1.2 Límites de funciones

Para poder hablar con sentido sobre tasas de cambio, rectas tangentes y áreas encerradas por curvas, es necesario investigar previamente el procedimiento de obtención de límites. De hecho, el concepto de *límite* es la piedra angular sobre la que descansa el desarrollo del cálculo. Antes de intentar dar una definición de límite, veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Describa el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cerca de $x = 1$.

Solución Nótese que $f(x)$ está definida para todos los números reales excepto para $x = 1$ (no se puede dividir por cero). Para todo $x \neq 1$ se puede simplificar la expresión de $f(x)$ factorizando el numerador y cancelando los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \qquad \text{para} \qquad x \neq 1$$

La gráfica de f es la recta $x + 1$, en la que se ha eliminado un punto, concretamente el punto $(1, 2)$. Este punto se muestra como un «hueco» en la Figura 1.3. Claramente, aunque $f(1)$ no está definido, podemos hacer que el valor de $f(x)$ *se aproxime lo que queramos* a 2 sin más que escoger el valor de x *lo suficientemente cercano* a 1. Se dice entonces que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a 1, o de otra forma, que $f(x)$ se aproxima al *límite* 2 cuando x se aproxima a 1. Lo escribiremos así:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

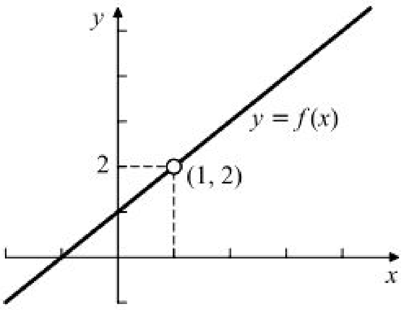

Figura 1.3 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Ejemplo 2 ¿Qué sucede con la función $g(x) = (1 + x^2)^{1/x^2}$ cuando x tiende a cero?

Solución La función $g(x)$ no está definida en $x = 0$. De hecho, por el momento no parece estar definida para ningún x cuyo cuadrado no sea un número racional (recuérdese que si $r = m/n$, siendo m y n enteros y $n > 0$, entonces x^r significa raíz n-ésima de x^m). Ignoremos por el momento el problema de decidir qué significa $g(x)$ si x^2 es irracional, y consideremos sólo valores racionales de x. No hay una forma sencilla de simplificar la expresión de $g(x)$, como hicimos en el Ejemplo 1. Pero se puede usar una calculadora científica para obtener valores aproximados de $g(x)$ para algunos valores racionales de x cada vez más próximos a 0. Los valores de la Tabla 4 se han obtenido de esta forma.

Tabla 4.

x	$g(x)$
± 1.0	2.0000 00000
± 0.1	2.7048 13829
± 0.01	2.7181 45927
± 0.001	2.7182 80469
± 0.0001	2.7182 81815
± 0.00001	1.0000 00000

Excepto el último valor de la tabla, los valores de $g(x)$ parecen aproximarse a un cierto número: 2.71828..., a medida que x se va acercando más y más a 0. En la Sección 3.4 demostraremos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{1/x^2} = e = 2.7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ ...$$

El número e es un número muy importante en matemáticas.

Obsérvese que la última fila de la tabla parece ser errónea. Esto es porque la calculadora es incapaz de distinguir el número de $1 + (0.00001)^2 = 1.0000000001$ de 1, y por lo tanto el cálculo que realiza es $1^{10\,000\,000\,000} = 1$. Al utilizar una calculadora o un ordenador para evaluar expresiones, hay que tener siempre cuidado con los errores de redondeo. En casos como éste los efectos pueden ser catastróficos. ■

Los anteriores ejemplos, junto con los de la Sección 1.1 sugieren la siguiente definición *informal* de límite.

DEFINICIÓN 1 Definición informal de límite

Si $f(x)$ está definida para todo x cerca de a, con la posible excepción del propio a, y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca todo lo que queramos a L a medida que x va estando lo suficientemente cerca de a, pero sin hacerse igual a a, se dice que la función f se aproxima al **límite** L cuando x tiende a a, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Esta definición es *informal* porque utiliza frases imprecisas como *se acerca todo lo que queramos* o *suficientemente cerca*, cuyo significado depende del contexto. Para un mecánico que está fabricando un pistón, *suficientemente cerca* puede ser del orden de las *centésimas de centímetro*. Sin embargo, para un astrónomo que estudia las galaxias lejanas, *suficientemente cerca* puede ser del orden de *miles de años luz*. La definición, sin embargo, es suficientemente clara para permitirnos reconocer y calcular límites de funciones específicas. Una definición «formal» más precisa, que se presentará en la Sección 1.5, será necesaria para *demostrar* teoremas sobre límites, como los Teoremas 2-4, que veremos posteriormente en esta sección.

Ejemplo 3 Calcule (a) $\lim_{x\to a} x$ y (b) $\lim_{x\to a} c$ (siendo c una constante).

Solución Expresado con palabras, el apartado (a) pregunta: «¿a qué se aproxima x cuando x se aproxima a a?». La respuesta clara es a.

$$\lim_{x\to a} x = a$$

De forma similar, el apartado (b) pregunta: «¿a qué se aproxima c cuando x se aproxima a a?». La respuesta en este caso es que c se aproxima a c. No se puede estar más cerca de c que *siendo* c.

$$\lim_{x\to a} c = c$$

■

El Ejemplo 3 muestra que *algunas veces* se puede calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ calculando $f(x)$. Éste será el caso si $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $x = a$, y la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(a, f(a))$ sin interrumpirse. El ejemplo siguiente ilustra varias operaciones algebraicas que se pueden emplear para calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ en situaciones en las que $f(x)$ no está definida. Esto ocurre en general cuando $f(x)$ está definida en forma de fracción cuyo denominador se anula en $x = a$.

Ejemplo 4 Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ y (c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

Solución En todos los límites anteriores interviene una fracción cuyo numerador y denominador se anulan en los puntos donde se toma el límite.

(a) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$ Fracción indefinida en $x = -2$

Factorizar numerador y denominador (*véase* la Sección P.6)

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 3)}$ Cancelar factores comunes.

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{x - 1}{x + 3}$ Calcular el límite sustituyendo $x = -2$

$= \dfrac{-2 - 1}{-2 + 3} = -3$

(b) $\lim_{x \to a} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ Fracción indefinida en $x = a$

Simplificar el numerador

$= \lim_{x \to a} \dfrac{\frac{a - x}{ax}}{x - a}$

$= \lim_{x \to a} \dfrac{-(x - a)}{ax(x - a)}$ Cancelar el factor común.

$= \lim_{x \to a} \dfrac{-1}{ax} = -\dfrac{1}{a^2}$

(c) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ Fracción indefinida en $x = 4$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado de la expresión del numerador.

$= \lim_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}$

$= \lim_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}$

$= \lim_{x \to 4} \dfrac{1}{(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \dfrac{1}{(4 + 4)(2 + 2)} = \dfrac{1}{32}$

Una función f puede estar definida a ambos lados de $x = a$ y carecer de límite en $x = a$. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ no tiene límite cuando x tiende a 0. Como puede verse en la Figura 1.4(a), los valores de $1/x$ crecen en valor absoluto sin límite a medida que x se aproxima a 0. No se aproximan a ningún número L.

El siguiente ejemplo muestra que aun cuando $f(x)$ esté definida en $x = a$, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a puede no ser igual a $f(a)$.

¡CUIDADO! Hay que tener siempre en cuenta que la existencia de $\lim_{x \to a} f(x)$ no requiere la existencia de $f(a)$, y que $\lim_{x \to a} f(x)$ no depende de $f(a)$, incluso cuando éste existe. Depende sólo de los valores de $f(x)$ cuando x *se acerca (sin ser igual) a* a.

Ejemplo 5 Sea $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (*Véase* la Figura 1.4(b)). Entonces,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} x = 2, \quad \text{aunque} \quad g(2) = 1$$

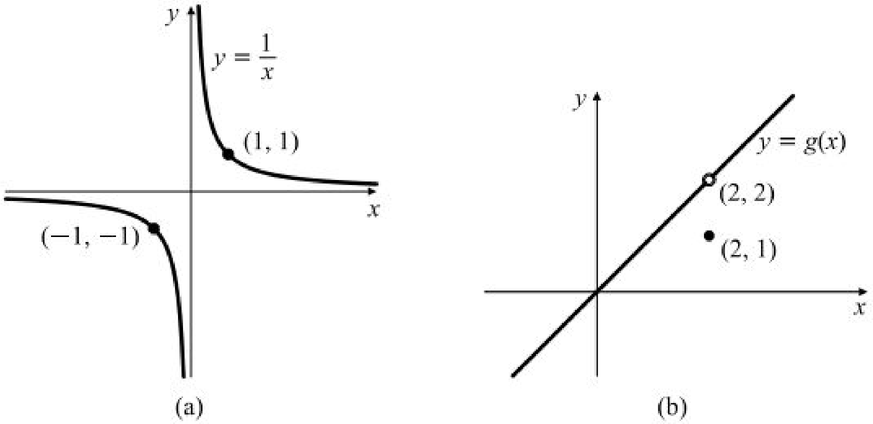

Figura 1.4 (a) No existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

(b) $\lim_{x\to 2} g(x) = 2$, pero $g(2) = 1$.

Límites unilaterales

Los límites son *únicos*. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$ (*véase* el Ejercicio 31 de la Sección 1.5). Aunque una función f sólo puede tener un límite en un punto en particular, resulta de utilidad poder describir el comportamiento de funciones que se aproximan a números diferentes cuando x se aproxima al valor a por un lado o por el otro (*véase* la Figura 1.5).

DEFINICIÓN 2 Definición informal de límites por la izquierda y por la derecha

Si $f(x)$ está definida en algún intervalo (b, a) a la izquierda de $x = a$, y si se puede asegurar que $f(x)$ se acerca cuanto deseemos a L cuando x se acerca cada vez más a a por la izquierda, se dice que el **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L$$

Si $f(x)$ está definida en algún intervalo (a, b) a la derecha de $x = a$, y si se puede asegurar que $f(x)$ se acerca cuanto deseemos a L cuando x se acerca cada vez más a a por la derecha, se dice que el **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

Nótese el uso del sufijo $+$ para indicar la aproximación por la derecha (el lado *positivo*) y el sufijo $-$ para indicar aproximación por la izquierda (el lado *negativo*).

Ejemplo 6 El límite por la izquierda de la función signum $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ (*véase* la Figura 1.6) en $x = 0$ vale -1, y el límite por la derecha en $x = 0$ vale 1:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

ya que los valores de $\operatorname{sgn}(x)$ se aproximan a -1 (de hecho *son* -1) si x es negativo y tiende a 0, y se aproximan a 1 si x es positivo y se aproxima a 0. Como los límites por la izquierda y por la derecha no coinciden, *no existe* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

Como se sugiere en el Ejemplo 6, la relación entre los límites ordinarios (bilaterales) y los límites unilaterales se puede establecer como sigue:

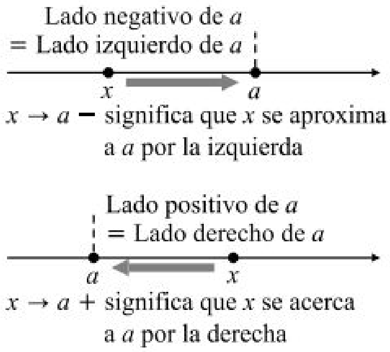

Figura 1.5 Aproximaciones laterales.

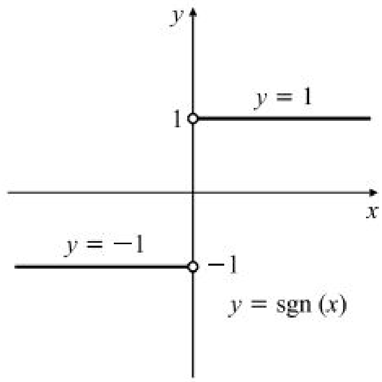

Figura 1.6 No existe $\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}\,(x)$, ya que $\lim_{x\to 0-} \mathrm{sgn}\,(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0+} \mathrm{sgn}\,(x) = 1$.

TEOREMA 1 **Relación entre límites bilaterales y unilaterales**

Una función $f(x)$ tiene límite L en $x = a$ si y sólo si existen los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto y ambos son iguales a L:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L$$

Ejemplo 7 Si $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$, calcule: $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$, y $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solución Observe que $|x-2| = x-2$ si $x > 2$ y $|x-2| = -(x-2)$ si $x < 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 2-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$, no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Ejemplo 8 ¿Cuáles son los límites laterales $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $x = -1$ y en $x = 1$?

