PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL DIFERENŢIAL

RODICA LUCA–TUDORACHE

PROBLEME DE
ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL DIFERENŢIAL

CUPRINS

Capitolul 1
PRELIMINARII

Mulţimi. Fie A o mulţime. Dacă x este un element al său vom scrie $x \in A$, iar dacă x nu se găseşte în A vom nota $x \notin A$.

O mulţime A este specificată fie prin indicarea elementelor sale (sintetic), fie specificând o proprietate pe care o au elementele sale (analitic).

Mulţimea care nu are nici un element se numeşte *mulţimea vidă*, notată $\emptyset$. Două mulţimi A şi B sunt *egale* dacă orice element al lui A aparţine lui B şi reciproc, orice element al lui B aparţine lui A; se notează $A = B$. Mulţimea A este *inclusă* în mulţimea B dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B; se notează $A \subset B$. Deci $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Dacă A este o mulţime, atunci mulţimea care are ca elemente toate submulţimile lui A se numeşte *mulţimea părţilor* lui A, notată $\mathcal{P}(A)$.

Operaţii cu mulţimi:

1. Reuniunea: $A \bigcup B = \{x|\ x \in A \text{ sau } x \in B\}$.
2. Intersecţia: $A \bigcap B = \{x|\ x \in A \text{ şi } x \in B\}$.
3. Complementara unei submulţimi $A \subset E$ în raport cu E, notată $C_E A$:
$$C_E A = \{x|\ x \in E, x \notin A\}.$$
4. Diferenţa: $A \setminus B = \{x|\ x \in A \text{ şi } x \notin B\}$.
5. Produsul cartezian: $A \times B = \{(a, b)|\ a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Funcţii. Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte *funcţie* sau *aplicaţie* f a mulţimii A în mulţimea B o lege în baza căreia oricărui element $a \in A$ i se asociază un unic element, notat $f(a)$ din B. Se notează $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$. Mulţimea A se numeşte *domeniul de definiţie* al funcţiei, iar B domeniul valorilor funcţiei sau *codomeniul* funcţiei.

O funcţie $f : A \to B$ poate fi definită sintetic, numind pentru fiecare element în parte din A elementul ce i se asociază din mulţimea B, sau analitic, specificând o proprietate ce leagă un element arbitrar $a \in A$ de elementul $f(a)$ din B.

Fie funcţia $f : X \to Y$ şi $A \subset X$, $B \subset Y$. Mulţimea:

$$f(A)= \{y = f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists\ ^1\ x \in A \text{ a.î.}^2\ f(x)=y\} \subset Y$$

se numeşte *imaginea mulţimii A prin f*, iar mulţimea:

$$f^{-1}(B)=\{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

se numeşte *contraimaginea lui B prin f.*

Aplicaţia $f : A \to A$ definită prin $f(a)= a$, $\forall\ ^3\ a \in A$ se numeşte *aplicaţia identică*, notată 1_A.

Aplicaţia $f : A \to B$ se numeşte:

-*injectivă* dacă $\forall\ x,\ y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

-*surjectivă* dacă $\forall\ y \in B\ (\exists)\ x \in A$ a.î. $f(x)= y$.

-*bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Notăm cu $\circ$ operaţia de compunere a funcţiilor: pentru $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, funcţia $g \circ f : X \to Z$ este definită prin $(g \circ f)(x)= g(f(x))$, $\forall\ x \in X$.

Aplicaţia $f : A \to B$ se numeşte *inversabilă* dacă există o aplicaţie notată f^{-1}: $B \to A$ şi numită *inversa* lui f, satisfăcând condiţiile:

$$f \circ f^{-1} = 1_B \ \text{ şi } \ f^{-1} \circ f = 1_A.$$

O aplicaţie inversabilă $f : A \to B$ are inversa unică.

Teorema 1. Condiţia necesară şi suficientă ca aplicaţia $f : A \to B$ să fie inversabilă este ca ea să fie bijectivă.

Mulţimea numerelor reale. Fie mulţimile A şi B. Se numeşte *relaţie* între A şi B, notată cu $\mathcal{R}$, o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Deci $\mathcal{R} \subset A \times B$. Dacă elementele $a \in A$ şi $b \in B$ sunt în relaţia $\mathcal{R}$, notăm $(a,\ b) \in \mathcal{R}$ sau $a\mathcal{R}b$.

O relaţie $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte *relaţie de echivalenţă* pe mulţimea A dacă ea este:

-reflexivă, adică $(a,\ a)\in \mathcal{R}$, $\forall\ a \in A$;

-simetrică, adică $(a,\ b)\in \mathcal{R} \Rightarrow (b,\ a)\in \mathcal{R}$;

-tranzitivă, adică $(a,\ b)\in \mathcal{R}$ şi $(b,\ c)\in \mathcal{R} \Rightarrow (a,\ c)\in \mathcal{R}$.

O relaţie $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte *relaţie de ordine* pe mulţimea A dacă ea este:

-reflexivă: $(a,\ a)\in \mathcal{R}$, $\forall\ a \in A$;

-antisimetrică, adică $(a,\ b)\in \mathcal{R}$ şi $(b,\ a)\in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$;

-tranzitivă: $(a,\ b)\in \mathcal{R}$ şi $(b,\ c)\in \mathcal{R} \Rightarrow (a,\ c)\in \mathcal{R}$.

O relaţie de ordine $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte *totală* dacă $\forall\ a,\ b \in A$ avem $a\mathcal{R}b$ sau $b\mathcal{R}a$. O mulţime A dotată cu o relaţie $\mathcal{R}$ de ordine totală se numeşte *mulţime total*

[1]-există; [2]-astfel încât; [3]-oricare, orice.

ordonată sau *lanţ*.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime dotată cu o relaţie de ordine "$\leq$", iar $A \subset X$. Elementul $M \in X$ se numeşte *majorant* pentru mulţimea A dacă $a \leq M$, $\forall\ a \in A$, iar elementul $m \in X$ se numeşte *minorant* pentru mulţimea A dacă $m \leq a$, $\forall\ a \in A$. O mulţime care admite majoranţi (minoranţi) se numeşte *majorată* (respectiv *minorată*) sau *mărginită superior* (respectiv *mărginită inferior*).

Unei relaţii de ordine $\leq$ pe o mulţime X i se asociază o relaţie de ordine strictă $<$ pe X, definită prin:

$$x < y \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \leq y \text{ şi } x \neq y).$$

Mulţimea numerelor reale, notată $I\!R$ este o mulţime cu cel puţin două elemente, înzestrată cu două operaţii binare, notate "$+$", "$\cdot$" şi o relaţie, notată "$\leq$", în raport cu care sunt îndeplinite următoarele axiome:

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\ x, y, z \in I\!R$;

A2: $\exists\ 0 \in I\!R$ a.î. $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall\ x \in I\!R$;

A3: $\forall\ x \in I\!R\ \exists\ (-x) \in I\!R$ a.î. $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

A4: $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in I\!R$;

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\ x, y, z \in I\!R$;

A6: $\exists\ 1 \in I\!R$ a.î. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall\ x \in I\!R$;

A7: $\forall\ x \in I\!R \setminus \{0\}$, $\exists\ x^{-1} \in I\!R$ a.î. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

A8: $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall\ x, y \in I\!R$;

A9: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall\ x, y, z \in I\!R$;

A10: $\forall\ x, y \in I\!R : x \leq y$ sau $y \leq x$;

A11: Dacă $x \leq y$ şi $y \leq x$ atunci $x = y$.

A12: $\forall\ x, y, z \in I\!R$ cu $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

A13: $\forall\ x, y \in I\!R$ cu $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, $\forall\ z \in I\!R$;

A14: $\forall\ x, y, z \in I\!R$ cu $x \leq y$ şi $0 < z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$;

A15: Orice submulţime nevidă majorată a lui $I\!R$ posedă un cel mai mic majorant, numit *margine superioară*.

Deci mulţimea numerelor reale $(I\!R, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ total ordonat care satisface proprietatea (A15).

Submulţimile remarcabile ale mulţimii $I\!R$ sunt:

$I\!N = \{0, 1, 2, , 3, \ldots\}$ - mulţimea numerelor naturale,

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - mulţimea numerelor întregi şi

$Q = \left\{ \dfrac{x}{y} \mid x,\, y \in Z,\ y \neq 0 \right\}$ - mulţimea numerelor raţionale,
în relaţiile: $I\!N \subset Z \subset Q \subset I\!R$, (incluziunile fiind stricte).

Fie $A \subset I\!R$, $A \neq \emptyset$ o mulţime majorată. Conform axiomei (A15) există un cel mai mic majorant, deci marginea superioară, notat $\sup A$.

Teorema 2 (de caracterizare a marginii superioare). Elementul $\overline{m} = \sup A$ dacă şi numai dacă:

a) $a \leq \overline{m},\ \forall\, a \in A$;

b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A$ a.î. $a_\varepsilon > \overline{m} - \varepsilon$.

Fie $A \subset I\!R$ o mulţime minorată. Un cel mai mare minorant se numeşte *marginea inferioară* a lui A, notat $\inf A$.

Teorema 3 (de caracterizare a marginii inferioare). Elementul $\underline{m} = \inf A$ dacă şi numai dacă:

a) $\underline{m} \leq a,\ \forall\, a \in A$;

b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A$ a.î. $a_\varepsilon < \underline{m} + \varepsilon$.

Orice mulţime $A \subset I\!R$, $A \neq \emptyset$ minorată are margine inferioară (vezi Problema 9).

Un minorant (majorant) al mulţimii $A \subset I\!R$ care aparţine lui A se numeşte *cel mai mic* (respectiv *cel mai mare) element* al mulţimii A, notat $\min A$ (respectiv $\max A$).

O mulţime nevidă $A \subset I\!R$ se numeşte *mărginită* dacă este majorată şi minorată. O mulţime $A \subset I\!R$ nemajorată sau neminorată se numeşte mulţime *nemărginită*.

Vom identifica mulţimea numerelor reale $I\!R$ cu mulţimea punctelor unei axe (o dreaptă pe care s-a ales o origine, un sens şi o unitate de lungime), numită şi *dreapta reală*. Astfel vom vorbi fie de puncte, fie de numere, după cum considerăm mai potrivit.

Notăm cu $\overline{I\!R} = I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$ *dreapta reală încheiată*. Pentru o mulţime $A \subset I\!R$ nemajorată vom folosi şi notaţia $\sup A = \infty$, iar pentru o mulţime $A \subset I\!R$ neminorată vom folosi notaţia $\inf A = -\infty$. Notăm cu $I\!R_+ = \{x \in I\!R,\, x \geq 0\}$ – mulţimea numerelor reale nenegative, $I\!R_- = \{x \in I\!R,\, x \leq 0\}$ – mulţimea numerelor reale nepozitive, $I\!R_+^* = \{x \in I\!R,\, x > 0\}$ - mulţimea numerelor reale pozitive, $I\!R_-^* = \{x \in I\!R,\, x < 0\}$ - mulţimea numerelor reale negative, $I\!N^* = I\!N \setminus \{0\}$, $C = \{z \mid z = x + iy,\ x,\, y \in I\!R,\ i = \sqrt{-1}\}$ - mulţimea numerelor complexe, ($I\!R \subset C$).

Fie $x_0 \in I\!R$. Un interval deschis de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se numeşte *interval deschis centrat* în x_0. O mulţime $V \subset I\!R$ se numeşte *vecinătate* a punctului $x_0 \in I\!R$ dacă ea conţine un interval deschis centrat în x_0, adică dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.

Numim *vecinătate* a punctului $+\infty$ orice mulţime $V \subset \overline{I\!R}$ care conţine un interval de forma $(a, +\infty]$, unde $a \in I\!R$. Numim *vecinătate* a punctului $-\infty$ orice mulţime $U \subset \overline{I\!R}$ care conţine un interval de forma $[-\infty, a)$, unde $a \in I\!R$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie X o mulţime şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulţimi din X (I o familie de indici). Să se arate că:

a) $C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(CA_i)$;

b) $C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(CA_i)$,

(relaţiile lui De Morgan).

Rezolvare. a) Vom demonstra egalitatea de mulţimi de mai sus prin dubla incluziune: $C(\bigcup_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I}(CA_i)$ şi $C(\bigcup_{i\in I} A_i) \supset \bigcap_{i\in I}(CA_i)$.

Fie $x \in C(\bigcup_{i\in I} A_i) \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin A_i, \forall\, i \in I \iff x \in CA_i, \forall\, i \in I \iff x \in \bigcap_{i\in I}(CA_i)$, adică $C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(CA_i)$.

b) Asemănător, avem:

$x \in C(\bigcap_{i\in I} A_i) \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff (\exists)\, i_0 \in I$ a.î. $x \notin A_{i_0} \iff (\exists)\, i_0 \in I$ a.î. $x \in CA_{i_0} \iff x \in \bigcup_{i\in I}(CA_i)$, adică $C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(CA_i)$.

2. Fie $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_j)_{j\in J}$ două familii de mulţimi şi A o mulţime (I, J familii de indici). Să se arate că:

a) $A \bigcap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A \bigcap A_i)$;

b) $A \bigcup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A \bigcup A_i)$;

c) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \bigcap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcap B_j)$;

d) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \bigcup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcup B_j)$.

Rezolvare. a) Să considerăm un element $x \in A \bigcap (\bigcup_{i\in I} A_i) \iff (x \in A$ şi $x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \iff \{x \in A$ şi $(\exists i_0 \in I$ a.î. $x \in A_{i_0})\} \iff \{\exists\, i_0 \in I$ a.î. $x \in A \bigcap A_{i_0}\} \iff x \in \bigcup_{i\in I}(A \bigcap A_i)$, de unde rezultă că $A \bigcap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A \bigcap A_i)$.

b) Fie $x \in A \bigcup (\bigcap_{i\in I} A_i) \iff (x \in A$ sau $x \in \bigcap_{i\in I} A_i) \iff \{x \in A$ sau $(x \in A_i, \forall\, i \in I)\} \iff \{(x \in A$ sau $x \in A_i), \forall\, i \in I\} \iff x \in \bigcap_{i\in I}(A \bigcup A_i)$.

c) Fie $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \bigcap (\bigcup_{j\in J} B_j) \iff (x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ şi $x \in \bigcup_{j\in J} B_j) \iff \{(\exists\, i_0 \in I$ a.î. $x \in A_{i_0})$ şi $(\exists\, j_0 \in J$ a.î. $x \in B_{j_0})\} \iff (\exists\, (i_0, j_0) \in I \times J$ a.î. $x \in A_{i_0} \bigcap B_{j_0}) \iff x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcap B_j)$.

d) Fie $x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \bigcup (\bigcap_{j\in J} B_j) \Longleftrightarrow (x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ sau $x \in \bigcap_{j\in J} B_j) \Longleftrightarrow \{(x \in A_i,$ $\forall\, i \in I)$ sau $(x \in B_j, \forall\, j \in J)\} \Longleftrightarrow \{(x \in A_i$ sau $x \in B_j), \forall\,(i,j) \in I \times J\} \Longleftrightarrow$ $x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcup B_j)$.

3. Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci au loc relaţiile:

a) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

unde $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi din X (I - o familie arbitrară de indici).

Rezolvare. a) Fie $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i) \Longleftrightarrow (\exists\, x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ a.î. $y = f(x)) \Longleftrightarrow (\exists\, i_0 \in I$ şi $\exists\, x \in A_{i_0}$ a.î. $y = f(x)) \Longleftrightarrow (\exists\, i_0 \in I$ a.î. $y \in f(A_{i_0})) \Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, de unde rezultă relaţia a).

b) Fie $y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) \Longleftrightarrow (\exists\, x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ a.î. $y = f(x)) \Longleftrightarrow \{\exists\, x \in A_i, \forall\, i \in I$ a.î. $y = f(x)\} \Longrightarrow (y \in f(A_i), \forall\, i \in I) \Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

4. Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci au loc relaţiile:

a) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \ \forall\, A, B \subset Y$;

b) $f^{-1}(C_Y B) = C_X f^{-1}(B), \ \forall\, B \subset Y$.

