Ejercicios 9.4

Determine si las series de los Ejercicios 1-12 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{20n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 + 33}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$

12. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\pi}{\ln\ln n}$

En las series de los Ejercicios 13-16, calcule el mínimo entero n que asegura que la suma parcial s_n se aproxima a la suma s de la serie con un error menor que 0,001 en valor absoluto.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{n!}$

Determine los valores de x para los que las series de los Ejercicios 17-24 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$

***25.** ¿Se puede aplicar directamente el test de las series alternantes a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\operatorname{sen}(n\pi/2)$? Determine si la serie converge.

***26.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a $a_n = 10/n^2$ para n par y a $a_n = -1/10n^3$ para n impar.

***27.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique su respuesta en el caso de verdaderas o dé un contraejemplo en el caso de falsas.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolutamente.

***28.** (a) Utilice un argumento basado en la suma de Riemann para demostrar que

$$\ln n! \geqslant \int_1^n \ln t\, dt = n\ln n - n + 1$$

(b) ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? (*Sugerencia*: Utilice primero el test de la razón. Para probar los casos donde $\rho = 1$, puede resultar de utilidad la inecuación del apartado (a)).

***29.** ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,x^n}{2^{2n}(n!)^2}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 42 de la Sección 9.3.

***30.** Desarrolle procedimientos para reordenar los términos de la serie armónica alternante de forma que la serie reordenada (a) diverja a ∞, (b) converja a -2.

9.5 Series de potencias

Esta sección trata de un tipo especial de series infinitas denominadas *series de potencias*, que pueden verse como un polinomio de grado infinito.

DEFINICIÓN 7 Series de potencias

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en potencias de $x = c$** o **serie de potencias alrededor de c**. Las constantes a_0, a_1, a_2, ... se denominan **coeficientes** de la serie de potencias.

Como los términos de una serie de potencias son funciones de una variable x, la serie puede converger o no converger para cada valor de x. En aquellos valores de x donde la serie converge, la suma define una función de x. Por ejemplo, si $-1 < x < 1$, entonces

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

La serie geométrica del miembro izquierdo es una *representación* en serie de potencias de la función $1/(1-x)$ en potencias de x (o alrededor de 0). Nótese que la representación sólo es válida en el intervalo abierto $(-1, 1)$, incluso aunque $1/(1-x)$ esté definida para todos los números reales x excepto $x = 1$. Para $x = -1$ y $|x| > 1$ la serie no converge, por lo que no puede representar a $1/(1-x)$ en estos puntos.

El punto c es el **centro de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. La serie converge seguro (a a_0) en $x = c$ (todos los términos excepto posiblemente el primero son 0). El Teorema 17, que veremos posteriormente, demuestra que si la serie converge en algún otro lugar, entonces converge en un intervalo (posiblemente infinito) centrado en $x = c$, y converge absolutamente en todos los puntos de ese intervalo excepto posiblemente en uno de sus extremos o ambos si el intervalo es finito. La serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

es un ejemplo de este comportamiento. Su centro de convergencia es $c = 0$, y converge sólo en el intervalo $(-1, 1)$, centrado en 0. La convergencia es absoluta en todos los puntos del intervalo. Otro ejemplo es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-5)^n = \frac{x-5}{2} + \frac{(x-5)^2}{2 \times 2^2} + \frac{(x-5)^3}{3 \times 2^3} + \cdots$$

que se estudió en el Ejemplo 4 de la Sección 9.4. Allí demostramos que esta serie converge en el intervalo $[3, 7)$, un intervalo de centro $x = 5$, y que la convergencia es absoluta en el intervalo abierto $(3, 7)$, pero sólo es condicional en el extremo $x = 3$.

TEOREMA 17 Para cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se debe cumplir una de las siguientes alternativas:

(i) La serie puede converger sólo en $x = c$.
(ii) La serie puede converger en cualquier número real x.
(iii) Puede existir un número real positivo R tal que la serie converge en todo valor de x que cumple $|x-c| < R$ y diverge en todo valor de x que cumple $|x-c| > R$. En este caso, la serie puede converger o no converger en cada uno de los dos *extremos* $x = c - R$ y $x = c + R$.

En cada uno de estos casos la convergencia es absoluta excepto, posiblemente, en los extremos $x = c - R$ y $x = c + R$ en el caso (iii).

DEMOSTRACIÓN Observamos anteriormente que toda serie de potencias converge en su centro de convergencia; sólo el primer término puede ser distinto de cero, por lo que la convergencia es absoluta. Para demostrar el resto de este teorema, es suficiente demostrar que si la serie converge en cualquier número $x_0 \neq c$, entonces converge absolutamente en todo número x más cercano a c que x_0, es decir, en todo valor de x que cumpla $|x - c| < |x_0 - c|$. Esto significa que la convergencia en cualquier valor $x_0 \neq c$ implica convergencia absoluta en $(c - x_0,\ c + x_0)$, por lo que el conjunto de puntos x donde la serie es convergente debe ser un intervalo centrado en c.

Supongamos, por tanto, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - c)^n$ converge. Entonces $\lim a_n(x_0 - c)^n = 0$, por lo que $|a_n(x_0 - c)^n| \leqslant K$ para todo n, siendo K alguna constante (Teorema 1 de la Sección 9.1). Si $r = |x - c|/|x_0 - c| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_0 - c)^n| \left|\frac{x - c}{x_0 - c}\right|^n \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{K}{1 - r} < \infty$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge absolutamente.

Por el Teorema 17, el conjunto de valores x para los que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge es un intervalo centrado en $x = c$. Denominaremos a este intervalo el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias. Debe tener una de las siguientes formas:

(i) Un punto aislado $x = c$ (es decir, un intervalo cerrado degenerado $[c, c]$).
(ii) La recta completa $(-\infty, \infty)$.
(iii) Un intervalo finito centrado en c:

$$[c - R,\ c + R],\ \text{o}\ [c - R,\ c + R),\ \text{o}\ (c - R,\ c + R],\ \text{o}\ (c - R,\ c + R)$$

El número R en (iii) se denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias. En el caso (i) se dice que el radio de convergencia es $R = 0$; en el caso (ii) es $R = \infty$.

El radio de convergencia, R, se puede obtener frecuentemente aplicando el test de la razón a la serie de potencias: si

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x - c)^{n+1}}{a_n(x - c)^n}\right| = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) |x - c|$$

existe, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge absolutamente donde sea $\rho < 1$, es decir, donde

$$|x - c| < R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

La serie diverge si $|x - c| > R$.

Radio de convergencia

Supongamos que $L = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe o es ∞. En ese caso, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ tiene como radio de convergencia $R = 1/L$ (si $L = 0$, entonces $R = \infty$; si $L = \infty$, entonces $R = 0$).

Ejemplo 1 Determine el centro, el radio y el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x + 5)^n}{(n^2 + 1)3^n}$$

Solución La serie se puede expresar como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1}\left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

El centro de convergencia es $x = -5/2$. El radio de convergencia, R, está dado por

$$\frac{1}{R} = L = \lim\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}}\right| = \lim\frac{2}{3}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, $R = 3/2$. La serie converge absolutamente en $(-5/2 - 3/2, -5/2 + 3/2) = (-4, -1)$ y diverge en $(-\infty, -4)$ y en $(-1, \infty)$. En $x = -1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2+1)$; en $x = -4$, es $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n^2+1)$. Ambas series convergen (absolutamente). El intervalo de convergencia de la serie de potencias dada es, por tanto, $[-4, -1]$.

Ejemplo 2 Determine los radios de convergencia de las series

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ y (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución

(a) $L = \left|\lim \frac{1}{(n+1)!}\Big/\frac{1}{n!}\right| = \lim\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\frac{1}{n+1} = 0$. Por tanto, $R = \infty$.

Esta serie converge (absolutamente) para todo x. La suma es e^x, como demostraremos en el Ejemplo 1 de la siguiente sección.

(b) $L = \left|\lim\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim(n+1) = \infty$. Por tanto, $R = 0$.

Esta serie converge sólo en su centro de convergencia $x = 0$.

Operaciones algebraicas en series de potencias

Para simplificar la presentación que sigue, consideraremos sólo series de potencias con centro de convergencia 0, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Todas las propiedades que demostraremos para estas series se extienden automáticamente a series de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-c)^n$, mediante el cambio de variable $x = y - c$.

Observemos primero que las series que tienen el mismo centro de convergencia se pueden sumar o restar en cualquier intervalo que sea común a sus intervalos de convergencia. El siguiente teorema es una consecuencia simple del Teorema 7 de la Sección 9.2, y no requiere demostración.

TEOREMA 18 Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series de potencias con radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y sea c una constante. Entonces,

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)\, x^n$ tiene radio de convergencia R_a, y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

siempre que la serie de la derecha converja.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$ tiene radio de convergencia R al menos tan grande como el mínimo de R_a y R_b ($R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$), y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

siempre que las dos series de la derecha converjan.

La situación respecto a la multiplicación y división de series de potencias es más complicada. Sólo mencionaremos los resultados, sin demostrarlos. Se pueden encontrar más detalles en cualquier libro de texto sobre análisis matemático.

La multiplicación de la forma

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)&(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)\\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots\end{aligned}$$

nos lleva a conjeturar la fórmula

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

siendo

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se denomina **producto de Cauchy** de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Como la suma, el producto de Cauchy tiene también un radio de convergencia como mínimo igual al menor de los de las series que se multiplican.

Ejemplo 3 Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se cumple para $-1 < x < 1$, podemos determinar una representación en serie de potencias de $1/(1-x)^2$ tomando el producto de Cauchy de esta serie consigo misma. Como $a_n = b_n = 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ tenemos que

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1 \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

que debe cumplirse también para $-1 < x < 1$. La misma serie se puede obtener por multiplicación directa de las series:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots \\
\times & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots \\
\hline
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots \\
 & & & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots \\
 & & & & & x^2 & + & x^3 & + \cdots \\
 & & & & & & & x^3 & + \cdots \\
 & & & & & & & & \cdots \\
\hline
 & 1 & + & 2x & + & 3x^2 & + & 4x^3 & + \cdots
\end{array}
$$

Las series de potencias también se pueden dividir, pero no existe ninguna regla simple para determinar los coeficientes de la serie cociente. El radio de convergencia de la serie cociente será como mínimo el menor de los tres números R_1, R_2 y R_3, siendo R_1 y R_2 los radios de convergencia de las series numerador y denominador y R_3 la distancia desde el centro de convergencia al *número complejo* más cercano donde la serie denominador tenga una suma igual a 0. Para ilustrar este punto, obsérvese que 1 y $1 - x$ son dos series de potencias con radio de convergencia infinito:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \qquad \text{para todo } x$$
$$1 - x = 1 - \ x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \qquad \text{para todo } x$$

Su cociente, $1/(1 - x)$, sin embargo, tiene un radio de convergencia de 1, la distancia del centro de convergencia $x = 0$ al punto $x = 1$ donde el denominador se hace cero:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1$$

Diferenciación e integración de series de potencias

Si una serie de potencias tiene radio de convergencia positivo, se puede diferenciar o integrar término a término. La serie resultante convergerá a la derivada o integral apropiada de la suma de la serie original en todas partes excepto, posiblemente, en los extremos del intervalo de convergencia de la serie original. Este hecho muy importante asegura que, a efectos de cálculo, las series de potencias se comportan como si fueran polinomios, que son las funciones más sencillas de diferenciar e integrar. Formalizaremos las propiedades de la diferenciación y la integración de series de potencias en el siguiente teorema.