Solución El dominio de g es $[-1, 1]$, de modo que $g(x)$ sólo está definida a la derecha de $x = -1$ y a la izquierda de $x = 1$. Como puede verse en la Figura 1.7,

$$\lim_{x\to -1+} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1-} g(x) = 0$$

$g(x)$ no tiene límite por la izquierda, ni límite en $x = -1$, y tampoco tiene límite por la derecha ni límite en $x = 1$.

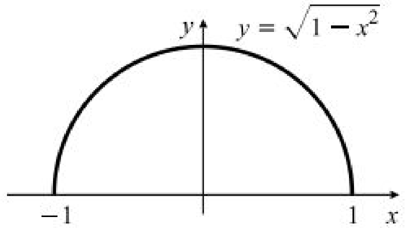

Figura 1.7 $\sqrt{1-x^2}$ tiene límite por la derecha 0 en $x = -1$, y límite por la izquierda 0 en $x = 1$.

Reglas para el cálculo de límites

Los siguientes teoremas facilitan la tarea del cálculo de límites, y de límites unilaterales para muchos tipos de funciones, sin más que conocer previamente algunos límites elementales. No demostraremos aquí los teoremas (*véase* la Sección 1.5).

TEOREMA 2 Reglas para límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$, y k es una constante, entonces

1. **Límite de una suma:** $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. **Límite de una diferencia:** $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. **Límite de un producto:** $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$
4. **Límite de la multiplicación por una constante:** $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$
5. **Límite de un cociente:** $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Si m es un entero y n es un entero positivo, entonces

6. **Límite de una potencia:** $\lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$ siempre que $L > 0$ cuando n sea par, y $L \neq 0$ si $m < 0$

Si $f(x) \leqslant g(x)$ en un intervalo que contiene a a en su interior, entonces

7. **Conservación del orden:** $L \leqslant M$

Las reglas 1-6 son también válidas para límites laterales por la izquierda y por la derecha. También la regla 7, siempre que el supuesto de $f(x) \leqslant g(x)$ se cumpla en un intervalo abierto que se extiende en la dirección apropiada desde a.

Expresado con palabras, la regla 1 dice que el límite de una suma de funciones es la suma de sus límites. Análogamente, la regla 5 dice que el límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea cero. Intente el lector expresar las otras reglas con palabras.

Se pueden utilizar los límites (a) $\lim_{x\to a} c = c$ (siendo c una constante) y (b) $\lim_{x\to a} x = a$, vistos en el Ejemplo 3, junto con partes del Teorema 2, para calcular límites de muchas combinaciones de funciones.

Ejemplo 9 Calcule: (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7}$ y (b) $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x + 1}$.

Solución

(a) La expresión $\dfrac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7}$ está formada por combinaciones de la función básica x y la constante c utilizando sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. El Teorema 2 asegura que el límite de una combinación de este tipo es la misma combinación de los límites a y c de las funciones básicas, siempre que el límite del denominador no sea 0. Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7} = \frac{a^2 + a + 4}{a^3 - 2a^2 + 7} \quad \text{siempre que } a^3 - 2a^2 + 7 \neq 0$$

(b) Aplicando el mismo argumento que en el caso (a) se puede demostrar que $\lim_{x\to 2}(2x+1) = 2(2)+1 = 5$. Entonces, la regla de la potencia (regla 6 del Teorema 2) asegura que

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x+1} = \sqrt{5}$$

El resultado siguiente es un corolario inmediato del Teorema 2 (*véase* la Sección P.6, donde se presentan los polinomios y las funciones racionales).

TEOREMA 3 Límites de polinomios y funciones racionales

1. Si $P(x)$ es un polinomio y a es un número real cualquiera, entonces

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

2. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

El teorema del sándwich

El siguiente teorema posibilitará el cálculo de algunos límites muy importantes en los capítulos siguientes. Se denomina así porque se refiere a una función g cuyos valores están comprendidos entre los valores de otras dos funciones, f y h, ambas con límite L en el punto a. Como la función g está «atrapada» entre las otras dos funciones, sus valores deben aproximarse también a L (*véase* la Figura 1.8).

TEOREMA 4 Teorema del sándwich

Supongamos que la condición $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ se cumple para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contiene al punto a, con la posible excepción del propio $x = a$. Supongamos también que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Entonces, también $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Lo mismo se aplica para el caso de límites laterales por la izquierda y por la derecha.

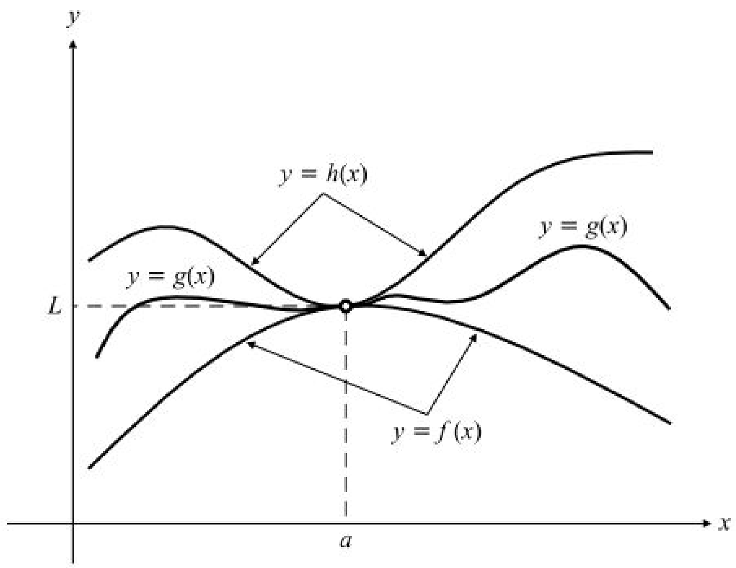

Figura 1.8 La gráfica de g está atrapada entre las de f y h.

Ejemplo 10 Dado que $3 - x^2 \leqslant u(x) \leqslant 3 + x^2$ para todo $x \neq 0$, calcule $\lim_{x\to 0} u(x)$.

Solución Como $\lim_{x\to 0}(3 - x^2) = 3$ y $\lim_{x\to 0}(3 + x^2) = 3$, el Teorema del Sándwich implica que $\lim_{x\to 0} u(x) = 3$.

Ejemplo 11 Demuestre que si $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Solución Como $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, y tanto $-|f(x)|$ como $|f(x)|$ tienen como límite 0 cuando x tiende a a, por el Teorema del Sándwich el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a debe ser también 0.

Ejercicios 1.2

1. Calcule (a) $\lim_{x\to -1} f(x)$, (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ y (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$, siendo f la función cuya gráfica se muestra en la Figura 1.9.

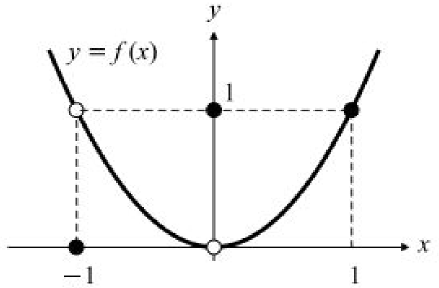

Figura 1.9

2. Dada la función $y = g(x)$ que se muestra en la Figura 1.10, calcule los siguientes límites, o explique por qué no existen.

(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$, (b) $\lim_{x\to 2} g(x)$, (c) $\lim_{x\to 3} g(x)$

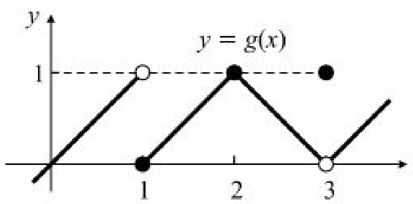

Figura 1.10

En los Ejercicios 3-6, calcule los límites laterales indicados de la función g cuya gráfica se muestra en la Figura 1.10.

3. $\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 1+} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to 3+} g(x)$

6. $\lim\limits_{x\to 3-} g(x)$

En los Ejercicios 7-36, calcule los límites o explique por qué no existen.

7. $\lim\limits_{x\to 4} (x^2 - 4x + 1)$

8. $\lim\limits_{x\to 2} 3(1 - x)(2 - x)$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x+6}$

10. $\lim\limits_{t\to -4} \dfrac{t^2}{4-t}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

14. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

15. $\lim\limits_{h\to 2} \dfrac{1}{4-h^2}$

16. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h+4h^2}{h^2-h^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\pi x}$

20. $\lim\limits_{x\to -2} |x-2|$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

23. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2-1}{t^2-2t+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

27. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2+3t}{(t+2)^2-(t-2)^2}$

28. $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{(s+1)^2-(s-1)^2}{s}$

29. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-4\sqrt{y}+3}{y^2-1}$

30. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

31. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^3-8}$

32. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^{2/3}-4}{x^{1/3}-2}$

33. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$

El límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aparece frecuentemente en el estudio del cálculo (¿puede adivinar por qué?). Calcule dicho límite para las funciones f de los Ejercicios 37-42.

37. $f(x) = x^2$

38. $f(x) = x^3$

39. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

40. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

41. $f(x) = \sqrt{x}$

42. $f(x) = 1/\sqrt{x}$

Examine las gráficas de sen x y cos x de la Sección P.7 para determinar los límites de los Ejercicios 43-46.

43. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x$

44. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \cos x$

45. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \cos x$

46. $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \operatorname{sen} x$

47. Realice una tabla con los valores de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para una secuencia de valores que se aproxime a 0, por ejemplo, ± 1.0, ± 0.1, ± 0.01, ± 0.001, ± 0.0001 y ± 0.00001. Asegúrese de que su calculadora está en *modo radianes* y no en modo grados. Estime el valor de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

48. Repita el Ejercicio 47 para $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

En los Ejercicios 49-60, obtenga los límites unilaterales indicados, o explique por qué no existen.

49. $\lim\limits_{x \to 2-} \sqrt{2 - x}$

50. $\lim\limits_{x \to 2+} \sqrt{2 - x}$

51. $\lim\limits_{x \to -2-} \sqrt{2 - x}$

52. $\lim\limits_{x \to -2+} \sqrt{2 - x}$

53. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3 - x}$

54. $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x}$

55. $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x}$

56. $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x^2 - x^4}$

57. $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{|x - a|}{x^2 - a^2}$

58. $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{|x - a|}{x^2 - a^2}$

59. $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^2 - 4}{|x + 2|}$

60. $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x^2 - 4}{|x + 2|}$

Los Ejercicios 61-64 se refieren a la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ (x + \pi)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule los límites que se indican.

61. $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)$

62. $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)$

63. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

64. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

65. Suponga que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = -3$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} (g(x) + 3)$ (b) $\lim\limits_{x \to 4} x f(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 4} (g(x))^2$ (d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

66. Suponga que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -2$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to a} 4g(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$

67. Si $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

68. Si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Uso de herramientas gráficas para el cálculo de límites

Se pueden utilizar calculadoras gráficas o programas de computador para calcular límites, al menos aproximadamente. Simplemente se amplía la ventana de gráficos de forma que muestre partes cada vez más pequeñas de la gráfica de la función cerca del punto donde se desea encontrar el límite. Calcule los límites siguientes utilizando técnicas gráficas. Obtenga la respuesta exacta donde piense que está justificado. En los demás casos, obtenga la respuesta exacta hasta 4 dígitos decimales. No olvide asegurarse de que la calculadora o el software que utilice están en modo radianes al utilizar funciones trigonométricas.

69. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

70. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)}$

71. $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x^2}}$

72. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

73. Dibuje en la misma gráfica las funciones $y = x\operatorname{sen}(1/x)$, $y = x$ e $y = -x$ para $-0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$, $-0.2 \leqslant y \leqslant 0.2$. Describa el comportamiento $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ de cerca de $x = 0$ ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, y si es así, cuál es su valor? ¿Podría haberse predicho este resultado observando la gráfica? ¿Por qué?

Uso del Teorema del Sándwich

74. Si $\sqrt{5 - 2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{5 - x^2}$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

75. Si $2 - x^2 \leqslant g(x) \leqslant 2\cos x$ para todo x, calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

76. (a) Dibuje las curvas $y = x^2$ e $y = x^4$ en la misma gráfica. ¿Dónde se cortan?

(b) La función $f(x)$ cumple:

$$\begin{cases} x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^4 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ x^4 \leqslant f(x) \leqslant x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calcule (i) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

77. ¿En qué intervalos es $x^{1/3} < x^3$? ¿En qué intervalos es $x^{1/3} > x^3$? Si la gráfica de $h(x)$ está siempre comprendida entre las gráficas de $y = x^{1/3}$ e $y = x^3$, ¿para qué valores de a se puede determinar el valor de $\lim_{x\to a} h(x)$? Calcule el límite para esos valores de a.