Rezolvare. a) Să considerăm două mulţimi arbitrare A şi $B \subset Y$, momentan fixate. Fie $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Longleftrightarrow (f(x) \in A$ şi $f(x) \notin B) \Longleftrightarrow \{x \in$ $\in f^{-1}(A)$ şi $x \notin f^{-1}(B)\} \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, deci $f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$.

b) Să considerăm o mulţime arbitrară $B \subset Y$, momentan fixată. Fie $x \in f^{-1}(C_Y B)$ $\Longleftrightarrow f(x) \in C_Y B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in C_X f^{-1}(B)$, adică $f^{-1}(C_Y B) = C_X f^{-1}(B)$.

5. Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Longleftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ surjectivă a.î. $g \circ f = 1_X$.

b) f este surjectivă $\Longleftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ injectivă a.î. $f \circ g = 1_Y$.

Rezolvare. a) Fie f funcţie injectivă. Definim funcţia $g_0 : f(X) \to X$ prin $g_0(f(x)) = x, \forall\, x \in X$. Prelungim pe g_0 pe mulţimea Y punând de exemplu $g : Y \to X$,

$$g(y) = \begin{cases} g_0(y), & \text{dacă } y \in f(X); \\ x_0, & \text{dacă } y \in Y \setminus f(X), \end{cases}$$

unde x_0 este un element din mulţimea $X (\neq \emptyset)$. Atunci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$, $\forall\, x \in X$, adică $g \circ f = 1_X$ şi evident $g(Y) = X$, deci g este surjectivă.

Reciproc, fie $g : Y \to X$ aplicaţia surjectivă cu proprietatea că $g \circ f = 1_X$ şi fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2,$$

de unde rezultă că f este injectivă.

b) Fie f aplicaţie surjectivă, adică $\forall\, y \in Y$ mulţimea $A_y = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ şi fie $x_y \in A_y$ un element fixat. Definim funcţia $g(y) = x_y$, $\forall\, y \in Y$. Aplicaţia g astfel construită este injectivă, deoarece $A_y \bigcap A_{y'} = \emptyset$ pentru $y \neq y^{'}$ şi evident, avem: $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$, $\forall\, y \in Y$.

Reciproc, fie $g : Y \to X$ injectivă a.î. $f \circ g = 1_Y$ şi $y \in Y$ un element arbitrar, momentan fixat. Atunci $\exists\, x = g(y) \in X$ a.î. $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$, de unde rezultă că f este surjectivă.

6. Fie $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ două funcţii. Să se arate că:

a) Dacă f şi g sunt injective (surjective) atunci $g \circ f$ este injectivă (respectiv surjectivă).

b) Dacă f şi g sunt bijective atunci $g \circ f$ este bijectivă şi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Rezolvare. a) Fie f şi g funcţii injective. Vom arăta că şi funcţia $g \circ f : X \to Z$ este injectivă. Să considerăm x_1, $x_2 \in X$ a.î. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Din injectivitatea funcţiei g rezultă că $f(x_1) = f(x_2)$, iar din injectivitatea funcţiei f rezultă că $x_1 = x_2$. Deci $g \circ f$ este o funcţie injectivă.

Presupunem acum că f şi g sunt funcţii surjective. Pentru a demonstra că şi compunerea $g \circ f$ este surjectivă, vom arăta că $\forall\, z \in Z\ \exists\, x \in X$ a.î. $(g \circ f)(x) = z$. Fie $z \in Z$. Din surjectivitatea funcţiei g rezultă că $\exists\, y \in Y$ a.î. $g(y) = z$. Pentru elementul $y \in Y$ din surjectivitatea funcţiei f deducem că $\exists\, x \in X$ a.î. $f(x) = y$. Deci $g(f(x)) = z$ sau $(g \circ f)(x) = z$. Deci $g \circ f$ este o funcţie surjectivă.

b) Conform punctului a), dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este şi ea o funcţie bijectivă. Deoarece:

$$((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))(z) = (g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(z) = (g \circ g^{-1})(z) = z,\ \forall\, z \in Z$$

şi

$$((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall\, x \in X,$$

rezultă că $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

7. Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Longleftrightarrow \forall\, A_1, A_2 \subset X$ cu $f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2$.

b) f este surjectivă $\Longleftrightarrow \forall\, B_1, B_2 \subset Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Rightarrow B_1 \subset B_2$.

Rezolvare. a) Fie $f : X \to Y$ funcţie injectivă şi $A_1, A_2 \subset X$ arbitrare, momentan fixate cu $f(A_1) \subset f(A_2)$. Să considerăm $x_1 \in A_1$; rezultă că $f(x_1) \in f(A_1) \subset f(A_2)$, deci $f(x_1) \in f(A_2)$. Deducem că $\exists\, x_2 \in A_2$ a.î.$f(x_1) = f(x_2)$. Deoarece f este injectivă rezultă că $x_1 = x_2 \in A_2$, deci $A_1 \subset A_2$.

Reciproc, să presupunem că $\forall A_1, A_2 \subset X$ cu $f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2$. Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Luând $A_1 = \{x_1\}$ şi $A_2 = \{x_2\}$ avem că $f(A_1) = f(A_2)$, deci $A_1 = A_2$, adică $x_1 = x_2$. Rezultă că f este injectivă.

b) Fie $f : X \to Y$ funcţie surjectivă şi fie $B_1, B_2 \subset Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Atunci $\forall y_1 \in B_1\ \exists x_1 \in X$ a.î. $f(x_1) = y_1$ (f surjectivă); deci $x_1 \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow x_1 \in$ $\in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow f(x_1) \in B_2$, deci $y_1 \in B_2$, de unde rezultă că $B_1 \subset B_2$.

Reciproc, să presupunem că $\forall B_1, B_2 \subset Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Rightarrow B_1 \subset B_2$ şi fie $y \in Y$ arbitrar, momentan fixat. Presupunem prin reducere la absurd că $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Atunci $\forall y_1 \in f(X)$ rezultă că $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(\{y_1\})$, deci $\{y\} \subset \{y_1\} \Leftrightarrow y = y_1$. Rezultă că $y \in f(X)$, ceea ce este absurd, deoarece am presupus că $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Deducem astfel că $\exists x \in X$ a.î. $f(x) = y$, adică f este surjectivă.

8. Să se demonstreze următoarele consecinţe ale definiţiei axiomatice a mulţimii numerelor reale:

a) $\forall x, y \in I\!R$, $x \le y \Leftrightarrow -y \le -x$;

b) $\forall x \in I\!R$, $0 \le x \Leftrightarrow -x \le 0$;

c) $\forall x, y, x_1, y_1 \in I\!R$, $x \le x_1$ şi $y \le y_1 \Rightarrow x + y \le x_1 + y_1$;

d) $\forall x, y \in I\!R$, $x \le 0$ şi $y \le 0 \Rightarrow x \cdot y \ge 0$;

(prin definiţie $z \ge 0$ dacă $0 \le z$).

e) $\forall x, y, z \in I\!R$, $x \le y$ şi $z \le 0 \Rightarrow x \cdot z \ge y \cdot z$.

Rezolvare. a) Fie $x, y \in I\!R$ cu $x \le y$. Adunând în ambii membri $(-x)$ avem: $x + (-x) \le y + (-x) \Rightarrow 0 \le y - x$. Adunând apoi în cei doi membri $(-y)$ obţinem $-y \le y - x + (-y) \Rightarrow -y \le -x$. În mod asemănător se arată şi cealaltă implicaţie: $-y \le -x \Rightarrow x \le y$.

b) Fie $x \in I\!R$, $0 \le x$. Adunând elementul $(-x)$ în ambii membri ai inegalităţii de mai sus, avem: $-x \le x + (-x) \Rightarrow -x \le 0$. Asemănător se demonstrează implicaţia: $-x \le 0 \Rightarrow 0 \le x$.

c) Fie $x, y, x_1, y_1 \in I\!R$ cu $x \le x_1$ şi $y \le y_1$. În prima inegalitate adunăm y, iar în a doua adunăm x_1, obţinând astfel:

$$x + y \le x_1 + y \ \text{ şi } y + x_1 \le y_1 + x_1 \Leftrightarrow x_1 + y \le x_1 + y_1.$$

Din tranzitivitatea relaţiei de ordine ”$\le$” avem $x + y \le x_1 + y_1$.

d) Fie $x, y \in I\!R$ cu $x \le 0$ şi $y \le 0$. Conform punctului b) rezultă că $0 \le -y$. Înmulţind inegalitatea $x \le 0$ cu elementul $(-y)$ avem:

$$x \cdot (-y) \le 0 \cdot (-y) \Longleftrightarrow -(x \cdot y) \le 0 \overset{\text{b)}}{\Longleftrightarrow} 0 \le x \cdot y \Longleftrightarrow x \cdot y \ge 0$$

(în inegalităţile de mai sus am folosit relaţiile $0 \cdot x = 0, \forall x \in I\!R$ şi $(-1) \cdot x = -x$, $\forall x \in I\!R$, care rezultă imediat din axiomele mulţimii $I\!R$, vezi Problema 28).

e) Fie $x, y, z \in I\!R$ cu $x \le y$ şi $z \le 0$. Atunci $0 \le -z$ şi înmulţind inegalitatea $x \le y$ cu $(-z)$ obţinem:

$$x \cdot (-z) \le y \cdot (-z) \Longleftrightarrow -(x \cdot z) \le -(y \cdot z) \overset{\text{a)}}{\Longleftrightarrow} y \cdot z \le x \cdot z \Longleftrightarrow x \cdot z \ge y \cdot z.$$

9. Să se demonstreze că orice mulţime $A \neq \emptyset$, $A \subset I\!R$ minorată are margine inferioară.

Rezolvare. Mulţimea A fiind minorată, rezultă că $(-A)$ este majorată, deci există, conform axiomei (A15) $\sup(-A)$ cu proprietăţile:

$$\begin{cases} a) \ -a \le \sup(-A), \ \forall a \in A; \\ b) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists (-a_\varepsilon) \in (-A) \text{ a.î. } (-a_\varepsilon) > \sup(-A) - \varepsilon. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} a') \ a \ge -\sup(-A), \ \forall a \in A; \\ b') \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A \text{ a.î. } a_\varepsilon < -\sup(-A) + \varepsilon. \end{cases}$$

Folosind teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi, din $a')$ şi $b')$ rezultă că $\exists \inf A = -\sup(-A)$, deci A are margine inferioară.

Din cele de mai sus deducem că $\sup(-A) = -\inf A$. Analog se demonstrează că $\inf(-A) = -\sup A$.

10. Fie $A \subset I\!R$ o mulţime mărginită, nevidă. Să se demonstreze unicitatea elementelor $\sup A$ şi $\inf A$.

Rezolvare. Mulţimea A fiind mărginită, rezultă că $\exists \sup A$ şi $\inf A$. Să presupunem că $(\exists) M_1, M_2 \in I\!R$, $M_1 = \sup A$ şi $M_2 = \sup A$. Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare a mulţimii A, avem:

$$\begin{cases} a) \ x \le M_1, \ \forall x \in A; \\ b) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon^1 \in A \text{ a.î. } x_\varepsilon^1 > M_1 - \varepsilon. \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} a') \ x \le M_2, \ \forall x \in A; \\ b') \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon^2 \in A \text{ a.î. } x_\varepsilon^2 > M_2 - \varepsilon. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Din relaţiile $b)$ şi $a')$ avem:

$$M_1 - \varepsilon < x_\varepsilon^1 \le M_2 \Longrightarrow M_1 - \varepsilon < M_2.$$

Deoarece ε este arbitrar, din inegalitatea de mai sus deducem $M_1 \le M_2$.

Să considerăm din nou $\varepsilon > 0$. Din relaţiile $a)$ şi $b')$ deducem:

$$M_2 - \varepsilon < x_\varepsilon^2 \le M_1 \Longrightarrow M_2 - \varepsilon < M_1.$$

Deoarece ε este arbitrar, rezultă $M_2 \leq M_1$, inegalitate care împreună cu $M_1 \leq M_2$ ne conduce la concluzia că $M_1 = M_2$, deci $\sup A$ este unic.

Din relaţia $\inf A = -\sup(-A)$ (vezi Problema 9), rezultă că şi $\inf A$ este unic.

11. Fie $A, B \in \mathbb{R}$ două mulţimi mărginite, nevide. Dacă $x \leq y$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B$ atunci:

$$\inf A \leq \sup A \leq \inf B \leq \sup B.$$

Rezolvare. Deoarece $\inf A \leq \sup A$ şi $\inf B \leq \sup B$ sunt evidente, pentru a rezulta şirul de inegalităţi de mai sus este suficient să demonstrăm că $\sup A \leq \inf B$. Din teoremele de caracterizare pentru $\sup A$ şi $\inf B$ avem:

$$\begin{cases} x \leq \sup A, \ \forall\, x \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in A \text{ a.î. } x_\varepsilon > \sup A - \varepsilon \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} y \geq \inf B, \ \forall\, y \in B; \\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, y_\varepsilon \in B \text{ a.î. } y_\varepsilon < \inf B + \varepsilon. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Din inegalităţile de mai sus, obţinem:

$$\sup A < x_\varepsilon + \varepsilon < y_\varepsilon + \varepsilon < \inf B + 2\varepsilon,$$

deci $\sup A < \inf B + 2\varepsilon$. Deoarece ε este arbitrar, rezultă că $\sup A \leq \inf B$.

12. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulţimi nevide. Să se demonstreze proprietăţile:

a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

c) $\mathit{diam}\,(A) \overset{def}{=} \sup_{x,y \in A} |x - y| = \sup A - \inf A \leq 2 \sup |A|$,

unde $A + B = \{a|\ a \in A,\ b \in B\}$, iar $|A| = \{|a| \mid a \in A\}$.

Rezolvare. a) Din inegalităţile $a \leq \sup A$, $\forall\, a \in A$ şi $b \leq \sup B$, $\forall\, b \in B$ rezultă că $a + b \leq \sup A + \sup B$, $\forall\, a \in A$ şi $\forall\, b \in B$. Deducem conform Problemei 11 că $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Pentru inegalitatea opusă, dacă $\sup(A + B) = \infty$ rezultă imediat că

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) = \infty.$$

Să presupunem acum că $\sup(A+B) < \infty$. Rezultă atunci că $\sup A < \infty$ şi $\sup B < \infty$. Într-adevăr, din inegalitatea $a + b_0 \leq \sup(A + B)$, cu $b_0 \in B$ element fixat şi a element arbitrar din A, rezultă că $a \leq \sup(A+B) - b_0$, $\forall\, a \in A$. Deci $\sup A \leq \sup(A+B) - b_0 <$ $< \infty$. În mod asemănător se arată că $\sup B < \infty$.

Conform teoremei de caracterizare pentru $\sup A$ şi $\sup B$ obţinem:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, a_\varepsilon \in A \text{ a.î. } a_\varepsilon > \sup A - \varepsilon$$

şi

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists b_\varepsilon \in B \text{ a.î. } b_\varepsilon > \sup B - \varepsilon.$$

Pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat deducem:

$$\sup(A+B) \geq a_\varepsilon + b_\varepsilon > \sup A + \sup B - 2\varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, din inegalităţile de mai sus, obţinem că

$$\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B,$$

care împreună cu cealaltă inegalitate ne conduce la egalitatea a).

b) Demonstraţia egalităţii b) se poate face în mod asemănător cu cea de la punctul a) sau putem scrie direct:

$\inf(A+B) = -\sup(-A-B) = -[\sup(-A)+\sup(-B)] = -\sup(-A)-\sup(-B) = = \inf A + \inf B$.

c) Avem:

$diam\,(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y| = \sup_{x,y\in A} (x-y) = \sup_{x\in A} x + \sup_{y\in A} (-y) = \sup_{x\in A} x - - \inf_{y\in A} y = \sup A - \inf A = \sup A + \sup(-A) \leq \sup|A| + \sup|A| = 2\sup|A|$.

