CAPÍTULO P

# Preliminares

«Nos enseñaban a beber y a escupir, naturalmente —replicó la Falsa Tortuga—, y luego las diversas ramas de la Aritmética: a fumar, a reptar, a mutilar y sobre todo a dimitir».

**Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)**
de *Alicia en el País de las Maravillas*

***Introducción*** En este capítulo preliminar se revisan las cosas más importantes que hay que saber para introducirse en el cálculo. Se consideran los números reales, los sistemas de coordenadas cartesianas en el plano, las ecuaciones que representan líneas rectas, círculos y parábolas, las funciones y sus representaciones gráficas, y en particular, las funciones polinómicas y trigonométricas.

En función de los conocimientos preliminares de cálculo que se posean, se puede estar familiarizado con estos temas o no. Si es así, bastará con leer por encima este capítulo para refrescar nuestros conocimientos anteriores. Si no es así, este capítulo deberá estudiarse con detalle.

## P.1 Los números reales y la recta real

El Cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** se expresan mediante decimales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 5 &= 5.00000\ldots \\ -\tfrac{3}{4} &= -0.750000\ldots \\ \tfrac{1}{3} &= 0.3333\ldots \\ \sqrt{2} &= 1.4142\ldots \\ \pi &= 3.14159\ldots \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores los puntos suspensivos ... indican que la secuencia de dígitos decimales no finaliza nunca. En el caso de los tres primeros números anteriores, el patrón que siguen los dígitos es obvio. Por tanto, podemos saber cuáles serán los dígitos siguientes. En el caso de $\sqrt{2}$ y $\pi$ no hay un patrón obvio. Los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta que se denomina **recta real**, como se muestra en la Figura P.1. Para indicar tanto la recta real como el sistema de los números reales se utiliza el símbolo $\mathbb{R}$.

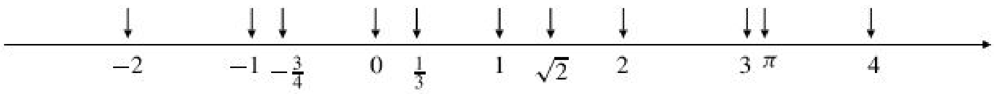



**Figura P.1** La recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales se pueden clasificar en tres categorías: propiedades algebraicas, propiedades de orden y completitud. Ya estamos familiarizados con las *propiedades algebraicas*. Más o menos significan que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto por cero), dando como resultado más números reales, y que las reglas de la aritmética son válidas.

Las *propiedades de orden* de los números reales se refieren al orden en que dichos números aparecen en la recta real. Si $x$ está a la izquierda de $y$ significa que «$x$ es menor que $y$» o que «$y$ es mayor que $x$». Lo anterior se puede expresar simbólicamente como $x < y$ o $y > x$, respectivamente. La desigualdad $x \leqslant y$ significa que bien $x < y$ o bien $x = y$. Las propiedades de orden de los números reales se resumen en las siguientes *reglas de las desigualdades*:

El símbolo $\Longrightarrow$ significa «implica»

**Reglas de las desigualdades**

Si $a$, $b$ y $c$ son números reales, entonces:

1. $a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c$
2. $a < b \quad \Longrightarrow \quad a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac < bc$
4. $a < b$ y $c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc$; en particular, $-a > -b$
5. $a > b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > 0$
6. $0 < a < b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Las Reglas 1-4 y la 6 (si $a > 0$) siguen siendo válidas cambiando $<$ y $>$ por $\leqslant$ y $\geqslant$.

Nótense especialmente las reglas para multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número. Si el número es positivo, la desigualdad se mantiene. Si es negativo, la desigualdad se invierte.

La propiedad de *completitud* del sistema de los números reales es más sutil y difícil de comprender. Una forma de enunciarla es la siguiente: Si $A$ es un conjunto cualquiera de números reales que contiene al menos un número, y existe un número real $y$ con la propiedad de que $x \leqslant y$ para todo $x$ perteneciente al conjunto $A$, entonces existe un número *$y$ mínimo* que cumple esa propiedad. Más o menos, esto significa que la recta real no contiene agujeros ni saltos. A todo punto de dicha recta le corresponde un número real. En nuestro estudio del cálculo no hará falta considerar mucho la completitud. Se utiliza generalmente para demostrar ciertos resultados importantes, en concreto, los Teoremas 8 y 9 del Capítulo 1 (estas demostraciones se incluyen en el Apéndice III, pero en general no son necesarias en cursos elementales de cálculo, sino más bien en cursos avanzados de análisis matemático). Sólo necesitaremos utilizar la propiedad de completitud en el Capítulo 9, en el estudio de las series infinitas.

El conjunto de los números reales tiene algunos subconjuntos especialmente importantes:

(i) Los **números naturales**, o **enteros positivos**, es decir, los números 1, 2, 3, 4, ...

(ii) Los **números enteros**, es decir, los números 0, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, ...

(iii) Los **números racionales**, es decir, números que se pueden expresar en forma de una fracción $m/n$, siendo $m$ y $n$ dos enteros, y $n \neq 0$.

Precisamente, los números racionales son números reales cuyo desarrollo decimal puede:

(a) Finalizar, es decir, que termina con una secuencia de infinitos ceros, por ejemplo, $3/4 = 0.750000$.

(b) Repetirse, es decir, que finaliza con una cadena de dígitos que se repite indefinidamente. Por ejemplo, $23/11 = 2.090909... = 2.\overline{09}$ (la barra indica el patrón de dígitos que se repiten).

Los números reales que no son racionales se denominan *números irracionales*.

**Ejemplo 1** Demuestre que los números (a) $1.323232... = 1.\overline{32}$ y (b) $0.3405405405... = 0.3\overline{405}$ son números racionales, expresándolos como cociente de dos enteros.

**Solución**

(a) Sea $x = 1.323232...$ Entonces, $x - 1 = 0.323232...$ y

$$100x = 132.323232... = 132 + 0.323232... = 132 + x - 1$$

Por tanto, $99x = 131$ y $x = 131/99$.

(b) Sea $y = 0.3405405405...$ Entonces $10y = 3.405405405...$ y $10y - 3 = 0.405405405...$ Además,

$$10\,000y = 3405.405405405... = 3405 + 10y - 3$$

Por tanto, $9990y = 3402$ e $y = 3402/9990 = 63/185$. ■

El conjunto de los números racionales posee las mismas propiedades algebraicas y de orden que el de los números reales, pero no tiene la propiedad de completitud. Por ejemplo, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Por tanto existiría un hueco en la recta de los números racionales en el lugar que debería ocupar $\sqrt{2}$ [1]. Como la recta real no tiene «huecos», es el lugar ideal para el estudio de los límites y, por tanto, del cálculo.

[1] ¿Cómo sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional? Supongamos lo contrario, es decir, que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces $\sqrt{2} = m/n$, siendo $m$ y $n$ dos enteros y $n \neq 0$. Supongamos adicionalmente que la fracción $m/n$ ha sido ya reducida, es decir, que ya se han cancelado los factores comunes en el numerador y en el denominador. Debería cumplirse que $m^2/n^2 = 2$, y por tanto $m^2 = 2n^2$, que es un entero par. Por tanto, $m$ debe ser par (el cuadrado de un entero par es siempre par). Como $m$ es par, se puede expresar en la forma $m = 2k$, siendo $k$ un entero. Tenemos entonces que $4k^2 = 2n^2$ y $n^2 = 2k^2$, que es par. Por tanto, $n$ debe ser también par. Esto contradice el hecho de que $\sqrt{2}$ se puede expresar como una fracción irreducible $m/n$, ya que si es así, $m$ y $n$ no podrían ser ambos pares. Por tanto, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

## Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo** si contiene al menos dos números y contiene también todos los números reales que existen entre dos cualesquiera de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números reales $x$ tales que $x > 6$ es un intervalo, pero el conjunto de los números reales $y$ tales que $y \neq 0$ no es un intervalo (¿por qué?). Consta de dos intervalos.

Si $a$ y $b$ son números reales tales que $a < b$, entonces:

(i) El **intervalo abierto** desde $a$ hasta $b$, representado por $(a, b)$, está formado por todos los números reales $x$ que cumplen que $a < x < b$.

(ii) El **intervalo cerrado** desde $a$ hasta $b$, representado por $[a, b]$, está formado por todos los números reales $x$ que cumplen que $a \leqslant x \leqslant b$.

(iii) El **intervalo semiabierto** $[a, b)$ está formado por todos los números reales $x$ que cumplen que $a \leqslant x < b$.

(iv) El **intervalo semiabierto** $(a, b]$ está formado por todos los números reales $x$ que cumplen que $a < x \leqslant b$.

Estos intervalos se muestran en la Figura P.2. Nótese el uso de puntos vacíos para indicar los extremos de los intervalos que no están incluidos en éstos, y el uso de puntos rellenos cuando los extremos están incluidos en los intervalos. Los límites de los intervalos se denominan **extremos**.

Los intervalos de la Figura P.2 son **intervalos finitos**, y todos tienen como longitud $b - a$. Los intervalos pueden tener también longitud infinita, y en ese caso se habla de **intervalos infinitos**. La Figura P.3 muestra algunos ejemplos de intervalos infinitos. Nótese que la recta real $\mathbb{R}$ es en sí un intervalo, que se indica como $(-\infty, \infty)$. El símbolo $\infty$ («infinito») no representa ningún número real, por lo que no está permitido que pueda ser un extremo del intervalo.

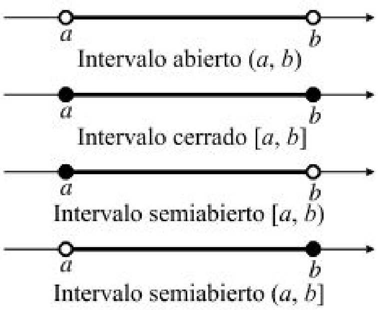



**Figura P.2** Intervalos finitos.

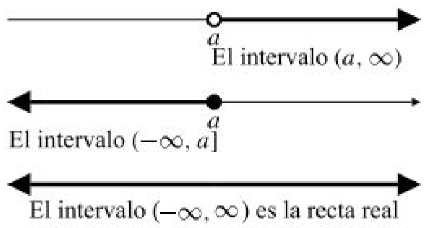



**Figura P.3** Intervalos infinitos.

**Ejemplo 2** Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese los conjuntos solución en forma de intervalos y dibújelos.

(a) $2x - 1 > x + 3$ (b) $-\dfrac{x}{3} \geqslant 2x - 1$ (c) $\dfrac{2}{x-1} \geqslant 5$

**Solución**

(a) $2x - 1 > x + 3$ Se suma 1 en ambos miembros.

$2x > x + 4$ Se resta $x$ en ambos miembros.

$x > 4$ La solución es el conjunto $(4, \infty)$.

(b) $-\dfrac{x}{3} \geqslant 2x - 1$ Se multiplican ambos miembros por $-3$.

$x \leqslant -6x + 3$ Se suma $6x$ en ambos miembros.

$7x \leqslant 3$ Se dividen los dos miembros por 7.

$x \leqslant \dfrac{3}{7}$ La solución es el intervalo $(-\infty, 3/7]$.

(c) Se pasa el 5 del segundo miembro al primero y se simplifica, expresando la desigualdad de una forma equivalente:

$$\frac{2}{x-1} - 5 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2-5(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7-5x}{x-1} \geqslant 0$$

La fracción $\dfrac{7-5x}{x-1}$ no está definida en $x = 1$, y vale 0 en $x = 7/5$. Entre esos números, toma valores positivos si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, y valores negativos si tienen distinto signo. Es sencillo organizar la información de los signos en la tabla siguiente:

| $x$ | | $1$ | | $7/5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $7-5x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(7-5x)/(x-1)$ | $-$ | indef | $+$ | $0$ | $-$ |

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad es en este caso el intervalo $(1, 7/5]$.

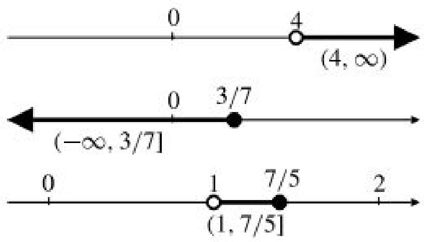



**Figura P.4** Intervalos del Ejemplo 2.

El símbolo $\Longleftrightarrow$ significa «si y sólo si» o «es equivalente a». Si $A$ y $B$ son dos sentencias, entonces $A \Longleftrightarrow B$ significa que, si una de ellas es verdadera, la otra necesariamente también lo es, por lo que ambas deben ser verdaderas, o ambas falsas.

■

Algunas veces es necesario resolver sistemas de dos o más desigualdades que se deben satisfacer simultáneamente. De momento, resolveremos cada desigualdad por separado y buscaremos qué números pertenecen a la intersección de los conjuntos solución.

**Ejemplo 3** Resuelva los sistemas de desigualdades:

(a) $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$ (b) $3x - 1 < 5x + 3 \leqslant 2x + 15$

**Solución**

(a) Utilizando la técnica del Ejemplo 2, se puede resolver la desigualdad $3 \leqslant 2x + 1$, obteniéndose $2 \leqslant 2x$ y $x \geqslant 1$. De forma similar, la desigualdad $2x + 1 \leqslant 5$ produce $2x \leqslant 4$ y $x \leqslant 2$. Por tanto, la solución del sistema (a) es el intervalo cerrado $[1, 2]$.

(b) Se resuelven las dos desigualdades como sigue:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 1 < 5x + 3 \\ -1 - 3 < 5x - 3x \\ -4 < 2x \\ -2 < x \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{c} 5x + 3 \leqslant 2x + 15 \\ 5x - 2x \leqslant 15 - 3 \\ 3x \leqslant 12 \\ x \leqslant 4 \end{array}\right.$$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-2, 4]$.

■

La resolución de inecuaciones de segundo grado se basa en la resolución de las correspondientes ecuaciones de segundo grado.

**Ejemplo 4** **Inecuaciones de segundo grado**

Resuelva:

(a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ (b) $2x^2 + 1 > 4x$

**Solución**

(a) El trinomio $x^2 - 5x + 6$ se puede factorizar en el producto $(x-2)(x-3)$, que será negativo sólo cuando uno (y sólo uno) de los factores sea negativo. Como $x - 3 < x - 2$, eso ocurre cuando $x - 3 < 0$ y $x - 2 > 0$. Por tanto, debe cumplirse que $x < 3$ y $x > 2$, y la solución es entonces el intervalo abierto $(2, 3)$.

(b) La inecuación $2x^2 + 1 > 4x$ es equivalente a $2x^2 - 4x + 1 > 0$. La ecuación de segundo grado correspondiente, $2x^2 - 4x + 1 = 0$, es de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, y se resuelve aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado (*véase* la Sección P.6):

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que la inecuación dada se puede expresar en la forma:

$$\left(x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0$$

Esto se cumple si los factores del miembro izquierdo son ambos positivos o ambos negativos simultáneamente. Por tanto, debe cumplirse que $x < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ o que $x > 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. El conjunto solución es la *unión* de los intervalos $\left(-\infty, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right)$.

Nótese el uso del símbolo $\cup$ para indicar la **unión** de intervalos. Un número real pertenece a una unión de intervalos si pertenece al menos a uno de los intervalos. Necesitaremos también considerar la intersección de intervalos. Un número real pertenece a una **intersección** de intervalos si pertenece a *todos* los intervalos. Para indicar la intersección se utilizará el símbolo $\cap$. Por ejemplo,

$$[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3) \qquad \text{donde} \qquad [1, 3) \cup [2, 4] = [1, 4]$$

**Ejemplo 5** Resuelva la desigualdad $\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}$ y represente el conjunto solución.