***78.** ¿Cuál es el dominio de $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$? Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

***79.** Suponga que $|f(x)| \leqslant g(x)$ para todo x. ¿Qué se puede concluir de $\lim_{x\to a} f(x)$ si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$? ¿Y si $\lim_{x\to a} g(x) = 3$?

1.3 Límites en el infinito y límites infinitos

En esta sección vamos a extender el concepto de límite para contemplar dos situaciones no consideradas por las definiciones de límite y de límites laterales dadas en la sección anterior.

(i) Límites en el infinito, cuando x se hace arbitrariamente grande, positiva o negativa.
(ii) Límites infinitos, que no son realmente límites, pero que proporcionan un simbolismo útil para describir el comportamiento de funciones cuyos valores se hacen arbitrariamente grandes, positivos o negativos.

Límites en el infinito

Considere la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.11, y cuyos valores (redondeados hasta 7 decimales) se muestran en la Tabla 5. Los valores de $f(x)$ parecen acercarse a 1 a medida que x va tomando valores positivos más y más grandes, y parecen acercarse a -1 a medida que x toma valores negativos cada vez más y más grandes en valor absoluto (para confirmarlo, *véase* el Ejemplo 2 más adelante). Expresaremos este comportamiento escribiendo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \qquad \text{«}f(x) \text{ tiende a 1 cuando } x \text{ tiende a infinito».}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1 \qquad \text{«}f(x) \text{ tiende a } -1 \text{ cuando } x \text{ tiende a menos infinito».}$$

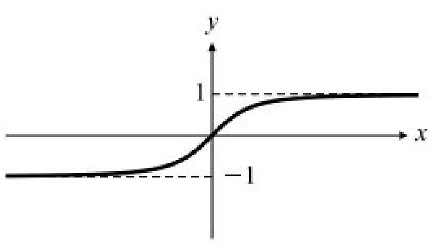

Figura 1.11 Gráfica de $x/\sqrt{x^2 + 1}$.

Tabla 5.

x	$f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$
-1000	-0.9999995
-100	-0.9999500
-10	-0.9950372
-1	-0.7071068
0	0.0000000
1	-0.7071068
10	0.9950372
100	0.9999500
1000	0.9999995

La gráfica de f presenta este comportamiento límite ya que se aproxima a la recta horizontal $y = 1$ cuando x se mueve hacia la derecha, y a la recta $y = -1$ cuando x se mueve a la izquierda. Esas rectas se denominan **asíntotas horizontales** de la gráfica. En general, si una curva se aproxima a una línea recta cuando nos alejamos mucho del origen, esa recta se denomina **asíntota** de la curva.

DEFINICIÓN 3 Límites en infinito y en menos infinito (definición informal)

Si la función f está definida en un intervalo (a, ∞) y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca tanto como se desee al número L cuando x se hace lo suficientemente grande, se dice que $f(x)$ **tiende al límite L cuando x tiende a infinito**, y se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Si la función f está definida en un intervalo $(-\infty, b)$ y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca tanto como se desee al número M cuando x se hace negativo y lo suficientemente grande en valor absoluto, se dice que $f(x)$ **tiende al límite M cuando x tiende a menos infinito**, y se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

No debe olvidarse que el símbolo ∞, denominado **infinito**, *no* representa ningún número real. El ∞ no se puede utilizar de forma normal en aritmética, pero se puede utilizar la frase «tiende a ∞» para indicar que «se hace positivo y arbitrariamente grande», y la frase «tiende a $-\infty$» para indicar «se hace negativo y lo suficientemente grande en valor absoluto».

Ejemplo 1 En la Figura 1.12 se puede ver que $\lim_{x\to\infty} 1/x = \lim_{x\to -\infty} 1/x = 0$. Así, el eje x es una asíntota horizontal de $y = 1/x$.

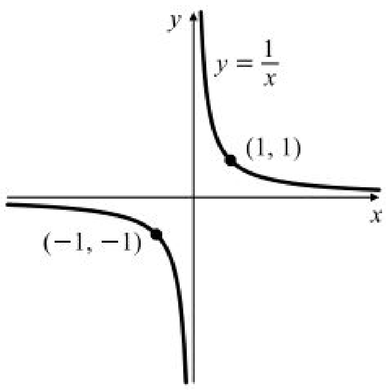

Figura 1.12 $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Los teoremas de la Sección 1.2 tienen su equivalente para los límites en infinito o en menos infinito. En particular, del ejemplo anterior y de la regla del producto para límites se deduce que $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x^n = 0$ para todo entero positivo n. Utilizaremos este resultado en ejemplos posteriores. El Ejemplo 2 muestra cómo obtener los límites en $\pm\infty$ de la función $x/\sqrt{x^2+1}$ utilizando procedimientos algebraicos, sin necesidad de recurrir a construir una tabla de valores o una gráfica, como hicimos anteriormente.

Ejemplo 2 Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución La ecuación de $f(x)$ se puede expresar como sigue:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{+\frac{1}{x^2}}} \qquad \text{Recuerde que } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \qquad \text{siendo } \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El factor $\sqrt{1 + (1/x^2)}$ tiende a 1 cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$, por lo que los límites de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$ coinciden con los de la función $\operatorname{sgn}(x)$. Por tanto (*véase* la Figura 1.11),

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Límites en el infinito de funciones racionales

Los únicos polinomios que tienen límites en $\pm\infty$ son las constantes, $P(x) = c$. La situación es más interesante en el caso de funciones racionales. Recuérdese que una función racional es el cociente de dos polinomios. Los ejemplos que siguen ilustran cómo disponer una función de este tipo de forma que sus límites en infinito y menos infinito (si existen) se vean claramente. Para ello *se divide el numerador y el denominador por la potencia más alta de x que aparezca en el denominador*. Los límites de una función racional en infinito y en menos infinito, o bien no existen, o bien existen y son iguales.

Ejemplo 3 **(Numerador y denominador del mismo grado)** Evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por x^2, que es la potencia más alta de x en el denominador:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - (1/x) + (3/x^2)}{3 + (5/x^2)} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 4 **(Grado del numerador menor que grado del denominador)** Evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x + 2}{2x^3 - 1}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por la potencia más alta de x en el denominador, concretamente x^3:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)} = \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

El comportamiento límite de funciones racionales en infinito y menos infinito se resume a continuación.

La técnica utilizada en los ejemplos anteriores se puede aplicar también a clases más generales de funciones. La función del ejemplo que sigue no es racional, y el límite parece tomar el valor sin sentido de $\infty - \infty$, hasta que se resuelve el problema racionalizando el numerador.

Resumen de los límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

Sean $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ y $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ dos polinomios de grados m y n, respectivamente, con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Entonces,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

(a) Es igual a cero si $m < n$.

(b) Es igual a $\dfrac{a_m}{b_n}$ si $m = n$.

(c) No existe si $m > n$.

Ejemplo 5 Calcule $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Solución Se trata del límite de la diferencia de dos funciones, y las dos crecen arbitrariamente cuando x tiende a infinito. Se racionaliza la expresión multiplicando el numerador y el denominador (que es 1) por $\sqrt{x^2 + x} + x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} + x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(En este caso $\sqrt{x^2} = x$ porque $x > 0$ cuando $x \to \infty$). ■

Observación El cálculo de $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ es más simple. Como $-x > 0$ cuando $x \to -\infty$, tenemos que $\sqrt{x^2 + x} - x > \sqrt{x^2 + x}$, que crece arbitrariamente cuando $x \to -\infty$. Por tanto, en este caso el límite no existe.

Límites infinitos

A veces se dice que una función cuyos valores crecen arbitrariamente tiene límite infinito. Como infinito no es ningún número, los límites infinitos no son realmente límites en absoluto, pero proporcionan una forma conveniente de describir el comportamiento de funciones que crecen arbitrariamente en valores positivos o negativos. Unos ejemplos permitirán aclarar esta terminología.

Ejemplo 6 **(Límite infinito por ambos lados)** Describa el comportamiento de la función $f(x) = 1/x^2$ en las proximidades de $x = 0$.

Solución A medida que x se acerca a 0 por cualquier lado, los valores de $f(x)$ son positivos y se hacen cada vez mayores (*véase* la Figura 1.13), por lo que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 *no existe*. No obstante, es conveniente describir el comportamiento de f cerca de 0 diciendo que $f(x)$ *tiende a* ∞ cuando x tiende a 0. Se escribe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Nótese que escribir esto *no* equivale a decir que *exista* el $\lim_{x\to 0} 1/x^2$. Lo que realmente se está diciendo es que el límite *no existe porque* $1/x^2$ *se hace arbitrariamente grande a medida que x tiende a 0.* Obsérvese que la gráfica de f se aproxima al eje y a medida que x se aproxima a 0. El eje y es una **asíntota vertical** de la gráfica.

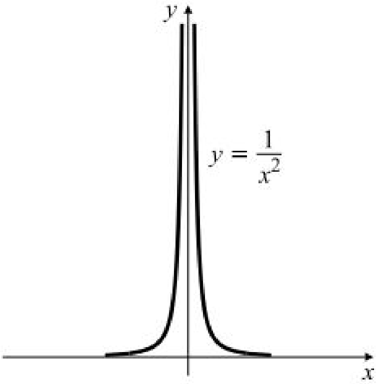

Figura 1.13 Gráfica de $y = 1/x^2$ (no está a escala).

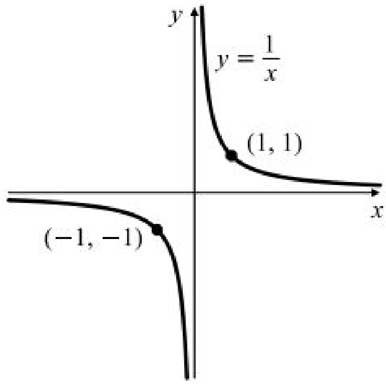

Figura 1.14 $\lim_{x\to 0-} 1/x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} 1/x = \infty$.

Ejemplo 7 **(Límites infinitos laterales)** Describa el comportamiento de la función $f(x) = 1/x$ en las proximidades de $x = 0$ (*véase* la Figura 1.14).

Solución A medida que x se acerca a 0 por la derecha, los valores de x son positivos y se hacen cada vez mayores, por lo que el límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es infinito:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$

Análogamente, los valores de $f(x)$ se van haciendo más y más negativos cuando x tiende a 0 por la izquierda, por lo que el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$$

Las afirmaciones anteriores no dicen que *existan* los límites laterales. De hecho no existen porque ∞ y $-\infty$ no son números. Como los límites laterales no coinciden, lo único que podemos decir sobre $\lim_{x\to 0} f(x)$ es que no existe.

Ejemplo 8 **(Comportamiento polinómico en el infinito)**

(a) $\lim_{x\to\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = \infty$ (b) $\lim_{x\to-\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = -\infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$ (d) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$

Solución El término de mayor grado de un polinomio domina sobre los otros términos a medida que $|x|$ crece, de forma que los límites de dicho término en ∞ y $-\infty$ determinan los límites de todo el polinomio. Para los polinomios de los apartados (a) y (b) tenemos que

$$3x^3 - x^2 + 2 = 3x^3\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3}\right)$$

El factor del paréntesis grande tiende a 1 cuando x tiende a $\pm\infty$, por lo que el comportamiento del polinomio es como el de su término de mayor grado $3x^3$.

Ahora podemos decir algo más sobre los límites en infinito y menos infinito de una función racional con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Dijimos anteriormente en esta sección que dichos límites *no existen.* Esto es cierto, pero se puede asignar a esos límites el valor de ∞ o de $-\infty$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9 **(Función racional con numerador de mayor grado que denominador)** Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por x^2, que es la mayor potencia de x del denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)}{1} = \infty$$

Un polinomio $Q(x)$ de grado n puede tener como máximo n *ceros*; es decir, hay como máximo n números reales r tales que $Q(r)=0$. Si $Q(x)$ es el denominador de una función racional $R(x)=P(x)/Q(x)$, esta función estará definida para todo x excepto en el número finito de ceros de Q. En cada uno de esos ceros, $R(x)$ puede tener límites, límites infinitos o límites laterales infinitos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$. (Los valores son negativos para $x>2$, x cerca de 2).

(d) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$. (Los valores son positivos para $x<2$, x cerca de 2).

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ no existe.

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

En los apartados (a) y (b) el efecto del cero del denominador en $x=2$ se cancela porque el numerador también tiene un cero en ese mismo punto. Por tanto existe límite finito. No ocurre así en el apartado (f), porque el numerador sólo se anula una vez en ese punto, mientras que el denominador se anula tres veces.

