a una forma más simple. Utilice ahora el resultado del Ejercicio 32 para obtener la *solución general* de esta ecuación de onda en la forma dada en el Ejemplo 4 de la Sección 12.4.

◆**34.** Demuestre que el problema de valor inicial de la ecuación de onda unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt}(x,\ t) = c^2 u_{xx}(x,\ t) \\ u(x,\ 0) = p(x) \\ u_t(x,\ 0) = q(x) \end{cases}$$

tiene como solución

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\,[p(x - ct) + p(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(s)\,ds$$

Nótese que aquí hemos utilizado los subíndices x y t en lugar de 1 y 2 para indicar las derivadas parciales. Esto es práctica habitual cuando se trata con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Observación El problema de valor inicial del Ejercicio 34 proporciona el pequeño desplazamiento lateral $u(x,\ t)$ de la posición x en el instante t de una cuerda que vibra bajo tensión según el eje x. La función $p(x)$ proporciona el desplazamiento *inicial* en la posición x, es decir, el desplazamiento en $t = 0$. De forma similar, $q(x)$ proporciona la velocidad inicial en la posición x. Obsérvese que la posición en el instante t depende sólo de los valores de esos datos iniciales en puntos no separados más de ct unidades. Esto es coherente con la observación hecha anteriormente de que las soluciones de la ecuación de onda representan ondas que viajan con velocidad c.

Vuelva a realizar los ejemplos y ejercicios que se indican en los Ejercicios 35-40 utilizando Maple para efectuar los cálculos.

35. Ejemplo 10

36. Ejercicio 16

37. Ejercicio 19

38. Ejercicio 20

39. Ejercicio 23

40. Ejercicio 34

12.6 Aproximaciones lineales, diferenciabilidad y diferenciales

La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$ proporciona una aproximación adecuada a los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos al punto a (*véase* la Figura 12.23):

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

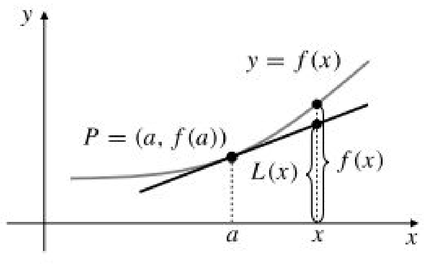


Figura 12.23 Linealización de la función f alrededor de a.

$L(x)$ es la **linealización** de f en a; su gráfica es una recta tangente a $y = f(x)$ en ese punto. La mera existencia de $f'(a)$ es suficiente para garantizar que el error de la aproximación (la distancia vertical entre la curva y la tangente en x) es pequeña comparada con la distancia a $h = x - a$ entre a y x, es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0\end{aligned}$$

De forma similar, el plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en (a, b) es $z = L(x, y)$, siendo

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

la **linealización** de f en (a, b). Podemos utilizar $L(x, y)$ como aproximación a los valores de $f(x, y)$ cerca de (a, b):

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Ejemplo 1 Calcule un valor aproximado de $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ en $(2.2, -0.2)$.

Solución Es conveniente utilizar la linealización en $(2, 0)$, donde los valores de f y de sus derivadas parciales se pueden calcular fácilmente:

$$f(2, 0) = 3$$

$$f_1(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \qquad f_1(2, 0) = \frac{4}{3}$$

$$f_2(x, y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \qquad f_2(2, 0) = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 0)$, y

$$f(2.2, -0.2) \approx L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3}(2.2 - 2) + \frac{1}{3}(-0.2 - 0) = 3.2$$

A efectos de comparación, $f(2.2, -0.2) \approx 3.2172$ con una precisión de 4 cifras decimales. ■

A diferencia del caso de una sola variable, la mera existencia de las derivadas parciales $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ no implica siempre que f sea continua en (a, b), y mucho menos que el error de linealización sea pequeño comparado con la distancia $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ entre (a, b) y (x, y). Adoptaremos esta última condición en nuestra definición de lo que quiere decir que una función de dos variables sea *diferenciable* en un punto.

DEFINICIÓN 5

Se dice que la función $f(x, y)$ es **diferenciable** en el punto (a, b) si

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esta definición y los teoremas que siguen se pueden generalizar a funciones de cualquier número de variables en la forma obvia. Por motivos de sencillez, sólo los enunciaremos para el caso de dos variables.

La función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) si y sólo si la superficie $z = f(x, y)$ tiene un *plano tangente no vertical* en (a, b). Esto implica que $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ deben existir y que f debe ser continua en (a, b) (sin embargo, recuérdese que la existencia de las derivadas parciales *no* implica siempre que f sea continua, y mucho menos que sea diferenciable). En particular, la función será *continua* allí donde sea diferenciable. Demostraremos una versión de dos variables del Teoremas del Valor Medio y la utilizaremos para demostrar que las funciones son diferenciables siempre que tengan derivadas parciales primeras *continuas*.

TEOREMA 3 **Un Teorema del Valor Medio**

Si $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b), y si los valores absolutos de h y k son lo suficientemente pequeños, entonces existen valores θ_1 y θ_2, ambos entre 0 y 1, tales que

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_1(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2(a, b+\theta_2 k)$$

DEMOSTRACIÓN La demostración de este teorema es muy similar a la del Teorema 1 de la Sección 12.4, por lo que sólo daremos algunas ideas. El lector puede completar los detalles. Se expresa

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = (f(a+h, b+k) - f(a, b+k)) + (f(a, b+k) - f(a, b))$$

y después se aplica el Teorema del Valor Medio de una variable a $f(x, b+k)$ en el intervalo comprendido entre a y $a+h$, y a $f(a, y)$ en el intervalo comprendido entre b y $b+k$, para obtener el resultado deseado.

TEOREMA 4 Si f_1 y f_2 son funciones continuas en un entorno del punto (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Utilizando el Teorema 3 y que

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqslant 1$$

estimamos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\
&= \left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}(f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a, b)) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}(f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a, b))\right| \\
&\leqslant |f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a, b)| + |f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a, b)|
\end{aligned}$$

Como f_1 y f_2 son continuas en (a, b), cada uno de los términos finales tiende a 0 cuando h y k tienden a 0. Esto es lo que queríamos demostrar.

Ilustraremos la diferenciabilidad con un ejemplo en el que podemos calcular directamente el error de la aproximación mediante plano tangente.

Ejemplo 2 Calcule $f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_1(x, y)h - f_2(x, y)k$ si $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

Solución Como $f_1(x, y) = 3x^2 + y^2$ y $f_2(x, y) = 2xy$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_1(x, y)h - f_2(x, y)k \\
&= (x+h)^3 + (x+h)(y+k)^2 - x^3 - xy^2 - (3x^2+y^2)h - 2xyk \\
&= 3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2
\end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado anterior es un polinomio en h y k que no tiene ningún término cuyo grado sea menor que 2 en dichas variables. Por tanto, esta diferencia tiende a cero cuando $(h, k) \to (0, 0)$ como el *cuadrado* de la distancia $\sqrt{h^2 + k^2}$ desde (x, y) a $(x + h, y + k)$, por lo que realmente se cumple la condición de diferenciabilidad:

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Este comportamiento cuadrático ocurrirá para cualquier función f con derivadas parciales *segundas* continuas (*véase* el Ejercicio 19 posterior).

Demostración de la Regla de la Cadena

Ahora estamos en disposición de dar un planteamiento y demostración formales de un caso simple pero representativo de la Regla de la Cadena para funciones con varias variables.

TEOREMA 5 Una Regla de la Cadena

Sea $z = f(x, y)$, siendo $x = u(s, t)$ e $y = v(s, t)$. Supongamos que:

(i) $u(a, b) = p$ y $v(a, b) = q$.
(ii) Las derivadas parciales primeras de u y v existen en el punto (a, b).
(iii) f es diferenciable en el punto (p, q).

Entonces, $z = w(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ tiene derivadas parciales primeras con respecto a s y t en (a, b), y

$$w_1(a, b) = f_1(p, q)u_1(a, b) + f_2(p, q)v_1(a, b)$$
$$w_2(a, b) = f_1(p, q)u_2(a, b) + f_2(p, q)v_2(a, b)$$

es decir,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

DEMOSTRACIÓN Definamos una función de dos variables E de la siguiente forma: $E(0, 0) = 0$ y, si $(h, k) \neq (0, 0)$, entonces

$$E(h, k) = \frac{f(p + h, q + k) - f(p, q) - hf_1(p, q) - kf_2(p, q)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Obsérvese que $E(h, k)$ es continua en $(0, 0)$ porque f es diferenciable en (p, q). Entonces

$$f(p + h, q + k) - f(p, q) = hf_1(p, q) + kf_2(p, q) + \sqrt{h^2 + k^2}\, E(h, k)$$

Si en esta fórmula ponemos $h = u(a + \sigma, b) - u(a, b)$ y $k = v(a + \sigma, b) - v(a, b)$ y dividimos por σ, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{w(a + \sigma, b) - w(a, b)}{\sigma} &= \frac{f(u(a + \sigma, b), v(a + \sigma, b)) - f(u(a, b), v(a, b))}{\sigma} \\ &= \frac{f(p + h, q + k) - f(p, q)}{\sigma} \\ &= f_1(p, q)\frac{h}{\sigma} + f_2(p, q)\frac{k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\, E(h, k)\end{aligned}$$

Vamos a hacer que σ tienda a 0 en esta fórmula. Nótese que

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{h}{\sigma}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{u(a+\sigma,\ b)-u(a,\ b)}{\sigma}=u_1(a,\ b)$$

y, de forma similar, $\lim_{\sigma\to 0}(k/\sigma)=v_1(a,\ b)$. Como $(h,\ k)\to(0,\ 0)$ si $\sigma\to 0$, tenemos que

$$w_1(a,\ b)=f_1(p,\ q)u_1(a,\ b)+f_2(p,\ q)v_1(a,\ b)$$

La demostración para w_2 es similar.

Diferenciales

Si existen las derivadas parciales primeras de una función $z=f(x_1,\ ...,\ x_n)$ en un punto, podemos formar un **diferencial** dz o df de la función en ese punto de forma similar a como se hizo para funciones de una variable:

$$\begin{aligned} dz=df&=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\\ &=f_1(x_1,\ ...,\ x_n)\,dx_1+\cdots+f_n(x_1,\ ...,\ x_n)\,dx_n\end{aligned}$$

En este caso, el diferencial dz se considera función de las $2n$ variables independientes $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ dx_1,\ dx_2,\ ...,\ dx_n$.

Dada una función *diferenciable* f, el diferencial df es una aproximación al cambio Δf en el valor de la función, que se expresa como

$$\Delta f=f(x_1+dx_1,\ ...,\ x_n+dx_n)-f(x_1,\ ...,\ x_n)$$

El error de esta aproximación es pequeño comparado con la distancia entre los dos puntos del dominio de f, es decir,

$$\frac{\Delta f-df}{\sqrt{(dx_1)^2+\cdots+(dx_n)^2}}\to 0\qquad \text{si todo } dx_i\to 0,\qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

En este sentido, los diferenciales se pueden ver como otra forma de expresar la linealización.

Ejemplo 3 Estime el cambio porcentual del periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

de un péndulo simple si su longitud L crece un 2% y la aceleración de la gravedad g disminuye un 0.6%.

Solución Calculamos el diferencial de T:

$$\begin{aligned} dT&=\frac{\partial T}{\partial L}dL+\frac{\partial T}{\partial g}dg\\ &=\frac{2\pi}{2\sqrt{Lg}}dL-\frac{2\pi\sqrt{L}}{2g^{3/2}}dg\end{aligned}$$

Los datos indican que $dL=\frac{2}{100}L$ y $dg=-\frac{6}{1000}g$. Entonces,

$$dT=\frac{1}{100}2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}-\left(-\frac{6}{1000}\right)\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{13}{1000}T$$

Por tanto, el periodo T del péndulo crece un 1.3%.

Funciones de un espacio de n dimensiones en un espacio de m dimensiones

(*Esta sección es opcional*). Un vector $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ de m funciones, donde cada una depende de n variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$, define una *transformación* (es decir, una función) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$; concretamente, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$, y

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

entonces $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ es el punto de $\mathbb{R}^m$ que corresponde a $\mathbf{x}$ mediante la transformación $\mathbf{f}$. Estas ecuaciones se pueden expresar de forma más breve como

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Las derivadas parciales $\partial y_i/\partial x_j$, $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ contienen información sobre la tasa de cambio de $\mathbf{y}$ con respecto a $\mathbf{x}$, y es conveniente organizarlas en forma de matriz $m \times n$, $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$, denominada **matriz jacobiana** de la transformación $\mathbf{f}$:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La transformación lineal (*véase* la Sección 10.6) representada por la matriz jacobiana se denomina **derivada** de la transformación $\mathbf{f}$.

Observación Una función escalar de dos variables, por ejemplo $f(x, y)$, se puede ver como una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Su derivada es entonces la transformación lineal cuya matriz es

$$Df(x, y) = (f_1(x, y),\ f_2(x, y))$$

No es nuestra intención entrar en el estudio de estas *funciones vectoriales de una variable vector*, pero podemos observar aquí que la matriz jacobiana de la composición de dos transformaciones de este tipo es el producto de sus matrices jacobianas.

Para ver que esto es así, sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como se ha descrito antes, y sea $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ otra transformación de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^k$ dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(y_1, y_2, ..., y_m) \\ z_2 &= g_2(y_1, y_2, ..., y_m) \\ &\vdots \\ z_k &= g_k(y_1, y_2, ..., y_m) \end{aligned}$$

cuya matriz jacobiana $k \times m$ es

$$D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial z_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_k}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Entonces la composición $\mathbf{z} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots\ f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ z_2 &= g_2(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots\ f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &\vdots \\ z_k &= g_k(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots\ f_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

tiene, de acuerdo con la Regla de la Cadena, la matriz jacobiana $k \times n$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial z_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial z_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_k}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

que es, de hecho, la Regla de la Cadena para composiciones de transformaciones:

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

que imita exactamente a la Regla de la Cadena en el caso de una variable $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$.

La transformación $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ define también un vector $d\mathbf{y}$ de diferenciales de las variables y_i en términos del vector $d\mathbf{x}$ de diferenciales de las variables x_j. Expresando $d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{x}$ como vectores columna tenemos

$$d\mathbf{y} = \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Ejemplo 4 Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(1, 0)$ de la transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y) = (xe^y + \cos(\pi y),\ x^2,\ x - e^y)$$

y utilícela para calcular un valor aproximado de $\mathbf{f}(1.02, 0.01)$.

Solución $D\mathbf{f}(x, y)$ es la matriz 3×2 cuya fila j está formada por las derivadas parciales de la componente j de $\mathbf{f}$ con respecto a x e y. Entonces,

$$D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \pi \operatorname{sen}(\pi y) \\ 2x & 0 \\ 1 & -e^y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{f}(1, 0) = (2, 1, 0)$ y $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$d\mathbf{f} = D\mathbf{f}(1, 0)\, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\mathbf{f}(1.02, 0.01) \approx (2.03, 1.04, 0.01)$.

Para transformaciones entre espacios de la misma dimensión (por ejemplo, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$), las matrices jacobianas correspondientes son cuadradas y tienen determinantes. Estos determinantes jacobianos tendrán un papel importante en nuestra presentación de las funciones implícitas y de las funciones inversas de la Sección 12.8, y en los cambios de variables en integrales múltiples del Capítulo 14.

El paquete **VectorCalculus** de Maple tiene una función denominada **jacobian** que toma dos entradas, una lista (o vector) de expresiones y una lista de variables, y produce la matriz jacobiana de las derivadas parciales de esas expresiones con respecto a las variables. Por ejemplo,

```
> with(VectorCalculus) :
> Jacobian([x*y*exp(z) , (x+2*y)*cos(z)] , [x, y, z]) ;
```

$$\begin{bmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ \cos(z) & 2\cos(z) & -(x+2y)\operatorname{sen}(z) \end{bmatrix}$$

VectorCalculus sólo está incluido desde Maple 8. Si se emplea una versión anterior hay que utilizar `linalg` y la función `jacobian`.

Ejercicios 12.6

En los Ejercicios 1-6, utilice las linealizaciones adecuadas para calcular valores aproximados de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = x^2y^2$ en $(3.1, 0.9)$

2. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ en $(3.01, 2.99)$

3. $f(x, y) = \operatorname{sen}(\pi xy + \ln y)$ en $(0.01, 1.05)$

4. $f(x, y) = \dfrac{24}{x^2 + xy + y^2}$ en $(2.1, 1.8)$

5. $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$ en $(1.9, 1.8, 1.1)$

6. $f(x, y) = xe^{y+x^2}$ en $(2.05, -3.92)$

7. Los bordes de una caja rectangular se miden con una precisión del 1% de su valor. Indique cuál es el máximo error porcentual aproximado en:

(a) El cálculo del volumen de la caja.