**Solución** Podríamos pensar en multiplicar por $x(x-1)$ para eliminar las fracciones de la inecuación, pero esto requeriría considerar tres casos por separado (¿cuáles son?). En lugar de esto, combinaremos las dos fracciones en una sola:

$$\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x} \quad \iff \quad \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \quad \iff \quad \frac{5x-2}{x(x-1)} < 0$$

Examinaremos los signos de los tres factores de la fracción izquierda para determinar dónde es negativa dicha fracción:

| $x$ | | 0 | | 2/5 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\dfrac{5x-2}{x(x-1)}$ | $-$ | indef | $+$ | 0 | $-$ | indef | $+$ |

El conjunto solución de la inecuación dada es la unión de esos dos intervalos, es decir, $(-\infty, 0) \cup$ $\cup\, (2/5, 1)$. *Véase* la Figura P.5.

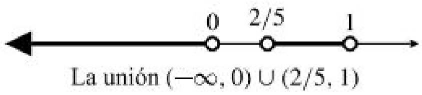



**Figura P.5** El conjunto solución del Ejemplo 5.

## El valor absoluto

El **valor absoluto** o **módulo** de un número $x$, que se escribe $|x|$ (y se lee «valor absoluto de $x$»), se define mediante la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las líneas verticales del símbolo $|x|$ se denominan **barras de valor absoluto**.

**Ejemplo 6** $|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = 5$

Nótese que $|x| \geqslant 0$ para todo número real $x$, y que $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Algunas personas encuentran confuso decir que $|x| = -x$ cuando $x$ es negativo, pero es correcto, ya que en este caso $-x$ es positivo. El símbolo $\sqrt{a}$ siempre indica la raíz cuadrada *no negativa* de $a$, por lo que una definición alternativa de $|x|$ sería $|x| = \sqrt{x^2}$.

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No debe escribirse $\sqrt{a^2} = a$, a menos que se sepa que $a \geqslant 0$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia (no negativa) desde $x$ hasta 0 en la recta real. De forma más general $|x-y|$ representa la distancia (no negativa) entre los puntos $x$ e $y$ de la recta real, ya que esta distancia es la misma que la del punto $x - y$ al 0 (*véase* la Figura P.6):

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{si } x \geqslant y \\ y-x, & \text{si } x < y \end{cases}$$

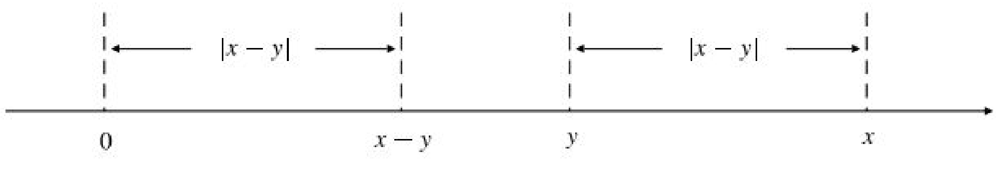



**Figura P.6** $|x-y|$ = distancia de $x$ a $y$.

La función valor absoluto posee las siguientes propiedades:

**Propiedades del valor absoluto**

1. $|-a| = |a|$. El valor absoluto de un número y de su negativo es el mismo.
2. $|ab| = |a||b|$ y $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$. El valor absoluto del producto (o cociente) de dos números es el producto (o cociente) de sus valores absolutos.
3. $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ (**desigualdad del triángulo**). El valor absoluto de una suma o diferencia de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

Las dos primeras propiedades se pueden comprobar considerando separadamente los casos que resultan de que tanto $a$ como $b$ pueden ser positivos o negativos. La tercera propiedad se deduce de las dos anteriores ya que $\pm 2ab \leqslant |2ab| = 2|a||b|$. Por tanto, tenemos que

$$|a \pm b|^2 = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$\leqslant |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Y tomando la raíz cuadrada (positiva) de ambos miembros se obtiene que $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$. Este resultado se denomina «desigualdad del triángulo», ya que se sigue del hecho geométrico de que la longitud de cualquier lado de un triángulo no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Por ejemplo, si suponemos que los números 0, $a$ y $b$ de la recta real son los vértices de un «triángulo» degenerado, entonces las longitudes de los lados de dicho triángulo son $|a|$, $|b|$ y $|a - b|$. El triángulo es degenerado porque todos sus vértices están en la misma línea recta.

## Ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos

La ecuación $|x| = D$ (siendo $D > 0$) tiene dos soluciones, $x = D$ y $x = -D$, es decir, los dos puntos de la recta real que están a una distancia $D$ del origen. Las ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos se pueden resolver algebraicamente dividiéndolas en casos de acuerdo con la definición de valor absoluto, pero a menudo se pueden resolver también geométricamente interpretando los valores absolutos como distancias. Por ejemplo, la inecuación $|x - a| < D$ expresa que la distancia desde $x$ hasta $a$ es menor que $D$, y por tanto $x$ debe estar entre $a - D$ y $a + D$ (o, lo que es lo mismo, $a$ debe estar entre $x - D$ y $x + D$). Si $D$ es un número positivo, entonces,

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert x\rvert = D$ | $\iff$ | o $x = -D$ o $x = D$ |
| $\lvert x\rvert < D$ | $\iff$ | $-D < x < D$ |
| $\lvert x\rvert \leqslant D$ | $\iff$ | $-D \leqslant x \leqslant D$ |
| $\lvert x\rvert > D$ | $\iff$ | o $x < -D$ o $x > D$ |

De forma más general,

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert x - a\rvert = D$ | $\iff$ | o $x = a - D$ o $x = a + D$ |
| $\lvert x - a\rvert < D$ | $\iff$ | $a - D < x < a + D$ |
| $\lvert x - a\rvert \leqslant D$ | $\iff$ | $a - D \leqslant x \leqslant a + D$ |
| $\lvert x - a\rvert > D$ | $\iff$ | o $x < a - D$ o $x > a + D$ |

**Ejemplo 7** Resuelva: (a) $|2x+5|=3$ (b) $|3x-2| \leqslant 1$

**Solución**

(a) $|2x+5|=3 \iff 2x+5=\pm 3$. Por tanto, o bien $2x=-3-5=-8$ o bien $2x=3-5=-2$. Las soluciones son $x=-4$ o $x=-1$.

(b) $|3x-2| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant 3x-2 \leqslant 1$. Resolvemos la pareja de inecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} -1 &\leqslant 3x-2 \\ -1+2 &\leqslant 3x \\ 1/3 &\leqslant x \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned} 3x-2 &\leqslant 1 \\ 3x &\leqslant 1+2 \\ x &\leqslant 1 \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, la solución es el intervalo $[1/3, 1]$.

**Observación** Veamos cómo se podría haber resuelto geométricamente el apartado (b) del Ejemplo 7, interpretando las inecuaciones como distancias:

$$|3x-2| = \left|3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right| = 3\left|x-\frac{2}{3}\right|$$

Por tanto, la inecuación expresa que

$$3\left|x-\frac{2}{3}\right| \leqslant 1 \qquad \text{o} \qquad \left|x-\frac{2}{3}\right| \leqslant \frac{1}{3}$$

Esto indica que la distancia de $x$ a $2/3$ no debe ser mayor que $1/3$. Las soluciones de $x$ deben estar entonces entre $1/3$ y $1$, ambos extremos incluidos (*véase* la Figura P.7).

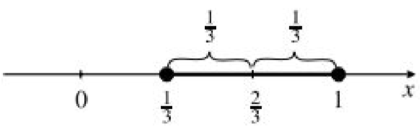



**Figura P.7** El conjunto solución del Ejemplo 7(b).

**Ejemplo 8** Resuelva la ecuación $|x+1| = |x-3|$.

**Solución** La ecuación dice que $x$ está equidistante de $-1$ y $3$. Por tanto, $x$ es el punto intermedio entre $-1$ y $3$. Es decir, $x=(-1+3)/2=1$. De otra manera, la ecuación dada dice que o bien $x+1=x-3$ o bien $x+1=-(x-3)$. La primera de las dos ecuaciones no tiene solución, y la segunda tiene como solución $x=1$.

**Ejemplo 9** ¿Qué valores satisfacen la inecuación $\left|5-\dfrac{2}{x}\right| < 3$?

**Solución** Tenemos que

$$\left|5-\frac{2}{x}\right| < 3 \iff -3 < 5-\frac{2}{x} < 3 \qquad \text{Se resta 5 en cada miembro.}$$

$$-8 < -\frac{2}{x} < -2 \qquad \text{Se divide cada miembro por } -2.$$

$$4 > \frac{1}{x} > 1 \qquad \text{Se toman inversos.}$$

$$\frac{1}{4} < x < 1$$

En los cálculos anteriores hemos manejado un sistema de dos inecuaciones simultáneamente, en lugar de separarlas en dos inecuaciones como hemos hecho en ejemplos anteriores. Nótense las diversas reglas de manejo de inecuaciones que se han empleado aquí. Al multiplicar una inecuación por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad. También se cambia el sentido al tomar inversos en los dos miembros de una inecuación si son positivos. Por tanto, la inecuación dada se cumple para todo $x$ perteneciente al intervalo abierto $(1/4, 1)$.

## Ejercicios P.1

En los Ejercicios 1 y 2, exprese el número racional mediante la repetición de los dígitos decimales. Utilice una barra sobre el conjunto de dígitos que se repiten.

**1.** $\frac{2}{9}$ **2.** $\frac{1}{11}$

En los Ejercicios 3 y 4, exprese los números en forma de fracción irreducible de enteros.

**3.** $0.\overline{12}$ **4.** $3.2\overline{7}$

**5.** Exprese los números racionales 1/7, 2/7, 3/7 y 4/7 mediante repetición de dígitos decimales (utilice una calculadora para obtener tantos dígitos decimales como sea posible). ¿Se puede observar algún tipo de pauta? Intente predecir cómo serán las expresiones de las fracciones 5/7 y 6/7, y compruebe sus predicciones.

**6.** ¿Pueden dos decimales diferentes representar el mismo número? ¿Qué número representa $0.999... = 0.\overline{9}$?

En los Ejercicios 7-12, obtenga el conjunto de todos los números reales $x$ que satisfacen la condición dada, expresándolos como un intervalo o unión de intervalos.

**7.** $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 5$ **8.** $x < 2$ y $x \geqslant -3$

**9.** $x > -5$ o $x < -6$ **10.** $x \leqslant -1$

**11.** $x > -2$ **12.** $x < 4$ o $x \geqslant 2$

En los Ejercicios 13-26, resuelva las inecuaciones dadas, expresando la solución como un intervalo o unión de intervalos.

**13.** $-2x > 4$ **14.** $3x + 5 \leqslant 8$

**15.** $5x - 3 \leqslant 7 - 3x$ **16.** $\frac{6 - x}{4} \geqslant \frac{3x - 4}{2}$

**17.** $3(2 - x) < 2(3 + x)$ **18.** $x^2 < 9$

**19.** $\frac{1}{2 - x} < 3$ **20.** $\frac{x + 1}{x} \geqslant 2$

**21.** $x^2 - 2x \leqslant 0$ **22.** $6x^2 - 5x \leqslant -1$

**23.** $x^3 > 4x$ **24.** $x^2 - x \leqslant 2$

**25.** $\frac{x}{2} \geqslant 1 + \frac{4}{x}$ **26.** $\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}$

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 27-32.

**27.** $|x| = 3$ **28.** $|x - 3| = 7$

**29.** $|2t + 5| = 4$ **30.** $|1 - t| = 1$

**31.** $|8 - 3s| = 9$ **32.** $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

En los Ejercicios 33-40, escriba los intervalos definidos por las inecuaciones dadas.

**33.** $|x| < 2$ **34.** $|x| \leqslant 2$

**35.** $|s - 1| \leqslant 2$ **36.** $|t + 2| < 1$

**37.** $|3x - 7| < 2$ **38.** $|2x + 5| < 1$

**39.** $\left|\frac{x}{2} - 1\right| \leqslant 1$ **40.** $\left|2 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 41 y 42, resuelva las inecuaciones dadas interpretándolas como aseveraciones sobre distancias en la recta real.

**41.** $|x + 1| > |x - 3|$ **42.** $|x - 3| < 2|x|$

**43.** No caiga en la trampa de aceptar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales es cierta la anterior ecuación? ¿Para qué números es falsa?

**44.** Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

**45.** Demuestre que la inecuación

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

se cumple para todos los números reales $a$ y $b$.

## P.2 Coordenadas cartesianas del plano

La posición de cualquier punto del plano se puede medir con respecto a dos rectas reales perpendiculares entre sí que se cruzan en el origen. Estas líneas se denominan **ejes coordenados** del plano. Generalmente (pero no siempre), denominaremos eje $x$ a una de esas rectas y la dibujaremos horizontalmente, con los números $x$ creciendo hacia la derecha. La otra recta se denominará eje $y$, y la dibujaremos verticalmente, con los números $y$ creciendo hacia arriba. El punto de intersección de los ejes coordenados (es decir, el punto donde $x$ e $y$ valen ambas cero) se denomina **origen**, y se representa frecuentemente mediante la letra $O$.

Sea $P$ un punto cualquiera del plano. Dibujemos una recta perpendicular al eje $x$ que pasa por el punto $P$. Si $a$ es el valor de $x$ donde la recta corta al eje $x$, se dice que $a$ es la **coordenada *x*** del punto $P$. Análogamente, la **coordenada *y*** de $P$ es el valor de $y$ donde la línea perpendicular al eje $y$ que pasa por $P$ corta a dicho eje $y$. El **par ordenado** $(a, b)$ se denomina **pareja de coordenadas**, o **coordenadas cartesianas**, del punto $P$. Utilizaremos la notación $P(a, b)$ para indicar simultáneamente el punto $P$ y sus coordenadas $(a, b)$ (*véase* la Figura P.8). Nótese que la coordenada $x$ es la que se pone en primer lugar en la pareja de coordenadas. Existe una correspondencia uno a uno entre las parejas de coordenadas y los puntos del plano. Todo punto posee una pareja de coordenadas única y cada pareja de coordenadas determina un único punto. El conjunto formado por los ejes de coordenadas y las parejas de coordenadas se denomina **sistema de coordenadas cartesianas** del plano, debido al filósofo del siglo XVII René Descartes, que creó la geometría analítica (de coordenadas). Cuando se incorpora este sistema de coordenadas, el plano pasa a denominarse **plano cartesiano**. Nótese que se utiliza la misma notación $(a, b)$ para indicar las coordenadas cartesianas de un punto en el plano y para indicar un intervalo abierto en la recta real. Esto, sin embargo, no debe ser fuente de confusiones dado que el significado exacto estará claro por el contexto.

La Figura P.9 muestra las coordenadas de algunos puntos del plano. Nótese que todos los puntos del eje $x$ tienen 0 como coordenada $y$. Para indicar esos puntos, generalmente escribiremos sólo su coordenada $x$. De forma similar, los puntos del eje $y$ tienen $x = 0$, y los podemos etiquetar utilizando únicamente su coordenada $y$.

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones denominadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se numeran del I al IV, como se muestra en la Figura P.10. El **primer cuadrante** es el superior derecho. Las dos coordenadas de los puntos pertenecientes al primer cuadrante son números positivos. Los números pertenecientes al cuadrante III tienen ambas coordenadas negativas. En el cuadrante II sólo la coordenada $y$ es positiva, y en el cuadrante IV sólo la coordenada $x$ es positiva.