13. Să se demonstreze că $(I\!R, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ total ordonat arhimedian, adică satisface condiţia:

$$\forall x \in I\!R,\; \forall y \in I\!R_+^* \; \exists n \in I\!N \text{ a.î. } ny > x.$$

Rezolvare. Demonstrăm proprietatea de mai sus prin reducere la absurd. Presupunem că $\exists x \in I\!R$, $\exists y \in I\!R_+^*$ a.î. $\forall n \in I\!N$ să avem $ny \leq x$, deci $n \leq x/y$, $\forall n \in I\!N$. Rezultă astfel că mulţimea $I\!N$ a numerelor naturale este majorată, deci $\exists z = \sup I\!N$. Deoarece $z - 1 < z$, din teorema de caracterizare a $\sup I\!N$, luând $\varepsilon = 1$ rezultă că $\exists m \in I\!N$ a.î. $m > z-1$, adică $z < m+1$. Am obţinut ceva absurd, deoarece $m+1 \in I\!N$ şi $z = \sup I\!N$. Deducem astfel că $\forall x \in I\!R$, $\forall y \in I\!R_+^*$ $\exists n \in I\!N$ a.î. $ny > x$.

Rezultatul un pic modificat se găseşte în literatura de specialitate sub denumirea de **lema lui Eudoxus-Arhimede**:

$$\forall x \in I\!R \; \exists n \in I\!N \text{ a.î. } n > x.$$

14. Să se demonstreze că mulţimea Q a numerelor raţionale este densă (în sensul ordinii) în $I\!R$.

Rezolvare. Trebuie să demonstrăm că $\forall a, b \in I\!R$ cu $a < b$ există $r \in Q$ a.î. $a < r < b$. Fie $a, b \in I\!R$ cu $a < b$. Pentru $a \in I\!R$, luând $x = -a$ şi $y = 1$ în Problema 13 rezultă că $\exists p \in I\!N$ a.î. $p > -a$, deci $a + p > 0$. Notăm cu $a' = a + p$ şi $b' = b + p$; avem $a' < b'$. Pentru $y = b' - a' > 0$ şi $x = 1$, conform Problemei 13 $\exists n \in I\!N^*$ a.î. $1 < n(b' - a')$ sau $na' + 1 < nb'$. Luând $x = na'$ şi $y = 1$ în aceeaşi Problemă 13 obţinem existenţa lui $\widetilde{m} \in I\!N$ a.î. $\widetilde{m} > na'$. Fie m cel mai mic număr natural a.î. $m > na'$.

Deci $m-1 \leq na'$. Avem:

$$na' < m \leq na'+1 < nb' \Longrightarrow na' < m < nb' \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a' < m/n < b' \Longleftrightarrow a < m/n - p < b.$$

Deci pentru $a, b \in I\!R,\ a < b$ am găsit numărul $r = m/n - p \in Q$ a.î. $a < r < b$.

15. Să se arate că orice număr real este egal cu marginea superioară a mulţimii numerelor raţionale mai mici decât el, adică:

$$\forall\, x \in I\!R,\ x = \sup\{r \in Q \,|\, r < x\}.$$

Rezolvare. Fie $x \in I\!R$ fixat şi $A = \{r \in Q \,|\, r < x\}$. Pentru elementul $(-x) \in I\!R$, conform Problemei 13, $\exists\, n_0 \in I\!N$ a.î. $n_0 > -x \Leftrightarrow -n_0 < x$. Deoarece $n_0 \in I\!N$ rezultă că $(-n_0) \in Z \subset Q$, deci $(-n_0) \in A$, adică $A \neq \emptyset$. Mulţimea A fiind majorată (x este un majorant), aplicând axioma (A15) rezultă că $\exists\, \bar{g} \in I\!R,\ \bar{g} = \sup A$ $(\bar{g} \leq x)$. Presupunem prin reducere la absurd că $\bar{g} \neq x$, adică $\bar{g} < x \Leftrightarrow x - \bar{g} > 0$. Conform Problemei 14 există $s \in Q$ a.î. $0 < s < x - \bar{g}$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, pentru $\varepsilon = s$, rezultă existenţa unui element $r_s \in A$ a.î. $r_s > \bar{g} - s \Leftrightarrow r_s + s > \bar{g}$.

Din relaţia $r_s + s < \bar{g} + (x - \bar{g}) = x$ şi $r_s + s \in Q$ rezultă că $r_s + s \in A$, deci $r_s + s \leq \bar{g}$, inegalitate opusă celei obţinută mai sus. Deci presupunerea făcută este falsă, adică $\bar{g} = x$ sau $x = \sup A$, ceea ce trebuia demonstrat.

16. Să se determine $\inf A,\ \sup A,\ \min A$ şi $\max A$, unde A este:

a) $A = \left\{ \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} \;|\; n \in I\!N^* \right\}$;

b) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{n} \;|\; n \in I\!N^* \right\}$;

c) $A = \left\{ \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \;|\; n \in I\!N^* \right\}$.

Rezolvare. a) Notăm cu $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)},\ n \geq 1$. Avem:

$$a_n = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},\ \ n \geq 1.$$

Deoarece şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător $(a_n < a_{n+1},\ \forall\, n \geq 1)$ rezultă că

$$\inf A = \min A = a_1 = 1/2, \text{ iar } \sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Într-adevăr, pentru ultima afirmaţie verificăm cele două condiţii din teorema de caracterizare a marginii superioare:

1° $a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1,\ \forall\, n \geq 1$;

2° $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in I\!N^*$ a.î. $a_{n_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$,

unde $n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1, & \text{dacă } 0<\varepsilon\le 1;\\ 1, & \text{dacă } \varepsilon>1, \end{cases}$
(am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x).

Vom arăta în continuare că mulţimea A nu are un element maxim, deci $\nexists \max A$. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists \max A$, deci $\exists\, a_{n_0} = n_0/(n_0+1) = \max A$, $n_0 \in I\!N^*$ cu proprietatea $a_n \le a_{n_0}$, $\forall\, n \in I\!N^*$. Inegalitatea obţinută este falsă, deoarece se verifică imediat că $a_{n_0+1} > a_{n_0}$, $a_{n_0+1} \in A$ (mai mult $a_n > a_{n_0}$, $\forall\, n \ge n_0+1$). Deducem astfel că $\nexists \max A$.

b) Avem: $A = \left\{2\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1}{n};\ n\in I\!N^*\right\} = \left\{\dfrac{3}{2k};\ k\in I\!N^*\right\}\bigcup\left\{-\dfrac{1}{2k+1};\ k\in I\!N\right\}$.
Deoarece şirul $b_k = 3/(2k),\ k\ge 1$ este strict descrescător cu limită 0, iar şirul $c_k = -1/(2k+1),\ k \ge 0$ este strict crescător cu limita 0, rezultă că $\inf A = \min A =$ $= c_0 = -1$, iar $\sup A = \max A = b_1 = 3/2$.

c) Şirul $a_n = \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+n+1}$, $n \in I\!N^*$ este strict crescător, deoarece $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\forall\, n\ge 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Rezultă că $\inf A = \min A = a_1 = 2/3$, iar $\sup A = 2$. Într-adevăr:

1° $a_n < 2$, $\forall\, n \ge 1$;

2° $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in I\!N^*$ a.î. $a_{n_\varepsilon} > 2-\varepsilon$.

Dacă $\varepsilon > 2 \iff 2-\varepsilon < 0$ luăm $n_\varepsilon = 1$. Dacă $\varepsilon \le 2$ vom determina n_ε a.î.
$a_{n_\varepsilon} > 2-\varepsilon \iff \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+n+1} > 2-\varepsilon \iff \varepsilon > \dfrac{3n+1}{n^2+n+1} \iff$
$\varepsilon n^2 + (\varepsilon-3)n + \varepsilon - 1 > 0$. Pentru $\Delta = (\varepsilon-3)^2 - 4\varepsilon(\varepsilon-1) = -3\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 9 < 0 \iff$ $\varepsilon \in \left(\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3}, 2\right]$ atunci $n_\varepsilon = 1$, iar pentru $\Delta \ge 0 \iff \varepsilon \in \left(0, \dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right]$ luăm $n_\varepsilon = \left[\dfrac{3-\varepsilon+\sqrt{-3\varepsilon^2-2\varepsilon+9}}{2\varepsilon}\right]+1$. Obţinem astfel:

$$n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\dfrac{3-\varepsilon+\sqrt{-3\varepsilon^2-2\varepsilon+9}}{2\varepsilon}\right]+1, & \text{dacă } \varepsilon \in \left(0, \dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right];\\ 1, & \text{dacă } \varepsilon \in \left(\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3}, \infty\right). \end{cases}$$

Asemănător punctului a) se arată şi aici că $\nexists \max A$.

17. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz. Fie $a_i, b_i \in I\!R$, $i = \overline{1,n}$ $(n \in I\!N^*)$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2},$$

egalitatea obţinându-se dacă şi numai dacă $\exists\,\lambda,\ \mu \in I\!R$ nu ambele nule a.î. $\lambda|b_i|+$ $+\mu|a_i| = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Rezolvare. Considerăm inegalităţile evidente:

$$b_i^2 t^2 - 2|a_i b_i| t + a_i^2 \geq 0, \ \forall\, t \in I\!R, \ i = \overline{1, n}.$$

Însumând inegalităţile de mai sus, obţinem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) t^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| t + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \geq 0, \ \forall\, t \in I\!R. \tag{1}$$

Această inegalitate, în variabila t, este verificată pentru $\forall\, t \in I\!R$ dacă şi numai dacă discriminantul Δ al ecuaţiei asociate este mai mic sau egal cu zero, adică:

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Dacă discriminantul Δ este egal cu zero, atunci rezultă că ecuaţia asociată inegalităţii (1) are o singură soluţie reală, adică $\exists\, t \in I\!R_+$ a.î. $|b_i| t - |a_i| = 0, \ \forall\, i = \overline{1, n}$. Reciproc, dacă $\exists\, t \in I\!R_+$ a.î. $|b_i| t - |a_i| = 0, \ \forall\, i = \overline{1, n}$ se verifică imediat că $\Delta = 0$, adică obţinem egalitate în inegalitatea lui Cauchy.

Considerând şi inegalităţile $a_i^2 t^2 - 2|a_i b_i| t + b_i^2 \geq 0, \ \forall\, t \in I\!R, \ i = \overline{1, n}$ deducem că egalitatea în inegalitatea lui Cauchy se obţine dacă şi numai dacă $\exists\, \lambda, \mu \in I\!R$ nu ambele nule a.î. $\lambda |b_i| + \mu |a_i| = 0, \ \forall\, i = \overline{1, n}$.

18. Inegalitatea lui Bernoulli. Fie $a_i > -1, \ i = \overline{1, n}$ $(n \in I\!N^*)$ toate numerele având acelaşi semn. Să se arate că:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Rezolvare. Vom demonstra inegalitatea de mai sus prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ avem $(1 + a_1) \geq 1 + a_1$, inegalitate evidentă. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n \in I\!N$, adică:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ \text{ cu } a_i > -1, \ i = \overline{1, n}, \ \text{ toate cu acelaşi semn}$$

şi o vom demonstra pentru $(n + 1)$ numere. Fie a_i, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i > -1$, cu acelaşi semn. Avem:

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i)(1 + a_{n+1}) \geq \left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + a_{n+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_{n+1}a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i,$$

deoarece $a_{n+1}a_i \geq 0, \ \forall\, i = \overline{1, n}$.

Deducem astfel că inegalitatea este adevărată şi pentru $(n+1)$, de unde rezultă conform metodei inducţiei matematice că inegalitatea din enunţ are loc pentru $\forall\, n \geq 1$.

Dacă $a_i = a, \ \forall\, i = \overline{1, n}$ obţinem inegalitatea cunoscută:

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \ \text{pentru } a > -1, \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

19. Inegalitatea mediilor. Fie $a_i \in I\!R_+^*, \ i = \overline{1, n}$. Să se arate că:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \tag{2}$$

egalităţile obţinându-se dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Rezolvare. Vom demonstra mai întâi următoarea lemă:

Lemă. Fie $a_i \in I\!R_+, \ i = \overline{1, n}$ $(n \in I\!N^*)$ cu $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. Atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i = n \iff a_i = 1, \ \forall\, i = \overline{1, n}$.

Demonstraţia lemei o vom face prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ lema este evidentă. Presupunem afirmaţia din lemă adevărată pentru $n \in I\!N^*$ şi o vom demonstra pentru $n+1$. Fie deci $a_i \in I\!R_+, \ i = \overline{1, n+1}$ cu $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Printre aceste numere există unele mai mici sau egale cu 1 şi altele mai mari sau egale cu 1. Renumerotându-le putem presupune că $a_1 \leq 1$ şi $a_2 \geq 1$. Atunci:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 0 \iff a_1 a_2 + 1 \leq a_1 + a_2.$$

Deoarece $(a_1 a_2) a_3 \cdots a_n = 1$, aplicând lema pentru n numere, deducem că:

$$a_1 a_2 + a_3 + \cdots a_{n+1} \geq n \text{ cu egalitate pentru } a_1 a_2 = a_3 = \cdots a_{n+1} = 1.$$

Rezultă atunci:

$$(a_1 + a_2) + a_3 + \cdots a_{n+1} \geq a_1 a_2 + 1 + a_3 + \cdots a_{n+1} \geq n + 1,$$

adică $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geq n + 1$, egalitatea obţinându-se pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1$.

Conform metodei inducţiei matematice deducem că lema are loc, $\forall\, n \in I\!N^*$.

Demonstraţia inegalităţii mediilor (continuare). Vom aplica lema de mai sus pentru numerele $x_i = a_i \Big/ \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$, $i = \overline{1,n}$. Avem $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ şi $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$; rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge n \iff \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}} \ge n \iff \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ ,$$

egalitatea obţinându-se dacă şi numai dacă $x_i = 1$, $i = \overline{1,n}$ sau echivalent $a_1 = a_2 = = \cdots = a_n$.

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta din şirul de inegalităţi (2), vom aplica prima inegalitate demonstrată mai sus pentru numerele $1/a_i$, $i = \overline{1,n}$. Obţinem:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \iff \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \ge \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\ ,$$

egalitatea obţinându-se dacă şi numai dacă $1/a_1 = 1/a_2 = \cdots = 1/a_n \iff a_1 = a_2 = = \cdots = a_n$.

Inegalităţile (2) se pot exprima astfel:

$$m_{aritm} \ge m_{geom} \ge m_{arm}\ ,$$

unde $m_{aritm} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \Big/ n$ este media aritmetică, $m_{geom} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$ este media geometrică, iar $m_{arm} = n \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (1/a_i)\right)$ este media armonică a numerelor a_i, $i = \overline{1,n}$.

20. Inegalitatea lui Cebîşev. Fie $a_i, b_i \in I\!R$, $i = \overline{1,n}$ cu proprietatea $a_i \le a_j \ \Leftrightarrow\ b_i \le b_j$, pentru orice $i, j = \overline{1,n}$ pentru care are loc una din inegalităţi. Atunci $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in I\!R_+^*$ avem:

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \le$$
$$\le \frac{\lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \cdots + \lambda_n a_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}\ ,$$

egalitatea obţinându-se dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Rezolvare. Pornim de la inegalitatea evidentă:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0\,,$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a_i = a_j$, $\forall\, i, j = \overline{1,n}$ sau $b_i = b_j$, $\forall\, i, j = \overline{1,n}$.

Rescriind într-un mod echivalent inegalitatea de mai sus, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(a_ib_i - a_ib_j - a_jb_i + a_jb_j) \geq 0 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(a_ib_j + a_jb_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(a_ib_i + a_jb_j)\,.$$

Pe de altă parte, avem:

$$s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(a_ib_j + a_jb_i) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_jb_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_ja_j\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i\right)\,,$$

iar

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(a_ib_i + a_jb_j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_ja_jb_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\,.$$

Obţinem astfel inegalitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i\right)\,.$$

Împărţind inegalitatea obţinută cu $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2$, deducem:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_ib_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\,,$$

adică tocmai inegalitatea din enunţul problemei, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, obţinem inegalitatea:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\,,$$

în ipoteza $a_i \leq a_j \;\Leftrightarrow\; b_i \leq b_j$.