(b) El cálculo del área de una de las caras de la caja.

(c) El cálculo de la longitud de una diagonal de la caja.

8. Las medidas del radio y la altura de un tanque cónico circular recto son, respectivamente, 25 pies y 21 pies. La precisión de cada medida está dentro de media pulgada. ¿Cuánto puede ser el error en el cálculo del volumen del tanque?

9. ¿Cuánto será aproximadamente el error en el cálculo del área de la superficie cónica del tanque del Ejercicio 8?

10. Dos lados y el ángulo entre ellos de un terreno con forma triangular miden 224 m, 158 m y 64°, respectivamente. La precisión de las medidas de longitud es de 0.4 m y la de la medida del ángulo de 2°. ¿Cuál es el máximo error porcentual aproximado si se calcula el área del terreno a partir de estas medidas?

11. El ángulo de elevación de la parte superior de una torre se mide en dos puntos A y B situados en la misma dirección desde la base de la torre. Los ángulos medidos son de 50° en A y de 35° en B, ambos con una precisión de 1°. La medida de la distancia AB es de 100 m, con un error máximo del 0.1%. ¿Cuánto vale la altura del edificio, y cuál será su error máximo? ¿A cuál de las tres medidas es más sensible la altura calculada?

12. ¿Por qué porcentaje aproximado crecerá o decrecerá el valor de $w = \dfrac{x^2y^3}{z^4}$ si x crece el 1%, y crece el 2% y z crece el 3%?

13. Calcule la matriz jacobiana de la transformación $\mathbf{f}(r, \theta) = (x, y)$, siendo

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Aunque (r, θ) se pueden ver como las *coordenadas polares* en el plano xy, son coordenadas cartesianas en su propio plano $r\theta$.

14. Calcule la matriz jacobiana de la transformación $\mathbf{f}(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$, siendo

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

Aquí, (ρ, ϕ, θ) son *coordenadas esféricas* en el espacio xyz. Se presentarán formalmente en la Sección 14.5.

15. Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(x, y, z)$ de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 - x\ln z)$$

Utilice $D\mathbf{f}(2, 2, 1)$ como ayuda para calcular un valor aproximado de $\mathbf{f}(1.98, 2.01, 1.03)$.

16. Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{g}(1, 3, 3)$ de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, s, t) = (r^2s, r^2t, s^2 - t^2)$$

y utilice el resultado para calcular un valor aproximado de $\mathbf{g}(0.99, 3.02, 2.97)$.

17. Demuestre que si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), entonces $f(x, y)$ es continua en (a, b).

***18.** Demuestre la siguiente versión del Teorema del Valor Medio: si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en las proximidades de todos los puntos del segmento que une los puntos (a, b) y $(a + h, b + k)$, entonces existe un número θ, con $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_1(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ kf_2(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

Sugerencia: Aplique el Teorema del Valor Medio de una variable $g(t) = f(a + th, b + tk)$. ¿Por qué no podemos utilizar este resultado en lugar del Teorema 3 para demostrar el Teorema 4 y de aquí la versión de la Regla de la Cadena dada en esta sección?

***19.** Generalice el Ejercicio 18 de la siguiente forma: demuestre que, si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas cerca del punto (a, b), entonces existe un número θ, con $0 < \theta < 1$, tal que, con h y k suficientemente pequeños en valor absoluto,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_1(a, b) + kf_2(a, b) \\ &+ h^2 f_{11}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ 2hk f_{12}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ k^2 f_{22}(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

A partir de aquí, demuestre que existe una constante K tal que para todos los valores de h y k suficientemente pequeños en valor absoluto,

$$\begin{aligned} &|f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)| \\ &\leqslant K(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

12.7 Gradientes y derivadas direccionales

Una derivada parcial primera de una función de varias variables proporciona la tasa de cambio de esa función con respecto a la distancia medida en la dirección de uno de los ejes coordenados. En esta sección desarrollaremos un método para calcular la tasa de cambio de dicha función con respecto a una distancia medida en *cualquier dirección* de su dominio.

Para empezar, es útil combinar las derivadas parciales primeras de una función en una única *función vector* denominada **gradiente**. Por motivos de sencillez, desarrollaremos e interpretaremos el gradiente para funciones de dos variables. La extensión a funciones de tres o más variables es directa y se presentará más adelante en esta sección.

DEFINICIÓN 6

En cualquier punto (x, y) donde existan las derivadas parciales primeras de la función $f(x, y)$, se define el **vector gradiente** $\nabla f(x, y) = \mathbf{grad}\, f(x, y)$ como

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{grad}\, f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$$

Recuérdese que $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ indican los vectores unitarios de la base que van del origen a los puntos (1, 0) y (0, 1), respectivamente. El símbolo ∇ se denomina *nabla*, y es un *operador de diferenciación vectorial*:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

Se puede *aplicar* este operador a una función $f(x, y)$ escribiendo el operador a la izquierda de la función. El resultado es el gradiente de dicha función

$$\nabla f(x, y) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$$

En el Capítulo 16 haremos un uso general de este operador.

Ejemplo 1 Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. En particular, $\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Obsérvese que este vector es perpendicular a la tangente $x + 2y = 5$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en (1, 2). Esta circunferencia es la curva de nivel de f que pasa por el punto (1, 2) (*véase* la Figura 12.24). Como indica el siguiente teorema, esta perpendicularidad no es una coincidencia.

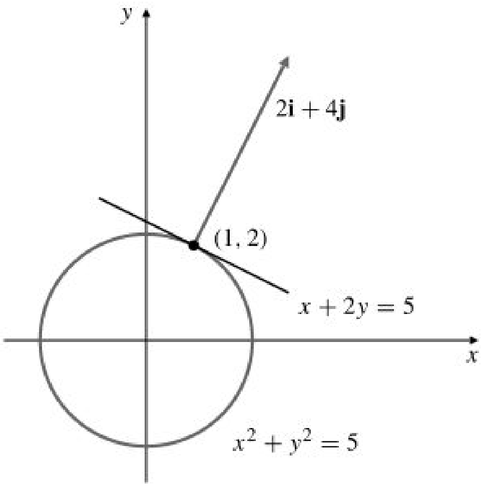


Figura 12.24 El gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en (1, 2) es normal a la curva de nivel de f que pasa por el punto (1, 2).

■

TEOREMA 6 Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) y $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(a, b)$ es un vector normal a la curva de nivel de f que pasa por (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ una parametrización de la curva de nivel de f tal que $x(0) = a$ e $y(0) = b$. Entonces, para todo t cercano a 0, $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$. Diferenciando esta ecuación con respecto a t y utilizando la Regla de la Cadena, obtenemos

$$f_1(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + f_2(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} = 0$$

En $t = 0$, esto indica que $\nabla f(a, b) \bullet \left.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 0$, es decir, ∇f es perpendicular al vector tangente $d\mathbf{r}/dt$ a la curva de nivel en (a, b).

Derivadas direccionales

Las derivadas parciales primeras $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ proporcionan las tasas de cambio de $f(x, y)$ en (a, b), medidas en las direcciones de los ejes x e y positivos, respectivamente. Si se desea conocer con qué rapidez cambia $f(x, y)$ cuando nos movemos por el dominio de f desde el punto (a, b) en alguna otra dirección, se requiere una **derivada direccional** más general. Podemos especificar la dirección mediante un vector distinto de cero. Es más cómodo utilizar un *vector unitario*.

DEFINICIÓN 7

Sea $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ un vector unitario, tal que $u^2 + v^2 = 1$. La **derivada direccional** de $f(x, y)$ en el punto (a, b) y en la dirección de $\mathbf{u}$ es la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia medida desde (a, b) siguiendo un rayo en la dirección de $\mathbf{u}$ en el plano xy (*véase* la Figura 12.25). La derivada direccional se expresa como

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + hu,\ b + hv) - f(a,\ b)}{h}$$

También se puede expresar como

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \frac{d}{dt}\, f(a + tu,\ b + tv)\bigg|_{t=0}$$

si existe la derivada del miembro derecho.

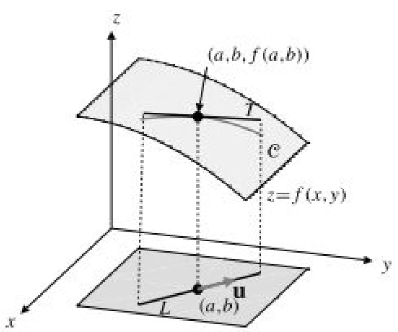


Figura 12.25 Un vector unitario $\mathbf{u}$ determina una recta L que pasa por el punto (a, b) en el dominio de f. El plano vertical que contiene a L corta a la gráfica de f formando una curva $\mathcal{C}$, cuya tangente T en $(a, b, f(a, b))$ tiene pendiente en $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$.

Obsérvese que las derivadas direccionales en direcciones paralelas a los ejes coordenados son directamente las derivadas parciales primeras: $D_{\mathbf{i}} f(a, b) = f_1(a, b)$, $D_{\mathbf{j}} f(a, b) = f_2(a, b)$, $D_{-\mathbf{i}} f(a, b) = -f_1(a, b)$ y $D_{-\mathbf{j}} f(a, b) = -f_2(a, b)$. El siguiente teorema muestra cómo se puede utilizar el gradiente para calcular cualquier derivada direccional.

TEOREMA 7 **Uso del gradiente para calcular derivadas direccionales**

Si f es diferenciable en (a, b) y $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en el punto (a, b) y en la dirección de $\mathbf{u}$ se expresa como

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b)$$

DEMOSTRACIÓN Por la Regla de la Cadena:

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv)\Big|_{t=0}$$
$$= u f_1(a, b) + v f_2(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b)$$

Ya sabemos que tener derivadas parciales en un punto no implica que una función sea continua en dicho punto, y ni siquiera que sea diferenciable. Lo mismo se puede decir sobre las derivadas direccionales. Es posible que una función tenga derivada direccional en cualquier dirección desde un punto dado y aun así no sea continua en dicho punto. *Véase* el Ejercicio 37 posterior donde se presenta un ejemplo de una función de ese tipo.

Dado cualquier vector $\mathbf{v}$ distinto de cero, siempre se puede obtener un vector unitario en la misma dirección dividiendo $\mathbf{v}$ por su longitud. La derivada direccional de f en (a, b) y en la dirección de $\mathbf{v}$ se expresa, por tanto, como

$$D_{\mathbf{v}/|\mathbf{v}|} f(a, b) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \bullet \nabla f(a, b)$$

Ejemplo 2 Calcule la tasa de cambio de $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ en $(0, 1)$, medida en cada una de las siguientes direcciones:

(a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$, (c) $3\mathbf{i}$, (d) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución Calculamos

$$\nabla f(x, y) = (2y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\mathbf{j}$$
$$\nabla f(0, 1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

(a) La derivada direccional de f en $(0, 1)$ y en la dirección de $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ es

$$\frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 8}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Obsérvese que $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ apunta en la misma dirección que $\nabla f(0, 1)$, por lo que la derivada direccional es positiva e igual a la longitud de $\nabla f(0, 1)$.

(b) La derivada direccional de f en $(0, 1)$ y en la dirección de $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ es

$$\frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|-2\mathbf{i} + \mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{-4 + 4}{\sqrt{5}} = 0$$

Como $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ es perpendicular a $\nabla f(0, 1)$, es tangente a la curva de nivel de f que pasa por $(0, 1)$, por lo que la derivada direccional en esa dirección es cero.

(c) La derivada direccional de f en $(0, 1)$ y en la dirección de $3\mathbf{i}$ es

$$\mathbf{i} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 2$$

Como se dijo anteriormente, la derivada direccional de f en la dirección del eje x positivo es precisamente $f_1(0, 1)$.

(d) La derivada direccional de f en $(0, 1)$ y en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es

$$\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 4}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Si nos movemos por la superficie $z = f(x, y)$ partiendo del punto $(0, 1, 1)$ y en una dirección que forme ángulos horizontales de 45° con las direcciones positivas de los ejes x e y, estaremos subiendo a razón de $3\sqrt{2}$ unidades verticales por unidad horizontal de desplazamiento.

Observación Una dirección del plano se puede especificar mediante un ángulo polar. La dirección que forma un ángulo ϕ con la dirección positiva del eje x corresponde al vector unitario (*véase* la Figura 12.26)

$$\mathbf{u}_\phi = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$$

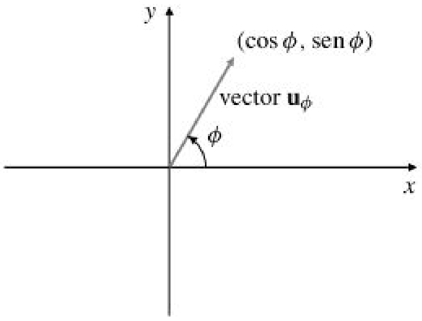


Figura 12.26 El vector unitario especificado por un ángulo polar ϕ.

por lo que la derivada direccional de f en (x, y) en esa dirección es

$$D_\phi f(x, y) = D_{\mathbf{u}_\phi} f(x, y) = \mathbf{u}_\phi \bullet \nabla f(x, y) = f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi$$

Nótese el uso del símbolo $D_\phi f(x, y)$ para indicar la derivada de f con respecto a la *distancia* medida en la dirección ϕ.

Como se ha observado en el ejemplo anterior, el Teorema 7 proporciona una interpretación útil del vector gradiente. Dado cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b) = |\nabla f(a, b)|\cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u}$ y $\nabla f(a, b)$. Como $\cos\theta$ sólo toma valores entre -1 y 1, $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$ sólo toma valores entre $-|\nabla f(a, b)|$ y $|\nabla f(a, b)|$. Es más, $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = -|\nabla f(a, b)|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ apunta en la dirección opuesta a $\nabla f(a, b)$ (de forma que $\cos\theta = -1$), y $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = |\nabla f(a, b)|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ apunta en la misma dirección que $\nabla f(a, b)$ (de forma que $\cos\theta = 1$). La derivada direccional es cero en la dirección $\theta = \pi/2$; esta es la dirección de la (tangente a la) curva de nivel de f que pasa por (a, b).

Resumimos estas propiedades del gradiente como sigue:

Propiedades geométricas del vector gradiente

(i) En (a, b), $f(x, y)$ tiene su máxima tasa de crecimiento en la dirección del vector gradiente $\nabla f(a, b)$. La máxima tasa de incremento es $|\nabla f(a, b)|$.
(ii) En (a, b), $f(x, y)$ tiene su máxima tasa de decrecimiento en la dirección de $-\nabla f(a, b)$. La máxima tasa de decrecimiento es $|\nabla f(a, b)|$.
(iii) La tasa de cambio de $f(x, y)$ en (a, b) es cero en direcciones tangentes a la curva de nivel de f que pasa por (a, b).

Obsérvese de nuevo el mapa topográfico de la Figura 12.6 en la Sección 12.1. Las corrientes del mapa fluyen en la dirección de la máxima pendiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f$, siendo f la elevación de la tierra. Por tanto, las corrientes cruzan las curvas de nivel de f formando ángulos rectos. Como las corrientes, un esquiador experto escogería una trayectoria cercana a la dirección del gradiente negativo, mientras que un esquiador novato preferiría permanecer más paralelo las curvas de nivel.

Ejemplo 3 La temperatura en la posición (x, y) en una región del plano xy es de T°C, siendo

$$T(x, y) = x^2 e^{-y}$$

¿En qué dirección a partir del punto (2, 1) crece más rápidamente la temperatura? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de f en esa dirección?

Solución Tenemos que

$$\nabla T(x, y) = 2xe^{-y}\mathbf{i} - x^2e^{-y}\mathbf{j}$$

$$\nabla T(2, 1) = \frac{4}{e}\mathbf{i} - \frac{4}{e}\mathbf{j} = \frac{4}{e}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

En (2, 1), $T(x, y)$ crece con la máxima velocidad en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. La tasa de incremento en esta dirección es $|\nabla T(2, 1)| = 4\sqrt{2}/e$°C/unidad de distancia.

Ejemplo 4 Una escaladora está de pie al lado de una corriente en la ladera de una montaña, examinando su mapa de la región. La altura de la tierra (en metros) en una posición cualquiera (x, y) se expresa mediante la función

$$h(x, y) = \frac{20\,000}{3 + x^2 + 2y^2}$$

donde x e y (en kilómetros) indican las coordenadas del punto en el mapa de la escaladora. La escaladora está en el punto (3, 2).

(a) ¿Cuál es la dirección de flujo de la corriente en (3, 2) sobre el mapa de la escaladora? ¿Con qué pendiente desciende la corriente en su posición?
(b) Calcule la ecuación de la trayectoria de la corriente en el mapa de la escaladora.
(c) ¿Con qué ángulo respecto a la trayectoria de la corriente (sobre el mapa) debería desplazarse la escaladora si desea escalar con una inclinación de 15° respecto a la horizontal?
(d) Dibuje aproximadamente el mapa de la escaladora, mostrando algunas curvas de elevación constante y relejando la corriente.