TEOREMA 19 **Diferenciación e integración término a término de series de potencias**

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a la suma $f(x)$ en un intervalo $(-R, R)$, siendo $R > 0$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \qquad (-R < x < R)$$

entonces f es diferenciable en el intervalo $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \qquad (-R < x < R)$$

Además, f es integrable en cualquier subintervalo cerrado de $(-R, R)$, y si $|x| < R$, entonces

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots$$

Aunque comprender lo que dice este teorema es muy importante para lo que sigue, entender la demostración no lo es. El lector puede saltar la demostración y continuar a las aplicaciones.

DEMOSTRACIÓN Sea x un número que satisface $-R < x < R$ y escójase $H > 0$ tal que $|x| + H < R$. Por el Teorema 17 tenemos entonces que[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n = K < \infty$$

El Teorema Binomial (*véase* la Sección 9.9) demuestra que si $n \geqslant 1$, entonces

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k$$

Por tanto, si $|h| \leqslant H$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(x + h)^n - x^n - nx^{n-1}h| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \frac{|h|^k}{H^k} H^k \\ &\leqslant \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k \\ &= \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^n \end{aligned}$$

Además,

$$|nx^{n-1}| = \frac{n|x|^{n-1}H}{H} \leqslant \frac{1}{H} (|x| + H)^n$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |na_nx^{n-1}| \leqslant \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n = \frac{K}{H} < \infty$$

con lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ converge (absolutamente), por ejemplo, a $g(x)$. Ahora

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - g(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x + h)^n - a_nx^n - na_nx^{n-1}h}{h} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |(x + h)^n - x^n - nx^{n-1}h| \\ &\leqslant \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n \leqslant \frac{K|h|}{H^2} \end{aligned}$$

Haciendo que h tienda a cero, se obtiene $|f'(x) - g(x)| \leqslant 0$, por lo que $f'(x) = g(x)$, como queríamos demostrar.

Obsérvese ahora que, como $|a_n/(n + 1)| \leqslant |a_n|$, la serie

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1} x^{n+1}$$

[1] Esta demostración se debe a R. Výborný, *American Mathematical Monthly*, abril 1987.

converge (absolutamente) al menos en el intervalo $(-R, R)$. Utilizando el resultado de la diferenciación demostrado anteriormente, se obtiene

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

Como $h(0) = 0$, tenemos que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x h'(t)\, dt = h(t)\Big|_0^x = h(x)$$

como queríamos demostrar.

En conjunto, estos resultados implican que una serie diferenciada o integrada término a término tendrá el mismo radio de convergencia que la serie original. De hecho, como ilustran los siguientes ejemplos, el intervalo de convergencia de la serie diferenciada es el mismo que el de la serie original, excepto por la *posible* pérdida de uno de los extremos o de ambos si la serie original converge en los extremos de su intervalo de convergencia. De forma similar, la serie integrada convergerá en todo el intervalo de convergencia de la serie original y, posiblemente, en uno de los extremos del intervalo o en ambos, incluso si la serie original no convergía en los extremos.

Al ser diferenciable en el intervalo $(-R, R)$, siendo R el radio de convergencia, la suma $f(x)$ de una serie de potencias es necesariamente continua en dicho intervalo abierto. Si la serie converge en uno de los extremos o en ambos, $-R$ y R, entonces f es también continua (por un lado) hasta estos extremos. Este resultado se establece formalmente en el teorema que sigue. No lo demostraremos aquí; el lector interesado en una demostración puede consultar libros de texto de análisis matemático.

TEOREMA 20 **Teorema de Abel**

La suma de una serie de potencias es una función continua en todo el intervalo de convergencia de la serie. En particular, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge para algún $R > 0$, entonces

$$\lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Y si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ converge, entonces

$$\lim_{x \to -R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

Los siguientes ejemplos muestran la forma en la que se aplican los teoremas anteriores para obtener una representación en serie de potencias de funciones.

Ejemplo 4 Obtenga las representaciones en series de potencias de las funciones

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, (b) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$, y (c) $\ln(1+x)$

empezando con la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

y utilizando diferenciación, integración y sustitución. ¿Dónde es válida cada serie?

Solución

(a) Diferenciando la serie geométrica término a término se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Este resultado es el mismo obtenido mediante multiplicación de series en el Ejemplo 3 anterior.

(b) Diferenciando otra vez se obtiene, para $-1 < x < 1$,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = (1 \times 2) + (2 \times 3)x + (3 \times 4)x^2 + \cdots$$

Dividiendo ahora por 2:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

(c) Sustituyendo x por $-t$ en la serie geométrica original:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

Integrando desde 0 hasta x, siendo $|x| < 1$, se obtiene

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

Nótese que la última serie converge (condicionalmente) en el extremo $x = 1$, así como en el intervalo $-1 < x < 1$. Como $\ln(1+x)$ es continua en $x = 1$, el Teorema 20 nos asegura que la serie debe converger a esa función también en $x = 1$. Por tanto, en particular, la serie armónica alternante converge a $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Sin embargo, ésta no sería una fórmula muy útil para calcular el valor de $\ln 2$ (¿por qué no?). ■

Ejemplo 5 Utilice la serie geométrica del ejemplo anterior para obtener una representación en serie de potencias de $\tan^{-1} x$.

Solución Sustituimos x por $-t^2$ en la serie geométrica. Como $0 \leqslant t^2 < 1$ siempre que $-1 < t < 1$, se obtiene

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

Integrando ahora desde 0 hasta x, con $|x| < 1$:

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots)\, dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

Nótese, sin embargo, que la serie también converge (condicionalmente) en $x = -1$ y 1. Como $\tan^{-1}$ es continua en ± 1, la representación en serie anterior de $\tan^{-1} x$ también vale para esos valores, por el Teorema 20. Haciendo $x = 1$ se obtiene otro interesante resultado:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

De nuevo, ésta no sería una buena fórmula para calcular un valor numérico de π (¿por qué no?). ■

Ejemplo 6 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, calculando primero la suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$$

Solución Obsérvese en el Ejemplo 4(a) cómo el proceso de diferenciar la serie geométrica produce una serie con coeficientes 1, 2, 3, ... Partiendo de la serie obtenida para $1/(1-x)^2$ y multiplicándola por x se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Diferenciando ahora de nuevo para obtener una serie con coeficientes 1^2, 2^2, 3^2, ...:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots = \frac{d}{dx}\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Multiplicando de nuevo por x se obtiene la serie de potencias deseada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

La diferenciación y la multiplicación por x no cambian el radio de convergencia, por lo que esta serie converge a la función indicada para $-1 < x < 1$. Haciendo $x = 1/2$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$$

■

El siguiente ejemplo ilustra cómo se puede utilizar sustitución para obtener representaciones en series de potencias de funciones con centros de convergencia diferentes de 0.

Ejemplo 7 Calcule una representación en serie de $f(x) = 1/(2+x)$, en potencias de $x-1$. ¿Cuál es el intervalo de convergencia de esta serie?

Solución Sea $t = x - 1$, de forma que $x = t + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{3^2} - \frac{t^3}{3^3} + \cdots\right) && (-1 < t/3 < 1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} && (-3 < t < 3) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} && (-2 < x < 4)
\end{aligned}$$

Nótese que el radio de convergencia de esta serie es 3, que es la distancia del centro de convergencia, 1, al punto -2 donde el denominador es 0. Esto lo podríamos haber predicho con anterioridad. ■

Cálculos con Maple

Maple puede calcular las sumas de muchos tipos de series, incluyendo las series numéricas absolutamente y condicionalmente convergentes, y muchas series de potencias. Incluso cuando no puede obtener la suma formal de una serie (convergente), Maple puede proporcionar una aproximación decimal con la precisión indicada por el valor actual de su variable `Digits`, que por defecto es 10. He aquí algunos ejemplos.

```
> sum(n^4/2^n, n=1..infinity) ;
```

$$150$$

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity) ;
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

```
> sum(exp(-n^2), n=0..infinity) ;
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-n^2)}$$

```
> evalf(%) ;
```

$$1{,}386\,318\,602$$

```
> f := x -> sum(x^(n-1)/n, n=1..infinity) ;
```

$$f := x \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{(n-1)}}{n}\right)$$