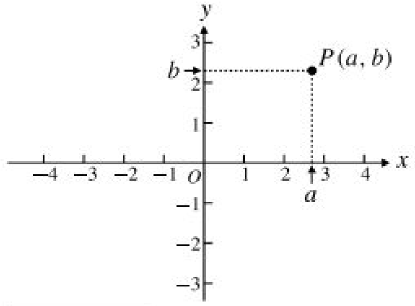



**Figura P.8** Los ejes coordenados y un punto $P$ con coordenadas $(a, b)$.

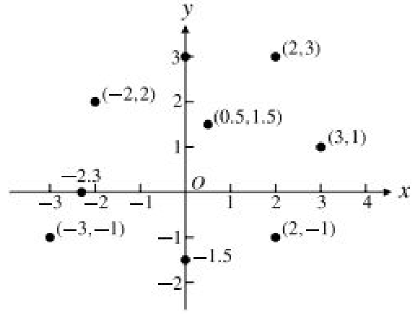



**Figura P.9** Algunos puntos con sus coordenadas.

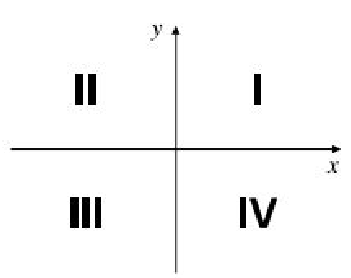



**Figura P.10** Los cuatro cuadrantes.

## Escalas de los ejes

Al dibujar datos en el plano coordenado o al pintar fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medida, no es necesario utilizar la misma escala en los dos ejes de coordenadas. Si, por ejemplo, se dibuja la altura en función del tiempo de una piedra que cae, no hay ninguna razón que obligue a poner la marca que indica 1 en el eje de las alturas a la misma distancia del origen que la marca que indica 1 en el eje de tiempos.

Cuando se dibujan funciones cuyos valores no representan medidas físicas, y cuando se dibujan figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría o sus propiedades trigonométricas, es habitual hacer iguales las escalas de los dos ejes coordenados. La unidad de distancia mide entonces lo mismo en el eje horizontal y en el eje vertical. Como en el caso de un mapa topográfico o de un dibujo a escala, los segmentos de rectas de la misma longitud aparentarán tenerla en el dibujo, y los ángulos que parezcan iguales lo serán en realidad. Algunos resultados geométricos que obtendremos posteriormente, como la relación entre las pendientes de dos líneas perpendiculares, sólo son válidas si se utilizan escalas iguales en los dos ejes.

Los ordenadores y las calculadoras gráficas son otra cosa. Las escalas horizontales y verticales en las gráficas generadas por esos dispositivos son en general diferentes, por lo que las distancias, las pendientes y los ángulos resultan distorsionados. Las circunferencias pueden parecer elipses, y los cuadrados pueden parecer rectángulos o incluso paralelogramos. Los ángulos rectos pueden parecer agudos u obtusos. Estas circunstancias requieren un cuidado especial al interpretar lo que vemos. El software de ordenador de alta calidad para dibujo de gráficos cartesianos permite generalmente al usuario compensar estos problemas de escala ajustando la *relación de aspecto* (relación entre la escala vertical y la horizontal). Algunas pantallas de ordenador también admiten un ajuste limitado. Al utilizar software de gráficos, es conveniente ajustar nuestra configuración particular de hardware/software de forma que los diámetros vertical y horizontal de un círculo dibujado parezcan iguales.

## Incrementos y distancias

Cuando una partícula se mueve de un punto a otro, los cambios netos en sus coordenadas se denominan incrementos. Se calculan restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Un **incremento** en una variable es el cambio neto en los valores de dicha variable. Si $x$ cambia de $x_1$ a $x_2$, entonces el incremento de $x$ es $\Delta x = x_2 - x_1$.

**Ejemplo 1** Calcule los incrementos de las coordenadas de una partícula que se desplaza desde $A(3, -3)$ hasta $B(-1, 2)$.

**Solución** Los incrementos (*véase* la Figura P.11) son:

$$\Delta x = -1 - 3 = -4 \quad \text{y} \quad \Delta y = 2 - (-3) = 5$$

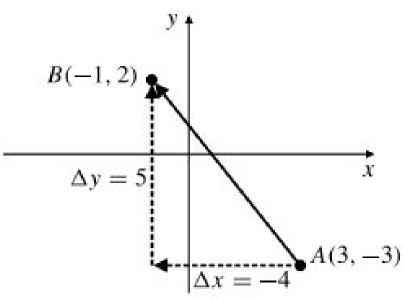



**Figura P.11** Incrementos en $x$ e $y$.

■

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, el segmento de recta $PQ$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo $PCQ$, como muestra la Figura P.12. Los lados $PC$ y $CQ$ de dicho triángulo tienen longitudes

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad |\Delta y| = |y_2 - y_1|$$

que son respectivamente la *distancia horizontal* y la *distancia vertical* entre $P$ y $Q$. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de $PQ$ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos longitudes anteriores.

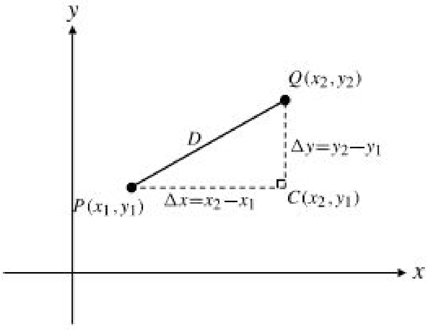



**Figura P.12** La distancia de $P$ a $Q$ es $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

**Fórmula de la distancia entre dos puntos del plano**

La distancia $D$ entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$D = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ejemplo 2** La distancia desde $A(3, -3)$ hasta $B(-1, 2)$ en la Figura P.11 es

$$\sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} \text{ unidades}$$

**Ejemplo 3** La distancia desde el origen $O(0, 0)$ hasta un punto $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Gráficas

La **gráfica** de una ecuación (o inecuación) que relaciona las variables $x$ e $y$ es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (o inecuación).

**Ejemplo 4** La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al origen es $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$. Esos puntos están sobre una **circunferencia** de radio 2 centrada en el origen. Esta circunferencia es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ (*véase* la Figura P.13(a)).

**Ejemplo 5** Los puntos $(x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 4$ están todos a una distancia $\leqslant 2$ del origen. La gráfica de esta inecuación es, por tanto, el disco de radio 2 centrado en el origen (*véase* la Figura P.13(b)).

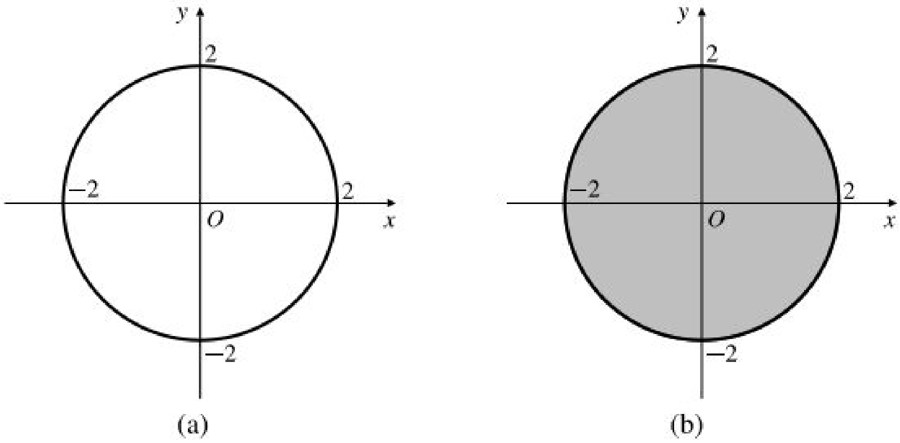



**Figura P.13**
(a) La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
(b) El disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

**Ejemplo 6** Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación son (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 4) y (−2, 4). Estos puntos (y todos los demás que cumplen la ecuación) se encuentran sobre una curva que se denomina **parábola** (*véase* la Figura P.14).

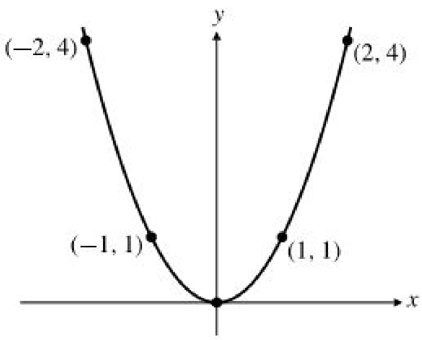



**Figura P.14** La parábola $y = x^2$.

## Líneas rectas

Dados dos puntos del plano, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, denominaremos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ **desplazamiento** y **elevación**, respectivamente, entre $P_1$ y $P_2$. Dos puntos como éstos determinan siempre una única **línea recta** (a menudo denominada simplemente **recta**) que pasa por ambos. La denominaremos recta $P_1P_2$.

Cualquier recta no vertical en el plano tiene siempre la propiedad de que la relación

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

toma el *mismo valor* para dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta (*véase* la Figura P.15). La constante $m = \Delta y/\Delta x$, en una recta no vertical, se denomina **pendiente**.

**Ejemplo 7** La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, -3)$ y $B(-1, 2)$ es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-3)}{-1 - 3} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

La pendiente de una recta nos indica su dirección y su tasa (o velocidad) de crecimiento (o decrecimiento). Una recta de pendiente positiva va creciendo hacia la derecha, mientras que una recta con pendiente negativa va decreciendo hacia la derecha. Cuanto mayor sea el valor ab-

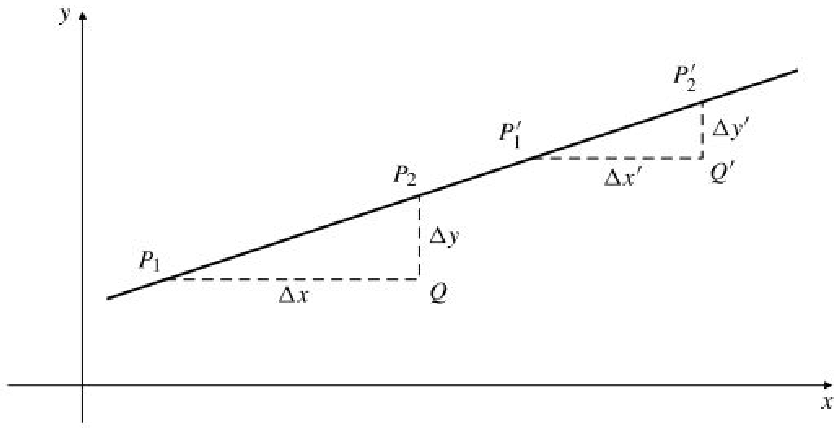



**Figura P.15** $\Delta y/\Delta x = \Delta y'/\Delta x'$ porque los triángulos $P_1QP_2$ y $P'_1Q'P'_2$ son semejantes.

soluto de la pendiente, más acusado es el crecimiento o el decrecimiento. Dado que $\Delta x$ vale cero en una recta vertical, no podemos formar el cociente *n*, la pendiente de la recta vertical está *indefinida*.

La dirección de una recta se puede medir también mediante un ángulo. La **inclinación** de una recta se define como el mínimo ángulo, medido en sentido contrario al de las agujas del reloj, formado entre la dirección positiva del eje $x$ y la recta. El la Figura P.16, el ángulo $\phi$ (la letra griega «phi») es la inclinación de la recta $L$. La inclinación $\phi$ de cualquier recta cumple que $0° \leqslant \phi \leqslant 180°$. La inclinación de una recta horizontal es de 0° y la de una recta vertical, de 90°.

Suponiendo que se usa la misma escala en los dos ejes coordenados, la relación entre la pendiente $m$ de una recta no vertical y su inclinación se muestra en la Figura P.16:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi$$

(La función trigonométrica tan se define en la Sección P.7).

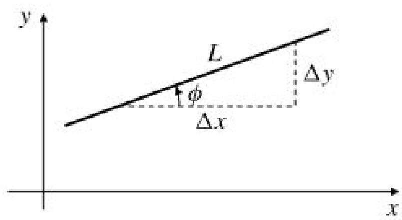



**Figura P.16** La recta $L$ tiene una inclinación de $\phi$.

Las rectas paralelas tienen la misma inclinación. Si no son verticales deberán tener, por tanto, la misma pendiente. Lo contrario también es cierto: dos rectas con la misma pendiente tienen la misma inclinación y, por tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales $L_1$ y $L_2$ son perpendiculares, sus pendientes $m_1$ y $m_2$ cumplen la relación $m_1 m_2 = -1$, por lo que la pendiente de una de ellas es el *inverso cambiado de signo* de la pendiente de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

(Este resultado asume también que los dos ejes coordenados tienen la misma escala). Para verlo, observemos en la Figura P.17 que

$$m_1 = \frac{AD}{BD} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{AD}{DC}$$

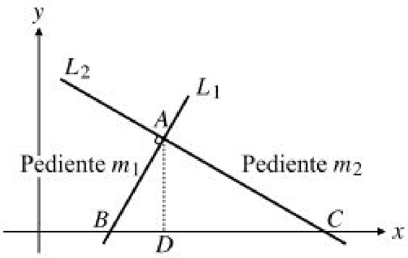



**Figura P.17** $\triangle ABD$ es similar a $\triangle CAD$.

Como $\triangle ABD$ es similar a $\triangle CAD$, tenemos que $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{AD}$ y, por tanto,

$$m_1 m_2 = \left(\frac{DC}{AD}\right)\left(-\frac{AD}{DC}\right) = -1$$

## Ecuaciones de la recta

Las líneas rectas son figuras particularmente simples, y sus ecuaciones correspondientes son también simples. Todos los puntos de una recta vertical que pasan por el punto $a$ en el eje $x$ tienen sus coordenadas $x$ iguales a $a$. Por tanto, la ecuación de esa recta es $x = a$. Análogamente, $y = b$ es la ecuación de una recta horizontal que corta al eje $y$ en $b$.

**Ejemplo 8** Las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto (3, 1) (*véase* la Figura P.18) son, respectivamente, $y = 1$ y $x = 3$.

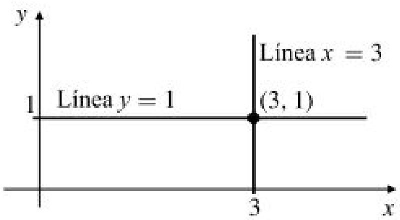



**Figura P.18** Las rectas $y = 1$ y $x = 3$.

Para escribir la ecuación de una recta no vertical $L$, es suficiente conocer su pendiente $m$ y las coordenadas de un punto de dicha recta, $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ es otro punto cualquiera de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

por lo que

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o} \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

La ecuación

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Se denomina **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto $(x_1, y_1)$, y tiene pendiente $m$.

**Ejemplo 9** Obtenga la ecuación de la recta de pendiente $-2$ que pasa por el punto $(1, 4)$.

**Solución** Sustituimos $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ y $m = -2$ en la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con lo que se obtiene

$$y = -2(x - 1) + 4 \quad \text{o} \quad y = -2x + 6$$

**Ejemplo 10** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(3, 5)$.

**Solución** La pendiente de la recta es $m = \dfrac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3$. Podemos utilizar ahora esta pendiente junto con uno cualquiera de los dos puntos dados para obtener la ecuación de la recta. Si se usa el punto $(1, -1)$, se obtiene

$$y = 3(x - 1) - 1, \quad \text{que se simplifica en} \quad y = 3x - 4$$

Si se usa el punto $(3, 5)$ se obtiene

$$y = 3(x - 3) + 5, \quad \text{que se simplifica también en} \quad y = 3x - 4$$

En cualquier caso, la ecuación de la recta es $y = 3x - 4$.