Solución

(a) Empezamos calculando el gradiente de h y su longitud en (3, 2):

$$\nabla h(x, y) = -\frac{20\,000}{(3 + x^2 + 2y^2)^2}(2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j})$$

$$\nabla h(3, 2) = -100(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$

$$|\nabla h(3, 2)| = 500$$

La corriente fluye en la dirección cuya proyección horizontal en (3, 2) es $-\nabla h(3, 2)$, es decir, en la dirección horizontal del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. La corriente desciende a una tasa de 500 m/km, es decir, 0.5 m por cada metro horizontal recorrido.

(b) Las coordenadas del mapa son las coordenadas (x, y) en el dominio de la función de altura h. Podemos calcular la ecuación de la trayectoria de la corriente en el mapa de la región planteando una ecuación diferencial para relacionar el cambio de posición a lo largo de dicha trayectoria. Si el vector $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ es tangente a la trayectoria de la corriente en el punto (x, y) del mapa, entonces $d\mathbf{r}$ es paralelo a $\nabla h(x, y)$. Por tanto, los componentes de estos dos vectores son proporcionales:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{4y} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación se obtiene $\ln y = 2\ln x + \ln C$, o $y = Cx^2$. Como la trayectoria de la corriente pasa por el punto (3, 2), tenemos que $C = 2/9$ y por consiguiente la ecuación es $9y = 2x^2$.

(c) Supongamos que la escaladora se desplaza desde el punto (3, 2) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$. Ascenderá con una inclinación de 15° si la derivada direccional de h en la dirección de $\mathbf{u}$ es $1000\tan 15° \approx 268$ (el factor de 1000 compensa el hecho de que las unidades verticales son metros y las unidades horizontales son kilómetros). Si θ es el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y la dirección de la corriente, entonces

$$500\cos\theta = |\nabla h(3, 2)|\cos\theta = D_{\mathbf{u}}h(3, 2) \approx 268$$

Por tanto, $\cos\theta \approx 0.536$ y $\theta \approx 57.6°$. La escaladora debe moverse en una dirección que forme un ángulo horizontal de aproximadamente 58° con la dirección ascendente de la corriente.

(d) La Figura 12.27 muestra un dibujo del mapa.

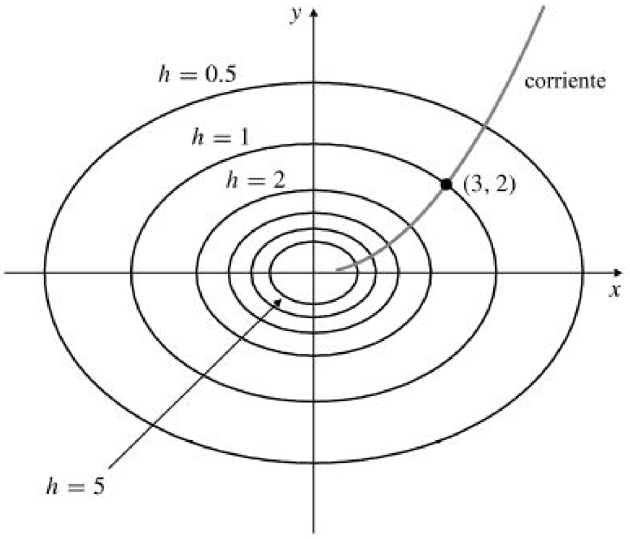


Figura 12.27 El mapa de la escaladora. A diferencia de la mayoría de las montañas, ésta tiene contornos perfectamente elípticos.

Ejemplo 5 Calcule la derivada direccional segunda de $f(x, y)$ en la dirección que forma un ángulo ϕ con el eje x positivo.

Solución Como se ha observado anteriormente, la derivada direccional primera es

$$D_\phi f(x, y) = (\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) \bullet \nabla f(x, y) = f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi$$

Por tanto, la derivada direccional segunda es

$$\begin{aligned} D_\phi^2 f(x, y) &= D_\phi(D_\phi f(x, y)) \\ &= (\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) \bullet \nabla(f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi) \\ &= (f_{11}(x, y)\cos\phi + f_{21}(x, y)\operatorname{sen}\phi)\cos\phi \\ &\quad + (f_{12}(x, y)\cos\phi + f_{22}(x, y)\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\phi \\ &= f_{11}(x, y)\cos^2\phi + 2f_{12}(x, y)\cos\phi\operatorname{sen}\phi + f_{22}(x, y)\operatorname{sen}^2\phi \end{aligned}$$

Nótese que si $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ (de forma que la derivada direccional sea paralela al eje x), entonces $D_\phi^2 f(x, y) = f_{11}(x, y)$. De forma similar, si $\phi = \pi/2$ o $3\pi/2$, entonces $D_\phi^2 f(x, y) = f_{22}(x, y)$.

Tasas de cambio percibidas por un observador en movimiento

Supongamos que un observador se mueve por el plano xy, midiendo el valor de una función $f(x, y)$ definida en dicho plano cuando pasa por cada punto (x, y) (por ejemplo, $f(x, y)$ podría ser la temperatura en (x, y)). Si el observador se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ cuando pasa por el punto (a, b), ¿con qué rapidez observará que cambia $f(x, y)$ en ese momento?

En el momento en cuestión el observador se mueve en la dirección del vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. La tasa de cambio de $f(x, y)$ en (a, b) y en esa dirección es

$$D_{\mathbf{v}/|\mathbf{v}|} f(a, b) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \bullet \nabla f(a, b)$$

medida en unidades de f por unidad de distancia en el plano xy. Para convertir esta tasa a unidades de f por unidad de tiempo, debemos multiplicar por el módulo de la velocidad del observador, $|\mathbf{v}|$, en unidades de distancia por unidad de tiempo. Por tanto, la tasa de cambio con el tiempo de $f(x, y)$, tal como la mide un observador que pasa por el punto (a, b), es

$$|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\bullet\nabla f(a, b) = \mathbf{v}\bullet\nabla f(a, b)$$

Resulta natural extender nuestro uso del símbolo $D_{\mathbf{v}}f(a, b)$ a la representación de esta tasa aun cuando $\mathbf{v}$ no sea (necesariamente) un vector unitario. Así,

La tasa de cambio de $f(x, y)$ en el punto (a, b), medida por un observador que se mueve en dicho punto (a, b) con velocidad $\mathbf{v}$, es

$$D_{\mathbf{v}}f(a, b) = \mathbf{v}\bullet\nabla f(a, b)$$

unidades de f por unidad de tiempo.

Si la escaladora del Ejemplo 4 se desplaza desde el punto $(3, 2)$ con velocidad horizontal $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ km/h, estará escalando con una velocidad de

$$\mathbf{v}\bullet\nabla h(3, 2) = (-\mathbf{i} - \mathbf{j})\bullet\left(-\frac{1}{10}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\right) = \frac{7}{10}\ \text{km/h}$$

Tal como se ha definido, $D_{\mathbf{v}}f$ es la componente espacial de la derivada de f siguiendo el movimiento. *Véase* el Ejemplo 6 de la Sección 12.5. La tasa de cambio de los valores que se leerían en un termómetro en movimiento en ese ejemplo se expresarían como

$$\frac{dT}{dt} = D_{\mathbf{v}}T(x, y, z, t) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

siendo $\mathbf{v}$ la velocidad del termómetro en movimiento y $D_{\mathbf{v}}T = \mathbf{v}\bullet\nabla T$. El gradiente se toma sólo con respecto a las *tres variables espaciales* (seguidamente se considera el gradiente en el espacio tridimensional).

El gradiente en tres y más dimensiones

Por analogía con el caso bidimensional, una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables que tenga derivadas parciales primeras, tiene un gradiente que se expresa como

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{e}_n$$

siendo $\mathbf{e}_j$ el vector unitario que va desde el origen hasta un punto situado a una distancia unidad del mismo en el eje coordenado j. En particular, para el caso de una función de tres variables,

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

La superficie de nivel de $f(x, y, z)$ que pasa por el punto (a, b, c) tiene un plano tangente en dicho punto si f es diferenciable en (a, b, c) y $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$.

Para funciones de cualquier número de variables, el vector $\nabla f(P_0)$ es normal a la «superficie de nivel» de f que pasa por el punto P_0 (es decir, la hipersuperficie cuya ecuación es $f(x_1, \ldots, x_n) = f(P_0)$), y, si f es diferenciable en P_0, su tasa de cambio en P_0 en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{u}\bullet\nabla f(P_0)$. Con la ayuda de los gradientes se pueden obtener ecuaciones de planos tangentes a superficies en el espacio tridimensional.

Ejemplo 6 Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Calcule $\nabla f(x, y, z)$ y $\nabla f(1, -1, 2)$.
(b) Obtenga una ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en el punto $(1, -1, 2)$.
(c) ¿Cuál es la máxima tasa de incremento de f en $(1, -1, 2)$?
(d) ¿Cuál es la tasa de cambio de f con respecto a la distancia en el punto $(1, -1, 2)$, medida en la dirección que va de ese punto hacia el punto $(3, 1, 1)$?

Solución

(a) $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, por lo que $\nabla f(1, -1, 2) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
(b) El plano tangente requerido tiene como vector normal $\nabla f(1, -1, 2)$ (*véase* la Figura 12.28(a)). Por tanto, su ecuación es $2(x-1) - 2(y+1) + 4(z-2) = 0$ o, de forma sencilla, $x - y + 2z = 6$.
(c) La tasa máxima de incremento de f en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla f(1, -1, 2)| = 2\sqrt{6}$, y se produce en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
(d) La dirección que va desde $(1, -1, 2)$ hacia $(3, 1, 1)$ corresponde al vector $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. La tasa de cambio de f con respecto a la distancia en esta dirección es

$$\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4+4+1}}\bullet(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{4-4-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

es decir, f decrece con una tasa de 4/3 de unidad, por unidad de desplazamiento horizontal.

Ejemplo 7 La gráfica de una *función* $f(x, y)$ de dos variables es la gráfica de la *ecuación* $z = f(x, y)$ en el espacio tridimensional. Esta superficie es también la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$ de la función de tres variables

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z$$

Si f es diferenciable en (a, b) y $c = f(a, b)$, entonces g es diferenciable en (a, b, c) y

$$\nabla g(a, b, c) = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

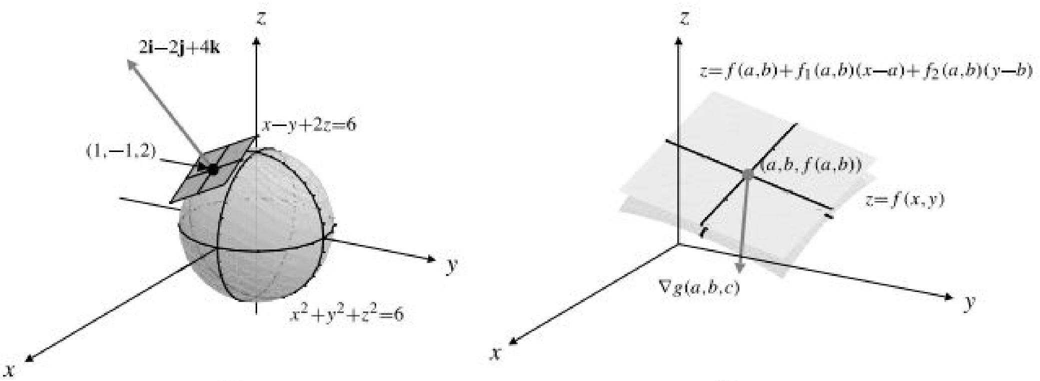
es normal a $g(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) (nótese que $\nabla g(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, ya que su componente z es -1). Se deduce entonces que la gráfica de f tiene un plano tangente no vertical en (a, b) dado por

$$f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b) - (z-c) = 0$$

o bien

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b)$$

Véase la Figura 12.28(b). Este resultado se ha obtenido, empleando un argumento diferente, en la Sección 12.3.



(a) (b)

Figura 12.28
(a) El plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en $(1, -1, 2)$.
(b) El gradiente de $f(x, y) - z$ en $(a, b, f(a, b))$ es normal al plano tangente a $z = f(x, y)$ en dicho punto.

¡¡ ATENCIÓN !! Asegúrese de entender la diferencia entre la gráfica de una función y una curva o superficie de nivel de dicha función (*véase* la exposición que sigue a este ejemplo). Aquí, la superficie $z = f(x, y)$ es la *gráfica* de la función f, pero es también una *superficie de nivel* de una función *diferente* g.

Algunas veces los estudiantes confunden las gráficas de funciones con las curvas o superficies de nivel de dichas funciones. En el ejemplo anterior hablábamos de una *superficie de nivel* de la función $g(x, y, z)$, que coincide con la *gráfica* de una función diferente $f(x, y)$. No hay que confundir esa superficie con la gráfica de g, que es una *hipersuperficie* tridimensional en el espacio de cuatro dimensiones, cuya ecuación es $w = g(x, y, z)$. De forma similar, no hay que confundir el *plano* tangente a la gráfica de $f(x, y)$ (es decir, el plano obtenido en el ejemplo anterior) con la *recta* tangente a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por el punto (a, b) y que está en el plano xy. En la ecuación de esta recta sólo intervienen x e y: $f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = 0$.

Ejemplo 8 Calcule un vector tangente a la curva de intersección de las superficies

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad xyz + 30 = 0$$

en el punto $(-3, 2, 5)$.

Solución Las coordenadas del punto dado cumplen las ecuaciones de ambas superficies, por lo que dicho punto está en la intersección de éstas. Un vector tangente a esta curva en dicho punto será perpendicular a las normales a ambas superficies, es decir, a los vectores

$$\mathbf{n}_1 = \nabla(x^2 - y^2 - z)\Big|_{(-3,2,5)} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}\Big|_{(-3,2,5)} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_2 = \nabla(xyz + 30)\Big|_{(-3,2,5)} = (yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})\Big|_{(-3,2,5)} = 10\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Por tanto, para obtener el vector tangente $\mathbf{T}$ podemos utilizar el producto vectorial de estas normales:

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} - 46\mathbf{j} + 130\mathbf{k}$$

Observación El paquete **VectorCalculus** de Maple define una función **Gradient** que toma una pareja de argumentos (una expresión y una lista de variables) y produce el gradiente de dicha expresión con respecto a las variables:

```
> with(VectorCalculus) :
> f := x^2+y^3+z^4; G := Gradient(f, [x, y, z]) ;
```

$$f := x^2 + y^3 + z^4$$

$$G := 2x\bar{e}_x + 3y^2\bar{e}_y + 4z^3\bar{e}_z$$

Aunque el resultado de `G` parece un vector, realmente es algo diferente, denominado **campo vectorial**, que es una función vectorial de una variable vector. Este hecho se indica con las barras que aparecen sobre los vectores de la base de la salida. En los Capítulos 15 y 16 trataremos frecuentemente los campos vectoriales, por lo que aquí los consideraremos poco excepto para indicar que la evaluación de la función Gradient en un punto particular requiere la función `evalVF`, que toma dos argumentos: un campo vectorial y un vector donde evaluarlo.

```
> evalVF(G, <2, 3, -1>) ;
```

$$4e_x + 27e_y - 4e_z$$

Obsérvese que la salida es un vector, no un campo vectorial; no hay barras sobre los vectores de la base.

Si deseáramos definir una función gradiente (que denominaríamos `grad`) para obtener el valor anterior utilizando como entrada a `grad(f) (2, 3, -1)`, podríamos utilizar

```
> grad := g -> ((u, v, w) ->
>  evalVF(Gradient(g, [x, y, z]), <u, v, w>)) ;
```

Ejercicios 12.7

En los Ejercicios 1-6, calcule:

(a) El gradiente de las funciones dadas en los puntos indicados.

(b) Una ecuación del plano tangente a la gráfica de las funciones dadas en los puntos cuyas coordenadas x e y se proporcionan.

(c) Una ecuación de la recta tangente, en los puntos indicados, a las curvas de nivel de las funciones dadas que pasan por esos puntos.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(2, -1)$

2. $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ en $(1, 1)$

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ en $(1, 2)$

4. $f(x, y) = e^{xy}$ en $(2, 0)$

5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $(1, -2)$

6. $f(x, y) = \sqrt{1 + xy^2}$ en $(2, -2)$

En los Ejercicios 7-9, calcule una ecuación de los planos tangentes a las superficies de nivel de las funciones dadas que pasan por los puntos indicados.

7. $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2$ en $(1, -1, 1)$

8. $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$ en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi, \pi\right)$

9. $f(x, y, z) = ye^{-x^2}\operatorname{sen} z$ en $(0, 1, \pi/3)$

En los Ejercicios 10-13, calcule las tasas de cambio de las funciones dadas en los puntos indicados y en las direcciones especificadas.

