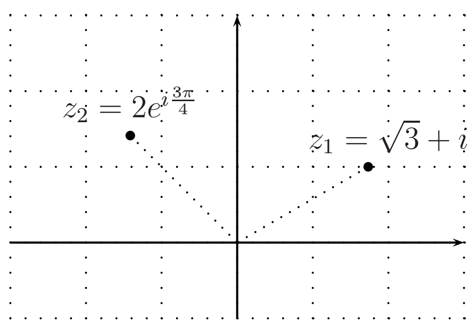
$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

dove il simbolo $e^{i\theta}$ è definito come il numero complesso di modulo unitario $\cos\theta + i \sin\theta$.



— ◇ —

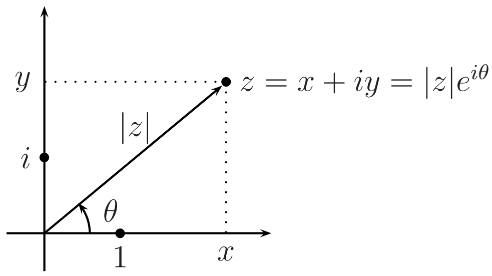
Esempio 1.1 Rappresentiamo nel piano il numero complesso $z_1 = \sqrt{3} + i$, scritto in forma cartesiana, e il numero complesso $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, scritto in forma esponenziale.



Si osservi che la forma esponenziale di z_2 non è unica:

$$z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\, e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi)} = 2\, e^{i\frac{11\pi}{4}} = e^{i(\frac{3\pi}{4}-2\pi)} = 2\, e^{-i\frac{5\pi}{4}}.$$

La seguente figura ci aiuta a capire come passare da una forma all'altra



Il passaggio dalla forma cartesiana a quella esponenziale è complicato dall'indeterminazione dell'argomento:

> **Dalla forma cartesiana alla forma esponenziale**
>
> Se $z = x + iy \neq 0$ allora
> $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

In questo modo viene calcolato solo uno degli infiniti argomenti associati a z e precisamente quello compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. L'insieme completo dei possibili argomenti è dato da: $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Il passaggio inverso è più semplice:

> **Dalla forma esponenziale alla forma cartesiana**
>
> Se $z = |z|\, e^{i\theta}$ allora
> $$x = \mathrm{Re}(z) = |z| \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\theta.$$

— ◇ —

Esempio 1.2 Proviamo a convertire i numeri complessi dell'esempio precedente.

(1) Per $z_1 = \sqrt{3} + i$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

quindi $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(2) Per $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$x_2 = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y_2 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

quindi $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2. La somma

L'operazione di somma di due numeri complessi è piuttosto semplice: si tratta di scrivere gli addendi in forma cartesiana e di sommare separatamente le parti reali e le parti immaginarie.

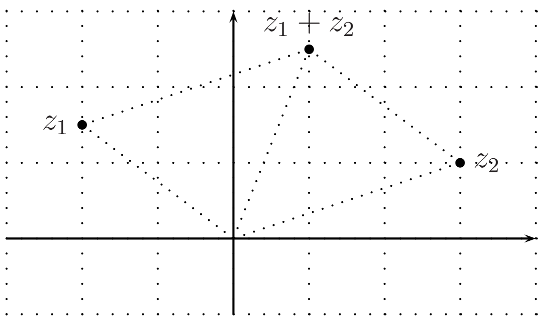
> **Somma**
>
> Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora
> $$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

— ◇ —

Esempio 2.1. Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 + z_2 = \left(-2 + \frac{3}{2}i\right) + (3 + i) = (-2 + 3) + i\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 1 + \frac{5}{2}i$$

Nel piano la somma si può individuare costruendo un parallelogramma di lati z_1 e z_2.



3. Il prodotto

La definizione dell'operazione di prodotto tra due numeri complessi è un po' più delicata: per moltiplicare $z_1 = x_1 + iy_1$ per $z_2 = x_2 + iy_2$ ci comportiamo come il prodotto di due binomi:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2.$$

In questo modo la definizione di prodotto dipende dal risultato di $i \cdot i = i^2$. Dato che l'introduzione dei numeri complessi è motivata proprio dal desiderio di risolvere l'equazione $z^2 = -1$, "decidiamo" che il numero complesso i sia una delle soluzione cercate, ossia che $i^2 = -1$. Con questa scelta la definizione completa di prodotto diventa:

> **Prodotto in forma cartesiana**
>
> Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora
> $$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Proviamo a riprendere i numeri dell'esempio precedente e a farne il prodotto.

— ◇ —

Esempio 3.1 Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-2 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{3}{2}\right) + i\left(-2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2}i$$

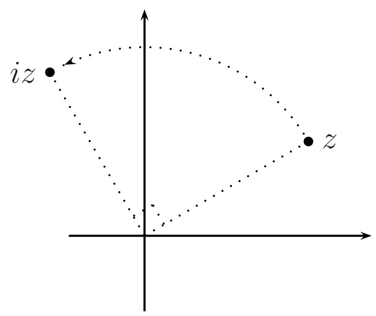
L'interpretazione geometrica del prodotto diventa più evidente se i fattori sono scritti in forma esponenziale:

Prodotto in forma esponenziale
Se $z_1 = \lvert z_1\rvert e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \lvert z_2\rvert e^{i\theta_2}$ allora $$z_1 \cdot z_2 = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Dunque nel prodotto di due numeri complessi i moduli si moltiplicano mentre gli argomenti si sommano (e questo giustifica la scelta del simbolo esponenziale). Verifichiamo questa proprietà ricordando ancora una volta che $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Un caso particolare molto interessante è il prodotto di un numero complesso z per i. Per quanto detto, la moltiplicazione per $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ corrisponde a una rotazione di 90 gradi in senso antiorario.

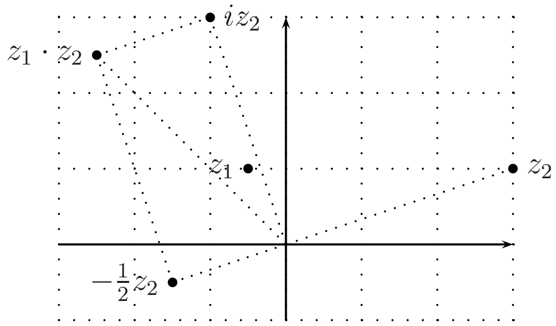


Proviamo a calcolare un altro prodotto descrivendo i passi dell'operazione nel piano complesso.

— ◇ —

Esempio 3.2. Calcoliamo il prodotto di $z_1 = -\frac{1}{2} + i$ per $z_2 = 3 + i$:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \cdot z_2 = -\frac{1}{2} z_2 + i z_2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\right) + (3i - 1) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} i$$

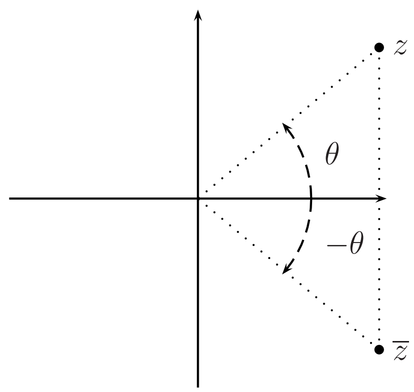


4. Il coniugato e il quoziente

Il *coniugato* $\overline{z}$ di un numero complesso $z = x + iy$ è definito nel modo seguente

$$\overline{z} = x - iy$$

e corrisponde al punto simmetrico di z rispetto all'asse reale. Quindi in forma esponenziale: se $z = |z|e^{i\theta}$ allora $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$



— ◇ —

Esempio 4.1 Determiniamo l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso $\mathbb{C}$ richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

Notiamo che

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Questa relazione permette di calcolare il quoziente di due numeri complessi riconducendolo ad un prodotto:

QUOZIENTE
Se $z_2 \neq 0$ allora $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2}.$$

— ◇ —

Esempio 4.2 Calcoliamo il quoziente di $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = 3 + i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{10} = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

Nel caso in cui i numeri siano in forma esponenziale, anche per il quoziente si ottiene una formula significativa: se $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$ allora

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|\, e^{i\theta_1} \cdot |z_2|\, e^{-i\theta_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Dunque nel quoziente di due numeri complessi i moduli si dividono mentre gli argomenti si sottraggono.

— ◇ —

Esempio 4.3. Calcoliamo il quoziente di $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\, e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3}\, e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5. Potenza di un numero complesso

Come abbiamo visto, la forma esponenziale risulta particolarmente comoda quando si devono effettuare prodotti o quozienti. Per esempio il calcolo del quadrato di un numero complesso $z = |z|e^{i\theta}$ si svolge nel seguente modo

$$z^2 = |z|\, e^{i\theta} \cdot |z|\, e^{i\theta} = |z|^2 e^{i(\theta+\theta)} = |z|^2 e^{i2\theta}.$$

Più in generale il calcolo della *potenza n-esima* con n intero positivo diventa

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

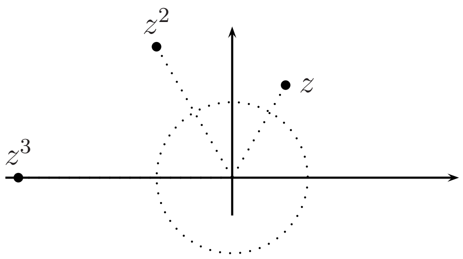
ossia bisogna elevare il modulo alla n e moltiplicare per n l'argomento (se $z = 0$ allora $z^n = 0$).

— ⋄ —

Esempio 5.1 Calcoliamo le potenze di $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ per $n = 1, 2, 3$:

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\ , z^2 = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi} = -2\sqrt{2}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



Ora facciamo un altro esempio, questa volta partendo da un numero in forma cartesiana.

— ⋄ —

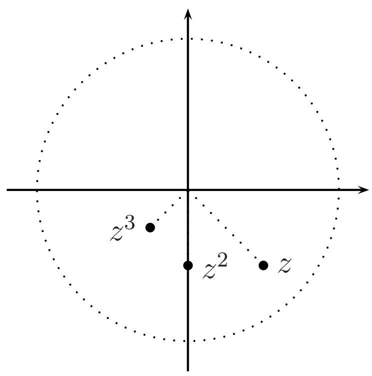
Esempio 5.2 Calcoliamo le potenze di $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ per $n = 1, 2, 3$. Per agevolare il calcolo riscriviamo il numero in forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Quindi determiniamo le potenze richieste

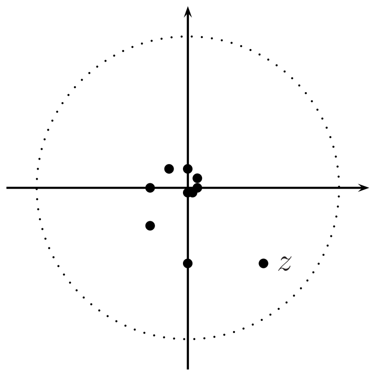
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\ , z^2 = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2},\ z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



— ⋄ —

Da questi esempi si può osservare che, facendo le successive potenze di un numero complesso z, i punti corrispondenti "girano" attorno all'origine. Se inoltre $|z| > 1$ allora i punti si allontanano indefinitamente ($|z|^n \to +\infty$), se $|z| = 1$ i punti rimangono sulla circonferenza unitaria ($|z|^n = 1$) e infine se $|z| < 1$ i punti si avvicinano all'origine ($|z|^n \to 0$). Se riprendiamo il punto z dell'esempio precedente e proviamo a disegnare nel piano le prime 10 potenze otteniamo:



6. Radici di un numero complesso

Passiamo ora all'analisi del problema inverso: se conosciamo la potenza n-esima di un numero complesso, come facciamo a calcolare il numero originale? Ossia dato un numero complesso z quante e quali sono le soluzioni w dell'equazione $w^n = z$? Se $z = 0$ la risposta è banale: l'unica soluzione possibile è proprio $w = 0$. Supponiamo quindi che $z \neq 0$ e iniziamo a ragionare nel caso particolare in cui $z = 1$.

Se $n = 2$ l'equazione da risolvere è $w^2 = 1$. Se esprimiamo l'incognita in forma esponenziale otteniamo: $w = |w|\, e^{i\varphi}$ e

$$w^2 = |w|^2 e^{i2\varphi} = 1\, e^{i0} = 1.$$

Dato che due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali e i loro argomenti differiscono di un multiplo di 2π, abbiamo che

$$|w|^2 = 1 \quad \text{e} \quad 2\varphi = 0 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo vuol dire che $|w| = 1$ (il modulo è un numero reale non negativo) e i possibili argomenti di w sono

$$\varphi = \frac{0 + 2k\pi}{2} = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni si scrive come

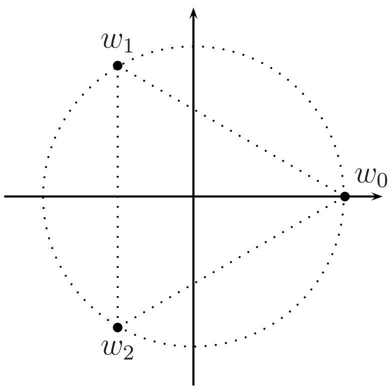
$$\left\{ w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Apparentemente questo insieme contiene infiniti elementi che dipendono dal parametro $k \in \mathbb{Z}$. Se però esaminiamo gli elementi con più attenzione ci accorgiamo che

$$e^{ik\pi} = 1 \;\text{ se } k \text{ è pari} \quad \text{e} \quad e^{ik\pi} = -1 \;\text{ se } k \text{ è dispari}$$

ossia
$$\left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k = 0,1\right\} = \{1,-1\}\,.$$
Così le soluzioni sono esattamente 2 e sono quelle che potevamo determinare già nell'ambito dei numeri reali: $w_0 = 1$ e $w_1 = -1$.

Proviamo ora a vedere cosa succede per $n = 3$. L'equazione da risolvere è $w^3 = 1$ e se ripercorriamo i passaggi del caso precedente otteniamo:
$$w^3 = |w|^3 e^{i3\varphi} = 1,$$
che equivale a
$$|w| = 1 \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$
e l'insieme delle soluzioni, dopo le analoghe riduzioni del caso $n = 2$, si scrive come
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k = 0,1,2\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}.$$
Dunque le soluzioni sono esattamente 3: oltre a quella che ci aspettavamo dal caso reale, $w_0 = 1$, abbiamo ottenuto anche $w_1 = e^{i2\frac{\pi}{3}}$ e $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Riportando i punti nel piano possiamo notare che queste soluzioni stanno tutte sulla circonferenza unitaria e individuano i vertici di un triangolo equilatero.

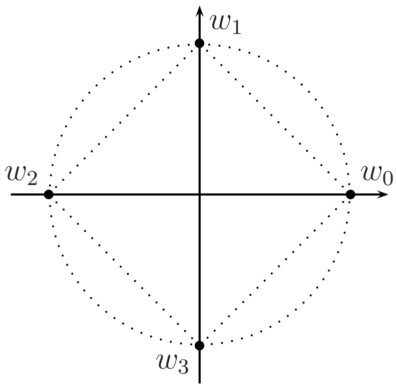


Ora dovrebbe essere chiaro cosa si ottiene per $z = 1$ quando n è un intero positivo qualunque: le soluzioni dell'equazione
$$w^n = 1$$
sono n e precisamente
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \,:\, k = 0,1,2,3,\ldots,n-1\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$
Nel piano questi numeri, dette *radici n-esime dell'unità*, sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria e con un vertice in 1.

— ◇ —

Esempio 6.1 Calcoliamo le radici quarte dell'unità. Risolvendo l'equazione $w^4 = 1$ otteniamo

$$\left\{ w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} \, : \, k = 0, 1, 2, 3 \right\} = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{1, i, -1, -i\} .$$



— ◇ —

Il caso più generale, quando z è un generico numero complesso diverso da zero, si affronta nello stesso modo e la conclusione è la seguente:

> Radici n-esime
>
> Se $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$ allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione $w^n = z$ è costituito da n numeri distinti dette *radici n-esime di z*:
>
> $$\left\{ w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \, : \, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\} .$$

Nel piano i punti corrispondenti a ogni w_k sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ centrata in 0 e con un vertice in $e^{i\frac{\theta}{n}}$.

— ◇ —

Esempio 6.2 Risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Si tratta di determinare le due radici quadrate del numero $z = -1 = e^{i\pi}$:

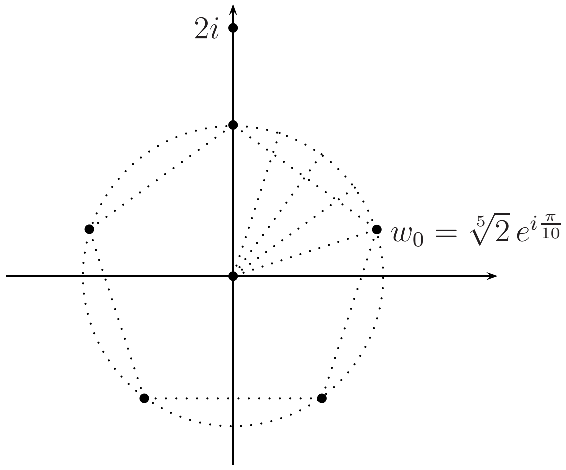
$$\left\{ w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} \, : \, k = 0, 1 \right\} = \{i, -i\} .$$

In questo caso, il poligono regolare è costituito dai due punti opposti i e $-i$.

— ◇ —

Esempio 6.3 Calcoliamo le radici quinte di $z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$:

$$\left\{w_k = \sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \,:\, k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}.$$



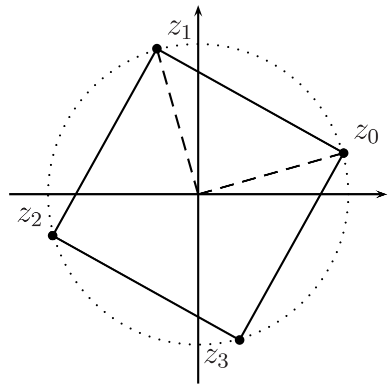
Quindi otteniamo un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[5]{2}$ centrata in 0. L'argomento del vertice w_0 è $\frac{\pi}{10}$ ossia $\frac{1}{5}$ dell'argomento di $2i$ che è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

— ◇ —

Esempio 6.4 Calcoliamo l'area del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^4 = 4\sqrt{5}(1 + 2i)\right\}.$$

I vertici sono le radici quarte del numero $4\sqrt{5}(1 + 2i)$ e quindi, per quanto detto, individuano un quadrato centrato nell'origine.



Per calcolare l'area di questo quadrato è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = (4\sqrt{5}|1 + 2i|)^{1/4} = (4\sqrt{5}\sqrt{1^2 + 2^2})^{1/4} = (20)^{1/4}.$$

Quindi sapendo che il lato del quadrato è $\sqrt{2}r$, l'area è uguale a

$$(\sqrt{2}r)^2 = 2r^2 = 2(20)^{1/2} = 4\sqrt{5}.$$

— ◇ —

Esempio 6.5 Calcoliamo il limite $\lim_{n\to\infty} p_n$, dove p_n è il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ z^{2n} = 4^n\right\}.$$

L'equazione $z^{2n} = 4^n = 2^{2n}$ individua i vertici di un poligono regolare di $2n$ lati inscritto nella circonferenza centrata in 0 e di raggio 2. Al crescere di n, il numero di lati aumenta e e la successione di poligoni *tende* alla circonferenza in cui sono iscritto. Quindi il limite della successione dei loro perimetri è la lunghezza di tale circonferenza ossia 4π.

7. Equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$

In quest'ultima parte vogliamo discutere la risoluzione di una generica equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0.$$

quando i coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$). Si può verificare che la formula per determinare le soluzioni nel caso reale è ancora valida nel caso complesso

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

dove il simbolo $\pm\sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate del numero complesso $\Delta = b^2 - 4ac$. Quindi, a differenza del caso reale, un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$ ammette sempre due soluzioni (eventualmente coincidenti).

— ◇ —

Esempio 7.1 Risolviamo l'equazione $z^2 - 4z + 4 - \frac{1}{2}i = 0$: in questo caso

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4 - \frac{1}{2}i) = 2i.$$

Le due radici quadrate di $2i$ sono

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \quad \text{e} \quad w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i = -w_1.$$

Quindi

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{4 + 1 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{4 - 1 - i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Provate a ottenere lo stesso risultato dopo aver osservato che l'equazione data può essere riscritta nel seguente modo:

$$(z - 2)^2 = \frac{1}{2}i.$$

— ⋄ —

La situazione descritta per un'equazione polinomiale di grado 2 si generalizza al caso di un'equazione polinomiale di grado n:

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$ (tenendo conto delle molteplicità) e inoltre

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

— ⋄ —

Esempio 7.2 Risolviamo l'equazione

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = 0$$

e poi fattorizziamo il polinomio $P(z)$.
Poniamo $w = z^2$:

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = 0.$$

In questo caso $\Delta = (1-2i)^2 + 8i = -3 + 4i = 5e^{i\theta}$. Possiamo determinare le due radici quadrate di Δ senza determinare $\theta \in [0, 2\pi)$, ricordando le formule di bisezione:

$$\cos(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

dove il segno è positivo se $\theta \in [0, \pi]$ ovvero se $\sin\theta \geq 0$. Nel nostro caso $\cos\theta = -3/5$ e $\sin\theta = 4/5$, così

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(1 + 2i).$$

Dunque le soluzioni sono $w_1 = -1$ e $w_2 = 2i$ e

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = (w - (-1)) \cdot (w - 2i) = (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 2i) = 0.$$

Ora basta risolvere le equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori:

$$z^2 = -1 \quad \text{e} \quad z^2 = 2i.$$

Quindi le 4 soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = i, \; z_2 = -i \quad \text{e} \quad z_3 = 1 + i, \; z_4 = -1 - i$$

Inoltre, il polinomio dato può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = (z - i) \cdot (z + i) \cdot (z - 1 - i) \cdot (z + 1 + i).$$

— ◇ —

Esempio 7.3 Determiniamo il numero di elementi dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$P(z) = (z^4 - 1)^2 \cdot (z^3 - 1) = 0.$$

Il polinomio $P(z)$ ha grado $4 \cdot 2 + 3 = 11$ quindi per il teorema fondamentale dell'algebra ci aspettiamo 11 soluzioni (non necessariamente distinte). Nell'insieme delle soluzioni gli elementi multipli contano però una sola volta e quindi la domanda equivale a determinare il numero di soluzioni distinte.
Il fattore $(z^4 - 1)^2$ ha quattro zeri distinti ciascuno con molteplicità 2:

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il fattore $(z^3 - 1)$ ha tre zeri distinti ciascuno con molteplicità 1:

$$1\,, \quad (-1 + i\sqrt{3})/2\,, (-1 - i\sqrt{3})/2.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ è:

$$\left\{1, i, -1, -i, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2\right\}$$

e il numero dei suoi elementi è 6.

— ◇ —

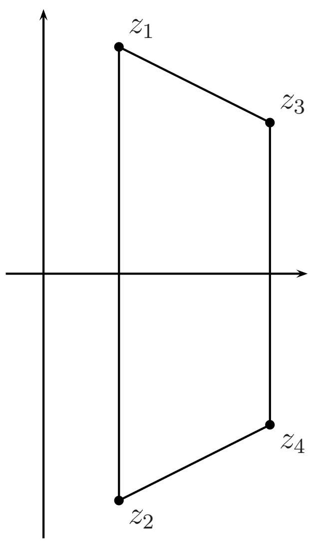
Esempio 7.4 Determiniamo il perimetro e l'area del poligono i cui vertici soddisfano l'equazione

$$P(z) = (z^2 - 2z + 10) \cdot (z^2 - 6z + 13) = 0.$$

Le soluzioni del polinomio di quarto grado $P(z)$ sono ottenute risolvendo i due fattori di secondo grado:

$$z_1 = 1 + 3i\ , z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} \quad z_3 = 3 + 2i\ , z_4 = 3 - 2i.$$

Le due coppie di numeri complessi coniugati individuano i vertici di un trapezio:



Calcoliamo le lunghezze dei lati

$$|z_1 - z_2| = |6i| = 6,\ |z_1 - z_3| = |z_2 - z_4| = |-2 + i| = \sqrt{5}\ , |z_3 - z_4| = |4i| = 4$$

quindi il perimetro è $10 + 2\sqrt{5}$. L'area invece è uguale a

$$\frac{1}{2}\left(|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|\right) \cdot |\mathrm{Re}(z_3 - z_1)| = \frac{1}{2}\,(6 + 4) \cdot |3 - 1| = 10.$$

2

Serie numeriche e serie di potenze

Sommare un numero finito di numeri reali è senza dubbio un'operazione che non può riservare molte sorprese. Cosa succede però se ne sommiamo un numero infinito? Prima di dare delle definizioni precise facciamo qualche piccolo esperimento. Se sommiamo i numeri interi positivi otteniamo

$$1+2+3+4+5+6+\cdots \to +\infty.$$

Se modifichiamo questa somma nel seguente modo

$$1-2+3-4+5-6+\cdots$$

la risposta è meno banale. Per trovarla abbiamo bisogno di osservare il comportamento delle somme parziali

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ -1 & = & 1-2 \\ 2 & = & 1-2+3 \\ -2 & = & 1-2+3-4 \\ 3 & = & 1-2+3-4+5 \\ -3 & = & 1-2+3-4+5-6 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Notiamo che una parte delle somme cresce verso $+\infty$ mentre l'altra descresce verso $-\infty$ e dunque il loro comportamento complessivo è indeterminato. Se invece sommiamo infiniti zeri

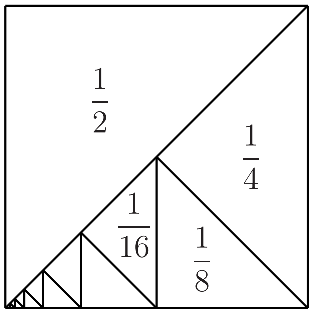
$$0+0+0+\cdots \to 0.$$

In quest'ultimo caso il risultato dell'"operazione" di somma infinita è un numero finito. C'è un esempio più interessante? È chiaro che se vogliamo avere la speranza di trovarne una dobbiamo almeno fare in modo che il termine che via via viene aggiunto tenda a zero. Consideriamo per esempio la somma delle potenze positive di $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Esiste il limite di questa somma e se esiste siamo in grado di calcolarlo? Nel corso di questo capitolo ci occuperemo proprio di questo genere di problemi. Intanto possiamo dare una risposta in questo caso particolare utilizzando un ragionamento geometrico.