La coordenada $y$ del punto donde una recta no vertical corta al eje $y$ se denomina **ordenada en el origen** (*véase* la Figura P.19). Análogamente, la **abscisa en el origen** de una recta no horizontal es la coordenada $x$ del punto donde la recta corta al eje $x$. Una recta de pendiente $m$ y ordenada en el origen $b$ pasa por el punto $(0, b)$, por lo que su ecuación es

$$y = m(x - 0) + b \qquad \text{o, más simple,} \quad y = mx + b$$

Una recta con pendiente $m$ y abscisa en el origen $a$ pasa por el punto $(a, 0)$, por lo que su ecuación es

$$y = m(x - a)$$

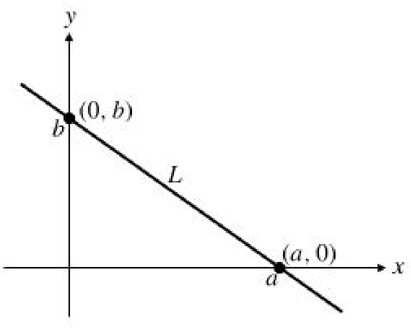



**Figura P.19** La recta $L$ tiene ordenada en origen $b$ y abscisa en el origen $a$.

La ecuación $y = mx + b$ se denomina **ecuación explícita** de la recta de pendiente $m$ y ordenada en el origen $b$.

La ecuación $y = m(x - a)$ es la ecuación de la recta de pendiente $m$ y abscisa en el origen $a$.

**Ejemplo 11** Calcule la pendiente, la ordenada en el origen y la abscisa en el origen de la recta cuya ecuación es $8x + 5y = 20$.

**Solución** Despejando $y$ de la ecuación obtenemos

$$y = \frac{20 - 8x}{5} = -\frac{8}{5}x + 4$$

Comparando la expresión anterior con la forma explícita general $y = mx + b$, puede verse que la pendiente de la recta es $m = -8/5$ y la ordenada en el origen es $b = 4$.

Para calcular la abscisa en el origen se hace $y = 0$ en la ecuación de la recta y se despeja $x$, con lo que se obtiene $8x = 20$, o $x = 5/2$. Por tanto, la abscisa en el origen es $a = 5/2$. ■

La ecuación $Ax + By = C$ (donde $A$ y $B$ no son simultáneamente cero) se denomina **ecuación lineal general** en $x$ e $y$ porque su gráfica es siempre una línea recta, y la ecuación de cualquier recta se puede expresar de esa forma.

Muchas magnitudes de interés se relacionan mediante ecuaciones lineales. Una vez que conocemos que la relación entre dos variables es lineal, dicha relación se puede obtener a partir de cualquier pareja de valores que se correspondan, de la misma forma que hemos obtenido la ecuación de una recta conocidos dos puntos cualesquiera de ella.

**Ejemplo 12** La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit ($F$) y grados Celsius ($C$) es una ecuación de la forma $F = mC + b$. El agua se congela a $F = 32°$ o $C = 0°$, y hierve a $F = 212°$ o $C = 100°$. Por tanto,

$$32 = 0m + b \qquad \text{y} \qquad 212 = 100m + b$$

por lo que $b = 32$ y $m = (212 - 32)/100 = 9/5$. Entonces, la relación se expresa mediante la ecuación lineal

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \text{o} \qquad C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

■

## Ejercicios P.2

En los Ejercicios 1-4, una partícula se mueve desde $A$ hasta $B$. Calcule los incrementos netos $\Delta x$ e $\Delta y$ de las coordenadas de las partículas. Calcule también la distancia desde $A$ hasta $B$.

**1.** $A(0, 3)$, $B(4, 0)$

**2.** $A(-1, 2)$, $B(4, -10)$

**3.** $A(3, 2)$, $B(-1, -2)$

**4.** $A(0.5, 3)$, $B(2, 3)$

**5.** Una partícula inicia su movimiento en el punto $A(-2, 3)$ y el cambio en sus coordenadas es $\Delta x = 4$ y $\Delta y = -7$. Calcule su nueva posición.

**6.** Una partícula llega al punto $(-2, 2)$ después de que sus coordenadas tengan un cambio de $\Delta x = -5$ y $\Delta y = 1$. ¿Cuál fue su posición original?

Describa los gráficos de las ecuaciones e inecuaciones de los Ejercicios 7-12.

**7.** $x^2 + y^2 = 1$

**8.** $x^2 + y^2 = 2$

**9.** $x^2 + y^2 \leqslant 1$

**10.** $x^2 + y^2 = 0$

**11.** $y \geqslant x^2$

**12.** $y < x^2$

En los Ejercicios 13-14, calcule la ecuación de (a) la recta vertical y (b) la recta horizontal que pasa por los puntos dados.

**13.** $(-2, 5/3)$

**14.** $(\sqrt{2}, -1.3)$

En los Ejercicios 15-18, escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $P$ y tiene pendiente $m$.

**15.** $P(-1, 1)$, $m = 1$

**16.** $P(-2, 2)$, $m = 1/2$

**17.** $P(0, b)$, $m = 2$

**18.** $P(a, 0)$, $m = -2$

En los Ejercicios 19 y 20, indique si el punto $P$ está por encima, por debajo o sobre la recta dada.

**19.** $P(2, 1)$, $2x+3y=6$

**20.** $P(3, -1)$, $x-4y=7$

En los Ejercicios 21-24, escriba la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

**21.** $(0, 0)$, $(2, 3)$

**22.** $(-2, 1)$, $(2, -2)$

**23.** $(4, 1)$, $(-2, 3)$

**24.** $(-2, 0)$, $(0, 2)$

En los Ejercicios 25-26, escriba la ecuación de la recta con pendiente $m$ y ordenada en el origen $b$.

**25.** $m = -2$, $b = \sqrt{2}$

**26.** $m = -1/2$, $b = -3$

En los Ejercicios 27-30, calcule la ordenada en el origen, la abscisa en el origen y la pendiente de las rectas dadas, y dibuje sus gráficas.

**27.** $3x + 4y = 12$

**28.** $x + 2y = -4$

**29.** $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 2$

**30.** $1.5x - 2y = -3$

En los Ejercicios 31 y 32, obtenga las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P$ y (a) son paralelas a o (b) son perpendiculares a las rectas dadas.

**31.** $P(2, 1)$, $y = x + 2$ **32.** $P(-2, 2)$, $2x + y = 4$

**33.** Calcule el punto de intersección de las rectas

$$3x - 4y = -6 \quad \text{y} \quad 2x - 3y = 13$$

**34.** Calcule el punto de intersección de las rectas

$$2x + y = 8 \quad \text{y} \quad 5x - 7y = 1$$

**35.** Dada una recta que no sea horizontal ni vertical, ni pase por el origen, demuestre que su ecuación se puede escribir en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, siendo $a$ su abscisa en el origen y $b$ su ordenada en el origen.

**36.** Determine la abscisa y la ordenada en el origen y dibuje la gráfica de la recta $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

**37.** Calcule la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(3, -1)$.

**38.** Una recta pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(k, 1)$, y su abscisa en el origen vale 3. Calcule $k$.

**39.** El coste de imprimir $x$ copias de un folleto es de $C$ €, siendo $C = Ax + B$ para ciertos valores de las constantes $A$ y $B$. Si imprimir 10 000 copias vale 5000 € e imprimir 15 000 copias vale 6000 €, ¿cuánto costará imprimir 100 000 copias?

**40.** **(Fahrenheit vs. Celsius)** En el plano $FC$, dibuje la gráfica de la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ que relaciona las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit que vimos en el Ejemplo 12. Dibuje en la misma gráfica la recta cuya ecuación es $F = C$. ¿Existe alguna temperatura para la cual un termómetro graduado en grados Celsius marque lo mismo que un termómetro graduado en grados Fahrenheit? Si es así, calcule dicha temperatura.

### Geometría

**41.** Demuestre, calculando las longitudes de sus tres lados, que el triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 1)$, $B(6, 4)$ y $C(5, -3)$ es isósceles.

**42.** Demuestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ y $C(2, 0)$ es equilátero.

**43.** Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son tres vértices de un cuadrado y calcule el cuarto vértice.

**44.** Calcule las coordenadas del punto medio del segmento $P_1P_2$, entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

**45.** Calcule las coordenadas del punto que en un segmento entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está a dos tercios del recorrido desde $P_1$ a $P_2$.

**46.** El punto $P$ está en el eje $x$ y el punto $Q$ está en la recta $y = -2x$. El punto $(2, 1)$ es el punto medio del segmento $PQ$. Calcule las coordenadas del punto $P$.

En los Ejercicios 47 y 48, interprete la ecuación como una aseveración sobre distancias y determine así la gráfica de la ecuación.

**47.** $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4$

**48.** $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

**49.** ¿Para qué valor de $k$ es la recta $2x + ky = 3$ perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para qué valor de $k$ son ambas rectas paralelas?

**50.** Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 3$ y $2x - 3y = -1$.

## P.3 Gráficas de ecuaciones cuadráticas

En esta sección se revisan los círculos, parábolas, elipses e hipérbolas, cuyas gráficas representan ecuaciones cuadráticas de dos variables.

### Circunferencias y discos

La **circunferencia** de **centro** $C$ y **radio** $a$ está forma por el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia $a$ del punto $C$.

La distancia del punto $P(x, y)$ al punto $C(h, k)$ es $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, por lo que la ecuación de la circunferencia de radio $a > 0$ y centro $C(h, k)$ es

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a$$

La ecuación anterior se puede expresar de una forma más simple elevando al cuadrado ambos miembros.

**Ecuación estándar de una circunferencia**

La ecuación de la circunferencia de radio $a > 0$ y centro $(h, k)$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

En particular, la ecuación de la circunferencia de radio $a$ centrada en el origen $(0, 0)$ es

$$x^2 + y^2 = a^2$$

**Ejemplo 1** La circunferencia de radio 2 y centro el punto $(1, 3)$ (*véase* la Figura P.20) tiene la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

**Ejemplo 2** La circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 7$ está centrada en el punto $(-2, 1)$ y su radio es $\sqrt{7}$ (*véase* la Figura P.21).

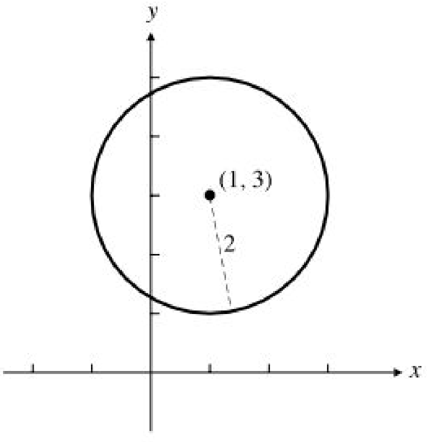



**Figura P.20** La circunferencia de ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

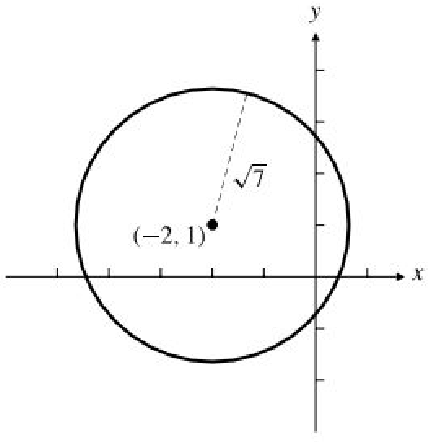



**Figura P.21** La circunferencia de ecuación $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 7$.

Si se desarrollan los cuadrados de la ecuación estándar $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ y se agrupan todas las constantes en el miembro derecho de la ecuación, resulta

$$x^2 - 2hx + y^2 - 2ky = a^2 - h^2 - k^2$$

Una ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c$$

puede representar una circunferencia, un único punto, o ningún punto en absoluto. Para saber en qué caso estamos, se completan los cuadrados del miembro izquierdo. Como $x^2 + 2ax$ son los dos primeros términos del desarrollo del cuadrado $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, para completar el cuadrado del término en $x$ se suma $a^2$ a los dos miembros de la ecuación (nótese que $a^2$ es *el* *cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$*). Análogamente, se suma $b^2$ en los dos miembros para completar el cuadrado en $y$. Entonces, la ecuación queda

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = c + a^2 + b^2$$

Si $c + a^2 + b^2 > 0$, el gráfico corresponde a una circunferencia de centro $(-a, -b)$ y radio $\sqrt{c+a^2+b^2}$. Si $c+a^2+b^2=0$, la gráfica sólo consta del punto $(-a, -b)$. Si $c+a^2+b^2<0$, la gráfica no contiene ningún punto.

**Ejemplo 3** Calcule el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$.

**Solución** Obsérvese que $x^2 - 4x$ son los dos primeros términos del desarrollo del binomio $(x-2)^2 = x^2 - 4x - 4$, y que $y^2 + 6y$ son los dos primeros términos del cuadrado $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$. Por tanto, hay que sumar $4 + 9$ en ambos miembros, con lo que se obtiene

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3 + 4 + 9 \qquad \text{o} \qquad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Por tanto, la ecuación representa una circunferencia de centro $(2, -3)$ y radio 4. ■

El conjunto de todos los puntos *dentro* de una circunferencia se denomina **interior** de la circunferencia, o **disco abierto**. El conjunto de todos los puntos que están *fuera* de una circunferencia se denomina **exterior** de la circunferencia (*véase* la Figura P.22). El interior de una circunferencia junto con la propia circunferencia se denomina **disco cerrado**, o simplemente **disco**. La inecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 \leqslant a^2$$

representa el disco de radio $|a|$ centrado en $(h, k)$.

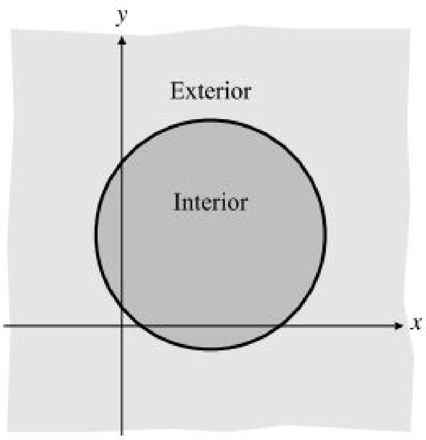



**Figura P.22** Interior de la circunferencia (sombreado) y exterior de la circunferencia (sin sombrear).

**Ejemplo 4** Identifique las gráficas de

(a) $x^2 + 2x + y^2 \leqslant 8$ (b) $x^2 + 2x + y^2 < 8$ (c) $x^2 + 2x + y^2 > 8$

**Solución** Completando el cuadrado en la ecuación $x^2 + y^2 + 2x = 8$:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 8 + 1$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 9$$

puede verse que la ecuación representa una circunferencia de radio 3 centrada en $(-1, 0)$. La inecuación (a) representa el disco (cerrado) con el mismo centro y radio (*véase* la Figura P.23). La inecuación (b) representa el interior de la circunferencia (o disco abierto). La inecuación (c) representa el exterior de la circunferencia.