10. $f(x, y) = 3x - 4y$ en $(0, 2)$ y en la dirección del vector $-2\mathbf{i}$.

11. $f(x, y) = x^2y$ en $(-1, -1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{1+y}$ en $(0, 0)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, -2)$ y en la dirección que forma un ángulo (positivo) de $60°$ con el eje x positivo.

14. Sea $f(x, y) = \ln|\mathbf{r}|$ con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Demuestre que $\nabla f = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$.

15. Sea $f(x, y, z) = |\mathbf{r}|^{-n}$, con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\nabla f = \dfrac{-n\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{n+2}}$.

16. Demuestre que, en términos de coordenadas polares (r, θ) (siendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$), el gradiente de una función $f(r, \theta)$ se expresa como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

siendo $\hat{\mathbf{r}}$ un vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ un vector que forma un ángulo recto con $\hat{\mathbf{r}}$ en la dirección de θ creciente.

17. ¿En qué direcciones a partir del punto $(2, 0)$ tiene la función $f(x, y) = xy$ una tasa de cambio de -1? ¿Existen direcciones en las que la tasa de cambio sea -3? ¿Y -2?

18. ¿En qué direcciones a partir del punto (a, b, c) se incrementa la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ con la mitad de su tasa máxima de incremento en dicho punto?

19. Calcule $\nabla f(a, b)$ para la función diferenciable $f(x, y)$, dadas las derivadas direccionales

$$D_{(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}}\, f(a, b) = 3\sqrt{2} \text{ y } D_{(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})/5}\, f(a, b) = 5$$

20. Si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), ¿qué condición deberían satisfacer los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 para que el gradiente $\nabla f(a, b)$ se pudiera determinar a partir de los valores de las derivadas direccionales $D_{\phi 1}\, f(a, b)$ y $D_{\phi 2}\, f(a, b)$?

21. La temperatura $T(x, y)$ de puntos en el plano xy se expresa como $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.

(a) Dibuje un diagrama de contornos de T que muestre algunas isotermas (curvas de temperatura constante).

(b) ¿En qué dirección debería moverse una hormiga que estuviera en la posición $(2, -1)$ si deseara enfriarse tan rápidamente como fuera posible?
(c) Si la hormiga se mueve en esa dirección con velocidad k (unidades de distancia por unidades de tiempo), ¿con qué tasa experimentará la disminución de temperatura?
(d) ¿Con qué tasa experimentaría la hormiga la disminución de temperatura si se moviera desde el punto $(2, -1)$ con velocidad k en la dirección del vector $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$?
(e) ¿A lo largo de qué curva que pasa por el punto $(2, -1)$ debería moverse la hormiga para seguir experimentando una tasa máxima de enfriamiento?

22. Calcule una ecuación de la curva del plano xy que pasa por el punto $(1, 1)$ y corta a todas las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^4 + y^2$ formando ángulos rectos.

23. Calcule una ecuación de la curva del plano xy que pasa por el punto $(2, -1)$ y corta a todas las curvas de nivel de la función $x^2y^3 = K$ formando ángulos rectos.

24. Calcule la derivada direccional segunda de $e^{-x^2-y^2}$ en $(a, b) \neq (0, 0)$ y en la dirección que se aleja directamente del origen.

25. Calcule la derivada direccional segunda de $f(x, y, z) = xyz$ en $(2, 3, 1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

26. Calcule un vector tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 2$ e $y^2 + z^2 = 2$ en el punto $(1, -1, 1)$.

27. Repita el Ejercicio 26 para las superficies $x + y + z = 6$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ y el punto $(1, 2, 3)$.

28. La temperatura en el espacio tridimensional está dada por

$$T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$$

En el instante $t = 0$ una mosca pasa por el punto $(1, 1, 2)$, volando según la trayectoria correspondiente a la intersección de las superficies $z = 3x^2 - y^2$ y $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$. Si la velocidad de la mosca es 7, ¿qué tasa de cambio de temperatura experimentará en $t = 0$?

29. Enuncie y demuestre una versión del Teorema 6 para una función de tres variables.

30. ¿Cuál es la superficie de nivel de $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$ que pasa por (π, π, π)? ¿Cuál es el plano tangente a esa superficie de nivel en ese punto? (Compare este ejercicio con el Ejercicio 8 anterior).

31. Si $\nabla f(x, y) = 0$ en el disco $x^2 + y^2 < r^2$, demuestre que $f(x, y)$ es constante en dicho disco.

32. El Teorema 6 implica que la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por (a, b) es suave (tiene tangente) en (a, b), siempre que f sea diferenciable en (a, b) y cumpla que $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Demuestre que la curva de nivel no necesita ser suave en (a, b) si $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. (*Sugerencia*: Considere $f(x, y) = y^3 - x^2$ en $(0, 0)$).

33. Si $\mathbf{v}$ es un vector distinto de cero, exprese a $D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{v}} f)$ en función de las componentes de $\mathbf{v}$ y de las derivadas parciales segundas de f. ¿Cuál es la interpretación de esta cantidad para un observador en movimiento?

***34.** Un observador se mueve de forma que su posición, velocidad y aceleración en el instante t se expresan como $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ y $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$. Si la temperatura en la vecindad del observador depende sólo de la posición, $T = T(x, y, z)$, exprese la derivada segunda con respecto al tiempo de la temperatura tal como la mediría el observador en función de $D_{\mathbf{v}}$ y $D_{\mathbf{a}}$.

***35.** Repita el Ejercicio 34, pero con T dependiendo explícitamente del tiempo además de la posición: $T = T(x, y, z, t)$.

36. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Calcule $\nabla f(0, 0)$.
(b) Utilice la definición de derivada direccional para calcular $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$, siendo $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.
(c) ¿Es $f(x, y)$ diferenciable en $(0, 0)$? ¿Por qué?

37. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 2x^2y/(x^4 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Utilice la definición de derivada direccional como límite (Definición 7) para demostrar que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$ existe para todo vector unitario $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ del plano. Concretamente, demuestre que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 0$ si $v = 0$, y que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 2u^2/v$ si $v \neq 0$. Sin embargo, como se demostró en el Ejemplo 4 de la Sección 12.2, $f(x, y)$ no tiene límite cuando $(x, y) \to (0\ 0)$, por lo que no es continua aquí. Incluso aunque una función tenga derivadas direccionales en todas las direcciones desde un punto, puede no ser continua en dicho punto.

12.8 Funciones implícitas

Al estudiar el cálculo de funciones de una variable, encontramos ejemplos de funciones que se definían implícitamente como soluciones de ecuaciones de dos variables. Supongamos, por ejemplo, que $F(x, y) = 0$ es una de esas ecuaciones. Supongamos también que el punto (a, b) satisface la ecuación, y que F tiene derivadas parciales primeras continuas (y, por tanto, es diferenciable) en todos los puntos próximos a (a, b). ¿Se puede despejar y como función de x en la ecuación, cerca del punto (a, b)? Es decir, ¿existe alguna función $y(x)$ definida en algún intervalo $I = (a - h, a + h)$ (siendo $h > 0$) que cumpla que $y(a) = b$, y tal que

$$F(x, y(x)) = 0$$

se cumpla para todo x en el intervalo I? Si existe tal función $y(x)$, podemos intentar calcular su derivada en $x = a$, diferenciando la ecuación $F(x, y) = 0$ implícitamente con respecto a x y evaluando el resultado en (a, b):

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

de forma que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{F_1(a, b)}{F_2(a, b)}, \qquad \text{siempre que} \qquad F_2(a, b) \neq 0$$

Obsérvese, sin embargo, que la condición $F_2(a, b) \neq 0$ requerida para el cálculo de $y'(a)$ garantiza en sí misma que la solución $y(x)$ existe. Esta condición, junto con la diferenciabilidad de $F(x, y)$ cerca de (a, b), implica que la curva de nivel $F(x, y) = F(a, b)$ tiene una tangente *no vertical* cerca de (a, b), por lo que alguna parte de la curva de nivel cerca de (a, b) debe ser la gráfica de una función de x (*véase* la Figura 12.29; la parte de la curva $F(x, y) = 0$ en el disco sombreado centrado en $P_0 = (a, b)$ es la gráfica de una función $y(x)$ porque cualquier recta vertical cruza cualquier parte de la curva sólo una vez. Los únicos puntos de la curva donde no se puede dibujar un disco con esa propiedad son V_1, V_2 y V_3, donde la curva tiene una tangente vertical, es decir, donde $F_2(x, y) = 0$). Éste es un caso especial del Teorema de la Función Implícita, que enunciaremos de forma más general posteriormente en esta sección.

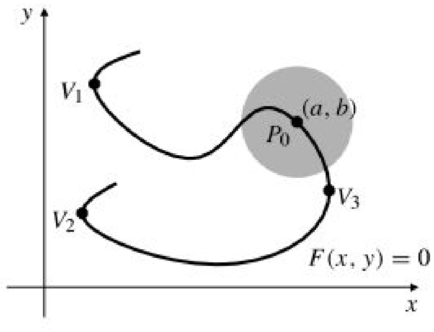


Figura 12.29 La ecuación $F(x, y) = 0$ permite despejar y como función de x cerca de P_0 o cerca de cualquier otro punto, excepto los tres donde la curva tiene tangente vertical.

Cuando la ecuación es de varias variables, la situación es similar. Por ejemplo, podemos preguntarnos si la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

define z como función de x e y (es decir, $z = z(x, y)$) cerca de algún punto P_0 con coordenadas (x_0, y_0, z_0) que cumpla la ecuación. Si es así, y si las derivadas parciales primeras de F son continuas cerca de P_0, entonces se pueden obtener las derivadas parciales de z en (x_0, y_0) mediante diferenciación implícita de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ con respecto a x e y:

$$F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

de forma que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)} = -\frac{F_1(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,\,y_0)} = -\frac{F_2(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)}$$

siempre que $F_3(x_0,\ y_0,\ z_0) \neq 0$. Como F_3 es la componente z del gradiente de F, esta condición implica que la superficie de nivel de F que pasa por el punto P_0 no tiene un vector normal horizontal, por lo que no es vertical (es decir, no es paralela al eje z). Por tanto, parte de la superficie cerca de P_0 debe ser de hecho la gráfica de una función $z = z(x,\ y)$. De forma similar, en $F(x,\ y,\ z) = 0$ se puede despejar x como función de y y z cerca de los puntos donde $F_1 \neq 0$ y $y = y(x,\ z)$ cerca de los puntos donde $F_2 \neq 0$.

Ejemplo 1 ¿Cerca de qué puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede despejar en dicha ecuación z en función de x e y? Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en esos puntos.

Solución La esfera es la superficie de nivel $F(x,\ y,\ z) = 0$ de la función

$$F(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

En la ecuación anterior se puede despejar $z = z(x,\ y)$ cerca de $P_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, siempre que P_0 no esté en el *ecuador* de la esfera, es decir, en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. El ecuador está formado por aquellos puntos que cumplen $F_3(x,\ y,\ z) = 0$. Si P_0 no está en el ecuador, entonces está en el hemisferio superior o en el inferior. El hemisferio superior tiene como ecuación $z = z(x,\ y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, y el inferior tiene como ecuación $z = z(x,\ y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Si $z \neq 0$, se pueden calcular las derivadas parciales de la solución $z = z(x,\ y)$, diferenciando implícitamente la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{por lo que} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{por lo que} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

Sistemas de ecuaciones

La experiencia con ecuaciones lineales nos demuestra que estos sistemas de ecuaciones se podrán resolver de forma general cuando haya tantas variables como ecuaciones en el sistema. Por tanto, podemos esperar que una pareja de ecuaciones en varias variables determinen dos de dichas variables en función de las restantes. Por ejemplo, podíamos esperar que las ecuaciones

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ w) = 0 \\ G(x,\ y,\ z,\ w) = 0 \end{cases}$$

posean, cerca de algún punto que las satisfaga, soluciones de una o más de las formas

$$\begin{cases} x = x(z,\ w) \\ y = y(z,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(y,\ w) \\ z = z(y,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(y,\ z) \\ w = w(y,\ z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y(x,\ w) \\ z = z(x,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = y(x,\ z) \\ w = w(x,\ z) \end{cases} \qquad \begin{cases} z = z(x,\ y) \\ w = w(x,\ y) \end{cases}$$

Allí donde existan tales soluciones, podemos diferenciar el sistema dado implícitamente para obtener derivadas parciales de las soluciones.

Si tenemos una ecuación simple $F(x,\ y,\ z) = 0$ y deseamos calcular $\partial x/\partial z$, estamos entendiendo que x es una función de las restantes variables y y z, por lo que no hay posibilidad de equivocarse a la hora de decidir qué variable hay que mantener constante en el cálculo de la derivada parcial. Sin embargo, supongamos que deseamos calcular $\partial x/\partial z$ dado el sistema $F(x, y, z, w) = 0$, $G(x, y, z, w) = 0$. Esto implica que x es una de las variables dependientes, y que z es una de las variables independientes, pero no implica cuál de las otras dos variables u y w es la variable dependiente y cuál la independiente. En pocas palabras, ¿a cuál de las situaciones

$$\begin{cases} x = x(z, w) \\ y = y(z, w) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x(y, z) \\ w = w(y, z) \end{cases}$$

nos estamos enfrentando? Tal como se plantea, la pregunta es ambigua. Para evitar esta ambigüedad podemos especificar *en la notación de la derivada parcial* qué variable se tomará como la otra variable independiente y, por tanto, *permanecerá fija* durante la diferenciación. Así,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \quad \text{implica la interpretación} \quad \begin{cases} x = x(z, w) \\ y = y(z, w) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad \text{implica la interpretación} \quad \begin{cases} x = x(y, z) \\ w = w(y, z) \end{cases}$$

Ejemplo 2 Dadas las ecuaciones $F(x, y, z, w) = 0$ y $G(x, y, z, w) = 0$, donde F y G tienen derivadas parciales primeras continuas, calcule $(\partial x/\partial z)_w$.

Solución Diferenciamos las dos ecuaciones con respecto a z, considerando x e y como funciones de z y w, y manteniendo por tanto fija w:

$$F_1 \frac{\partial x}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0$$

$$G_1 \frac{\partial x}{\partial z} + G_2 \frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0$$

Nótese que los términos $F_4(\partial w/\partial z)$ y $G_4(\partial w/\partial z)$ no están presentes, porque w y z son variables independientes, y w se mantiene fija durante la diferenciación. La pareja de ecuaciones anterior es lineal en $\partial x/\partial z$ y $\partial y/\partial z$. Eliminando $\partial y/\partial z$ (utilizando la Regla de Cramer, Teorema 6 de la Sección 10.6), obtenemos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = -\frac{F_3 G_2 - F_2 G_3}{F_1 G_2 - F_2 G_1}$$

A la luz de los ejemplos considerados anteriormente, no debe sorprendernos que la no anulación del denominador $F_1G_2 - F_2G_1$ en algún punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ que cumpla el sistema $F = 0$, $G = 0$ sea suficiente para garantizar que el sistema tiene de hecho una solución de la forma $x = x(z, w)$, $y = y(z, w)$ cerca de P_0. Sin embargo, no intentaremos demostrar aquí este hecho. ■

Ejemplo 3 Sean x, y, u y v variables relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} u = x^2 + xy - y^2 \\ v = 2xy + y^2 \end{cases}$$

Calcule (a) $(\partial x/\partial u)_v$ y (b) $(\partial x/\partial u)_y$ en el punto donde $x = 2$ e $y = -1$.

Solución

(a) Para calcular $(\partial x/\partial u)_v$ consideraremos x e y como funciones de u y v y diferenciaremos las ecuaciones dadas con respecto a u, manteniendo v constante:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial u} = (2x + y)\frac{\partial x}{\partial u} + (x - 2y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial u} = 2y\frac{\partial x}{\partial u} + (2x + 2y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

En $x = 2$, $y = -1$, tenemos que

$$1 = 3\frac{\partial x}{\partial u} + 4\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = -2\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\partial y}{\partial u}$$

Eliminando $\partial y/\partial u$ se llega al resultado $(\partial x/\partial u)_v = 1/7$.

(b) Para calcular $(\partial x/\partial u)_y$, consideraremos x y v como funciones de y y u y diferenciaremos las ecuaciones dadas con respecto a u, manteniendo y constante:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial u} = (2x + y)\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial v}{\partial u} = 2y\frac{\partial x}{\partial u}$$

En $x = 2$, $y = -1$, la primera ecuación produce inmediatamente $(\partial x/\partial u)_y = 1/3$. ■

Sucede a menudo que las variables independientes en un problema surgen claramente del contexto, o bien se pueden escoger desde el principio. En cualquier caso, no se producirá ambigüedad, y podremos omitir de forma segura los subíndices que muestran qué variables se mantienen constantes. El siguiente ejemplo está extraído de la termodinámica de un gas ideal.