```
> f(1) ; f(-1) ; f(1/2) ;
```

$$\infty$$
$$\ln(2)$$
$$2\ln(2)$$

Ejercicios 9.5

Determine el centro, radio e intervalo de convergencia de las series de potencias de los Ejercicios 1-8.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3n(x+1)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}x^n$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+5^n)}{n!}x^n$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{n^n}$

9. Utilice multiplicación de series para obtener una representación en serie de potencias de $1/(1-x)^3$ válida en el intervalo $(-1, 1)$.

10. Determine el producto de Cauchy de las series $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ y $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$. ¿En qué intervalo y a qué función converge la serie producto?

11. Determine el desarrollo en serie de potencias de $1/(1-x)^2$ dividiendo formalmente 1 por $1 - 2x + x^2$.

Partiendo de la representación en serie de potencias,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad (-1 < x < 1)$$

determine representaciones en serie de potencias de las funciones que se indican en los Ejercicios 12-20. ¿En qué intervalo es válida cada representación?

12. $\dfrac{1}{2-x}$ en potencias de x

13. $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en potencias de x

14. $\dfrac{1}{1+2x}$ en potencias de x

15. $\ln(2-x)$ en potencias de x

16. $\dfrac{1}{x}$ en potencias de $x-1$

17. $\dfrac{1}{x^2}$ en potencias de $x+2$

18. $\dfrac{1-x}{1+x}$ en potencias de x

19. $\dfrac{x^3}{1-2x^2}$ en potencias de x

20. $\ln x$ en potencias de $x-4$

Determine el intervalo de convergencia y la suma de las series de los Ejercicios 21-26.

21. $1-4x+16x^2-64x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n$

***22.** $3+4x+5x^2+6x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$

***23.** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+3}$

***24.** $1\times 3-2\times 4x+3\times 5x^2-4\times 6x^3+\cdots$
$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n$

***25.** $2+4x^2+6x^4+8x^6+10x^8+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^{2n}$

***26.** $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{x^6}{4}+\dfrac{x^8}{5}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$

Utilice la técnica (o el resultado) del Ejemplo 6 para calcular las sumas de las series numéricas de los Ejercicios 27-32.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$

***29.** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{\pi^n}$

***30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$

32. $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$

9.6 Series de Taylor y Maclaurin

Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ tiene radio de convergencia positivo R, entonces la suma de la serie define una función $f(x)$ en el intervalo $(c-R,\ c+R)$. Se dice entonces que la serie de potencias es una **representación** de $f(x)$ en ese intervalo. ¿Qué relación existe entre la función $f(x)$ y los coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ de la serie de potencias? El teorema que sigue responde a esta pregunta.

TEOREMA 21 Supongamos que la serie

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$

converge a $f(x)$ para $c-R<x<c+R$, siendo $R>0$. Entonces,

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \text{para } k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

DEMOSTRACIÓN Esta demostración requiere diferenciar la serie de $f(x)$ término a término varias veces, un proceso justificado por el Teorema 19 (reformulado adecuadamente en potencias de $x-c$):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}$$

$$= k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x-c) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x-c)^2 + \cdots$$

Cada serie converge para $c - R < x < c + R$. Haciendo $x = c$ se obtiene $f^{(k)}(c) = k!a_k$, lo que demuestra el teorema.

El Teorema 21 demuestra que una función $f(x)$ que tenga una representación en serie de potencias con centro en c y radio de convergencia positivo debe tener derivadas de todos los órdenes en un intervalo alrededor de $x = c$, y sólo puede tener una representación en forma de serie de potencias en potencias de $x - c$, concretamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

Esta serie se denomina serie de Taylor o, si $c = 0$, serie de Maclaurin.

DEFINICIÓN 8 Series de Taylor y de Maclaurin

Si $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$ (es decir, si $f^{(k)}(c)$ existe para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$), entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

se denomina **serie de Taylor de f alrededor de c** (o **serie de Taylor de f en potencias de $x - c$**). Si $c = 0$, se utiliza generalmente la expresión **serie de Maclaurin** en vez de serie de Taylor.

Nótese que las sumas parciales de la serie de Taylor (o de Maclaurin) son los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) estudiados en la Sección 4.8.

La serie de Taylor es una serie de potencias tal como se ha definido en la sección anterior. El Teorema 17 implica que c debe ser el centro de cualquier intervalo en el que esa serie converja, pero la definición de serie de Taylor no exige que la serie deba converger en ninguna parte, excepto en el punto $x = c$, donde la serie es simplemente $f(c) + 0 + 0 + \cdots$. La serie existe siempre que todas las derivadas de f existan en $x = c$. En la práctica esto significa que todas las derivadas deben existir en un intervalo abierto que contenga a $x = c$ (¿por qué?). Sin embargo, la serie puede no converger en ninguna parte excepto en $x = c$, y si converge en alguna otra parte, puede converger a algo distinto de $f(x)$ (*véase* el Ejercicio 40 al final de esta sección donde se presenta un ejemplo en el que esto sucede). Si la serie de Taylor converge a $f(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, entonces se dice que f es analítica en c.

DEFINICIÓN 9 Funciones analíticas

Se dice que una función f es **analítica en c** si tiene una serie de Taylor en c y dicha serie converge a $f(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si f es analítica en todos los puntos de un intervalo abierto, se dice que es analítica en dicho intervalo.

La mayoría de las funciones elementales que se encuentran en cálculo, pero no todas, son analíticas siempre que tengan derivadas de todos los órdenes. Por otra parte, siempre que una serie de potencias en potencias de $x - c$ converja para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contenga a c, su suma $f(x)$ será analítica en c, y la serie dada será la serie de Taylor de f alrededor de c.

Series de Maclaurin de algunas funciones elementales

El cálculo de las series de Taylor y de Maclaurin de una función f aplicando directamente la Definición 8 sólo es práctico cuando se puede obtener una fórmula para la n-ésima derivada de f. Ejemplos de estas funciones son $(ax + b)^r$, e^{ax+b}, $\ln(ax + b)$, $\operatorname{sen}(ax + b)$, $\cos(ax + b)$, y sumas de dichas funciones.

Ejemplo 1 Calcule la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = c$. ¿Dónde converge la serie a e^x? ¿Dónde es analítica e^x? ¿Cuál es la serie de Maclaurin de e^x?

Solución Como todas las derivadas de $f(x) = e^x$ son e^x, tenemos que $f^{(n)}(c) = e^c$ para todo entero $n \geqslant 0$. Por tanto, la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = c$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

El radio de convergencia R de esta serie está dado por

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^c/(n+1)!}{e^c/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = \infty$ y la serie converge para todo x. Supongamos que la suma es $g(x)$:

$$g(x) = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Por el Teorema 19, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 + e^c + \frac{e^c}{2!}2(x-c) + \frac{e^c}{3!}3(x-c)^2 + \cdots \\ &= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \cdots = g(x) \end{aligned}$$

Además, $g(c) = e^c + 0 + 0 + \cdots = e^c$. Como $g(x)$ cumple la ecuación diferencial $g'(x) = g(x)$ del crecimiento exponencial, tenemos que $g(x) = Ce^x$. Sustituyendo $x = c$ se obtiene $e^c = g(c) = Ce^c$, por lo que $C = 1$. Entonces, la serie de Taylor de e^x en potencias de $x - c$ converge a e^x para todo número real x:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n \\ &= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots \qquad \text{(para todo } x) \end{aligned}$$

En particular, e^x es analítica en toda la recta real $\mathbb{R}$. Haciendo $c = 0$ se obtiene la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de (a) $\operatorname{sen} x$ y (b) $\cos x$. ¿Dónde converge cada serie?

Solución Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces tenemos que $f(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= 1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Así, la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$ es

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Hemos denominado $g(x)$ a la suma, ya que todavía no sabemos si la serie converge a $\operatorname{sen} x$. La serie converge para todo x por el test de la razón:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} x^{2(n+1)+1}}{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} |x|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos diferenciar dos veces la función $g(x)$ y obtener

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$g''(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots = -g(x)$$

Por tanto, $g(x)$ satisface la ecuación diferencial $g''(x) + g(x) = 0$ del movimiento armónico simple. La solución general de esta ecuación, como se observó en la Sección 3.7, es

$$g(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Obsérvese, a partir de la serie, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$. Estos valores determinan que $A = 0$ y $B = 1$. Por consiguiente, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = \cos x$ para todo x.

En definitiva, hemos demostrado que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

El Teorema 21 demuestra que podemos utilizar todos los medios disponibles para calcular una serie de potencias que converja a una función dada en un intervalo, y la serie obtenida resultará ser la serie de Taylor. En la Sección 9.5 se obtuvieron varias series a partir de la serie geométrica. Entre ellas:

Algunas series de Maclaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Estas series, junto con los intervalos donde convergen, se utilizarán frecuentemente de ahora en adelante, por lo que sería conveniente memorizarlas.

Otras series de Taylor y Maclaurin

Las series se pueden combinar de diversas formas para generar nuevas series. Por ejemplo, podemos calcular la serie de Maclaurin de e^{-x} sustituyendo x por $-x$ en la serie de e^x:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x)$$

Las series de e^x y e^{-x} se pueden restar o sumar, y los resultados dividirse por 2 para obtener las series de Maclaurin de las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x)$$