In un quadrato di lato 1 vengono via via "ritagliati" dei triangoli rettangoli le cui aree corrispondono proprio ai termini della somma che stiamo esaminando.



Questi infiniti triangoli esauriscono la superficie del quadrato e dunque la somma infinita delle loro aree è uguale all'area totale del quadrato ossia 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \to 1.$$

1. Definizioni e prime proprietà

Precisiamo meglio il linguaggio che intendiamo usare. Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$, la loro somma fino al termine N-esimo è detta *somma parziale di ordine* N

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N.$$

Per evitare eventuali fraintendimenti $(+\cdots+?)$ e rendere la scrittura più comoda e sintetica, una somma parziale si può scrivere anche in questo modo

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

dove $\sum$ è il simbolo di sommatoria e rappresenta un "ciclo" di somme di termini a_n con l'indice intero n che varia dal numero scritto in basso, 0, al numero scritto in alto, N. La successione delle somme parziali $\{s_N\}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ costituisce la *serie* dei termini a_n. Determinare il *carattere* della serie significa studiare il limite della successione delle somme parziali:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

In particolare avremo questi tre casi:

Carattere di una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{la serie } \textit{converge} \text{ con somma } L \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{la serie } \textit{diverge} \\ \text{non esiste} & \text{la serie è } \textit{indeterminata} \end{cases}$$

Nel caso si debbano fare operazioni tra serie, dato che sono dei limiti, dovremo fare particolare attenzione. Per esempio la seguente serie è evidentemente divergente a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty.$$

Ora proviamo a fare la seguente operazione

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = (2+4+8+\ldots) - (1+2+4+\cdots) = -1+2-2+4-4+\cdots = -1.$$

Quindi sembra di poter concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = (2-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.$$

Questo "imbarazzante" risultato (la somma di infiniti numeri positivi è negativa!) è dovuto al fatto che non ci siamo accorti della presenza di una forma indeterminata $(+\infty - \infty)$. Le combinazioni lineari di serie si possono però fare quando le serie in gioco sono convergenti:

Linearità

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti. Allora converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Concludiamo questa sezione con qualche utile osservazione sul carattere di una serie. Intanto è piuttosto semplice convincersi che la convergenza di una serie dipende solo dalla "coda" dei termini che sommiamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,}$$

dove n_0 è un qualunque numero intero positivo. Quindi al fine di determinare il carattere di una serie si possono trascurare i "primi" termini (anche se questo potrebbe cambiare il valore della somma).

Un primo semplice criterio per determinare se una serie non converge è quello di verificare se il termine generico della serie non è infinitesimo. Infatti, se la serie converge, la successione delle somme parziali s_N converge ad un limite finito S e

$$a_N = s_N - s_{N-1} \to S - S = 0.$$

Quindi possiamo dire che

Criterio di non convergenza

Se $a_n \not\to 0$ allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è convergente.

Vedremo nelle prossime sezioni che questa condizione è solo necessaria e non sufficiente ossia esistono esempi di serie che non convergono ma il cui termine generico è infinitesimo.

2. La serie geometrica

La *serie geometrica* di *ragione* $x \in \mathbb{R}$ è la serie delle potenze intere di x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Per determinare il carattere di questo particolare tipo di serie dobbiamo studiarne le somme parziali

$$s_N = 1 + x + \cdots + x^N = \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

Se $x = 1$ allora $s_N = 1 + 1 + \cdots + 1 = N + 1$ e quindi per $N \to \infty$ la serie diverge a $+\infty$. Se $x \neq 1$, notiamo che se moltiplichiamo s_N per $x - 1$ otteniamo

$$(x-1) \cdot (1 + x + \cdots + x^N) = (x + \cdots + x^N + x^{N+1}) - (1 + x + \cdots + x^N)$$

e semplificando i termini opposti si ha che

$$(x-1) \cdot (1 + x + \cdots + x^N) = x^{N+1} - 1.$$

Quindi se $x \neq 1$

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}.$$

A questo punto il calcolo del limite per $N \to \infty$ diventa più semplice perché basta studiare il comportamento del termine x^{N+1}. Dato che

$$\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

la risposta completa al problema della determinazione del carattere di una serie geometrica è la seguente

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Si noti che se $|x| < 1$ e l'indice iniziale è $n_0 \geq 0$ allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = x^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} x^{n-n_0} = x^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n_0}}{1-x}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sostituito l'indice della sommatoria ponendo $k = n - n_0$.

— ◇ —

Esempio 2.1 La serie di cui abbiamo parlato nell'introduzione è proprio la serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2}$ con la sola differenza che in questo caso la somma parte dall'indice 1 e non da 0:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dato che $|\frac{1}{2}| < 1$ la serie converge e per determinarne la somma basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

e ritroviamo così il risultato che avevamo prima dedotto con un ragionamento geometrico.

— ◇ —

Esempio 2.2 A quale numero razionale corrisponde $0.1\overline{6} = 0.16666\cdots$?

$$\begin{aligned} 0.1\overline{6} &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \cdots\right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n. \end{aligned}$$

Dato che $|\frac{1}{10}| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Quindi

$$0.1\overline{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{6}.$$

— ◇ —

Esempio 2.3 Calcolare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}.$$

Cerchiamo di ricondurre questa serie ad una serie geometrica notando che $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

Il numero $\frac{1}{3}$ moltiplica ogni termine della serie e dunque può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

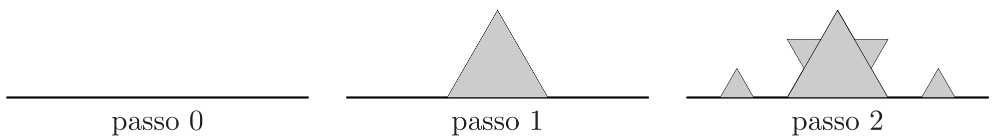
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

A questo punto la serie da determinare è la serie geometrica di ragione $-\frac{1}{9}$ (il cui modulo è minore di 1) con l'indice n che parte da 2:

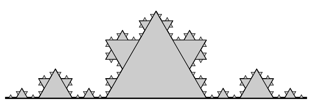
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{1}{270}.$$

— ◇ —

Esempio 2.4 Consideriamo un segmento di lunghezza 1 (passo 0) e "incolliamo" al centro un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{3}$ (passo 1). Al passo successivo aggiungiamo al centro di ciascun lato (ora sono 4) un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{9}$ (passo 2).



Continuando indefinitamente questo procedimento generiamo una figura geometrica dal bordo sempre più frastagliato.



Calcoliamo l'area di questa figura. Denotiamo con A_N l'area della figura al passo N così

$$A_0 = 0\,,\quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}\,,\quad A_2 = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Inoltre ad ogni passo successivo il numero di triangoli aggiunti aumenta, rispetto al passo precedente, di un fattore 4 mentre la loro area diminuisce di un fattore $\frac{1}{9}$. Ne segue che

$$A_N = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

e al limite

$$A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Provate a verificare che il limite del perimetro della figura tende invece a $+\infty$.

3. Serie a termini non negativi

Se i termini a_n di una serie sono maggiori o uguali a zero allora lo studio del carattere della serie risulta essere in qualche modo piú semplice. Notiamo infatti che la successione delle somme parziali in questo caso è crescente in quanto

$$s_{N+1} = s_N + a_{N+1} \geq s_N$$

e dunque, quando calcoliamo la somma della serie passando al limite, i possibili risultati sono solo due: la serie converge ad un numero non negativo oppure la serie diverge a $+\infty$. La semplice osservazione che le serie a termini non negativi non possono essere indeterminate ci permette di enunciare il primo criterio di convergenza.

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per } n \geq n_0.$$

Allora

(1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Cerchiamo di applicare questo criterio per dimostrare che la *serie armonica* diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Per farlo scriviamo i primi termini della somma e raggruppiamoli opportunamente. Poi "costruiamo" una nuova serie che minori la serie armonica sostituendo ogni termine di ciascun gruppo con un numero più piccolo:

$$\begin{array}{cccccccc}
1+ & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) & + & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) & + & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right) & +\ \cdots = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \\
\downarrow & \downarrow\quad\downarrow & & \downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow & & \downarrow\quad\ \downarrow\qquad\quad\downarrow & & \vee \\
1+ & \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} & + & \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} & + & \underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}} & +\ \cdots & = +\infty
\end{array}$$

Quindi la serie minorante diverge e per il punto (2) del criterio del confronto anche la serie armonica diverge (anche se il suo termine generico $\frac{1}{n}$ è infinitesimo!).

Un altro ragionamento per confronto si può fare per determinare il carattere della *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. L'eventuale convergenza dipende dall'esponente: $\alpha = 1$ è il valore critico oltre il quale la serie converge:

Serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Per verificare la divergenza nel caso $\alpha < 1$ basta semplicemente osservare che per $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ e quindi

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

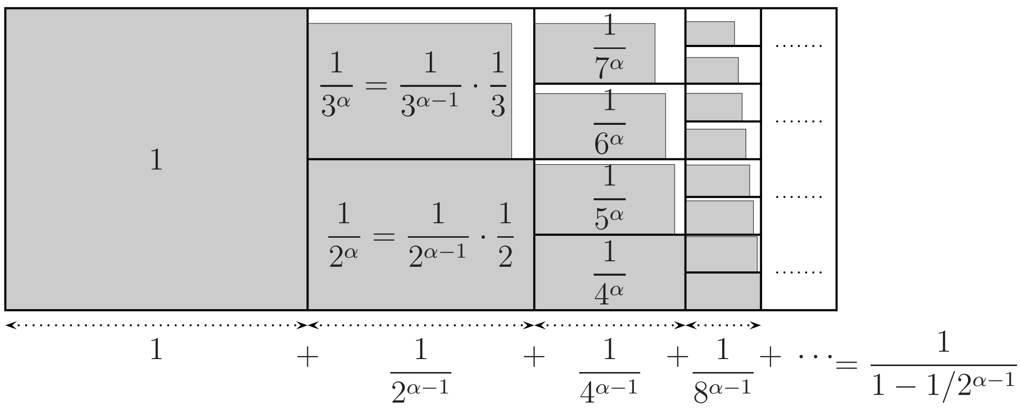
Dunque, per il criterio del confronto, la divergenza di questa serie deriva dalla divergenza della serie armonica. Per provare la convergenza nel caso $\alpha > 1$ si può ancora ricorrere ancora al criterio del confronto, imitando il ragionamento usato per la serie armonica. Vediamo per esempio cosa succede per $\alpha = 2$:

$$
\begin{array}{l}
1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\qquad \wedge\\
1+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}}_{=\frac{1}{8}}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2
\end{array}
$$

Quindi non solo questa serie converge, ma la sua somma è minore a 2. Un problema ben più complicato è stabilire la somma esatta della serie di cui enunciamo il risultato senza dimostrazione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Per quanto riguarda il caso generale ci limitiamo a dare solo un'idea della dimostrazione attraverso un'"immagine" geometrica.



I termini della serie armonica generalizzata corrispondono alle aree dei rettangoli ombreggiati. Tali rettangoli vengono incasellati a gruppi di potenze di due all'interno di un rettangolo di altezza 1 e base uguale alla somma della serie geometrica di ragione $1/2^{\alpha-1}$. Se $\alpha>1$ allora $|1/2^{\alpha-1}|<1$ e la serie geometrica converge. Possiamo così concludere che l'area del rettangolo "contenitore" è finita e dunque è finita anche la somma infinita dei rettangoli contenuti.

Un risultato di convergenza più generale del precedente che ci capiterà di utilizzare è il seguente:

Serie armonica generalizzata II

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}=\begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha>1 \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta>1\\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta\le 1\end{cases}$$

L'analisi che abbiamo compiuto per queste serie è stata piuttosto faticosa, e per continuare con esempi più complicati abbiamo bisogno di altri criteri di convergenza che siano più facili da usare. Cominciamo con il criterio del confronto asintotico.

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(3) Se $0 < L < +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Nel caso (3) le due serie si dicono *asintoticamente equivalenti*.

Vediamone subito qualche applicazione.

— ◇ —

Esempio 3.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}}.$$

Dopo aver verificato che la serie è a termini non negativi proviamo a fare un'analisi asintotica del termine generico ossia a determinare il suo ordine di infinitesimo

$$\sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}} \sim \sqrt[7]{\frac{n^6}{n^{15}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{n^9}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = \frac{9}{7} > 1$ che converge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta converge.

— ◇ —

Esempio 3.2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$

La serie è a termini non negativi. Ora facciamo l'analisi asintotica del termine generico: ricordando che $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per x che tende a 0, si ha che

$$n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim n^3 \cdot \left(\frac{1}{2\,n^2}\right)^2 \sim \frac{1}{4\,n}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = 1$ che diverge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta diverge.

— ◇ —

Esempio 3.3 Determinare il carattere della serie al variare del parametro reale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)}$$

La serie è a termini non negativi e l'analisi asintotica del termine generico ci da:

$$\frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)} = \frac{\log((n+3)!/n!)}{n \log^a(n+6)} \sim \frac{\log(n^3)}{n(\log n)^a} \sim \frac{3}{n(\log n)^{a-1}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica generalizzata con $\alpha = 1$ e $\beta = a - 1$, dunque per il criterio del confronto asintotico la serie proposta converge se e solo se $\beta > 1$ ossia se $a > 2$.

— ◇ —

Esempio 3.4 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

La serie è senz'altro convergente perché equivale asintoticamente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ma in questo caso siamo anche in grado di calcolare la somma. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e quindi la somma parziale s_N è uguale a

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono annullati tutti i termini opposti tranne il primo della prima somma e l'ultimo della seconda. Ora che conosciamo una formula esplicita per la somma parziale s_N possiamo passare al limite per $N \to \infty$ ottenendo così che la somma della serie data vale 1.

— ⋄ —

Vediamo altri due criteri di convergenza la cui dimostrazione è basata sul confronto con una serie geometrica.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n > 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

— ⋄ —

Esempio 3.5 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{3}{n+1} \to 0.$$

Quindi il limite è minore di 1 e la serie converge.

— ◇ —

Esempio 3.6 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Dato che $\frac{1}{e} < 1$, la serie converge.

— ◇ —

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

— ◇ —

Esempio 3.7 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \frac{1}{(2^{n^2})^{1/n}} = \frac{1}{2^n} \to 0.$$

Il limite è minore di 1 e quindi la serie converge.

— ◇ —

Notiamo che l'applicazione del criterio del rapporto o della radice alla serie armonica generalizzata è inefficace perché in entrambi i casi il limite è 1 qualunque sia il valore dell'esponente α:

$$\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to 1.$$

(si ricorda che $\sqrt[n]{n} \to 1$). Concludiamo con un esempio dove si utilizza una tecnica "mista".

— ◇ —

Esempio 3.8 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n}.$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi ($n^3 > \cos n$ per $n \geq 1$) facciamo un'analisi asintotica

$$\frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n} \sim \frac{5^n}{n^3}.$$

Quindi studiare la serie data è equivalente a studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}.$$

Questa diverge perché applicando il criterio della radice troviamo che

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{n^3}} = \frac{5}{(\sqrt[n]{n})^3} \to 5 > 1.$$

4. Serie a termini di segno variabile

Qui discuteremo due criteri che possono aiutare lo studio della convergenza quando i termini della serie non hanno segno costante. Il primo prevede di studiare la serie a termini non negativi ottenuta prendendo i valori assoluti dei termini della serie data.

Criterio della convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Anche se non ne diamo una dimostrazione, possiamo dire che se avessimo la libertà di modificare a piacere il segno di ogni termine, la serie dei valori assoluti rappresenterebbe il caso "peggiore" per avere la convergenza: in questo caso infatti le somme crescono andando in un'unica direzione mentre se i segni sono variabili le somme si possono compensare.

— ◇ —

Esempio 4.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \log(1+n^n)}.$$

Il segno dei termini è variabile per la presenza di $\sin n$ (e la distribuzione dei segni è piuttosto "irregolare"). La serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \log(1+n^n)},$$

inoltre per confronto

$$0 \leq \frac{|\sin n|}{n \log(1+n^n)} \leq \frac{1}{n \log(1+n^n)} \sim \frac{1}{n \log(n^n)} = \frac{1}{n^2 \log n}.$$

La serie individuata dai termini $\frac{1}{n^2 \log n}$ converge (serie armonica generalizzata II con $\alpha = 2$ e $\beta = 1$), e quindi converge anche la serie dei valori assoluti. Per il criterio appena enunciato anche la serie data converge.

— ◇ —

Se la serie non è *assolutamente convergente* allora la determinazione del carattere della serie può essere molto complicato. Basti pensare che per queste serie modificare l'ordine in cui vengono sommati i termini può influenzare la somma della serie stessa. Comunque, nel caso in cui i segni siano "esattamente" alternati vale il seguente criterio.

Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e

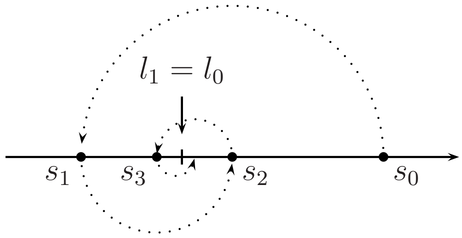
(1) a_n tende a zero;

(2) a_n è decrescente ossia $a_n \geq a_{n+1}$ per $n \geq n_0$.

Allora la serie converge.

Vediamone la dimostrazione. Dato che i termini a_n sono decrescenti al crescere di n e vengono alternativamente sommati e sottratti, le somme parziali oscillano sull'asse reale nel seguente modo

$$s_0 = a_0\,,\quad s_1 = s_0 - a_1\,,\quad s_2 = s_1 + a_2\,,\quad s_3 = s_2 - a_3\,, \cdots$$



In particolare si può facilmente osservare che le somme parziali di indice pari s_{2N} decrescono mentre quelle di indice dispari s_{2N+1} crescono

$$s_{2N} = s_{2N-2} - (a_{2N-1} - a_{2N}) \leq s_{2N-2},\; s_{2N+1} = s_{2N-1} + (-a_{2N+1} + a_{2N}) \geq s_{2N-1}.$$

Inoltre siccome

$$s_1 \leq s_{2N+1} = s_{2N} - a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq s_0$$

possiamo dire che la successione di indice pari s_{2N} tende ad un limite l_0 mentre la successione di indice dispari tende ad un limite l_1:

$$s_{2N+1} \uparrow l_1 \leq l_0 \downarrow s_{2N}.$$

Per dimostrare che la serie converge basta verificare che questi due limiti l_1 e l_2 sono uguali. Dalla relazione

$$s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1}$$

passando al limite e ricordando che la successione a_n è infinitesima si ottiene proprio che $l_1 = l_2$ e il valore comune è proprio la somma della serie.

— ◇ —

Esempio 4.2 Determinare il carattere della serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Se prendiamo la serie dei valori assoluti la serie diventa la serie armonica che è divergente. Quindi il criterio della convergenza assoluta non ci dà alcuna informazione utile. Se applichiamo invece il criterio di Leibniz otteniamo facilmente la convergenza della serie data perché

$$\frac{1}{n} \text{ decresce e tende a } 0.$$

In seguito vedremo che la somma di questa serie è uguale a $\log 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \to \log 2.$$

È sorprendente notare che se in questa serie cambiamo l'ordine in cui i termini vengono sommati possiamo ottenere una serie che converge ad una somma diversa! Per esempio, si può dimostrare che questo fenomeno accade se si alternano *due* termini di indice dispari e *uno* di indice pari:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \to \frac{3}{2} \log 2.$$

— ◇ —

Esempio 4.3 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n} + n \log n}.$$

Intanto osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e poi verifichiamo se la serie converge assolutamente.

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + n \log n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n} + n \log n} \sim \frac{1}{n \log n}.$$

Per quanto detto questa serie diverge e dunque la serie data non converge assolutamente. Dato che la serie è a segni alterni, proviamo allora ad applicare il criterio di Leibniz:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + n \log n} \text{ decresce e tende a } 0$$

e quindi la serie data converge.

— ◇ —

Esempio 4.4 Determinare il carattere della seguente serie per $\alpha > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right).$$

I termini della serie sono a segni alterni e convergono a zero, ma

$$\left| \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right|$$

non convergono a zero in modo decrescente. Quindi non possiamo utilizzare direttamente il criterio di Leibniz. Se lo facessimo dovremmo concludere (erroneamente) che la serie converge per ogni $\alpha > 0$. Dato che

$$\log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

arriveremmo alla stessa conclusione (sbagliata) se usassimo criterio del confronto asintotico (applicabile alle serie con i termini di segno costante).
Vediamo come si puó determinare la risposta corretta. Dato che il termine $(-1)^n/n^\alpha$ tende a 0 allora

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).\end{aligned}$$

La serie a segni alterni

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

converge per il criterio di Leibniz.
La serie a segno (definitivamente) costante (negativo)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$$

è asintoticamente equivalente alla serie

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

che converge se e solo se $\alpha > 1/2$. Quindi la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$$

converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

5. Serie di potenze

Fino a questo momento abbiamo considerato serie numeriche ossia somme infinite di numeri reali, qui invece parleremo di uno degli esempi più importanti di serie di funzioni: le *serie di potenze*. In realtà ne abbiamo già incontrato un esempio ossia la serie geometrica di ragione x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

In particolare abbiamo visto che se viene assegnato un certo numero x la serie corrispondente converge ad un numero finito solo se $|x| < 1$. Questo risultato può essere riletto nel seguente modo: la serie in questione definisce una funzione della variabile x il cui dominio D è l'insieme in cui la serie converge, ossia l'intervallo aperto di centro 0 e raggio 1: $D = (-1, 1)$. Le serie di potenze sono un'estensione della serie geometrica: le potenze sono "centrate" in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e la potenza n-esima viene moltiplicata per un coefficiente reale a_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Anche in questo caso si pone innanzi tutto il problema della determinazione del dominio di questa nuova funzione. Si verifica che il dominio è ancora un intervallo (centrato in x_0) di un certo raggio R (detto di convergenza). Il calcolo di tale raggio si può effettuare nel seguente modo.

RAGGIO DI CONVERGENZA

Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

(1) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$.

(2) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$.

La dimostrazione nel primo caso è una semplice applicazione del criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n.$$

Infatti calcolando il limite per n che tende a ∞ del rapporto tra due termini successivi si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}||x - x_0|^{n+1}}{|a_n||x - x_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| \to L \cdot |x - x_0|$$

Quindi si ha la convergenza (assoluta) se $L \cdot |x - x_0| < 1$, ossia se

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} = R$$

(se $L = +\infty$ si pone $R = 0$, mentre se $L = 0$ si pone $R = +\infty$). La serie invece non converge se $L \cdot |x - x_0| > 1$, ossia se

$$|x - x_0| > \frac{1}{L} = R.$$

In modo simile applicando il criterio della radice si ottiene il secondo caso.
La determinazione del raggio di convergenza, come suggerisce la dimostrazione precedente, non dà alcuna informazione sul carattere della serie agli estremi del dominio quando $|x - x_0| = R$ (ossia quando $L \cdot |x - x_0| = 1$). Per dare una risposta in questi casi basterà studiare le serie numeriche corrispondenti sostituendo a x i valori $x_0 + R$ e $x_0 - R$.

— ⋄ —

Esempio 5.1 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando per esempio la formula con il rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

quindi il raggio di convergenza è 2 e il dominio di convergenza D contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 1$ e raggio $R = 2$ ossia l'intervallo $(-1, 3)$. Vediamo che cosa succede negli estremi -1 e 3:
Se $x = -1$ allora $x - 1 = -2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n},$$

che converge per il criterio di Leibniz e quindi $-1 \in D$.
Se $x = 3$ allora $x - 1 = 2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge a $+\infty$ e quindi $3 \notin D$. Il dominio di convergenza è $D = [-1, 3)$.

— ⋄ —

Esempio 5.2 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot x^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando la formula con la radice n-sima:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n} + 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n} = 9$$

quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{9}$. Il dominio di convergenza D, dunque, contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 0$ e raggio $R = \frac{1}{9}$ ossia l'intervallo $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Vediamo cosa succede negli estremi $-\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9}$:
Se $x = -\frac{1}{9}$ allora la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1\right)$$

che non converge perché il termine della serie non tende a 0. Allo stesso modo la serie non converge neanche per $x = \frac{1}{9}$. Dunque il dominio di convergenza è $D = (-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$.

— ◇ —

In alcuni casi è possibile determinare anche la somma della serie. Qui riassumiamo gli esempi più importanti di serie di potenze per le quali la somma è una funzione esplicita. In questi casi le serie corrispondono proprio agli sviluppi di Taylor della funzione rispetto ai loro centri. Ciò significa che per queste funzioni lo sviluppo di Taylor non serve solo ad "approssimare" i valori della funzione vicino al centro, ma su tutto il dominio della serie. Inoltre vale la pena osservare che le considerazioni fatte per le serie di potenze reali si estendono anche nel campo complesso: il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è questa volta un disco in $\mathbb{C}$ centrato in z_0 e raggio R. Rispetto al caso reale però l'analisi della convergenza nei punti del bordo del dominio è in generale più complicata perché ci sono infiniti punti da esaminare. Nella seguente tabella sono elencate le principali serie di potenze e il loro dominio in $\mathbb{C}$.

Principali serie di potenze

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{per } z \in D = \{|z| < 1\}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{per } z \in D = \{|z| \le 1, z \ne -1\}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{per } z \in D = \{|z| \le 1, z \ne \pm i\}$$

Abbiamo già detto che le serie di potenze sono funzioni definite nel loro dominio di convergenza. Si può dimostrare che tali sono funzioni molto regolari. Sono ad esempio derivabili all'interno del loro dominio e la loro derivata è ancora una serie di potenze con lo stesso centro e raggio di convergenza della serie originale e si può ottenere semplicemente derivando termine a termine

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Ritornando alla tabella precedente ad esempio possiamo notare che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\log(1+z)\right) &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nz^{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}\end{aligned}$$

che è il risultato che si otterrebbe derivando direttamente la funzione $\log(1+z)$.