Ejemplo 4 **(Cambios reversibles en un gas ideal)** El estado de un sistema cerrado que contiene n moles de un gas ideal se caracteriza por tres variables de estado (presión, volumen y temperatura, P, V y T, respectivamente), que satisfacen la ecuación de estado de un gas ideal:

$$PV = nRT$$

donde R es la constante universal de los gases. Esta ecuación se puede considerar como la definición de una de las tres variables en función de las otras dos. La energía interna, E, y la entropía, S, del sistema son magnitudes termodinámicas que dependen de las variables de estado, y que por tanto se pueden expresar en función de dos cualesquiera de dichas variables P, V y T. Escojamos V y T como variables independientes y escribamos, por tanto, $E = E(V, T)$ y $S = S(V, T)$. Para procesos reversibles en el sistema, la primera y segunda ley de la termodinámica implican que los cambios infinitesimales de estas magnitudes deben satisfacer la ecuación diferencial

$$T\,dS = dE + P\,dV$$

Deduzca que, para tales procesos, E es independiente de V y depende sólo de la temperatura T.

Solución Calcularemos los diferenciales dS y dE y los sustituiremos en la ecuación diferencial. Se obtiene

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}dV + \frac{\partial S}{\partial T}dT\right) = \frac{\partial E}{\partial V}dV + \frac{\partial E}{\partial T}dT + P\,dV$$

Dividiendo por T, sustituyendo P/T por nR/V (de la ecuación de estado) y agrupando coeficientes de dV y dT en los miembros opuestos de la ecuación, se obtiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} - \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V} - \frac{nR}{V}\right)dV = \left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T}\right)dT$$

Como dV y dT son variables independientes, ambos coeficientes deben anularse. Por consiguiente,

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{nR}{V}$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}$$

Diferenciamos ahora la primera de esas ecuaciones con respecto a T y la segunda con respecto a V. Utilizando la igualdad de las derivadas parciales mixtas tanto de S como de E, se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{nR}{V}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}=\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}\right)$$

$$\frac{-1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial T\partial V}=\frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial T}$$

$$\frac{-1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V}=0$$

Se deduce entonces que $\partial E/\partial V=0$, por lo que E es independiente de V.

Determinantes jacobianos

Las derivadas parciales que se obtienen mediante diferenciación implícita de sistemas de ecuaciones son fracciones cuyos numeradores y denominadores se pueden expresar con comodidad en función de ciertos determinantes denominados *jacobianos*.

DEFINICIÓN 8

El **determinante jacobiano** (o simplemente **el jacobiano**) de las funciones $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ con respecto a las variables x e y, es el determinante

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

De forma similar, el jacobiano de las funciones $F(x, y, \ldots)$ y $G(x, y, \ldots)$, con respecto a las variables x e y, es el determinante

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_1 & F_2\\ G_1 & G_2\end{vmatrix}$$

La definición anterior se puede ampliar inmediatamente al jacobiano de n funciones (o variables) con respecto a n variables. Por ejemplo, el jacobiano de las funciones F, G y H con respecto a las variables x, y y z es el determinante

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}=\begin{vmatrix}F_1 & F_2 & F_3\\ G_1 & G_2 & G_3\\ H_1 & H_2 & H_3\end{vmatrix}$$

Los jacobianos son los determinantes de las matrices jacobianas cuadradas correspondientes a transformaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, que se presentaron previamente en la Sección 12.6.

Ejemplo 5 En términos de jacobianos, el valor de $(\partial x/\partial z)_w$ obtenido a partir del sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, w)=0, \qquad G(x, y, z, w)=0$$

en el Ejemplo 2, se puede expresar de la forma

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}$$

Obsérvese la pauta. El denominador es el jacobiano de F y G con respecto a las dos variables *dependientes*, x e y. El numerador es el mismo jacobiano, salvo que la variable dependiente x ha sido sustituida por la variable independiente z.

La pauta observada anteriormente es general. La enunciaremos formalmente en el Teorema de la Función Implícita que sigue.

El Teorema de la Función Implícita

El Teorema de la Función Implícita garantiza que, en ciertas circunstancias, se pueden despejar ciertas variables de sistemas de ecuaciones en función de otras variables, y proporciona una fórmula de las derivadas parciales de las funciones solución. Antes de enunciarlo, consideraremos un ejemplo ilustrativo simple.

Ejemplo 6 Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$F(x, y, s, t) = a_1x + b_1y + c_1s + d_1t + e_1 = 0$$
$$G(x, y, s, t) = a_2x + b_2y + c_2s + d_2t + e_2 = 0$$

Este sistema se puede expresar de forma matricial:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{C}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones permiten despejar x e y como funciones de s y t, siempre que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$; esto implica la existencia de la matriz inversa $\mathcal{A}^{-1}$ (Teorema 4 de la Sección 10.6), por lo que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{C}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \mathcal{E}\right)$$

Obsérvese que $\det(\mathcal{A}) = \partial(F, G)/\partial(x, y)$, por lo que la no anulación de este jacobiano garantiza que se pueden despejar x e y de las ecuaciones.

TEOREMA 8 Teorema de la Función Implícita

Consideremos un sistema de n ecuaciones con $n + m$ variables,

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ F_{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

y un punto $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que satisface el sistema. Supongamos que todas las funciones $F_{(i)}$ tienen derivadas parciales primeras continuas con respecto a todas las variables x_j y y_k, $(i = 1, ..., n, j = 1, ..., m, k = 1, ..., n)$, cerca de P_0. Finalmente, supongamos que

$$\left.\frac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, ..., F_{(n)})}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}\right|_{P_0} \neq 0$$

Entonces, se pueden despejar en el sistema las variables $y_1, y_2, ..., y_n$ como funciones de $x_1, x_2, ..., x_m$ cerca de P_0. Es decir, existen funciones

$$\phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)$$

tales que

$$\phi_j(a_1, ..., a_m) = b_j, \qquad (j = 1, ..., n)$$

y tales que las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{(1)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \\ F_{(2)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \end{aligned}$$

se cumplen para todo $(x_1, ..., x_m)$ lo suficientemente cerca de $(a_1, ..., a_m)$.

Además,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_m} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, ..., F_{(n)})}{\partial(y_1, ..., x_j, ..., y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, ..., F_{(n)})}{\partial(y_1, ..., y_i, ..., y_n)}}$$

Observación La fórmula de las derivadas parciales es una consecuencia de la Regla de Cramer (Teorema 6 de la Sección 10.6) aplicada a las n ecuaciones lineales con n incógnitas $\partial y_1/\partial x_j, ..., \partial y_n/\partial x_j$, obtenidas diferenciando cada una de las ecuaciones del sistema dado con respecto a x_j.

Ejemplo 7 Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

se puede resolver, obteniéndose (u, v) como una función (vectorial) de (x, y, z) cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, y calcule el valor de $\partial v/\partial y$ de la solución en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Solución Sea $\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ G(x, y, z, u, v) = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{cases}$. Entonces,

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{P_0} = \left|\begin{vmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Como este jacobiano no es cero, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que las ecuaciones dadas se pueden resolver, obteniéndose u y v como funciones de x, y y z, es decir, como $(u, v) = \mathbf{f}(x, y, z)$. Dado que

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}\right|_{P_0} = \left|\begin{vmatrix} xz & 2xy + v^2 \\ -2uv^2 & x^3z \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z} = -\left.\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}\right|_{P_0} = -\frac{7}{4}$$

Observación Si lo que hubiéramos deseado en este ejemplo hubiera sido calcular $\partial v/\partial y$, habría sido más fácil utilizar la técnica del Ejemplo 3 y diferenciar directamente las ecuaciones dadas con respecto a y, manteniendo x y z fijas.

Ejemplo 8 Si en las ecuaciones $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$ se despejan u y v en función de x e y, calcule, donde sea posible,

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

A partir de aquí, demuestre que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \Big/ \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, suponiendo que el denominador no es cero.

Solución Las ecuaciones dadas se pueden expresar de la forma

$$F(u, v, x, y) = u^2 + v^2 - x = 0$$
$$G(u, v, x, y) = uv - y = 0$$

Sea

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 - v^2) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Si $u^2 \neq v^2$, entonces $J \neq 0$ y podemos calcular las derivadas parciales requeridas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & 2v \\ -1 & u \end{vmatrix} = \frac{-2v}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-v}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ v & -1 \end{vmatrix} = \frac{2u}{2(u^2 - v^2)}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{J^2}\begin{vmatrix} u & -2v \\ -v & 2u \end{vmatrix} = \frac{J}{J^2} = \frac{1}{J} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}$$

Observación Nótese en el ejemplo anterior que $\partial u/\partial x \neq 1/(\partial x/\partial u)$. Debe contrastarse este caso con la situación de una sola variable donde, si $y = f(x)$ y $dy/dx \neq 0$, entonces $x = f^{-1}(y)$ y $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Ésta es otra razón para distinguir entre ∂ y d. Es el jacobiano, en vez de cualquier derivada parcial simple, el que toma el lugar de la derivada ordinaria en estas situaciones.

Observación Consideremos brevemente el caso general de transformaciones invertibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ son dos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ cuyos componentes tienen derivadas parciales primeras continuas. Como se demostró en la Sección 12.6, la Regla de la Cadena implica que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La expresión anterior es exactamente la Regla de la Cadena aplicada a la composición $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Del Teorema 3(b) en la Sección 10.6 se deduce que los determinantes de estas matrices deben cumplir una ecuación similar:

$$\frac{\partial(z_1 \cdots z_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{\partial(z_1 \cdots z_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}$$

Si $\mathbf{f}$ es uno a uno y $\mathbf{g}$ es la inversa de $\mathbf{f}$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, y $\partial(z_1 \cdots z_n)/\partial(x_1 \cdots x_n) = 1$, el determinante de la matriz identidad. Por consiguiente,

$$\boxed{\frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}}}$$

De hecho, la no anulación de ninguno de estos determinantes es suficiente para garantizar que $\mathbf{f}$ es uno a uno y tiene inversa. Éste es un caso especial del Teorema de la Función Implícita.

Los jacobianos aparecerán de nuevo al estudiar transformaciones de coordenadas en integrales múltiples, en el Capítulo 14.

Ejercicios 12.8

En los Ejercicios 1-12, calcule las derivadas indicadas de las ecuaciones dadas. ¿Qué condición sobre las variables garantizará la existencia de una solución que tenga la derivada indicada? Suponga que las tres funciones generales F, G y H tienen derivadas parciales primeras continuas.

1. $\dfrac{dx}{dy}$ si $xy^3 + x^4y = 2$

2. $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ si $xy^3 = y - z$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $z^2 + xy^3 = \dfrac{xz}{y}$

4. $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ si $e^{yz} - x^2z\ln y = \pi$

5. $\dfrac{\partial x}{\partial w}$ si $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2w^2 - xw = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx}$ si $F(x, y, x^2 - y^2) = 0$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ si $G(x, y, z, u, v) = 0$

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ si $H(u^2w, v^2t, wt) = 0$

10. $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ si $xyuv = 1$ y $x + y + u + v = 0$

11. $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ si $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, y $x + 2y + 3z + 4w = 2$

12. $\dfrac{du}{dx}$ si $x^2y + y^2u - u^3 = 0$ y $x^2 + yu = 1$

13. Si $x = u^3 + v^3$ e $y = uv - v^2$ se resuelven expresando u y v en función de x e y, calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

en el punto donde $u = 1$ y $v = 1$.

14. ¿Cerca de qué puntos (r, s) puede resolverse la transformación

$$x = r^2 + 2s, \qquad y = s^2 - 2r$$

obteniéndose r y s como funciones de x e y? Calcule los valores de las derivadas parciales primeras de la solución en el origen.

15. Calcule el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$ de la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. ¿Cerca de qué puntos (r, θ) es la transformación uno a uno y por tanto invertible, permitiendo obtener r y θ como funciones de x e y?

16. Calcule el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta)$, siendo

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \text{ y } z = \rho\cos\phi$$

Las expresiones anteriores son la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares esféricas en el espacio tridimensional, que aparecerá en la Sección 14.6. ¿Cerca de qué puntos es la transformación uno a uno y por tanto invertible, permitiendo expresar ρ, ϕ y θ como funciones de x, y y z?

17. Demuestre que las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

se pueden resolver, expresando x, y y z como funciones de u y v cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, y calcule $(\partial y/\partial u)_v$ en $(u, v) = (1, 1)$.

18. Demuestre que las ecuaciones $\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u\cos y + x^2v - yz^2 = 1 \end{cases}$ se pueden resolver, expresando u y v como funciones de x, y y z cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ y $(u, v) = (1, 0)$, y calcule $(\partial u/\partial z)_{x,y}$ en $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

19. Calcule dx/dy para el sistema

$$F(x, y, z, w) = 0,\ G(x, y, z, w) = 0,\ H(x, y, z, w) = 0$$

20. Dado el sistema

$$F(x, y, z, u, v) = 0$$
$$G(x, y, z, u, v) = 0$$
$$H(x, y, z, u, v) = 0$$

¿cuántas posibles interpretaciones existen para $\partial x/\partial y$? Evalúelas.

21. Dado el sistema

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_8) = 0$$
$$G(x_1, x_2, \ldots, x_8) = 0$$
$$H(x_1, x_2, \ldots, x_8) = 0$$

¿cuántas posibles interpretaciones existen para la derivada parcial $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}$? Calcule $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_4, x_6, x_7, x_8}$.

22. Si $F(x, y, z) = 0$ determina z como función de x e y, calcule $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\partial y$ y $\partial^2 z/\partial y^2$ en función de las derivadas parciales de F.

23. Si $x = u + v$, $y = uv$ y $z = u^2 + v^2$ define z como función de x e y, calcule $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ y $\partial^2 z/\partial x\partial y$.

24. Un cierto gas satisface la ley $pV = T - \dfrac{4p}{T^2}$, siendo p = presión, V = volumen y T = temperatura.

(a) Calcule $\partial T/\partial p$ y $\partial T/\partial V$ en el punto donde $p = V = 1$ y $T = 2$.

(b) Si las medidas de p y V producen $p = 1 \pm 0.001$ y $V = 1 \pm 0.002$, calcule el error máximo aproximado al obtener $T = 2$.

25. Si $F(x, y, z) = 0$, demuestre que $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$. Obtenga resultados análogos para $F(x, y, z, u) = 0$ y para $F(x, y, z, u, v) = 0$. ¿Cuál es el caso general?

***26.** Si se resuelven las ecuaciones $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$, expresando x e y como funciones de u y v, demuestre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

***27.** Si se resuelven las ecuaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, expresando u y v como funciones de x e y, demuestre que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Sugerencia: Utilice el resultado del Ejercicio 26.

***28.** Si $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $u = h(r, s)$ y $v = k(r, s)$, entonces x e y se pueden expresar como funciones de r y s. Verifique por cálculo directo que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}$$

que es un caso especial de la Regla de la Cadena para jacobianos.

***29.** Se dice que dos funciones, $f(x, y)$ y $g(x, y)$, son funcionalmente dependientes si una de ellas es función de la otra; es decir, si existe una función de una sola variable $k(t)$ tal que $f(x, y) = k(g(x, y))$ para todo x e y. Demuestre que en este caso $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ se anula. Suponga que existen todas las derivadas necesarias.

***30.** Demuestre lo contrario del Ejercicio 29 como sigue: sean $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y suponga que $\partial(u, v)/\partial(x, y) = \partial(f, g)/\partial(x, y)$ es idénticamente nula para todo x e y. Demuestre que $(\partial u/\partial x)_v$ es idénticamente nula. A partir de aquí u, considerada como función de x y v, es independiente de x; es decir, $u = k(v)$ para alguna función k de una variable. ¿Por qué implica esto que f y g son funcionalmente dependientes?

12.9 Aproximaciones mediante series de Taylor

Como en el caso de funciones de una variable, las representaciones mediante series de potencias y sus sumas parciales (polinomios de Taylor) proporcionan un método eficiente para determinar el comportamiento de una función suave de varias variables en las proximidades de un punto de su dominio. En esta sección presentaremos brevemente la extensión de las series de Taylor a este tipo de funciones. Como es habitual, realizaremos el desarrollo para funciones de dos variables, siendo clara la extensión al caso de más variables.

Para empezar, recordaremos la fórmula de Taylor para una función $F(x)$ con derivadas continuas hasta orden $n+1$ en el intervalo $[a,\ a+h]$:

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \frac{F''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{F^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

siendo X algún número comprendido entre a y $a+h$ (el último término de la fórmula es la forma de *Lagrange* del resto). En el caso especial de $a = 0$ y $h = 1$, esta fórmula se convierte en

$$F(1) = F(0) = F'(0) = \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

para algún valor θ entre 0 y 1.