Observación Obsérvese la semejanza de las series de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{senh} x$, y las de $\cos x$ y $\cosh x$. Si utilizáramos números complejos (números de la forma $z = x + iy$, siendo $i^2 = -1$ y x e y reales; *véase* el Apéndice I) como argumentos de nuestras funciones, y si hubiéramos demostrado que las operaciones sobre series se pueden aplicar a series de números complejos, veríamos que $\cos x = \cosh(ix)$ y $\operatorname{sen} x = -i \operatorname{senh}(ix)$. De hecho, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, por lo que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Estas fórmulas aparecen en el estudio de funciones de variable compleja (*véase* el Apéndice II); desde el punto de vista complejo, las funciones trigonométrica y exponencial son simplemente diferentes manifestaciones de la misma función básica, la exponencial compleja $e^z = e^{x+iy}$. Aquí nos contentaremos simplemente con mencionar las interesantes relaciones anteriores e invitar al lector a verificarlas formalmente calculando las series (estos cálculos formales no constituyen por supuesto una demostración, ya que no hemos establecido las reglas que hay que aplicar en series de números complejos).

Ejemplo 3 Obtenga las series de Maclaurin de las siguientes funciones:

(a) $e^{-x^2/3}$, (b) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$, (c) $\operatorname{sen}^2 x$.

Solución

(a) Sustituimos x por $-x^2/3$ en la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^{-x^2/3} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!} x^{2n} \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

(b) Para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}$$

Nótese que $f(x) = (\operatorname{sen}(x^2))/x$ no está definida en $x = 0$, pero tiene límite (concretamente 0) cuando x tiende a 0. Si definimos $f(0) = 0$ (la extensión continua de $f(x)$ a $x = 0$), entonces la serie converge a $f(x)$ para todo x.

(c) Utilizaremos una igualdad trigonométrica para expresar $\operatorname{sen}^2 x$ en función de $\cos 2x$ y utilizaremos después la serie de Maclaurin de $\cos x$ sustituyendo x por $2x$.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \qquad \text{(para todo } x \text{ real)}$$

Las series de Taylor alrededor de puntos distintos de 0 se pueden obtener muchas veces a partir de series de Maclaurin conocidas mediante un cambio de variable.

Ejemplo 4 Calcule la serie de Taylor de $\ln x$ en potencias de $x - 2$. ¿Dónde converge la serie a $\ln x$?

Solución Nótese que si $t = (x - 2)/2$, entonces

$$\ln x = \ln(2 + (x - 2)) = \ln\left[2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln(1 + t)$$

Utilizamos la serie de Maclaurin conocida de $\ln(1+t)$:

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln 2 + \ln(1+t)\\ &= \ln 2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots\\ &= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2\times 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3\times 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4\times 2^4} + \cdots\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n\end{aligned}$$

Como la serie de $\ln(1+t)$ es válida para $-1 < t \leqslant 1$, la serie de $\ln x$ es válida para $-1 < (x-2)/2 \leqslant 1$, es decir, para $0 < x \leqslant 4$.

Ejemplo 5 Calcule la serie de Taylor de $\cos x$ alrededor de $\pi/3$. ¿Dónde es válida la serie?

Solución Utilizamos la fórmula de suma del coseno:

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots\right]\\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots\right]\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots\end{aligned}$$

Esta representación en serie es válida para todo x. Un cálculo similar permitiría calcular el desarrollo de $\cos x$ o $\operatorname{sen} x$ en potencias de $x - c$ para todo c real; ambas funciones son analíticas en todos los puntos de la recta real.

Algunas veces es muy difícil, si no imposible, obtener una fórmula del término general de una serie de Maclaurin o de Taylor. En estos casos, en general, es todavía posible obtener algunos términos iniciales, antes de que los cálculos se hagan demasiado complicados. Si hubiéramos intentado resolver el Ejemplo 3(c) multiplicando por sí misma la serie de $\operatorname{sen} x$ nos hubiéramos encontrado en esta situación. Esto puede ocurrir también cuando es necesario sustituir una serie en otra o dividir una serie por otra.

Ejemplo 6 Obtenga los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de (a) $\tan x$ y (b) $\ln\cos x$.

Solución

(a) $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$. Podemos obtener los tres primeros términos de la serie de Maclaurin de $\tan x$ dividiendo la serie de $\cos x$ por la de $\operatorname{sen} x$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline
1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots \\
 & x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} - \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \cdots \\
 & \qquad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad \dfrac{2x^5}{15} - \cdots \\
 & \qquad\qquad \dfrac{2x^5}{15} - \cdots \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Por tanto, $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots$.

No es fácil obtener todos los términos de la serie; sólo con un considerable esfuerzo de cómputo se pueden llegar a obtener más términos de los que ya hemos obtenido. La serie de Maclaurin de $\tan x$ converge para $|x| < \pi/2$, pero no podemos demostrarlo con las técnicas de que disponemos hasta ahora (eso es así porque el número complejo $z = x + iy$ más cercano a 0 donde el «denominador» de $\tan z$, que es $\cos z$, es cero, es, de hecho, el valor real $z = \pi/2$).

(b)
$$
\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^3 - \cdots \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \cdots\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + \cdots\right) - \cdots \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots
\end{aligned}
$$

Nótese que en cada etapa del cálculo sólo hemos utilizado los términos suficientes para asegurar que podríamos calcular todos los términos en potencias hasta x^6. Como $\ln\cos x$ es una función par, su serie de Maclaurin sólo tiene potencias pares. Tampoco podemos calcular el término general de esta serie. Podríamos intentar calcular términos utilizando la fórmula $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, pero incluso esto se hace bastante difícil tras unos pocos valores iniciales de k.

Obsérvese que la serie de $\tan x$ también se podría haber obtenido a partir de la de $\ln\cos x$ ya que $\tan x = -\dfrac{d}{dx}\ln\cos x$.

Revisión de la fórmula de Taylor

En los ejemplos anteriores hemos utilizado diversas técnicas para obtener la serie de Taylor de distintas funciones y hemos verificado que esas funciones son analíticas. Como se demuestra en la Sección 4.8, el Teorema de Taylor proporciona un medio para estimar el tamaño del error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ que aparece cuando se usa el polinomio de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

para aproximar el valor de $f(x)$ con $x \neq c$. Como los polinomios de Taylor son sumas parciales de la serie de Taylor de f en c (si dicha serie existe), otra técnica para verificar la convergencia de una serie de Taylor es utilizar la fórmula de $E_n(x)$ proporcionada por el Teorema de Taylor para demostrar, al menos para un intervalo de valores de x que contenga a c, que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, de forma que f es en realidad la suma de su serie de Taylor alrededor de c en ese intervalo, y por tanto f es analítica en c. Presentamos a continuación una versión algo más general del teorema de Taylor.

TEOREMA 22 **Teorema de Taylor**

Si la derivada $(n+1)$-ésima de f existe en un intervalo que contenga a c y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor del punto $x = c$, entonces

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \qquad \textbf{Fórmula de Taylor}$$

se cumple, expresándose el término de error $E_n(x)$ por *una* de las siguientes fórmulas:

Resto de Lagrange $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$
para algún s entre c y x

Resto integral $$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

El Teorema de Taylor con resto de Lagrange se demostró en la Sección 4.8 (Teorema 10) utilizando el Teorema del Valor Medio, e inducción sobre n. La versión del resto integral también se demuestra por inducción sobre n. *Véase* el Ejercicio 42 donde se da una idea de cómo se puede realizar la demostración. Aquí no utilizaremos uso de la forma integral del resto.

Nuestro ejemplo final de esta sección reformula la serie de Maclaurin de e^x calculando el límite del resto de Lagrange como se ha sugerido anteriormente.

Ejemplo 7 Utilice el Teorema de Taylor para calcular la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$. ¿Dónde converge la serie a $f(x)$?

Solución Como e^x es positiva y creciente, $e^s \leqslant e^{|x|}$ para todo $s \leqslant |x|$. Como $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo k, tenemos, haciendo $c = 0$ en el resto de Lagrange de la Fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \qquad \text{para alguna } s \text{ entre } 0 \text{ y } x \\ &= \frac{e^s}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

para todo x real, como se demuestra en el Teorema 3(b) de la Sección 9.1. Entonces $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$. Como el polinomio de Maclaurin de orden n de e^x es $\sum_{k=0}^{n} (x^k/k!)$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y la serie converge a e^x para todo número real x.

Ejercicios 9.6

Calcule las representaciones en serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 1-14. ¿Para qué valores de x es válida cada representación?

1. e^{3x+1}

2. $\cos(2x^3)$

3. $\operatorname{sen}(x - \pi/4)$

4. $\cos(2x - \pi)$

5. $x^2 \operatorname{sen}(x/3)$

6. $\cos^2(x/2)$

7. $\operatorname{sen} x \cos x$

8. $\tan^{-1}(5x^2)$

9. $\dfrac{1 + x^3}{1 + x^2}$

10. $\ln(2 + x^2)$

11. $\ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

12. $(e^{2x^2} - 1)/x^2$

13. $\cosh x - \cos x$

14. $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x$

Calcule las representaciones en serie de Taylor de las funciones de los Ejercicios 15-26. ¿Dónde es válida la representación de cada serie?

15. $f(x) = e^{-2x}$ alrededor de -1

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor de $\pi/2$

17. $f(x) = \cos x$ en potencias de $x - \pi$

18. $f(x) = \ln x$ en potencias de $x - 3$

19. $f(x) = \ln(2 + x)$ en potencias de $x - 2$

20. $f(x) = e^{2x+3}$ en potencias de $x + 1$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ alrededor de $\dfrac{\pi}{4}$

22. $f(x) = \cos^2 x$ alrededor de $\dfrac{\pi}{8}$

23. $f(x) = 1/x^2$ en potencias de $x + 2$

24. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ en potencias de $x - 1$

25. $f(x) = x \ln x$ en potencias de $x - 1$

26. $f(x) = xe^x$ en potencias de $x + 2$

Calcule los tres primeros términos distintos de cero de las series de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 27-30.

27. $\sec x$

28. $\sec x \tan x$

29. $\tan^{-1}(e^x - 1)$

30. $e^{\tan^{-1} x} - 1$

***31.** Utilice el hecho de que $(\sqrt{1 + x})^2 = 1 + x$ para calcular los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $\sqrt{1 + x}$.

32. ¿Tiene serie de Maclaurin $\csc x$? ¿Por qué? Calcule los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor de $\csc x$ alrededor del punto $x = \pi/2$.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 33-36.

33. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^8}{4!} + \cdots$

***34.** $x^3 - \dfrac{x^9}{3! \times 4} + \dfrac{x^{15}}{5! \times 16} - \dfrac{x^{21}}{7! \times 64} + \dfrac{x^{27}}{9! \times 256} - \cdots$

35. $1 + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \dfrac{x^6}{7!} + \dfrac{x^8}{9!} + \cdots$