Uso de Maple para calcular límites

El procedimiento `limit` de Maple se puede utilizar fácilmente para calcular límites, límites laterales, límites en el infinito y límites infinitos. Ésta es la sintaxis para calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to a-} \frac{x^2-a^2}{|x-a|} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a+} \frac{x^2-a^2}{|x-a|}$$

```
> limit ((x^2-4)/(x^2-5*x+6) ,x=2);
```

$$-4$$

```
< limit (x*sin(x)/(1-cos(x)) ,x=0) ;
```

$$2$$

```
> limit (x/sqrt(x^2+1) ,x=-infinity) ;
```

$$-1$$

```
> limit (x/sqrt(x^2+1) ,x=infinity) ;
```

$$1$$

```
> limit (1/x,x=0) ; limit(1/x,x=0,left) ;
```

$$\textit{undefined}$$

$$-\infty$$

```
> limit ((x^2-a^2)/(abs(x-a)) ,x=a,left) ;
```

$$-2a$$

```
> limit ((x^2-a^2)/(abs (x-a)) ,x=a,right) ;
```

$$2a$$

Ejercicios 1.3

Calcule los límites en los Ejercicios 1-10.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x-3}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-4}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2}$

5. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+2\sqrt{x}}{1-x}$

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

9. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

10. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{|3x+2|}$

En los Ejercicios 11-34, calcule el límite que se indica. Si no existe, ¿es ∞, $-\infty$ o ninguna de las dos cosas?

11. $\lim_{x\to3} \dfrac{1}{3-x}$

12. $\lim_{x\to3} \dfrac{1}{(3-x)^2}$

13. $\lim_{x\to3-} \dfrac{1}{3-x}$

14. $\lim_{x\to3+} \dfrac{1}{3-x}$

15. $\lim_{x\to-5/2} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

16. $\lim_{x\to-2/5} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

17. $\lim_{x\to-(2/5)-} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

18. $\lim_{x\to-(2/5)+} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

19. $\lim_{x\to2+} \dfrac{x}{(2-x)^3}$

20. $\lim_{x\to1-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $\lim_{x\to1+} \dfrac{1}{|x-1|}$

22. $\lim_{x\to1-} \dfrac{1}{|x-1|}$

23. $\lim_{x\to2} \dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$

24. $\lim_{x\to1+} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x-x^2}$

25. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3}$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2}$

***27.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x+1}\,(1-\sqrt{2x+3})}{7-6x+4x^2}$

28. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

***29.** $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

***30.** $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

33. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$? ¿Cuáles son sus asíntotas verticales?

34. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales y verticales de $y = \dfrac{2x - 5}{|3x + 2|}$?

La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 1.15 tiene dominio $[0, \infty)$. Calcule los límites de f que se indican en los Ejercicios 35-45.

35. $\lim_{x \to 0+} f(x)$

36. $\lim_{x \to 1} f(x)$

37. $\lim_{x \to 2+} f(x)$

38. $\lim_{x \to 2-} f(x)$

39. $\lim_{x \to 3-} f(x)$

40. $\lim_{x \to 3+} f(x)$

41. $\lim_{x \to 4+} f(x)$

42. $\lim_{x \to 4-} f(x)$

43. $\lim_{x \to 5+} f(x)$

44. $\lim_{x \to 5-} f(x)$

45. $\lim_{x \to \infty} f(x)$

46. ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la Figura 1.15?

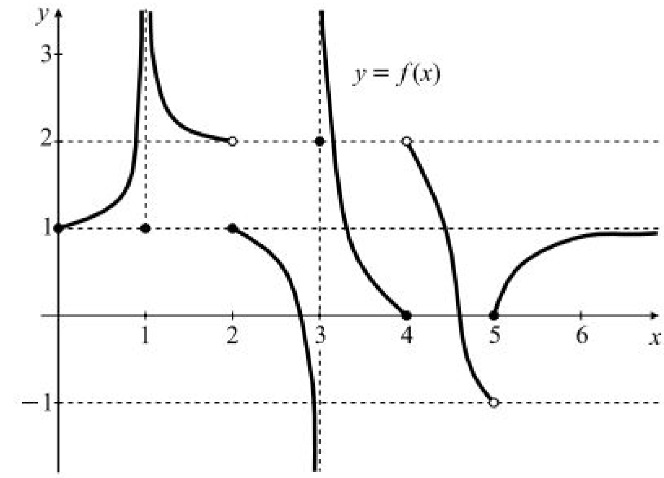

Figura 1.15

Los Ejercicios 47-52 se refieren a la función **máximo entero menor** $\lfloor x \rfloor$ que se muestra en la Figura 1.16. Calcule los límites indicados o explique por qué no existen.

47. $\lim_{x \to 3+} \lfloor x \rfloor$

48. $\lim_{x \to 3-} \lfloor x \rfloor$

49. $\lim_{x \to 3} \lfloor x \rfloor$

50. $\lim_{x \to 2.5} \lfloor x \rfloor$

51. $\lim_{x \to 0+} \lfloor 2 - x \rfloor$

52. $\lim_{x \to -3-} \lfloor x \rfloor$

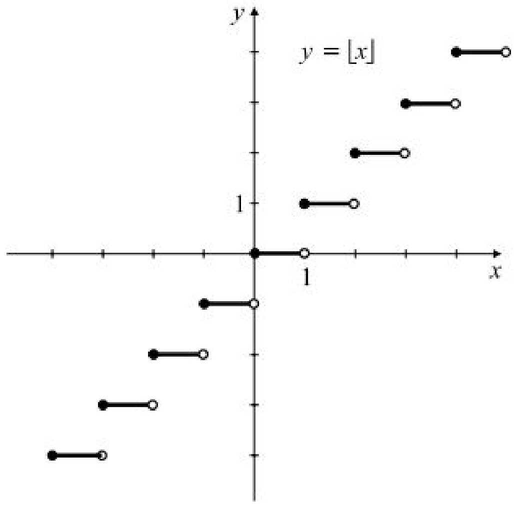

Figura 1.16

53. Aparcar en cierto parking cuesta 1.50 € por cara hora o fracción de hora. Dibuje la gráfica de la función $C(t)$, que representa el coste de aparcar t horas. ¿En qué valores de t tiene límite $C(t)$? Calcule $\lim_{t \to t_0-} C$ y $\lim_{t \to t_0+} C$ para un número arbitrario $t_0 > 0$.

54. Si $\lim_{x \to 0+} f(x) = L$, calcule $\lim_{x \to 0-} f(x)$ si (a) f es par, (b) f es impar.

55. Si $\lim_{x \to 0+} f(x) = A$ y $\lim_{x \to 0-} f(x) = B$, calcule

(a) $\lim_{x \to 0+} f(x^3 - x)$

(b) $\lim_{x \to 0-} f(x^3 - x)$

(c) $\lim_{x \to 0-} f(x^2 - x^4)$

(d) $\lim_{x \to 0+} f(x^2 - x^4)$

1.4 Continuidad

Cuando un coche recorre una autopista, su distancia a partir de un punto inicial varía con el tiempo de forma *continua*, mediante pequeños cambios en intervalos temporales pequeños. Pero no todas las magnitudes varían de esta forma. Cuando el coche está aparcado en un parking cuya tarifa es de «2 € por hora o fracción de hora» la tarifa permanece en 2 € durante la primera hora y cambia bruscamente a 4 € al comienzo de la segunda hora. La función que relaciona la tarifa del parking con el tiempo de aparcamiento es *discontinua* en cada hora. En esta sección vamos a definir la continuidad y aprenderemos a ver cuándo una función es continua. También examinaremos algunas propiedades importantes de las funciones continuas.

Continuidad en un punto

La mayor parte de las funciones que encontramos tienen un dominio formado por intervalos, o uniones de diferentes intervalos. Un punto P perteneciente al dominio de una función se denomina **punto interior** del dominio si pertenece a algún *intervalo abierto* contenido en el dominio. Si P no es un punto interior, se denomina **extremo** del dominio. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, formado por los puntos interiores del intervalo $(-2, 2)$, el extremo izquierdo -2, y el extremo derecho 2. El dominio de la función $g(x) = 1/x$ es la unión de los intervalos abiertos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, y está formado sólo por puntos interiores. Nótese que, aunque 0 es un extremo de ambos intervalos, no pertenece al dominio de g y, por tanto, no es un extremo de dicho dominio.

DEFINICIÓN 4 Continuidad en un punto interior

Se dice que una función f es **continua** en un punto interior c de su dominio si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Si no existe $\lim_{x\to c} f(x)$, o bien dicho límite no es igual a $f(c)$, se dice que f es **discontinua** en c.

En términos gráficos, f es continua en un punto interior c de su dominio si su gráfica no se interrumpe en el punto $(c, f(c))$; en otras palabras, si es posible seguir la gráfica de la función en ese punto sin levantar el lápiz del papel. Considérese la Figura 1.17. En (a), f es continua en c. En (b), f es discontinua en c porque $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. En (c), f es discontinua en c porque no existe $\lim_{x\to c} f(x)$. En los casos (b) y (c) la gráfica de la función se interrumpe en $x = c$.

Aunque una función puede no tener límite en un extremo de su dominio, puede existir límite lateral en ese punto. Extenderemos la definición de continuidad para considerar esta situación.

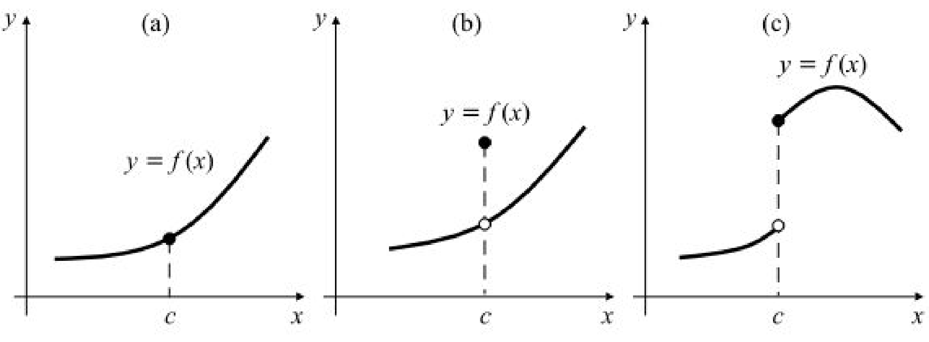

Figura 1.17 (a) f es continua en c.
(b) $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$.
(c) El $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.

DEFINICIÓN 5 Continuidad por la izquierda y por la derecha

Se dice que una función f es **continua por la derecha** en c si $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$.

Se dice que una función f es **continua por la izquierda** en c si $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1 La función de Heaviside $H(x)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.18, es continua para todo x excepto $x = 0$. Es continua por la derecha en 0, pero no es continua por la izquierda ni continua en ese punto.

∎

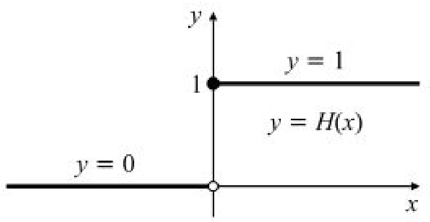

Figura 1.18 La función de Heaviside.

El siguiente teorema relaciona los conceptos de continuidad y continuidad lateral.

TEOREMA 5 La función f es continua en c si y sólo si es continua por la izquierda y por la derecha en c.

DEFINICIÓN 6 Continuidad en un extremo

Se dice que una función f es continua en un extremo izquierdo c de su dominio si es continua por la derecha en c.

Se dice que una función f es continua en un extremo derecho c de su dominio si es continua por la izquierda en c.

Ejemplo 2 La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ tiene dominio $[-2, 2]$. Es continua en el extremo derecho 2 porque es continua por la izquierda en ese punto, es decir, $\lim_{x\to 2-} f(x) = 0 = f(2)$. Es continua en el extremo izquierdo -2 porque es continua por la derecha en ese punto: $\lim_{x\to -2+} f(x) = 0 = f(-2)$. Por supuesto, f es también continua en cualquier punto interior de su dominio. Si $-2 < c < 2$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = \sqrt{4 - c^2} = f(c)$ (*véase* la Figura 1.19).

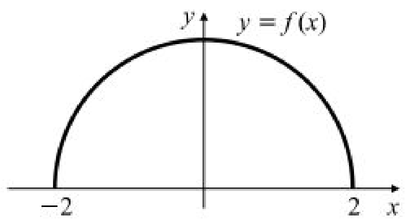

Figura 1.19 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en todos los puntos de su dominio.

Continuidad en un intervalo

Hemos definido el concepto de continuidad en un punto. Es de mayor importancia el concepto de continuidad en un intervalo.