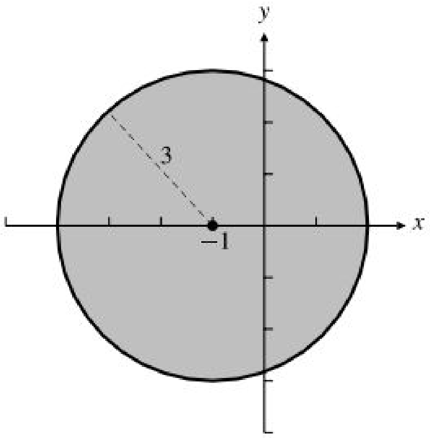



**Figura P.23** El disco $x^2 + y^2 + 2x \leqslant 8$.

## Ecuaciones de parábolas

Una **parábola** es una curva del plano cuyos puntos están a la misma distancia de un punto fijo $F$ y de una recta $L$ que no pasa por $F$. El punto $F$ se denomina **foco** de la parábola, y la recta $L$ **directriz** de la parábola. La recta perpendicular a $L$ que pasa por $F$ se denomina **eje** de la parábola, y el punto $V$ donde se encuentran la parábola y su eje se denomina **vértice**.

Obsérvese que el vértice $V$ de una parábola está equidistante del foco $F$ y del punto de la directriz $L$ más cercano a $F$. Si la directriz es horizontal o vertical, y el vértice está en el origen, la ecuación de la parábola será particularmente simple.

**Ejemplo 5** Calcule la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(0, p)$ y cuya directriz es la recta $L$ de ecuación $y = -p$.

**Solución** Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Entonces (*véase* la Figura P.24) las distancias de $P$ a $F$ y al punto más cercano $Q$ de la recta $L$ se expresan

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{y^2 + 2py + p^2}$$

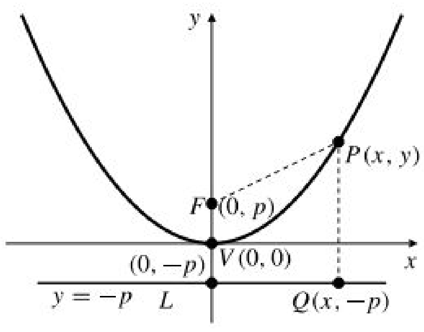



**Figura P.24** La parábola $4py = x^2$, con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$.

Como $P$ está en la parábola, $PF = PQ$, y por tanto los cuadrados de las distancias deben ser también iguales:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Simplificando,

$$x^2 = 4py \qquad \text{o} \qquad y = \frac{x^2}{4p} \qquad \text{(denominada } \textbf{forma estándar}\text{)}$$

La Figura P.24 ilustra la situación para $p > 0$. La parábola se abre hacia arriba y es simétrica respecto a su eje, el eje $y$. Si $p < 0$, el foco $(0, p)$ estará por debajo del origen y la directriz $y = -p$ estará por encima del origen. En este caso la parábola se abrirá hacia abajo en vez de hacia arriba.

La Figura P.25 muestra varias parábolas con ecuaciones de la forma $y = ax^2$, para valores de $a$ positivos y negativos.

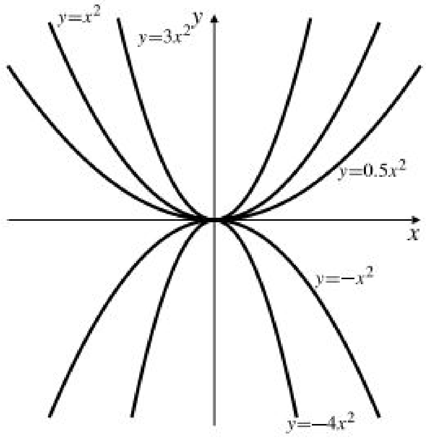



**Figura P.25** Algunas parábolas de la forma $y = ax^2$.

**Ejemplo 6** La ecuación de la parábola con foco $(0, 1)$ y directriz $y = -1$ es $y = x^2/4$ o $x^2 = 4y$ (se toma $p = 1$ en la ecuación estándar).

**Ejemplo 7** Calcule el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$.

**Solución** La ecuación dada se ajusta a la forma estándar $y = x^2/(4p)$ para $4p = -1$. Por tanto, $p = -1/4$. El foco está en el punto $(0, -1/4)$, y la directriz es la recta $y = 1/4$.

Intercambiando los papeles de $x$ e $y$ en el proceso anterior de obtención de la ecuación estándar se puede demostrar que la ecuación

$$y^2 = 4px \qquad \text{o} \qquad x = \frac{y^2}{4p} \qquad \text{(ecuación estándar)}$$

representa una parábola con foco en el punto $(p, 0)$ y directriz la recta vertical $x = -p$. El eje es el eje $x$.

## Propiedades de reflexión de las parábolas

Una de las principales aplicaciones de las parábolas es su uso como reflectores de luz y de ondas radioeléctricas. Los rayos que parten del foco de la parábola se reflejan formando un rayo paralelo a su eje, como muestra la Figura P.26. De la misma forma, todos los rayos que lleguen a una parábola paralelos a su eje se reflejarán concentrándose en el foco. Esta propiedad es la razón por la que los telescopios y reflectores utilizan espejos parabólicos y por la que los radiotelescopios y las antenas de microondas tienen forma parabólica. En la Sección 8.1 examinaremos más detenidamente esta propiedad de las parábolas.

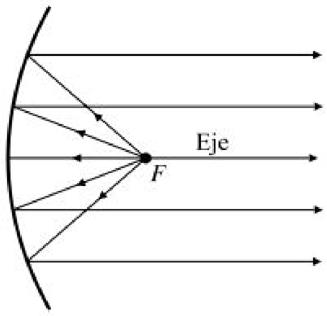



**Figura P.26** Reflexión en una parábola.

## Escalado de una gráfica

La gráfica de una ecuación se puede comprimir o expandir horizontalmente sustituyendo $x$ por un múltiplo de $x$. Si $a$ es un entero positivo, al sustituir en una ecuación $x$ por $ax$ se multiplican por un factor $1/a$ las distancias horizontales en la gráfica de la ecuación (*véase* la Figura P.27). Al sustituir $y$ por $ay$ se multiplican las distancias verticales de la misma forma.

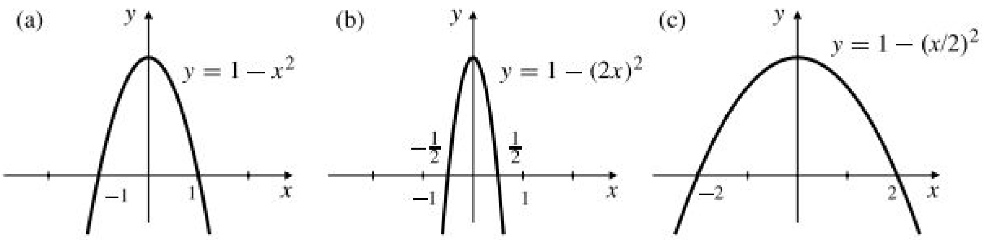
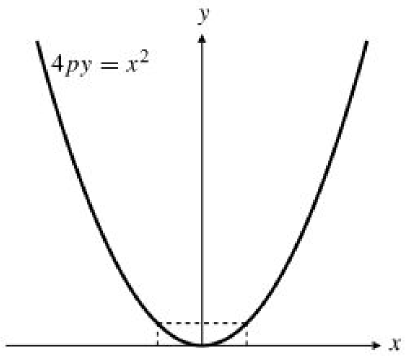



**Figura P.27** Escalado horizontal:
(a) Gráfica de $y = 1 - x^2$.
(b) Gráfica de (a) comprimida horizontalmente.
(c) Gráfica de (a) expandida horizontalmente.

Puede parecernos sorprendente que, como las circunferencias, las parábolas sean figuras geométricas *similares*. Pueden tener tamaños diferentes, pero todas tienen la misma forma. Se puede cambiar el *tamaño* de una gráfica que representa a una ecuación en $x$ e $y$, conservando su forma, aplicando el mismo factor de escala a ambas coordenadas. Si se aplica un factor de escala a la ecuación $4py = x^2$, sustituyendo $x$ e $y$ por $4px$ y $4py$, respectivamente, se obtiene $4p(4py) = (4px)^2$, o $y = x^2$. Por tanto, la parábola general $4py = x^2$ tiene la misma forma que la parábola concreta $y = x^2$, como se ilustra en la Figura P.28.



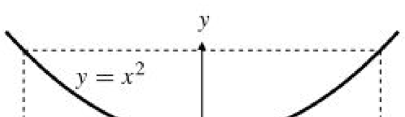




**Figura P.28** Las dos parábolas son similares. Compárense las partes dentro de los rectángulos.

## Desplazamiento de una gráfica

La gráfica de una ecuación (o inecuación) se puede desplazar horizontalmente $c$ unidades sustituyendo $x$ por $x - c$, o verticalmente sustituyendo $y$ por $y - c$.

**Desplazamientos**

Para desplazar una gráfica $c$ unidades a la derecha se sustituye en la ecuación o inecuación $x$ por $x - c$ (si $c < 0$, el desplazamiento será a la izquierda).

Para desplazar una gráfica $c$ unidades hacia arriba se sustituye en la ecuación o inecuación $y$ por $y - c$ (si $c < 0$, el desplazamiento será hacia abajo).

**Ejemplo 8** La gráfica de $y = (x - 3)^2$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha. La gráfica de $y = (x + 1)^2$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la izquierda (*véase* la Figura P.29(a)).

**Ejemplo 9** La gráfica de $y = x^2 + 1$ (o $y - 1 = x^2$) es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad hacia arriba. La gráfica de $y = x^2 - 3$ (o $y - (-3) = x^2$) es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades hacia abajo (*véase* la Figura P.29(b)).

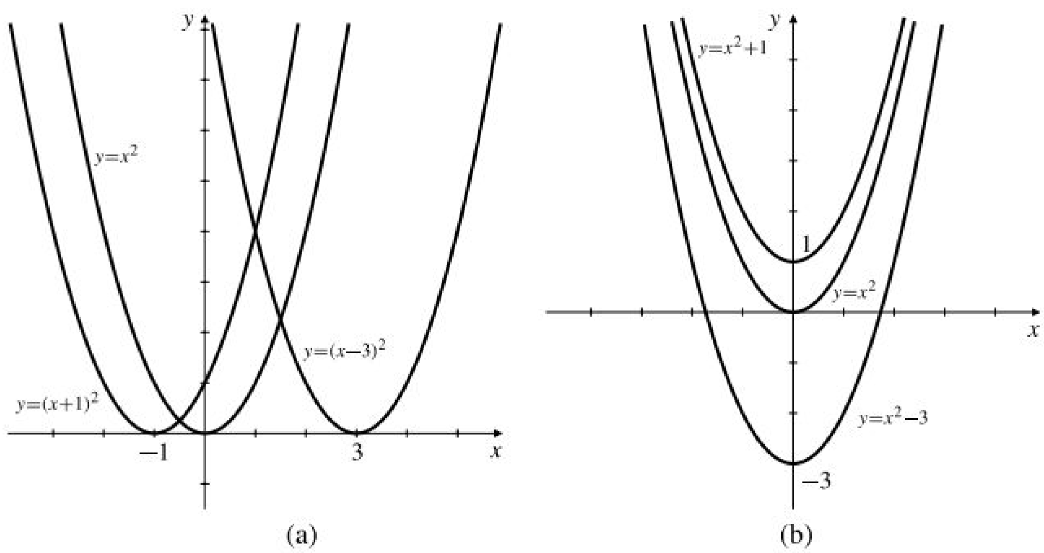



**Figura P.29** (a) Desplazamientos horizontales de $y = x^2$.
(b) Desplazamientos verticales de $y = x^2$.

**Ejemplo 10** La circunferencia de ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$, con centro en $(h, k)$ y radio $a$, se puede obtener desplazando la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ de radio $a$ centrada en el origen $h$ unidades hacia la derecha y $k$ unidades hacia arriba. Estos desplazamientos corresponden a sustituir $x$ por $x - h$ e $y$ por $y - k$.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyo eje es paralelo al eje $y$. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Para obtener el vértice $(h, k)$ basta con completar el cuadrado y escribir la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

**Ejemplo 11** Describa la gráfica de $y = x^2 - 4x + 3$.

**Solución** La ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ representa una parábola que se abre hacia arriba. Para calcular su vértice y su eje completamos el cuadrado:

$$y = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1, \qquad \text{por tanto,} \quad y - (-1) = (x-2)^2$$

Es decir, la curva es la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo. Por tanto, su vértice es el punto $(2, -1)$ y su eje es la recta $x = 2$. Como el foco de $y = x^2$ es el punto $(0, 1/4)$, el foco de la parábola del ejemplo es el punto $(0 + 2, 1/4 - 1)$ o $(2, -3/4)$ (*véase* la Figura P.30).

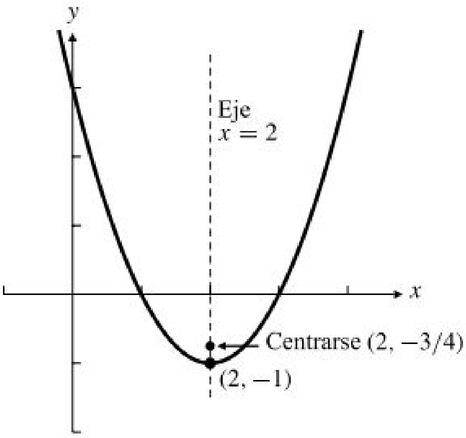



**Figura P.30** La parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

## Elipses e hipérbolas

Si $a$ y $b$ son dos números positivos, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa un curva denominada **elipse**, inscrita en el rectángulo $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ (¿por qué?). Si $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio $a$ centrada en el origen. Si $a \neq b$, la elipse es una circunferencia que ha sido deformada aplicando un factor de escala diferente en las dos direcciones coordenadas.

La elipse está centrada en el origen, y pasa por los cuatro puntos $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-a, 0)$ y $(0, -b)$ (*véase* la Figura P.31). Los segmentos entre $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, y entre $(0, -b)$ y $(0, b)$ se denominan **ejes principales** de la elipse. El más largo de los dos se denomina **eje mayor** y el más corto, **eje menor**.

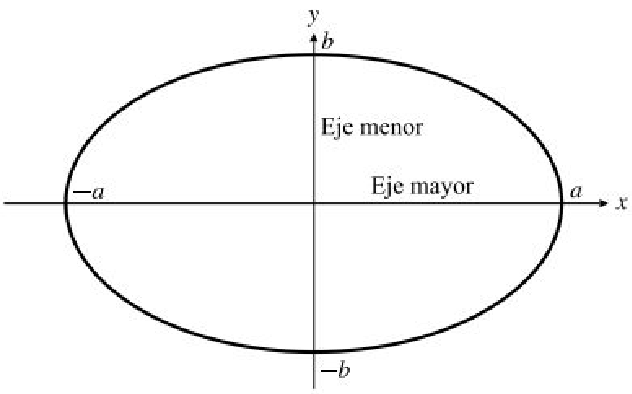



**Figura P.31** La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**Ejemplo 12** La ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ representa una elipse cuyo eje mayor va desde $(-3, 0)$ hasta $(3, 0)$, y cuyo eje menor va desde $(0, -2)$ hasta $(0, 2)$.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa una curva denominada **hipérbola**, con centro en el origen y que pasa por los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ (*véase* la Figura P.32). La curva tiene dos partes (que se denominan **ramas**). Cada rama se aproxima a dos rectas (denominadas **asíntotas**), a medida que se aleja del origen. Las ecuaciones de las asíntotas son

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

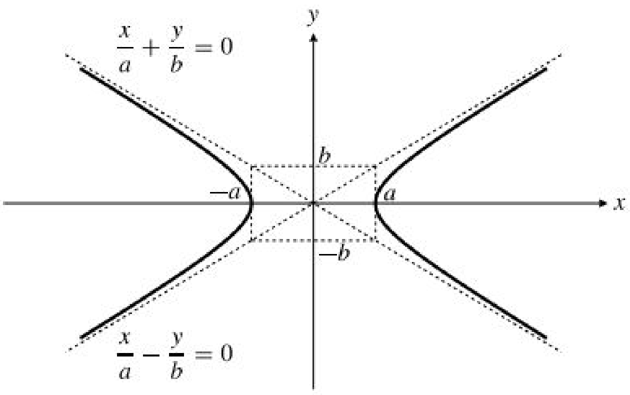



**Figura P.32** La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sus asíntotas.

La ecuación $xy = 1$ representa una hipérbola que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ y cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Es, de hecho, la hipérbola $x^2 - y^2 = 2$, rotada 45º alrededor del origen en sentido contrario al de las agujas del reloj (*véase* la Figura P.33). Este tipo de hipérbolas se denominan **hipérbolas rectangulares**, ya que la intersección de sus asíntotas forma ángulos rectos.