— ◇ —

Esempio 5.3 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n.$$

Dato che $|i/3| = 1/3 < 1$, $i/3$ sta nel dominio di convergenza della serie geometrica in questione. La somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{i}{3}} - 1 = \frac{i}{3-i} = \frac{3i-1}{10}.$$

— ◇ —

Esempio 5.4 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n}{n!}.$$

Dopo aver verificato la sua convergenza possiamo intanto separare la serie in due parti

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+5)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)+6}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + 6\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}.$$

La prima serie può essere riscritta così

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

(questi due "cicli" sommano gli stessi numeri!). Analogamente la seconda serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 6 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \right) = 7 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) - 6.$$

Ora possiamo utilizzare la serie di potenze relativa a e^z per $z = 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n!} = 7e - 6.$$

— ◇ —

Esempio 5.5 Calcoliamo il dominio e la somma della serie di potenze (reale)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Si verifica facilmente che il dominio è l'intervallo $(-1, 1)$. Inoltre siccome

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

possiamo concludere che la somma della serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ovviamente questa formula vale solo all'interno del dominio $D = (-1, 1)$.

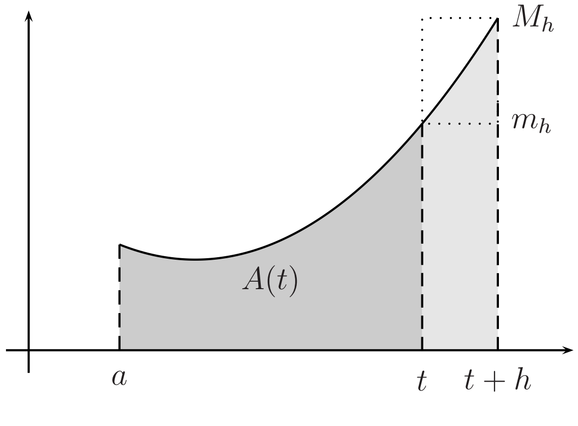
3

Calcolo Integrale

Nello studio del calcolo differenziale si è visto come si può associare ad una funzione la sua derivata. Il calcolo integrale si occupa del problema inverso: data una funzione f è possibile determinare una funzione F tale che

$$F'(x) = f(x) \;?$$

Una funzione F con questa proprietà si dice *primitiva* di f. Ad esempio la funzione $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una primitiva di $f(x) = x$. Ricordando che la derivata di una funzione costante è identicamente zero, si capisce che il problema di "anti-derivazione" se ha almeno una soluzione ne ha automaticamente infinite: se F è una primitiva di f allora anche $F + c$ è una primitiva per qualunque scelta della costante reale c. Anzi si può dimostrare che in questo modo si individuano tutte le possibili primitive di una funzione data. Lo sviluppo di tecniche che permettono la "ricostruzione" della primitiva di una funzione ha un'applicazione fondamentale: il calcolo di aree di figure piane. Consideriamo infatti una funzione continua f definita su un certo insieme $[a, b]$ e e supponiamo di poter assegnare un'area al "trapezoide" limitato dal grafico di f, dall'asse delle x, dalla retta $x = a$ e dalla retta $x = t$ con $t \in [a, b]$. Denotiamo questa funzione con $A(t)$ (che in seguito chiameremo funzione integrale) e proviamo a calcolarne la derivata. Variando la posizione di t, da t a $t+h$, la differenza $A(t+h)-A(t)$ corrisponde all'area del trapezoide che ha per base l'intervallo $[t, t + h]$.



Siano m_h e M_h rispettivamente il minimo e il massimo valore della funzione sull'intervallo $[t, t + h]$ allora la differenza $A(t + h) - A(t)$ si può stimare con le aree dei rettangoli di base $[t, t + h]$ e altezze m_h e M_h.

$$m_h \cdot h \leq A(t + h) - A(t) \leq M_h \cdot h.$$

Quindi

$$m_h \leq \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \leq M_h.$$

Facendo tendere h a zero, dato che f è continua (per funzioni più irregolari la situazione è più complicata) i numeri M_h e m_h tendono a $f(t)$ (ossia al massimo e al minimo di f nell'intervallo "contratto" costituito dal solo punto t). Quindi $A'(t) = f(t)$ e A è una primitiva di f.

1. Definizione di integrale

Nell'introduzione abbiamo parlato della possibilità di assegnare un'area ad un trapezoide. Ora precisiamo meglio come va intesa questa affermazione. Supponiamo che f sia una funzione limitata definita su un insieme $[a, b]$. L'idea è di "approssimare" l'area del trapezoide con delle unioni di rettangoli. Suddividiamo $[a, b]$ in N sotto-intervalli di ampiezza uniforme inserendo i seguenti punti

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{N} \quad \text{con } n = 0, 1, \cdots, N.$$

Ora costruiamo le due somme:

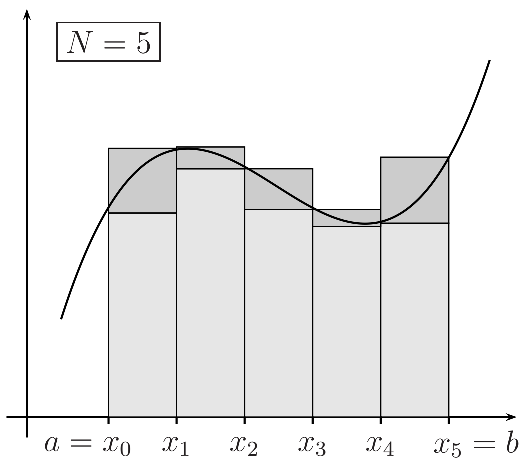
$$s_N = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} m_n$$

e

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} M_n.$$

dove

$$m_n = \inf \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\} \quad \text{e} \quad M_n = \sup \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\}.$$



Le somme s_N e S_N misurano le aree delle regioni formate dai rettangoli rispettivamente "iscritti" e "circoscritti" al grafico e quindi rappresentano la stima inferiore e superiore (di ordine N) dell'area da calcolare. L'area del trapezoide è definita se questo procedimento di approssimazione dal basso e dall'alto individua al limite un unico numero:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} S_N = \text{Area del trapezoide.}$$

In questo caso la funzione f si dice *integrabile* nell'intervallo $[a, b]$ e l'area del trapezoide si indica

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge *integrale tra a e b di f in dx*. Il simbolo di integrale $\int$ è una S allungata che ricorda la costruzione con le somme che abbiamo appena descritto. Anche se non tutte le funzioni limitate sono integrabili, si può dimostrare che le funzioni continue lo sono e anzi, come abbiamo anticipato nell'introduzione, il problema del calcolo dell'integrale è direttamente correlato con la determinazione di una primitiva. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ allora

(1) la *funzione integrale*

$$[a, b] \ni t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$$

è una primitiva di f.

(2) Se F è una primitiva di f in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Se la funzione f è solo continua a tratti allora la funzione integrale è continua ed è derivabile all'interno del dominio tranne nei punti in cui la f è discontinua.

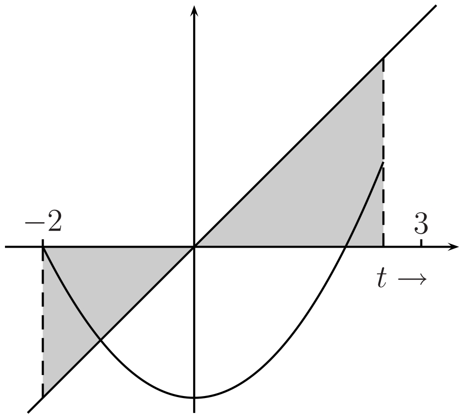
— ◇ —

Esempio 1.1 Se $f(x) = x$ allora, come già osservato, una primitiva di f è la funzione $\frac{1}{2}x^2$. La funzione integrale relativa ad esempio all'intervallo $[-2, 3]$ è uguale a

$$A(t) = \int_{-2}^t f(x)\,dx = F(t) - F(-2) = \frac{t^2}{2} - 2$$

ed è una funzione continua e derivabile la cui derivata coincide con f. Quindi la crescenza/decrescenza della funzione integrale dipende dal segno della funzione f:

l'area sotto la curva, spaziata variando t, per $t = -2$ è nulla poi decresce diventando negativa (l'area è "contata" negativa se sta sotto l'asse delle x) e poi cresce da $t = 0$ diventando nulla in $t = 2$ e positiva per $t > 2$.



Supponiamo ora che la funzione f sia discontinua. Ad esempio

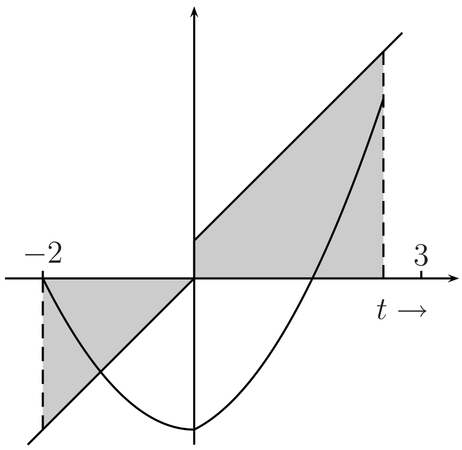
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{per } x \geq 0 \end{cases} .$$

In questo caso la funzione integrale relativa all'intervallo $[-2, 3]$ è uguale a

$$A(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} - 2 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{t(t+1)}{2} - 2 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} .$$

La funzione integrale è continua e derivabile tranne nel punto $t = 0$ dove c'è un punto angoloso:

$$A'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad A'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$



2. Calcolo delle primitive

In questa sezione svilupperemo alcune tecniche utili per individuare le primitive di una funzione continua. Per indicare l'insieme delle primitive di una funzione f si utilizza la seguente notazione:

$$\int f(x)\,dx$$

che si legge *integrale di $f(x)$ in dx*. È detto anche integrale "indefinito" perchè per ora vogliamo solo risolvere il problema della ricerca delle primitive e gli estremi di integrazione non ci interessano. Tornando al nostro esempio, possiamo allora scrivere

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

dove c è una costante arbitraria. Altri esempi si trovano nella seguente tabella.

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ per $\alpha \neq -1$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\|x\| + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$ per $a > 0$	
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$ per $a > 0$	

Il controllo della validità di questi integrali si può fare in modo molto semplice: si deriva una primitiva e si verifica che il risultato ottenuto sia uguale alla funzione corrispondente nel suo dominio di definizione.

— ◇ —

Esempio 2.1 Dalla tabella possiamo dedurre che

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+x^2}.$$

— ◇ —

Esempio 2.2 Determiniamo le primitive della funzione $|x|$, ossia calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int |x|\, dx.$$

In questo caso conviene distinguere due casi: per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int |x|\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int |x|\, dx = \int (-x)\, dx = -\int x\, dx = -\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Ora per scrivere le primitive di $|x|$ per $x \in \mathbb{R}$, dobbiamo tener presente che queste sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $c_1 = c_2$ e quindi

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} x^2/2 + c & \text{per } x \geq 0 \\ -x^2/2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

— ◇ —

Esempio 2.3 Determiniamo la funzione integrale

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

per $t \in \mathbb{R}$ dove

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x > 1 \\ 2 & \text{per } x = 1 \\ 3x^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

Dato che la funzione f è discontinua in $x = 1$ calcoliamo le primitive separatamente prima a sinistra di questo punto e poi a destra. Le primitive per $x < 1$ sono

$$\int f(x)\, dx = \int 3x^2\, dx = x^3 + c_1,$$

mentre per $x > 1$

$$\int f(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c_2.$$

Dato che la funzione integrale è continua dobbiamo stabilire la relazione tra le costanti in modo da raccordare le due primitive nel punto $x = 1$. Si deve verificare che $1^3 + c_1 = e^1 + c_2$ e quindi $c_2 = c_1 + 1 - e$. Inoltre dato che $F(0) = 0$ dobbiamo imporre che $0^3 + c_1 = 0$ ossia $c_1 = 0$. Così, per $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx = \begin{cases} t^3 & \text{per } t \leq 1 \\ e^t + 1 - e & \text{per } t \geq 1 \end{cases}.$$

Notiamo che il valore della funzione f nel punto di discontinuità $x = 1$ non ha influenzato il calcolo della funzione integrale F.

— ⋄ —

Ora che abbiamo un po' di esempi di primitive proviamo a vedere come si integrano funzioni più complicate. Come vedremo le tecniche di integrazione sono una semplice conseguenza delle regole di derivazione. Rispetto al calcolo della derivata però, nel calcolo integrale spesso la difficoltà consiste nel capire quale tecnica particolare conviene usare: in fondo cercare una primitiva è come se, dopo aver derivato una funzione, uno cercasse di "ricostruirla" partendo dalla derivata!

La prima proprietà si deduce direttamente dalla linearità della derivazione

Linearità

Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\; dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

— ⋄ —

Esempio 2.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\, dx.$$

Per la linearità abbiamo che

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2)\, dx = 3\int \sqrt{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx - 2\int dx$$

ora per determinare i singoli integrali possiamo ricorrere alla tabella

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int (x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,$$

inoltre

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int (x)^{-2}\, dx = \frac{(x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

e infine

$$\int dx = \int 1\, dx = x + c.$$

Quindi, riportando la costante una sola volta,

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\, dx = 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} - 2x + c.$$

— ⋄ —

La seconda proprietà è basata sulla regola di derivazione del prodotto:

INTEGRAZIONE PER PARTI

Se f e g sono funzioni derivabili allora

$$\int f(x)\, dg(x) = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, df(x).$$

infatti, ricordando che

$$df(x) = f'(x)\, dx \quad \text{e} \quad dg(x) = g'(x)\, dx,$$

la formula enunciata si verifica osservando che

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dg(x) + \int g(x)\, df(x) &= \int \left(f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)\right)\, dx \\ &= \int \left(f(x)\, g(x)\right)'\, dx = f(x)\, g(x) + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

Esempio 2.5 Calcoliamo l'integrale

$$\int x\, \cos x\, dx.$$

Applichiamo la tecnica della integrazione per parti integrando prima il fattore $\cos x$ e portando il risultato nel differenziale

$$\begin{aligned}\int x\, \cos x\, dx &= \int x\, d(\sin x) = x\, \sin x - \int \sin x\, d(x) \\ &= x\, \sin x - (-\cos x) + c = x\, \sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

Notiamo che se si integrasse prima il fattore x allora l'integrale diventerebbe più complicato:

$$\begin{aligned}\int x\, \cos x\, dx &= \int \cos x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\, \cos x - \int \frac{x^2}{2}\, d(\cos x) \\ &= \frac{x^2}{2}\, \cos x + \frac{1}{2} \int x^2\, \sin x\, dx.\end{aligned}$$

La scelta del fattore "giusto" da integrare non è sempre semplice e alle volte è necessario fare più di un tentativo.

— ⋄ —

Esempio 2.6 Calcoliamo l'integrale

$$\int x^2\, e^x\, dx.$$

Integriamo prima il fattore e^x:

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^x\, dx &= \int x^2\, d(e^x) = x^2\, e^x - \int e^x\, d(x^2)\\ &= x^2\, e^x - \int e^x\, 2x\, dx = x^2\, e^x - 2\int x\, e^x\, dx.\end{aligned}$$

Il nuovo integrale non si può risolvere direttamente come nell' esempio precedente, ma comunque siamo sulla buona strada perché la parte polinomiale (il fattore x^2) si è abbassato di grado (è diventato x). Risolviamo l'integrale che manca in modo analogo:

$$\int x\, e^x\, dx = \int x\, d(e^x) = x\, e^x - \int e^x\, d(x) = x\, e^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2(x\, e^x - e^x + c) = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

— ◇ —

Esempio 2.7 Calcoliamo l'integrale

$$\int \log x\, dx.$$

In questo caso per applicare l'integrazione per parti scegliamo come fattore da integrare la funzione costante 1 (che integrata dà x):

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx &= \int \log x\, d(x) = x\, \log x - \int x\, d(\log x)\\ &= x\, \log x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx = x\, \log x - \int 1\, dx\\ &= x\, \log x - x + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

Esempio 2.8 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x}\, dx.$$

Sappiamo già che la generica primitiva di $1/x$ è la funzione $\log|x| + c$, ma proviamo comunque ad applicare l'integrazione per parti per vedere cosa succede:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, d(x) = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \int x\, \left(-\frac{1}{x^2}\right)\, dx = 1 + \int \frac{1}{x}\, dx.$$

L'equazione ottenuta sembrerebbe condurre alla contraddizione $1 = 0$, ma in realtà il simbolo $\int 1/x\, dx$ rappresenta un insieme infinito di funzioni e dalla semplificazione si ottiene solo che la differenza di due primitive di $1/x$ è una costante.

— ◇ —

La terza proprietà fornisce un'altra tecnica di calcolo e si ricava dalla regola di derivazione di una funzione composta:

Integrazione per sostituzione

Se g è derivabile allora posto $t = g(x)$

$$\int f(g(x))\, dg(x) = \int f(t)\, dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

dove F è una primitiva di f.

La formula si verifica osservando che

$$(F(g(x)))' = f(g(x))\, g'(x).$$

— ◇ —

Esempio 2.9 Calcoliamo l'integrale

$$\int \tan x\, dx.$$

L'integrale dato si può scrivere nel modo seguente

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx.$$

Ora integriamo $\sin x$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x).$$

Quindi dobbiamo ancora integrare $1/t$ nella variabile $t = \cos x$ ossia

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c.$$

— ◇ —

Esempio 2.10 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{2x\, \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, dx.$$

Come vedremo la funzione da integrare è la derivata di una funzione composta. L'integrazione per sostituzione permetterà la "ricostruzione" della funzione originale. Integriamo prima $2x$:

$$\int \frac{2x\, \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, dx = \int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(x^2).$$

Poi integriamo $\cos(x^2)$ rispetto alla variabile x^2:

$$\int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(x^2) = \int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(\sin(x^2)).$$

Infine, dopo aver "corretto" il differenziale aggiungendo la costante 1, integriamo $1/(1+\sin(x^2))^2$ rispetto alla variabile $1+\sin(x^2)$

$$\int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(1+\sin(x^2)) = -\frac{1}{1+\sin(x^2)} + c.$$

— ◇ —

Esempio 2.11 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx.$$

Alle volte la scelta del cambio di variabile può essere suggerita dalla struttura della funzione da integrare. In questo caso conviene porre $t = \sqrt{x}$:

$$t^2 = x \quad \text{e} \quad d(t^2) = 2t\, dt = dx.$$

Così sostituendo otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx = \int \frac{t}{t-1}\, 2t\, dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}\, dt.$$

Dato che $t^2 = (t+1)(t-1)+1$ (abbiamo diviso il polinomio t^2 per il polinomio $t+1$)

$$2\int \frac{t^2}{t-1}\, dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = t^2 + 2t + 2\log|t-1| + c.$$

Quindi risostituendo $t = \sqrt{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx = x + 2\sqrt{x} + 2\log|\sqrt{x}-1| + c.$$

3. L'integrazione delle funzioni razionali

Se per l'integrazione di una generica funzione può essere difficile individuare la combinazione dei metodi da usare, per una funzione razionale ossia un rapporto di polinomi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

esiste un "algoritmo" completo che permette di determinare in ogni caso una primitiva. La complessità di questo algoritmo aumenta con il grado del polinomio $Q(x)$. Cominciamo quindi con il caso in cui il grado di $Q(x)$ è uguale a 1.

— ◇ —

Esempio 3.1 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx$$

Dato che il polinomio al numeratore ha grado maggiore di quello al denominatore, possiamo fare la divisione ottenendo

$$4x^2+1=(2x-1)(2x+1)+2$$

Così

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx &= \int \frac{(2x-1)(2x+1)+2}{2x+1}\,dx\\ &= \int \left(2x-1+\frac{2}{2x+1}\right)dx = x^2-x+\log|2x+1|+c.\end{aligned}$$

— ◇ —

Ora esamineremo il caso in cui il grado del polinomio $Q(x)$ sia di grado 2. A meno di fare una divisione, come nel caso dell'esempio precedente, possiamo supporre che il numeratore $P(x)$ sia di grado minore di 2. L'algoritmo distingue tre casi a seconda della natura delle radici del polinomio $Q(x)$.

— ◇ —

Esempio 3.2 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$$

Le radici di x^2+5x+6 sono due e distinte: -2 e -3. Decomponiamo la funzione razionale nel seguente modo:

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

dove A e B sono due costanti opportune. Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

e quindi

$$\begin{cases}A+B=1\\3A+2B=1\end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=-1$ e $B=2$.

Osserviamo che per trovare le costanti A e B possiamo anche ragionare così: se moltiplichiamo l'equazione

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

per $x+2$, dopo aver semplificato, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+3} = A + B\,\frac{x+2}{x+3}$$

e ponendo $x = -2$, troviamo immediatamente che $A = -1$. In modo analogo, se moltiplichiamo per $x+3$, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+2} = A\,\frac{x+3}{x+2} + B$$

e ponendo $x = -3$, troviamo che $B = 2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right) dx \\ &= -\log|x+2| + 2\log|x+3| + c \\ &= \log\frac{(x+3)^2}{|x+2|} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

Esempio 3.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx.$$

Il polinomio $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ ha un'unica radice: -2 di molteplicità due. Se poniamo $t = x+2$ allora $dt = dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx &= \int \frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{t+1}{t^2}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \log|t| - \frac{1}{t} + c \\ &= \log|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

Esempio 3.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Il polinomio x^2+2x+3 ha due radici complesse coniugate: $-1\pm i\sqrt{2}$. Il primo passo consiste nel fare una sostituzione in modo da eliminare il termine di primo grado. In generale, per un polinomio ax^2+bx+c, questo si ottiene con una traslazione della variabile nel punto medio delle soluzioni ossia ponendo $t=x+\frac{b}{2a}$. Nel nostro caso con $t=x+1$ il polinomio x^2+2x+3 diventa t^2+2 e dunque

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{4t-5}{t^2+2}\,dt = 4\int \frac{t}{t^2+2}\,dt - 5\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

Risolviamo il primo integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^2+2}\,dt &= \int \frac{1}{t^2+2}\,d\left(\frac{t^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2}\,d(t^2+2)\\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+2)+c.\end{aligned}$$

L'assenza del termine di primo grado nel polinomio al denominatore ci permette di determinare subito il secondo integrale

$$\int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

Quindi, riunendo i risultati e tornando alla variabile x

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = 2\log(x^2+2x+3) - \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

— ◇ —

Se il polinomio al denominatore $Q(x)$ ha grado maggiore di 2 allora bisogna determinarne una fattorizzazione completa (reale) ossia scriverlo come prodotto di fattori di primo grado e fattori di secondo grado irriducibili (con $\Delta<0$) e quindi si "costruisce" la decomposizione della funzione razionale $P(x)/Q(x)$ come combinazioni lineari di frazioni più semplici:

(1) ad ogni fattore $(x-x_0)^n$ si associano le n *frazioni semplici*

$$\frac{1}{x-x_0},\ \frac{1}{(x-x_0)^2},\ \cdots\ ,\frac{1}{(x-x_0)^n};$$

(2) ad ogni fattore irriducibile $(x^2+bx+c)^m$ si associano le $2m$ frazioni semplici

$$\frac{x}{x^2+bx+c},\ \frac{x}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots\ ,\frac{x}{(x^2+bx+c)^m},$$
$$\frac{1}{x^2+bx+c},\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots\ ,\frac{1}{(x^2+bx+c)^m}.$$

— ⋄ —

Esempio 3.5 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x-1}{x^4+x^2}\,dx.$$

La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$$

Al fattore x^2 si associano le frazioni semplici

$$\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}$$

mentre al fattore irriducibile x^2+1 si associano le frazioni semplici

$$\frac{x}{x^2+1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2+1}.$$

Quindi la decomposizione è

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$$

e dunque

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=1$, $B=-1$, $C=-1$ e $D=1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + c \\ &= \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} + \arctan x + c \end{aligned}$$

4. L'integrale definito

Ora che abbiamo un po' di pratica con la ricerca delle primitive calcoliamo qualche integrale definito ricordando il teorema fondamentale.

— ◇ —

Esempio 4.1 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Prima determiniamo una primitiva della funzione da integrare

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.\end{aligned}$$

Quindi valutiamo

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}.$$

— ◇ —

Esempio 4.2 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{1/e}^e \frac{\log x}{x}\,dx.$$

In questo caso il calcolo procede integrando prima $1/x$

$$\int_{1/e}^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_{1/e}^e \log x\, d\,(\log x) = \frac{1}{2}\left[\log^2 x\right]_{1/e}^e = \frac{1-(-1)^2}{2} = 0.$$

— ◇ —

La presenza degli estremi di integrazione permette di individuare un'altra interessante proprietà: l'intervallo di integrazione può essere suddiviso.

Additività rispetto all'intervallo di integrazione
Se f è integrabile in $[a,b]$ e $a \le c \le b$ allora $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si noti inoltre che se si invertono gli estremi di integrazione allora l'integrale cambia di segno

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

— ◇ —

Esempio 4.3 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^3 |x^2 - 1|\, dx.$$

Conviene decomporre l'intervallo di integrazione inserendo un punto di suddivisione in 1 dove la funzione $x^2 - 1$ cambia segno. In questo modo possiamo "sbarazzarci" del valore assoluto:

$$\int_0^3 |x^2-1|\, dx = \int_0^1 (1-x^2)\, dx + \int_1^3 (x^2-1)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{22}{3}.$$

— ◇ —

Esempio 4.4 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 (2x+1) \arctan x\, dx.$$

Prima applichiamo la linerità:

$$\int_{-1}^1 (2x+1) \arctan x\, dx = 2\int_{-1}^1 x \arctan x\, dx + \int_{-1}^1 \arctan x\, dx.$$

Ora osserviamo che la funzione $\arctan x$ è dispari ($f(-x) = -f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico rispetto all'origine $[-1,1]$ vale zero:

$$\int_{-1}^1 \arctan x\, dx = 0.$$

Inoltre, la funzione $x \arctan x$ è pari ($f(-x) = f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ vale il doppio di quello su $[0,1]$:

$$\int_{-1}^1 x \arctan x\, dx = 2\int_0^1 x \arctan x\, dx.$$

Allora l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^1 (2x+1) \arctan x\, dx = 4\int_0^1 x \arctan x\, dx.$$

Proseguiamo il calcolo integrando per parti

$$\begin{aligned}
4\int_0^1 x \arctan x\, dx &= 4\int_0^1 \arctan x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2} \arctan x\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x^2}{2} d\left(\arctan x\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 x^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\big[x - \arctan x\big]_0^1 = \pi - 2.
\end{aligned}$$

5. L'integrale improprio

Nella sezione precedente abbiamo visto qualche calcolo di integrale definito. Le funzioni da integrare erano continue su tutto l'intervallo limitato $[a, b]$. Ora proviamo ad ampliare la definizione di integrale anche al caso in cui la funzione sia continua solo su $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Se l'intervallo non è limitato ossia $b = +\infty$ si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Se il limite esiste finito allora l'integrale *improprio* si dice *convergente* e la funzione si dice integrabile su $[a, b)$. Il caso in cui la funzione sia continua solo su $(a, b]$ è assolutamente analogo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx.$$

— ⋄ —

Esempio 5.1 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sappiamo già che

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c.$$

Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_1^{+\infty} = +\infty.$$

Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \big[\log|x|\big]_{0^+}^1 = +\infty.$$

In entrambi i casi gli integrali impropri non sono convergenti.