DEFINICIÓN 7 Continuidad en un intervalo

Se dice que una función f es **continua en intervalo** I si es continua en todos los puntos de I. En particular, se dice que una función f es una **función continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 3 La función $f(x) = \sqrt{x}$ es una función continua. Su dominio es $[0, \infty)$. Es continua en el extremo izquierdo 0 porque es continua por la derecha en ese punto. Asimismo, es continua en todo punto $c > 0$ ya que $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

Ejemplo 4 La función $g(x) = 1/x$ es también una función continua. Esto puede parecer extraño a primera vista, puesto que su gráfica se interrumpe en $x = 0$ (*véase* la Figura 1.20). Sin embargo, el 0 no pertenece al dominio de g, por lo que es preferible decir que g no está definida en ese punto a decir que es discontinua en dicho punto (algunos autores dirían que g es discontinua en $x = 0$). Si asignáramos algún valor a $g(0)$, por ejemplo 0, podría decirse que $g(x)$ es discontinua en 0. No hay ninguna forma de definir $g(0)$ de manera que $g(x)$ sea continua en 0.

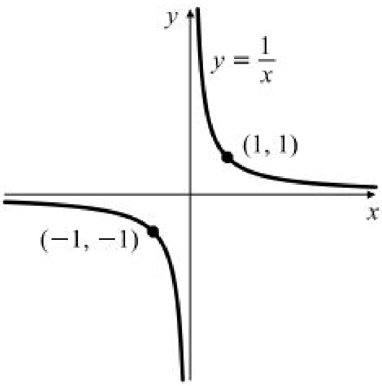

Figura 1.20 $1/x$ es continua en su dominio.

Ejemplo 5 La función máximo entero menor $\lfloor x \rfloor$ (*véase* la Figura 1.16) es continua en todo intervalo $[n, n+1)$, siendo n un entero. Es continua por la derecha para todo entero n, pero no es continua por la izquierda en esos puntos n, de forma que en los enteros es discontinua.

$$\lim_{x\to n+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor, \qquad \lim_{x\to n-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq n = \lfloor n \rfloor$$

Existen muchas funciones continuas

Las siguientes funciones son continuas allí donde estén definidas:

(a) Todos los polinomios.
(b) Todas las funciones racionales.
(c) Todas las potencias racionales $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$.
(d) Las funciones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, definidas en la Sección P.7.
(e) La función valor absoluto $|x|$.

El Teorema 3 de la Sección 1.2 asegura que todo polinomio es una función continua en cualquier punto de la recta real, que toda función racional es continua en todos los puntos de su dominio (formado por todos los números reales excepto el número finito de puntos para los que el denominador de la función racional se anula). Si m y n son enteros y $n \neq 0$, la función potencia racional $x^{m/n}$ está definida para todos los números positivos y también para todos los números negativos si n es impar. Su dominio incluye al 0 si y sólo si $m/n \geqslant 0$.

Los siguientes teoremas muestran que si se combinan funciones continuas de diversas formas, el resultado será a su vez una función continua.

TEOREMA 6 **Combinación de funciones continuas**

Si las funciones f y g están definidas en un intervalo que contiene a c, y son ambas continuas en c, entonces las siguientes funciones serán también continuas en c:

1. La suma $f + g$ y la diferencia $f - g$.

2. El producto fg.
3. La multiplicación por una constante kf, siendo k un número cualquiera.
4. El cociente f/g (siempre que $g(c) \neq 0$).
5. La raíz n-ésima $(f(x))^{1/n}$, siempre que $f(c) > 0$ si n es par.

Para las demostraciones se utilizan las reglas de los límites dadas en el Teorema 2 de la Sección 1.2. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c)$$

por lo que $f + g$ es continua en c.

TEOREMA 7 **La composición de funciones continuas es también continua**

Si $f(g(x))$ está definida en un intervalo que contiene a c, f es continua en L y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

En particular, si g es continua en c (y por tanto $L = g(c)$), entonces la composición $f \circ g$ es continua en c:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

(*véase* el Ejercicio 37 de la Sección 1.5).

Ejemplo 6 Las siguientes funciones son continuas en todos sus dominios:

(a) $3x^2 - 2x$ (b) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ (c) $|x^2 - 1|$

(d) $\sqrt{x}$ (e) $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$ (f) $\dfrac{|x|}{\sqrt{|x+2|}}$

Extensiones continuas y discontinuidades evitables

Como hemos visto en la Sección 1.2, una función racional puede tener límite incluso en un punto donde su denominador sea 0. Si $f(c)$ no está definida, pero existe $\lim_{x\to c} f(x) = L$, se puede definir una nueva función $F(x)$ de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ está en el dominio de } f \\ L & \text{si } x = c \end{cases}$$

$F(x)$ es continua en $x = c$ y se denomina **extensión continua** de $f(x)$ en $x = c$. Para el caso de funciones racionales f, sus extensiones continuas se obtienen cancelando los factores comunes.

Ejemplo 7 Demuestre que $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ tiene una extensión continua en $x = 1$, y obtenga dicha extensión.

Solución Aunque $f(1)$ no está definida, si $x \neq 1$ tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$$

La función

$$F(x) = \frac{x}{x+1}$$

es igual a $f(x)$ para $x \neq 1$, pero es también continua en $x = 1$, donde toma el valor de $1/2$. La Figura 1.21 muestra la gráfica de f. La extensión continua de $f(x)$ en $x = 1$ es $F(x)$. Su gráfica es idéntica a la de $f(x)$ pero sin el hueco en el punto $(1, 1/2)$.

Si una función f está indefinida o es discontinua en un punto a, pero puede ser redefinida en *ese único punto* de forma que sea continua en él, se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a. La función f del ejemplo anterior tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$. Para evitarla, se define $f(1) = 1/2$.

Ejemplo 8 La función $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Para evitarla, se redefine $g(2) = 2$ (*véase* la Figura 1.22).

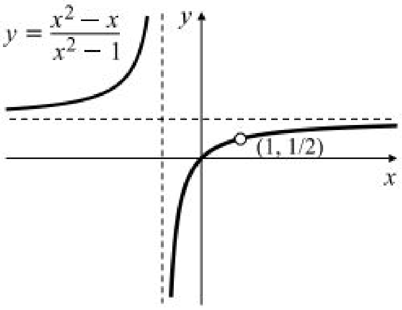

Figura 1.21 Esta función tiene una extensión continua en $x = 1$.

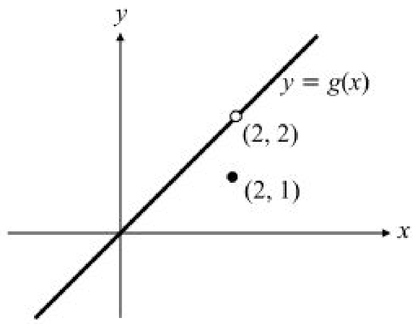

Figura 1.22 g tiene una discontinuidad evitable en 2.

Funciones continuas en intervalos cerrados y finitos

Las funciones continuas definidas en *intervalos cerrados y finitos* tienen propiedades especiales que las hacen particularmente útiles en matemáticas y sus aplicaciones. Presentaremos aquí dos de esas propiedades. Aunque pueden parecer obvias, se trata de propiedades mucho más sutiles que los resultados sobre límites establecidos anteriormente en este capítulo. Sus demostraciones (*véase* el Apéndice III) requieren un estudio cuidadoso de las implicaciones de la propiedad de completitud de los números reales.

La primera de las propiedades establece que una función $f(x)$ que es continua en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$ debe tener un **valor máximo absoluto** y un **valor mínimo absoluto**. Esto significa que los valores de $f(x)$ en todos los puntos del intervalo están entre los valores de $f(x)$ en dos puntos del intervalo. La gráfica de f tiene un valor máximo y un valor mínimo.

TEOREMA 8 **Teorema Max-Min**

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado y finito $[a, b]$. Entonces existen dos números p y q en $[a, b]$ tales que para todo x perteneciente al intervalo $[a, b]$,

$$f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$$

Por tanto, $f(x)$ tiene el valor mínimo absoluto $m = f(p)$, que se alcanza en el punto p, y el valor máximo absoluto $M = f(q)$, que se alcanza en el punto q.

Muchos problemas importantes en matemáticas y sus aplicaciones se formulan como la búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones. El cálculo proporciona algunas herramientas muy valiosas para resolver estos problemas. Obsérvese, sin embargo, que el teorema anterior simplemente establece que los valores máximo y mínimo absolutos *existen*, pero no dice cómo obtenerlos. En el Capítulo 4 desarrollaremos técnicas para calcular los valores máximos y mínimos de funciones. Por ahora, lo que podemos hacer es resolver algunos problemas sencillos de máximos y mínimos en los que intervienen funciones cuadráticas simplemente completando el cuadrado, sin realizar cálculos adicionales.

Ejemplo 9 ¿Cuál es la máxima área posible del campo rectangular que se puede acotar con 200 m de valla?

Solución Si denominamos x e y a los lados del campo en metros (*véase* la Figura 1.23), entonces su perímetro mide $2x + 2y$ m, y su área es $A = xy$ m^2. El dato es que $P = 200$, de forma que $x + y = 100$, e $y = 100 - x$. Ningún lado puede ser negativo, y x debe pertenecer al intervalo cerrado [0, 100]. El área del campo se puede expresar como una función de x sustituyendo y por $100 - x$:

$$A = x(100 - x) = 100x - x^2$$

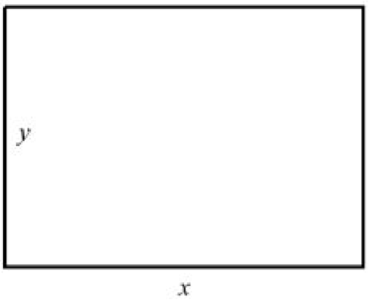

Figura 1.23 Campo rectangular: perímetro $= 2x + 2y$, área $= xy$.

El objetivo es, por tanto, obtener el valor máximo de la función cuadrática $A(x) = 100x - x^2$ en el intervalo [0, 100]. El Teorema 8 garantiza la existencia de ese máximo.

Para obtener el máximo, completamos el cuadrado de la función $A(x)$. Obsérvese que $x^2 - 100x$ son los dos primeros términos del cuadrado $(x - 50)^2 = x^2 - 100x + 2500$. Por tanto,

$$A(x) = 2500 - (x - 50)^2$$

Obsérvese ahora que $A(50) = 2500$, y que $A(x) < 2500$ si $x \neq 50$, ya que se está restando a 2500 un número siempre positivo $(x - 50)^2$. Por tanto, el valor máximo de $A(x)$ es 2500. El valor del área máxima del campo es de 2500 m^2 y se trata de un cuadrado de dimensiones $x = y = 50$ m.

El Teorema 8 implica que una función continua en un intervalo cerrado y finito está **acotada**. Esto significa que no puede tomar valores positivos o negativos arbitrariamente grandes. Debe existir un número K tal que

$$|f(x)| \leqslant K, \qquad \text{es decir,} \qquad -K \leqslant f(x) \leqslant K$$

De hecho, el valor de K puede ser el mayor de los números $|f(p)|$ y $|f(q)|$ en el teorema.

Las conclusiones del Teorema 8 pueden no cumplirse si f no es continua o si el intervalo no es cerrado. Las Figuras 1.24-1.27 muestran ejemplos de la forma en que puede no cumplirse el teorema.

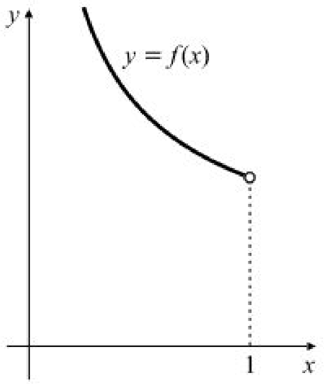

Figura 1.24 $f(x) = 1/x$ es continua en el intervalo abierto (0, 1). No está acotada y no tiene valor máximo ni mínimo.

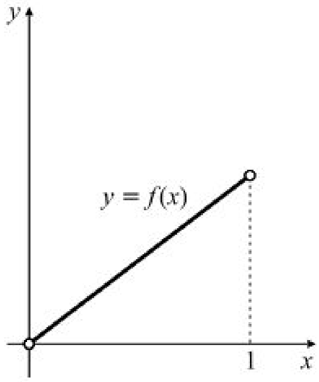

Figura 1.25 $f(x) = x$ es continua en el intervalo abierto (0, 1). Está acotada pero no tiene valor máximo ni mínimo.