21. Fie $f : I \to I\!R$, unde I este un interval din $I\!R$. Prin definiţie f este o funcţie convexă dacă $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $\forall\, x, y \in I$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$. Să se arate că f este convexă dacă şi numai dacă $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in$ $\in I\!R_+$ cu $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ are loc inegalitatea:

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n) \leq \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2) + \cdots + \lambda_nf(x_n).$$

Rezolvare. Presupunem mai întâi că f este o funcţie convexă. Vom demonstra proprietatea de mai sus prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ proprietatea este evidentă. Să presupunem acum proprietatea din enunţul problemei adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi o vom demonstra pentru $n+1$. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Atunci, dacă $\lambda_{n+1} \neq 1$, obţinem:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\left((1-\lambda_{n+1})\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq$$

$$\stackrel{def}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \stackrel{ip.ind.}{\leq}$$

$$\leq (1-\lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} f(x_2) + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right] + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) .$$

Dacă $\lambda_{n+1} = 1$, din egalitatea $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ cu $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n+1}$ rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, iar inegalitatea

$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

este evidentă.

Deci proprietatea din enunţ fiind adevărată pentru $(n+1)$, rezultă folosind principiul inducţiei matematice, că proprietatea este adevărată pentru $\forall\, n \geq 1$.

Reciproc, presupunând că $f : I \to \mathbb{R}$ satisface proprietatea din enunţ pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, luând $n = 2$, obţinem:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in I,\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ cu } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 ,$$

adică tocmai definiţia convexităţii funcţiei f.

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1/n$ obţinem **inegalitatea lui Jensen**:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\Big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\Big) ,$$

$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, f fiind o funcţie convexă.

22. Inegalitatea lui Hölder. Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$, iar $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} .$$

Rezolvare. Să considerăm funcţia $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x > 0$, cu $\alpha \in (0,1)$ parametru. Deoarece $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ este pozitivă pentru $0 < x < 1$ şi negativă pentru $x > 1$ rezultă că $x = 1$ este punct de maxim pentru f, deci $f(x) \leq f(1) =$

$= 1-\alpha,\ \forall\, x>0$ sau $x^\alpha - \alpha x \le 1-\alpha,\ \forall\, x>0$. Pentru $U>0,\ V>0$, punând $x=U/V$ şi $\alpha = 1/p$ în ultima inegalitate obţinută, rezultă: $\left(\frac{U}{V}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\cdot\frac{U}{V} \le \frac{1}{q} \iff$

$$(3) \qquad U^{1/p}\cdot V^{1/q} \le \frac{U}{p} + \frac{V}{q}\,.$$

În continuare să considerăm :

$$U = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} \quad \text{şi} \quad V = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\,,$$

pentru $\sum\limits_{i=1}^n a_i^p \ne 0,\ \sum\limits_{i=1}^n b_i^q \ne 0$, (dacă $\sum\limits_{i=1}^n a_i^p = 0 \Leftrightarrow a_i = 0,\ \forall\, i=\overline{1,n}$ sau $\sum\limits_{i=1}^n b_i^q = 0 \Leftrightarrow b_i = 0,\ \forall\, i = \overline{1,n}$, inegalitatea din enunţ este evidentă). Atunci inegalitatea (3) devine:

$$\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}}\cdot\frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\,,\ i=\overline{1,n}.$$

Adunând inegalităţile de mai sus, obţinem:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \iff$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

23. Inegalitatea lui Minkowski. Fie $a_i, b_i \in I\!R_+,\ i=\overline{1,n}$ şi $p\in I\!R,\ p\ge 1$. Atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$

Rezolvare. Pentru $p=1$ inegalitatea este evidentă. Pentru $p>1$, avem:

$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{q-1} \le$$

$$\overset{H\ddot{o}lder}{\le} \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right]^{1/q}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right],\ \text{unde } q=\frac{p}{p-1},\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Rezultă astfel inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \le \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1/q}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\right].$$

Împărţind această inegalitate cu $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1/q}\neq 0$ (dacă $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=0$ atunci inegalitatea din enunţ este verificată), obţinem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}.$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

24. Fie $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ două familii de mulţimi şi A o mulţime (I, J familii de indici). Să se arate că:

a) $(\bigcup_{i\in I}A_i)\times(\bigcup_{j\in J}B_j)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$;

b) $(\bigcap_{i\in I}A_i)\times(\bigcap_{j\in J}B_j)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$;

c) Dacă $I=J$ avem $(\bigcap_{i\in I}A_i)\times(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A_i\times B_i)$.

25. Fie $f:X\to Y$ o funcţie. Să se arate că:

a) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$;

b) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$,

unde $(B_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi din Y (I este o familie de indici).

26. Fie $f:X\to Y$ o funcţie. Să se arate că:

a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$, $\forall\, A,B\subset X$;

b) $C_Y f(A)\subset f(C_X A)$, $\forall\, A\subset X$ dacă $f(X)=Y$.

27. Fie $f:X\to Y$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Longleftrightarrow f^{-1}(f(A))=A,\ \forall\, A\subset X \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(CA)\subset C(f(A)),\ \forall\, A\subset X$;

b) f este surjectivă $\Longleftrightarrow f^{-1}(B)\neq\emptyset,\ \forall\, B\subset Y\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(CA)\supset C(f(A)),\ \forall\, A\subset X$.

c) f este bijectivă $\Longleftrightarrow f(CA)=Cf(A),\ \forall\, A\subset X$.

28. Să se demonstreze următoarele consecinţe ale definiţiei axiomatice a mulţimii numerelor reale:

a) $0 \cdot x = 0,\ \forall\, x \in I\!R$;

b) $(-1) \cdot x = -x,\ \forall\, x \in I\!R$;

c) $\forall\, x, y \in I\!R$ cu $x \geq 0$ şi $y \leq 0 \Longrightarrow x \cdot y \leq 0$;

d) $\forall\, x, y, x_1, y_1 \in I\!R_+,\ x \leq y$ şi $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow x \cdot x_1 \leq y \cdot y_1$;

e) $\forall\, x \in I\!R,\ x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$;

f) $\forall\, x \in I\!R,\ x > 0 \Longleftrightarrow x^{-1} > 0$;

g) $\forall\, x \in I\!R,\ x < 0 \Longleftrightarrow x^{-1} < 0$;

h) $\forall\, x \in I\!R,\ 0 < x < 1 \Longleftrightarrow x^{-1} > 1$.

29. Fie $A, B \subset I\!R,\ A \subset B$. Dacă există $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ şi $\sup B$ să se arate că:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

30. Fie $A, B \subset I\!R$. Să se demonstreze proprietăţile:

a) $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A, & \text{dacă } \lambda > 0; \\ \lambda \inf A, & \text{dacă } \lambda < 0. \end{cases}$

b) $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A, & \text{dacă } \lambda > 0; \\ \lambda \sup A, & \text{dacă } \lambda < 0. \end{cases}$

c) $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$.

d) $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$,

ultimele două relaţii având loc dacă elementele lui A şi B sunt mai mari sau egale cu 0, $(\lambda A = \{\lambda a \,|\, a \in A\},\ A \cdot B = \{a \cdot b \,|\, a \in A,\ b \in B\})$.

31. Să se determine $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ şi $\max A$, unde A este:

a) $A = (1, 2)$; b) $A = (2, 4]$; c) $A = [-1, 1] \cap (2, 3)$;

d) $A = \{1, 7, -1, 5, 100\}$; e) $A = \left\{\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \mid n \in I\!N^*\right\}$;

f) $A = \left\{\dfrac{n}{2n-5} \mid n \in I\!N^*\right\}$; g) $A = \left\{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sin \dfrac{n}{2} \mid n \in I\!N^*\right\}$.

32. Fie $a_i, b_i \in I\!R_+,\ i = \overline{1, n}\ (n \in I\!N^*)$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}\,.$$

33. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I\!R_+$ şi $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ atunci:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n\,.$$

Capitolul 2
ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

§1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

Se numeşte *şir* de numere reale o funcţie reală f definită pe mulţimea numerelor naturale $f : I\!N \to I\!R$. Dacă $f(n) = a_n,\ n \in I\!N$, vom nota şirul cu $(a_n)_{n\in I\!N}$, ($(a_n)_{n\in I\!N^*}$ sau $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $f : I\!N^* \to I\!R$).

Fie $(a_n)_{n\in I\!N}$ un şir de numere reale, iar $(k_n)_{n\in I\!N}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_n)_{n\in I\!N}$, unde $x_n = a_{k_n},\ n \in I\!N$ se numeşte *subşir* al şirului $(a_n)_{n\in I\!N}$, notat $(x_n)_{n\in I\!N} \subset (a_n)_{n\in I\!N}$.

Şirul $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ se numeşte *convergent* cu limita $a \in I\!R$ dacă în afara oricărei vecinătăţi a lui a rămâne cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a,$ pentru $n \to \infty$. În caz contrar, vom spune că şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este *divergent*. Şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ are limita $+\infty$ $(-\infty)$ dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ (respectiv $-\infty$) conţine toţi termenii şirului cu excepţia eventual a unui număr finit dintre ei.

Teorema 1. a) Şirul $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ este convergent cu limita $a \in I\!R$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \ \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

b) Şirul $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \ \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \ a_n > \varepsilon.$$

c) Şirul $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \ \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \ a_n < -\varepsilon.$$

Şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este *mărginit* dacă $\exists\, M > 0$ a.î. $|a_n| \leq M,\ \forall\, n \in I\!N$.

Proprietăţi ale şirurilor cu limită (şiruri convergente sau şiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$):

a) Dacă şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este convergent atunci limita sa este unică.

b) Dacă şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este convergent atunci şirul este mărginit.

c) Dacă într-un şir $(a_n)_{n\in I\!N}$ cu limita $a \in \overline{I\!R}$ schimbăm ordinea termenilor, adăugăm sau suprimăm un număr finit de termeni se obţine un şir având aceeaşi limită.

d) Dacă şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ are limita $a \in \overline{I\!R}$ atunci orice subşir al său are aceeaşi limită a.

e) Dacă $\exists\,(\alpha_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R_+$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ şi $|a_n - a| \le \alpha_n$, $\forall\, n \ge n_0$ $(n_0 \in I\!N)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

f) Dacă $\exists\,(\alpha_n)_{n\in I\!N}$, $(\beta_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ şi $\exists\, n_0 \in I\!N$ a.î. $\alpha_n \le a_n \le \beta_n$, $\forall\, n \ge n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = a$ atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, (criteriul cleştelui).

g) i) Dacă $(a_n)_{n\in I\!N}$ şi $(b_n)_{n\in I\!N}$ au limită şi suma (diferenţa) limitelor are sens, atunci şirul sumă $(a_n + b_n)_{n\in I\!N}$, (respectiv şirul diferenţă $(a_n - b_n)_{n\in I\!N}$) are limită şi:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad (\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n).$$

ii) Dacă şirurile $(a_n)_{n\in I\!N}$ şi $(b_n)_{n\in I\!N}$ au limită şi produsul limitelor are sens, atunci şirul produs $(a_n b_n)_{n\in I\!N}$ are limită şi:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

iii) Dacă şirurile $(a_n)_{n\in I\!N}$ şi $(b_n)_{n\in I\!N}$ au limită, $b_n \neq 0$ şi câtul limitelor are sens, atunci şirul cât $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in I\!N}$ are limită şi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Teorema 2 (Weierstrass). Un şir de numere reale monoton crescător şi mărginit superior este convergent, limita sa fiind marginea superioară a mulţimii termenilor şirului. Un şir de numere reale monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent, limita sa fiind marginea inferioară a mulţimii termenilor şirului.

Teorema 3 (Cantor). Fie

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

un şir descrescător de intervale închise ale lui $I\!R$, cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Atunci $\exists$ un singur punct comun tuturor acestor intervale, adică $\exists\, c \in I\!R$ a.î. $\bigcap_{n\in I\!N^*}[a_n, b_n] = \{c\}$.

Teorema 4 (lema lui Cesaro). Orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.

Şirul $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall\, n, m \ge n_0(\varepsilon) \text{ are loc } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon,\ \ \forall\, p \in I\!N.$

Teorema 5 (Cauchy). Condiţia necesară şi suficientă ca un şir de numere reale să fie convergent este ca el să fie şir fundamental (Cauchy).

Elementul $x \in \overline{I\!R}$ se numeşte *punct limită* pentru şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ dacă orice vecinătate a lui x conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Teorema 6. Elementul $x \in \overline{I\!R}$ este punct limită pentru şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ dacă şi numai dacă $(a_n)_{n\in I\!N}$ conţine un subşir cu limita x.

Mulţimea punctelor limită pentru un şir $(a_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$, notată cu $LIM(a_n)$ este o mulţime nevidă şi are un cel mai mic element (finit sau infinit), numit *limita inferioară* a şirului $(a_n)_{n\in I\!N}$, notat $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, şi are un cel mai mare element (finit sau infinit) numit *limita superioară* a şirului $(a_n)_{n\in I\!N}$, notat $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Teorema 7. (I) a) $L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in I\!R \iff$

$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall\, n \geq N(\varepsilon) \text{ are loc } a_n \leq L + \varepsilon; \\ 2.\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \forall\, n \in I\!N\ \ \exists\, n' > n \text{ a.î. } a_{n'} > L - \varepsilon. \end{cases}$$

b) $L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \exists\, (a_{k_n})_{n\in I\!N} \subset (a_n)_{n\in I\!N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$.

c) $L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(II) a) $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in I\!R \iff$

$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ are loc } a_n \geq l - \varepsilon; \\ 2.\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \forall\, n \in I\!N\ \ \exists\, n' > n \text{ a.î. } a_{n'} < l + \varepsilon. \end{cases}$$

b) $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \exists\, (a_{k_n})_{n\in I\!N} \subset (a_n)_{n\in I\!N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = -\infty$.

c) $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Teorema 8. Oricare ar fi şirul de numere reale $(a_n)_{n\in I\!N}$ au loc următoarele afirmaţii:

a) $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \iff L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \inf\limits_{n\in I\!N} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$;

b) $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \iff l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \sup\limits_{n\in I\!N} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$.

Teorema 9. Şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este convergent dacă şi numai dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ (= \lim\limits_{n\to\infty} a_n)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind Teorema 1 de caracterizare a limitei unui şir, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}$; să se determine apoi un rang de la care începând diferenţa dintre limita şirului şi termenul general să fie mai mică decât 1/100.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2+2)=-\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}=0$.

Rezolvare. a) Să considerăm un număr $\varepsilon>0$ arbitrar, momentan fixat. Vom determina un rang $n_0(\varepsilon)$ astfel încât:

$$\left|\frac{3n+1}{4n+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon,\ \forall\, n\geq n_0(\varepsilon).$$

Inegalitatea de mai sus se poate scrie în mod echivalent $\frac{1}{4(4n+1)}<\varepsilon$ sau $n>\frac{1-4\varepsilon}{16\varepsilon}$. Notând:

$$n_0(\varepsilon)=\begin{cases}\left[\frac{1-4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]+1, & \text{dacă } 0<\varepsilon\leq\frac{1}{4};\\ 0, & \text{dacă } \varepsilon>\frac{1}{4},\end{cases}$$

rezultă că pentru $n\geq n_0(\varepsilon)$ avem $\left|a_n-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$, unde $a_n=\frac{3n+1}{4n+1}$.