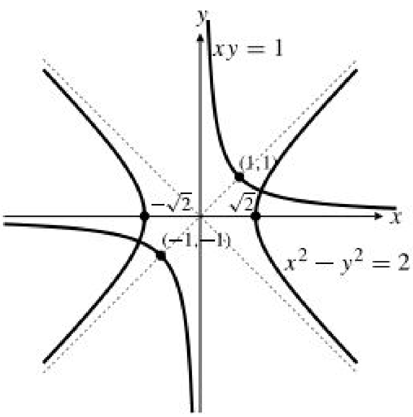



**Figura P.33** Dos hipérbolas rectangulares.

En el Capítulo 8 estudiaremos con más detalle las elipses e hipérbolas.

## Ejercicios P.3

En los Ejercicios 1-4, escriba la ecuación de la circunferencia de centro $C$ y radio $r$.

**1.** $C(0, 0)$, $r = 4$ **2.** $C(0, 2)$, $r = 2$

**3.** $C(-2, 0)$, $r = 3$ **4.** $C(3, -4)$, $r = 5$

En los Ejercicios 5-8, calcule el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones se proporcionan.

**5.** $x^2 + y^2 - 2x = 3$ **6.** $x^2 + y^2 + 4y = 0$

**7.** $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ **8.** $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

Describa las regiones definidas por las inecuaciones o parejas de inecuaciones de los Ejercicios 9-16.

**9.** $x^2 + y^2 > 1$ **10.** $x^2 + y^2 < 4$

**11.** $(x + 1)^2 + y^2 \leqslant 4$ **12.** $x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$

**13.** $x^2 + y^2 > 1$, $x^2 + y^2 < 4$

**14.** $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$

**15.** $x^2 + y^2 < 2x$, $x^2 + y^2 < 2y$

**16.** $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$, $x + y > 1$

**17.** Escriba una inecuación que represente el interior de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio $\sqrt{6}$.

**18.** Escriba una inecuación que represente el exterior de la circunferencia de centro $(2, -3)$ y radio 4.

**19.** Escriba una pareja de inecuaciones que representen la parte del interior de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$ que está a la derecha de la recta vertical que pasa por el punto $(1, 0)$.

**20.** Escriba una pareja de inecuaciones que representen el exterior de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2 que está en el interior de la circunferencia de centro $(1, 3)$ que pasa por el origen.

En los Ejercicios 21-24, escriba la ecuación de la parábola cuyos ejes y directrices se proporcionan.

**21.** Foco: $(0, 4)$ Directriz: $y = -4$

**22.** Foco: $(0, -1/2)$ Directriz: $y = 1/2$

**23.** Foco: $(2, 0)$ Directriz: $x = -2$

**24.** Foco: $(-1, 0)$ Directriz: $x = 1$

En los Ejercicios 25-28, calcule los focos y directrices de las parábolas definidas por las ecuaciones, y dibuje una gráfica con las parábolas, sus focos y sus directrices.

**25.** $y = x^2/2$ **26.** $y = -x^2$

**27.** $x = -y^2/4$ **28.** $x = y^2/16$

**29.** La Figura P.34 muestra la gráfica de la ecuación $y = x^2$ y cuatro versiones desplazadas de la misma. Obtenga las ecuaciones de las versiones desplazadas.

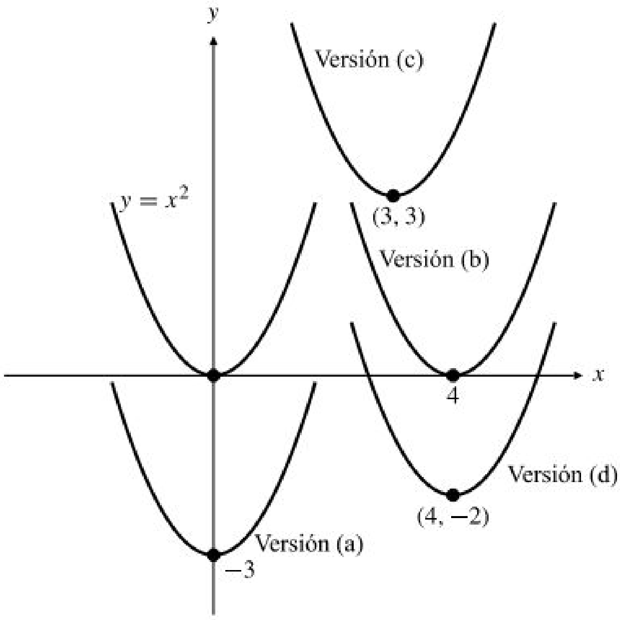



**Figura P.34**

**30.** Indique qué ecuaciones resultan de desplazar la recta $y = mx$

(a) Horizontalmente para hacerla pasar por el punto $(a, b)$.

(b) Verticalmente para hacerla pasar por el punto $(a, b)$.

En los Ejercicios 31-34 se modifica la escala de la gráfica $y = \sqrt{x + 1}$ en la forma indicada. Obtenga la ecuación de la gráfica resultante.

**31.** Las distancias horizontales se multiplican por 3.

**32.** Las distancias verticales se dividen por 4.

**33.** Las distancias horizontales se multiplican por 2/3.

**34.** Las distancias horizontales se dividen por 4 y las verticales se multiplican por 2.

En los Ejercicios 35-38, obtenga la ecuación de la gráfica que resulta de desplazar la gráfica correspondiente a la ecuación dada en la forma que se indica.

**35.** $y = 1 - x^2$ abajo 1, izquierda 1

**36.** $x^2 + y^2 = 5$ arriba 2, izquierda 4

**37.** $y = (x - 1)^2 - 1$ abajo 1, derecha 1

**38.** $y = \sqrt{x}$ abajo 2, izquierda 4

Calcule los puntos de intersección de las parejas de curvas de los Ejercicios 35-42.

**39.** $y = x^2 + 3, \quad y = 3x + 1$

**40.** $y = x^2 - 6, \quad y = 4x - x^2$

**41.** $x^2 + y^2 = 25, \quad 3x + 4y = 0$

**42.** $2x^2 + 2y^2 = 5, \quad xy = 1$

En los Ejercicios 43-50, identifique y dibuje las curvas representadas por las ecuaciones dadas.

**43.** $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

**44.** $9x^2 + 16y^2 = 144$

**45.** $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

**46.** $(x-1)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 4$

**47.** $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

**48.** $x^2 - y^2 = -1$

**49.** $xy = -4$

**50.** $(x-1)(y+2) = 1$

**51.** Indique cuál es el efecto sobre la gráfica de una ecuación en $x$ e $y$ de

(a) Sustituir $x$ por $-x$.
(b) Sustituir $y$ por $-y$.

**52.** Indique cuál es el efecto sobre la gráfica de una ecuación en $x$ e $y$ de sustituir simultáneamente $x$ por $-x$ e $y$ por $-y$.

**53.** Dibuje la gráfica de $|x| + |y| = 1$.

## P.4 Funciones y sus gráficas

El área de un círculo depende de su radio. La temperatura de ebullición del agua depende de la altitud respecto al nivel del mar. El interés de una inversión depende del tiempo que se mantenga aquélla.

Siempre que una cantidad dependa de otra, se dice que la primera es función de la segunda. Por ejemplo, el área $A$ de un círculo depende de su radio $r$ de acuerdo con la fórmula

$$A = \pi r^2$$

por lo que podemos decir que el área es una función del radio. La fórmula es una *regla* que indica cómo calcular un *único* valor de salida del área $A$ en función de los valores que tome el radio $r$.

El conjunto de todos los posibles valores del radio se denomina **dominio** de la función. El conjunto de todos los posibles valores del área es el **rango** de la función. Como los círculos no pueden tener radios ni áreas negativos, el dominio y el rango de la función correspondiente al área del círculo es el intervalo $[0, \infty)$, es decir, el conjunto de los números reales no negativos.

El rango y el dominio de una función pueden ser cualquier tipo de objeto. No tienen que ser números necesariamente. No obstante, en la mayor parte de este libro, el dominio y el rango de una función serán conjuntos de números reales.

En cálculo es frecuente referirse a una función genérica sin tener en mente una fórmula concreta. Para indicar que $y$ es una función de $x$ se escribe

$$y = f(x)$$

que se lee como «$y$ es igual a $f$ de $x$». En esta notación, debida al matemático del siglo XIX Leonhard Euler, la función se representa mediante el símbolo $f$. La variable $x$, denominada **variable independiente**, representa un valor de entrada del dominio de $f$. La variable $y$, denominada **variable dependiente**, representa el correspondiente valor de salida $f(x)$ en el intervalo de $f$.

**DEFINICIÓN 1**

Una **función** $f$ de un conjunto $D$ en un conjunto $S$ es una regla que asigna un *único* elemento $f(x)$ de $S$ a cada uno de los elementos $x$ de $D$.

En esta definición $D = \mathcal{D}(f)$ (que se lee «$D$ de $f$») es el dominio de la función $f$. El rango de $f$, $\mathcal{R}(f)$, es el subconjunto de $S$ formado por todos los *valores* $f(x)$ de la función. Una función puede verse como una especie de máquina (*véase* la Figura P.35) que produce un valor de salida $f(x)$ en su rango siempre que se introduce un valor $x$ de su dominio.

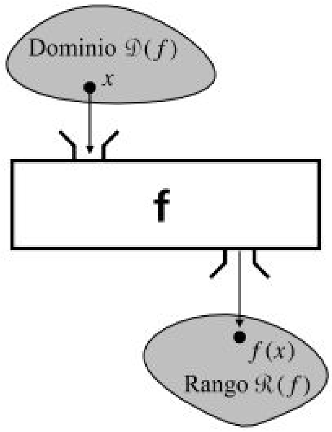



**Figura P.35** La función como una máquina.

Hay varias formas de representar simbólicamente una función. Por ejemplo, la función cuadrado de un número, que transforma un número real $x$ en su cuadrado $x^2$, se puede indicar:

(a) Mediante una fórmula como $y = x^2$, que utiliza una variable dependiente $y$ para indicar el valor de la función.

(b) Mediante una fórmula como $f(x) = x^2$, que define un símbolo de función $f$ para indicar la función.

(c) Mediante una regla de transformación como $x \to x^2$ (léase «$x$ se transforma en $x^2$»).

En este libro utilizaremos generalmente las opciones (a) o (b) a la hora de definir funciones. En rigor, para denotar una función deberíamos utilizar $f$ en vez de $f(x)$, ya que esto último indica el valor de la función en el punto $x$. Sin embargo, como se trata de un uso común, a menudo indicaremos la función como $f(x)$ para nombrar explícitamente la variable de la que depende $f$. A veces resulta conveniente utilizar la misma letra para indicar la variable dependiente y el símbolo de la función. Por ejemplo, la función del área del círculo se puede escribir como $A = f(r) = \pi r^2$ o como $A = A(r) = \pi r^2$. En el último caso $A$ se utiliza para indicar la variable dependiente y el nombre de la función.

**Ejemplo 1** El volumen de una esfera de radio $r$ se calcula mediante la función

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

para $r \geqslant 0$. Por tanto, el volumen de una esfera de radio 3 metros es

$$V(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

Nótese que la variable $r$ se sustituye por el valor concreto 3 en la fórmula que define la función, para obtener el valor de dicha función en $r = 3$.

**Ejemplo 2** Una función $F$ está definida para todos los números reales $t$ como

$$F(t) = 2t + 3$$

Calcule los valores de salida de $F$ que corresponden a los valores de entrada de 0, 2, $x + 2$ y $F(2)$.

**Solución** En cada caso se sustituye $t$ en la definición de $F$ por el valor de entrada:

$$\begin{aligned} F(0) &= 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3 \\ F(2) &= 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7 \\ F(x+2) &= 2(x+2) + 3 = 2x + 7 \\ F(F(2)) &= F(7) = 2(7) + 3 = 17 \end{aligned}$$

## Convenio para el dominio

Una función no queda apropiadamente definida hasta que se especifica su dominio. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ definida para todos los números reales $x \geqslant 0$ es diferente de la función $g(x) = x^2$ definida para todos $x$ reales porque sus dominios son diferentes, incluso aunque tomen los mismos valores en todos los puntos donde están definidas. En los Capítulos 1-9 vamos a tratar con funciones reales (funciones cuyos valores de entrada y de salida son números reales). Cuando el dominio de una función no se indique explícitamente, asumiremos que el dominio es el mayor conjunto de números reales a los que la función asigne valores reales. Por tanto, si se habla de la función $x^2$ sin especificar un dominio, asumiremos que se trata de la función $g(x)$ anterior.

**Convenio para el dominio**

Cuando una función $f$ se defina sin especificar su dominio, se supondrá que su dominio está formado por todos los números reales $x$ para los que el valor de la función $f(x)$ es un número real.

En la práctica, generalmente es sencillo determinar el dominio de una función $f(x)$ dada por una fórmula explícita. Sólo hay que excluir aquellos valores de $x$ que producirían una división por 0 o tomar una raíz par de un número negativo.

**Ejemplo 3** **La función raíz cuadrada.** El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el intervalo $[0, \infty)$, ya que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Tenemos, por ejemplo, que $f(0) = 0$, $f(4) = 2$ y $f(10) \approx 3.16228$. Nótese que, aunque existen dos números cuyo cuadrado es 4, concretamente $-2$ y 2, sólo *uno* de esos números, 2, es la raíz cuadrada de 4 (recuérdese que una función asigna un *único* valor a cada elemento de su dominio; no se puede asignar dos valores diferentes a una misma entrada). La **función raíz cuadrada** $\sqrt{x}$ siempre indica la raíz cuadrada *no negativa* de $x$. Las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 4$ son $x = \sqrt{4} = 2$ y $x = -\sqrt{4} = -2$.

**Ejemplo 4** El dominio de la función $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ está formado por todos los números reales, excepto $x = -2$ y $x = 2$. Expresado en términos de intervalos:

$$\mathscr{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

La mayoría de las funciones que encontraremos tendrán dominios que son intervalos o uniones de intervalos.

**Ejemplo 5** El dominio de la función $S(t) = \sqrt{1 - t^2}$ está formado por todos los números reales $t$ tales que $1 - t^2 \geqslant 0$. Por tanto debe cumplirse que $t^2 \leqslant 1$ o que $-1 \leqslant t \leqslant 1$. El dominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

## Gráficas de funciones

Dice un viejo refrán que «una imagen vale más que mil palabras». Esto es aún más cierto en el campo de las matemáticas: lo mejor para describir el comportamiento de una función es dibujar una gráfica de ésta.

La **gráfica de una función** $f$ es simplemente la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Está formada por todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas $(x, y)$ son parejas entrada-salida de la función $f$. Por tanto, un punto $(x, y)$ pertenece a la gráfica de la función $f$ si $x$ pertenece al dominio de $f$ y se cumple que $y = f(x)$.