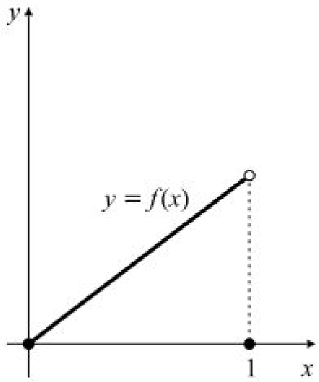

Figura 1.26 Esta función está definida en el intervalo cerrado [0, 1] pero es discontinua en el extremo $x = 1$. Tiene valor mínimo pero no tiene valor máximo.

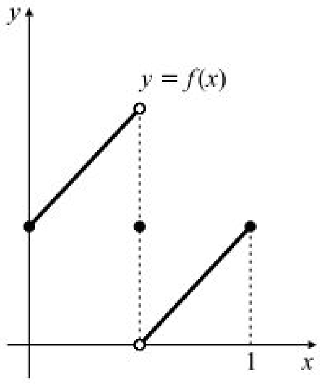

Figura 1.27 Esta función es discontinua en un punto interior de su dominio, el intervalo cerrado [0, 1]. Está acotada pero no tiene valores máximo ni mínimo.

Obtención de máximos y mínimos por métodos gráficos

Observación Se pueden utilizar herramientas gráficas para obtener los valores máximos y mínimos de funciones en intervalos donde sean continuas. Concretamente, la función «zoom» y la utilidad «trace» de las calculadoras gráficas pueden servir de ayuda. La Figura 1.28(a) muestra la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

en la ventana $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Obsérvese que f parece tener un máximo cerca de $x = 0.5$ y un mínimo cerca de $x = -2.5$. La Figura 1.28(b) muestra el resultado de ampliar la parte de la gráfica de (a) encerrada en un pequeño rectángulo (zoom) para que ocupe toda la pantalla. Siguiendo la curva hasta su valor máximo se puede obtener una estimación más precisa de dicho valor, obteniéndose que $f(x)$ alcanza un valor máximo de 1.2071 en el punto $x = 0.4149$, con cuatro decimales significativos. Si ampliáramos más la figura se podría obtener más exactitud.

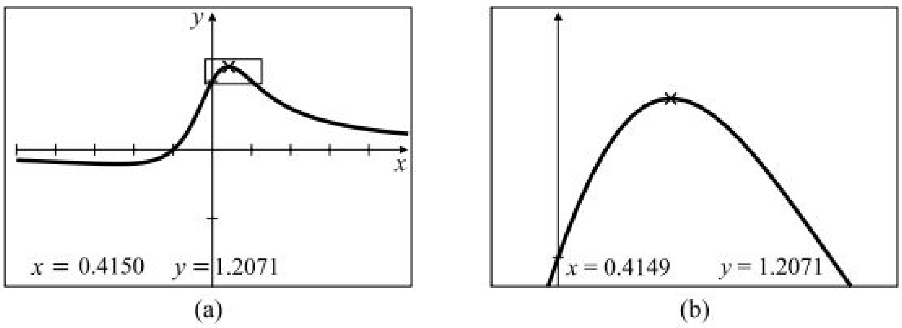

Figura 1.28 La utilización de la función «zoom» permite ampliar parte de la curva (a) cerca de su valor máximo de forma que ocupe toda la pantalla (b), manteniendo la forma de la curva.

La segunda propiedad de una función continua definida en un intervalo cerrado y finito es que la función toma todos los valores intermedios entre dos cualesquiera de sus valores. Esta propiedad se conoce con el nombre de **Teorema del Valor Medio**.

TEOREMA 9 Teorema del Valor Medio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado y finito $[a, b]$, y sea s un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Existe un número c perteneciente al intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = s$.

En particular, una función continua definida en un intervalo cerrado toma todos los valores entre su valor mínimo m y su valor máximo M, por lo que su rango es el intervalo cerrado $[m, M]$.

La Figura 1.29 muestra una situación típica. Los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ están en lados contrarios de la recta horizontal $y = s$. A no ser que se interrumpa, la gráfica de $y = f(x)$ debe cortar esta recta para ir de un punto al otro. En la figura, la recta se cruza sólo una vez, en $x = c$. Si la recta $y = s$ estuviera más arriba, podría haber hasta tres cruces en tres valores posibles de c.

El Teorema 9 es la razón por la que la gráfica de una función continua en un intervalo I no puede tener interrupciones. Debe ser **conexa**, es decir, una curva sin interrupciones ni saltos.

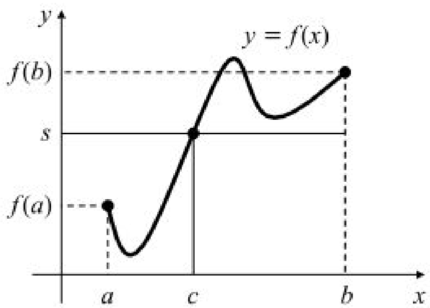

Figura 1.29 La función continua f toma el valor s en algún punto c entre a y b.

Ejemplo 10 Determine los intervalos en los que $f(x) = x^3 - 4x$ es positiva y negativa.

Solución Como $f(x) = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$, $f(x) = 0$ sólo en $x = 0$, 2 y -2. Como $f(x)$ es continua en toda la recta real, su signo debe ser constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$ (si existieran en esos intervalos, por ejemplo en el $(0, 2)$, puntos a y b tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces, por el Teorema del Valor Medio debería existir un punto c entre a y b, y por tanto entre 0 y 2, tal que $f(c) = 0$. Pero sabemos que no hay ninguna raíz entre 0 y 2).

Para saber si $f(x)$ es positiva o negativa en cada intervalo, basta con escoger un punto de intervalo y evaluar f en dicho punto.

Como $f(-3) = -15 < 0$, $f(x)$ es negativa en $(-\infty, -2)$.

Como $f(-1) = 3 > 0$, $f(x)$ es positiva en $(-2, 0)$.

Como $f(1) = -3 < 0$, $f(x)$ es negativa en $(0, 2)$.

Como $f(3) = 15 > 0$, $f(x)$ es positiva en $(2, \infty)$.

Cálculo de raíces de ecuaciones

Entre las muchas herramientas útiles que proporciona el cálculo existen unas que permiten calcular las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ con el grado de exactitud que se desee. Estas soluciones se denominan **raíces** de la ecuación, o **ceros** de la función f. El uso de estas herramientas requiere conocer previamente que la ecuación tiene una solución en un determinado intervalo. El teorema del valor medio puede proporcionar esta información.

Ejemplo 11 Demuestre que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [1, 2].

Solución La función $f(x) = x^3 - x - 1$ es un polinomio y, por tanto, es continua en todo punto. Tenemos que $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$. Como 0 es un valor entre -1 y 5, el teorema del valor medio nos asegura que debe existir un número c en el intervalo [1, 2] tal que $f(c) = 0$.

Un método para calcular un cero de una función continua que cambia de signo en los extremos de un intervalo se basa en dividir sucesivas veces el intervalo por la mitad (método de la bisección), determinando en qué mitad de la división está la raíz, que será aquella mitad en la que la función en sus extremos presente signos opuestos. Este método es lento. Por ejemplo, si el intervalo original tuviera de longitud 1, llevaría 11 divisiones conseguir un intervalo cuya longitud fuese menor que 0.0005 (porque $2^{11} > 2000 = 1/(0.0005)$), asegurándonos por tanto que hemos encontrado la raíz con una precisión de tres dígitos decimales. Sin embargo, este método no requiere hardware gráfico y se puede realizar de forma sencilla con una calculadora, preferiblemente una en la que la expresión de la función se pueda programar.

Tabla 6. Método de la bisección para $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

Número de bisección	x	$f(x)$	Intervalo de la raíz	Punto medio
	1	−1		
	2	5	[1, 2]	1.5
1	1.5	0.8750	[1, 1.5]	1.25
2	1.25	−0.2969	[1.25, 1.5]	1.375
3	1.375	0.2246	[1.25, 1.375]	1.3125
4	1.3125	−0.0515	[1.3125, 1.375]	1.3438
5	1.3438	0.0826	[1.3125, 1.3438]	1.3282
6	1.3282	0.0147	[1.3125, 1.3282]	1.3204
7	1.3204	−0.0186	[1.3204, 1.3282]	1.3243
8	1.3243	−0.0018	[1.3243, 1.3282]	1.3263
9	1.3263	0.0065	[1.3243, 1.3263]	1.3253
10	1.3253	0.0025	[1.3243, 1.3253]	1.3248
11	1.3248	0.0003	[1.3243, 1.3248]	1.3246
12	1.3246	−0.0007	[1.3246, 1.3248]	

Ejemplo 12 **(Método de la bisección)** Resuelva la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ del Ejemplo 11 con una precisión de tres dígitos decimales.

Solución Comenzamos por recordar que existe una raíz en el intervalo [1, 2]. La Tabla 6 muestra los resultados de las bisecciones.

La raíz es 1.325, redondeada a 3 dígitos decimales. En la Sección 4.6 veremos que el cálculo proporciona métodos mucho más rápidos para resolver ecuaciones como ésta.

La ecuación $f(x) = 0$ se puede resolver también con herramientas gráficas. Basta con dibujar la función $f(x)$ en un intervalo lo suficientemente grande para ver más o menos dónde están los ceros. Se seleccionan los ceros de uno en uno y se va ampliando la parte de la ventana cerca del cero para que ocupe toda la ventana gráfica (*véase* la Figura 1.30). Este procedimiento se repite hasta que se pueda estimar el cero con la precisión deseada (o hasta que la calculadora u ordenador lo permitan).

Muchas calculadoras programables y paquetes software de álgebra por computador incorporan rutinas de resolución de ecuaciones. Por ejemplo, la rutina `fsolve` de Maple se puede utilizar para calcular la solución real de $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo [1, 2] (*véase* el Ejemplo 11).

```
> fsolve (x^3-x-1=0, x=1..2);
```

1.324717957

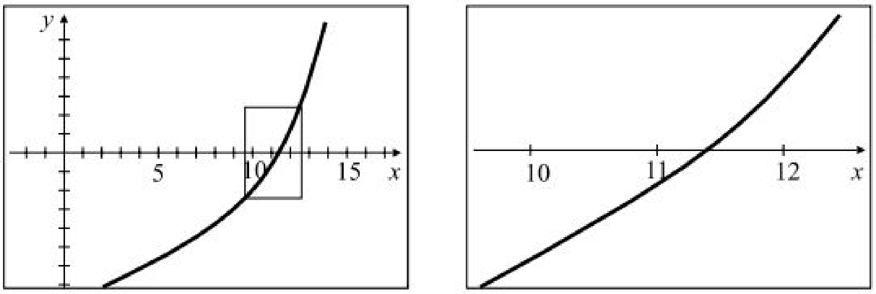

Figura 1.30 La función que se muestra en la ventana superior tiene una raíz entre 11 y 12. El rectángulo pequeño se amplía hasta llenar toda la pantalla en la ventana inferior, lo que permite estimar que la raíz está alrededor de 11.4. Sucesivas ampliaciones permitirían aumentar la precisión.

Observación El teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio son ejemplos de lo que los matemáticos denominan **teoremas de existencia**. Este tipo de teoremas aseveran que algo existe, pero no nos dicen cómo calcularlo. Muchas veces los estudiantes creen que los matemáticos se preocupan mucho por demostrar que un problema tiene solución y no lo bastante para encontrar dicha solución. El argumento es el siguiente: «Si puedo encontrar la solución de un problema, no necesito preocuparme de si esa solución existe». Esta lógica, sin embargo, es falsa. Supongamos el problema «Calcule el máximo entero positivo». Por supuesto, se trata de un problema sin solución. No existe un entero positivo máximo porque siempre se puede sumar a un entero positivo otro entero positivo, con lo que se obtiene un entero positivo mayor. Supongamos, aun así, que olvidamos esto e intentamos calcular una solución. Podríamos proceder así:

Sea N el máximo entero positivo.
Como 1 es un entero positivo, debe cumplirse que $N \geqslant 1$.
Como N^2 es un entero positivo, no puede ser mayor que el máximo entero positivo.
Por tanto, $N^2 \leqslant N$ y $N^2 - N \leqslant 0$.
Entonces, $N(N-1) \leqslant 0$ y debe ser $N - 1 \leqslant 0$.
Por tanto, $N \leqslant 1$.
Sabemos ya que $N \geqslant 1$. Por tanto, $N = 1$.
Por consiguiente, 1 es el máximo entero positivo.

El único error de este razonamiento es el supuesto, en la primera línea, de que el problema tiene solución. En parte, es para evitar estas trampas lógicas por lo que los matemáticos demuestran los teoremas de existencia.

Ejercicios 1.4

Los Ejercicios 1-3 se refieren a la función g definida en el intervalo $[-2, 2]$ que se muestra en la Figura 1.31.