Pentru a determina rangul de la care începând diferenţa dintre limita şirului şi termenul general este mai mică decât 1/100, calculăm $n_0(1/100)=7$. Deci termenii $a_7,a_8,\ldots$ diferă de limita 3/4 cu mai puţin de 1/100.

b) Pentru un $\varepsilon>0$ fixat vom determina un rang $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $2n+1>\varepsilon$, $\forall\, n\geq n_0(\varepsilon)$. Notând:

$$n_0(\varepsilon)=\begin{cases}\left[\frac{\varepsilon-1}{2}\right]+1, & \text{dacă } \varepsilon\geq 1;\\ 0, & \text{dacă } 0<\varepsilon<1,\end{cases}$$

avem verificată definiţia limitei şirului $a_n=2n+1$.

c) Se verifică uşor că rangul $n_0(\varepsilon)$ din teorema de caracterizare a limitei este:

$$n_0(\varepsilon)=\left[\sqrt{\frac{\varepsilon+2}{3}}\right]+1.$$

d) Avem:

$$\left|\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}\right|\leq\frac{2^n+1}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Pentru un $\varepsilon>0$ fixat impunem condiţiile $(2/5)^n<\varepsilon/2$ şi $(1/5)^n<\varepsilon/2$. Prima inegalitate este verificată pentru $n\geq\tilde{n}_0(\varepsilon)$ unde:

$$\tilde{n}_0(\varepsilon)=\begin{cases}\left[\frac{\lg(2/\varepsilon)}{\lg(5/2)}\right]+1, & \text{dacă } 0<\varepsilon\leq 2;\\ 0, & \text{dacă } \varepsilon>2,\end{cases}$$

iar a doua inegalitate se verifică de îndată ce $n \geq \tilde{\tilde{n}}_0(\varepsilon)$, unde:

$$\tilde{\tilde{n}}_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{\lg(2/\varepsilon)}{\lg 5}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 2; \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > 2. \end{cases}$$

Luând $n_0(\varepsilon) = \max\{\tilde{n}_0(\varepsilon), \tilde{\tilde{n}}_0(\varepsilon)\}$ rezultă că $|(2^n + (-1)^n)/5^n| < \varepsilon$, pentru $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$, deci conform teoremei de caracterizare a limitei unui şir, $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n + (-1)^n)/5^n = 0$.

2. Să se arate că şirul cu termenul general:

$$a_n = (1 - \cos n\pi) \cdot \frac{n}{2n+1}\,,\ n \in I\!N$$

nu are limită.

Rezolvare. Şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este suma a două şiruri $(\alpha_n)_{n\in I\!N}$ şi $(\beta_n)_{n\in I\!N}$, unde $\alpha_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $n \in I\!N$ este convergent cu limita $1/2$ şi $\beta_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{2n+1}$, $n \in I\!N$. Vom demonstra în continuare că şirul $(\beta_n)_{n\in I\!N}$ nu are limită, de unde va rezulta că nici şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ nu are limită. Subşirurile de rang par şi de rang impar ale şirului $(\beta_n)_{n\in I\!N}$ sunt:

$$\beta_{2k} = \frac{-2k}{4k+1},\ k \in I\!N, \text{ convergent cu limita } l_1 = -1/2$$

şi

$$\beta_{2k+1} = \frac{2k+1}{4k+3},\ k \in I\!N, \text{ convergent cu limita } l_2 = 1/2.$$

Dacă am presupune că şirul $(\beta_n)_{n\in I\!N}$ ar fi convergent, atunci orice subşir al său ar fi convergent cu aceeaşi limită, limita şirului, adică $l_1 = l_2$. Deoarece $l_1 = -1/2 \neq 1/2 = = l_2$, deducem că şirul $(\beta_n)_{n\in I\!N}$ nu are limită.

3. Să se arate că:

a) şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ este strict crescător şi mărginit;

b) şirul $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$ este strict descrescător şi mărginit;

c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, unde $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Rezolvare. Vom demonstra că:

$$e_n < e_{n+1} \leq y_{n+1} < y_n\,,\ \forall\, n \geq 1. \tag{1}$$

Avem:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n >$$

$$> \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1,\ \forall\, n \geq 1,$$

(am utilizat mai sus inegalitatea lui Bernoulli, Problema 18, Capitolul 1).
Deci $e_n < e_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, adică şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Apoi:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \cdot \left[1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n(n+2)}\right] = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n^2+3n+1}{n(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2} > 1\,, \;\; \forall\, n \geq 1.$$

Deci $y_n > y_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, adică şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Deoarece inegalităţile $e_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 1$ sunt evidente, rezultă şirul de inegalităţi (1). Din aceste inegalităţi deducem că şirurile $(e_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite:

$$e_1 < e_n < y_1,\; \forall\, n \geq 1 \;\text{ şi }\; e_1 < y_n < y_1,\; \forall\, n \geq 1,$$

deci conform teoremei lui Weierstrass există $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

În continuare, din inegalităţile:

$$0 < y_n - e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e_n \leq \frac{y_n}{n} < \frac{y_1}{n} \to 0, \text{ pentru } n \to \infty,$$

deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Această limită comună este notată cu e după iniţiala matematicianului şi fizicianului elveţian Leonhard Euler (1707-1783) şi are valoarea aproximativă $e = 2,718281828459\ldots$.

Considerând acum inegalităţile:

$$e_n < e_{n+m} \leq y_{n+m} < y_n\,,\; \forall\, n, m \in I\!N^*,$$

prin trecere la limită pentru $m \to \infty$, obţinem:

$$e_n < e < y_n\,,\; \forall\, n \geq 1.$$

4. Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Rezolvare. Notăm cu $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$. Folosind inegalitatea $k! \geq 2^{k-1}$, $\forall\, k \geq 1$, care se demonstrează prin inducţie matematică, deducem:

$$0 < a_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3,\; \forall\, n \geq 1.$$

Rezultă astfel că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Evident acest şir este strict crescător, deci conform teoremei lui Weiestrass rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{not}{=} a$.

Vom demonstra în continuare că $a = e$. Conform Problemei 3, a) avem:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+\cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

de unde rezultă că:

$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n\,,\ \forall\, n \geq 1.$$

Deci, la limită pentru $n \to \infty$, obţinem că $e \leq a$. Apoi:

$$e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\,,\ \forall\, k < n.$$

Pentru k fixat, prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus, obţinem: $e \geq a_k\,,\ \forall\, k \geq 2$. Pentru $k \to \infty$, deducem că $e \geq a$. Cele două inegalităţi obţinute ne conduc la concluzia că $e = a$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

5. Folosind Problema 3, inegalităţile c), să se arate că şirul:

$$b_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \ln n\,,\ n \geq 1$$

este strict descrescător şi mărginit.

Rezolvare. Prin logaritmarea inegalităţilor c) de la Problema 3 obţinem:

$$n\left[\ln(n+1) - \ln n\right] < 1 < (n+1)\left[\ln(n+1) - \ln n\right]\,,\ \forall\, n \geq 1$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}\,,\ \forall\, n \geq 1. \tag{2}$$

Scriem inegalităţile de mai sus pentru $n := 1, 2, \ldots, n$ şi le adunăm. Obţinem:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}\,,\ \forall\, n \geq 1.$$

Deci:

$$\ln n < \ln(n+1) < 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}\,,\ \forall\, n \geq 1,$$

de unde rezultă că $b_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \ln n > 0\,,\ \forall n \geq 1$.

Pe de altă parte, din inegalitatea $(2)_1$ avem că:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0\,,\ \forall n \geq 1,$$

adică şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Fiind şi mărginit $0 < b_n < b_1$, $\forall n \geq 1$, din teorema lui Weierstrass rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \stackrel{not}{=} \gamma$, numită constanta lui Euler, cu valoarea aproximativă $\gamma = 0,577215\ldots$.

6. Să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k\,,\ \forall k \in I\!N,\ k \geq 2;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2\,.$

Rezolvare. a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{kn} - \ln(kn)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln k\right] = \lim_{n\to\infty}(b_{nk} - b_n + \ln k) =$$

$$= \gamma - \gamma + \ln k = \ln k\,,$$

unde $b_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \ln n,\ n \geq 1$.

b) Conform identităţii lui Catalan (se demonstrează prin inducţie matematică) avem:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},\ \forall n \geq 1.$$

Rezultă astfel că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

conform punctului a).

7. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a,\ \forall a > 0;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{n} - 1) = \infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot(\sqrt[n]{n} - 1) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \alpha < 1; \\ \infty, & \text{dacă } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Rezolvare. a) Notăm cu $x_n = \sqrt[n]{n}$ şi $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Evident $y_n > 0$, $\forall n \geq 1$. Rezultă:

$$1 + y_n = \sqrt[n]{n} \iff (1 + y_n)^n = n \iff 1 + C_n^1 y_n + C_n^2 y_n^2 + \cdots = n\,,$$

de unde obţinem:

$$n \geq C_n^2 y_n^2\,,\ \forall n \geq 2 \quad \text{sau} \quad y_n^2 \leq \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate obţinută, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b) Pentru $a = 1$ avem $x_n = n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$, $\forall\, n \geq 1$, deci evident limita sa este $\ln 1 = 0$. Pentru $a > 1$ să notăm cu $y_n = \sqrt[n]{a} - 1$ (> 0, $\forall\, n \geq 1$), deci $1 + y_n = \sqrt[n]{a}$. Prin logaritmarea ultimei relaţii, obţinem:

$$\ln(1 + y_n) = \frac{1}{n} \ln a \quad \text{sau} \quad n = \frac{\ln a}{\ln(1 + y_n)}.$$

Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{\ln(1 + y_n)} \cdot y_n = \ln a\,,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ ($a^{1/n} \to 1$, pentru $n \to \infty$, $\forall\, a > 0$), iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1$.

Dacă $a < 1$ atunci notând cu $b = \dfrac{1}{a} > 1$ avem: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1 - \sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{b} - 1)}{-\sqrt[n]{b}} = -\ln b = \ln \frac{1}{b} = \ln a.$$

c) Notăm cu $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$ şi folosind aceeaşi idee ca la punctul b) avem:

$$\ln n = n \ln(1 + y_n) \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \cdot \ln n = \infty,$$

($y_n \to 0$, pentru $n \to \infty$, conform punctului a)).

d) Pentru $\alpha \geq 1$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha - 1} \cdot n(\sqrt[n]{n} - 1) = \infty,$$

conform punctului c). Pentru $\alpha < 1$, cu notaţiile de la punctul c) avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \cdot \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}} = 0$$

(vezi Problema 8).

Limitele de mai sus se pot calcula folosind limitele corespunzătoare de funcţii combinate cu regula lui l'Hôspital (vezi Capitolul 5). De exemplu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \text{ şi deoarece } \exists \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1$.

8. Să se arate că:

$$\ln n \prec n^{\alpha} \prec a^n \prec n! \prec n^n \quad \forall\, \alpha > 0,\ \forall\, a > 1\,,$$

unde prin $a_n \prec b_n$ am notat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Rezolvare. a) Pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$ folosim limita de funcţii:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0$$

şi caracterizarea limitei unei funcţii cu ajutorul şirurilor: $\forall\, x_n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n^{\alpha}} = 0$. Luând $x_n = n$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$.

b) Pentru $\alpha > 0\ \exists\, n_0 \in I\!N$ a.î. $n_0 \le \alpha < n_0 + 1$, conform lemei lui Arhimede. Considerând $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$ şi aplicând regula lui l'Hôspital de (n_0+1) ori, obţinem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n_0)x^{\alpha-n_0-1}}{(\ln a)^{n_0+1}\cdot a^x} = 0,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

c) Notăm cu $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} < 1, \quad \forall\, n \ge [a-1]+1.$$

Deducem astfel că începând cu rangul $n_0 = [a-1]+1$ şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este strict descrescător. Deoarece $a_n > 0$, $\forall\, n \in I\!N$, conform teoremei lui Weierstrass rezultă că şirul $(a_n)_{n\in I\!N}$ este convergent, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{not}{=} l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \dfrac{a}{n+1} a_n$, obţinem $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

d) Şirul $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \ge 1$ este strict descrescător, deoarece:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1, \ \forall\, n \ge 1.$$

Fiind un şir cu termeni pozitivi rezultă că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este convergent, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{not}{=}$ $= l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n},$$

obţinem $el = l$, de unde rezultă că $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

9. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri definite prin relaţii de recurenţă, determinându-se termenul general al şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{1+x_{n-1}^2}}$, $n \ge 1$, $x_0 \in I\!R$ fixat;

b) $x_n = \sqrt{a x_{n-1}}$, $n \ge 1$, $x_0 = 1$, $a > 0$ fixat;

c) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n \ge 2$, $x_1 = x_2 = 1$ (şirul lui Fibonacci) .

Rezolvare. a) Avem:

$$x_1 = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}, \quad x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}}{\sqrt{1+\frac{x_0^2}{1+x_0^2}}} = \frac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2}}.$$

Vom demonstra prin inducţie matematică că:

$$P(n): \quad x_n = \frac{x_0}{\sqrt{1+nx_0^2}}, \quad n \ge 1.$$

Etapa întâi fiind verificată (pentru $n = 1$), verificăm etapa a 2-a: $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Presupunem că $P(n)$ este adevărată şi demonstrăm $P(n+1)$; avem:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}} = \frac{\frac{x_0}{\sqrt{1+nx_0^2}}}{\sqrt{1+\frac{x_0^2}{1+nx_0^2}}} = \frac{x_0}{\sqrt{1+(n+1)x_0^2}}.$$

Deducem astfel că $x_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{1+nx_0^2}}$, $\forall n \geq 1$. Trecând la limită în relaţia de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Avem: $x_1 = \sqrt{ax_0} = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{ax_1} = \sqrt{a\cdot\sqrt{a}} = a^{3/2}$. Folosind inducţia matematică rezultă că:

$$x_n = a^{1-1/2^n}, \quad n \in I\!N.$$

La limită pentru $n \to \infty$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

c) Să considerăm $x_0 = 0$ şi ecuaţia de gradul al doilea în t (ecuaţia caracteristică): $t^2 - t - 1 = 0$ cu rădăcinile $t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Relaţia de recurenţă pentru şirul x_n se poate scrie astfel:

$$x_{n+1} = (t_1+t_2)x_n - t_1t_2x_{n-1},$$

de unde rezultă:

$$x_{n+1} - t_1x_n = t_2(x_n - t_1x_{n-1}) = t_2^2(x_{n-1} - t_1x_{n-2}) = \cdots = t_2^n(x_1 - tx_0) = t_2^nx_1 = t_2^n.$$

În mod asemănător rezultă relaţia:

$$x_{n+1} - t_2x_n = t_1^n.$$

Relaţiile de mai sus se demonstrează prin inducţie matematică. Astfel obţinem:

$$(t_2 - t_1)x_n = t_2^n - t_1^n,$$

de unde rezultă:

$$x_n = \frac{t_2^n - t_1^n}{t_2 - t_1} \quad \text{sau} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \ n \in I\!N.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

10. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$, $n \geq 1$, $a \in I\!R_+^*$;

b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[p]{1+n^p}} + \dfrac{1}{\sqrt[p]{2+n^p}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[p]{n+n^p}}$, $n \geq 1$, $p \in I\!N^*$;

c) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$, $n \geq 1$;

d) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$, $n \geq 1$;

e) $x_n = \dfrac{1^1+2^2+\cdots+n^n}{(n!)^2}$, $n \geq 1$.

Rezolvare. a) Dacă $a \in (0,1)$ avem: $0 < x_n < a^n$, $\forall\, n \geq 1$ şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă $a = 1$ atunci $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă $a \in (1,\infty)$

avem:

$$0 < x_n < \frac{a^n}{a \cdot a^2 \cdots a^n} = a^{-n(n-1)/2} \to 0, \ \text{ pentru } n \to \infty,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Deducem astfel că pentru $\forall\, a \in I\!\!R_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Pentru $p \geq 2$ avem:

$$1 \leftarrow \frac{n}{\sqrt[p]{n+n^p}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt[p]{1+n^p}} \to 1, \ \text{ pentru } n \to \infty.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Pentru $p = 1$:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \to \ln 2, \ \text{ pentru } n \to \infty,$$

conform Problemei 6 a).

c) Să considerăm şirul $a_n = \ln x_n$, adică:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right), \ \ n \geq 1.$$

Avem:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \leq a_n \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right), \ \ n \geq 1. \tag{3}$$

Şirul:

$$b_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^{\sqrt{n^2+n}}\right]^{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}$$

converge la $\ln e = 1$, pentru $n \to \infty$, iar şirul:

$$c_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^{\sqrt{n^2+1}}\right]^{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$$

converge la $\ln e = 1$, pentru $n \to \infty$.