Para dibujar la gráfica de una función, algunas veces es necesario confeccionar una tabla de pares de coordenadas $(x, f(x))$ para varios valores de $x$ en el dominio de $f$, dibujar esos puntos y después unirlos con una «curva suave».

**Ejemplo 6** Dibuje la función $f(x) = x^2$.

**Solución** Primero se realiza una tabla de valores $(x, y)$ que cumplen la ecuación $y = x^2$ (*véase* la Tabla 1). Seguidamente se dibujan los puntos y se unen mediante una curva suave (*véase* la Figura P.36(a)).

**Tabla 1.**

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |

■

¿Cómo sabemos que la gráfica debe ser suave y que no hace cosas extrañas entre los puntos que hemos calculado, como se muestra, por ejemplo, en la Figura P.36(b)? Por supuesto, siempre podríamos dibujar más puntos, más cercanos entre sí, pero ¿cómo sabemos que la gráfica se comporta de nuevo entre esos puntos como hemos dibujado? En el Capítulo 4, el cálculo nos proporcionará útiles herramientas para responder a esas preguntas.

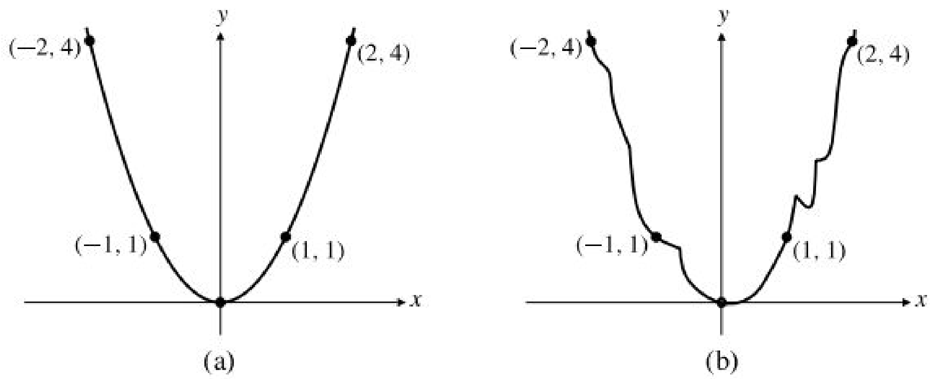



**Figura P.36** (a) Gráfica correcta de $f(x) = x^2$.
(b) Gráfica incorrecta de $f(x) = x^2$.

Algunas funciones aparecen a menudo en las aplicaciones, por lo que es conveniente familiarizarse con sus gráficas. Algunas de ellas se muestran en las Figuras P.37-P.46. Es conveniente estudiarlas durante un rato, y merece la pena acordarse de ellas. Nótese, en particular, la gráfica de la función **valor absoluto**, $f(x) = |x|$, que se muestra en la Figura P.46. Está formada por dos semirrectas: $y = -x$ para $x < 0$ e $y = x$ para $x \geqslant 0$.

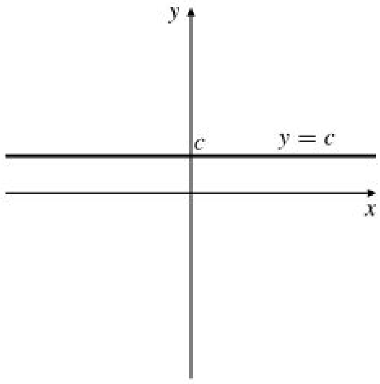



**Figura P.37** Gráfica de la función constante $f(x) = c$.

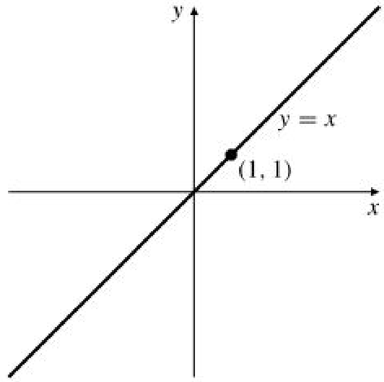



**Figura P.38** Gráfica de la función $f(x) = x$.

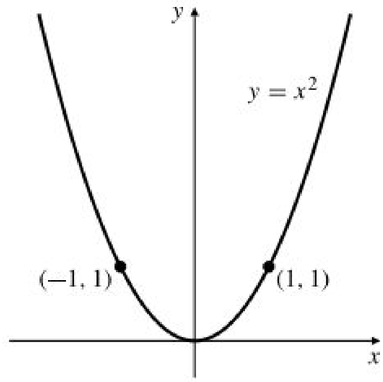



**Figura P.39** Gráfica de la función $f(x) = x^2$.

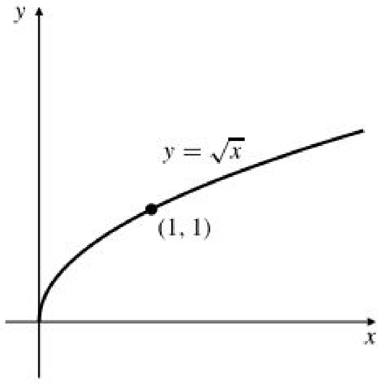



**Figura P.40** Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

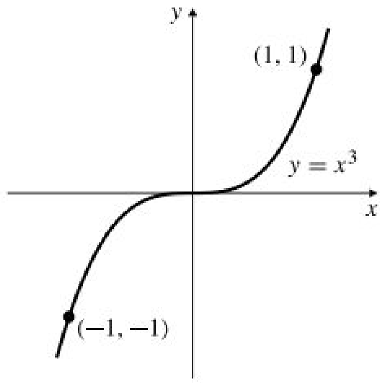



**Figura P.41** Gráfica de la función $f(x) = x^3$.

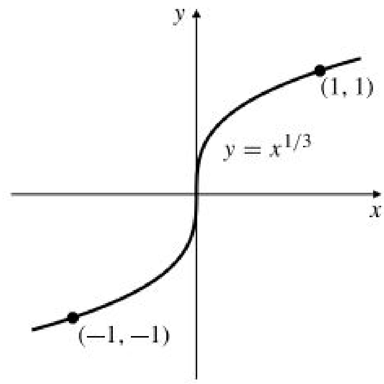



**Figura P.42** Gráfica de la función $f(x) = x^{1/3}$.

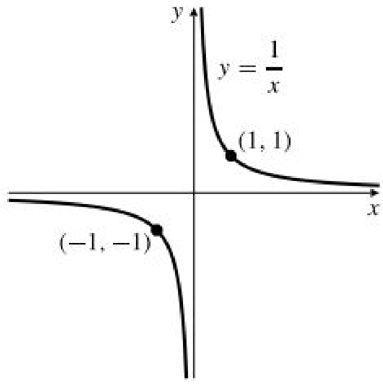



**Figura P.43** Gráfica de la función $f(x) = 1/x$.

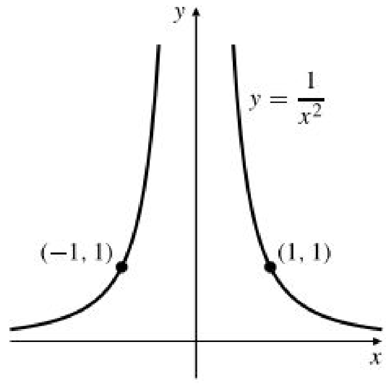



**Figura P.44** Gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$.

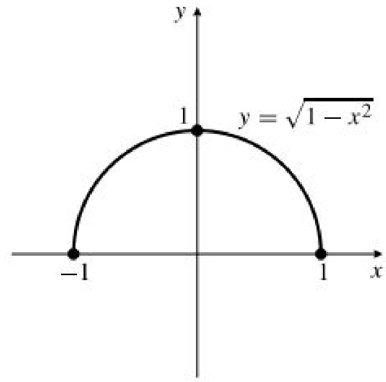



**Figura P.45** Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Si se recuerdan los efectos de los desplazamientos horizontales y verticales en las ecuaciones que representan gráficas (*véase* la Sección P.3), se pueden dibujar fácilmente gráficas que sean versiones desplazadas de las que se muestran en las Figuras P.37-P.46.

**Ejemplo 7** Dibuje la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x - 4}$.

**Solución** Se trata de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ de la Figura P.40, desplazada 4 unidades a la derecha (debido a que $x$ se sustituye por $x - 4$) y una unidad hacia arriba. *Véase* la Figura P.47.

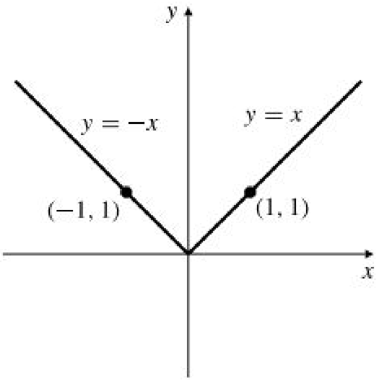



**Figura P.46** Gráfica de la función $f(x) = |x|$.

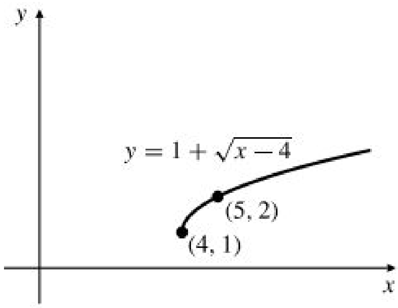



**Figura P.47** Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ desplazada 4 unidades a la derecha y una unidad hacia arriba.

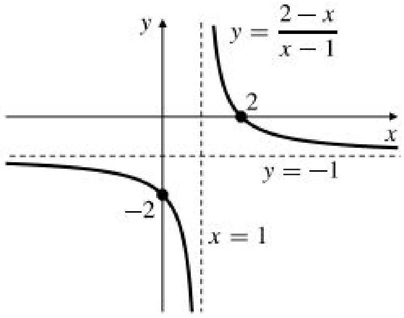



**Figura P.48** Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$.

**Ejemplo 8** Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$.

**Solución** No es inmediato observar que la gráfica es una versión desplazada de una gráfica conocida. Para ver que esto es así, se puede realizar la división de $x - 1$ por $2 - x$, obteniéndose un cociente de $-1$ y un resto de 1:

$$\frac{2-x}{x-1} = \frac{-x+1+1}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = -1 + \frac{1}{x-1}$$

Por tanto, la gráfica es la de la función $1/x$ de la Figura P.43 desplazada una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo. *Véase* la Figura P.48.

No toda curva que podamos dibujar corresponde a la gráfica de una función. Una función $f$ sólo puede tomar un único valor $f(x)$ para cada valor de $x$ de su dominio, por lo que ninguna *recta vertical* puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto. Si $a$ pertenece al dominio de la función $f$, entonces la recta vertical $x = a$ cortará a la gráfica de la función en un único punto $(a, f(a))$. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de la Figura P.49 no puede ser la gráfica de una función ya que existen rectas verticales que la cortan dos veces. Sin embargo, es la unión de las gráficas de dos funciones. Concretamente:

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

que son, respectivamente, las mitades superior e inferior (semicircunferencias) de la circunferencia dada.

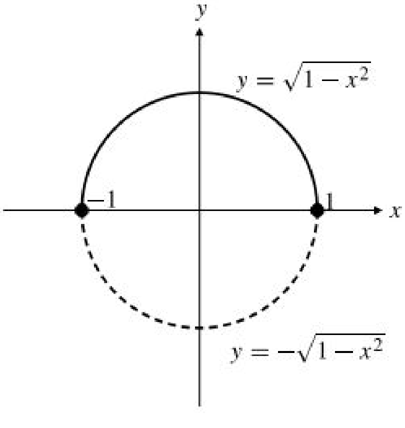



**Figura P.49** La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de ninguna función.

## Funciones pares e impares. Simetría y reflexiones

Sucede a menudo que la gráfica de una función presenta ciertas clases de simetría. Los tipos de simetría más simples relacionan los valores de una función en $x$ y en $-x$.

**DEFINICIÓN 2 Funciones pares e impares**

Supongamos que $-x$ pertenece al dominio de una función cuando $x$ pertenece a dicho dominio. Se dice que $f$ es una **función par** si

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Se dice que $f$ es una **función impar** si

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Los nombres de *par* e *impar* proceden del hecho de que las potencias pares como $x^0 = 1$, $x^2$, $x^4$, ..., $x^{-2}$, $x^{-4}$, ... son funciones pares, y las potencias impares como $x^1 = x$, $x^3$, ..., $x^{-1}$, $x^{-3}$, ... son funciones impares. Obsérvese, por ejemplo, que $(-x)^4 = x^4$, y que $(-x)^{-3} = -x^{-3}$.

Como $(-x^2) = x^2$, cualquier función que dependa sólo de $x^2$ es par. Por ejemplo, la función valor absoluto $y = |x| = \sqrt{x^2}$ es una función par.

La gráfica de una función par es *simétrica respecto del eje y*. Una recta horizontal dibujada desde un punto de la gráfica hasta el eje $y$, si se prolonga la misma distancia hacia el otro lado, llegará a otro punto de la gráfica (*véase* la Figura P.50(a)).

La gráfica de una función impar es *simétrica respecto del origen*. Una línea recta dibujada desde un punto de la gráfica hasta el origen, si se prolonga la misma distancia hacia el otro lado del origen llegará a otro punto de la gráfica. Si una función impar $f$ está definida en $x = 0$, entonces su valor en ese punto debe ser cero: $f(0) = 0$ (*véase* la Figura (P.50(b)).

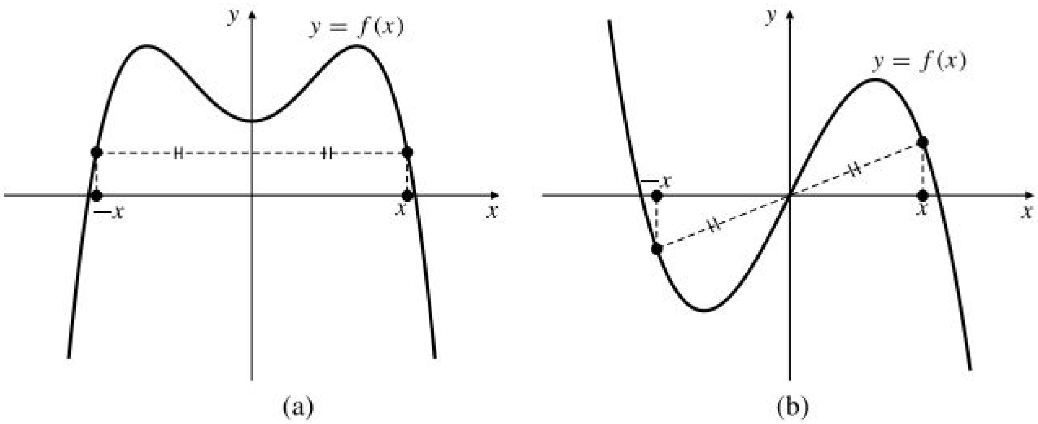



**Figura P.50** (a) La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje $x$.
(b) La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Si $f(x)$ es par (o impar) también lo es cualquier múltiplo constante de $f(x)$, como $2f(x)$ o $-5f(x)$. Las sumas (o diferencias) de funciones pares son funciones pares, y las sumas (o diferencias) de funciones impares son impares. Por ejemplo, $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$ es par, ya que es la suma de tres funciones pares: $3x^4$, $-5x^2$ y $-1 = -x^0$. Análogamente, $4x^3 - (2/x)$ es una función impar. La función $g(x) = x^2 - 2x$ es la suma de una función par y una función impar, y por tanto no es ni par ni impar.