***36.** $1 + \dfrac{1}{2 \times 2!} + \dfrac{1}{4 \times 3!} + \dfrac{1}{8 \times 4!} + \cdots$

37. Sea $P(x) = 1 + x + x^2$. Calcule (a) la serie de Maclaurin de $P(x)$ y (b) la serie de Taylor de $P(x)$ alrededor de 1.

***38.** Verifique por cálculo directo que $f(x) = 1/x$ es analítica en a para todo $a \neq 0$.

***39.** Verifique por cálculo directo que $\ln x$ es analítica en a para todo $a > 0$.

***40.** Revise el Ejercicio 41 de la Sección 4.3. En él se demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de la recta real, y $f^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k. ¿Cuál es la serie de Maclaurin de $f(x)$? ¿Cuál es intervalo de convergencia de esta serie de Maclaurin? ¿En qué intervalo la serie converge a $f(x)$? ¿Es f analítica en 0?

***41.** Multiplicando directamente las series de Maclaurin de e^x y e^y, demuestre que $e^x e^y = e^{x+y}$.

***42.** **(Fórmula de Taylor con resto integral)** Verifique que si $f^{(n+1)}$ existe en un intervalo que contenga a c y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de c, entonces $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, siendo

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Proceda como sigue:

(a) En primer lugar, observe que el caso $n = 0$ es precisamente el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\, dt$$

Integre ahora por partes de la fórmula anterior, tomando $U = f'(t)$ y $dV = dt$. De forma contraria a nuestra política habitual de no incluir una constante de integración en V, en este caso escribiremos $V = -(x - t)$ en vez de sólo $V = t$. Obsérvese que el resultado de la integración por partes es el caso $n = 1$ de la fórmula.

(b) Utilice un argumento de inducción (e integración por partes de nuevo) para demostrar que si la fórmula es válida para $n = k$, entonces también es válida para $n = k + 1$.

*43. Utilice la fórmula de Taylor con resto integral para indicar que no es cierto que la serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ converge a $\ln(1 + x)$ para $-1 < x \leqslant 1$.

*44. **(Fórmula de Stirling)** El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}} = 1$$

indica que el *error relativo* de la aproximación

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}$$

tiende a cero cuando n crece. Es decir, $n!$ crece con una velocidad comparable a $\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$. Este resultado, conocido como Fórmula de Stirling, es muy útil en matemáticas aplicadas y estadística. Demuéstrelo realizando los siguientes pasos.

(a) Utilice la identidad $\ln(n!) = \sum_{j=1}^{n} \ln j$ y la naturaleza creciente del logaritmo para demostrar que si $n \geqslant 1$,

$$\int_0^n \ln x\, dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$$

y a partir de aquí que

$$n\ln n - n < \ln(n!) < (n+1)\ln(n+1) - n$$

(b) Si $c_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln n + n$, demuestre que

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1 + 1/(2n+1)}{1 - 1/(2n+1)} - 1 \end{aligned}$$

(c) Utilice la serie de Maclaurin de $\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ (*véase* el Ejercicio 11) para demostrar que

$$\begin{aligned} 0 < c_n - c_{n+1} &< \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

y, por tanto, que $\{c_n\}$ es decreciente y $\{c_n - \frac{1}{12n}\}$ es creciente. Concluya a partir de aquí que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ existe, y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} e^{c_n} = e^c$$

(d) Utilice ahora el Producto de Wallis del Ejercicio 38 de la Sección 6.1 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y deduzca a partir de aquí que $e^c = \sqrt{2\pi}$, lo que completa la demostración.

9.7 Aplicaciones de las series de Taylor y Maclaurin

Aproximación de valores de funciones

En la Sección 4.8 vimos que los polinomios de Taylor y Maclaurin (las sumas parciales de las series de Taylor y Maclaurin) se pueden utilizar para formar aproximaciones polinómicas a funciones más complicadas. En el Ejemplo 5 de esa sección utilizamos el resto de Lagrange en la fórmula de Taylor para determinar cuántos términos de la serie de Maclaurin de e^x son necesarios para calcular $e^1 = e$ con una precisión de tres cifras decimales. A efectos de comparación, en el Ejemplo 7 de la Sección 9.3 obtuvimos el mismo resultado utilizando una serie geométrica para acotar la cola de la serie de e.

El ejemplo que sigue muestra cómo la cota del error asociada con el test de la serie alternante (*véase* en Teorema 15 de la Sección 9.4) se puede utilizar también para estas aproximaciones. Cuando el término a_n de una serie (i) alterna de signo, (ii) decrece constantemente de tamaño y (iii) tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces el error que se produce al utilizar una suma parcial de la serie como aproximación a la suma de la serie es del mismo signo que el primer término omitido, y no es mayor en valor absoluto que dicho término.

Ejemplo 1 Calcule $\cos 43°$ con un error menor que 1/10 000.

Solución Daremos dos soluciones alternativas:

MÉTODO I. Podemos utilizar la serie de Maclaurin del coseno:

$$\cos 43° = \cos \frac{43\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \cdots$$

Como $43\pi/180 \approx 0.750\,49 \cdots < 1$, la serie anterior debe cumplir las condiciones (i)-(iii) mencionadas anteriormente. Si truncamos la serie después del n-ésimo término

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n-2}$$

entonces el error E estará acotado por el tamaño del primer término omitido:

$$|E| \leqslant \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n} < \frac{1}{(2n)!}$$

El error no superará 1/10 000 si $(2n)! > 10\,000$, por lo que $n = 4$ servirá $(8! = 40\,320)$.

$$\cos 43° \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6 \approx 0.731\,35 \cdots$$

MÉTODO II. Como $43°$ está cerca de $45° = \pi/4$ rad, podemos mejorar un poco utilizando la serie de Taylor alrededor de $\pi/4$ en vez de la serie de Maclaurin:

$$\begin{aligned}\cos 43° &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{90} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{90}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots\right)\right.\\ &\qquad\left. + \left(\frac{\pi}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + \cdots\right)\right]\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 < \frac{1}{20\,000}$$

sólo necesitamos los dos primeros términos de la primera serie y el primer término de la segunda serie:

$$\cos 43° \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{90} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) \approx 0.731\,358 \cdots$$

De hecho, $\cos 43° = 0.731\,353\,7 \cdots$.

Al calcular valores aproximados de funciones es mejor, siempre que se pueda, utilizar una serie de potencias alrededor de un punto tan cerca como sea posible del punto donde se desea la aproximación.

Funciones definidas por integrales

Existen muchas funciones que se pueden expresar en forma de combinaciones simples de funciones elementales cuya primitiva no se puede calcular por técnicas sencillas; sus primitivas no son combinaciones simples de funciones elementales. Sin embargo, a menudo podemos calcular la serie de Taylor de las primitivas de sus funciones y, por tanto, aproximar sus integrales definidas.

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

y utilícela para calcular $E(1)$ con una precisión de tres cifras decimales.

Solución La serie de Maclaurin de $E(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\right) dt \\
&= \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \times 2!} - \frac{t^7}{7 \times 3!} + \frac{t^9}{9 \times 4!} - \cdots\right)\Bigg|_0^x \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \frac{x^9}{9 \times 4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}
\end{aligned}$$

y es válida para todo x, ya que la serie de e^{-t^2} es válida para todo t. Por tanto,

$$\begin{aligned}
E(1) &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} - \frac{1}{7 \times 3!} + \cdots \\
&\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} - \frac{1}{7 \times 3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(n-1)!}
\end{aligned}$$

Pararemos en el término n-ésimo. De nuevo, el test de la serie alternante nos asegura que el error de esta aproximación no será superior al primer término omitido, por lo que será menor que 0.0005, siempre que $(2n + 1)n! > 2000$. Como $13 \times 6! = 9360$, $n = 6$ servirá. Así,

$$E(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} \approx 0.747$$

redondeado a tres cifras decimales. ■

Formas indeterminadas

Los Ejemplos 1 y 2 de la Sección 4.9 mostraron cómo se pueden usar los polinomios de Maclaurin para calcular los límites de formas indeterminadas. Presentaremos aquí dos ejemplos más, esta vez utilizando directamente las series y calculando suficientes términos para que se cancelen los factores [0/0].

Ejemplo 3 Calcule (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ y (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x} - 1)\ln(1 + x^3)}{(1 - \cos 3x)^2}$.

Solución

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x} - 1)\ln(1 + x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots - 1\right)\left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \cdots\right)}{\left(1 - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \cdots\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \cdots}{\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{3^4}{4!}x^4 + \cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2x + \cdots}{\left(\frac{9}{2} - \frac{3^4}{4!}x^2 + \cdots\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{8}{81}$$

Podemos comprobar que el segundo de estos ejemplos es mucho más difícil si se intenta resolver utilizando la Regla del l'Hôpital.

Ejercicios 9.7

1. Estime el error si se usa el polinomio de Maclaurin de grado 5 de sen x para aproximar sen (0.2).

2. Estime el error si se usa el polinomio de Taylor de grado 4 de $\ln x$ en potencias de $x - 2$ para aproximar $\ln(1.95)$.

Utilice las series de Taylor o de Maclaurin para calcular los valores de las funciones indicadas en los Ejercicios 3-14, con error menor que 5×10^{-5} en valor absoluto.

3. $e^{0.2}$

4. $1/e$

5. $e^{1.2}$

6. sen (0.1)

7. $\cos 5^{\circ}$

8. $\ln(6/5)$

9. $\ln(0.9)$

10. sen 80°

11. $\cos 65^{\circ}$

12. $\tan^{-1} 0.2$

13. $\cosh(1)$

14. $\ln(3/2)$

Calcule la serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 15-19.

15. $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

16. $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

17. $K(x) = \displaystyle\int_1^{1+x} \frac{\ln t}{t - 1}\,dt$

18. $L(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$

19. $M(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan^{-1} t^2}{t^2}\,dt$

20. Calcule $L(0.5)$ con una precisión de tres cifras decimales, siendo L la definida en el Ejercicio 18.

21. Calcule $I(1)$ con una precisión de tres cifras decimales, siendo I la definida en el Ejercicio 15.

Calcule los límites en los Ejercicios 22-27.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{senh} x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} 3x - 3\operatorname{sen} 2x}{5x - \tan^{-1} 5x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - x}{x(\cos(\operatorname{sen} x) - 1)}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{\cosh x - \cos x}$

9.8 El teorema binomial y la serie binomial