— ⋄ —

Esempio 5.2 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

con $\alpha > 0$ e diverso da 1. Abbiamo visto che

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c.$$

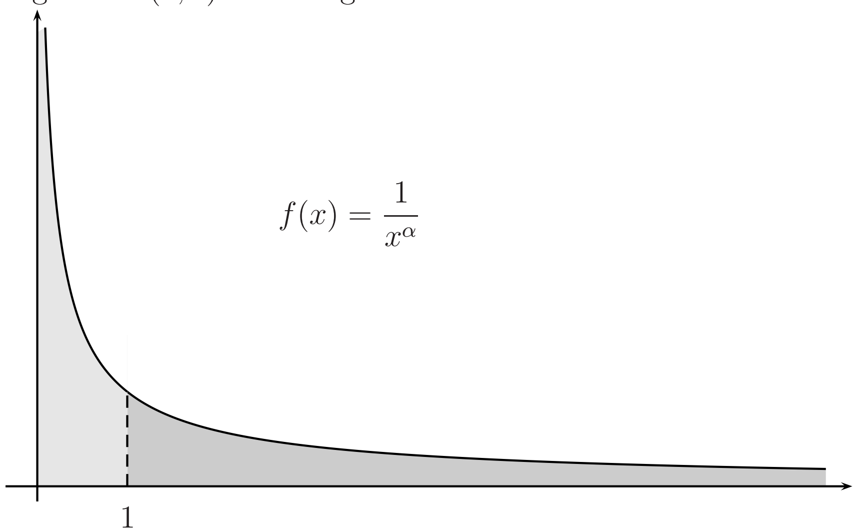
Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$.
Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0^+}^{1} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(0, 1)$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$.



— ⋄ —

Esempio 5.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \int \frac{1}{(\log x)^\beta}\,d(\log x) = \begin{cases} \dfrac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta} + c & \text{se } \beta \neq 1 \\ \log|\log x| + c & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

L'integrale improprio su $(e, +\infty)$ vale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

— ◇ —

Esempio 5.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{x|\log x|^\beta}\,dx \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Se cambiamo variabile ponendo $y = 1/x$ possiamo ricondurre questo integrale improprio al precedente:

$$\int_{+\infty}^{e} \frac{y}{|\log 1/y|^\beta}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_e^{+\infty} \frac{1}{y(\log y)^\beta}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \le 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

— ◇ —

Esempio 5.5 Calcoliamo l'integrale improprio

$$\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx$$

La funzione data è continua in $[e^3, +\infty)$. Per calcolare il valore dell'integrale improprio dobbiamo prima determinare una primitiva. Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx = \int \frac{1}{\log^2 x - 4}\,d(\log x) = \int \frac{1}{t^2 - 4}\,dt.$$

dopo aver posto $t = \log x$. Decomponiamo la funzione razionale

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{(t+2)(t-2)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{t-2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{t+2}.$$

Ora possiamo completare il calcolo della primitiva

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t+2| + c \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right| + c.\end{aligned}$$

Ora basta valutare la primitiva agli estremi di integrazione

$$\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right|\right]_{e^3}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{4}\log\left|\frac{3-2}{3+2}\right| = \frac{\log 5}{4}.$$

6. Criteri di convergenza per integrali impropri

In molti casi è possibile dire se un integrale improprio converge o meno senza affrontare il problema della "faticosa" determinazione di una primitiva. Esistono infatti dei *criteri di convergenza* del tutto simili a quelli già studiati per le serie (anche gli integrali sono delle "somme infinite").

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano f e g due funzioni continue tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per } x \in [a,b).$$

Allora

(1) Se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora anche $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

— ◇ —

Esempio 6.1 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

è convergente.
In questo caso la determinazione di una primitiva della funzione positiva e^{-x^2} sarebbe addirittura proibitiva (si dimostra infatti che esiste una primitiva, ma che questa non è esprimibile come composizione di funzioni elementari!). Il fatto che la funzione tenda a zero "molto velocemente" per $x \to +\infty$ ci suggerisce però di applicare il punto (1) del criterio del confronto. Si tratta allora di individuare una funzione che maggiori quella data e il cui integrale improprio sia convergente. La funzione e^{-x} ha proprio questa proprietà:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

Quindi l'integrale dato è convergente e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

— ◇ —

Esempio 6.2 Il criterio del confronto può essere anche utile per determinare se una certa serie converge o meno. Ad esempio vediamo come con questa tecnica possiamo provare che la serie $\sum_1^{+\infty} 1/n$ diverge.
Dato che la funzione $1/x$ è decrescente per $x > 0$ abbiamo che

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in [n, n+1]$$

e quindi integrando su questo intervallo otteniamo che

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Infine sommiamo facendo variare l'indice n da 1 a infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

— ⋄ —

Criterio del confronto asintotico

Siano f e g due funzioni continue positive $[a, b)$ tali che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Se $0 < L < +\infty$ ossia $f \sim Lg$ per $x \to b^-$. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ converge se e solo se } \int_a^b g(x)\, dx \text{ converge.}$$

Per l'applicazione del criterio del confronto asintotico abbiamo bisogno di un "repertorio" di integrali impropri di cui conosciamo le proprietà di convergenza. Qui riassumiamo i risultati di cui avremo bisogno e che in parte sono già stati dimostrati negli esempi precedenti.

Integrali impropri principali

(1) Se $a < b$ allora

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(2) Se $a > 1$ allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

(3) Se $0 < b < 1$ allora

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

— ⋄ —

Esempio 6.3 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.
La funzione data è continua sull'intervallo $(0,+\infty)$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.
Cominciamo con $x \to 0^+$

$$\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(x)^2} \sim \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{x^{a+2-5}} = \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{x^{a-3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a-3 < 1$ ossia se $a < 4$. Vediamo cosa succede per $x \to +\infty$

$$\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2} \sim \frac{1}{x^a\,(\log x)^2}.$$

Dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a \geq 1$ (l'esponente del logaritmo è $2 > 1$). Unendo le due condizioni abbiamo che $1 \leq a < 4$.

— ⋄ —

Esempio 6.4 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,\pi)$.
Per determinare la convergenza basta fare un'analisi asintotica agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} \sim \frac{x^2/2}{x^{1/3}\,x^a} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{a+1/3-2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{a-5/3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a-5/3 < 1$ ossia se $a < 8/3$. Invece, per $x \to \pi^-$

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} = \frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin(\pi-x))^a} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\cdot\frac{1}{(\pi-x)^a}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a π^- se $\alpha = a < 1$. Unendo le due condizioni abbiamo che $a < 1$.

— ⋄ —

Concludiamo con un cenno al problema della integrabilità impropria per una funzione di segno non costante. In questo caso infatti i criteri precedenti non sono applicabili. Vale però il seguente risultato (analogo a quello per le serie).

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge allora anche $\int_a^b f(x)\, dx$ converge.

— ◇ —

Esempio 6.5 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

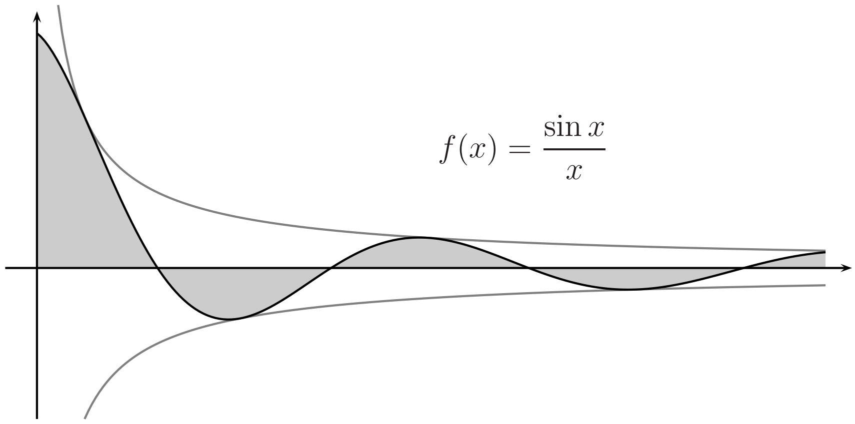
converge.
Per $x > 0$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2},$$

inoltre $1/x^2$ è integrabile in $[1, +\infty)$ e quindi per il criterio del confronto anche la funzione (positiva) $|\sin x/x^2|$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi l'integrale improprio converge per il criterio della convergenza assoluta. Si osservi che anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

converge, anche se il ragionamento precedente non è applicabile perchè la funzione $1/x$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.



La convergenza si può invece spiegare osservando il grafico della funzione: si tratta di oscillazioni "modulate" dalle funzioni $\pm 1/x$. L'integrale improprio da calcolare è la serie i cui termini corrispondono alle aree delle singole "gobbe". Tali aree hanno segno alterno (perché stanno alternativamente sopra e sotto l'asse x) e decrescono in valore assoluto a zero (questa affermazione andrebbe dimostrata!). Quindi la serie (e anche l'integrale) converge per il criterio di Leibniz.

4

Equazioni differenziali

Determinare le primitive di una funzione $f(x)$ significa risolvere

$$y'(x) = f(x)$$

dove l'incognita è la funzione $y(x)$. Questa equazione è un semplice esempio di equazione differenziale. In particolare se

$$y'(x) = 2x$$

le soluzioni che si ottengono integrando $2x$ sono

$$y(x) = x^2 + c$$

ossia le soluzioni sono infinite e ciascuna è individuata da un diverso valore della costante reale c. La costante c può essere determinata imponendo un'ulteriore condizione. Ad esempio se vogliamo che $y(1) = 3$ allora $c = 2$ e $y(x) = x^2 + 2$.

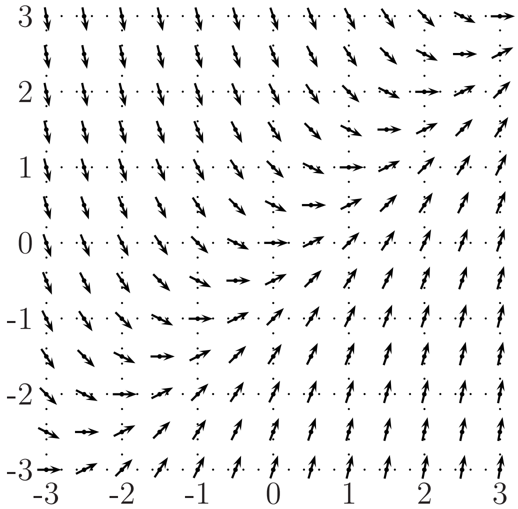
Più in generale un'*equazione differenziale* è un'equazione dove compaiono la funzione incognita $y(x)$ assieme ad alcune sue derivate. L'ordine massimo di derivazione dell'incognita $y(x)$ individua l'*ordine* dell'equazione differenziale. L'equazione $y'(x) = 2x$ è del primo ordine. Un altro esempio di equazione differenziale del primo ordine è

$$y'(x) + y(x) = x$$

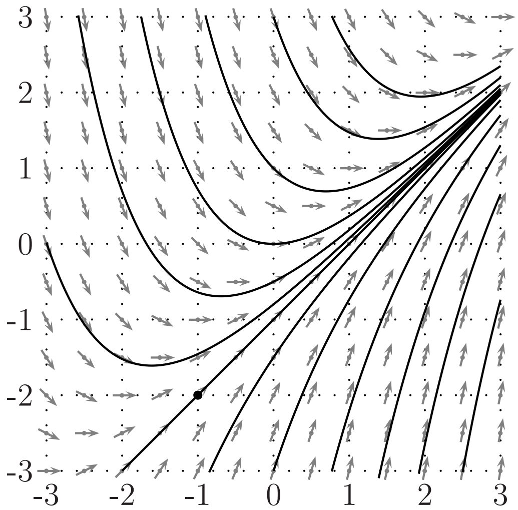
in questo caso però le soluzioni non possono essere determinate direttamente con una sola integrazione. Prima di descrivere qualche tecnica di risoluzione cerchiamo dare un'interpretazione "visiva" dell'equazione. Consideriamo un punto (x_0, y_0) del piano. Se una soluzione passa per (x_0, y_0), ossia $y(x_0) = y_0$, allora l'equazione permette di calcolare la derivata di $y(x)$ in quel punto:

$$y'(x_0) = x_0 - y(x_0) = x_0 - y_0.$$

Associamo dunque a tale punto la direzione della corrispondente retta tangente a $y(x)$ in x_0. Al variare del punto (x_0, y_0) nel piano determiniamo così un *campo di direzioni*. Ecco quello che succede nel quadrato $[-3, 3] \times [-3, 3]$



Le soluzioni dovranno seguire in ogni punto la direzione associata. In seguito determineremo la loro formula esplicita, ma grazie a queste prime osservazione possiamo già avere un'idea qualitativa del loro grafico.



Anche in questo caso le soluzioni sono infinite e il passaggio per un punto assegnato individua una sola soluzione. Ad esempio per il punto $(-1, -2)$ si riesce addirittura ad "indovinare" una soluzione esplicita: seguendo la direzione iniziale le direzioni successive sono tutte allineate e quindi la soluzione è la retta $y(x) = x - 1$.

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha la seguente forma

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I. Come abbiamo già osservato nell'introduzione, se la funzione $a(x)$ fosse identicamente nulla allora per determinare la funzione incognita $y(x)$ basterebbe integrare entrambi i membri

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + c.$$

Avremmo così infinite soluzioni dipendenti dalla costante arbitraria c e tutte definite nell'intervallo I.

Quando $a(x)$ non è identicamente nulla il problema della determinazione delle soluzioni si può fare in modo simile dopo aver preventivamente moltiplicato l'equazione per cosiddetto *fattore integrante* $e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$:

$$e^{A(x)}\,y'(x) + e^{A(x)}\,a(x)\,y(x) = e^{A(x)}\,f(x).$$

In questo modo il primo membro di questa equazione può essere interpretato come la derivata della funzione $e^{A(x)}\,y(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}\,y(x)\right) = e^{A(x)}\,y'(x) + e^{A(x)}\,a(x)\,y(x) = e^{A(x)}\,f(x).$$

A questo punto è possibile come prima integrare entrambi i membri

$$e^{A(x)}\,y(x) = \int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c.$$

e quindi esplicitare la soluzione

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c\right).$$

SOLUZIONE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL PRIMO ORDINE

La soluzione generale dell'equazione

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx + c\right) \quad \text{per } x \in I.$$

dove c è una costante arbitraria.

La costante arbitraria può essere determinata se si aggiunge la condizione supplementare, detta *condizione iniziale*,

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{con } x_0 \in I$$

ossia si impone che la soluzione passi per un punto assegnato (x_0, y_0). Si verifica che tale problema, detto *problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione la cui formula si deduce facilmente dal caso generale:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} \, f(t) \, dx + e^{A(x_0)} y_0 \right) \quad \text{per } x \in I.$$

Nel prossimo esempio risolveremo esplicitamente proprio l'equazione discussa nell'introduzione.

— ◇ —

Esempio 1.1 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 1$ e $f(x) = x$ quindi possiamo considerare $I = \mathbb{R}$. Troviamo la soluzione generale in I. Una primitiva di $a(x) = 1$ è

$$A(x) = \int a(x) \, dx = \int dx = x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di $e^{A(x)} \, f(x)$

$$\int e^{A(x)} \, f(x) \, dx = \int e^x \, x \, dx = \int x \, d\,(e^x) = x \, e^x - \int e^x \, dx = x \, e^x - e^x + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-x} \, (x \, e^x - e^x + c) = x - 1 + c \, e^{-x}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(-1) = -2$:

$$y(-1) = -1 - 1 + c \, e^1 = -2 + c \, e = -2$$

da cui si ricava che $c = 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x - 1 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

Esempio 1.2 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x)/x = 4x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

Mentre $f(x) = 4x^2$ è continua in $\mathbb{R}$, la funzione $a(x) = 1/x$ è continua solo nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dato che $x_0 = -1$, l'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = (-\infty, 0)$. Dobbiamo prima determinare una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x < 0$

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| = \log(-x)$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(-x)} = -x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = -x\, 4x^2 = -4x^3.$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = -\int 4x^3\, dx = -x^4 + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = -\frac{1}{x}\left(-x^4 + c\right) = x^3 - \frac{c}{x}.$$

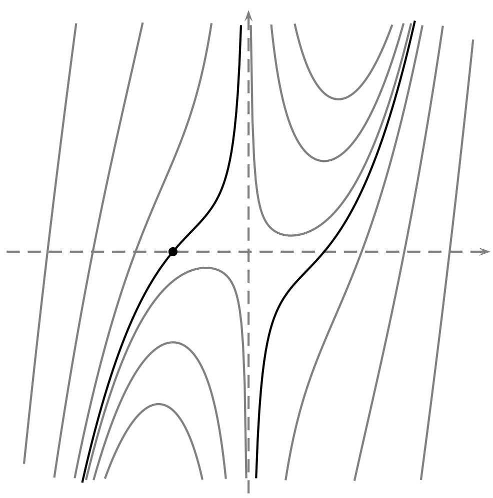
Ora imponiamo la condizione $y(-1) = 0$

$$y(-1) = -1 + c = 0$$

da cui si ricava che $c = 1$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x^3 - \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (-\infty, 0).$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al "flusso" delle altre soluzioni ottenuto variando la costante c.



— ◇ —

Esempio 1.3 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{e^x + 1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases} .$$

L'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = \mathbb{R}$. Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = -1/(e^x + 1)$

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int \frac{1}{e^x + 1}\, dx = -\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\, dx \\ &= \int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, d(1 + e^{-x}) = \log(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = 1 + e^{-x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int (1 + e^{-x}) e^x\, dx = \int (e^x + 1)\, dx = e^x + x + c$$

e la soluzione generale è uguale a

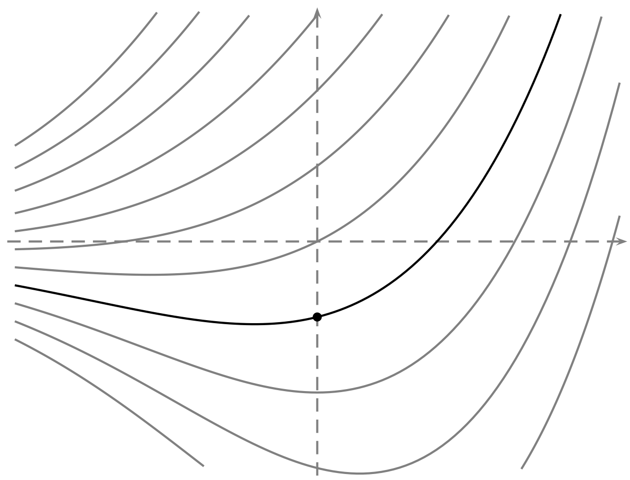
$$y(x) = \frac{e^x + x + c}{1 + e^{-x}}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = -1$:

$$y(0) = \frac{1 + c}{2} = -1$$

da cui si ricava che $c = -3$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x + x - 3}{1 + e^{-x}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$



— ◇ —

Esempio 1.4 Determiniamo l'eventuale asintoto per $x \to +\infty$ della soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 3x + 4 \\ y(0) = 5 \end{cases}.$$

Una primitiva di $a(x) = 2x$ è $A(x) = x^2$ e dunque la soluzione del problema è

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{t^2} (3t+4)\, dt + 5 \right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

La presenza del fattore e^{t^2} non ci permette di svolgere l'integrale, ma la formula ottenuta è sufficiente a determinate l'asintoto. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}(3t+4)\, dt + 5}{e^{x^2}} \overset{\mathrm{H}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}(3x+4)}{e^{x^2} 2x} = \frac{3}{2}.$$

Quindi l'asintoto cercato è $y = 3/2$.

2. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti ha la seguente forma

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con il coefficiente $a_n \neq 0$ e la funzione continua in un intervallo I. A questa equazione, detta *equazione completa*, è associata l'*equazione omogenea*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n: se indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_n$ una base di tale spazio ogni altra soluzione è del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono delle costanti arbitrarie. Per determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa basta "traslare" opportunamente lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea.

SOLUZIONE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE n A COEFFICIENTI COSTANTI

La soluzione generale dell'equazione

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con $a_n \neq 0$ e f una funzione continua in un certo intervallo I è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y_\star(x)$$

dove

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti arbitrarie;

(2) $y_\star(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per risolvere l'omogenea percorriamo i seguenti passi. Prima si determinano le radici del *polinomio caratteristico*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Quindi, per costruire una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, si associa ad ogni radice un insieme di funzioni. Più precisamente:

(1) ad ogni radice reale α con molteplicità m si associano le m funzioni:

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x}, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x};$$

(2) ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ ciascuna di molteplicità m si associano le $2m$ funzioni:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ x e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Dato che la somma delle molteplicità è uguale al grado n del polinomio alla conclusione di questo procedimento avremo le n funzioni che formano una base dello spazio delle soluzioni le quali sono evidentemente definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

— ◇ —

Esempio 2.1 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

che ha radici: -1 e 3 entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.2 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

che ha un'unica radice: -2 di molteplicità 2. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-2x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.3 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $-1 + 2i$ e $-1 - 2i$ entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)).$$

— ◇ —

Le costanti si possono determinare imponendo un certo numero di condizioni di vario tipo. Nel caso del problema di Cauchy si assegnano i valori delle prime $n - 1$ derivate in un punto.

— ◇ —

Esempio 2.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 9 = 0$$

che ha radici: 3 e -3 entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

e dato che $y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$

$$y'(0) = 3c_1 - 3c_2 = 6.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = 3/2$ e $c_2 = -1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3}{2} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{-3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.5 Risolviamo il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = 16y(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} y(x) = 3 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z - 2)(z + 2)(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

che ha radici: 2, -2, $2i$, $-2i$. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x).$$

Ora imponiamo condizione richiesta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(c_1e^{4x}+c_2+c_3e^{2x}\cos(2x)+c_4e^{2x}\sin(2x)\right)=3.$$

Il limite esiste se e solo $c_3=c_4=0$ perché le funzioni $e^{2x}\cos(2x)$ e $e^x\sin(2x)$ non hanno limite per $x\to+\infty$. Inoltre siccome il limite deve essere finito ($=3$) anche $c_1=0$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=c_2=3$$

e così

$$y(x)=3e^{-2x}$$

è la soluzione cercata.

— ⋄ —

Per determinare una soluzione particolare descriveremo un metodo che vale solo nel caso in cui la funzione $f(x)$ abbia una forma particolare:

$$f(x)=e^{ax}P(x)\cos(bx)\quad\text{oppure}\quad f(x)=e^{ax}P(x)\sin(bx).$$

In questi casi si cerca una soluzione particolare definita su tutto $\mathbb{R}$ della forma

$$y_\star(x)=x^m e^{ax}\left(Q_1(x)\cos(bx)+Q_2(x)\sin(bx)\right)$$

(1) m è la molteplicità di $a+ib$ come radice dell'equazione caratteristica,

(2) $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono generici polinomi di grado uguale al grado di $P(x)$.