Supongamos ahora que $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas hasta de orden $n+1$ en todos los puntos de un conjunto abierto que contiene al segmento que une a los puntos (a, b) y $(a+h,\ b+k)$ de su dominio. Se puede obtener la fórmula de Taylor para $f(a+h,\ b+k)$ en potencias de h y k aplicando la fórmula de una variable presentada anteriormente a la función

$$F(t) = f(a+th,\ b+tk), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Es evidente que $F(0) = f(a, b)$ y $F(1) = f(a+h,\ b+k)$. Calculemos algunas derivadas de F:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= hf_1(a+th,\ b+tk) + kf_2(a+th,\ b+tk)\\
F''(t) &= h^2 f_{11}(a+th,\ b+tk) + 2hkf_{12}(a+th,\ b+tk)\\
&\quad + k^2 f_{22}(a+th,\ b+tk)\\
F'''(t) &= (h^3 f_{111} + 3h^2kf_{112} + 3hk^2 f_{122} + k^3 f_{222})\Big|_{(a+th,\ b+tk)}
\end{aligned}$$

El patrón de coeficientes es bastante obvio, pero la notación, en la que intervienen subíndices para indicar las derivadas parciales de f, se hace más y más compleja a medida que crece el orden de las derivadas. La notación se puede simplificar bastante utilizando $D_1 f$ y $D_2 f$ para indicar las derivadas parciales primeras de f con respecto a su primera y segunda variable. Como h y k son constantes y las derivadas parciales mixtas se pueden conmutar ($D_1D_2 f = D_2D_1 f$), tenemos que

$$h^2D_1^2 f + 2hkD_1D_2 f + k^2D_2^2 f = (hD_1 + kD_2)^2 f$$

y así sucesivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= (hD_1 + kD_2)\,f(a+th,\ b+tk)\\
F''(t) &= (hD_1 + kD_2)^2\,f(a+th,\ b+tk)\\
F'''(t) &= (hD_1 + kD_2)^3\,f(a+th,\ b+tk)\\
&\ \ \vdots\\
F^{(m)}(t) &= (hD_1 + kD_2)^m\,f(a+th,\ b+tk)
\end{aligned}$$

En particular, $F^{(m)}(0) = (hD_1 + kD_2)^m f(a, b)$. Entonces, la fórmula de Taylor $f(a+h, b+k)$ es

$$f(a+h,\ b+k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}(hD_1 + kD_2)^m f(a, b) + R_n(h, k)$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_{mj} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) h^j k^{m-j} + R_n(h, k)$$

Nótese que $(hD_1 + kD_2)^m f(a, b)$ significa $((hD_1 + kD_2)^m f(|_{(a, b)}$, no $(hD_1 + kD_2)^m(f(a, b))$, que sería cero.

---

donde, utilizando el desarrollo binomial, tenemos

$$C_{mj} = \frac{1}{m!}\binom{m}{j} = \frac{1}{m!}\frac{m!}{j!(m-j)!} = \frac{1}{j!(m-j)!}$$

y donde el término de resto se expresa como

$$R_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!}(hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a + \theta h,\ b + \theta k)$$

para algún valor θ comprendido entre 0 y 1. Si f tiene derivadas parciales de todos los órdenes y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(h, k) = 0$$

entonces $f(a+h, b+k)$ se puede expresar como una serie de Taylor en potencias de h y k:

$$f(a+h,\ b+k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) h^j k^{m-j}$$

Como en el caso de funciones de una variable, el polinomio de Taylor de grado n,

$$P_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j}$$

proporciona la «mejor» aproximación mediante un polinomio de grado n a $f(x, y)$ en las cercanías de (a, b). Si en esta aproximación se hace $n = 1$, se reduce a la aproximación mediante plano tangente

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b)$$

Ejemplo 1 Calcule una aproximación mediante un polinomio de segundo grado a la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ cerca del punto $(1, 2)$, y utilícela para estimar $\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3}$.

Solución Para realizar la aproximación de segundo grado necesitamos los valores de las derivadas parciales de f hasta de segundo orden en $(1, 2)$. Tenemos

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3} \qquad f(1, 2) = 3$$

$$f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \qquad f_1(1, 2) = \frac{1}{3}$$

$$f_2(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \qquad f_2(1, 2) = 2$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{11}(1, 2) = \frac{8}{27}$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{-3xy^2}{2(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{12}(1, 2) = -\frac{2}{9}$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{12x^2y + 3y^4}{4(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{22}(1, 2) = \frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$f(1 + h, 2 + k) \approx 3 + \frac{1}{3}\, h + 2k + \frac{1}{2!}\left(\frac{8}{27}\, h^2 + 2\left(-\frac{2}{9}\right) hk + \frac{2}{3}\, k^2\right)$$

o, haciendo $x = 1 + h$ e $y = 2 + k$,

$$f(x, y) = 3 + \frac{1}{3}\,(x - 1) + 2(y - 2) + \frac{4}{27}\,(x - 1)^2 - \frac{2}{9}\,(x - 1)(y - 2) + \frac{1}{3}\,(y - 2)^2$$

que es el polinomio de Taylor de segundo grado requerido para la función f cerca del punto $(1, 2)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3} &= f(1 + 0.02,\ 2 - 0.03)\\ &\approx 3 + \frac{1}{3}\,(0.02) + 2(-0.03) + \frac{4}{27}\,(0.02)^2\\ &\quad - \frac{2}{9}\,(0.02)(-0.03) + \frac{1}{3}\,(-0.03)^2\\ &\approx 2.947\,159\,3\end{aligned}$$

A efectos de comparación: el valor verdadero es 2.947 136 6... La aproximación es exacta hasta 6 dígitos significativos.

Como se observó en el caso de funciones de una variable, en general no es necesario calcular las derivadas para determinar los coeficientes de una serie de Taylor o polinomio de Taylor. A menudo es mucho más fácil realizar cambios algebraicos sobre series conocidas. Por ejemplo, el ejemplo anterior se podría haber resuelto expresando f en la forma

$$\begin{aligned}f(1 + h, 2 + k) &= \sqrt{(1 + h)^2 + (2 + k)^3}\\ &= \sqrt{9 + 2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}\\ &= 3\sqrt{1 + \frac{2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}{9}}\end{aligned}$$

y aplicar después el desarrollo binomial

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) t^2 + \cdots$$

con $t = \dfrac{2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}{9}$, para obtener los términos hasta de grado 2 en las variables h y k.

Ejemplo 2 Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 en potencias de x e y para la función $f(x, y) = e^{x-2y}$.

Solución El polinomio de Taylor requerido será el polinomio de Taylor de grado 3 para e^t evaluado en $t = x - 2y$:

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= 1 + (x-2y) + \frac{1}{2!}(x-2y)^2 + \frac{1}{3!}(x-2y)^3 \\ &= 1 + x - 2y + \frac{1}{2}x^2 - 2xy + 2y^2 + \frac{1}{6}x^3 - x^2y + 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

Observación Por supuesto, se puede utilizar Maple para calcular polinomios de Taylor en varias variables mediante su función **mtaylor**, que, en función de la versión de Maple, puede ser necesario leer de la librería de Maple antes de utilizarla, si no es parte del Kernel.

```
> readlib(mtaylor) :
```

Los argumentos que se introducen en `mtaylor` son los siguientes:

(a) Una expresión en la que intervienen las variables del desarrollo.
(b) Una lista cuyos elementos son nombres de variables, o ecuaciones de la forma `variable=value`, que proporcionan las coordenadas del punto alrededor del que se calcula el desarrollo (si sólo se nombra una variable es equivalente a utilizar la ecuación `variable=0`).
(c) (Opcional) Un entero positivo m para forzar a que el orden del polinomio de Taylor calculado sea menor que m. Si no se especifica m, se emplea el valor de la variable global de Maple «Order». El valor por defecto es 6.

Unos pocos ejemplos serán suficientes.

```
> mtaylor(cos(x+y^2), [x, y]) ;
```

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{6}y^2x^3$$

```
> mtaylor(cos(x+y^2), [x=Pi, y], 5) ;
```

$$-1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + y^2(x-\pi) - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{2}y^4$$

```
> mtaylor(g(x, y), [x=a, y=b], 3) ;
```

$$\begin{aligned} &g(a, b) + D_1(g)(a, b)(x-a) + D_2(g)(a, b)(y-b) + \frac{1}{2}D_{1,1}(g)(a, b)(x-a)^2 \\ &\quad + (x-a)D_{1,2}(g)(a, b)(y-b) + \frac{1}{2}D_{2,2}(g)(a, b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

La función `mtaylor` puede ser un poco estrafalaria. Tiene tendencia a desarrollar los términos lineales; por ejemplo, en un desarrollo alrededor de $x = 1$ e $y = -2$ puede escribir los términos $2 + (x-1) + 2(y+2)$ en la forma $5 + x + 2y$.

Aproximación de funciones implícitas

En la sección anterior vimos cómo determinar si en una ecuación con varias variables se podía despejar una de dichas variables en función de las otras. Aunque se sabe que existe una solución, en general no es posible obtener una expresión exacta de ella. Sin embargo, si en la ecuación intervienen sólo funciones suaves, entonces la solución debe tener un desarrollo en serie de Taylor. Podemos determinar al menos los primeros coeficientes de dicho desarrollo y obtener así una aproximación útil a la solución. El siguiente ejemplo muestra la técnica.

Ejemplo 3 Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x+y) = xy + 2x$$

tiene una solución de la forma $y = f(x)$ cerca de $x = 0$ que cumple $f(0) = 0$, y calcule los términos hasta de cuarto grado de la serie de Taylor de $f(x)$ en potencias de x.

Solución La ecuación dada se puede expresar de la forma $F(x, y) = 0$, siendo

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x+y) - xy - 2x$$

Como $F(0, 0) = 0$ y $F_2(0, 0) = \cos(0) = 1 \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita, la ecuación tiene una solución $y = f(x)$ cerca de $x = 0$ que cumple $f(0) = 0$. No es posible calcular exactamente $f(x)$, pero tendrá una serie de Maclaurin de la forma

$$y = f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

No existe término constante porque $f(0) = 0$. Podemos sustituir esta serie en la ecuación dada y obtener los términos hasta de grado 4 para calcular los coeficientes a_1, a_2, a_3 y a_4. En el miembro izquierdo utilizaremos la serie de Maclaurin del seno para obtener

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}((1+a_1)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) \\
&= (1+a_1)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\
&\quad - \frac{1}{3!}((1+a_1)x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots \\
&= (1+a_1)x + a_2x^2 + \left(a_3 - \frac{1}{6}(1+a_1)^3\right)x^3 \\
&\quad + \left(a_4 - \frac{3}{6}(1+a_1)^2a_2\right)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

El miembro derecho es

$$xy + 2x = 2x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se obtiene

$$\begin{aligned}
1 + a_1 &= 2 & a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 & a_2 &= 1 \\
a_3 - \frac{1}{6}(1+a_1)^3 &= a_2 & a_3 &= \frac{7}{3} \\
a_4 - \frac{1}{2}(1+a_1)^2\, a_2 &= a_3 & a_4 &= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Podríamos haber obtenido más términos de la serie calculando potencias más altas de x en el proceso de sustitución.

Observación A partir de la serie de $f(x)$ obtenida anteriormente, podemos determinar los valores de las cuatro primeras derivadas de f en $x = 0$. Recuérdese que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
f'(0) &= a_1 = 1 & f''(0) &= 2!a_2 = 2 \\
f'''(0) &= 3!a_3 = 4 & f^{(4)}(0) &= 4!a_4 = 104
\end{aligned}$$

Podríamos haber hecho el ejemplo calculando primero estas derivadas mediante diferenciación implícita de la ecuación dada, y determinando después los coeficientes de la serie a partir de ellas. Habría sido una forma mucho más difícil de realizarlo (inténtelo y vea).

Ejercicios 12.9

En los Ejercicios 1-6, calcule la serie de Taylor de las funciones dadas alrededor de los puntos indicados.

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{2 + xy^2}$, $(0, 0)$
2. $f(x, y) = \ln(1 + x + y + xy)$, $(0, 0)$
3. $f(x, y) = \tan^{-1}(x + xy)$, $(0, -1)$
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$, $(1, -1)$
5. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $(0, 0)$
6. $f(x, y) = \text{sen}(2x + 3y)$, $(0, 0)$

En los Ejercicios 7-12, calcule dos polinomios de Taylor de los grados indicados para las funciones definidas alrededor de los puntos dados. Tras calcularlos a mano, intente obtener los mismos resultados utilizando la función `mtaylor` de Maple.

7. $f(x, y) = \dfrac{1}{2 + x - 2y}$, grado 3, alrededor de $(2, 1)$
8. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, grado 3, alrededor de $(1, 0)$
9. $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{x+y^2} e^{-t^2}\, dt$, grado 3, alrededor de $(0, 0)$
10. $f(x, y) = \cos(x + \text{sen}\, y)$, grado 4, alrededor de $(0, 0)$
11. $f(x, y) = \dfrac{\text{sen}\, x}{y}$, grado 2, alrededor de $(\frac{\pi}{2}, 1)$
12. $f(x, y) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2 + y^4}$, grado 2, alrededor de $(0, 0)$

En los Ejercicios 13-14, demuestre que, siendo x un valor cercano al punto indicado $x = a$, las ecuaciones dadas tienen solución de la forma $y = f(x)$, tomando los valores indicados en cada punto. Calcule los tres primeros términos distintos de cero de las series de Taylor de $f(x)$ en potencias de $x - a$.

*13. $x\, \text{sen}\, y = y + \text{sen}\, x$, alrededor de $x = 0$, con $f(0) = 0$.

*14. $\sqrt{1 + xy} = 1 + x + \ln(1 + y)$, alrededor de $x = 0$, con $f(0) = 0$.

*15. Demuestre que la ecuación $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ tiene una solución de la forma $z = f(x, y)$ alrededor de $x = 0$, $y = 0$, siendo $f(0, 0) = 0$. Calcule el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x, y)$ en potencias de x e y.

*16. Utilice métodos basados en series para obtener el valor de la derivada parcial $f_{112}(0, 0)$ sabiendo que $f(x, y) = \arctan(x + y)$.

*17. Utilice métodos basados en series para calcular

$$\frac{\partial^{4n}}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\bigg|_{(0,0)}$$

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes palabras y frases?**
  - ◇ $\mathcal{S}$ es la gráfica de $f(x, y)$.
  - ◇ $\mathcal{C}$ es una curva de nivel de $f(x, y)$.
  - ◇ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.
  - ◇ $f(x, y)$ es continua en (a, b).
  - ◇ La derivada parcial $(\partial/\partial x) f(x, y)$.
  - ◇ El plano tangente $z = f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ Derivadas parciales segundas puras.
  - ◇ Derivadas parciales segundas mixtas.
  - ◇ $f(x, y)$ es una función armónica.
  - ◇ $L(x, y)$ es la linealización de $f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ El diferencial de $z = f(x, y)$.
  - ◇ $f(x, y)$ el diferenciable en (a, b).
  - ◇ El gradiente de $f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ La derivada direccional de $f(x, y)$ en (a, b) y en la dirección $\mathbf{v}$.
  - ◇ El determinante jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.
- **¿En qué condiciones son iguales dos derivadas parciales mixtas?**
- **Enuncie la Regla de la Cadena para $z = f(x, y)$, siendo $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.**
- **Describa el proceso de cálculo de las derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.**
- **¿Qué es la serie de Taylor de $f(x, y)$ alrededor de (a, b)?**

Ejercicios de repaso

1. Dibuje algunas curvas de nivel de la función $x + \dfrac{4y^2}{x}$.

2. Dibuje algunas isotermas (líneas de temperatura constante) de la función de temperatura

$$T = \frac{140 + 30x^2 - 60x + 120y^2}{8 + x^2 - 2x + 4y^2} \quad (°C)$$

¿Cuál es la posición más fría?

3. Dibuje algunas curvas de nivel de la función polinómica $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. ¿Cuál le parece la causa de que la gráfica de la función se denomine *silla de mono*?

4. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calcule las siguientes derivadas parciales o explique por qué no existen: $f_1(0, 0)$, $f_2(0, 0)$, $f_{21}(0, 0)$, $f_{12}(0, 0)$.

5. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$. ¿Dónde es continua $f(x, y)$? ¿Qué conjunto de puntos adicional hace que $f(x, y)$ tenga una extensión continua? En particular, ¿se puede extender f para que sea continua en el origen? ¿Se puede definir f en el origen de forma que sus derivadas parciales primeras existan allí?

6. La superficie $\mathcal{S}$ es la gráfica de la función $z = f(x, y)$, siendo $f(x, y) = e^{x^2 - 2x - 4y^2 + 5}$.

(a) Calcule una ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $(1, -1, 1)$.

(b) Dibuje una muestra representativa de las curvas de nivel de la función $f(x, y)$.

7. Considere la superficie $\mathcal{S}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

(a) Calcule una ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto (a, b, c) de $\mathcal{S}$.

(b) ¿Para qué puntos (a, b, c) de $\mathcal{S}$ el plano tangente a $\mathcal{S}$ en (a, b, c) pasa por el punto $(0, 0, 4)$? Describa geométricamente este conjunto de puntos.