Ejemplo 1 Utilice la Fórmula de Taylor para demostrar el Teorema Binomial: si n es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k\end{aligned}$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Solución Sea $f(x) = (a+x)^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}f'(x) &= n(a+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1} \\ f''(x) &= \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}(a+x)^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}(a+x)^{n-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)\end{aligned}$$

En particular, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{0!}(a+x)^{n-n} = n!$, una constante, y así

$$f^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{para todo } x, \text{ si } k > n$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$. Así, por el Teorema de Taylor con resto de Lagrange, para algún valor s entre a y x,

$$\begin{aligned}(a+x)^n = f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}a^{n-k}x^k + 0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k\end{aligned}$$

Ésta es, de hecho, la *serie* de Maclaurin de $(a+x)^n$, no sólo el polinomio de Maclaurin de grado n. Como todos los términos de orden superior son cero, la serie tiene sólo un número finito de términos distintos de cero, y por tanto converge para todo x. ■

Observación Si $f(x) = (a+x)^r$, siendo $a > 0$ y r cualquier número real, entonces, cálculos similares a los realizados anteriormente permiten demostrar que el polinomio de Maclaurin de grado n de f es

$$P_n(x) = a^r + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}a^{r-k}x^k$$

Sin embargo, si r no es un entero positivo, entonces no existirá ningún entero positivo n para el que el resto $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ sea cero y la correspondiente serie de Maclaurin no será un polinomio.

La serie binomial

Para simplificar el análisis de la función $(a + x)^r$ cuando r no es un entero positivo, tomaremos $a = 1$ y consideraremos entonces la función $(1 + x)^r$. Los resultados para el caso general se siguen de la identidad

$$(a + x)^r = a^r\left(1 + \frac{x}{a}\right)^r$$

válida para $a > 0$.

Si r es un número real cualquiera y $x > -1$, entonces la derivada k-ésima de $(1 + x)^r$ es

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}, \qquad (k = 1, 2, ...)$$

Así, la serie de Maclaurin de $(1 + x)^r$ es

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k$$

que se denomina **serie binomial**. El teorema que sigue demuestra que la serie binomial converge, de hecho, a $(1 + x)^r$ si $|x| < 1$. Podríamos demostrarlo escribiendo la Fórmula de Taylor para $(1 + x)^r$ con $c = 0$, y demostrando que el resto $E_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ (necesitaríamos utilizar la forma integral del resto para demostrarlo para todo $|x| < 1$). Sin embargo, utilizaremos un método más fácil, similar al utilizado para las funciones exponencial y trigonométrica en la Sección 9.6.

TEOREMA 23 **La serie binomial**

Si $|x| < 1$, entonces

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Si $|x| < 1$, entonces la serie

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$$

converge por el test de la razón, ya que

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r-n}{n+1} \right| |x| = |x| < 1\end{aligned}$$

Nótese que $f(0) = 1$. Necesitamos demostrar que $f(x) = (1 + x)^r$ para $|x| < 1$.

Por el Teorema 19, podemos diferenciar la serie de $f(x)$ término a término en $|x| < 1$ para obtener

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!} x^{n}$$

Hemos sustituido n por $n+1$ para obtener la segunda versión de la suma a partir de la primera versión. Sumando la segunda versión a la primera multiplicada por x se obtiene

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!} x^{n}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n}$$
$$= r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^{n}[(r-n)+n]$$
$$= rf(x)$$

La ecuación diferencial $(1+x)f'(x) = rf(x)$ implica que

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(1+x)^r} = \frac{(1+x)^r f'(x) - r(1+x)^{r-1}f(x)}{(1+x)^{2r}} = 0$$

para todo x que cumpla $|x| < 1$. Por tanto, $f(x)/(1+x)^r$ es constante en ese intervalo, y como $f(0) = 1$, la constante debe ser 1. Así, $f(x) = (1+x)^r$.

Observación Para algunos valores de r la serie binomial puede converger en los extremos $x = 1$ o $x = -1$. Como se observó anteriormente, si r es un entero positivo, la serie tiene un número finito de términos distintos de cero, y por tanto converge para todo x.

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solución En este caso $r = -(1/2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2^3 3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} x^n$$

Esta serie converge en $-1 < x \leqslant 1$ (utilice el test de la serie alternante para incorporar al extremo $x = 1$).

Ejemplo 3 Calcule la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Solución Sustituimos x por $-t^2$ en la serie obtenida en el ejemplo anterior, con lo que resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} \qquad (-1 < t < 1)$$

Integramos ahora en t desde 0 hasta x:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{-1} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\right) dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

Ejercicios 9.8

Calcule las representaciones en serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 1-6. Utilice la serie binomial para calcular las respuestas.

1. $\sqrt{1+x}$

2. $x\sqrt{1-x}$

3. $\sqrt{4+x}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

5. $(1-x)^{-2}$

6. $(1+x)^{-3}$

***7.** **(Coeficientes binomiales)** Demuestre que los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

cumplen

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo n.

(ii) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, entonces $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Se deduce entonces que, dado un $n \geqslant 1$ fijo, los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

son los elementos de la fila n-ésima del **triángulo de Pascal** que se muestra a continuación, en el que cada elemento de valor > 1 es la suma de las dos diagonales sobre él.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

***8.** **(Una demostración inductiva del Teorema Binomial)** Utilice inducción matemática y los resultados del Ejercicio 7 para demostrar el Teorema Binomial:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \\ &\quad + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + b^n\end{aligned}$$

***9.** **(Regla de Leibniz)** Utilice inducción matemática, la Regla del Producto, y el Ejercicio 7 para verificar la Regla de Leibniz para expresar la derivada n-ésima de un producto de dos funciones:

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= f^{(n)} g + n f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' \\ &\quad + \binom{n}{3} f^{(n-3)} g^{(3)} + \cdots + f g^{(n)}\end{aligned}$$

9.9 Series de Fourier

Como ya hemos visto, las representaciones de funciones mediante series de potencias hacen posible aproximar dichas funciones tan exactamente como deseemos en intervalos cercanos a un punto de particular interés, mediante la utilización de las sumas parciales de las series, es decir, de polinomios. Sin embargo, en muchas aplicaciones importantes de las matemáticas, las funciones que se deben utilizar son periódicas. Por ejemplo, una buena parte de la ingeniería eléctrica trata del análisis y el manejo de *formas de onda*, que son funciones periódicas del tiempo. Los polinomios no son funciones periódicas, y por esta razón, las series de potencias no se adaptan bien a la representación de esas funciones.

Para la representación de funciones periódicas en intervalos amplios son mucho más apropiadas ciertas series infinitas de funciones periódicas denominadas series de Fourier.

Funciones periódicas

Recordemos que una función f definida en la recta real es **periódica** de periodo T si

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{para todo } t \text{ real} \tag{*}$$

Esto implica que $f(t+mT) = f(t)$ para todo entero m, de forma que si T es un periodo de f, también lo es cualquier múltiplo mT de T. El mínimo número positivo T para el que se cumple (*) se denomina **periodo fundamental** o simplemente **periodo** de f.

La gráfica completa de una función de periodo T se puede obtener desplazando múltiplos enteros del periodo T la parte de la gráfica correspondiente a cualquier intervalo semiabierto de longitud T (por ejemplo, el intervalo $[0, T)$) a la izquierda o a la derecha. La Figura 9.6 muestra la gráfica de una función de periodo 2.

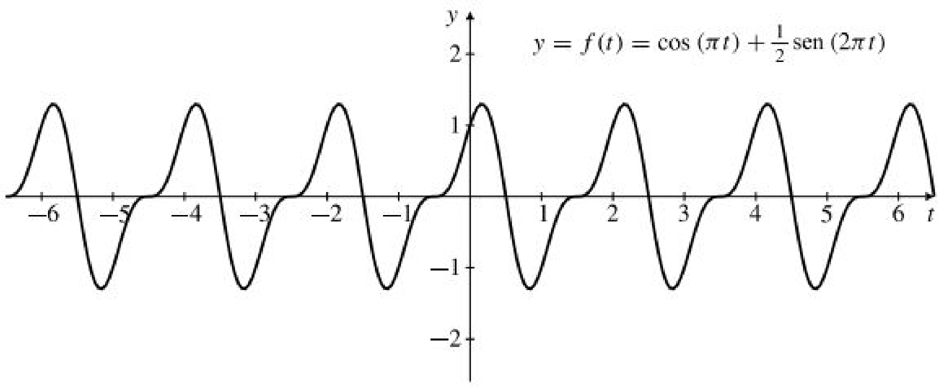

Figura 9.6 Esta función tiene periodo 2. Obsérvese cómo la gráfica repite la parte del intervalo $[0, 2)$ una y otra vez a la izquierda y la derecha.

Ejemplo 1 Las funciones $g(t) = \cos(\pi t)$ y $h(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ son periódicas del periodo 2:

$$g(t+2) = \cos(\pi t + 2\pi) = \cos(\pi t) = g(t)$$

La función $k(t) = \operatorname{sen}(2\pi t)$ también tiene periodo 2, pero éste no es su periodo fundamental. Su periodo fundamental es 1:

$$k(t+1) = \operatorname{sen}(2\pi t + 2\pi) = \operatorname{sen}(2\pi t) = k(t)$$

El periodo de la suma $f(t) = g(t) + \frac{1}{2}k(t) = \cos(\pi t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t)$, que se representa en la Figura 9.6, es 2, el mínimo común múltiplo del periodo de sus dos términos.

Ejemplo 2 Para todo entero positivo n, las funciones

$$f_n(t) = \cos(n\omega t) \qquad \text{y} \qquad g_n(t) = \operatorname{sen}(n\omega t)$$

tienen periodo fundamental $T = 2\pi/(n\omega)$. El conjunto de todas esas funciones, correspondientes a todos los enteros positivos n, tienen periodo común $T = 2\pi/\omega$, el periodo fundamental de f_1 y g_1. T es un múltiplo entero de los periodos fundamentales de las funciones f_n y g_n. Las series de Fourier tratan de expresar funciones generales de período T en forma de series cuyos términos son múltiplos reales de estas funciones.

Series de Fourier

Se puede demostrar (pero no lo haremos aquí) que si $f(t)$ es periódica de período fundamental T, es continua y tiene derivada continua por tramos en la recta real, entonces $f(t)$ se puede expresar en todas partes como la suma de una serie de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)) \qquad (**)$$

que se denomina **serie de Fourier** de f, siendo $\omega = 2\pi/T$ y las secuencias $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ los **coeficientes de Fourier** de f. La determinación de los valores de estos coeficientes, dada una determinada función f, se realiza mediante las siguientes relaciones, válidas para enteros m y n, que se demuestran fácilmente utilizando las fórmulas de suma del seno y el coseno (*véanse* los Ejercicios 49-51 de la Sección 5.6).

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ T & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}(n\omega t)\, dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ T/2 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}(m\omega t)\operatorname{sen}(n\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ T/2 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\operatorname{sen}(n\omega t)\, dt = 0$$

Si multiplicamos la ecuación (**) por $\cos(m\omega t)$ (o por $\operatorname{sen}(m\omega t)$), e integramos la ecuación resultante en el intervalo $[0, T]$ término a término, todos los términos de la derecha excepto el correspondiente a a_m (o b_m) serán 0 (la integración término a término requiere justificación, pero tampoco la daremos aquí). El resultado de la integración es