Conform criteriului cleştelui, din (3) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e$.

d) Considerăm din nou şirul $a_n = \ln x_n$:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} + \frac{2}{n^2} \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)^{n^2/n}.$$

Încadrăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ între următoarele şiruri:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)^{n^2/n}}_{b_n} \leq a_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{c_n}.$$

Şirul $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \dfrac{n+1}{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge la $\frac{1}{2}$, pentru $n \to \infty$, iar şirul $c_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \dfrac{n+1}{2n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ converge tot la $\frac{1}{2}$, pentru $n \to \infty$. Deducem astfel că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{1/2}$.

e) Avem:

$$0 < x_n \le \frac{n \cdot n^n}{(n!)^2}, \quad n \ge 1. \tag{4}$$

Şirul $y_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n!)^2}$ este strict descrescător, deoarece:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \le 1, \ \ n \ge 3.$$

Fiind şi un şir mărginit, din teorema lui Weierstrass, deducem că şirul $(y_n)_{n\ge1}$ este convergent, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă:

$$y_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n y_n$$

obţinem $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Din inegalităţile (4) şi criteriul cleştelui deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

11. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri definite prin relaţiile de recurenţă:

a) $x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1)\,,\ n \ge 1,\ x_0 = 0;$

b) $x_{n+1} = \frac{1}{3}(a + x_n + x_{n-1}^2)\,,\ n \ge 2,\ x_1 = x_2 = 0,\ 0 \le a \le 1;$

c) $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right)\,,\ n \ge 2,\ \alpha > 0,\ x_1 > 0$ (şirul lui Heron).

Rezolvare. a) Notăm cu $y_n = x_n - 1,\ y_0 = x_0 - 1 = -1$. Relaţia de recurenţă pentru şirul $(y_n)_{n\in I\!N}$ este $y_n = \sin y_{n-1}$. Deoarece $y_0 = -1 < 0$ rezultă că $y_n \in [-1, 0)$, $\forall n \ge 1$. Folosind inegalitatea $|\sin x| \le |x|$, deci $\sin x \ge x$, pentru $x \le 0$ obţinem că $y_n \ge$ $\ge y_{n-1}$, $\forall n \ge 1$, adică şirul $(y_n)_{n\in I\!N}$ este un şir crescător, majorat de 0. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{not}{=} l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $l = \sin l$, de unde rezultă că $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n + 1) = 1$.

b) Se arată, folosind inducţia matematică că $x_n \ge 0$, $\forall n \ge 1$. Vom demonstra în continuare, folosind a doua variantă a principiului inducţiei matematice, că şirul $(x_n)_{n\in I\!N}$ este monoton crescător, adică $P(n)\ :\ x_n \le x_{n+1},\ n \ge 1$. Pentru $n = 1$ afirmaţia de mai sus este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată, $\forall k = \overline{1, n}$ şi o vom demonstra pe $P(n+1)$. Avem:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(a + x_n + x_{n-1}^2) \le \frac{1}{3}(a + x_{n+1} + x_n^2) = x_{n+2}\,,$$

(am utilizat aici $x_n \le x_{n+1}$ şi $x_{n-1} \le x_n$). Rezultă că $P(n+1)$ este adevărată, deci conform inducţiei matematice, deducem că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \ge 1$. Folosind aceeaşi variantă a inducţiei matematice se arată că $x_n < 1$, $\forall n \ge 1$ ($x_1 = 0 < 1$ şi $x_{n+1} =$

$= \frac{1}{3}(a + x_n + x_{n-1}^2) < \frac{a+2}{3} \le 1\Big)$. Conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{not}{=} l \in [0,1]$. Din relaţia de recurenţă, deducem că:

$$l = \frac{1}{3}(a + l + l^2), \quad \text{deci } l = 1 - \sqrt{1-a}\,.$$

c) Observăm mai întâi că $x_n > 0$, $\forall\, n \ge 1$ şi că $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right) \ge$ $\ge \sqrt{\alpha}$, $\forall\, n \ge 2$. Apoi:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{\alpha - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \le 0,\ \forall\, n \ge 2\,,$$

deci şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este monoton descrescător, mărginit inferior de $\sqrt{\alpha}$. Conform teoremei lui Weierstrass deducem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{not}{=} l \ge \sqrt{\alpha}$. Din relaţia de recurenţă rezultă că $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right)$ sau $l = \sqrt{\alpha}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

Se poate determina şi o formulă pentru termenul general al şirului $(x_n)_{n\ge1}$, calculând:

$$\frac{x_n - \sqrt{\alpha}}{x_n + \sqrt{\alpha}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{\alpha}}{x_{n-1} + \sqrt{\alpha}}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}}{x_1 + \sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n-1}},$$

de unde rezultă:

$$x_n = \sqrt{\alpha}\frac{\left(x_1 + \sqrt{\alpha}\right)^{2^{n-1}} + \left(x_1 - \sqrt{\alpha}\right)^{2^{n-1}}}{\left(x_1 + \sqrt{\alpha}\right)^{2^{n-1}} - \left(x_1 - \sqrt{\alpha}\right)^{2^{n-1}}},\ \ \forall\, n \ge 1.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

12. Teorema lui Töplitz. (I) Fie $(a_{nm})_{n,m\ge1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

care satisface următoarele condiţii:

a) $a_{nm} \to 0$ pentru $n \to \infty$ (m fixat);

b) $|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn}| \le K$, ($K = const.$), $\forall\, n \ge 1$.

Atunci, dacă şirul $(x_n)_{n\ge1} \subset I\!R$, $x_n \to 0$ pentru $n \to \infty$ atunci şi şirul $(y_n)_{n\ge1} \subset I\!R$:

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,\ \ n \ge 1$$

tinde la 0, pentru $n \to \infty$.

(II) Dacă în plus coeficienţii $(a_{nm})_{n,m\ge1}$ satisfac şi condiţia:

c) $A_n = a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \to 1$, pentru $n \to \infty$

atunci, de îndată ce şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $x_n \to a$, pentru $n \to \infty$ $(a \in \mathbb{R})$ rezultă că şi şirul $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $y_n \to a$, pentru $n \to \infty$.

Dacă $a_{nm} \in \mathbb{R}_+$, $n, m \geq 1$, rezultatul de mai sus rămâne valabil, în ipotezele a) şi c) şi pentru $a = \pm\infty$.

Rezolvare. (I) Din ipoteza $x_n \to 0$, pentru $n \to \infty$ avem:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon):\ |x_n| < \varepsilon/2K$ (alegem $n_0(\varepsilon) > 1$).

Pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat, din ipoteza a) obţinem:

$$\exists\, n_{0m}(\varepsilon) \text{ a.î. } |a_{nm}| < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot |x_m| \cdot (n_0 - 1)}, & \text{dacă } |x_m| \neq 0; \\ \varepsilon, & \text{dacă } |x_m| = 0, \end{cases} \quad \forall\, n \geq n_{0m}(\varepsilon).$$

Considerând $\tilde{n}_0(\varepsilon) = \max\{n_0(\varepsilon);\ n_{0m}(\varepsilon),\ m = 1, 2, \ldots, n_0(\varepsilon)\}$ avem:

$$|y_n| \leq |a_{n1}| \cdot |x_1| + |a_{n2}| \cdot |x_2| + \cdots + |a_{nn}| \cdot |x_n| = (|a_{n1}| \cdot |x_1| + \cdots +$$
$$+|a_{nn_0-1}| \cdot |x_{n_0-1}|) + (|a_{nn_0}| \cdot |x_{n_0}| + \cdots + |a_{nn}| \cdot |x_n|) < \frac{\varepsilon}{2(n_0-1)}(n_0 - 1) +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru $\forall\, n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon)$ (am folosit mai sus ipoteza b): $|a_{nn_0}| \cdot |x_{n_0}| + \cdots + |a_{nn}| \cdot |x_n| \leq \leq \frac{\varepsilon}{2K}(|a_{nn_0}| + \cdots + |a_{nn}|) \leq \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \frac{\varepsilon}{2}$). Rezultă astfel că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(II) Pentru $a \in \mathbb{R}$ avem:

$$y_n = a_{n1}(x_1 - a) + \cdots + a_{nn}(x_n - a) + A_n \cdot a.$$

Deoarece $x_n - a \to 0$, pentru $n \to \infty$, conform primei părţi a problemei (I) rezultă că şirul:

$$a_{n1}(x_1 - a) + \cdots + a_{nn}(x_n - a) \to 0, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Din ipoteza c) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \cdot a = a$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Dacă $a_{nm} \in \mathbb{R}_+$, iar $a = \infty$, să considerăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Deoarece $x_n \to \infty$, pentru $n \to \infty$ rezultă că $\exists\, n_0(\varepsilon)$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon):\ x_n > 3\varepsilon$. Din ipotezele a) şi c) obţinem:

$\exists\, n_1(\varepsilon)$ a.î. $|a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn_0-1}x_{n_0-1}| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_1(\varepsilon)$,

$\exists\, n_2(\varepsilon)$ a.î. $(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn_0-1}) < 1/6,\ \forall\, n \geq n_2(\varepsilon)$,

$\exists\, n_3(\varepsilon)$ a.î. $|a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} - 1| < 1/6,\ \forall\, n \geq n_3(\varepsilon)$.

Pentru $n \geq \tilde{n}(\varepsilon) = \max\{n_0(\varepsilon),\, n_1(\varepsilon),\, n_2(\varepsilon),\, n_3(\varepsilon)\}$ avem:

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = (a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn_0-1}x_{n_0-1}) + (a_{nn_0}x_{n_0} + \cdots +$$
$$+a_{nn}x_n) > -\varepsilon + 3\varepsilon\,(a_{nn_0} + \cdots + a_{nn}) = -\varepsilon + 3\varepsilon\,[(a_{n1} + \cdots + a_{nn}) -$$
$$-\,(a_{n1} + \cdots a_{nn_0-1})] > -\varepsilon + 3\varepsilon\,(5/6 - 1/6) = \varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Cazul $a = -\infty$ se tratează asemănător cazului $a = \infty$.

Consecinţe ale teoremei lui Töplitz.

1) Pentru $a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{nn} = 1/n$ condiţiile a)-c) sunt îndeplinite. Deci dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, pentru $n \to \infty$, atunci şi şirul $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to$ $\to a$, pentru $n \to \infty$, (*şirul mediilor aritmetice*).

2) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^*$, $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, pentru $n \to \infty$, atunci aplicând Consecinţa 1) pentru şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$, $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{a}$, pentru $n \to \infty$, obţinem că şirul $\widetilde{y}_n = \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$ $\to \dfrac{1}{a}$, pentru $n \to \infty$, deci şirul $z_n = n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)^{-1} \to a$, pentru $n \to \infty$, (*şirul mediilor armonice*).

3) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$, $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, pentru $n \to \infty$, din inegalitatea mediilor (Problema 19, Capitolul 1):

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots \dfrac{1}{x_n}},$$

prin trecere la limită, rezultă că şirul $w_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k} \to a$, pentru $n \to \infty$ (*şirul mediilor geometrice*).

4) Dacă pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$. Într-adevăr, aplicând Consecinţa 3) şirului $\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)_{n\geq 1}$, $x_0 = 1$, rezultă că şirul:

$$\widetilde{w}_n = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \sqrt[n]{x_n} \to l, \text{ pentru } n \to \infty.$$

5) Dacă pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, iar $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ este un şir cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \infty$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Aplicăm teorema lui Töplitz (II) pentru $a_{nm} = \dfrac{b_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$, $m = \overline{1,n}$ şi şirul $x_n = a_n$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_m}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} = 0 \quad \text{, iar } a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = 1.$$

Rezultă atunci că şirul:

$$y_n = a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \cdots + a_{nn}a_n = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \to a, \text{ pentru } n \to \infty.$$

6) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ satisfac condiţiile:

i) $b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to \infty$, pentru $n \to \infty$;

ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{I\!R}$

atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Aplicăm Consecinţa 5) cu şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n := \frac{a_n}{b_n}$, $n \geq 1$.

7) *Teorema lui Stolz-Cesaro.* Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ care satisfac condiţiile:

i) $b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$; şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{I\!R}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Aplicăm teorema lui Töplitz (II) cu $a_{nm} = \frac{b_{m+1} - b_m}{b_{n+1}}$, $n, m \geq 1$, $m \leq n$. Avem îndeplinite condiţiile a) şi c): $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0$ şi

$$a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = \frac{b_{n+1} - b_1}{b_{n+1}} \to 1, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Atunci pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to l \in \overline{I\!R}$ rezultă că şirul:

$$y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = \frac{b_2 - b_1}{b_{n+1}} \cdot \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \frac{b_3 - b_2}{b_{n+1}} \cdot \frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2} + \cdots +$$
$$+ \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_1}{b_{n+1}} \to l, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Deoarece $\frac{1}{b_{n+1}} \to 0$, pentru $n \to \infty$, deducem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

8) Dacă pentru şirul $(x_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{I\!R}$ atunci:

$$z_n = \frac{1 \cdot x_0 + C_n^1 x_1 + \cdots + C_n^n x_n}{2^n} \to a, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Aplicăm teorema lui Töplitz (II) cu $a_{nm} = \frac{C_n^m}{2^n}$, $n, m \geq 1$, $n \geq m$. Avem:

$$0 < a_{nm} = \frac{C_n^m}{2^n} < \frac{n^m}{2^n} \to 0, \text{ pentru } n \to \infty \quad \text{şi}$$
$$\sum_{m=1}^{n} a_{nm} = \frac{C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \to 1, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Atunci:

$$y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{C_n^m}{2^n} x_m \to a, \text{ pentru } n \to \infty,$$

deci şi $z_n \to a$, pentru $n \to \infty$, $\left(\frac{1 \cdot x_0}{2^n} \to 0, \text{ pentru } n \to \infty\right)$.

9) Dacă pentru şirul $(x_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{I\!R}$, iar $z > 0$ este o constantă, atunci rezultă că:

$$z_n = \frac{1\cdot x_0 + C_n^1 z x_1 + C_n^2 z^2 x_2 + \cdots + C_n^n z^n x_n}{(1+z)^n} \to a, \ \text{pentru } n\to\infty.$$

Aplicăm teorema lui Töplitz (II) cu $a_{nm} = \dfrac{C_n^m z^m}{(1+z)^n}$, $n, m \geq 1$, $n \geq m$. Avem:

$$0 < a_{nm} \leq \frac{n^m z^m}{(1+z)^n} \to 0, \ \text{pentru } n\to\infty \quad \text{şi}$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_{nm} = \frac{(1+z)^n - 1}{(1+z)^n} \to 1, \ \text{pentru } n\to\infty.$$

Atunci:

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{C_n^m z^m x_m}{(1+z)^n} \to a, \ \text{pentru } n\to\infty,$$

deci şi şirul $z_n \to a$, pentru $n\to\infty$, $\left(\dfrac{1\cdot x_0}{(1+z)^n} \to 0, \ \text{pentru } n\to\infty\right)$.

10) Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ şi proprietatea:

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K, \ \forall\, n \geq 1, \ K = const.$$

Atunci $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \to 0$, pentru $n\to\infty$.

Aplicăm teorema lui Töplitz (I) şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $a_{nm} = y_{n-m+1}$.

11) Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in I\!R$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in I\!R$. Atunci:

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \to ab, \ \text{pentru } n\to\infty.$$

Dacă $a = 0$ aplicăm teorema lui Töplitz (I) şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $a_{nm} = \dfrac{y_{n-m+1}}{n}$ (şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit). Rezultă atunci că pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \to 0$, pentru $n\to\infty$, şirul $z_n = \dfrac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} \to 0$, pentru $n\to\infty$.

Dacă $a \neq 0$ atunci $x_n - a \to 0$, pentru $n\to\infty$ şi conform celor de mai sus rezultă că:

$$w_n = \frac{(x_1 - a)y_n + (x_2 - a)y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)y_1}{n} \to 0, \ \text{pentru } n\to\infty.$$

Deoarece $\dfrac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \to b$, pentru $n\to\infty$ (consecinţa 1)), deducem că:

$$z_n = \frac{(x_1 - a)y_n + (x_2 - a)y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)y_1}{n} + \frac{a(y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1)}{n} \to ab,$$

pentru $n\to\infty$.