— ⋄ —

Esempio 2.6 Risolviamo l'equazione

$$y'''(x)+3y''(x)=9x.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^3+3z^2=0$$

che ha radici: 0 (di molteplicità 2) e -3 (di molteplicità 1). Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x)=1,\quad y_2(x)=x\quad\text{e}\quad y_3(x)=e^{-3x}.$$

La funzione $f(x)=9x$ è del tipo discusso con $a=b=0$. Dato che $z=a+ib=0$ ha molteplicità 2 allora $m=2$ e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_\star(x)=x^2(Ax+B)=Ax^3+Bx^2.$$

Calcoliamo le derivate

$$y_\star'(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_\star''(x) = 6Ax + 2B, \quad y_\star'''(x) = 6A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$9x = y_\star'''(x) + 3y_\star''(x) = 6A + 3(6Ax + 2B) = 18Ax + 6A + 6B.$$

Quindi $A = 1/2$ e $B = -1/2$ e una soluzione particolare è

$$y_\star(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.7 Risolviamo l'equazione

$$2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(2x).$$

L'equazione caratteristica è

$$2z^2 - 5z + 3 = 0$$

che ha due radici semplici: 1 e 3/2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{3x/2}.$$

La funzione $f(x) = \sin(2x)$ è del tipo discusso con $a = 0$ e $b = 2$. Dato che $z = a + ib = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica (la molteplicità è zero), la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Calcoliamo le derivate

$$y_\star'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x), \quad y_\star''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$\sin(2x) = 2y_\star''(x) - 5y_\star'(x) + 3y_\star(x) = 5(2A - B)\sin(2x) - 5(A + 2B)\cos(2x).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5(2A - B) = 1 \\ 5(A + 2B) = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = 2/25$, $B = -1/25$ e una soluzione particolare è

$$y_\star(x) = \frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{1}{25}\sin(2x).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{1}{25}\sin(2x).$$

— ◇ —

Esempio 2.8 Risolviamo l'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) = x - e^{3x}.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^2 - 2z = z(z-2) = 0$$

che ha due radici semplici: 0 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

La funzione $f(x) = x - e^{3x}$ non è del tipo discusso, ma grazie alla linearità è sufficiente trovare una soluzione particolare prima per $f_1(x) = x$, poi per $f_2(x) = -e^{3x}$ e quindi sommarle. Per $f_1(x) = x$ allora $a = 0$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 1}(x) = 2Ax + B, \quad y''_{\star 1}(x) = 2A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x = y''_{\star 1}(x) - 2y'_{\star 1}(x) = -4Ax + 2A - 2B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = -1/4$, $B = -1/4$ e

$$y_{\star 1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x.$$

Per $f_2(x) = e^{3x}$ allora $a = 3$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 3$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Ce^{3x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}, \quad y''_{\star 2}(x) = 9Ce^{3x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-e^{3x} = y''_{\star 2}(x) - 2y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}$$

da cui $C = -1/3$ e

$$y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}.$$

Dunque una soluzione particolare per $f(x) = x - e^{3x}$ è

$$y_\star(x) = y_{\star 1}(x) + y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}$$

mentre la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.9 Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^x x \cos x \, dx.$$

Invece di integrare direttamente, possiamo ricondurre il problema alla risoluzione di un'equazione differenziale. Infatti determinare le primitive $y(x)$ della funzione $e^x x \cos x$ equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'(x) = e^x x \cos x.$$

In questo caso l'equazione caratteristica è semplicemente $z = 0$ e quindi la parte omogenea è generata dalla funzione costante $y_1(x) = 1$. La soluzione particolare deve avere invece la forma:

$$y_\star(x) = e^x(Ax + B)\cos x + e^x(Cx + D)\sin x.$$

Per determinare il valore dei coefficienti A, B, C e D dobbiamo derivare

$$\begin{aligned} y'_\star(x) &= e^x(Ax+B)\cos x + Ae^x \cos x - e^x(Ax+B)\sin x \\ &\quad + e^x(Cx+D)\sin x + Ce^x \sin x + e^x(Cx+D)\cos x \\ &= (A+C)e^x x\cos x + (A+B+D)e^x \cos x \\ &\quad + (C-A)e^x x \sin x + (C-B+D)e^x \sin x \end{aligned}$$

e imporre che $y'_\star(x) = x \cos x \, e^x$. Quindi

$$A + C = 1, \quad A + B + D = 0, \quad C - A = 0, \quad C - B + D = 0$$

e risolvendo si trova che $A = C = -D = 1/2$ e $B = 0$. Così

$$y(x) = y_\star(x) + c_1 y_1(x) = \frac{e^x}{2}\left(x \cos x + (x-1)\sin x\right) + c_1.$$

3. Equazioni differenziali non lineari a variabili separabili

Un'equazione differenziale a *variabili separabili* ha la seguente forma

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue rispettivamente negli intervalli I e J. Si tratta dunque di un'equazione differenziale del primo ordine ed è *non lineare* se b non è un polinomio di primo grado. Le equazioni non lineari sono in generale molto più difficili da trattare rispetto alle equazioni lineari. In questo caso la determinazione esplicita delle eventuali soluzioni è legata come vedremo alla forma particolare dell'equazione.

Consideriamo il relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Se $b(y_0) = b(y(x_0)) = 0$ allora il problema ha come soluzione la funzione costante $y(x) = y_0$ (*soluzione stazionaria*). Se invece $b(y_0) \neq 0$ allora si procede prima "separando le variabili" x e y

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e quindi si integra rispetto a x tenendo conto della condizione $y(x_0) = y_0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx.$$

Riscrivendo il primo integrale nella variabile y otteniamo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx$$

Allora se $H(y)$ è una primitiva di $1/b(y)$ e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ si ha che

$$H(y(x)) - H(y_0) = \big[H(y)\big]_{y_0}^{y(x)} = \big[A(x)\big]_{x_0}^{x} = A(x) - A(x_0).$$

A questo punto l'intervallo di esistenza e l'unicità della soluzione dipende dall'invertibilità della funzione $H(y)$:

$$y(x) = H^{-1}\left(A(x) - A(x_0) + H(y_0)\right).$$

— ◇ —

Esempio 3.1 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - y^2(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = y - y^2$. Dato che $b(y_0) = 1/4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int_0^x 1\,dx.$$

Il primo integrale si sviluppa nel seguente modo

$$H(y) = \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)\,dy = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + c$$

Quindi

$$\left[\log\left|\frac{y}{1-y}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = \left[x\right]_0^x$$

ossia

$$H(y(x)) = \log\left|\frac{y(x)}{1-y(x)}\right| = x.$$

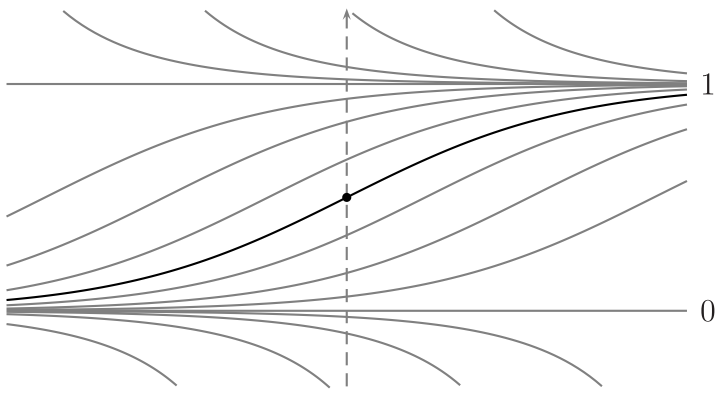
Per determinare la soluzione basta invertire la funzione $H(y)$ ossia esplicitare la funzione $y(x)$:

$$\frac{y(x)}{1-y(x)} = \pm e^x.$$

Siccome $y(0) = \frac{1}{2}$ si sceglie il segno positivo e

$$y(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione é evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



— ◇ —

Notiamo la presenza delle soluzioni stazionarie $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$. Inoltre si può facilmente dimostrare che la soluzione $y(x) = 1$ è “attrattiva” ovvero se $y(0) > 0$ allora la soluzione corrispondente tende a 1 per $x \to +\infty$.

— ◇ —

Esempio 3.2 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\, y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = y^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_0^x 2x\, dx$$

e dunque

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{y(x)} = \left[x^2\right]_0^x$$

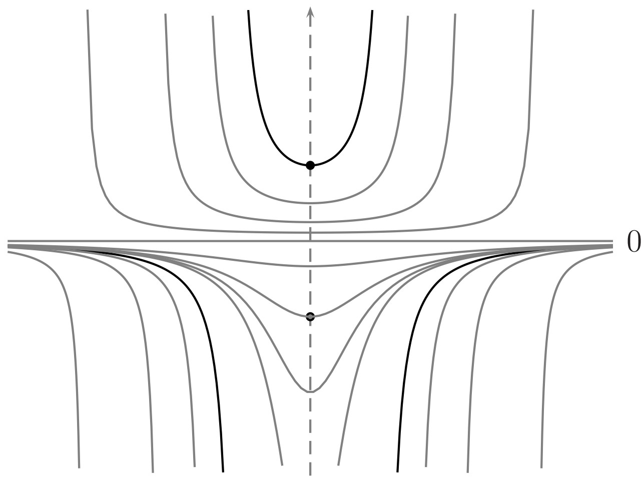
ossia

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = x^2.$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

e la soluzione è definita sull'intervallo massimale $(-1, 1)$. Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



In questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 0$. Inoltre notiamo che se la condizione iniziale fosse stata $y(0) = -1$ la soluzione sarebbe stata

$$y(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

Esempio 3.3 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}(y(x)-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Qui $a(x) = x/(x^2+1)$ mentre $b(y) = y - 1$. Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{y-1}\, dy = \int_0^x \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

e dunque

$$\left[\log|y-1|\right]_0^{y(x)} = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^x$$

ossia

$$\log|y(x)-1| = \log\sqrt{x^2+1}.$$

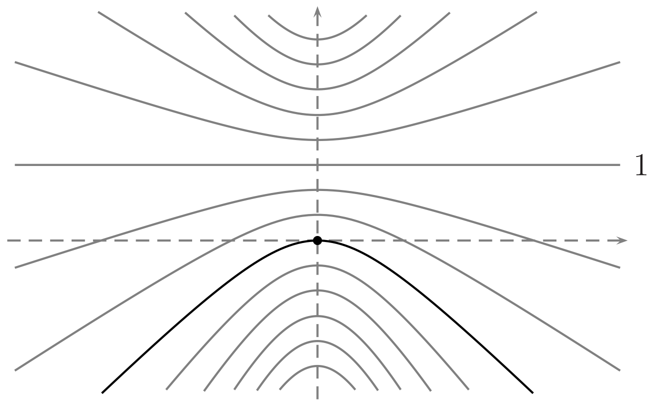
Esplicitiamo la funzione $y(x)$:

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^2+1}$$

Dato che $y(0) = 0$ scegliamo il segno negativo e la soluzione è

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^2+1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Anche questo caso c'e' un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 1$.



— ◇ —

Esempio 3.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\,(\cos y(x))^2 \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

e determiniamo il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = (\cos y)^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{2\pi}^{y(x)} \frac{1}{(\cos y)^2}\, dy = \int_0^x 2x\, dx$$

e dunque

$$\big[\tan y\big]_{2\pi}^{y(x)} = \big[x^2\big]_0^x$$

ossia

$$\tan y(x) = x^2.$$

Per esplicitare la $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione tangente:

$$y(x) = \arctan(x^2) + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

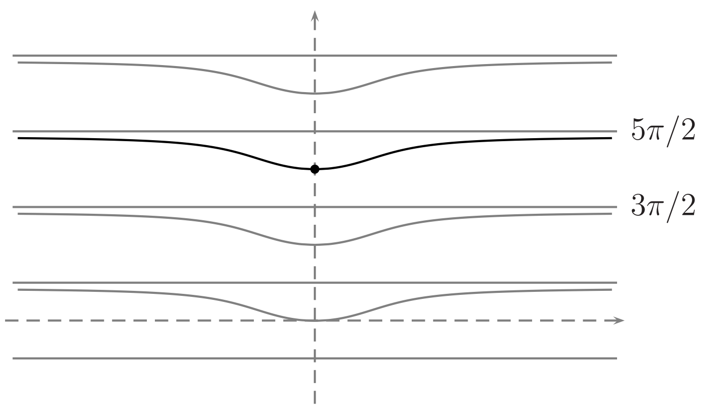
Il parametro k individua i diversi rami del grafico della tangente; nel nostro caso dobbiamo scegliere $k = 2$ in modo da soddisfare la condizione iniziale $y(0) = 2\pi$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = \arctan(x^2) + 2\pi \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

e così

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Le soluzioni stazionarie sono infinite: $y(x) = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



— ◇ —

Esempio 3.5 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2(1+x)y'(x) + xy(x)^3 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determiniamo il limite $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} y(x)$.

Risistemando i termini abbiamo che per $x \neq -1$

$$y'(x) = -\frac{x}{2(1+x)} \cdot y(x)^3.$$

Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{1}{y^3}\, dy = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{x}{1+x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

e dunque

$$\left[\frac{1}{y^2}\right]_{-1}^{y(x)} = [x - \log|1+x|]_0^x$$

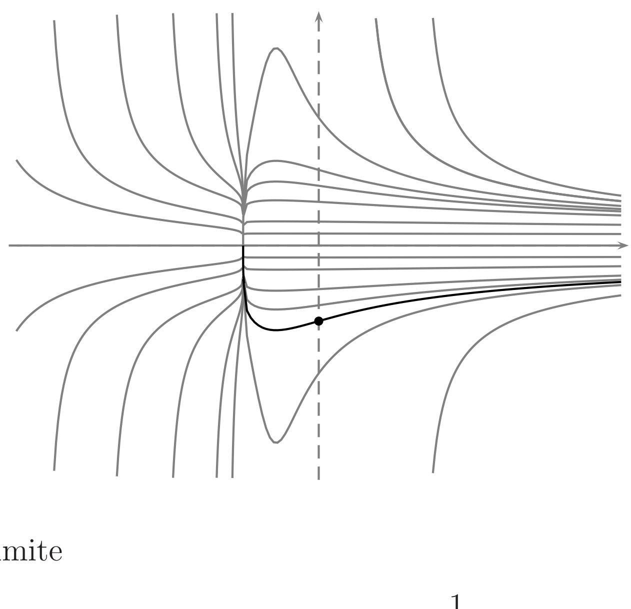
ossia

$$y(x)^2 = \frac{1}{x - \log|1+x| + 1}.$$

Ricordando che $y(0) = -1$, se esplicitiamo la $y(x)$ otteniamo la soluzione

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}}$$

definita nell'intervallo massimale $(-1, +\infty)$.
La soluzione che abbiamo determinato è evidenziata nel seguente grafico rispetto al resto del flusso delle soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. La soluzione stazionaria è $y(x) = 0$.



Ora calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to(-1)^+} y(x) = \lim_{x\to(-1)^+} -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}} = 0.$$

Esercizi

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

6. Sia $z = 1 + i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002}.$$

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare

$$z^{8!-1}.$$

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z + \overline{z} = 0.$$

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2(\overline{z} + 2) = 2z(z+1).$$

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\overline{z} - 2| = |\mathrm{Re}(z+2)|.$$

12. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

13. Determinare il minimo dell'insieme

$$\left\{|z| \,:\, (z+2+2i)^2 = -1\right\}.$$

14. Determinare il massimo dell'insieme

$$\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3 = 8i\right\}.$$

15. Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2iz + 3 = 0.$$

16. Risolvere l'equazione

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

17. Risolvere l'equazione

$$(z^2 + i)^2 + 1 = 0.$$

18. Risolvere l'equazione

$$||z| - 2i|^2 = 4.$$

19. Risolvere l'equazione

$$|z|^2 = 12 - |z|.$$

20. Risolvere l'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2) = |z|^2.$$

21. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\overline{z}^9 = z^3|z|^5.$$

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4 - 1)/(z^3 + 1)^2 = 0.$$

23. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\overline{z} + 2|z|) + 4 = 2|z|(z + 1).$$

24. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\left\{|z - w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\}.$$

25. Risolvere la disuguaglianza

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) \geq \mathrm{Re}(z-1) \cdot \mathrm{Re}(z-2i).$$

26. Risolvere la disuguaglianza

$$|z - 2i|^2 - 8 > |z|^2 - |z + 2i|^2$$

27. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z-2| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\}\,.$$

28. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z+2-3i| \leq 3 \text{ e } |w-4-4i| \leq 4\}\,.$$

29. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^6 = 1/(3-2i)^6\right\}.$$

30. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\mathrm{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

31. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, (1+i)z = \sqrt{2}|z|\right\}$$

32. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3 + 8i \\ z^5 = 8 - 3i \end{cases}.$$

Soluzioni

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

R.

$$\begin{aligned} z &= i + \frac{3 \cdot \overline{2-i}}{|2-i|^2} = i + \frac{3 \cdot (2+i)}{4+1} = i + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \\ &= \frac{6}{5} + \left(1 + \frac{3}{5}\right) i = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 6/5$ e $\mathrm{Im}(z) = 8/5$.

— ⋄ —

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

R.

$$z = \frac{1+2i}{-3+i} = \frac{(1+2i) \cdot (\overline{-3+i})}{|-3+i|^2} = \frac{(1+2i) \cdot (-3-i)}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = -1/10$ e $\mathrm{Im}(z) = -7/10$.

— ⋄ —

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

R. Sia $w = (1+2i)^4$ allora $z = w - \overline{w} = 2i\mathrm{Im}(w)$ e

$$\begin{aligned} z &= 2i\mathrm{Im}((1+2i)^4) = 2i\mathrm{Im}(1 + 4(2i) + 6(2i)^2 + 4(2i)^3 + (2i)^4) \\ &= 2i\mathrm{Im}(4(2i) + 4(2i)^3) = 2i(8 + 32(-1)) = -48i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -48$.

— ⋄ —

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

R. Conviene scrivere i numeri $1+i$ e $1-i$ in forma esponenziale:

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad 1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = \frac{(\sqrt{2})^{10}\, e^{i\frac{10\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^8\, e^{-i\frac{8\pi}{4}}} = (\sqrt{2})^2\, e^{i\frac{(10+8)\pi}{4}} = 2\, e^{i\frac{9\pi}{2}} = 2\, e^{i(4+\frac{1}{2})\pi} = 2i.$$

— ◇ —

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

R. Sapendo che $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$ allora

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1.$$

Quindi per calcolare le potenze richieste basta considerare solo il resto della divisione dell'esponente per 4:

$$z^7 = i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i;$$
$$z^{2002} = i^{2002} = i^{4\cdot 500+2} = i^{4\cdot 500} \cdot i^2 = i^2 = -1.$$

— ◇ —

6. Sia $z = 1+i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002}.$$

R. Scriviamo z in forma esponenziale

$$z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

e poi calcoliamo z^{2005} (notando che $e^{i501\pi} = -1$)

$$z^{2005} = 2^{2005/2}e^{i2005\pi/4} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i(501+1/4)\pi} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i501\pi}e^{i\pi/4} = -2^{1002}z.$$

Infine dato che $\overline{z}^{2005} = \overline{z^{2005}} = -2^{1002}\overline{z}$

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002} = (-2^{1002}z - 2^{1002}\overline{z})/2^{1002} = -(z+\overline{z}) = -2\mathrm{Re}(z) = -2.$$

— ◇ —

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare

$$z^{8!-1}.$$

R. Scriviamo prima z in forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos(\frac{x}{|z|}) = -\arccos(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dunque $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ e quindi $z^6 = e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 1$. Dato che $8!$ è un multiplo di 6 $z^{8!} = 1$ e

$$z^{8!-1} = z^{8!} \cdot z^{-1} = z^{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

— ⋄ —

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z + \overline{z} = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x+iy) + (x-iy) = 2x = 0$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono quelli della retta $x = 0$.

— ⋄ —

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2(\overline{z}+2) = 2z(z+1).$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora

$$z^2(\overline{z}+2) - 2z(z+1) = z|z|^2 + 2z^2 - 2z^2 - 2z = z(|z|^2 - 2) = 0.$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$z = 0 \quad \text{oppure} \quad |z|^2 = 2$$

ossia il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$.

— ⋄ —

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora

$$z^4 + |z|^4 = z^4 + z^2\,\overline{z}^2 = z^2(z^2 + \overline{z}^2) = 0$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$z^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad z^2 + \overline{z}^2 = 0$$

ossia il punto $z = 0$ e le rette $y = -x$ e $y = x$. Dato che il punto 0 appartiene alle due rette nel descrivere l'insieme ottenuto possiamo semplicemente dire che è costituito dalle due rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\overline{z} - 2| = |\mathrm{Re}(z + 2)|.$$

R. Posto $z = x + iy$ ed elevando al quadrato otteniamo l'equazione equivalente

$$|(x - 2) - iy|^2 = |x + 2|^2$$

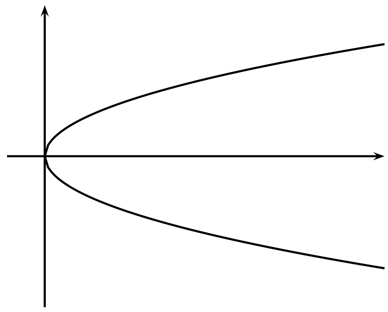
ossia

$$(x - 2)^2 + (-y)^2 = (x + 2)^2.$$

Svolgendo e semplificando troviamo che le coordinate dei punti dell'insieme cercato soddisfano l'equazione

$$y^2 = 8x$$

che rappresenta la seguente parabola



— ◇ —

12. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

13. Determinare il minimo dell'insieme

$$\left\{|z| \,:\, (z+2+2i)^2 = -1\right\}.$$

R. Troviamo intanto le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(z+2+2i)^2 + 1 = 0$$

Ricordando che $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ allora

$$(z+2+2i)^2 + 1 = ((z+2+2i)+i)\,((z+2+2i)-i) = (z+2+3i)(z+2+i)$$

Dunque le radici di questo polinomio sono

$$z_1 = -(2+3i) = -2-3i \quad \text{e} \quad z_2 = -(2+i) = -2-i.$$

Ora calcoliamo i moduli ovvero gli elementi dell'insieme dato:

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{e} \quad |z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Quindi il minimo richiesto è $\sqrt{5}$.

— ◇ —

14. Determinare il massimo dell'insieme

$$\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3 = 8i\right\}.$$

R. Troviamo intanto le radici terze di $8i = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}+i,\\ w_1 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}+i,\\ w_2 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{aligned}$$

Quindi

$$\max\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3 = 8i\right\} = \max\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right\} = \sqrt{3}.$$

— ◇ —

15. Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2iz + 3 = 0.$$

R. Cominciamo con il calcolo di Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(3) = -16.$$

Le due radici quadrate di $\Delta = -16 = 16\,e^{i\pi}$ sono

$$w_1 = 4\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i \quad \text{e} \quad w_2 = 4\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -w_1.$$

Quindi

$$z_1 = \frac{-b+w_1}{2a} = \frac{2i+4i}{2} = 3i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b-w_1}{2a} = \frac{2i-4i}{2} = -i.$$

— ◇ —

16. Risolvere l'equazione
$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

R. Calcolo di Δ:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i = 5\, e^{i\theta}.$$
Così $\cos\theta = -3/5$, $\sin\theta = -4/5$ e
$$\cos(\theta/2) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{3}{5})} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$
Quindi le due radici quadrate di $\Delta = -3 - 4i =$ sono
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(-1 + 2i),$$
e possiamo determinare le soluzioni:
$$z_1 = (3 + (-1 + 2i))/2 = 1 + i \quad \text{e} \quad z_2 = (3 - (-1 + 2i))/2 = 2 - i.$$

— ◇ —

17. Risolvere l'equazione
$$(z^2 + i)^2 + 1 = 0.$$

R. Il primo membro è un polinomio di quarto grado in $\mathbb{C}$ e dunque ci aspettiamo quattro soluzioni (tenendo conto della molteplicità). Poniamo $w = z^2 + i$ e intanto risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Questa ha due soluzioni $w_1 = i$ e $w_2 = -i$ e quindi l'equazione proposta è equivalente a trovare le soluzioni delle due equazioni
$$z^2 + i = w_1 = i, \quad z^2 + i = w_2 = -i.$$
La prima equivale a $z^2 = 0$ e quindi le soluzioni sono $z_1 = z_2 = 0$ (la soluzione 0 ha molteplicità 2). La seconda invece equivale a
$$z^2 = -2i = 2\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
e dunque otteniamo
$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \quad z_4 = -z_3 = -1 + i.$$

— ◇ —

18. Risolvere l'equazione
$$||z| - 2i|^2 = 4.$$

R. Abbiamo che
$$||z| - 2i|^2 = (\mathrm{Re}(|z| - 2i))^2 + (\mathrm{Im}(|z| - 2i))^2 = |z|^2 + (-2)^2 = |z|^2 + 4 = 4.$$
ossia $|z|^2 = 0$ che è risolta solo per $z = 0$.

— ◇ —

19. Risolvere l'equazione
$$|z|^2 = 12 - |z|.$$

R. Si tratta di un'equazione di secondo grado nella variabile $\rho = |z|$:
$$\rho^2 + \rho - 12 = 0.$$
che ha come soluzioni $\rho_1 = 3$ e $\rho_2 = -4$. Dato che $|z| \geq 0$, possiamo accettare solo la soluzione $\rho_1 = 3$. Quindi l'equazione iniziale è risolta da tutti i punti z tali che $|z| = 3$ ossia la circonferenza centrata in 0 di raggio 3.

— ◇ —

20. Risolvere l'equazione
$$\mathrm{Im}(z^2) = |z|^2.$$

R. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene
$$\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}((x+iy)^2) = \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy \quad \text{e } |z|^2 = x^2 + y^2.$$
Quindi l'equazione iniziale è equivalente a $2xy = x^2 + y^2$ ossia $(x-y)^2 = 0$ ed è dunque risolta da tutti i punti sulla bisettrice $y = x$.

— ◇ —

21. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione
$$\overline{z}^9 = z^3|z|^5.$$

R. Se calcoliamo il valore assoluto di entrambi i membri otteniamo
$$|\overline{z}|^9 = |z|^9 = |z^3|z|^5| = |z|^8,$$
ossia
$$|z|^9 - |z|^8 = |z|^8(|z| - 1) = 0.$$
e quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. Se $|z| = 0$ allora otteniamo una prima soluzione: $z = 0$. Se invece $|z| = 1$ allora $\overline{z}^9 = z^{-9}$ e l'equazione iniziale diventa $z^{-9} = z^3$ ossia $z^{12} = 1$ che ha 12 soluzioni. Dunque in totale le soluzioni sono 13.

— ◇ —

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4 - 1)/(z^3 + 1)^2 = 0.$$

R. Il numeratore $(z^4 - 1)$ ha quattro zeri distinti (ciascuno con molteplicità 1):

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il denominatore $(z^3 + 1)^2$ ha tre zeri distinti (ciascuno con molteplicità 2):

$$-1\,, \quad (1 + i\sqrt{3})/2\,, \quad (1 - i\sqrt{3})/2.$$

Il rapporto è uguale a zero se e solo se il numeratore si annulla e il denominatore è diverso da zero (altrimenti il rapporto non è definito!). Quindi l'insieme richiesto ha 3 elementi (gli elementi multipli contano una sola volta): $\{1, i, -i\}$.

— ◇ —

23. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\overline{z} + 2|z|) + 4 = 2|z|(z + 1).$$

R. Svolgendo si ottiene

$$|z|^2 + 2z|z| + 4 = 2|z|z + 2|z|$$

ossia

$$|z|^2 - 2|z| + 4 = 0.$$

Se si risolve rispetto a $|z|$ si ottiene che

$$|z| = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |z| = 1 - i\sqrt{3}$$

e nessuna delle due equazioni ammette soluzioni perché $|z|$ deve essere un numero reale maggiore o uguale a 0. Quindi il numero di soluzioni dell'equazione data è 0.