8. Dos resistencias variables, R_1 y R_2, se conectan en paralelo de forma que su resistencia combinada R se expresa como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si $R_1 = 100$ ohmios $\pm 5\%$ y $R_2 = 25$ ohmios $\pm 2\%$, ¿aproximadamente qué porcentaje de error puede tener un valor calculado de $R = 20$ ohmios de su resistencia combinada?

9. Suponga que mide dos lados de un terreno triangular y el ángulo que forman. Las medidas de los lados son 150 m y 200 m, ambas con una exactitud de ± 1 m. El ángulo medido es de 30°, con una precisión de $\pm 2°$. ¿Cuál es el área del terreno y cuál es su estimación del máximo porcentaje de error de dicha área?

10. Suponga que $T(x, y, z) = x^3y + y^3z + z^3x$ da la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio tridimensional.

(a) Calcule la derivada direccional de T en $(2, -1, 0)$ y en la dirección que va desde ese punto al punto $(1, 1, 2)$.

(b) Una mosca se mueve por el espacio con velocidad constante 5. En el instante $t = 0$, la mosca cruza la superficie $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 11$ formando ángulos rectos en el punto $(2, -1, 0)$, moviéndose en la dirección de temperatura creciente. Calcule dT/dt en $t = 0$, tal como la experimenta la mosca.

11. Considere la función $f(x, y, z) = x^2y + yz + z^2$.

(a) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1, -1, 1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

(b) Una hormiga se mueve sobre el plano $x + y + z = 1$, pasando por el punto $(1, -1, 1)$. Suponga que se mueve de forma que mantiene f constante. ¿En qué dirección se está moviendo cuando pasa por dicho punto $(1, -1, 1)$?

(c) Otra hormiga camina por el plano $x + y + z = 1$, moviéndose en la dirección de la máxima tasa de incremento de f. Calcule su dirección cuando pasa por el punto $(1, -1, 1)$.

12. Sea $f(x, y, z) = (x^2 + z^2)\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi xy}{2} + yz^2$. Sea P_0 el punto $(1, 1, -1)$.

(a) Calcule el gradiente de f en P_0.

(b) Calcule la linealización $L(x, y, z)$ de f en P_0.

(c) Calcule una ecuación del plano tangente en P_0 a la superficie de nivel de f que pasa por P_0.

(d) Si un pájaro vuela pasando por P_0 con velocidad 5, dirigiéndose directamente hacia el punto $(2, -1, 1)$, ¿cuál es la tasa de cambio de f vista por el pájaro cuando pasa por P_0?

(e) ¿En qué dirección desde P_0 debería volar el pájaro a una velocidad de 5 para experimentar la máxima tasa de crecimiento de f?

13. Verifique que para cualquier constante k, la función $u(x, y) = k(\ln\cos(x/k) - \ln\cos(y/k))$ satisface la *ecuación de la superficie mínima*

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - uu_xu_yu_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

14. Las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ pueden definir dos de las variables x, y y z en función de la variable. Demuestre que

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 1$$

15. Las ecuaciones $\begin{cases} x = u^3 - uv \\ y = 3uv + 2v^2 \end{cases}$ definen u y v como funciones de x e y alrededor del punto P tal que $(u, v, x, y) = (-1, 2, 1, 2)$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ en P.

(b) Calcule el valor aproximado de u cuando $x = 1{,}02$ e $y = 1{,}97$.

16. Las ecuaciones $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - 2xy^2 \end{cases}$ definen implícitamente x e y como funciones de u y v para valores de (x, y) cerca de $(1, 2)$, y valores de (u, v) cerca de $(5, -7)$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ en $(u, v) = (5, -7)$.

(b) Si $z = \ln(y^2 - x^2)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en $(u, v) = (5, -7)$.

Problemas avanzados

1. (a) Si la gráfica de una función $f(x, y)$ que es diferenciable en (a, b) contiene parte de una recta que pasa por el punto (a, b), demuestre que la recta está en el plano tangente a $z = f(x, y)$ en (a, b).

(b) Si $g(t)$ es una función diferenciable de t, describa la superficie $z = yg(x/y)$ y demuestre que todos sus planos tangentes pasan por origen.

2. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de forma que su dirección de movimiento en cualquier punto es perpendicular a la superficie de nivel de

$$f(x, y, z) = 4 - x^2 - 2y^2 + 3z^2$$

que pasa por dicho punto. Si la trayectoria de una partícula pasa por el punto $(1, 1, 8)$, demuestre que también pasa por el punto $(2, 4, 1)$. ¿Pasa por el punto $(3, 7, 0)$?

3. **(El operador de Laplace en coordenadas esféricas)** Si $u(x, y, z)$ tiene derivadas parciales segundas continuas y

$$v(\rho, \phi, \theta) = u(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ \rho\cos\phi)$$

demuestre que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Puede hacerlo a mano, pero es mucho más fácil utilizar un programa de matemáticas por computador.

4. **(Ondas que se expanden esféricamente)** Si f es una función dos veces diferenciable de una variable y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demuestre que $u(x, y, z, t) = \dfrac{f(\rho - ct)}{\rho}$ satisface la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

¿Cuál es el significado geométrico de esta solución en función del tiempo creciente t? *Sugerencia*: Puede utilizar el resultado del Ejercicio 3. En este caso, $v(\rho, \phi, \theta)$ es independiente de ϕ y θ.

CAPÍTULO 13

Aplicaciones de las derivadas parciales

No sé lo que debo parecerle al mundo, pero a mí mismo me veo como un muchacho jugando en la orilla del mar y divirtiéndome de vez en cuando al encontrar un guijarro redondo y suave, o una concha más bonita que las demás, mientras el gran océano de la verdad está por descubrir, allí delante de mí.

Isaac Newton (1642-1727)

Introducción En este capítulo presentaremos algunas de las formas en las que las derivadas parciales contribuyen a la comprensión y solución de problemas en matemática aplicada. Muchos de estos problemas se pueden poner en el contexto de determinar valores máximos o mínimos de funciones de varias variables, aspectos que se consideran en las cuatro primeras secciones de este capítulo. Las restantes secciones presentan diversos problemas en los que interviene la diferenciación de funciones con respecto a parámetros, y también el Método de Newton para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales. Una buena parte del material de este capítulo se puede considerar *opcional*. Sólo las Secciones 13.1-13.3 contienen *material básico*, e incluso partes de esas secciones se pueden omitir (por ejemplo, la presentación sobre programación lineal en la Sección 13.2).

13.1 Valores extremos

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$, parte de cuya gráfica se muestra en la Figura 13.1, tiene un valor mínimo de 0; este valor se produce en el origen (0, 0), donde la gráfica tiene un plano tangente horizontal. De forma similar, la función $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, parte de cuya gráfica se muestra en la Figura 13.2, tiene un valor máximo de 1 en (0, 0). ¿Qué técnicas se podrían utilizar para descubrir estos hechos si no fueran evidentes observando una gráfica? La obtención de valores máximos y mínimos de funciones de varias variables es, como su análogo en el caso de funciones de una sola variable, el punto crucial de muchas aplicaciones de cálculo avanzado en problemas que surgen en otras disciplinas. Desafortunadamente, este problema es a menudo mucho más complicado que en el caso de una sola variable. Nuestra presentación comenzará por desarrollar las técnicas en el caso de funciones de dos variables. Algunas de esas técnicas se pueden extender a funciones de más variables en la forma obvia. La extensión de aquellas que no sean obvias se considerará posteriormente en esta sección.

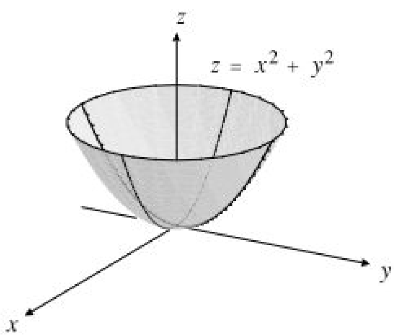


Figura 13.1 $x^2 + y^2$ tiene un valor mínimo de 0 en el origen.

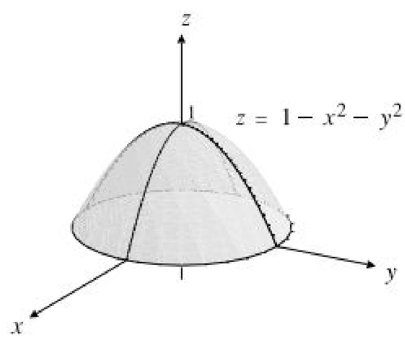


Figura 13.2 $1 - x^2 - y^2$ tiene un valor máximo de 1 en el origen.

Empecemos por revisar lo que conocemos sobre el caso de una sola variable. Recuérdese que una función $f(x)$ tiene un *valor máximo local* (o un *valor mínimo local*) en un punto a de su dominio si $f(x) \leqslant f(a)$ (o $f(x) \geqslant f(a)$) para todo x en el dominio de f que esté lo *suficientemente cerca* de a. Si la desigualdad apropiada se mantiene *para todo* x en el dominio de f, se dice que f tiene un valor *máximo absoluto* (o *mínimo absoluto*) en a. Además, estos valores extremos locales o absolutos sólo pueden ocurrir en puntos de uno de los tres siguientes tipos:

(a) Puntos críticos, donde $f'(x) = 0$.

(b) Puntos singulares, donde $f'(x)$ no existe.

(c) Puntos extremos del dominio de f.

En el caso de varias variables se produce una situación similar. Se dice que una función de dos variables tiene un valor **máximo local** o **máximo relativo** en el punto (a, b) de su dominio si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) del dominio de f que estén lo *suficientemente cerca* del punto (a, b). Si la desigualdad se mantiene *para todo* (x, y) del dominio de f, entonces se dice que f tiene un valor **máximo global** o **máximo absoluto** en (a, b). Las definiciones para valores mínimos locales (relativos) y absolutos (globales) son similares. En la práctica, en general se omite la palabra *absoluto* o *global*, por lo que simplemente diremos *el* valor máximo o *el* valor mínimo de f.

El siguiente teorema demuestra que existen tres posibilidades para los puntos donde pueden ocurrir valores extremos, análogamente al caso de una sola variable.

TEOREMA 1 **Condiciones necesarias para valores extremos**

Una función $f(x, y)$ sólo puede tener un valor extremo local absoluto en un punto (a, b) de su dominio si (a, b) es:

(a) Un **punto crítico** de f, es decir, un punto que cumple $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.
(b) Un **punto singular** de f, es decir, un punto donde $\nabla f(a, b)$ no existe.
(c) Un **punto frontera** del dominio de f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que (a, b) pertenece al dominio de f. Si (a, b) no está en la frontera del dominio de f, entonces debe pertenecer al interior de dicho dominio, y si (a, b) no es un punto singular de f, entonces existe $\nabla f(a, b)$. Finalmente, si (a, b) no es un punto crítico de f, entonces $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, por lo que f tiene una derivada direccional positiva en la dirección de $\nabla f(a, b)$ y una derivada direccional negativa en la dirección de $-\nabla f(a, b)$; es decir, f crece si nos movemos desde (a, b) en una dirección y decrece si nos movemos en la dirección opuesta. Por consiguiente, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en (a, b). Por tanto, todo punto donde se produzca un valor extremo debe ser un punto crítico, un punto singular de f, o un punto frontera del dominio de f.

Nótese que el Teorema 1 sigue siendo válido sin modificar su demostración para el caso de funciones de cualquier número de variables. Por supuesto, el Teorema 1 no garantiza que una determinada función tendrá valores extremos. Sólo nos dice dónde buscarlos si existen. El Teorema 2, posterior, proporciona condiciones que garantizan la existencia de valores máximo y mínimo absolutos en el caso de funciones continuas. Es análogo al Teorema Max-Min en el caso de funciones de una variable. Su demostración se sale del alcance de este texto. Los estudiantes interesados pueden consultarla en textos elementales sobre análisis matemático.

Se dice que un conjunto de $\mathbb{R}^n$ está **acotado** si está contenido dentro de alguna *bola* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$ de radio finito R. Se dice que un conjunto de la recta real está acotado si está contenido en un intervalo de longitud finita.

TEOREMA 2 **Condiciones suficientes para la existencia de valores extremos**

Si f es una función *continua* de n variables cuyo dominio es un conjunto *cerrado* y *acotado* de $\mathbb{R}^n$, entonces el rango de f es un conjunto acotado de números reales, y habrá puntos de dicho dominio donde f tome valores máximo y mínimo absolutos.

Ejemplo 1 La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (*véase* la Figura 13.1) tiene un punto crítico en (0, 0), ya que $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ y ambos componentes de ∇f se anulan en (0, 0). Como

$$f(x, y) > 0 = f(0, 0) \qquad \text{si} \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

f debe tener un valor mínimo (absoluto) de 0 en ese punto. Si el dominio de f no se restringe, entonces no tendrá valor máximo. De forma similar, $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ tiene un valor máximo (absoluto) de 1 en su punto crítico (0, 0) (*véase* la Figura 13.2).

Ejemplo 2 La función $h(x, y) = y^2 - x^2$ tiene también un punto crítico en (0, 0), pero no tiene un valor máximo local ni mínimo local en dicho punto. Obsérvese que $h(0, 0) = 0$, pero $h(x, 0) < 0$ y $h(0, y) > 0$ para cualquier valor distinto de cero de x e y (*véase* la Figura 13.3). La gráfica de h es un paraboloide hiperbólico, y a la vista de la forma de esta superficie, podemos decir que el punto crítico (0, 0) es un *punto de ensilladura* de h.

Utilizaremos en general la nomenclatura de **punto de ensilladura** para denominar cualquier *punto crítico interior* del dominio de una función f de varias variables donde no haya un valor máximo o mínimo local. Incluso en funciones de dos variables, la gráfica puede no tener forma de ensilladura cerca de un punto de ese tipo. Por ejemplo, la función $f(x, y) = -x^3$ tiene una recta completa de puntos de ensilladura a lo largo del eje y (*véase* la Figura 13.4), aunque su gráfica no recuerda la forma de una ensilladura en ninguna parte. Estos puntos son semejantes a los puntos de inflexión en el caso de funciones de una variable. Los puntos de ensilladura son los análogos en dimensiones superiores a los puntos de inflexión horizontales en el caso de una dimensión.

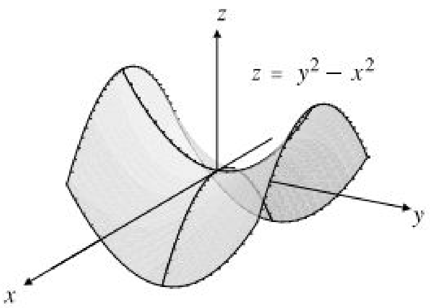


Figura 13.3 $y^2 - x^2$ tiene un punto de ensilladura en (0, 0).

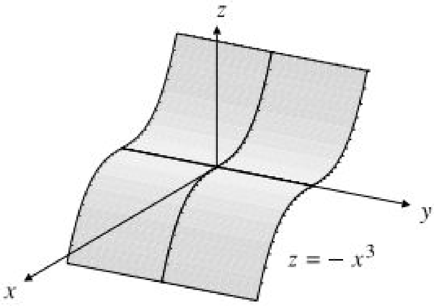


Figura 13.4 Una línea de puntos de ensilladura.

Ejemplo 3 La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no tiene puntos críticos, pero tiene un punto singular en (0, 0), donde tiene un valor mínimo local (y absoluto) de cero. La gráfica de f tiene la forma de un cono circular recto (*véase* la Figura 13.5(a)).

Ejemplo 4 La función $f(x, y) = 1 - x$ está definida en todos los puntos del plano xy, y no tiene puntos críticos ni puntos singulares ($\nabla f(x, y) = -\mathbf{i}$ en todo (x, y)). Por tanto, f no tiene valores extremos. Sin embargo, si restringimos el dominio de f a los puntos del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (un conjunto cerrado y acotado en el plano xy), entonces f tiene valores máximo y mínimo absolutos, como debe ser por el Teorema 2. El valor máximo es 2 en el punto frontera $(-1, 0)$, y el valor mínimo es 0 en $(1, 0)$ (*véase* la Figura 13.5(b)).