1. Indique si g es (a) continua, (b) continua por la izquierda, (c) continua por la derecha y (d) discontinua en cada uno de los puntos -2, -1, 0, 1 y 2.

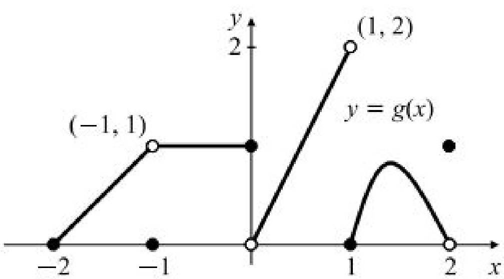

Figura 1.31

2. ¿En qué puntos de su dominio posee g una discontinuidad evitable, y cómo se podría redefinir para que fuera continua en dichos puntos?

3. ¿Tiene g un máximo absoluto en $[-2, 2]$? ¿Y un mínimo absoluto?

4. ¿En qué puntos es la función f, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.32, discontinua? ¿En cuáles de esos puntos es continua por la izquierda? ¿Y continua por la derecha?

5. ¿Podría redefinirse la función f de la Figura 1.32 en el punto $x = 1$ de forma que fuera continua en dicho punto?

6. La función $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ no es continua ni discontinua en $x = 0$. ¿Cómo es esto posible?

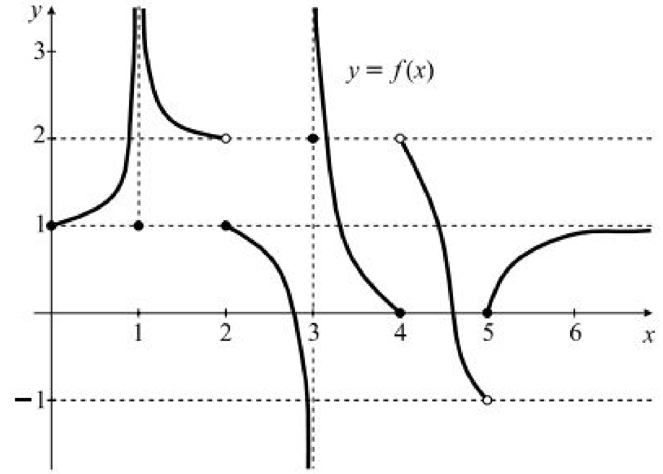

Figura 1.32

En los Ejercicios 7-12, indique en qué puntos de sus dominios las funciones dadas son continuas, continuas por la izquierda o por la derecha y discontinuas.

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 0.987 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11. La función mínimo entero mayor $\lceil x \rceil$ del Ejemplo 11 de la Sección P.5.

12. La función de coste $C(t)$ del Ejercicio 53 de la Sección 1.3.

En los Ejercicios 13-16, ¿cómo debería definirse la función en el punto dado para que fuera continua en dicho punto? Obtenga una fórmula para la extensión continua en dicho punto.

13. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ para $x = 2$

14. $\dfrac{1 + t^3}{1 - t^2}$ para $t = -1$

15. $\dfrac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 6}$ para 3

16. $\dfrac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$ para $\sqrt{2}$

17. Obtenga k para que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea una función continua.

18. Obtenga m para que $g(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x < 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ sea una función continua para todo x.

19. ¿Tiene la función x^2 un valor máximo en el intervalo abierto $-1 < x < 1$? ¿Y un valor mínimo? Explique el motivo.

20. La función de Heaviside del Ejemplo 1 tiene un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$, pero no es continua en dicho intervalo. ¿Representa esto una violación del teorema Max-Min? ¿Por qué?

En los Ejercicios 21-24 se piden los valores máximo y mínimo de varias funciones. Se pueden resolver utilizando el método del Ejemplo 9.

21. La suma de dos números no negativos vale 8. ¿Cuál es el máximo valor posible de su producto?

22. La suma de dos números no negativos vale 8. ¿Cuál es (a) el valor mínimo y (b) el valor máximo de la suma de sus cuadrados?

23. Una compañía de software estima que si asigna x programadores para trabajar en un proyecto, puede desarrollar un nuevo producto en T días, siendo

$$T = 100 - 30x + 3x^2$$

¿Cuántos programadores debe asignar la compañía para terminar el producto lo más rápidamente posible?

24. El coste de un fabricante de pupitres para enviar x pupitres a su almacén es de $245x - 30x^2 + x^3$. ¿Cuántos pupitres debería incluir en cada envío para minimizar el coste medio por pupitre?

Calcule los intervalos en los que las funciones $f(x)$ de los Ejercicios 25-28 son positivas y negativas.

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

26. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3}$

29. Demuestre que $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene un cero entre $x = 0$ y $x = 1$.

30. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.

31. Demuestre que la función $F(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$ toma el valor $(a + b)/2$ en algún punto x.

32. **(Un teorema del punto fijo)** Suponga que f es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo x perteneciente a $[0, 1]$. Demuestre que debe existir un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (c se denomina punto fijo de la función f). *Sugerencia:* si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, el resultado queda demostrado. Si no es así, aplíquese el teorema del valor medio a la función $g(x) = f(x) - x$.

33. Si una función par f es continua por la derecha en $x = 0$, demuestre que es continua en $x = 0$.

34. Si una función impar f es continua por la derecha en $x = 0$, demuestre que es continua en $x = 0$, y que cumple $f(0) = 0$.

Utilice una herramienta gráfica para obtener los valores de los máximos y los mínimos de las funciones de los Ejercicios 35-38, y los puntos x donde se producen. Obtenga todas las respuestas con una precisión de 3 dígitos decimales.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4 + 1}$ en $[-5, 5]$

36. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{6 + x}$ en $[-\pi, \pi]$

37. $f(x) = x^2 + \dfrac{4}{x}$ en $[1, 3]$

38. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + x(\cos(\pi x) + 1)$ en $[0, 1]$

Utilice una herramienta gráfica o una calculadora programable y el método de la bisección para resolver las ecuaciones de los Ejercicios 39 y 40 con una precisión de tres dígitos decimales. Como primer paso, intente obtener un intervalo en el que pueda asegurar que hay una raíz.

39. $x^3 + x - 1 = 0$

40. $\cos x - x = 0$

Utilice la función `fsolve` de Maple para resolver las Ecuaciones 41 y 42.

41. $\operatorname{sen} x + 1 - x^2 = 0$ (dos raíces)

42. $x^4 - x - 1 = 0$ (dos raíces)

43. Investigue la diferencia entre las rutinas de Maple `fsolve (f,x)`, `solve(f,x)`, y `evalf (solve(f,x))`, donde `f := x^3-x-1=0.`
Nótese que no se especifica un intervalo de x.

1.5 Definición formal de límite

El material de esta sección es opcional.

La definición *informal* de límite dada en la Sección 1.2 no es lo suficientemente precisa para permitirnos demostrar resultados sobre límites como los Teoremas 2-4 de la Sección 1.2. La definición *formal* más precisa se basa en la idea de controlar la entrada x de una función f de forma que la salida $f(x)$ esté en un intervalo determinado.

Ejemplo 1 El área de un disco circular de radio r es $A = \pi r^2$ cm^2. Un mecánico debe fabricar un disco circular de metal con un área de 400π cm^2, con una tolerancia de ± 5 cm^2. ¿Con qué tolerancia sobre 20 cm debe controlar el mecánico el radio del disco para lograr ese objetivo?

Solución El mecánico quiere obtener $|\pi r^2 - 400\pi| < 5$, es decir,

$$400\pi - 5 < \pi r^2 < 400\pi + 5$$

o bien

$$\sqrt{400 - (5/\pi)} < r < \sqrt{400 + (5/\pi)}$$

$$19.96017 < r < 20.03975$$

Es decir, el mecánico necesita $|r - 20| < 0.03975$; por lo que debe asegurar que el radio del disco dista menos de 0.04 cm del valor de 20 cm, para que el área del disco esté dentro del nivel de tolerancia. ∎

Cuando se dice que $f(x)$ tiene como límite L cuando x tiende a a, lo que realmente se dice es que es posible asegurar que el *error* $|f(x) - L|$ será menor que *cualquier* tolerancia admisible, no importa lo pequeña que sea, si x está lo *suficientemente cerca* de a (pero no es igual a a). Es tradicional utilizar ε (la letra griega «épsilon») para expresar el tamaño del *error* admisible y δ (la letra griega «delta») para expresar la diferencia $x - a$ que indica lo cerca que debe estar x de a para cumplir con la tolerancia. Éstas son las letras que Cauchy y Weierstrass utilizaron en su trabajo pionero del siglo XIX sobre límites y continuidad.

Si ε es un número positivo, *todo lo pequeño que se quiera*, debemos ser capaces de asegurar que $|f(x) - L| < \varepsilon$ haciendo que x esté lo *suficientemente cerca* de a (pero no sea igual a a). ¿Cuánto es lo suficientemente cerca? Es suficiente que la distancia $|x - a|$ entre x y a sea menor que un número positivo δ que depende de ε (*véase* la Figura 1.33). Si se puede encontrar el valor de δ para todo ε positivo, se puede concluir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

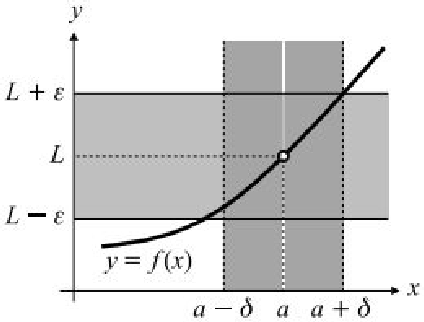

Figura 1.33 Si $x \neq a$ y $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 8 Definición formal de límite

Se dice que una función f **tiende al límite** L cuando x **tiende** a a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, que posiblemente depende de ε, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

La definición formal de límite no indica cómo calcular el límite de una función, pero permite verificar si la sospecha de un determinado límite es correcta. Los ejemplos que siguen muestran cómo se puede utilizar para verificar afirmaciones sobre límites de diversas funciones. El primero de ellos presenta una verificación formal de los dos límites calculados en el Ejemplo 3 de la Sección 1.2.

Ejemplo 2 **(Dos límites importantes)** Verifique: (a) $\lim_{x \to a} x = a$ y (b) $\lim_{x \to a} k = k$ (siendo k una constante).

Solución

(a) Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |x - a| < \varepsilon$$

Claramente se puede tomar $\delta = \varepsilon$ y la implicación anterior se cumplirá. Esto demuestra que $\lim_{x \to a} x = a$.

(b) Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |k - k| < \varepsilon$$

Como $k - k = 0$, δ puede tomar cualquier valor positivo y la implicación anterior será cierta. Esto demuestra que $\lim_{x \to a} k = k$.

Ejemplo 3 Verifique: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Solución Aquí $a = 2$ y $L = 4$. Sea ε un número positivo. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Tenemos que

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2|\,|x - 2|$$

Queremos que la expresión anterior sea menor que ε. El factor $|x-2|$ se puede hacer tan pequeño como deseemos escogiendo el valor de δ adecuadamente, pero es necesario controlar el factor $|x+2|$ para que no se haga demasiado grande. Si asumimos que $\delta \leqslant 1$ y requerimos que $|x-2| < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} |x-2| < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 3 \quad &\Rightarrow \quad 3 < x+2 < 5 \\ &\Rightarrow \quad |x+2| < 5 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|f(x) - 4| < 5|x-2| \quad \text{si} \quad |x-2| < \delta \leqslant 1$$

Pero $5|x-2| < \varepsilon$ si $|x-2| < \varepsilon/5$. Por tanto, si tomamos $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$, el *mínimo* (el más pequeño) de los números 1 y $\varepsilon/5$, entonces,

$$|f(x) - 4| < 5|x-2| < 5 \times \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \quad \text{si} \quad |x-2| < \delta$$

Esto demuestra que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Uso de la definición de límite para demostrar teoremas

Generalmente no hemos utilizado la definición formal de límite para verificar límites específicos como en los dos ejemplos anteriores. Lo que hemos hecho es utilizar teoremas generales sobre límites, en particular los Teoremas 2-4 de la Sección 1.2. La definición se usa para demostrar estos teoremas. Como ejemplo, demostraremos la primera parte del Teorema 2, la *regla de la suma*.

Ejemplo 4 **(Demostración de la regla del límite de una suma)** Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, demuestre que $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Solución Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar un número δ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(f(x) + g(x)) - (L+M)| < \varepsilon$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} &|(f(x) + g(x)) - (L+M)| && \text{Reagrupar términos} \\ &\quad = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| && \text{(Uso de la desigualdad del triángulo } |a+b| \leqslant |a| + |b|) \\ &\quad \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| && \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\varepsilon/2$ es un número positivo, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Análogamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, el valor mínimo de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|x-a| < \delta_1$, por lo que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ y $|x-a| < \delta_2$, por lo que $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Entonces,

$$|(f(x) + g(x)) - (L+M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Otras clases de límites

La definición formal de límite se puede modificar para dar definiciones precisas de límites laterales, límites en el infinito y límites infinitos. Daremos aquí algunas definiciones y dejaremos al lector las restantes.