— ◇ —

24. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\left\{|z - w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\}.$$

R. L'equazione $z^4 = 1$ individua un primo quadrato di vertici:

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i.$$

L'equazione $w^4 = -4$ individua un secondo quadrato di vertici:

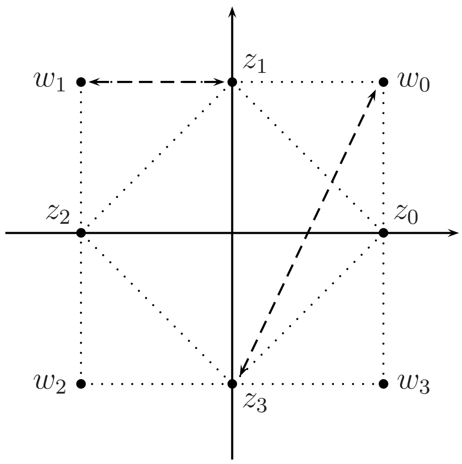
$$w_0 = 1 + i,\ w_1 = -1 + i,\ w_2 = -1 - i,\ w_3 = 1 - i.$$

L'insieme dato è dunque costituito dalla misure delle distanze tra z_j e w_k con $j,k = 1,2,3,4$. Dal disegno possiamo facilmente vedere che la distanza massima è ottenuta per esempio tra z_3 e w_0:

$$\max\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_3 - w_0| = |-i-(1+i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}.$$

La distanza minima è ottenuta invece per esempio tra z_1 e w_1:

$$\min\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_1 - w_1| = |i-(-1+i)| = 1.$$



— ◇ —

25. Risolvere la disuguaglianza

$$\text{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) \geq \text{Re}(z-1)\cdot \text{Re}(z-2i).$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$\text{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) = \text{Re}\left(z^2 - z - 2iz + 2i\right) = x^2 - y^2 - x + 2y$$

e

$$\text{Re}(z-1)\cdot\text{Re}(z-2i) = (x-1)\cdot x = x^2 - x.$$

Quindi la disuguaglianza iniziale è equivalente a

$$x^2 - y^2 - x + 2y \geq x^2 - x$$

ossia

$$-y^2 + 2y = y(2-y) \geq 0$$

e dunque $y \in [0,2]$ e x può assumere qualunque valore. Così l'insieme dei numeri complessi che risolve la disuguaglianza sono quelli contenuti nella striscia $\mathbb{R} \times [0,2]$.

— ◇ —

26. Risolvere la disuguaglianza

$$|z-2i|^2-8>|z|^2-|z+2i|^2$$

R. Poniamo $z=x+iy$ e svolgiamo i calcoli

$$|z-2i|^2-8=|x+i(y-2)|^2-8=x^2+(y-2)^2-8=x^2+y^2-4y-4$$

e

$$|z|^2-|z+2i|^2=|x+iy|^2-|x+i(y+2)|^2=x^2+y^2-x^2-(y+2)^2=-4y-4$$

Quindi la disuguaglianza iniziale diventa

$$x^2+y^2-4y-4>-4y-4$$

ossia $x^2+y^2>0$ e dunque l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

— ◇ —

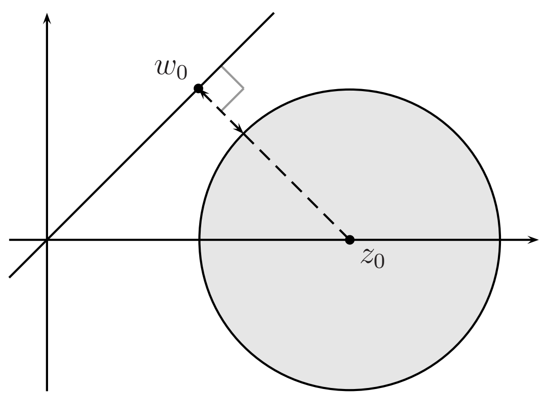
27. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z-w|\;:\;|z-2|\le 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w-i\overline{w})=0\}\,.$$

R. La disequazione $|z-2|\le 1$ individua il cerchio di centro 2 e raggio 1. Posto $w=x+iy$, abbiamo che

$$\mathrm{Re}(w-i\overline{w})=\mathrm{Re}((x+iy)-i(x-iy))=x-y=0$$

e quindi l'equazione $\mathrm{Re}(w-i\overline{w})=0$ rappresenta la retta $y=x$.



L'insieme dato è così costituito dalla misure delle distanze tra i punti del cerchio e della retta. Quindi la distanza minima è ottenuta togliendo il raggio della circonferenza alla distanza tra il punto $w_0=1+i$ sulla retta e il centro $z_0=2$:

$$\min\{|z-w|\;:\;|z-2|\le 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w-i\overline{w})=0\}=\sqrt{2}-1.$$

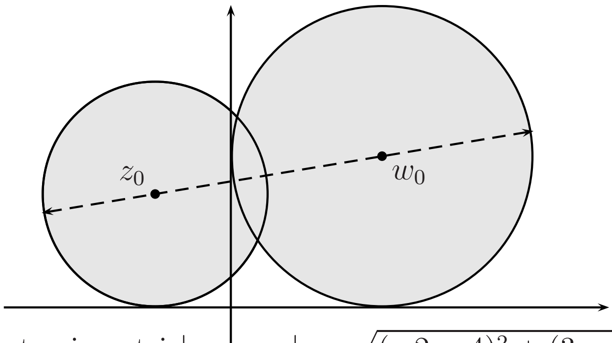
L'estremo superiore delle distanze è invece $+\infty$ perché la retta non è limitata.

— ◇ —

28. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z+2-3i| \leq 3 \text{ e } |w-4-4i| \leq 4\}\,.$$

R. Le disequazioni $|z+2-3i| \leq 3$ e $|w-4-4i| \leq 4$ individuano rispettivamente il cerchio di centro $z_0 = -2+3i$ e raggio 3 e il cerchio di centro $w_0 = 4+4i$ e raggio 4.



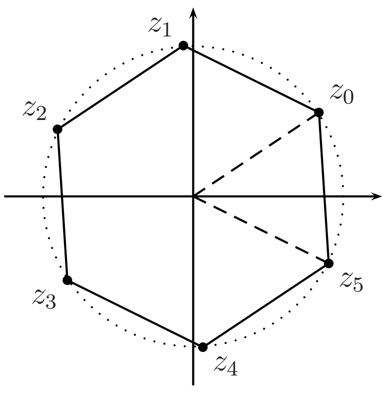
Dato che la distanza tra i centri $|z_0 - w_0| = \sqrt{(-2-4)^2+(3-4)^2} = \sqrt{37}$ è minore della somma dei raggi $3+4=7$, i due cerchi si intersecano e il minimo richiesto è 0 mentre il massimo è uguale a $\sqrt{37}+7$ ossia alla distanza dei centri più la somma dei due raggi.

— ◇ —

29. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^6 = 1/(3-2i)^6\right\}.$$

R. I vertici sono le radici seste del numero $1/(3-2i)^6$ e quindi individuano un esagono regolare centrato nell'origine.



Per calcolare il perimetro di questo esagono è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = \left(\left|1/(3-2i)^6\right|\right)^{1/6} = \left(1/\,|3-2i|^6\right)^{1/6} = 1/\,|(3-2i)| = 1/\sqrt{3^2+(-2)^2} = 1/\sqrt{13}.$$

Quindi sapendo che il lato dell'esagono è uguale al raggio r, il perimetro è $6r = 6/\sqrt{13}$.

— ⋄ —

30. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\mathrm{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

R. Intanto vediamo quando vale la disuguaglianza $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$. Posto $w = x + iy$ si ha che

$$|\mathrm{Re}(w)| = |x| \geq |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

equivale a

$$|x|^2 = x^2 = x^2 + y^2$$

ossia $y = 0$. Dunque $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$ è soddisfatta se e solo se $\mathrm{Im}(w) = 0$. Quindi per concludere l'esercizio basta trovare per quali $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = 0.$$

Di nuovo poniamo $z = x + iy$ così

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = \mathrm{Im}(((x+1)+iy)((x-3)+iy)) = y(x+1)+y(x-3) = 2y(x-1) = 0.$$

Quindi la disuguaglianza vale per tutti i punti sulle rette $y = 0$ e $x = 1$.

— ⋄ —

31. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; (1+i)z = \sqrt{2}|z| \right\}$$

R. Poniamo $z = x + iy$, così l'equazione diventa

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Separando la parte reale e immaginaria otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda otteniamo che $y = -x$ e sostituendo la y nella prima si ha che

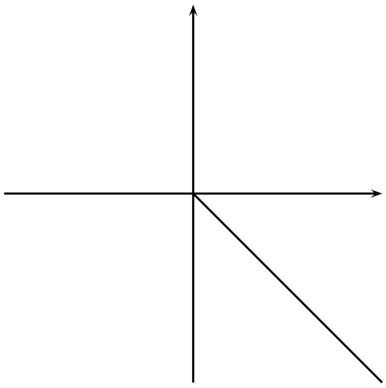
$$x + x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (-x)^2}$$

ossia

$$x = \sqrt{x^2} = |x|$$

che è risolta per $x \geq 0$. Quindi l'insieme cercato è la semiretta

$$y = -x \quad \text{per } x \geq 0.$$



— ◇ —

32. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3 + 8i \\ z^5 = 8 - 3i \end{cases} .$$

R. L'equazione $z^{10} = 3 + 8i$ individua 10 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_1 = \sqrt[10]{|3 + 8i|} = 73^{1/20}.$$

L'equazione $z^5 = 8 - 3i$ invece individua 5 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_2 = \sqrt[5]{|8 - 3i|} = 73^{1/10}.$$

Dato che $r_1 < r_2$ (non occorre calcolare numericamente r_1 e r_2 per stabilire questa relazione!) le due equazioni non possono avere soluzioni in comune e quindi la risposta è 0.

Esercizi

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

2. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n}{20^{n-1}}.$$

3. Determinare la frazione corrispondente al numero decimale

$$0.7\overline{4} = 0.74444\cdots .$$

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}.$$

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right)^n .$$

7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(\sin n))^n .$$

8. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n$$

e determinarne la somma per $x = \frac{1}{4}$.

9. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}.$$

10. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-5)^n}{n5^n}.$$

11. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + \log n}{n^a \log(n+1)}}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

12. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n^4 + n^3) - 4 \log n}{n^a \left(\log(n! + n^n)\right)^2}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

13. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n \left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n \log n)^n + n^{n \log n}\right)}$$

al variare del parametro $a > 0$.

14. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 3^n)^2 + 5^n}{(1 + 5^n)^2 + 9^n} \cdot x^n.$$

15. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

16. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot x^n.$$

17. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^{4n}.$$

18. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+5)! + 6(n+1)!}{(n+5)! + 4(n+2)!}\right)^{n^4} \cdot x^n.$$

19. Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

20. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right).$$

21. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 4^{n+1}}.$$

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n-2}{2^n}.$$

23. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+4n+5)\left(\log\left(\frac{e}{1+|x|}\right)\right)^n.$$

24. Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se x appartiene a tale dominio?

25. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot(1-|x|)^n.$$

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2/3)^n-(1+i)^n}{2^{n-1}}.$$

27. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\min\left(ne,\frac{4e}{n+1}\right)\frac{(-1)^n}{n!}.$$

28. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} .$$

29. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n^2-1)3^n - (n-1)!}{(n+1)!} \right) .$$

30. Determinare il dominio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n .$$

31. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n}.$$

32. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}.$$

Soluzioni

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Il numero 2 può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{4}{9}$ con l'indice n che parte da 1. Dato che $|\frac{4}{9}| < 1$ la serie è convergente e la somma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right) = \frac{8}{5}.$$

— ◇ —

2. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n}{20^{n-1}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 4}{5^{n-1}} - \frac{2 \cdot 5}{4^{n-1}}\right).$$

Per la linearità possiamo scomporre la serie in due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{12}{1-\frac{1}{5}} - \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

— ◇ —

3. Determinare la frazione corrispondente al numero decimale

$$0.7\overline{4} = 0.74444\cdots.$$

R. Basta scrivere il numero come somma di una serie geometrica:

$$0.7\overline{4} = \frac{7}{10} + 4 \cdot 0.0\overline{1} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{67}{90}.$$

— ◇ —

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Per il criterio di Leibniz, non solo possiamo dire che la serie converge, ma possiamo anche applicare la linearità ottenendo la scomposizione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

La prima serie ha somma uguale a $\log 2$. La seconda serie può essere ricondotta alla prima "aggiustando" l'indice della sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+1=-\log 2+1.$$

Quindi la somma della serie data è uguale a

$$\log 2+(-\log 2+1)=1.$$

— ◇ —

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}.$$

R. Osserviamo che

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

e quindi la somma parziale s_N per $N\geq 3$ diventa

$$\begin{aligned}
s_N &= \sum_{n=2}^{N}\frac{2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

Passando al limite per $N\to\infty$ troviamo che la somma della serie data vale $3/2$.

— ⋄ —

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right)^n .$$

R. Ricordando che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ per x che tende a 0 allora

$$\frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{6}.$$

Quindi, notando che la serie è a termini non negativi e ponendo $x = 1/n$ si ha che

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n} = n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{6}$$

Dato che $|\frac{1}{6}| < 1$, la serie converge per il criterio della radice.

— ⋄ —

7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan(\sin n)\right)^n .$$

R. Intanto osserviamo che i termini non sono di segno costante (il primo termine negativo si ha per $n = 5$). Notiamo anche che qualunque sia il valore di n

$$\arctan(\sin n) \in \arctan([-1, 1]) = [-\pi/4, \pi/4],$$

e dunque

$$|\arctan(\sin n)|^n \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Questo vuol dire che la serie dei valori assoluti è maggiorata dalla serie geometrica convergente di ragione $0 < \pi/4 < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Dunque, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente (e quindi è convergente).

— ⋄ —

8. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^n$$

e determinarne la somma per $x = \frac{1}{4}$.
R. Se poniamo $y = x/(x-1)$ allora, nella variabile y, la serie diventa una serie geometrica di ragione y. Questa converge se e solo se $|y| < 1$ e la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - 1 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

Quindi il dominio di convergenza della serie data è determinato dalla disuguaglianza

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$$

ossia $x \in D = (-\infty, \frac{1}{2})$. Per $x = \frac{1}{4}$ si ha che $y = -\frac{1}{3}$ e la somma della serie è uguale a $-\frac{1}{4}$.

— ◇ —

9. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{6^n} - \frac{(-2)^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

Quindi, per la linearità, la serie può essere decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{5}{4}.$$

— ◇ —

10. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-5)^n}{n5^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-5)^n}{n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1\right)-\log 2=\frac{1}{4}-\log 2.$$

— ◇ —

11. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^a\log(n+1)}}$$

al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$.

R. I termini della serie sono non negativi e facendo un'analisi asintotica abbiamo che

$$\sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^a\log(n+1)}}\sim\left(\frac{n^2}{n^a\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

che converge se e solo se $\alpha=\frac{a-2}{2}>1$ ($\beta=\frac{1}{2}\leq 1$). Possiamo così concludere che la serie data converge per $a>4$.

— ◇ —

12. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(n^4+n^3)-4\log n}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2}$$

al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$.

R. Intanto osserviamo che

$$\log(n^4+n^3)-4\log n=\log(n^4+n^3)-\log(n^4)=\log\left(\frac{n^4+n^3}{n^4}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

La serie data può essere quindi riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2}.$$

I termini della serie sono non negativi e possiamo fare un'analisi asintotica ricordando che $\log(1+x) \sim x$ per x che tende a 0:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^a(n\log n)^2} \sim \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}$$

che converge se e solo se $\alpha = a+3 \geq 1$ ($\beta = 2 > 1$). Possiamo così concludere che la serie data converge per $a \geq -2$.

— ◇ —

13. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)}$$

al variare del parametro $a > 0$.

R. Prima osserviamo che

$$(n\log n)^n + n^{n\log n} = e^{n(\log n + \log\log n)} + e^{n(\log n)^2} \sim e^{n(\log n)^2}$$

e

$$2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right) \sim 2n\left((1+1/n^{5a}) - (1-1/2n^{4a})\right) \sim 1/n^{4a-1}.$$

I termini della serie sono positivi e facendo l'analisi asintotica otteniamo

$$\frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)} \sim \frac{1/n^{4a-1}}{\log\left(e^{n(\log n)^2}\right)} \sim \frac{1}{n^{4a}(\log n)^2}.$$

Dunque la serie converge se e solo se $\alpha = 4a \geq 1$ ($\beta = 2 > 1$) ossia per $a \geq 1/4$.

— ◇ —

14. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} \cdot x^n.$$

R. Facciamo l'analisi asintotica del coefficiente

$$a_n = \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} = \frac{(1+2\cdot 3^n+9^n)+5^n}{(1+2\cdot 5^n+25^n)+9^n} \sim \frac{9^n}{25^n}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 25/9 perché:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{9}{25}.$$

— ⋄ —

15. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 4.

— ⋄ —

16. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} = \frac{3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

La prima frazione tende a $3/4$ mentre la seconda si riduce a $(1+1/n)^n$ e quindi tende ad e. Così il raggio di convergenza della serie è uguale a $4/3e$.

— ⋄ —

17. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}\cdot x^{4n}.$$

R. Poniamo $y = x^4$. Allora il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}\cdot y^{n}.$$

è dato dal reciproco del limite di

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n} \sim \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n} \to e^{-2}$$

ossia e^2. Siccome $y = x^4$, il raggio di convergenza della serie data è

$$\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}.$$

— ◇ —

18. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(n+5)!+6(n+1)!}{(n+5)!+4(n+2)!}\right)^{n^4}\cdot x^{n}\,.$$

R. Calcoliamo il limite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{1+\dfrac{6(n+1)!}{(n+5)!}}{1+\dfrac{4(n+2)!}{(n+5)!}}\right)^{n^4/n} \sim \frac{\left((1+6/n^4)^{n^4}\right)^{1/n}}{(1+4/n^3)^{n^3}} \sim \frac{e^{6/n}}{e^4} \to \frac{1}{e^4}\,.$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è e^4.

— ◇ —

19. Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\cdot x^{n}.$$

R. Intanto osserviamo che $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ perché l'intero n è pari se e solo è pari il suo quadrato (provate a dimostrarlo). Se calcoliamo anche la differenza delle radici, allora la serie data può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\cdot x^{n}.$$

Dato che

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+1}}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

il raggio di convergenza è uguale a 1 e così $(-1,1) \subset D \subset [-1,1]$. Vediamo cosa succede agli estremi: per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

e quindi converge per il criterio di Leibniz. Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Siccome il termine generico di questa serie a termini positivi è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$ la serie non converge. Dunque $D = (-1,1]$.

— ◇ —

20. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right).$$

R. Si noti che il termine, a meno del fattore $(-1)^n$, è non negativo e infinitesimo, ma non è decrescente dunque non si può applicare il criterio di Leibniz. Se provassimo ad applicare il confronto asintotico anche a questa serie che ha segno variabile avremmo che

$$\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ora siccome per il criterio di Leibniz la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge allora saremmo tentati di dire che anche la serie data converge. Questa conclusione è però sbagliata perchè in realtà la serie data diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

infatti la prima serie converge per il criterio di Leibniz mentre la seconda diverge.

— ◇ —

21. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}}.$$

R. Riscriviamo opportunamente il termine della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Ora dalla tabella delle serie di potenze si ricava facilmente che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad \text{con } x \in D = (-1, 1].$$

Quindi la serie in esame si ottiene ponendo $x = -\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\log(1 - \frac{3}{4})\right) = \frac{\log 4}{4} = \frac{\log 2}{2}.$$

— ◇ —

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{i}{2}\right)^n - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|i/2| < 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} - 1\right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-11 + 2i}{5}.$$

— ◇ —

23. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 4n + 5) \left(\log\left(\frac{e}{1 + |x|}\right)\right)^n.$$

R. Poniamo $y = \log(e/(1+|x|))$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 4n + 5) \cdot y^n.$$

Il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3n^2 + 4n + 5} \sim \sqrt[n]{3n^2} \to 1.$$

Sia all'estremo $y = 1$ che $y = -1$ la serie non converge perché il termine generico non converge a zero. Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 < y = \log(e/(1+|x|)) = 1 - \log(1+|x|) < 1,$$

ossia

$$0 < \log(1+|x|) < 2$$

e quindi

$$0 < |x| < e^2 - 1.$$

Dunque il dominio di convergenza della serie data è $D = (1 - e^2, e^2 - 1) \setminus \{0\}$.

— ⋄ —

24. Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se x appartiene a tale dominio?

R. Si noti che

$$\frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della successione $\sqrt[n]{|a_n|}$: anche se a_n oscilla tra i valori 3 e 1/3 la sua radice n-sima tende a 1. Inoltre nei punti $x = 1$ e $x = -1$ la serie non converge perché il termine generico non è infinitesimo. Quindi $D = (-1, 1)$. Se $|x| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$$

dove la prima e la seconda serie individuano la somma di tutti i termini rispettivamente di indice pari ($n = 2k$) e di indice dispari ($n = 2k + 1$). Inoltre queste due serie sono riconducibili alla serie geometrica di ragione x^2: per la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1 - x^2},$$

mentre per la seconda

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{x}{1-x^2}.$$

Quindi la somma della serie data per $|x| < 1$ è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} + 3 \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{1+9x}{3(1-x^2)}.$$

— ◇ —

25. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot (1-|x|)^n.$$

R. Poniamo $y = 1 - |x|$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot y^n.$$

Se analizziamo il coefficiente

$$a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \to 1.$$

All'estremo $y = 1$, la serie è asintoticamente equivalente alla serie armonica e dunque diverge. All'altro estremo $y = -1$ invece la serie converge per il criterio di Leibniz perché

$$\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \text{ decresce e tende a } 0.$$

Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 \leq y = 1 - |x| < 1, \text{ ossia } 0 < |x| \leq 2$$

e il dominio di convergenza della serie data è $D = [-2, 2] \setminus \{0\}$.

— ◇ —

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n - (1+i)^n}{2^{n-1}}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right).$$

Per la linearità, la serie si decompone nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|(1+i)/2| < 1$):

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} - 1\right) = 1 - 2i.$$

— ⋄ —

27. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!}.$$

R. Dato che

$$ne \leq \frac{4e}{n+1}$$

se e solo se

$$n(n+1) \leq 4$$

ossia per $n = 0$ e $n = 1$ allora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{1} (ne)\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= 0 - e + 4e\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\
&= -e - 4e\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= -e - 4e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= -e - 4e\left(e^{-1} - \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right)\right) = e - 4.
\end{aligned}$$

— ⋄ —

28. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}\,.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Dato che le serie relative ai due termini convergono possiamo separarli ottenendo

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

— ◇ —

29. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n^2-1)3^n - (n-1)!}{(n+1)!} \right).$$

R. La serie si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \cdot 3^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ovvero

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 3e^3 - (e^3-1) - 1 = 2e^3.$$

— ◇ —

30. Determinare il dominio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n.$$

R. Ponendo $y = x/(1+x)$ si osserva che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-y)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-y)^n}{n} = -\log(1-y)$$

con dominio di convergenza $[-1,1)$ rispetto a y. Quindi il dominio rispetto a x è

$$-1 \leq \frac{x}{1+x} < 1$$

ossia $D = [-1/2, +\infty)$ e per $x \in D$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n = -\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right) = -\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log(1+x).$$

— ◇ —

31. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n}.$$

R. Notiamo che

$$(\cos(n\pi/4))^2 = \begin{cases} 1 & n = 4k \text{ per } k \geq 0 \\ 1/2 & n = 2k+1 \text{ per } k \geq 0 \\ 0 & n = 4k+2 \text{ per } k \geq 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{16}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{5}.$$

— ◇ —

32. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}.$$

R. Per linearità la serie si può spezzare in due parti

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n} + 5\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Per quanto riguarda la prima serie ricordiamo che per $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

e dunque
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$
La somma della seconda serie vale
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$
Infine
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n} = 2 \cdot \frac{5}{12} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Esercizi

1. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

2. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int (\log x)^2\,dx.$$

3. Sia F la primitiva di
$$f(x) = e^{|x|}$$
tale che $F(1) = e$. Determinare $F(-1)$.

4. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx.$$

5. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int x\cos x\,e^{x}\,dx.$$

6. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int x^8\,\log x\,dx.$$

7. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx.$$

8. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \arctan x\,dx.$$

9. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx.$$

10. Calcolare l'integrale definito
$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx.$$

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2)+x^2}{2x^2-8}\,dx.$$

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x+\cos^2 x}\,dx.$$

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx.$$

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx.$$

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\,dx.$$

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx.$$

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ \cos(4x)\,dx.$$

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e} \min(x,1/x)\log x\,dx.$$

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x,\log(1/x))\,dx.$$

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^{6} \min(3-|x-3|,2)\,dx.$$

26. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2} \arcsin(3x)\,dx.$$

27. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx.$$

28. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^t}\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\,dx.$$

29. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^\alpha}\int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\,dx.$$

30. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{1} \log x\,dx.$$

31. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\,dx.$$

32. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx.$$

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.
34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.
35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.
36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}}$$

è integrabile sull'intervallo $(1,3)$.
37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.
38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.
39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\log(1+x^2)-(\log(1+x))^2}{x^a\cdot\sqrt{\sin x}\cdot(\pi-x)^{1/a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.

40. Calcolare l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)}\,dx.$$

41. Calcolare l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx.$$

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\,(\log(1+x^x))^5}$$
è integrabile sull'intervallo $(1, +\infty)$.

43. Se
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
quanto vale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx\,?$$

Soluzioni

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

R. Procediamo effettuando il cambio di variabile $t=\sqrt{x}$ ossia

$$x=t^2 \quad \text{e} \quad dx=2t\,dt.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=\int \frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt=2\int \frac{1}{1+t}\,dt=2\log|1+t|+c$$

Se torniamo alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=2\log(1+\sqrt{x})+c.$$

— ◇ —

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\log x)^2\,dx.$$

R. Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= = x(\log x)^2-\int x\,d((\log x)^2)\\ &= x(\log x)^2-\int x\,\frac{2\log x}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2-2\int \log x\,dx.\end{aligned}$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x\log x-x$ si ha che

$$\int (\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+c=x((\log x)^2-2\log x+2)+c.$$

— ◇ —

3. Sia F la primitiva di

$$f(x)=e^{|x|}$$

tale che $F(1)=e$. Determinare $F(-1)$.