También son posibles otras clases de simetría. Por ejemplo, la función $g(x) = x^2 - 2x$ se puede expresar de la forma $g(x) = (x-1)^2 - 1$. Esto demuestra que los valores de $g(1 \pm u)$ son iguales, y por tanto la gráfica (*véase* la Figura P.51(a)) es simétrica respecto a la recta vertical $x = 1$. Se trata de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la derecha y 1 unidad hacia abajo. Análogamente, la gráfica de $h(x) = x^3 + 1$ es simétrica respecto al punto (0, 1) (*véase* la Figura P.51(b)).

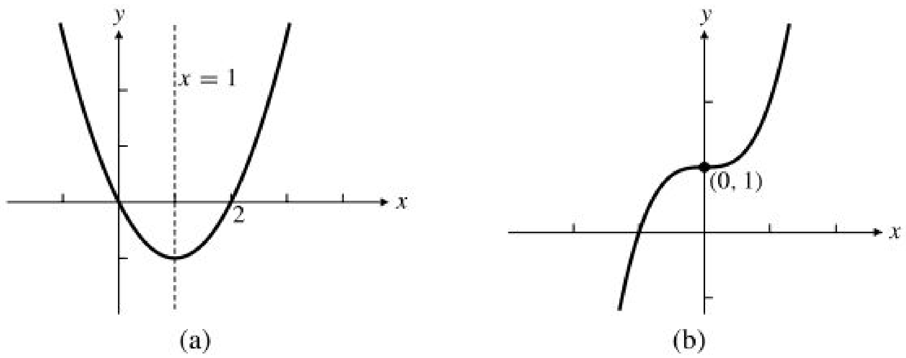



**Figura P.51** (a) La gráfica de $g(x) = x^2 - 2x$ es simétrica respecto a $x = 1$.
(b) La gráfica de $y = h(x) = x^3 + 1$ es simétrica respecto al punto (0, 1).

## Reflexiones en rectas

La imagen de un objeto reflejado en un espejo plano parece estar a la misma distancia del plano del espejo que el objeto que está frente al mismo. Por tanto, un espejo corta en ángulo recto, y divide en dos partes iguales el segmento de recta que va desde cada punto del objeto al correspondiente punto en la imagen. Dada una recta $L$ y un punto $P$ que no pertenezca a la recta $L$, se denomina al punto $Q$ **reflexión** o **imagen especular** de $P$ en la recta $L$ si dicha recta $L$ corta al segmento $PQ$ formando un ángulo recto y lo divide en dos partes iguales. La reflexión en $L$ de cualquier gráfica $G$ es la gráfica formada por las reflexiones en $L$ de todos los puntos de la gráfica $G$.

Algunas reflexiones de gráficas se pueden expresar fácilmente respecto a las ecuaciones de dichas gráficas:

**Reflexiones en rectas especiales**

1. Al cambiar $x$ por $-x$ en una ecuación en $x$ e $y$ se refleja la gráfica de la ecuación en el eje $y$.
2. Al cambiar $y$ por $-y$ en una ecuación en $x$ e $y$ se refleja la gráfica de la ecuación en el eje $x$.
3. Al cambiar $x$ por $a - x$ en una ecuación en $x$ e $y$ se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $x = a/2$.
4. Al cambiar $y$ por $b - y$ en una ecuación en $x$ e $y$ se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $y = b/2$.
5. Al intercambiar $x$ e $y$ en una ecuación en $x$ e $y$ se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $y = x$.

**Ejemplo 9** Describa y dibuje la gráfica de $y = \sqrt{2 - x} - 3$.

**Solución** La gráfica de $y = \sqrt{2 - x}$ es la reflexión de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Figura P.40) en la recta vertical $x = 1$. Por tanto, la gráfica de $y = \sqrt{2 - x} - 3$ es el resultado de desplazar hacia abajo 3 unidades dicha reflexión (*véase* la Figura P.52(a)).

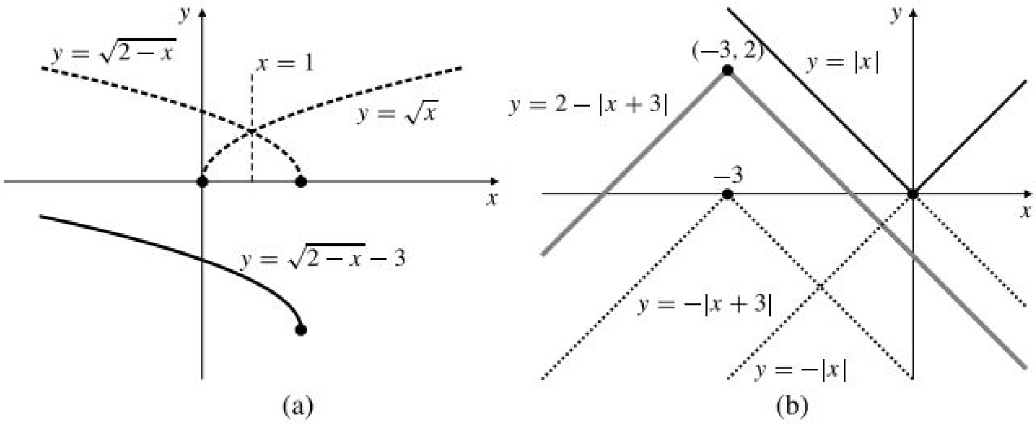



**Figura P.52** (a) Construcción de la gráfica de $y=\sqrt{2-x}-3$.
(b) Transformación de $y=|x|$ para producir la gráfica en gris.

**Ejemplo 10** Exprese la ecuación de la gráfica en gris de la Figura P.52(b) en función de la función valor absoluto $|x|$.

**Solución** La gráfica en gris se puede obtener reflejando en primer lugar la gráfica de $|x|$ (Figura P.46) en el eje $x$ y desplazando después la reflexión 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba. La reflexión de $y=|x|$ en el eje $x$ tiene como ecuación $-y=|x|$, o $y=-|x|$. Al realizar el desplazamiento de 3 unidades a la izquierda se obtiene $y=-|x+3|$. Finalmente, al desplazar 2 unidades hacia arriba se obtiene $y=2-|x+3|$, que es la ecuación deseada.

## Definición y dibujo de funciones con Maple

Muchos cálculos y gráficas que aparecen al estudiar cálculo se pueden realizar utilizando un sistema de álgebra por ordenador, como Maple o Mathematica. De vez en cuando en el libro se incluirán ejemplos que ilustran cómo emplear Maple para realizar esas tareas. Los ejemplos están escritos en Maple 6, pero la mayoría de ellos funcionarán bien con versiones anteriores de Maple.

Empezaremos con un ejemplo que muestra cómo definir una función en Maple y, seguidamente, cómo dibujar su gráfica. Se muestran en courier las entradas que escribimos en el Maple y en tipo normal las respuestas de Maple. Definamos a continuación la función $f(x)=x^3-2x^2-12x+1$.

```
> f := x -> x^3-2*x^2-12*x+1; <enter>
```

$$f:=x\rightarrow x^3-2x^2-12x+1$$

Nótese el uso de `:=` para indicar que se está definiendo el símbolo que hay a la izquierda y el uso de `->` para indicar la regla de construcción de $f(x)$ a partir de $x$. Nótese también que Maple utiliza el asterisco `*` para indicar la multiplicación y el acento circunflejo `^` para indicar la exponenciación. Una instrucción de Maple debe terminar con punto y coma (`;`) antes de pulsar la tecla Enter. De ahora en adelante no mostraremos `<enter>` en las entradas.

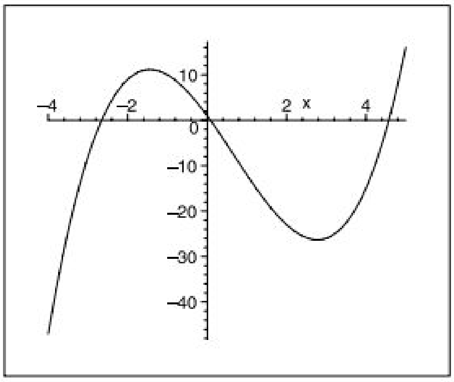
Ahora podemos utilizar $f$ como una función ordinaria:

```
> f(t)+f(1);
```

$$t^3-2t^2-12t-11$$

Dibujemos a continuación la gráfica de $f$ en el intervalo $[-4, 5]$.

```
> plot(f(x), x=-4..5);
```




También podríamos haber especificado la expresión `x^3-2*x^2-12*x+1` en la orden plot, en vez de definir primero la función $f(x)$. Nótese el uso de los dos puntos `..` para separar los extremos izquierdo y derecho del intervalo de representación. La orden plot admite otras opciones, todas ellas separadas por comas. Se puede especificar también el intervalo de valores de $y$, además del de $x$ (que es obligatorio), y se puede usar la opción `scaling=CONSTRAINED` si se desea igualar las distancias en los dos ejes. Aplicar esto no sería una buena idea en el caso de nuestra función (¿por qué?). El comando modificado quedaría así (se omite la gráfica resultado).

```
>  plot (f(x), x=-4..5, y=-40..30, scaling=CONSTRAINED);
```

## Ejercicios P.4

En los Ejercicios 1-6, obtenga el dominio y el rango de cada una de las funciones.

**1.** $f(x) = 1 + x^2$

**2.** $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

**3.** $G(x) = \sqrt{8 - 2x}$

**4.** $F(x) = 1/(x - 1)$

**5.** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2-t}}$

**6.** $g(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$

**7.** ¿Cuáles de las gráficas de la Figura P.53 corresponden a gráficas de funciones $y = f(x)$? ¿Por qué?

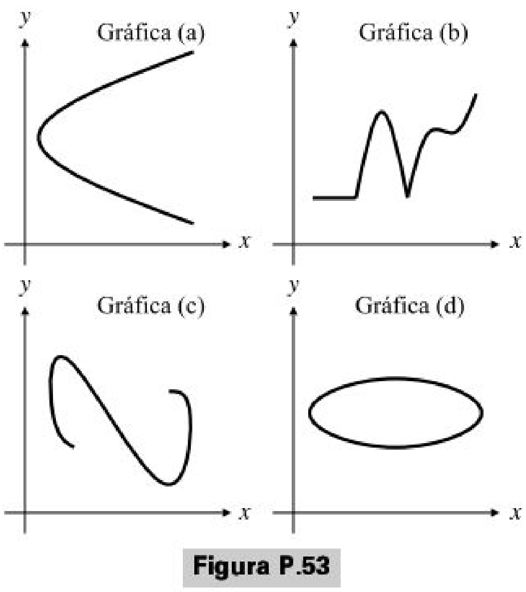



**Figura P.53**

**8.** La Figura P.54 muestra las gráficas de las funciones: (i) $x - x^4$, (ii) $x^3 - x^4$, (iii) $x(1 - x)^2$, (iv) $x^2 - x^3$. ¿Cuál es la gráfica correspondiente a cada función?

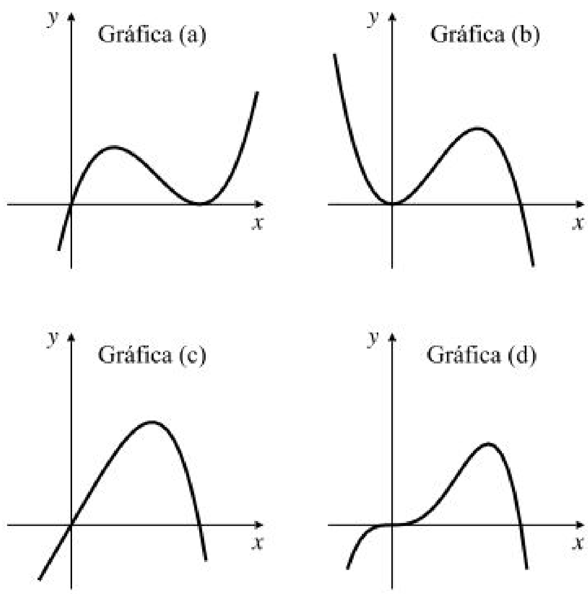



**Figura P.54**

En los Ejercicios 9 y 10, dibuje la gráfica de la función $f$ construyendo primero la tabla de valores de $f(x)$ en $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$, $x = \pm 3/2$ y $x = \pm 2$.

**9.** $f(x) = x^4$

**10.** $f(x) = x^{2/3}$

En los Ejercicios 11-22, indique qué simetría (si es que existe alguna) tiene la gráfica de $f(x)$. En particular ¿es $f$ par o impar?

**11.** $f(x) = x^2 + 1$ **12.** $f(x) = x^3 + x$

**13.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

**15.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

**17.** $f(x) = x^2 - 6x$ **18.** $f(x) = x^3 - 2$

**19.** $f(x) = |x^3|$ **20.** $f(x) = |x + 1|$

**21.** $f(x) = \sqrt{2x}$ **22.** $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 23-38.

**23.** $f(x) = -x^2$ **24.** $f(x) = 1 - x^2$

**25.** $f(x) = (x - 1)^2$ **26.** $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

**27.** $f(x) = 1 - x^3$ **28.** $f(x) = (x + 2)^3$

**29.** $f(x) = \sqrt{x} + 1$ **30.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$

**31.** $f(x) = -|x|$ **32.** $f(x) = |x| - 1$

**33.** $f(x) = |x - 2|$ **34.** $f(x) = 1 + |x - 2|$

**35.** $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

**37.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **38.** $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

En los Ejercicios 39-46, $f$ indica una función con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$ cuya gráfica se muestra en la Figura P.55. Dibuje la gráfica de las funciones indicadas y especifique sus dominios y sus rangos.

**39.** $f(x) + 2$ **40.** $f(x) - 1$

**41.** $f(x + 2)$ **42.** $f(x - 1)$

**43.** $-f(x)$ **44.** $f(-x)$

**45.** $f(4 - x)$ **46.** $1 - f(1 - x)$

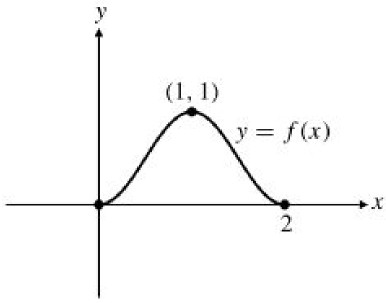



**Figura P.55**

En muchas ocasiones es muy difícil determinar de forma exacta el rango de una función. En los ejercicios 47-48, utilice una calculadora o un ordenador para dibujar la función $f$ y, ampliando la gráfica, determine el rango de $f$ con una exactitud de dos cifras decimales.

**47.** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$ **48.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

En los Ejercicios 49-52, dibuje mediante un ordenador o calculadora las gráficas de las funciones dadas. Examine las gráficas (ampliándolas o reduciéndolas si es necesario) y busque las simetrías. ¿Respecto a qué rectas y/o puntos son simétricas las gráficas? Intente verificar sus conclusiones algebraicamente.

**49.** $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1$

**50.** $f(x) = \dfrac{3 - 2x + x^2}{2 - 2x + x^2}$

**51.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$ **52.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 5}$

**53.** ¿Qué función $f(x)$, definida en la recta real $\mathbb{R}$, es a la vez par e impar?

## P.5 Combinación de funciones para crear otras nuevas

Las funciones se pueden combinar de diversas formas para crear otras nuevas. En esta sección examinaremos las combinaciones que se obtienen

(a) Mediante operaciones algebraicas: sumando, restando, multiplicando y dividiendo funciones.
(b) Mediante composición; es decir, construyendo funciones de funciones.
(c) Agrupando funciones definidas en dominios diferentes.

### Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos

Como los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto donde el denominador valga cero), para producir nuevas funciones.