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\, dt = \frac{1}{2}\, T a_m$$

$$\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(m\omega t)\, dt = \frac{1}{2}\, T b_m$$

Nótese que la primera de estas fórmulas es válida incluso para $m = 0$, porque hemos optado por denominar al término constante de la serie de Fourier $a_0/2$ en vez de a_0. Como todos los integrandos son periódicos de periodo T, las integrales se pueden realizar sobre cualquier intervalo de longitud T; frecuentemente, es conveniente utilizar el intervalo $[-T/2, T/2]$ en vez de $[0, T]$. Los coeficientes de Fourier de f son, por tanto,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,(n\omega t)\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

siendo $\omega = 2\pi/T$.

Ejemplo 3 Calcule la serie de Fourier de la función en diente de sierra $f(t)$ de periodo 2π cuyos valores en el intervalo $[-\pi, \pi]$ son $f(t) = \pi - |t|$ (*véase* la Figura 9.7).

Solución En este caso, $T = 2\pi$ y $\omega = 2\pi/(2\pi) = 1$. Como $f(t)$ es una función par, $f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)$ es impar, por lo que todos los coeficientes del seno en la serie de Fourier b_n son cero:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\,dt = 0$$

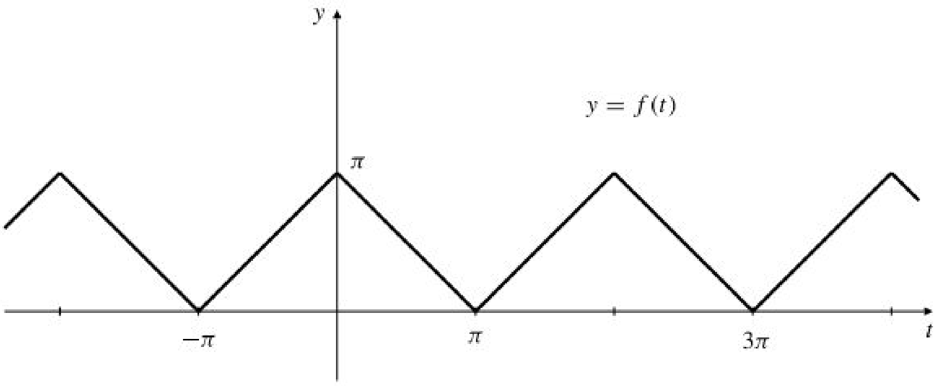

Figura 9.7 Una función en diente de sierra de periodo 2π.

Además, $f(t)\cos(nt)$ es una función par, por lo que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ 4/(\pi n^2) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Como los enteros negativos impares n son de la forma $n = 2k - 1$, siendo k un entero positivo, la serie de Fourier de f se expresa como

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)t)$$

Convergencia de la serie de Fourier

Las sumas parciales de una serie de Fourier se denominan polinomios de Fourier porque se pueden expresar como polinomios en sen (ωt) y cos (ωt), aunque realmente no intentaremos expresarlos de esa forma. El polinomio de Fourier de orden m de la función periódica f de periodo T es

$$f_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t))$$

siendo $\omega = 2\pi/T$, y con los coeficientes $a_n (0 \leqslant n \leqslant m)$ y $b_n (1 \leqslant n \leqslant m)$ expresados por las fórmulas integrales desarrolladas anteriormente.

Ejemplo 4 El polinomio de Fourier de orden 3 de la función en diente de sierra del Ejemplo 3 es

$$f_3(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos t + \frac{4}{9\pi}\cos(3t)$$

La Figura 9.8 muestra la gráfica de esta función. Obsérvese que parece una aproximación razonable a la gráfica de f de la Figura 9.7 pero, como es una suma finita de funciones diferenciables, $f_3(t)$ es también diferenciable en todas partes, incluso en los múltiplos enteros de π donde f no es diferenciable.

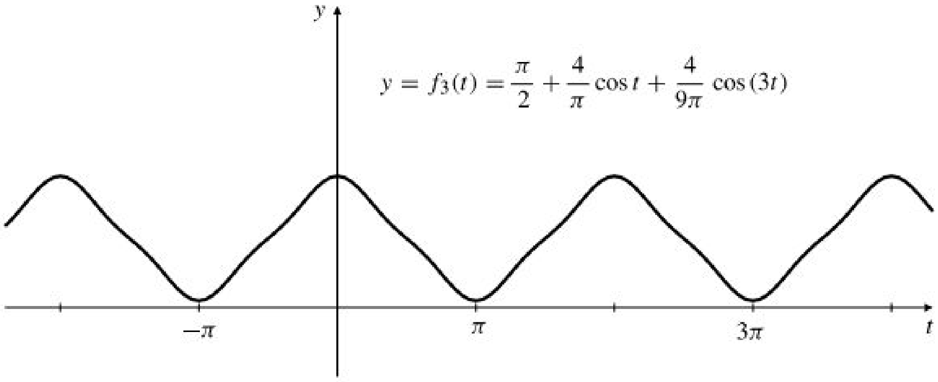

Figura 9.8 Aproximación mediante el polinomio de Fourier $f_3(t)$ de la función en diente de sierra del Ejemplo 3.

Como se dijo anteriormente, la serie de Fourier de una función $f(t)$ periódica, continua y con derivada continua por tramos en la recta real converge a $f(t)$ en todo número real t. Sin embargo, los coeficientes de Fourier (y, por tanto, la serie de Fourier) se pueden calcular también (utilizando las fórmulas dadas anteriormente) para funciones periódicas con derivadas continuas por tramos, incluso si las funciones en sí no son continuas, sino sólo continuas por tramos.

Recuérdese que $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[a, b]$, si existe una partición $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ y funciones $F_1, F_2, \ldots, F_k$ tales que

(i) F_i es continua en $[x_{i-1}, x_i]$.
(ii) $f(t) = F_i(t)$ en (x_{i-1}, x_i).

La integral de una función f de este tipo es la suma de las integrales de las funciones F_i:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F_i(t)\,dt$$

Como $f(t)\cos(n\omega t)$ y $f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)$ son continuas por tramos si lo es f, los coeficientes de Fourier de una función periódica continua por tramos se pueden calcular utilizando las mismas fórmulas que para una función periódica continua. La cuestión de dónde y a qué converge la serie de Fourier en este caso se responde mediante el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en libros de texto sobre análisis de Fourier.

TEOREMA 24 La serie de Fourier de una función f periódica y continua por tramos con derivada continua por tramos converge a dicha función en todo punto t donde f sea continua. Además, si f es discontinua en $t = c$, entonces tiene límites por la derecha y por la izquierda diferentes, pero finitos, en c:

$$\lim_{t\to c-} f(t) = f(c-) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to c+} f(t) = f(c+)$$

La serie de Fourier de f converge en $t = c$ al promedio de esos límites por la izquierda y por la derecha:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega c) + b_n \operatorname{sen}(n\omega c)) = \frac{f(c-) + f(c+)}{2}$$

siendo $\omega = 2\pi/T$.

Ejemplo 5 Calcule la serie de Fourier de la función periódica f de periodo 2 que cumple

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

¿Dónde no es f continua? ¿A qué converge la serie de Fourier de f en esos puntos?

Solución En este caso, $T = 2$ y $\omega = 2\pi/2 = \pi$. Como f es una función impar, los coeficientes de los cosenos son todos cero:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\, dt = 0 \qquad \text{(El integrando es impar).}$$

La misma simetría implica que

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(t) \operatorname{sen}(n\pi t)\, dt \\ &= 2\int_{0}^{1} \operatorname{sen}(n\pi t)\, dt = -\left.\frac{2\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_0^1 \\ &= -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 4/(n\pi) & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Los enteros impares n son de la forma $n = 2k - 1$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\begin{aligned} &\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}((2k-1)\pi t) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\pi t) + \cdots\right) \end{aligned}$$

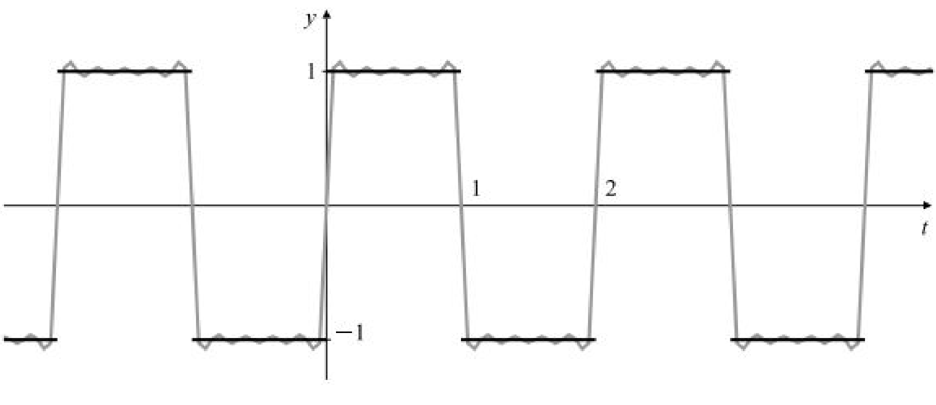

Figura 9.9 La función continua por tramos f (en negro) del Ejemplo 5 y su polinomio de Fourier f_{15} (en gris)

$$f_{15}(t) = \sum_{k=1}^{8} \frac{4\operatorname{sen}((2k-1)\pi t)}{(2k-1)\pi}.$$

Nótese que f es continua excepto en los puntos donde t es entero. En cada uno de esos puntos f salta de -1 a 1 o de 1 a -1, por lo que el promedio de los límites por la izquierda y la derecha de f en esos puntos es 0. Obsérvese que la suma de la serie de Fourier es 0 en valores enteros de t, de acuerdo con el Teorema 24. *Véase* la Figua 9.9.

Serie de Fourier en cosenos y senos

Como se ha observado en los Ejemplos 3 y 5, las funciones pares no tienen términos en seno en su serie de Fourier, y las funciones impares no tienen términos en coseno (incluyendo el término constante $a_0/2$). Muchas veces es necesario en las aplicaciones calcular una representación en serie de Fourier de una función dada, definida en un intervalo finito $[0, a]$ que no tenga términos en seno (una **serie de Fourier en cosenos**) o que no tenga términos en coseno (una **serie de Fourier en senos**). Esto se puede realizar ampliando el dominio de f al intervalo $[-a, 0]$, haciendo que f sea par o impar en $[-a, a]$.

$$f(-t) = f(t) \text{ si } -a \leqslant t < 0 \text{ para la extensión par}$$

$$f(-t) = -f(t) \text{ si } -a \leqslant t < 0 \text{ para la extensión impar}$$

y calculando después su serie de Fourier considerando la función f extendida de periodo $2a$ (si quisiéramos la extensión impar, habría que redefinir $f(0)$ con valor 0).

Ejemplo 6 Calcule la serie de Fourier en cosenos de $g(t) = \pi - t$, definida en $[0, \pi]$.

Solución La extensión par de $g(t)$ a $[-\pi, \pi]$ es la función f del Ejemplo 3. Por tanto, la serie de Fourier en cosenos de g es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

Ejemplo 7 Calcule la serie de Fourier en senos de $h(t) = 1$, definida en $[0, 1]$.

Solución Si definimos $h(0) = 0$, entonces la extensión impar de h al intervalo $[-1, 1]$ coincide con la función $f(t)$ del Ejemplo 5, con la salvedad de que la última función está indefinida en $t = 0$. La serie de Fourier en senos de h es la obtenida en el Ejemplo 5, concretamente,

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}((2k-1)\pi t)$$

Observación Las series de Fourier en senos y cosenos se tratarán desde una perspectiva diferente en la Sección 13.4.

Ejercicios 9.9

En los Ejercicios 1-4, ¿cuál es el periodo fundamental de las funciones dadas?

1. $f(t) = \operatorname{sen}(3t)$

2. $g(t) = \cos(3 + \pi t)$

3. $h(t) = \cos^2 t$

4. $k(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t)$

En los Ejercicios 5-8, calcule las series de Fourier de las funciones dadas.

5. $f(t) = t, \ -\pi < t \leqslant \pi,$ f tiene periodo 2π.

6. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$ f tiene periodo 2

7. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leqslant t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \end{cases}$ f tiene periodo 2

8. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 3 - t & \text{si } 2 \leqslant t < 3 \end{cases}$ f tiene periodo 3

9. ¿Cuál es la serie de Fourier en cosenos de la función $h(t)$ del Ejemplo 7?

10. Calcule la serie de Fourier en senos de la función $g(t)$ del Ejemplo 6.

11. Calcule la serie de Fourier en senos de $f(t) = t$ en el intervalo $[0, 1]$.

12. Calcule la serie de Fourier en cosenos de $f(t) = t$ en el intervalo $[0, 1]$.

13. Utilice el resultado del Ejemplo 3 para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

14. Verifique que si f es una función periódica par de periodo T, entonces los coeficientes de seno de Fourier b_n de f son todos cero y los coeficientes de coseno de Fourier a_n de f se expresan como

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

siendo $\omega = 2\pi/T$. Enuncie y verifique el correspondiente resultado para funciones f impares.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **Indique lo que significa decir que la secuencia $\{a_n\}$:**
  - ◇ Está acotada superiormente.
  - ◇ Es alternante.
  - ◇ Converge.
  - ◇ Es definitivamente positiva.
  - ◇ Es creciente.
  - ◇ Diverge a infinito.
- **Indique lo que significa decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:**
  - ◇ Converge.
  - ◇ Es geométrica.
  - ◇ Es una serie p.
  - ◇ Converge absolutamente.
  - ◇ Diverge.
  - ◇ Es telescópica.
  - ◇ Es positiva.
  - ◇ Converge condicionalmente.
- **Defina los siguientes tests de convergencia de series.**
  - ◇ Test de la integral
  - ◇ Test de comparación en el límite
  - ◇ Test de la serie alternante
  - ◇ Test de la comparación
  - ◇ Test de la razón
- **¿Cómo se pueden calcular cotas de la cola de una serie?**
- **¿Cuál es una cota de la cola de una serie alternante?**
- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ Serie de potencias
  - ◇ Radio de convergencia
  - ◇ Serie de Taylor
  - ◇ Polinomio de Taylor
  - ◇ Función analítica
  - ◇ Intervalo de convergencia
  - ◇ Centro de convergencia
  - ◇ Serie de Maclaurin
  - ◇ Serie binomial
- **¿Dónde es diferenciable la suma de una serie de potencias?**
- **¿Dónde converge la integral de una serie de potencias?**
- **¿Dónde es continua la suma de una serie de potencias?**
- **Defina el Teorema de Taylor con resto de Lagrange.**
- **Defina el Teorema de Taylor con resto integral.**
- **¿Qué es el Teorema Binomial?**
- **¿Qué es una serie de Fourier?**