R. Per $x \geq 0$ abbiamo che
$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c_1,$$
mentre per $x \leq 0$
$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c_2,$$
Le primitive di $e^{|x|}$ per $x \in \mathbb{R}$ sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $1 + c_1 = -1 + c_2$ ossia se $c_2 = 2 + c_1$. Quindi
$$\int e^{|x|}\,dx = \begin{cases} e^x + c & \text{per } x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$
La primitiva F tale che $F(1) = e^1 + c = e$ si ottiene per $c = 0$, dunque $F(-1) = -e^{-(-1)} + 2 + c = -e + 2$.

— ◇ —

4. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^{2x} nel differenziale e integriamo per parti per due volte
$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx &= \int \sin(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(\sin(3x))\\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int \cos(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + \frac{3}{4}\int e^{2x}\,d(\cos(3x))\\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} - \frac{9}{4}\int \sin(3x)e^{2x}\,dx\,.\end{aligned}$$
Ora che l'integrale rimasto coincide con quello iniziale conviene agire algebricamente spostando gli integrali tutti a sinistra e aggiungendo la costante arbitraria a destra:
$$\left(1 + \frac{9}{4}\right)\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + c,$$
e quindi
$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{13}\,e^{2x}\,\left(2\sin(3x) - 3\,\cos(3x)\right) + c.$$
Si noti che la divisione di c per $13/4$ è comunque una costante arbitraria che indichiamo ancora con la lettera c.

— ◇ —

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \cos x \, e^x \, dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^x nel differenziale e integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, e^x \, dx &= \int x \cos x \; d(e^x) = x \cos x \, e^x - \int e^x \left(\cos x - x \sin x\right) \, dx \\ &= x \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x \, dx + \int x \sin x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Ora calcoliamo separatamente l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, e^x \, dx &= \int x \sin x \; d(e^x) = x \sin x \, e^x - \int e^x \left(\sin x + x \cos x\right) \, dx \\ &= x \sin x \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int x \cos x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Quindi riassumendo:

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2}\left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int \cos x \, e^x \, dx\right].$$

I due integrali rimasti si possono determinare con la stessa tecnica:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \, e^x + c_1 \\ \int \sin x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \, e^x + c_2.\end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente scrivere l'integrale cercato

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2}\left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \sin x \, e^x\right] + c.$$

— ◇ —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8 \, \log x \, dx.$$

R. Procediamo per parti integrando prima il fattore x

$$\begin{aligned}\int x^8 \, \log x \, dx &= \int \log x \, d\left(\frac{x^9}{9}\right) = \frac{x^9}{9} \, \log x - \int \frac{x^9}{9} \, d(\log x) \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9}\int x^9 \, \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9}\int x^8 \, dx \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{x^9}{81} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx.$$

R. Integrando prima il fattore $1/x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx &= \int \sqrt{1+\log x}\,d(\log x)\\ &= \int (1+\log x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+\log x) = \frac{2}{3}(1+\log x)^{3/2}+c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

8. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x\,dx.$$

R. Procediamo per parti

$$\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \int x\,d(\arctan x) = x\,\arctan x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Ora risolviamo a parte l'integrale rimasto

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

Quindi

$$\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

— ⋄ —

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx.$$

R. Possiamo intanto fare la divisione (i polinomi hanno lo stesso grado)

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2-1} = 1+\frac{4x+6}{x^2-1}$$

così

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx = x+\int \frac{4x+6}{x^2-1}\,dx.$$

Ora calcoliamo l'integrale rimasto. La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

e dunque la decomposizione è

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (B-A)}{x^2-1}$$

e si ricava facilmente che $A = -1$ e $B = 5$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\, dx &= x + \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-1} \right) dx \\ &= x - \log|x+1| + 5\log|x-1| + c \\ &= x + \log\frac{|x-1|^5}{|x+1|} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\, dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B)x + B}{x^2(x+1)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}\, dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + c \\ &= 2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c.\end{aligned}$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \left[2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log\frac{3}{4} + \frac{2}{3}.$$

— ◇ —

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Dato che la molteplicità degli zeri del denominatore è 1 possiamo determinare le costanti A, B e C nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t\to -1}(x+1)\cdot f(x) = \lim_{t\to -1}\frac{x^2+2x-1}{(x+2)(x+3)} = -1,\\ B &= \lim_{t\to -2}(x+2)\cdot f(x) = \lim_{t\to -2}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+3)} = 1,\\ C &= \lim_{t\to -3}(x+3)\cdot f(x) = \lim_{t\to -3}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)} = 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx\\ &= \left[-\log|x+1| + \log|x+2| + \log|x+3|\right]_0^1\\ &= \left[\log\left|\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}\right|\right]_0^1 = \log 6 - \log 6 = 0. \end{aligned}$$

— ◇ —

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(1+x^2)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ A+C=-2 \\ B+D=5 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=0$, $B=1$, $C=-2$ e $D=4$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} + 4\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale che rimane per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c. \end{aligned}$$

Così

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = 3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2} + c$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{3\pi+2}{4}.$$

— ◇ —

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

R. Per $x > 0$, integriamo prima $1/x$ e poi aggiungiamo 3 nel differenziale

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(\log x)\\ &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(3+\log x) = -\frac{1}{3+\log x} + c.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3+\log x}\right]_1^e = \frac{1}{12}.$$

— ◇ —

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

R. Effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \quad \text{e} \quad dx = \cos t\,dt.$$

Invece di calcolare prima la primitiva e poi l'integrale definito proviamo a trasformare direttamente l'intervallo di integrazione:

$$x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \xrightarrow{t=\arcsin x} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Quindi

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\cos t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt.$$

Ora proseguiamo il calcolo osservando che $\sin^3 t = \sin t\,(1-\cos^2 t)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt &= \int_0^{\pi/3} \sin t\,(1-\cos^2 t)\,dt = \int_0^{\pi/3} (1-\cos^2 t)\,d(-\cos t)\\ &= \int_0^{\pi/3} (\cos^2 t - 1)\,d(\cos t) = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\pi/3} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

— ◇ —

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx.$$

R. Calcoliamo prima l'integrale indefinito con il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= \int \sin x\, d(-\cos x) = -\sin x\, \cos x - \int (-\cos x)\, d(\sin x)\\ &= -\sin x\, \cos x + \int \cos^2 x\, dx.\end{aligned}$$

Per continuare osserviamo che $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Quindi

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\, dx = -\sin x\, \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx.$$

Ora possiamo esplicitare l'integrale che stiamo cercando

$$2 \int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + x + c.$$

Quindi

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\big[-\sin x\, \cos x + x\big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

— ◇ —

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8}\, dx.$$

R. Possiamo dividere l'integrale in due parti

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx.$$

Nel primo integrale la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8}\, dx = 0.$$

Nel secondo integrale la funzione è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2 - 4}\, dx.$$

Continuiamo lo svolgimento del secondo integrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4}\, dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4}\right) dx = \big[x\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\, dx\\ &= 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = 1 + \left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = 1 - \log 3.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8}\, dx = 1 - \log 3.$$

— ⋄ —

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

R. Raccogliendo $\cos^2 x$ al denominatore, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Quindi integriamo il fattore $1/\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + \frac{1}{3}}\, d(\tan x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(\sqrt{3}\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

— ⋄ —

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx.$$

R. La funzione da integrare è continua in $[-1, 2] \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

e quindi conviene dividere l'intervallo di integrazione rispetto al punto di discontinuità

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} 2^x\, dx + \int_{0}^{2} 2^x\, dx.$$

Si verifica facilmente che

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

e così l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^{2} f(x) = -\frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{0}^{2} = \frac{5}{2\log 2}.$$

— ⋄ —

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

R. Cominciamo integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x \, d(\arcsin x) == \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Ora calcoliamo a parte l'integrale che manca

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d\left(x^2\right).$$

Quindi "aggiustiamo" il differenziale in modo che diventi uguale a $1 - x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\left[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1.$$

Dunque

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

— ◇ —

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x + 3\sqrt{x} + 2} \, dx.$$

R. Qui conviene fare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ così $t^2 = x$, $2t \, dt = dx$. Trasformando anche l'intervallo di integrazione otteniamo

$$\int_0^{16} \frac{1}{x + 3\sqrt{x} + 2} \, dx = \int_0^4 \frac{2t}{t^2 + 3t + 2} \, dt.$$

Ora integriamo la funzione razionale: la decomposizione in questo caso è

$$\frac{2t}{t^2 + 3t + 2} = \frac{2t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{2t}{t^2 + 3t + 2} = \frac{(A+B)t + (2A+B)}{t^2 + 3t + 2}$$

e si ricava facilmente che $A = -2$ e $B = 4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{2t}{t^2 + 3t + 2} \, dt &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{4}{t+2}\right) dt \\ &= 2\left[\log \frac{(t+2)^2}{|t+1|}\right]_0^4 = 2\log\frac{36}{5} - 2\log 4 = 2\log\frac{9}{5}.\end{aligned}$$

— ◇ —

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\, dx.$$

R. Dopo aver osservato che la funzione da integrare è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0, integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\, dx &= 4\pi \int_{0}^{1/4} \frac{x}{(\cos(\pi x))^2}\, dx = 4\int_0^{1/4} x\, d\left(\tan(\pi x)\right)\\ &= 4\left[x\tan(\pi x)\right]_0^{1/4} - 4\int_0^{1/4} \tan(\pi x)\, dx\\ &= 1 - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx.\end{aligned}$$

Per quanto visto

$$\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + c$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\, dx = 1 - \frac{2\log 2}{\pi}.$$

— ◇ —

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx.$$

R. Operiamo utilizzando il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\; d\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[\cos(3x)\, \sin(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\, d\left(\cos(3x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\, \sin(4x)\, dx.\end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\,\sin(4x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\,d\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x)\,\cos(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\,d\left(\sin(3x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx = \frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx$$

ossia l'integrale da determinare vale 0.

— ◇ —

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^e \min(x, 1/x)\log x\,dx.$$

R. Siccome per $x \in (0, e]$

$$\min(x, 1/x) = \begin{cases} x & \text{se} x \in (0, 1] \\ 1/x & \text{se } x \in (1, e] \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\int_0^e \min(x, 1/x)\log x\,dx = \int_0^1 x\log x\,dx + \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx.$$

Per il primo integrale si ha che

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \int_0^1 \log x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_1^e \log x\,d(\log x) = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $-1/4 + 1/2 = 1/4$.

— ◇ —

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx.$$

R. Prima osserviamo che $\log(1/x) = -\log x$. Quindi, dato che per $x \in (0, e^4]$

$$\max(\log x, -\log x) = \begin{cases} -\log x & \text{se } x \in (0,1] \\ \log x & \text{se } x \in (1, e^4] \end{cases}.$$

L'integrale diventa

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx = -\int_0^1 \log x\, dx + \int_1^{e^4} \log x\, dx$$

Per il primo integrale si ha che

$$-\int_0^1 \log x\, dx = [x \log x - x]_1^0 = 1.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^{e^4} \log x\, dx = [x \log x - x]_1^{e^4} = 3e^4 + 1.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $2 + 3e^4$.

— ◇ —

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx.$$

R. Notiamo che $3 - |x-3| \geq 2$ se e solo se $|x-3| \leq 1$ ossia per $x \in [2,4]$.
Quindi

$$\min(3 - |x-3|, 2) = \begin{cases} 3 - |x-3| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [2,4] \\ 2 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}.$$

L'integrale allora si svolge nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx &= \int_1^2 (3 - |x-3|)\, dx + \int_2^4 2\, dx + \int_4^6 (3 - |x-3|)\, dx \\ &= \int_1^2 (3 - (3-x))\, dx + 4 + \int_4^6 (3 - (x-3))\, dx \\ &= \int_1^2 x\, dx + 4 + \int_4^6 (6-x)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4 + 12 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

— ◇ —

26. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2}\arcsin(3x)\,dx.$$

R. Si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi. Procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital. Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\arcsin(3x)$ allora $F'(x) = \arcsin(3x)$.
Dunque la derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2}\arcsin(3x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\big(F(t^2) - F(0)\big) = F'(t^2)(t^2)' = 2t\,\arcsin(3t^2)$$

mentre la derivata del denominatore è $(t^4)' = 4t^3$.
Dato che $\arcsin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2}\arcsin x\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\arcsin(3t^2)}{4t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{6t^3}{4t^3} = \frac{3}{2}.$$

— ◇ —

27. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx.$$

R. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\sin^2(2x)$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\big(F(t^2) - F(t)\big) = \sin^2(2t^2)\,(t^2)' - \sin^2(2t)\,(t)' \\ &= 2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t).\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è $(t^3)' = 3t^2$.
Dato che $\sin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{8t^5 - 4t^2}{3t^2} = -\frac{4}{3}.$$

— ◇ —

28. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^t}\int_{2e^t}^{5e^t}\frac{1}{\log x}\,dx.$$

R. Per applicare efficacemente il teorema di de l'Hôpital conviene risistemare i termini in modo da avere al numeratore solo l'integrale:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\,dx\right) \Big/ \left(\frac{e^t}{t}\right).$$

La forma indeterminata è ∞/∞. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $1/\log x$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\left(F(5e^t)-F(2e^t)\right) = \frac{5e^t}{\log(5e^t)} - \frac{2e^t}{\log(2e^t)} \\ &= e^t\left(\frac{5}{t+\log 5} - \frac{2}{t+\log 2}\right) = e^t \cdot \frac{3t+5\log 2-2\log 5}{(t+\log 5)(t+\log 2)} \sim \frac{3e^t}{t}\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t}\right) = -\frac{e^t}{t^2} + \frac{e^t}{t} \sim \frac{e^t}{t}$$

. Quindi il limite richiesto è uguale a 3.

— ◇ —

29. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^\alpha}\int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\,dx.$$

R. Per x che tende a 0 la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)} \sim \frac{(1+x^2+x^4/2)+(1-x^2+x^4/2)-2}{x^3} \sim x.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile vicino a 0 e sia $F(x)$ una sua primitiva. Dato che il limite richiesto è un rapporto di infinitesimi possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital. La derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t^2}^{3t^2} f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\left(F(3t^2)-F(t^2)\right) = f(3t^2)\,(3t^2)' - f(t^2)\,(t^2)' = f(3t^2)\,6t - f(t^2)\,2t.$$

mentre quella del denominatore è $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$.
Dato che per t che tende a 0 $f(t) \sim t$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^\alpha}\int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\,dx &\overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{f(3t^2)\,6t - f(t^2)\,2t}{\alpha t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to0^+} \frac{18t^3-2t^3}{\alpha t^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{t\to0^+} \frac{16}{\alpha} t^{4-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } 0<\alpha<4 \\ 4 & \text{per } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha>4 \end{cases}.\end{aligned}$$

— ⋄ —

30. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \log x \, dx.$$

R. Come abbiamo già visto

$$\int \log x \, dx = x \, \log x - x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \, \log x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \to 0^+} (x \, \log x - x) = -1$$

— ⋄ —

31. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} \, dx.$$

R. La funzione data è continua e negativa sull'intervallo $(1, 2]$. Prima di provare a calcolare una primitiva verifichiamo se la funzione è integrabile sull'intervallo. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico perché la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Per $x \to 1^+$

$$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} \sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$ (il segno meno è dovuto al fatto che la funzione $1/\cos(\pi x/2)$ è negativa in un intorno di 1^+).

— ⋄ —

32. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx.$$

R. Integriamo prima il fattore $1/x$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^3} \, d(\log x) = \left[-\frac{1}{2(\log x)^2} \right]_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

— ⋄ —

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, 2)$.

R. La funzione data è continua sull'intervallo $(0, 2]$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica solo per $x \to 0^+$

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4} \sim \frac{x^a}{x^3\,5^4} \sim \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{x^{3-a}}$$

Dunque la funzione è integrabile sull'intervallo $(0, 2)$ se e solo se $\alpha = 3 - a < 1$ ossia se $a > 2$.

— ⋄ —

34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Dato che il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{1\}$, i punti da indagare sono tre: 0, 1 e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{x}{x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = a - 1 < 1$ ossia $a < 2$.

Per $x \to 1$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{|x-1|^{4a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 4a < 1$ ossia $a < \frac{1}{4}$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a\,x^{4a}} \sim \frac{1}{x^{5a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 5a > 1$ ossia $a > \frac{1}{5}$.

Unendo le tre condizioni abbiamo che $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$.

— ⋄ —

35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x - 1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Siccome il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{\log 2\}$, dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, $\log 2$ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo
$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,|\log x|^a}$$
quindi, dato che $\alpha = 1/2 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.
Per $x \to \log 2$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x - \log 2)$ e
$$\log(e^x-1) = \log(2e^{x-\log 2}-1) \sim \log(2(1+(x-\log 2))-1) = \log(1+2(x-\log 2)) \sim 2(x-\log 2).$$
Così
$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{\sqrt{\log 2}\,|2(x-\log 2)|^a} = \frac{1}{2^a\sqrt{\log 2}} \cdot \frac{1}{|x-\log 2|^a}$$
quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a $\log 2$ è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo
$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,x^a} = \frac{1}{x^{a+1/2}}$$
dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a + 1/2 > 1$ ossia se $a > 1/2$.
Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $1/2 < a < 1$.

— ◇ —

36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}}$$
è integrabile sull'intervallo $(1, 3)$.

R. I punti da indagare sono due: 1 e 3.
Per $x \to 1^+$ abbiamo
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} = \frac{((x-1)(x+1))^a}{\log(1+(x-1))\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x-1)^a}{x-1} = \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x-1)^{1-a}}$$
quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 1 - a < 1$ ossia $a > 0$.
Per $x \to 3^-$ abbiamo
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{8^a}{\log 3} \cdot \frac{1}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$$
quindi è integrabile "vicino" a 3 perché $\frac{1}{2} < 1$.
Così l'unica condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(1, 3)$ è: $a > 0$.

— ◇ —

37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. I punti da indagare sono due: 0 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} = \frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(1+3(e^{x^2}-1)/5)} \sim \frac{x^a/4}{3(e^{x^2}-1)/5} \sim \frac{x^a/4}{3x^2/5} \sim \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{x^{2-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 2-a < 1$ ossia $a > 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} \sim \frac{x^{a/4}}{\log(3e^{x^2})} = \frac{x^{a/4}}{x^2+\log 3} \sim \frac{1}{x^{2-(a/4)}}$$

quindi è integrabile verso $+\infty$ se $\alpha = 2-(a/4) > 1$ ossia $a < 4$.
Così la condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(0,+\infty)$ è: $1 < a < 4$.

— ◇ —

38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. Il dominio della funzione da integrare è $(0,+\infty)\setminus\{1\}$ e dunque dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1-e^{-1}}{x^{1/3}\,|\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/3 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.
Per $x \to 1$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x-1)$ e

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} = \frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(1+(x-1))|^a} \sim \frac{1-e^{-1/2}}{|x-1|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a 1 è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.
Per $x \to +\infty$ l'esponente $-1/(1+x^2)$ è infinitesimo e dunque

$$e^{-1/(1+x^2)} \sim 1 + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \sim 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Allora

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1/x^2}{x^{1/3}\,|\log x|^a} = \frac{1}{x^{7/3}|\log x|^a}$$

e la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = 7/3 > 1$ ossia per qualunque a. Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $a < 1$.

— ◇ —

39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.

R. Dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+, π^-. Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} &\sim \frac{x^2 - x^4/2 + o(x^4) - (x - x^2/2 + o(x^2))^2}{x^a \cdot x^{1/2} \cdot \pi^{1/a}} \\ &\sim \frac{x^3}{\pi^{1/a} x^{a+1/2}} = \frac{1}{\pi^{1/a}} \cdot \frac{1}{x^{a-5/2}}\end{aligned}$$

quindi, la condizione di integrabilità $\alpha = a - 5/2 < 1$ è soddisfatta per $a < 7/2$. Per $x \to \pi^-$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(\pi - x)$ e

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} \sim \frac{\log(1+\pi^2) - (\log(1+\pi))^2}{\pi^a \cdot (\pi - x)^{1/2+1/a}}$$

quindi la condizione di integrabilità $\alpha = 1/2 + 1/a < 1$ è soddisfatta per $a > 2$. Dunque la funzione data è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$ se e solo se $2 < a < 7/2$.

— ◇ —

40. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\, dx.$$

R. La funzione data è continua in $[1, +\infty)$ e se facciamo un'analisi asintotica per $x \to +\infty$ vediamo subito che la funzione data è integrabile:

$$\frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)} \sim \frac{1}{x\,(\log x)^2}.$$

Per calcolare l'integrale dobbiamo prima determinare una primitiva.
Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\, dx = \int \frac{1}{3 + (\log x)^2}\, d(\log x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

— ◇ —

41. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx.$$

R. La funzione data è continua e positiva in $(0,+\infty)$. Inoltre su questo intervallo è integrabile per il criterio del confronto asintotico:
per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il calcolo del valore dell'integrale improprio determiniamo una primitiva: poniamo $t=\sqrt{x}$, così $t^2=x$, $2t\,dt=dx$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx = \int \frac{2t}{t+t^3}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$= 2\arctan(t)+c = 2\arctan(\sqrt{x})+c.$$

Ora valutiamo la primitiva agli estremi di integrazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx = 2\left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

— ◇ —

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5}$$

è integrabile sull'intervallo $(1,+\infty)$.
R. La funzione data è continua e positiva in $(1,+\infty)$. e dunque i punti da esaminare sono 1^+ e $+\infty$. Per $x \to 1^+$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5} \sim \frac{(x-1)^3}{(x-1)^a(\log 2)^5} = \frac{1}{(\log 2)^5}\cdot\frac{1}{(x-1)^{a-3}}$$

e quindi l'integrale converge "vicino" a 1^+ se $a-3<1$ ossia se $a<4$.
Per $x \to +\infty$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5} \sim \frac{(\log x)^3}{x^a\left(\log(x^x)\right)^5} = \frac{1}{x^{a+5}(\log x)^2}$$

e quindi l'integrale converge "verso" $+\infty$ se $a+5 \geq 1$ ossia se $a \geq -4$.
Così la condizione di integrabilità cercata è $a \in [-4,4)$.

— ◇ —

43. Se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quanto vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx\,?$$

R. Dato che la funzione e^{-x^2} è pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Inoltre $-x^2+2x = -(x-1)^2+1$ e quindi ponendo $t = x-1$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+1}\,dt = e\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = e\sqrt{\pi}.$$

Esercizi

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2x\,y(x) = x\,e^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)\,y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + x^4)y'(x) + 4x^3 y(x) = 4x^3 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

e determinare $y(1)$.

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \sin x\,dx.$$

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e calcolare il limite $\lim_{x \to 0^+} x\,y(x)$.

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

10. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

11. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 8y'(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 1 \end{cases}$$

12. Risolvere l'equazione

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

13. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 27x.$$

Calcolare l'eventuale asintoto di $y(x)$ per $x \to +\infty$.

14. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -3e^{-x} - 2e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

16. Quali delle seguenti funzioni

$$y_a(x) = e^x(2x+3),\ y_b(x) = e^x(x^4 - x),\ y_c(x) = e^x(x^5 + 2),\ y_d(x) = e^x(2x^4 + 3)$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 24e^x x^2\,?$$

17. Sia $y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 8e^x - 5 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)$.

18. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) - y(x) = 2e^{-2x} + 6x - 7 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x)/x^2 = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x$.

19. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)/x$.

20. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x/y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

21. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)\, y'(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quante sono le soluzioni?

22. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

23. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) + e^{-y(x)} = 1 \\ y(1) = \log 5 \end{cases}.$$

24. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -6 + 5y(x) - y^2(x) \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

e calcolare l'eventuale asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \to +\infty$.

25. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

26. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{9\arctan(x)}{y(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

e calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/\sqrt{x}$.

27. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2+2} \cdot (\sin(y(x)))^3 \\ y(0) = 3\pi \end{cases}$$

28. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x) \cdot y(x) \\ y(1) = -e \end{cases}$$

e calcolare $y(e)$.

29. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \cdot (2e^{-y(x)} - 1) \\ y(0) = \log 3 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

30. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3\cos^2(x)\,\sin(x) \cdot y(x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

31. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x^2 \sin(x^3) \\ y(\sqrt[3]{2\pi}) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} y(x)/x^5$.

32. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\log(x)e^{-y(x)}/x \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} y(x)$.

33. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{2x-3y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x$.

34. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1) \cdot (y(x) - 1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

35. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{3}{3x+1} \cdot \dfrac{2 - e^{y(x)}}{e^{y(x)}} \\ y(0) = \log 3 \end{cases}$$

e determinare $y(1)$.

Soluzioni

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

R. Troviamo la soluzione generale in $I = \mathbb{R}$. Una primitiva di $a(x) = 2$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{2x}.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\,f(x) = e^{2x}\,3e^{-2x} = 3,$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-2x}\,\left(3x + c\right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 1$:

$$y(0) = c = 1.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-2x}\,(3x + 1) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ⋄ —

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2x\,y(x) = x\,e^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

R. Troviamo la soluzione generale in $I = \mathbb{R}$. Una primitiva di $a(x) = 2x$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^2}.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = e^{x^2}\, x\, e^{-x^2} = x,$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = e^{-1}$:

$$y(1) = e^{-1} \left(\frac{1}{2} + c \right) = e^{-1}$$

da cui si ricava che $c = 1/2$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^{-x^2}}{2}\, (x^2 + 1) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)\, y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

R. In questo caso l'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = \tan x$ in I

$$A(x) = \int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x) = -\log|\cos x| = -\log(\cos x)$$

(il valore assoluto è stato tolto perché la funzione $\cos x$ è positiva nell'intervallo I). Dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{-\log(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$$

e la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = \cos x\, (\tan x + c) = \sin x + c\, \cos x.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 4$:

$$y(0) = c = 4$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \sin x + 4\, \cos x \quad \text{per } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

— ◇ —

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

R. L'intervallo "massimale" dove le funzioni $1/x$ e $\arctan x$ sono continue e che contiene $x_0 = 1$ è $I = (0, +\infty)$. Una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

e così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\,f(x) = 2x\,\arctan x.$$

L'integrale si ottiene facilmente per parti

$$\begin{aligned} \int 2x\,\arctan x\,dx &= \int \arctan x\,d(x^2) \\ &= x^2\,\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= x^2\,\arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= x^2\,\arctan x - x + \arctan x + c \\ &= (x^2+1)\arctan x - x + c. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione generale in $(0, +\infty)$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\big((x^2+1)\arctan x - x + c\big) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan x - 1 + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = -1$:

$$y(1) = \frac{\pi}{2} - 1 + c = -1$$

da cui si ricava che $c = -\frac{\pi}{2}$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan x - 1 - \frac{\pi}{2x} \quad \text{per } x \in (0, \infty).$$

— ◇ —

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^4)y'(x)+4x^3y(x)=4x^3 \\ y(0)=5 \end{cases}$$

e determinare $y(1)$.