DEFINICIÓN 9 **Límite por la derecha**

Se dice que una función f tiene **límite por la derecha** L en a, y se escribe

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, que posiblemente depende de ε, tal que si $a < x < a + \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Nótese cómo la condición $0 < |x - a| < \delta$ en la definición de límite se transforma en $a < x < a + \delta$ en el caso del límite por la derecha (Figura 1.34). La definición de límite por la izquierda es similar a la anterior.

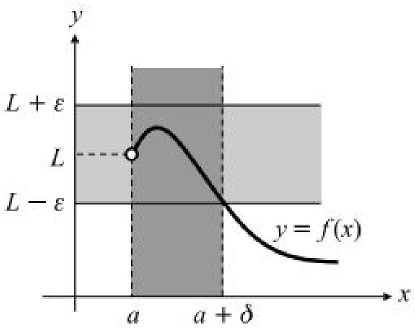

Figura 1.34 Si $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo 5 Demuestre que $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Solución Sea $\varepsilon > 0$. Si $x > 0$, entonces $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x}$. Se puede asegurar que $\sqrt{x} < \varepsilon$ haciendo que $x < \varepsilon^2$. Tomando por tanto $\delta = \varepsilon^2$ se cumplirá la condición de la definición:

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \quad \text{implica que} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Para demostrar que una función f tiene límite L en el infinito tenemos que ser capaces de asegurar que el error $|f(x) - L|$ es menor que cualquier número positivo ε con la restricción de que x sea lo *suficientemente grande*, es decir, requiriendo que $x > R$ para algún número positivo R que dependerá de ε.

DEFINICIÓN 10 **Límite en el infinito**

Se dice que una función f **tiende al límite** L cuando x **tiende a infinito**, y se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número R, que posiblemente depende de ε, tal que si $x > R$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Sugerimos al lector que formule una versión equivalente a la definición anterior para el límite en menos infinito.

Ejemplo 6 Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Solución Sea ε un número positivo. Para $x > 0$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo tanto, la condición de la definición se cumple si $R = 1/\varepsilon$, con lo que hemos demostrado que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

Para demostrar que $f(x)$ tiene límite infinito en a, hay que asegurar que $f(x)$ es mayor que cualquier número positivo dado (llamémoslo B) restringiendo x a un pequeño intervalo centrado en a, con $x \neq a$.

DEFINICIÓN 11 Límite infinito

Se dice que una función $f(x)$ **tiende a infinito** cuando x tiende a a, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si para todo número positivo B se puede encontrar un número positivo δ, que posiblemente depende de B, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y $f(x) > B$.

Intente el lector formular la correspondiente definición para el concepto de $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Intente después modificar las definiciones para contemplar los casos de límites laterales infinitos y límites infinitos en el infinito.

Ejemplo 7 Verifique que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

Solución Sea B un número positivo. Tenemos que

$$\frac{1}{x^2} > B \quad \text{siempre que} \quad x^2 < \frac{1}{B}$$

Si $\delta = 1/\sqrt{B}$, entonces

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^2 < \delta^2 = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > B$$

Y, por tanto, $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$.

Ejercicios 1.5

1. La longitud L de una barra de metal depende de la temperatura T (°C) en la forma $L = 39.6 + 0.025T$ cm. ¿Entre qué valores de temperatura se debe mantener la barra para que su longitud valga 40 cm ± 1 mm?

2. ¿Cuál es el máximo error admisible en la longitud de 20 cm del lado de una caja de cartón si el volumen de la caja debe ser de 8000 cm^3 con una tolerancia de $\pm 1.2\%$?

En los Ejercicios 3-6, ¿en qué intervalo debe estar confinada x si $f(x)$ debe estar a una distancia menor que ε del número L?

3. $f(x) = 2x - 1, \quad L = 3, \quad \varepsilon = 0.02$

4. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad \varepsilon = 0.1$

5. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1, \quad \varepsilon = 0.1$

6. $f(x) = 1/x, \quad L = -2, \quad \varepsilon = 0.01$

En los Ejercicios 7-10, encuentre un número $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L|$ es menor que un número dado ε.

7. $f(x) = 3x + 1, \quad a = 2, \quad L = 7, \quad \varepsilon = 0.03$

8. $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $a = 3$, $L = 3$, $\varepsilon = 0.01$

9. $f(x) = x^3$, $a = 2$, $L = 8$, $\varepsilon = 0.2$

10. $f(x) = 1/(x+1)$, $a = 0$, $L = 1$, $\varepsilon = 0.05$

En los Ejercicios 11-20, utilice la definición formal de límite para verificar los límites indicados.

11. $\lim_{x \to 1} (3x+1) = 4$

12. $\lim_{x \to 2} (5 - 2x) = 1$

13. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

14. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{1+x^2} = 0$

15. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{1-4x^2}{1-2x} = 2$

16. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2} = -2$

17. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

18. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}$

19. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$

20. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

En los Ejercicios 21-26, proporcione las definiciones formales de los límites que se presentan.

21. $\lim_{x \to a-} f(x) = L$

22. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

23. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

24. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

25. $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

26. $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$

Utilice las definiciones formales de las diversas clases de límites para demostrar las afirmaciones de los Ejercicios 27-30.

27. $\lim_{x \to 1+} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

28. $\lim_{x \to 1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

29. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

30. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

Demostración de teoremas con la definición de límite

***31.** Demuestre que los límites son únicos. Es decir, si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} f(x) = M$, entonces $L = M$. *Sugerencia*: Suponga que $L \neq M$ y haga $\varepsilon = |L - M|/3$.

***32.** Si $\lim_{x \to a} g(x) = M$, demuestre que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| < 1 + |M|$$

(*Sugerencia*: Haga $\varepsilon = 1$ en la definición de límite). Esto quiere decir que los valores de $g(x)$ están **acotados** en las proximidades de un límite.

***33.** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, demuestre que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$ (regla del producto del Teorema 2). *Sugerencia*: Vuelva a leer el Ejemplo 4. Haga $\varepsilon > 0$ escriba

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M)| \\
&\leqslant |(f(x) - L)g(x)| + |L(g(x) - M)| \\
&= |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|
\end{aligned}$$

Ahora intente hacer cada término de la última línea menor que $\varepsilon/2$ tomando un valor de x cercano a a. Necesitará el resultado del Ejercicio 32.

***34.** Si $\lim_{x \to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, demuestre que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| > |M|/2$$

***35.** Si $\lim_{x \to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Sugerencia: Necesitará el resultado del Ejercicio 34.

36. Utilice los hechos demostrados en los Ejercicios 33 y 35 para demostrar la regla del cociente (apartado 5 del Teorema 2): si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

***37.** Utilice dos veces la definición de límite para demostrar el Teorema 7 de la Sección 1.4: si f es continua en L y $\lim_{x \to c} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \to c} g(x))$$

***38.** Demuestre el Teorema del Sándwich (Teorema 4 de la Sección 1.2). *Sugerencia*: Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
|g(x) - L| &= |g(x) - f(x) + f(x) - L| \\
&\leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\
&\leqslant |h(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\
&= |h(x) - L - (f(x) - L)| + |f(x) - L| \\
&\leqslant |h(x) - L| + |f(x) - L| + |f(x) - L|
\end{aligned}$$

Ahora puede hacer cada término de la expresión anterior menor que $\varepsilon/3$ para completar la demostración.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ Tasa o velocidad media de cambio de $f(x)$ en $[a, b]$.
  - ◇ Tasa o velocidad instantánea de cambio de $f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ $\lim_{x\to a} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, $\lim_{x\to a-} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$
  - ◇ f es continua en c.
  - ◇ f es continua por la izquierda (o por la derecha) en c.
  - ◇ f tiene una extensión continua en c.
  - ◇ f es una función continua.
  - ◇ f toma sus valores máximo y mínimo en el intervalo I.
  - ◇ f está acotada en el intervalo I.
  - ◇ f tiene la propiedad del valor medio en el intervalo I.
- **Formule tantas «leyes de límites» como sepa.**
- **¿Qué propiedades debe tener una función si es continua y su dominio es un intervalo cerrado y finito?**
- **¿Cómo se pueden calcular ceros (raíces) de funciones continuas?**

Ejercicios de repaso

1. Calcule la velocidad media de cambio de x^3 en el intervalo $[1, 3]$.

2. Calcule la velocidad media de cambio de $1/x$ en el intervalo $[-2, -1]$.

3. Calcule la velocidad de cambio de x^3 en $x = 2$.

4. Calcule la velocidad de cambio de $1/x$ en $x = -3/2$.

En los Ejercicios 5-30, calcule los límites o explique por qué no existen.

5. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 4x + 7)$

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

10. $\lim_{x\to 2-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

11. $\lim_{x\to -2+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

12. $\lim_{x\to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$

13. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

14. $\lim_{h\to 0} \dfrac{h}{\sqrt{x + 3h} - \sqrt{x}}$

15. $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x - x^2}$

16. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x - x^2}$

17. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x - x^2}$

18. $\lim_{x\to 1-} \sqrt{x - x^2}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^2}{3x^2 - x - 1}$

20. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x + 100}{x^2 + 3}$

21. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 4}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

23. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$

24. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$

25. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

27. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

28. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$

29. $\lim_{x\to -\infty} [x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}]$

30. $\lim_{x\to\infty} [x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}]$

¿En qué puntos (si hay alguno) de su dominio son discontinuas las funciones de los Ejercicios 31-38? ¿Es f continua por la izquierda o por la derecha en esos puntos? En los Ejercicios 35 y 36, H indica la función de Heaviside: $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ y $H(x) = 0$ si $x < 0$.

31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

32. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

35. $f(x) = H(x - 1)$

36. $f(x) = H(9 - x^2)$

37. $f(x) = |x| + |x + 1|$

38. $f(x) = \begin{cases} |x|/|x + 1| & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Problemas avanzados

1. Demuestre que la velocidad media de cambio de la función x^3 en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 < a < b$, es igual a la velocidad instantánea de cambio de x^3 en $x = \sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$. ¿Está este punto a la izquierda o a la derecha del punto medio del intervalo $[a, b]$, $(a + b)/2$?

2. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x-1|-|x+1|}$

3. Calcule $\lim_{x\to 3} \dfrac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|}$

4. Calcule $\lim_{x\to 64} \dfrac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8}$

5. Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt[3]{7+x}-2}$

6. La ecuación $ax^2+2x-1=0$, siendo a una constante, tiene dos raíces si $a>-1$ y $a\neq 0$:

$$r_+(a)=\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a} \quad \text{y} \quad r_-(a)=\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

(a) ¿Qué sucede con la raíz $r_-(a)$ cuando $a\to 0$?

(b) Investigue numéricamente qué ocurre con la raíz $r_+(a)$ cuando $a\to 0$, probando con los valores $a=1,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01, \ldots$ Para valores como $a=10^{-8}$, la precisión limitada de las calculadoras puede producir resultados interesantes. ¿Qué sucede, y por qué?

(c) Calcule matemáticamente $\lim_{a\to 0} r_+(a)$ utilizando la igualdad

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

7. ¿VERDADERO o FALSO? Si es VERDADERO, explique la razón. Si es FALSO, proporcione un contraejemplo.

(a) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no existe $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.

(b) Si no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.

(c) Si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

(d) Si $|f|$ es continua en a, entonces también lo es f.

(e) Si $f(x)<g(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de a, y si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

8. (a) Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, demuestre que $R(f)$ es un intervalo cerrado.

(b) ¿Qué posibilidades hay para $R(f)$ si $D(f)$ es un intervalo abierto (a, b)?

9. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$. Calcule todos los puntos donde f no sea continua. ¿Tiene f límites laterales en alguno de esos puntos y, si es así, cuales son?

10. Calcule el valor mínimo de $f(x)=1/(x-x^2)$ en el intervalo (0, 1). Explique cómo sabe que debe existir ese valor mínimo.

***11.** (a) Suponga que f es una función continua en el intervalo [0, 1] y que $f(0)=f(1)$. Demuestre que $f(a)=f\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$ para algún $a\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Sugerencia: Haga $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f(x)$ y utilice el teorema del valor medio.

(b) Sea n un entero mayor que 2. Demuestre que

$$f(a)=f\left(a+\frac{1}{n}\right) \text{ para algún } a\in\left[0, 1-\frac{1}{n}\right].$$