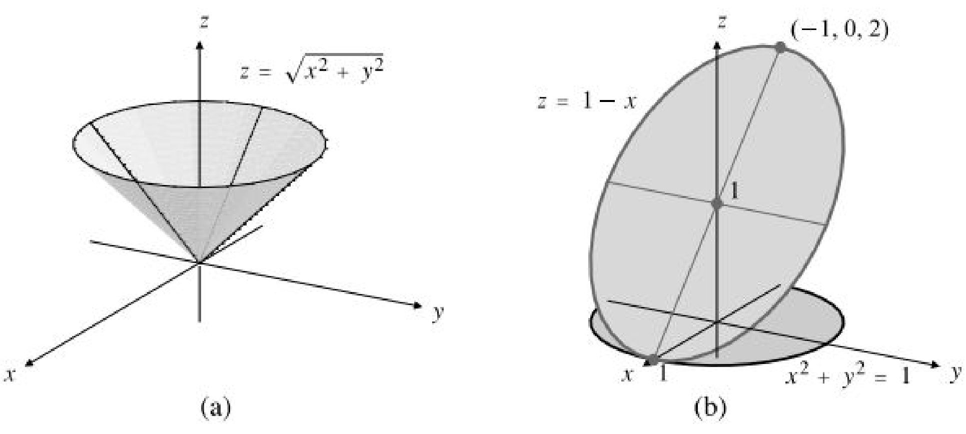


Figura 13.5
(a) $\sqrt{x^2 + y^2}$ tiene un valor mínimo en el punto singular (0, 0).
(b) Cuando se restringe al disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, la función $1 - x$ tiene valores máximo y mínimo en puntos frontera.

Clasificación de los puntos críticos

Los ejemplos anteriores son muy simples; es inmediatamente obvio en cada caso saber si la función tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura en los puntos críticos o singulares. En el caso de funciones más complicadas, puede ser más difícil clasificar los puntos críticos interiores. En teoría, tal clasificación se puede hacer siempre considerando la diferencia

$$\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

para valores pequeños de h y k, siendo (a, b) el punto crítico en cuestión. Si la diferencia es siempre no negativa (o no positiva) para h y k pequeños, entonces f debe tener un mínimo (o máximo) local en (a, b); si la diferencia es negativa en algunos puntos (h, k) arbitrariamente cercanos $(0, 0)$ y positiva para otros, entonces f debe tener un punto de ensilladura en (a, b).

Ejemplo 5 Calcule y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

Solución Los puntos críticos deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$0 = f_1(x, y) = 6x^2 - 6y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y$$

$$0 = f_2(x, y) = -6x + 6y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

En conjunto, estas ecuaciones implican que $x^2 = x$, de forma que $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Consideremos $(0, 0)$. En este caso Δf es

$$\Delta f = f(h, k) - f(0, 0) = 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

Como $f(h, 0) - f(0, 0) = 2h^3$ es positivo para valores positivos pequeños de h y negativo para valores negativos pequeños de h, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en $(0, 0)$. Por consiguiente, $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

Consideremos ahora $(1, 1)$. En este caso Δf es

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) \\
&= 2(1 + h)^3 - 6(1 + h)(1 + k) + 3(1 + k)^2 - (-1) \\
&= 2 + 6h + 6h^2 + 2h^3 - 6 - 6h - 6k - 6hk + 3 + 6k + 3k^2 + 1 \\
&= 6h^2 - 6hk + 3k^2 + 2h^3 \\
&= 3(h - k)^2 + h^2(3 + 2h)
\end{aligned}$$

Ambos términos en la expresión anterior son no negativos si $|h| < 3/2$, y no pueden ser los dos nulos a menos que $h = k = 0$. Por tanto, $\Delta f > 0$ para valores pequeños de h y k, y f tiene un valor mínimo local de -1 en $(1, 1)$. ■

El método utilizado para clasificar los puntos críticos en el ejemplo anterior se convierte en un método de «fuerza bruta» si la función que interviene es más complicada. Sin embargo, existe un *test de la segunda derivada* similar al de funciones de una variable. La versión para n variables es el objeto del siguiente teorema, cuya demostración se basa en las propiedades de las formas cuadráticas presentadas en la Sección 10.6.

TEOREMA 3 **Un test de la segunda derivada**

Supongamos que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ es un punto crítico de $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y que está en el interior del dominio de f. Supongamos también que todas las derivadas parciales segundas de f son continuas en un entorno de $\mathbf{a}$, de forma que la **matriz hessiana**

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{2n}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Es también continua en ese entorno. Nótese que la continuidad de las derivadas parciales garantiza que $\mathcal{H}$ es una matriz simétrica.

(a) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$.
(b) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.
(c) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es indefinida, entonces f tiene un punto de ensilladura en $\mathbf{a}$.
(d) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ no es ni definida positiva ni definida negativa ni indefinida, este test no da información.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, siendo $\mathbf{h}$ un vector de n dimensiones. Entonces,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_i$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_i h_j = \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}$$

En la expresión anterior, $\mathbf{h}$ se trata como un vector columna. Aplicando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange a g se puede expresar

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$$

para algún valor θ entre 0 y 1. Así,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})h_i + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Como $\mathbf{a}$ es un punto crítico de f, $f_i(\mathbf{a}) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, por lo que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces, por la continuidad de $\mathcal{H}$, también lo es $\mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})$ para $|\mathbf{h}|$ suficientemente pequeño. Por tanto, $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ para $\mathbf{h}$ distinto de cero, lo que demuestra (a).

Los apartados (b) y (c) se demuestran de forma similar. Las funciones $f(x, y) = x^4 + y^4$, $g(x, y) = -x^4 - y^4$ y $h(x, y) = x^4 - y^4$ son casos del apartado (d), y demuestran que en este caso una función puede tener un mínimo, un máximo o un punto de ensilladura.

Ejemplo 6 Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$.

Solución Las ecuaciones que determinan los puntos críticos son

$$0 = f_1(x, y, z) = 2xy - 2$$
$$0 = f_2(x, y, z) = x^2 + 2yz$$
$$0 = f_3(x, y, z) = y^2 + 2z$$

La tercera ecuación implica que $z = -y^2/2$ y la segunda implica entonces que $y^3 = x^2$. De la primera ecuación se obtiene $y^{5/2} = 1$. Por consiguiente, $y = 1$ y $z = -\frac{1}{2}$. Como $xy = 1$, debemos tener $x = 1$. El único punto crítico es $P = (1, 1, -\frac{1}{2})$. Evaluando las derivadas parciales segundas de f en este punto se obtiene la matriz hessiana

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como

$$2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

$\mathcal{H}$ es indefinida por el Teorema 8 de la Sección 10.6, por lo que P es un punto de ensilladura de f. ■

Observación Aplicando el test de definición positiva o negativa o de indefinición, dado por el Teorema 8 de la Sección 10.6, podemos enunciar el test de la segunda derivada para una función de dos variables como sigue:

Supongamos que (a, b) es un punto crítico de la función $f(x, y)$, perteneciente al interior del dominio de f. Supongamos también que las derivadas parciales segundas de f son continuas y tienen en ese punto los valores

$$A = f_{11}(a, b), \qquad B = f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b) \qquad \text{y} \qquad C = f_{22}(a, b)$$

(a) Si $B^2 - AC < 0$ y $A > 0$, entonces f tiene un valor mínimo local en (a, b).
(b) Si $B^2 - AC < 0$ y $A < 0$, entonces f tiene un valor máximo local en (a, b).
(c) Si $B^2 - AC > 0$, entonces f tiene un punto de ensilladura en (a, b).
(d) Si $B^2 - AC = 0$, este test no proporciona información; f puede tener un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura en (a, b).

Ejemplo 7 Reconsidere el Ejemplo 5 y utilice el test de la segunda derivada para clasificar los dos puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ de $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

Solución Tenemos

$$f_{11}(x, y) = 12x, \qquad f_{12}(x, y) = -6 \qquad \text{y} \qquad f_{22}(x, y) = 6$$

En $(0, 0)$, tenemos, por tanto,

$$A = 0, \quad B = -6, \quad C = 6 \quad \text{y} \quad B^2 - AC = 36 > 0$$

por lo que $(0, 0)$ es un punto de ensilladura. En $(1, 1)$ tenemos

$$A = 12 > 0, \quad B = -6, \quad C = 6 \quad \text{y} \quad B^2 - AC = -36 < 0$$

por lo que f debe tener un mínimo local en $(1, 1)$. ■

Ejemplo 8 Calcule y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

¿Tiene f valores máximo y mínimo? ¿Por qué?

Solución Empezaremos calculando las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función f:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y(1 - x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_2(x, y) &= x(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{11}(x, y) &= xy(x^2 - 3)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{12}(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{22}(x, y) &= xy(y^2 - 3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned}$$

En cualquier punto crítico, $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$, por lo que en este caso los puntos críticos serán las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y(1 - x^2) &= 0 \\ x(1 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones dice que $y = 0$ o $x = \pm 1$. La segunda ecuación dice que $x = 0$ o $y = \pm 1$. Hay cinco puntos que satisfacen ambas condiciones: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Los clasificaremos utilizando el test de la segunda derivada.

En $(0, 0)$ tenemos que $A = C = 0$, $B = 1$, por lo que $B^2 - AC = 1 > 0$. Así, f resulta tener un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

En $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ tenemos $A = C = -2/e < 0$, $B = 0$. Se deduce que $B^2 - AC = -4/e^2 < 0$. Por tanto, f tiene valores máximos locales en dichos puntos. El valor de f en cada uno de ellos es $-1/e$.

En $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ tenemos $A = C = 2/e > 0$, $B = 0$. Se deduce que $B^2 - AC = -4/e^2 < 0$. Así, f tiene valores mínimos locales en dichos puntos. El valor de f en cada uno de ellos es $-1/e$.

De hecho, f tiene valores máximo y mínimo absolutos, a saber, los valores obtenidos antes como extremos locales. Para ver por qué, obsérvese que $f(x, y)$ tiende a 0 cuando el punto (x, y) tiende a infinito en cualquier dirección, debido a la exponencial negativa que domina al factor potencial xy para valores grandes de $x^2 + y^2$. Elijamos un número entre 0 y el valor máximo local $1/e$ obtenido antes, por ejemplo, el número $1/(2e)$. Para algún valor R, debemos tener $|f(x, y)| \leqslant 1/(2e)$, siempre que $x^2 + y^2 \geqslant R^2$. Por el Teorema 2, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Dichos valores no pueden estar en la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = R^2$, porque $|f|$ es menor allí ($\leqslant 1/(2e)$) que en los puntos críticos considerados antes. Como f no tiene puntos singulares, los valores máximo y mínimo absolutos para el disco, y por tanto para todo el plano, deben estar en esos puntos críticos. ■

Ejemplo 9 Calcule la forma de una caja rectangular sin tapa cuyo volumen sea V y el área total de sus cinco caras sea mínima.

Solución Si las dimensiones horizontales de la caja son x e y, y su altura es z (*véase* la Figura 13.6), entonces deseamos minimizar

$$S = xy + 2yz + 2xz$$

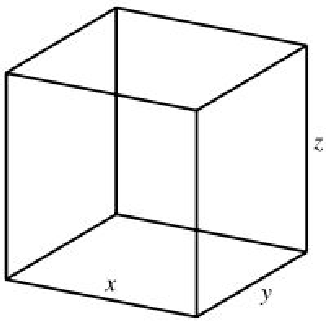


Figura 13.6

con la restricción de que $xyz = V$, el volumen requerido. Podemos utilizar esta restricción para reducir el número de variables de las que depende S, por ejemplo, sustituyendo

$$z = \frac{V}{xy}$$

Entonces S se convierte en una función de las variables x e y:

$$S = S(x, y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

Una caja real debe tener dimensiones positivas, por lo que el dominio de S sólo puede estar formado por aquellos puntos (x, y) que cumplan $x > 0$ e $y > 0$. Si x o y tienden a 0 o a ∞, entonces $S \to \infty$, por lo que el valor mínimo de S debe producirse en un punto crítico (S no tiene puntos singulares). Para obtener los puntos críticos se resuelven las ecuaciones

$$0 = \frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 y = 2V$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad xy^2 = 2V$$

Por tanto, $x^2y - xy^2 = 0$ o $xy(x - y) = 0$. Como $x > 0$ e $y > 0$, esto implica que $x = y$. Por tanto, $x^3 = 2V$, $x = y = (2V)^{1/3}$ y $z = V/(xy) = 2^{-2/3}V^{1/3} = x/2$. Como sólo hay un punto crítico, debe minimizar S (¿por qué?). La caja con área de superficie mínima tiene base cuadrada, pero su altura es sólo la mitad de sus dimensiones horizontales.

Observación El problema anterior es un problema de valores extremos de tres variables *con restricciones*; la ecuación $xyz = V$ es una *restricción* que limita la libertad de x, y y z. Hemos utilizado la restricción para eliminar una variable, z, y así hemos reducido el problema a un problema de dos variables *libre* (*sin restricciones*). En la Sección 13.3 desarrollaremos un método más potente para resolver problemas de valores extremos con restricciones.

Ejercicios 13.1

En los Ejercicios 1-17, calcule y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas.

1. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

2. $f(x, y) = xy - x + y$

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

5. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$

6. $f(x, y) = \cos(x + y)$

7. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

8. $f(x, y) = \cos x + \cos y$

9. $f(x, y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$

10. $f(x, y) = \dfrac{xy}{2 + x^4 + y^4}$

11. $f(x, y) = xe^{-x^3+y^3}$

12. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

13. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

14. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}$

15. $f(x, y) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

***16.** $f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$

***17.** $f(x, y, z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2$

***18.** Demuestre que $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un valor máximo local en el punto $(1, 1, 1)$.

19. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^4}$$

20. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)}$$

***21.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyze^{-x^2-y^2-z^2}$. ¿Cómo sabe que estos valores extremos existen?

22. Calcule el valor mínimo de $f(x, y) = x + 8y + \dfrac{1}{xy}$ en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$. ¿Cómo sabe que existe un mínimo?

23. Las regulaciones postales exigen que la suma de la altura y el perímetro horizontal de un paquete no supere las L unidades. Calcule el máximo volumen de una caja rectangular que pueda satisfacer esta restricción.

24. El material utilizado para hacer el fondo de una caja rectangular es dos veces más caro por unidad de área que el material utilizado para hacer la tapa y las paredes laterales. Calcule las dimensiones de la caja de un volumen dado V para la que el coste de materiales es mínimo.

25. Calcule el volumen de la mayor caja rectangular (con caras paralelas a los planos coordenados) que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Calcule tres números positivos a, b y c tales que su suma es 30 y la expresión ab^2c^3 es máxima.

27. Calcule los puntos críticos de la función $z = g(x, y)$ que satisface la ecuación $e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2} = 2$.

***28.** Clasifique los puntos críticos de la función g del ejercicio anterior.

***29.** Sea $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Demuestre que el origen es un punto crítico de f y que la restricción de f a toda recta que pase por el origen tiene un valor mínimo local en el origen (es decir, demuestre que $f(x, kx)$ tiene un valor mínimo local en $x = 0$ para todo k, y que $f(0, y)$ tiene un valor mínimo local en $y = 0$). ¿Tiene $f(x, y)$ un valor mínimo local en el origen? ¿Qué le sucede a f en la curva $y = 2x^2$? ¿Qué dice el test de la segunda derivada en esta situación?

30. Verifique completando el cuadrado (es decir, sin utilizar el Teorema 8 de la Sección 10.6) que la forma cuadrática

$$Q(u, v) = (x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

es definida positiva si $A > 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, definida negativa si $A < 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ e indefinida si $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$. Esto proporciona una confirmación independiente de la afirmación que se hace en la observación que precede al Ejemplo 7.

***31.** Enuncie y demuestre (utilizando argumentos basados en completar cuadrados en vez de emplear el Teorema 8 de la Sección 10.6) un resultado análogo al del Ejercicio 30 para una forma cuadrática $Q(u, v, w)$ de tres variables. ¿Cuáles son las implicaciones para un punto crítico (a, b, c) de una función $f(x, y, z)$, cuyas derivadas parciales segundas son conocidas en (a, b, c)?

13.2 Valores extremos de funciones definidas en dominios restringidos

Una buena parte de la sección anterior ha considerado técnicas para determinar si un punto crítico de una función es un valor máximo, mínimo o un punto de ensilladura. En esta sección vamos a considerar el problema de determinar los valores máximos y mínimos absolutos de funciones que los posean (generalmente funciones cuyos dominios estén restringidos a subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^n$, con interiores no vacíos). En el Ejemplo 8 de la Sección 13.1 tuvimos que *demostrar* que la función dada tenía valores extremos absolutos. Sin embargo, si lo que tenemos es una función continua en un dominio cerrado y acotado, entonces podemos basarnos en el Teorema 2 para garantizar la existencia de valores extremos absolutos, pero tendremos que comprobar siempre los puntos frontera, así como los puntos críticos del interior y los puntos singulares para obtener dichos extremos. Los siguientes ejemplos ilustran la técnica.

Ejemplo 1 Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 2xy$ en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 4$ (*véase* la Figura 13.7).

Solución Como f es continua y el disco es cerrado, debe alcanzar valores máximo y mínimo absolutos en algunos puntos de dicho disco. Las derivadas parciales primeras de f son

$$f_1(x, y) = 2y \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = 2x$$

por lo que no hay puntos singulares, y el único punto crítico es $(0, 0)$, donde f toma el valor 0.