13. Să se formuleze reciprocele teoremei lui Stolz-Cesaro. Sunt adevărate sau false? În acest sens să se analizeze următoarele exemple:

a) $a_n = (-1)^n$; $b_n = n$; $n \geq 1$;

b) $a_n = b_n = (-1)^n$, $n \geq 1$.

Rezolvare. O reciprocă a teoremei lui Stolz-Cesaro este următoarea:

1) Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict crescător cu limita $+\infty$. Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{I\!R}$ atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{I\!R}$.

Acest rezultat este fals, după cum ne arată exemplul a). Într-adevăr, $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = n$ este un şir de numere reale strict crescător cu limita ∞ şi $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Dar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot (-2) = 2 \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$$

nu există.

O altă reciprocă a teoremei lui Stolz-Cesaro este:

2) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Presupunem că:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{I\!R} \quad \text{şi } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l.$$

Atunci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător cu limita ∞.

Şi acest rezultat este fals, după cum ne arată exemplul b). Într-adevăr $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1 \in I\!R$ şi $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{(-1)^{n+1}-(-1)^n} = 1$, dar şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ nu este strict crescător cu limita ∞ ($\nexists \lim\limits_{n\to\infty} b_n$).

14. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $n \geq 1$, $p \in I\!N$;

b) $x_n = \frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^p + \left(a+\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(a+\frac{n+m}{n}\right)^p\right]$, $n \geq 1$, $a \in I\!R$, $m \in I\!N$, $p \in I\!N$;

c) $x_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}\cdot (n!)^3}{(3n)!}}$, $n \geq 1$.

Rezolvare. a) Dacă $p \geq 1$, notăm cu $a_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ şi $b_n = n^{p+1}$. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător ($b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$) cu limita $+\infty$, iar:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{C_{p+1}^1 n^p + \cdots} \to \frac{1}{p+1}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Conform teoremei lui Stolz-Cesaro, deducem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{p+1}$.

Dacă $p = 0$, $x_n = \frac{n}{n} = 1 \to 1$, pentru $n \to \infty$.

b) Dacă $p \geq 1$ avem:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}\Big[a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{1}{n} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_p^p a^0\cdot\frac{1}{n^p}+ \\ &\quad + a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{2}{n} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{2^2}{n^2}+\cdots+C_p^p a^0\cdot\frac{2^p}{n^p}+ \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{n+m}{n} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{(n+m)^2}{n^2}+\cdots+C_p^p\cdot\frac{(n+m)^p}{n^p}\Big] = \end{aligned}$$

$$= \frac{n+m}{n}a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{1+2+\cdots+(n+m)}{n^2} + C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots(n+m)^2}{n^3}+\cdots+$$
$$+C_p^p\cdot\frac{1^p+2^p+\cdots(n+m)^p}{n^{p+1}} = \frac{n+m}{n}a^p + C_p^1 a^{p-1}\cdot\frac{(n+m)^2}{n^2}\cdot\frac{1+2+\cdots(n+m)}{(n+m)^2}+$$
$$+C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{(n+m)^3}{n^3}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots+(n+m)^2}{(n+m)^3}+\cdots+C_p^p\frac{(n+m)^{p+1}}{n^{p+1}}\cdot\frac{1^p+2^p+\cdots+(n+m)^p}{(n+m)^{p+1}}.$$

Conform punctului a) deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a^p + C_p^1 a^{p-1}\frac{1}{2} + C_p^2 a^{p-2}\frac{1}{3}+\cdots+C_p^p\frac{1}{p+1}\,.$$

Dacă $p=0$ atunci $x_n = \dfrac{n+m}{n} \to 1$, pentru $n\to\infty$.

c) Notăm cu $a_n = \dfrac{3^{3n}\cdot(n!)^3}{(3n)!}$, $n\geq 1$. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{3n+3}\cdot[(n+1)!]^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^3\cdot(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1,$$

conform Problemei 12, Consecinţa 4) rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

15. Fie date numerele reale a_0, b_0 cu $a_0 > b_0 > 0$. Termenii şirurilor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se dau cu ajutorul relaţiilor:

$a_0,\ a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2},\ a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2},\cdots, a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\cdots,$

$b_0,\ b_1 = \sqrt{a_0b_0},\ b_2 = \sqrt{a_1b_1},\ \cdots, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\cdots.$

Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente şi tind către aceeaşi limită.

Rezolvare. Folosind inegalitatea mediilor deducem că $b_n \leq a_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Evident $a_n, b_n > 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Demonstrăm în continuare că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton descrescător, iar şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. Într-adevăr:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq a_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N} \quad \text{şi} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} \geq b_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Din următorul şir de inegalităţi:

$$b_0\leq b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_{n-1}\leq b_n\leq a_n\leq a_{n-1}\leq\cdots\leq a_2\leq a_1\leq a_0,$$

folosind teorema lui Weierstrass rezultă că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Trecând la limită în relaţia de recurenţă $a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ obţinem $a = \dfrac{a+b}{2}$, de unde rezultă că $a = b$.

16. Fie şirurile $(a_n)_{n\in I\!N}$, $(b_n)_{n\in I\!N}$, $(c_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ definite astfel:

$$a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1});\ \ b_n = \frac{1}{2}(c_{n-1}+a_{n-1});\ \ c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}),\ \forall\, n \geq 1,$$

cu a_0, b_0, $c_0 \in I\!R$. Să se arate că cele trei şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită $l = \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0)$.

Rezolvare. Din definiţia şirurilor deducem:

$$a_n+b_n+c_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1} = \cdots = a_0+b_0+c_0 \overset{not}{=} \alpha.$$

Din relaţia $b_{n-1}+c_{n-1} = \alpha - a_{n-1}$ şi definiţia termenului general a_n rezultă că $a_n = \frac{1}{2}(\alpha - a_{n-1})$, $\forall\, n \geq 1$. Deci:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}(\alpha - a_{n-2})\right) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2^2} + \frac{1}{2^2}a_{n-2} = \cdots = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha}{2^n} +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^n}a_0 = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} + \frac{(-1)^n}{2^n}a_0 = \frac{\alpha}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) + \frac{(-1)^n}{2^n}a_0.$$

Obţinem:

$$a_n = \frac{\alpha}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) + \frac{(-1)^n}{2^n}a_0,\ \forall\, n \in I\!N.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha}{3}$. Analog se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\alpha}{3} = \dfrac{a_0+b_0+c_0}{3}$.

17. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ două şiruri definite astfel:

$$a_{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{2n}\right),\quad b_{n+1} = b_n\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n \geq 1,$$

cu a_1, $b_1 \in I\!R_+^*$ fixaţi. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = 0\,.$$

Rezolvare. Vom aplica Consecinţa 6) a teoremei lui Töplitz (Problema 12). Verificăm mai întâi condiţiile respective, adică:

i) $b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to \infty$, pentru $n \to \infty$;

ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l \in \overline{I\!R}$.

Din relaţia de recurenţă pentru şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ avem:

$$b_{n+1} = b_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)b_1 = (n+1)b_1,$$

de unde rezultă că:

$$b_1+b_2+\cdots+b_n = b_1\frac{n(n+1)}{2} \to \infty,\ \text{pentru}\ \ n\to\infty,\ (b_1>0).$$

Apoi, pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ deducem:

$$a_{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \left(1+\frac{1}{1\cdot 2}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2\cdot n}\right)a_1 = \frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}a_1.$$

În continuare avem:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \ \forall n \geq 1.$$

Folosind inegalitatea:

$$\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \leq \frac{2}{\sqrt{2n+3}}, \ \forall n \geq 1,$$

(se demonstrează prin inducţie matematică), rezultă pentru fracţia $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ calculată mai sus că:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \ \forall n \geq 1.$$

Deducem astfel că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 0$.

Din Consecinţa 6) a teoremei lui Töplitz rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 0$.

Problema de mai sus se poate rezolva folosind şi teorema lui Stolz-Cesaro, considerând şirurile $c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $d_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1 \frac{n(n+1)}{2} > 0$, $\forall n \geq 1$. Şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător cu limita ∞, iar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{a_1}{b_1} = 0.$$

Rezultă atunci că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots a_n}{b_1 + \cdots b_n} = 0$.

18. a) Să se determine $\alpha \in I\!R$ astfel încât şirul $(x_n)_{n\in I\!N}$ definit prin $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_{n+1} = \alpha x_n + 1$, $\forall n \in I\!N$ să fie convergent.

b) Să se determine $\alpha \in I\!R$ astfel încât şirurile $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ definite prin $x_0 = y_0 = 1$, $x_n = \alpha x_{n-1} + \frac{1}{4} y_{n-1}$, $y_n = x_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ să fie convergente.

Rezolvare. a) Avem: $x_{n+1} = \alpha x_n + 1 = \alpha(\alpha x_{n-1} + 1) + 1 = \alpha^2 x_{n-1} + \alpha + 1 =$
$= \alpha^3 x_{n-2} + \alpha^2 + \alpha + 1 = \cdots = \alpha^{n+1} x_0 + \alpha^n + \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1 = \frac{1}{3}\alpha^{n+1} + \alpha^n +$
$+ \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1 =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha^{n+1} + \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}, & \text{dacă } \alpha \neq 1; \\ n + 1 + \frac{1}{3}, & \text{dacă } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pentru a exista $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} \in I\!R$ trebuie să impunem condiţia $|\alpha| < 1$. Deci pentru $\alpha \in (-1, 1)$ şirul este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-\alpha}$.

b) Avem: $x_1 = \alpha + \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{3}{2}$. Din relaţiile de recurenţă obţinem:

$y_{n-1} = 4x_n - 4\alpha x_{n-1} \Longrightarrow y_n = 4x_{n+1} - 4\alpha x_n \Longrightarrow 4x_{n+1} - 4\alpha x_n = x_{n-1} +$

$+ \frac{1}{2}(4x_n - 4\alpha x_{n-1}) \Longleftrightarrow 4x_{n+1} - 4\alpha x_n = x_{n-1} + 2x_n - 2\alpha x_{n-1} \Longleftrightarrow 4x_{n+1} =$

$= (4\alpha + 2)x_n + (1 - 2\alpha)x_{n-1} \Longleftrightarrow x_{n+1} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) x_n - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right) x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Iar:

$x_{n-1} = y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} \Longrightarrow x_n = y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n \Longrightarrow y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = \alpha\left(y_n - \frac{1}{2}y_{n-1}\right) +$
$+\frac{1}{4}y_{n-1} \Longleftrightarrow y_{n+1} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)y_n - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)y_{n-1},\ \forall\, n \geq 1.$

Am obţinut că cele două şiruri $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ sunt definite prin aceeaşi relaţie de recurenţă. Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ atunci $x_{n+1} = x_n,\ \forall\, n \geq 1 \Rightarrow x_n = \frac{3}{4},\ \forall\, n \geq 1$, iar $y_{n+1} = y_n,\ (\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow y_n = \frac{3}{2},\ \forall\, n \geq 1$, deci şirurile sunt constante, deci convergente.

Dacă $\alpha \neq \frac{1}{2}$ atunci $\exists\, C \neq 0$ şi $\gamma \neq 0$ astfel încât $x_{n+1} - \gamma x_n = C(x_n - \gamma x_{n-1})$ $\Longleftrightarrow x_{n+1} = (\gamma + C)x_n - C\gamma x_{n-1}$. Într-adevăr, identificând relaţia obţinută cu relaţia de recurenţă a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ de mai sus, rezultă:

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma + C = \alpha + \frac{1}{2} \\ C\gamma = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{2\alpha+1}{2} - \gamma \\ \gamma^2 - \gamma\dfrac{2\alpha+1}{2} + \dfrac{2\alpha-1}{4} = 0. \end{cases}$$

Ecuaţia în γ are discriminantul $\Delta = \dfrac{(2\alpha+1)^2}{4} - 4\cdot\dfrac{2\alpha-1}{4} = \dfrac{4\alpha^2+4\alpha+1}{4} - \dfrac{8\alpha-4}{4} =$ $= \dfrac{4\alpha^2-4\alpha+5}{4} > 0,\ \forall\, \alpha \in I\!R$. Deci $\exists\, \gamma$ şi $C \in I\!R$ soluţii ale sistemului de mai sus; în plus $C \neq 0$, deoarece $\gamma \neq \dfrac{2\alpha+1}{2}\ \left(\dfrac{(2\alpha+1)^2}{4} - \dfrac{(2\alpha+1)^2}{4} + \dfrac{2\alpha-1}{4} \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq \dfrac{1}{2}\right)$.

Din relaţia: $x_{n+1} - \gamma x_n = C(x_n - \gamma x_{n-1}),\ \forall\, n \geq 1$, deducem:

$$x_{n+1} - \gamma x_n = C^n(x_1 - \gamma x_0),\ \forall\, n \in I\!N,$$

de unde rezultă:

$$x_{n+1} = \gamma^{n+1}x_0 + (\gamma^n + \gamma^{n-1}C + \cdots + \gamma C^{n-1} + C^n)(x_1 - \gamma x_0),\ \forall\, n \in I\!N.$$

Deoarece în sistemul (5) $\gamma \neq C$, relaţia de mai sus ne dă:

$$x_{n+1} = \gamma^{n+1}x_0 + \frac{\gamma^{n+1} - C^{n+1}}{\gamma - C}(x_1 - \gamma x_0),\ \forall\, n \in I\!N.$$

Pentru ca şirul $(x_n)_{n\in I\!N}$ să fie convergent impunem condiţiile $|\gamma| < 1,\ |C| < 1$ sau $|\gamma| < 1,\ C = 1$ sau $|C| < 1,\ \gamma = 1$. Pentru $C = 1$ sistemul (5) ne conduce la valoarea $\alpha = \frac{1}{2}$, caz studiat separat. Asemănător pentru $\gamma = 1$ obţinem $\alpha = \frac{1}{2}$. Deci pentru $\alpha \neq \frac{1}{2}$ condiţiile pentru ca şirul $(x_n)_{n\in I\!N}$ să fie convergent sunt $|\gamma| < 1$ şi $|C| < 1$, adică sistemul (5) trebuie să aibă soluţiile în modul mai mici decât 1. Ecuaţia de gradul al doilea care are soluţiile γ şi C este:

$$f(x) \equiv x^2 - x\frac{2\alpha+1}{2} + \frac{2\alpha-1}{4} = 0.$$

Impunem condiţia ca ecuaţia de mai sus să aibă soluţiile $|x| < 1$. Obţinem:

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ -1 < -\dfrac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{2\alpha+1}{2} + \dfrac{2\alpha-1}{4} > 0 \\ 1 - \dfrac{2\alpha+1}{2} + \dfrac{2\alpha-1}{4} > 0 \\ -1 < \dfrac{2\alpha+1}{4} < 1. \end{cases}$$

Rezultă $\alpha \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Deoarece pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este constant, rezultă că pentru $\alpha \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$ şirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ este convergent. Fiind definit prin aceeaşi relaţie de recurenţă, rezultă că şirul $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$ este şi el convergent pentru $\alpha \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

O altă *soluţie* pentru problema de mai sus este următoarea: am dedus mai înainte relaţiile de recurenţă pentru şirurile $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$, şi anume:

$$x_{n+1} = \frac{2\alpha+1}{2}x_n - \frac{2\alpha-1}{4}x_{n-1},\ n\geq 1,\ \ x_0 = 1,\ x_1 = \alpha + \frac{1}{4}$$

şi

$$y_{n+1} = \frac{2\alpha+1}{2}y_n - \frac{2\alpha-1}{4}y_{n-1},\ n\geq 1,\ \ y_0 = 1,\ y_1 = \frac{3}{2}.$$

Vom studia în continuare doar şirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$, rezultatul rămânând valabil şi pentru şirul $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$, deoarece şirurile sunt definite prin aceeaşi relaţie de recurenţă. Vom căuta şiruri de forma $(r^n)_{n\in \mathbb{N}}$ care să verifice relaţia de recurenţă de mai sus. Introducând $x_n = r^n$ în această relaţie deducem că r este rădăcină a ecuaţiei $r^2 - \lambda r - \mu = 0$, numită *ecuaţia caracteristică* a şirului $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$, unde $\lambda = \frac{2\alpha+1}{2}$, $\mu = \frac{1-2\alpha}{4}$. Această ecuaţie de gradul al doilea în necunoscuta r are soluţii, deoarece $\Delta = \lambda^2 + 4\mu = \frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 5}{4} > 0$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Deci $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $r^2 - \lambda r - \mu = 0$.