- **¿Qué es una serie de Fourier en cosenos? ¿Y en senos?**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, determine si las secuencias dadas convergen y calcule su límite en caso de que converjan.

1. $\left\{\dfrac{(-1)^n e^n}{n!}\right\}$ **2.** $\left\{\dfrac{n^{100}+2^n\pi}{2^n}\right\}$

3. $\left\{\dfrac{\ln n}{\tan^{-1} n}\right\}$ **4.** $\left\{\dfrac{(-1)^n n^2}{\pi n(n-\pi)}\right\}$

5. Sea $a_1 > \sqrt{2}$, y sea

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Demuestre que $\{a_n\}$ es decreciente y que $a_n > \sqrt{2}$ para $n \geqslant 1$. ¿Por qué debe converger $\{a_n\}$? Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. Calcule el límite de la secuencia $\{\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\}$.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 7-10.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-5)/2}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(\pi-1)^{2n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{9}{4}}$

Determine si las series de los Ejercicios 11-16 convergen o divergen. Justifique sus respuestas.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{1+3^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n)(1+n\sqrt{n})}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+2^n)(1+n\sqrt{n})}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$

Indique si las series de los Ejercicios 17-20 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^3}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n-n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln\ln n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cos(n\pi)}{1+n^3}$

¿Para qué valores de x convergen absolutamente las series de los Ejercicios 21-22? ¿Para qué valores convergen condicionalmente? ¿Para qué valores divergen?

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n}$

Determine las sumas de las series de los Ejercicios 23 y 24 con una precisión de 0.001.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+n^2}$

En los Ejercicios 25-32, calcule las series de Maclaurin de las funciones dadas. Indique en dónde converge cada serie a la función.

25. $\dfrac{1}{3-x}$ **26.** $\dfrac{x}{3-x^2}$

27. $\ln(e+x^2)$ **28.** $\dfrac{1-e^{-2x}}{x}$

29. $x\cos^2 x$ **30.** $\operatorname{sen}(x+(\pi/3))$

31. $(8+x)^{-1/3}$ **32.** $(1+x)^{1/3}$

Calcule las series de Taylor de las funciones de los Ejercicios 33 y 34, alrededor de los puntos indicados $x = c$.

33. $1/x$, $c = \pi$ **34.** $\operatorname{sen} x + \cos x$, $c = \pi/4$

Calcule el polinomio de Maclaurin del grado indicado de las funciones en los Ejercicios 35-38.

35. e^{x^2+2x}, grado 3 **36.** $\operatorname{sen}(1+x)$, grado 3

37. $\cos(\operatorname{sen} x)$, grado 4 **38.** $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$, grado 4

39. Indique qué función tiene como serie de Maclaurin la siguiente:

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

40. Una función $f(x)$ tiene como serie de Maclaurin

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$$

Calcule $f^{(k)}(0)$ para todos los enteros positivos k.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 41-44.

41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\pi^n}$ ***42.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\pi^n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$ ***44.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n-1)!}$

45. Si $S(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3S(x)}{x^7}$.

46. Utilice series para calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-\tan^{-1}x)(e^{2x}-1)}{2x^2-1+\cos(2x)}$.

47. ¿Cuántos términos distintos de cero en la serie de Maclaurin de e^{-x^4} son necesarios para calcular $\int_0^{1/2} e^{-x^4}\,dx$ con una precisión de 5 cifras decimales? Calcule la integral con esa precisión.

48. Estime el tamaño del error si se utiliza el polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de $x = \pi/2$ de la función $f(x) = \ln\operatorname{sen} x$ para aproximar $\ln\operatorname{sen}(1.5)$.

49. Calcule la serie de Fourier en senos de $f(t) = \pi - t$ en $[0, \pi]$.

50. Calcule la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi < t \leqslant 0 \\ t & \text{si} \quad 0 < t \leqslant \pi \end{cases}$.

Problemas avanzados

1. **(Un refinamiento del test de la razón)** Sea $a_n > 0$ y $a_{n+1}/a_n \geqslant n/n+1$ para todo n. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. *Sugerencia*: $a_n \geqslant K/n$ para alguna constante K.

*2. **(Suma por partes)** Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos secuencias, y sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

(a) Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k =$
$= u_{n+1}s_n + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})s_n$. (*Sugerencia*: Escriba $v_n = s_n - s_{n-1}$, con $s_0 = 0$, y reordene la suma).

(b) Si $\{u_n\}$ es positiva, decreciente y converge a 0, y si $\{v_n\}$ tiene sumas parciales acotadas, $|s_n| \leqslant K$, para todo n, siendo K una constante, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ converge. (*Sugerencia*: Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})s_n$ converge, comparándola con la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$.)

*3. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\operatorname{sen}(nx)$ converge para todo x. *Sugerencia*: Si x es un entero múltiplo de π, todos los términos de la serie son 0, por lo que no hay nada que demostrar. Si no, $\operatorname{sen}(x/2) \neq 0$. En este caso demuestre que

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}(nx) = \frac{\cos(x/2) - \cos((N+1/2)x)}{2\operatorname{sen}(x/2)}$$

utilizando la relación

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

para convertir la suma en telescópica. Aplique después el resultado del Problema 2(b) con $u_n = 1/n$ y $v_n = \operatorname{sen}(nx)$.

4. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots$ los enteros positivos que no contienen el dígito 0 en sus representaciones decimales. Es decir, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_9 = 9$, $a_{10} = 11$, ..., $a_{18} = 19$, $a_{19} = 21$, ..., $a_{90} = 99$, $a_{91} = 111$, etc. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge y que su suma es menor que 90. (*Sugerencia*: ¿Cuántos de estos enteros tienen m dígitos? Un término $1/a_n$ donde a_n tiene m dígitos, es menor que 10^{-m+1}).

*5. **(Uso de una integral para mejorar la convergencia)** Recuerde la fórmula del error de la Regla del Punto Medio, de acuerdo con la cual

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} f(x)\,dx - f(k) = \frac{f''(c)}{24}$$

siendo $k - (1/2) \leqslant c \leqslant k + (1/2)$.

(a) Si $f''(x)$ es una función decreciente de x, demuestre que

$$f'(k+\tfrac{3}{2}) - f'(k+\tfrac{1}{2}) \leqslant f''(c) \leqslant f'(k-\tfrac{1}{2}) - f'(k-\tfrac{3}{2})$$

(b) Si (i) $f''(x)$ es una función decreciente de x, (ii) $\int_{N+1/2}^{\infty} f(x)\,dx$ converge y (iii) $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, demuestre que

$$\frac{f'(N-\frac{1}{2})}{24} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) - \int_{N+1/2}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \frac{f'(N+\frac{3}{2})}{24}$$

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para aproximar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con una precisión de 0.001.

*6. **(El número e es irracional)** Partiendo de $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$:

(a) Utilice la técnica del Ejemplo 7 de la Sección 9.3 para demostrar que para todo $n > 0$,

$$0 < e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < \frac{1}{n!n}$$

Nótese que aquí la suma tiene $n + 1$ términos, no n términos.

(b) Suponga que e es un número racional, por ejemplo $e = M/N$, para ciertos enteros positivos M y N. Demuestre que $N!\,(e - \sum_{j=0}^{N} (1/j!))$ es un entero.

(c) Combine los apartados (a) y (b) para demostrar que hay un entero entre 0 y $1/N$. ¿Por qué no es esto posible? Concluya que e no puede ser un número racional.

7. Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}k!}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3\times 5}x^5 + \frac{8}{3\times 5\times 7}x^7 + \cdots$$

(a) Calcule el radio de convergencia de esta serie de potencias.

(b) Demuestre que $f'(x) = 1 + 2xf(x)$.

(c) ¿Qué es $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}f(x))$?

(d) Exprese $f(x)$ por medio de una integral.

*8. **(El número π es irracional)** El Problema 6 anterior indica cómo demostrar que e es irracional, asumiendo lo contrario y llegando a una contradicción. En este problema se demuestra que π es también irracional. La demostración π se hace de nuevo por reducción al absurdo, pero es algo más complicada, por lo que la dividiremos en varias partes.

(a) Sea $f(x)$ un polinomio, y sea

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j f^{(2j)}(x)$$

Como f es un polinomio, todos los términos de la suma anterior excepto un número finito de ellos serán cero, por lo que no hay problemas de convergencia. Verifique que

$$\frac{d}{dx}(g'(x)\operatorname{sen} x - g(x)\cos x) = f(x)\operatorname{sen} x$$

y a partir de aquí que

$$\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\, dx = g(\pi) + g(0)$$

(b) Suponga que π es racional, es decir, $\pi = m/n$, siendo m y n enteros positivos. Se demostrará que esto conduce una contradicción y, por tanto, no puede ser cierto. Escoja un entero positivo k tal que $(\pi m)^k/k! < 1/2$ (¿por qué es esto posible?). Considere el polinomio

$$f(x) = \frac{x^k(m - nx)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m^{k-j}(-n)^j x^{j+k}$$

Demuestre que $0 < f(x) < 1/2$ para $0 < x < \pi$, y a partir de aquí, que $0 < \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\, dx < 1$. Así, $0 < g(\pi) + g(0) < 1$, donde $g(x)$ está definida como en el apartado (a).

(c) Demuestre que la derivada i-ésima de $f(x)$ se expresa como

$$f^{(i)}(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m^{k-j}(-n)^j \frac{(j+k)!}{(j+k-i)!} x^{j+k-i}$$

(d) Demuestre que $f^{(i)}(0)$ es un entero para $i = 0, 1, 2, \ldots$ (*Sugerencia*: Observe, para $i < k$, que $f^{(i)}(0) = 0$ y, para $i > 2k$, que $f^{(i)}(x) = 0$ para todo x. Para $k \leqslant i \leqslant 2k$, demuestre que sólo un término de la suma de $f^{(i)}(0)$ es distinto de 0, y que este término es un entero. Necesitará utilizar el hecho de que los coeficientes binomiales $\binom{k}{j}$ son enteros).

(e) Demuestre que $f(\pi - x) = f(x)$ para todo x, y a partir de aquí, que $f^{(i)}(\pi)$ es también un entero para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$ Por tanto, si $g(x)$ se define como en el apartado (a), entonces $g(\pi) + g(0)$ es un entero. Esto contradice la conclusión del apartado (b) y demuestra que π no puede ser racional.

*9. **(Una serie asintótica)** Aplique integración por partes para demostrar que

$$\int_0^x e^{-1/t}\,dt = e^{-1/x}\sum_{n=2}^{N}(-1)^n(n-1)!\,x^n + (-1)^{N+1}N!\int_0^x t^{N-1}e^{-1/t}\,dt$$

¿Por qué no se puede utilizar simplemente una serie de Maclaurin para aproximar este integral? Utilizando $N = 5$, calcule un valor aproximado de $\int_0^{0.1} e^{-1/t}dt$ y estime el error. Estime el error para $N = 10$ y $N = 20$.

Nótese que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)!\,x^n$ **diverge** para todo $x \neq 0$. Esto es un ejemplo de lo que se denomina **serie asintótica**. Aunque diverge, una buena selección de las sumas parciales permite obtener una buena aproximación a la función cuando x es pequeña.