R. Troviamo la soluzione generale in $I=\mathbb{R}$. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficenti non costanti e per identificare correttamente la funzione $a(x)$ dobbiamo prima normalizzare l'equazione dividendo per $(1+x^4)$ ossia il coefficente di $y'(x)$

$$y'(x)+\frac{4x^3}{1+x^4}y(x)=\frac{4x^3}{1+x^4}.$$

Quindi $a(x)=4x^3/(1+x^4)$ e una sua primitiva è

$$A(x)=\int a(x)\,dx=\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx=\int \frac{1}{1+x^4}\,d(x^4)=\log(1+x^4)$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)}=e^{\log(1+x^4)}=1+x^4.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\,f(x)=(1+x^4)\cdot\frac{4x^3}{1+x^4}=4x^3,$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx=\int 4x^3\,dx=x^4+c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x)=e^{-A(x)}(x^4+c)=\frac{x^4+c}{x^4+1}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0)=5$:

$$y(0)=c=5.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x)=\frac{x^4+5}{x^4+1}\quad \text{per } x\in\mathbb{R},$$

e $y(1)=3$.

— ◇ —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

R. Il problema equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'(x) = x^2 \sin x.$$

La soluzione particolare deve avere la forma:

$$y_\star(x) = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x.$$

Per determinare il valore dei coefficienti dobbiamo derivare

$$\begin{aligned} y'_\star(x) &= ((Dx^2 + Ex + F) + (2Ax + B))\cos x \\ &\quad +((2Dx + E)) - (Ax^2 + Bx + C))\sin x \\ &= (Dx^2 + (E + 2A)x + (F + B))\cos x \\ &\quad +(-Ax^2 + (2D - B)x + (E - C))\sin x \end{aligned}$$

e imporre che $y'_\star(x) = x^2 \sin x$. Quindi

$$D = 0, \quad E + 2A = 0, \quad F + B = 0, \quad -A = 1, \quad 2D - B = 0 \quad E - C = 0$$

e risolvendo si trova che $A = -1$, $C = E = 2$ e $B = D = F = 0$. Così

$$y(x) = y_\star(x) + c = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + c.$$

— ⋄ —

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} x\, y(x)$.

R. L'intervallo dove cercare la soluzione è $I = (0, +\infty)$. Una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log x$$

e così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)} f(x) = x\, e^x.$$

L'integrale si ottiene facilmente per parti

$$\int x\, e^x \, dx = (x-1)e^x + c.$$

Dunque la soluzione generale in $(0, +\infty)$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\left((x-1)e^x + c\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = 2$:

$$y(1) = c = 2.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = (1 - \frac{1}{x})e^x + \frac{2}{x} \quad \text{per } x \in (0, \infty).$$

Calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{x\to 0^+} x\, y(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)e^x + 2 = -1 + 2 = 1.$$

— ◇ —

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 6z + 9 = 0$$

che ha una radice: 3 di molteplicità 2. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{3x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_2 = 1$$

e dato che $y'(x) = c_1 e^{3x} + 3(c_1 x + c_2)e^{3x}$

$$y'(0) = c_1 + 3c_2 = 1.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$. La soluzione cercata è

$$y(x) = (-2x + 1)e^{3x}.$$

— ◇ —

9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $2 + i$ e $2 - i$ di molteplicità 1. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$:

$$y(0) = c_1 = 0$$

e quindi $y(x) = c_2 e^{2x} \sin x$. Dato che $y'(x) = c_2 e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$

$$y'(0) = c_2 = 2.$$

La soluzione cercata allora è

$$y(x) = 2e^{2x} \sin x.$$

— ◇ —

10. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - z - 2 = 0$$

che ha radici: 2 e -1 entrambe di molteplicità 1. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

e dato che $y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$

$$y'(0) = 2c_1 - c_2 = 1.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = 1/3$ e $c_2 = -1/3$. La soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}.$$

— ◇ —

11. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 8y'(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y^{(4)}(x) + 8y'(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^4 + 8z = z(z^3 + 8) = 0$$

che ha radici: 0 e le soluzioni complesse di $z^3 = -8$ ovvero -2, $1 + i\sqrt{3}$ e $1 - i\sqrt{3}$. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + e^x(c_3 \cos(\sqrt{3}x) + c_4 \sin(\sqrt{3}x)).$$

La prima condizione $y(0) = 0$ dà

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Imponiamo ora la seconda condizione

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c_1 + c_2 e^{-2x} + e^x(c_3 \cos(\sqrt{3}x) + c_4 \sin(\sqrt{3}x))\right) = 1.$$

Il limite richiesto esiste se e solo se $c_3 = c_4 = 0$ perché le funzioni $e^x \cos(\sqrt{3}x)$ e $e^x \sin(\sqrt{3}x)$ non hanno limite per $x \to +\infty$. Così il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c_1 + c_2 e^{-2x}\right) = c_1 = 1,$$

Dalla prima condizione $c_2 = -1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = 1 - e^{-2x}.$$

— ⋄ —

12. Risolvere l'equazione

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $-1 + i$ e $-1 - i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x} \sin x.$$

La funzione $f(x) = xe^x$ è del tipo discusso con $a = 1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = e^x(Ax + B).$$

Calcoliamo le derivate

$$y_\star'(x) = e^x(Ax + A + B), \quad y_\star''(x) = e^x(Ax + 2A + B)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$xe^x = y_\star''(x) + 2y_\star'(x) + 2y_\star(x) = e^x(5Ax + 4A + 5B).$$

Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases}$$
si ottiene che $A = 1/5$, $B = -4/25$ e

$$y_\star(x) = e^x \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25} \right) = \frac{e^x}{25}(5x - 4).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{e^x}{25}(5x - 4).$$

— ◇ —

13. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 27x.$$

Calcolare l'eventuale asintoto di $y(x)$ per $x \to +\infty$.
R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 6z + 9 = 0$$

che ha una soluzione di molteplicità 2: -3. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:
$$y_1(x) = e^{-3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{-3x}.$$
La funzione $f(x) = x$ è del tipo discusso con $a = 0$ e $b = 0$ e ato che $z = a + ib = 0$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = Ax + B.$$

Sostituendo otteniamo

$$27x = y_\star''(x) + 6y_\star'(x) + 9y_\star(x) = 9Ax + (6A + 9B)$$

ossia $A = 3$ e $B = -2$.
Quindi ci sono infinite soluzioni che dipendono dalla scelta delle due costanti c_1 e c_2

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + 3x - 2.$$

Tutte queste soluzioni hanno per $x \to +\infty$ lo stesso asintoto $y = 3x - 2$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 3 \quad \text{e} \quad q = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - mx) = -2.$$

— ◇ —

14. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + z = z(z+1)$$

che ha radici semplici 0 e -1. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

La funzione $f(x) = x^2$ è del tipo discusso con $a = b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ ha molteplicità 1 allora $m = 1$ e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_\star(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Calcoliamo le derivate:

$$y'_\star(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_\star(x) = 6Ax + 2B$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x^2 = y''_\star(x) + y'_\star(x) = 3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C).$$

Quindi $A = 1/3$, $B = -1$, $C = 2$ e

$$y_\star(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

Imponiamo le condizioni:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1,$$

inoltre, dato che $y'(x) = -c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2$,

$$y'(0) = -c_2 + 2 = 0.$$

Quindi $c_2 = 2$ e $c_1 = -1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = 2e^{-x} - 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

— ◇ —

15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -3e^{-x} - 2e^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 - z - 2 = 0$$

che ha due radici semplici: -1 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

Per il calcolo della soluzione particolare sfruttiamo la linearità e consideriamo prima il caso $f_1(x) = -3e^{-x}$ e poi il caso $f_2(x) = -2e^{x}$.
Per $f_1(x) = -3e^{-x}$ allora $a = -1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = -1$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = Axe^{-x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 1}(x) = A(e^{-x} - xe^{-x}), \quad y''_{\star 1}(x) = A(-2e^{-x} + xe^{-x})$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-3e^{-x} = y''_{\star 1}(x) - y'_{\star 1}(x) - 2y_{\star 1}(x) = -3Ae^{-x}.$$

Quindi $A = 1$ e

$$y_{\star 1}(x) = xe^{-x}.$$

Per $f_2(x) = -2e^{x}$ allora $a = 1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Be^{x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 2}(x) = Be^{x}, \quad y''_{\star 2}(x) = Be^{x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-2e^{x} = y''_{\star 2}(x) - y'_{\star 2}(x) - 2y_{\star 2}(x) = -2Be^{x}.$$

da cui $B = 1$ e

$$y_{\star 2}(x) = e^{x}.$$

Dunque una soluzione particolare per $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = -3e^{-x} - 2e^{x}$ è

$$y_\star(x) = y_{\star 1}(x) + y_{\star 2}(x) = xe^{-x} + e^{x}$$

mentre la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x e^{-x} + e^x.$$

Imponiamo le condizioni:

$$y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0,$$

inoltre, dato che $y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} + e^{-x} - x e^{-x} + e^x$,

$$y'(0) = -c_1 + 2c_2 + 2 = 3.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ -c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottiene che $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -e^{-x} + x e^{-x} + e^x = e^{-x}(x-1) + e^x.$$

— ◇ —

16. Quali delle seguenti funzioni

$$y_a(x) = e^x(2x+3),\ y_b(x) = e^x(x^4 - x),\ y_c(x) = e^x(x^5 + 2),\ y_d(x) = e^x(2x^4 + 3)$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 24 e^x x^2\,?$$

R. Si potrebbe sostituire pazientemente le singole funzioni nell'equazione e verificare quando questa sia soddisfatta, ma in realtà alcune semplici osservazioni ci permetteranno di operare più rapidamente.
Il polinomio caratteristico $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ ha una soluzione $z = 1$ di molteplicità 2 e dunque la soluzione omogenea è

$$y_o(x) = e^x(c_1 x + c_2)$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Quindi possiamo togliere dalle funzioni proposte la parte omogenea e verificare ora quale delle funzioni *semplificate* è soluzione

$$\widetilde{y}_a(x) = 0,\ \widetilde{y}_b(x) = e^x x^4,\ \widetilde{y}_c(x) = e^x x^5,\ \widetilde{y}_d(x) = 2e^x x^4$$

Inoltre dato che alla funzione $f(x) = 24 e^x x^2$ possiamo associare proprio il numero complesso 1 la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = x^2 e^x(Ax^2 + Bx + C) = e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$$

dove A, B e C sono costanti opportune non tutte nulle.

Quindi $\widetilde{y}_a(x)$ e $\widetilde{y}_c(x)$ vanno escluse: la prima perché è zero e la seconda perché contiene un termine x^5 incompatibile con la forma di $y_\star$. Rimangono quindi da verificare solo $\widetilde{y}_b(x) = e^x x^4$ e $\widetilde{y}_d(x) = 2e^x x^4$. Basta fare i conti per $\widetilde{y}_b(x)$ perché per linearità per $\widetilde{y}_d(x) = 2\widetilde{y}_b(x)$ otterremo proprio il doppio:

$$(e^x x^4)'' - 2(e^x x^4)' + (e^x x^4) = 12e^x x^2$$

Siccome $f(x) = 2 \cdot 12e^x x^2$, solo la funzione $\widetilde{y}_d(x)$ risolve l'equazione data. Possiamo così concludere che tra le funzioni proposte solo $y_d(x)$ è una soluzione.

— ◇ —

17. Sia $y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 8e^x - 5 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} y(x)$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0$$

che ha solo una radice di molteplicità 2: -1. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x\, e^{-x}.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f_1(x) = 8e^x$ allora $a = 1$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = Ae^x.$$

Per $f_2(x) = -5$ allora $a = 0$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 0$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = B.$$

Dunque la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x} + Ae^x + B.$$

Prima di determinare i coefficienti impostiamo il calcolo del limite richiesto:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \left((c_1 x + c_2)e^{-2x} + A + Be^{-x}\right) = A.$$

Quindi l'unico coefficiente necessario è A. Determiniamolo

$$y''_{\star 1}(x) + 2y'_{\star 1}(x) + y_{\star 1}(x) = Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 4Ae^x = 8e^x.$$

Così $A = 2$ e limite vale 2. Si noti che il limite non dipende dalle condizioni iniziali.

— ⋄ —

18. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) - y(x) = 2e^{-2x} + 6x - 7 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)/x^2 = 0 \end{cases} .$$

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)/x$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^4 - 1 = 0$$

che ha quattro radici di molteplicità 1: 1, -1, i, $-i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = \cos x \quad \text{e} \quad y_4(x) = \sin x.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f_1(x) = 2e^{-2x}$ allora $a = -2$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = -2$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = Ae^{-2x}.$$

Per $f_2(x) = 6x - 7$ allora $a = 0$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 0$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Bx + C.$$

Dunque la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + Ae^{-2x} + Bx + C.$$

Prima di determinare i coefficienti imponiamo la condizione che la soluzione generale deve soddisfare:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)/x^2 = c_1 \cdot \lim_{x\to+\infty} e^x/x^2 = 0,$$

e quindi $c_1 = 0$. Si noti che i coefficienti c_2, c_3 e c_4 sono liberi e dunque il problema ha infinite soluzioni. Ora impostiamo il calcolo del limite richiesto

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)/x = B,$$

quindi il suo valore è lo stesso per tutte le soluzioni. Determiniamo l'unico coefficiente necessario:

$$y_{\star 2}^{(4)}(x) - y_{\star 2}(x) = -Bx - C = 6x - 7.$$

Così $B = -6$ e limite vale -6.

— ⋄ —

19. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)/x$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

che ha due radici complesse cooniugate: $-1+i$ e $-1-i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x}\cos x \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x}\sin x.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f(x) = xe^x$ allora $a = 1$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = e^x(Ax + B)$$

e sostituendo otteniamo

$$xe^x = y_\star''(x) + 2y_\star'(x) + 2y_\star(x) = e^x\left(5Ax + 4A + 5B\right).$$

Dunque $A = 1/5$ e $B = -4/25$ e la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^x(5x-4)/25.$$

Infine calcoliamo il limite richiesto

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)/x = A = \frac{1}{5}.$$

— ◇ —

20. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x/y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

R. Qui la funzione $a(x) = x$ mentre $b(y) = 1/y$. Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{-1}^{y(x)} y\,dy = \int_0^x x\,dx$$

e dunque

$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{y(x)} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{y^2(x)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

In questo caso nell'esplicitare la funzione $y(x)$ otteniamo:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2+1}.$$

Dato che $y(0) = -1$ si sceglie il segno negativo e quindi l'unica soluzione è

$$y(x) = -\sqrt{x^2+1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ⋄ —

21. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)\, y'(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quante sono le soluzioni?

R. Le variabili sono già separate, quindi basta integrare

$$\int_0^{y(x)} y\, dy = \int_0^x 1\, dx$$

e dunque

$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{y(x)} = \left[x\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{y^2(x)}{2} = x.$$

Per esplicitare la funzione $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione $y^2/2$:

$$y(x) = \pm\sqrt{2x}.$$

La condizione $y(0) = 0$ è soddisfatta sia da $y(x) = \sqrt{2x}$ sia da $y(x) = -\sqrt{2x}$. Dunque le soluzioni del problema sono due ed entrambe sono definite nell'intervallo $[0, +\infty)$.

— ⋄ —

22. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

R. In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = y^2$. Dato che $b(y_0) = 4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_0^x 1\, dx$$

e dunque
$$\left[-\frac{1}{y}\right]_2^{y(x)} = [x]_0^x$$
ossia
$$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{2} = x.$$
Per determinare la soluzione basta esplicitare la funzione $y(x)$:
$$y(x) = \frac{2}{1-2x}.$$
La soluzione è unica ed è definita sull'intervallo "massimale" contenuto del dominio della funzione $2/(1-2x)$ che contiene il punto $x_0 = 0$ ovvero $(-\infty, 1/2)$. Notiamo che se la condizione fosse stata $y(0) = 0$ allora $b(y_0) = 0$ e la soluzione sarebbe stata la soluzione stazionaria $y(x) = 0$.

— ◇ —

23. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'(x) + e^{-y(x)} = 1 \\ y(1) = \log 5 \end{cases}.$$

R. Risistemando i termini è facile riconoscere un'equazione differenziale a variabili separabili: per $x \neq 0$
$$y'(x) = \frac{1-e^{-y(x)}}{x}.$$
Così $a(x) = 1/x$ e $b(y) = 1 - e^{-y}$. Dato che $b(y_0) = 4/5 \neq 0$, la soluzione cercata risolve
$$\int_{\log 5}^{y(x)} \frac{1}{1-e^{-y}}\,dy = \int_{\log 5}^{y(x)} \frac{e^y}{e^y - 1}\,dy = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$
e dunque
$$[\log|e^y - 1|]_{\log 5}^{y(x)} = [\log|x|]_1^x$$
ossia
$$\log\left|e^{y(x)} - 1\right| - \log 4 = \log|x|.$$
Per determinare la soluzione basta esplicitare la funzione $y(x)$:
$$\log\left|e^{y(x)} - 1\right| = \log(4|x|)$$
e quindi abbiamo due possibilità
$$y(x) = \log(\pm 4|x| + 1).$$
Dato che $y(1) = \log 5$, il segno da prendere è quello positivo e quindi la soluzione è
$$y(x) = \log(4|x| + 1).$$

— ⋄ —

24. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -6 + 5y(x) - y^2(x) \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

e calcolare l'eventuale asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \to +\infty$.
R. In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = -6 + 5y - y^2 = -(y-3)(y-2)$. Dato che $b(y_0) = -2 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_4^{y(x)} \frac{-1}{(y-3)(y-2)}\,dy = \int_4^{y(x)} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-3}\right) = \int_1^x 1\,dx$$

e dunque

$$\left[\log\left|\frac{y-2}{y-3}\right|\right]_4^{y(x)} = [x]_1^x$$

ossia

$$\log\left|\frac{y(x)-2}{y(x)-3}\right| - \log 2 = x - 1.$$

Per determinare la soluzione è sufficiente esplicitare la funzione $y(x)$:

$$1 + \frac{1}{y(x)-3} = \frac{y(x)-2}{y(x)-3} = \pm e^{x-1+\log 2} = \pm 2e^{x-1},$$

e imponendo la condizione iniziale $y(1) = 4$ si ottiene

$$y(x) = 3 + \frac{1}{2e^{x-1} - 1} \quad \text{per } x > 1 - \log 2.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{2e^{x-1}-1}\right) = 3$$

l'asintoto richiesto è $y = 3$.

— ⋄ —

25. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

R. Qui la funzione $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = 1 + y^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int_0^x 2x\,dx$$

e dunque
$$\big[\arctan(y)\big]_0^{y(x)} = \big[x^2\big]_0^x$$
ossia
$$\arctan(y(x)) = x^2.$$
Per esplicitare la funzione $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione arcotangente:
$$y(x) = \tan(x^2) \quad \text{per } x \in (-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}).$$

— ◇ —

26. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{9\arctan(x)}{y(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$
e calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/\sqrt{x}$.

R. Qui $b(y) = 1/y$ e dato che $b(y_0) = 1/4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve
$$\int_4^{y(x)} y\,dy = 9\int_0^x \arctan x\,dx.$$
Il secondo integrale si risolve per parti
$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$
e così otteniamo
$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_4^{y(x)} = 9\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^x$$
ossia
$$\frac{y^2(x)}{2} - 8 = 9x\arctan x - \frac{9}{2}\log(1+x^2).$$
Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione $y(0) = 4$:
$$y(x) = \sqrt{18x\arctan x - 9\log(1+x^2) + 16} \quad \text{per } x \geq 0.$$
Dunque il limite richiesto vale
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{18\pi/2} = 3\sqrt{\pi}.$$

— ◇ —

27. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2+2} \cdot (\sin(y(x)))^3 \\ y(0) = 3\pi \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = \sin^3 y$ e $b(y_0) = \sin(3\pi)^3 = 0$ e quindi la soluzione è stazionaria:

$$y(x) = 3\pi.$$

— ⋄ —

28. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x) \cdot y(x) \\ y(1) = -e \end{cases}$$

e calcolare $y(e)$.
R. La soluzione cercata risolve

$$\int_{-e}^{y(x)} \frac{1}{y}\, dy = \int_1^x \log x\, dx.$$

Quindi

$$[\log|y|]_{-e}^{y(x)} = [x\log x - x]_1^x$$

ossia

$$\log|y(x)| - 1 = x\log x - x + 1.$$

Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione $y(1) = -e$:

$$y(x) = -e^{x\log x - x + 2} \quad \text{per } x > 0.$$

Dunque $y(e) = -e^{e-e+2} = -e^2$.

— ⋄ —

29. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \cdot (2e^{-y(x)} - 1) \\ y(0) = \log 3 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.
R. Qui la funzione $a(x) = x^2$ mentre $b(y) = 2e^{-y} - 1$. Dato che $b(y_0) = -1/3 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{1}{2e^{-y} - 1}\, dy = \int_{\log 3}^{y(x)} \frac{e^y}{2 - e^y}\, dy = -\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{1}{2 - e^y}\, d(2 - e^y) = \int_0^x x^2\, dx$$

e dunque

$$\Big[-\log|2-e^y|\Big]_{\log 3}^{y(x)} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x$$

ossia

$$\log|2-e^{y(x)}| = -\frac{x^3}{3}.$$

Esplicitiamo la funzione $y(x)$ tenendo conto della condizione iniziale:

$$y(x) = \log\left(e^{-x^3/3}+2\right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Così

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{-x^3/3}+2\right) = \log 2.$$

Quindi $y(x)$ converge asintoticamente alla soluzione stazionaria.

— ◇ —

30. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3\cos^2(x)\,\sin(x)\cdot y(x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = y^2$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_0^x 3(\cos x)^2\,\sin x\,dx = -\int_0^x 3(\cos x)^2\,d(\cos x)$$

e dunque

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{y(x)} = -\left[(\cos x)^3\right]_0^x$$

ossia

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = -(\cos x)^3 + 1.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{(\cos x)^3} \quad \text{per } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

— ◇ —

31. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x^2\sin(x^3) \\ y(\sqrt[3]{2\pi}) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to0^+} y(x)/x^5$.

R. L'equazione si riscrive come

$$(xy(x))' = x^2 \sin(x^3)$$

e integrando rispetto a x tra $\sqrt[3]{2\pi}$ e x otteniamo

$$[xy(x)]_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} = \int_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} x^2 \sin(x^3)\, dx$$

ossia, dato che $y(\sqrt[3]{2\pi}) = 0$,

$$xy(x) = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} \sin(x^3)\, d(x^3) = \frac{1}{3}\left[-\cos(x^3)\right]_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} = \frac{1-\cos(x^3)}{3}.$$

Così per $x \neq 0$

$$y(x) = \frac{1-\cos(x^3)}{3x}.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^3)}{3x^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-(1-(x^3)^2/2+o(x^6))}{3x^6} = \frac{1}{6}.$$

— ◇ —

32. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\log(x)e^{-y(x)}/x \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} y(x)$.

R. Separando le variabili e integrando otteniamo per $x > 0$

$$\int_0^{y(x)} e^y\, dy = -\int_1^x \frac{\log(x)}{x}\, dx = -\int_1^x \log(x)\, d(\log(x))$$

e quindi

$$e^{y(x)} - 1 = -\left(\log(x)\right)^2/2.$$

Allora la soluzione è

$$y(x) = \log\left(1 - \left(\log(x)\right)^2/2\right)$$

definita nell'intervallo massimale $(1/e^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}})$. Così

$$\lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} y(x) = \lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} \log\left(1 - \left(\log(x)\right)^2/2\right) = -\infty.$$

— ◇ —

33. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{2x-3y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x$.

R. Qui $b(y) = e^{-3y}$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_0^{y(x)} e^{3y}\, dy = \int_0^x e^{2x}\, dx$$

e dunque

$$\left[\frac{e^{3y}}{3}\right]_0^{y(x)} = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{e^{3y(x)}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3e^{2x}-1}{2}\right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Ora calcoliamo il limite richiesto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3e^{2x}-1}{2}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{2}e^{2x}\right)}{3x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{3}{2} + 2x}{3x} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

— ⋄ —

34. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)\cdot(y(x)-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = y - 1$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{y-1}\, dy = \int_0^x (x-1)\, dx$$

e dunque

$$\big[\log|y-1|\big]_2^{y(x)} = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^x$$

ossia
$$\log |y(x) - 1| = \frac{x^2}{2} - x.$$
Cominciamo ad esplicitare la funzione $y(x)$
$$|y(x) - 1| = e^{\frac{x^2}{2} - x}.$$
e togliendo il valore assoluto abbiamo che
$$y(x) = 1 \pm e^{\frac{x^2}{2} - x}.$$
Siccome $y(0) = 2$ dobbiamo scegliere il segno positivo. Allora la soluzione cercata è
$$y(x) = 1 + e^{\frac{x^2}{2} - x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

35. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{3}{3x+1} \cdot \dfrac{2 - e^{y(x)}}{e^{y(x)}} \\ y(0) = \log 3 \end{cases}$$
e determinare $y(1)$.
R. Qui $b(y) = (2 - e^y)/e^y$ e $b(y_0) = -1/3 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa
$$\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{e^y}{2 - e^y}\, dy = \int_0^x \frac{3}{3x+1}\, dx$$
e così
$$-\big[\log |e^y - 2|\big]_{\log 3}^{y(x)} = \big[\log |3x + 1|\big]_0^x$$
ossia
$$\frac{1}{e^{y(x)} - 2} = \pm(3x + 1).$$
Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione iniziale $y(0) = \log 3$:
$$y(x) = \log\left(2 + \frac{1}{3x+1}\right) \quad \text{per } x > -1/3.$$
Quindi $y(1) = \log(9/4) = 2\log(3/2)$.