Deoarece şirurile $u_n = r_1^n$ şi $v_n = r_2^n$ satisfac relaţia de recurenţă a şirului $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ rezultă că şirul $(C_1u_n + C_2v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ cu C_1, C_2 constante arbitrare verifică aceeaşi relaţie de recurenţă. Dacă notăm cu $a = x_0$ şi cu $b = x_1$ (la şirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ $a = 1,\ b = \alpha + \frac{1}{4}$, iar la şirul $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$ $a = 1,\ b = \frac{3}{2}$), obţinem condiţiile:

$$\begin{cases} C_1u_0 + C_2v_0 = a \\ C_1u_1 + C_2v_1 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1r_1 + C_2r_2 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{ar_2 - b}{r_2 - r_1} \\ C_2 = \dfrac{b - ar_1}{r_2 - r_1}. \end{cases}$$

Rezultă atunci pentru termenul general al şirului $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ următoarea formă:

$$x_n = \frac{ar_2 - b}{r_2 - r_1}r_1^n + \frac{b - ar_1}{r_2 - r_1}r_2^n,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pentru ca şirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ să fie convergent trebuie să impunem condiţiile $r_1, r_2 \in (-1, 1]$, adică cu notaţiile de la prima soluţie:

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(-1) > 0 \\ -1 < -\dfrac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{2\alpha+1}{2} + \dfrac{2\alpha-1}{4} \geq 0 \\ 1 + \dfrac{2\alpha+1}{2} + \dfrac{2\alpha-1}{4} > 0 \\ -1 < \dfrac{2\alpha+1}{4} < 1, \end{cases}$$

de unde rezultă $\alpha \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

19. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 1$, (şirul lui Traian Lalescu);

b) $a_n = n\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$, $n \geq 1$.

Rezolvare. a) Şirul $x_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \geq 1$ are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e$. Conform Consecinţei 4 a teoremei lui Töplitz (Problema 12) rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{[(n+1)!]^n}}{\sqrt[n+1]{(n!)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e.$$

Notăm cu $b_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$; avem:

$$b_n - 1 = \frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{şi} \quad b_n^n = \left\{[1+(b_n-1)]^{\frac{1}{b_n-1}}\right\}^{\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}} n}.$$

Trecând la limită în ultima relaţie şi ţinând cont de limitele de mai sus şi anume $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = e$, obţinem:

$$e = e^{e \lim\limits_{n\to\infty} a_n} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}.$$

b) Notăm cu $b_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$; avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Să calculăm b_n^n:

$$b_n^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n(n+1)}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n^2} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left\{\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{-(n+1)^2}\right\}^{-\frac{n^2}{(n+1)^2}} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

La limită pentru $n \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = e^{-1} \cdot e = 1$. Deoarece:

$$b_n^n = \left\{[1+(b_n-1)]^{\frac{1}{b_n-1}}\right\}^{(b_n-1)n} \quad \text{şi} \quad b_n - 1 = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} a_n,$$

rezultă că:

$$b_n^n = \left\{ [1 + (b_n - 1)]^{\frac{1}{b_n - 1}} \right\}^{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n}.$$

Trecând la limită în egalitatea de mai sus, obţinem:

$$1 = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n} \implies \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

20. Folosind teorema lui Cauchy, să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}, \ n \geq 1;$

b) $a_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}, \ n \geq 1;$

c) $a_n = \dfrac{\sin x}{1^2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin nx}{n^2}, \ x \in I\!R, \ n \geq 1.$

Rezolvare. Vom demonstra că şirurile sunt şiruri Cauchy, deci conform Teoremei 5 a lui Cauchy sunt convergente.

a) Arătăm că:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in I\!N^*$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \ \forall p \in I\!N.$

Să considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat şi majorăm diferenţa $a_{n+p} - a_n$ în modul:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}, \ \forall p \in I\!N.$$

Punând condiţia $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ obţinem $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$. Deci rangul $n_0(\varepsilon)$ din definiţia şirului Cauchy este:

$$n_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 1; \\ 1, & \text{dacă } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Atunci pentru $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ şi $\forall p \in I\!N$ are loc $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$

b) Avem:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} +$$
$$+ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}, \ \forall p \in I\!N.$$

Punând condiţia $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ obţinem rangul:

$$n_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 1; \\ 1, & \text{dacă } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Atunci pentru $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ şi $\forall p \in I\!N : \ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$

c) Calculăm $|a_{n+p} - a_n| :$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} +$$
$$+ \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} -$$
$$- \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},\ \forall\, p \in I\!N.$$

Impunând condiţia $\frac{1}{n} < \varepsilon$ obţinem rangul $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Deci pentru $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ şi $\forall\, p \in I\!N$ avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

21. Să se arate că şirul $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ nu este şir Cauchy, deci nu este convergent.

Rezolvare. Presupunem prin reducere la absurd că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este şir Cauchy, adică:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\ \text{a.î.}\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon)\ \text{are loc}\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon,\ \ \forall\, p \in I\!N.$$

Pentru $\varepsilon = 1$ rezultă că $\exists\, n_0(1) \overset{not}{=} n_1 \in I\!N^*$ a.î. $\forall\, n \geq n_1$ şi $\forall\, p \in I\!N$: $|a_{n+p} - a_n| < 1$. Luând $p = n$ obţinem $|a_{2n} - a_n| < 1,\ \forall\, n \geq n_1$.

Dar:

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq 1,\ \forall\, n \geq 2,$$

ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. Deci presupunerea făcută este falsă, adică şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este şir Cauchy, deci nici convergent.

22. Să se determine mulţimea punctelor limită $LIM(a_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ şi $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{n(n-1)/2}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$, $n \geq 1$;

c) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)^2$, $n \geq 1$.

Rezolvare. a) Pentru a determina punctele limită ale şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ vom descompune acest şir în următoarele subşiruri convergente (constante):

$a_{4k} = 1 - 2 + 3 = 2,\ k \geq 1;\quad a_{4k+1} = 1 + 2 + 3 = 6,\ k \geq 0;$

$a_{4k+2} = 1 - 2 - 3 = -4,\ k \geq 0;\quad a_{4k+3} = 1 + 2 - 3 = 0,\ k \geq 0.$

Limitele acestor şiruri reprezintă punctele limită ale şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ (conform Teoremei 6). Deci:

$$LIM(a_n) = \{-4, 0, 2, 6\},\ \text{iar}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 6,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -4.$$

b) Descompunem şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ în următoarele 8 subşiruri convergente:

$a_{8k} = \left(1 + \frac{1}{8k}\right)^{8k} \cdot (-1)^{8k} + \sin 2k\pi \to e$, pentru $k \to \infty$;

$$a_{8k+1} = \left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1}\cdot(-1)^{8k+1}+\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\to -e+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+2} = \left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2}\cdot(-1)^{8k+2}+\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\to e+1,\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+3} = \left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3}\cdot(-1)^{8k+3}+\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\to -e+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+4} = \left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4}\cdot(-1)^{8k+4}+\sin(2k\pi+\pi)\to e,\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+5} = \left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5}\cdot(-1)^{8k+5}+\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)\to -e-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+6} = \left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6}\cdot(-1)^{8k+6}+\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\to e-1,\ \text{pentru } k\to\infty;$$
$$a_{8k+7} = \left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7}\cdot(-1)^{8k+7}+\sin\left(2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)\to -e-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{pentru } k\to\infty.$$

Deci $LIM(a_n) = \{e,\ -e+\frac{\sqrt{2}}{2},\ e+1,\ -e-\frac{\sqrt{2}}{2},\ e-1\}$, iar $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = e+1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n =$ $= -e-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Avem $(a_n)_{n\geq 1} = (a_{2k})_{k\geq 1}\cup(a_{2k+1})_{k\geq 0}$, unde:

$$a_{2k} = \frac{1}{2k}\cdot(2k)^{(-1)^{2k}}+\left(\sin\frac{2k\pi}{2}\right)^2 = 1\to 1,\ \text{pentru } k\to\infty,$$

$a_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}\cdot(2k+1)^{(-1)^{2k+1}}+\left(\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{(2k+1)^2}+1\to 1$, pentru $k\to\infty$.

Deci $LIM(a_n)=\{1\}$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

23. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, mărginite. Să se arate că:

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$;

b) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$;

c) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leq \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)\cdot\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n\right)$;

d) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geq \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)\cdot\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n\right)$,

ultimele două inegalităţi având loc pentru $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}\subset I\!\!R_+$.

Rezolvare. Deoarece şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite rezultă că $LIM(x_n)$, $LIM(y_n)$, $LIM(x_n+y_n)$, $LIM(x_ny_n)$ sunt mulţimi nevide (conform lemei lui Cesaro) şi mărginite.

a) Conform Teoremei 7 de caracterizare a limitei superioare a unui şir avem:

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N_1(\varepsilon)\in I\!\!N^*$ a.î. $\forall\, n\geq N_1(\varepsilon)$ are loc $x_n\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n+\varepsilon/2$

şi

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N_2(\varepsilon)\in I\!\!N^*$ a.î. $\forall\, n\geq N_2(\varepsilon)$ are loc $y_n\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n+\varepsilon/2$.

Deci pentru $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\} \in I\!N^*$ a.î. $\forall\,n \geq N(\varepsilon)$:

$$x_n + y_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n + \varepsilon. \tag{6}$$

Fie $z \in LIM(x_n + y_n)$ arbitrar, momentan fixat. Din Teorema 6 de caracterizare cu subşiruri, rezultă că $\exists$ un subşir $(x_{k_n} + y_{k_n})_{n\geq 1}$ al şirului $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n} + y_{k_n}) = z$, deci:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\widetilde{N}(\varepsilon) \in I\!N^*$ a.î. $\forall\,n \geq \widetilde{N}(\varepsilon)$ are loc $z - \varepsilon < x_{k_n} + y_{k_n} < z + \varepsilon$.

Deci pentru $\varepsilon > 0$, considerând $\widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon),\ \widetilde{N}(\varepsilon)\}$ obţinem din inegalităţile de mai sus şi din (6) că:

$$z - \varepsilon < x_{k_n} + y_{k_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n + \varepsilon,\ \forall\,n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon), \tag{7}$$

$(k_n \geq n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon))$. Deoarece ε este arbitrar, din inegalitatea (7) deducem că:

$$z \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n.$$

Elementul z fiind arbitrar în mulţimea $LIM(x_n+y_n)$, pentru $z = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$ obţinem:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n.$$

b) Folosind egalităţile evidente:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) \quad \text{şi} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) \tag{8}$$

deducem inegalitatea b) din inegalitatea a) astfel:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n - y_n) \geq -\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) + \overline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\right] =$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n.$$

c) Deoarece şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite rezultă că $\exists\,M_1,\ M_2 >$ > 0 a.î. $0 \leq x_n \leq M_1,\ \forall\,n \geq 1$ şi $0 \leq y_n \leq M_2,\ \forall\,n \geq 1$, (şirurile au termenii ≥ 0).

Din Teorema 7 rezultă:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,N_1(\varepsilon) \in I\!N^*$ a.î. $\forall\,n \geq N_1(\varepsilon)$ are loc $0 \leq x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n + \varepsilon$

şi

$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,N_2(\varepsilon) \in I\!N^*$ a.î. $\forall\,n \geq N_2(\varepsilon)$ are loc $0 \leq y_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n + \varepsilon$.

Deci pentru $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\}$ a.î. $\forall\,n \geq N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_n \cdot y_n &\leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\right)\cdot\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\right) + \varepsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n + \varepsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n + \varepsilon^2 \leq \\ &\leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\right)\cdot\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\right) + \varepsilon M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{9}$$

$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq M_1 \text{ şi } \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leq M_2\right)$.

Fie $z \in LIM(x_n y_n)$. Conform Teoremei 6 rezultă că $\exists$ un subşir $(x_{k_n} y_{k_n})_{n\geq 1}$ al şirului $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ asfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n} y_{k_n}) = z$; deci:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \widetilde{N}(\varepsilon) \in I\!N^* \text{ a.î. } \forall n \geq \widetilde{N}(\varepsilon) \text{ are loc } z - \varepsilon < x_{k_n} y_{k_n} < z + \varepsilon.$$

Deci pentru $\varepsilon > 0$, considerând $\widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), \widetilde{N}(\varepsilon)\}$, din inegalitatea de mai sus şi din inegalităţile (9) deducem că:

$$(10) \qquad z - \varepsilon < x_{k_n} y_{k_n} \leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right) + \varepsilon M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^2, \ \forall n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon),$$

$(k_n \geq n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon))$. Deoarece ε este arbitrar, pentru $\varepsilon \to 0$, inegalităţile (10) ne dau:

$$z \leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right).$$

Elementul z fiind arbitrar în mulţimea $LIM(x_n y_n)$, pentru $z = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n)$ obţinem:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right).$$

d) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = 0$ atunci inegalitatea din enunţ este evidentă. Să presupunem în continuare că $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n > 0$ şi $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n > 0$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, suficient de mic $\left(\varepsilon < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n, \ \varepsilon < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n\right)$. Atunci din Teorema 7 rezultă:

$$\exists N_1(\varepsilon) \in I\!N^* \text{ a.î. } \forall n \geq N_1(\varepsilon) \text{ are loc } x_n \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon$$

şi

$$\exists N_2(\varepsilon) \in I\!N^* \text{ a.î. } \forall n \geq N_2(\varepsilon) \text{ are loc } y_n \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n - \varepsilon.$$

Deci pentru $\varepsilon > 0$ mic, $\exists N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ a.î. $\forall n \geq N(\varepsilon)$:

$$(11) \qquad \begin{aligned} x_n y_n &\geq \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right) - \varepsilon \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n + \varepsilon^2 \geq \\ &\geq \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right) - \varepsilon M_1 - \varepsilon M_2 + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

unde M_1 şi M_2 sunt definite la punctul c).

Pentru un $z \in LIM(x_n y_n)$, $\exists$ un subşir $(x_{k_n} y_{k_n})_{n\geq 1}$ al şirului $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n} y_{k_n}) = z$, adică:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \widetilde{N}(\varepsilon) \in I\!N^* \text{ a.î. } \forall n \geq \widetilde{N}(\varepsilon) \text{ are loc } z - \varepsilon < x_{k_n} y_{k_n} < z + \varepsilon.$$

Deci pentru $\varepsilon > 0$ mic, pentru $\widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon),\ \widetilde{N}(\varepsilon)\}$, din inegalitatea de mai sus şi inegalităţile (11) deducem:

$$z + \varepsilon > x_{k_n} y_{k_n} \geq \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right) - \varepsilon M_1 - \varepsilon M_2 + \varepsilon^2,\ \forall\, n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon), \tag{12}$$

$(k_n \geq n \geq \widetilde{\widetilde{N}}(\varepsilon))$. Trecând la limită în inegalitatea (12) pentru $\varepsilon \to 0$ obţinem:

$$z \geq \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right).$$

Deoarece z este arbitrar în mulţimea $LIM(x_n y_n)$, pentru $z = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n)$, rezultă:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right).$$

24. Fie $(x_n)_{n\geq 1},\ (y_n)_{n\geq 1} \subset I\!\!R$. Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$ atunci:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right)$;

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right)$.

Rezolvare. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$ rezultă că $\exists\, n_0 \in I\!\!N$ a.î. $x_n > 0,\ \forall\, n \geq n_0$.

a) Din Teorema 6 aplicată şirului $(y_n)_{n\geq 1}$, $\exists$ un subşir $(y_{k_n})_{n\geq 1} \subset (y_n)_{n\geq 1},\ k_n \geq n$ astfel încât:

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

Considerând subşirul corespunzător $(x_{k_n})_{n\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 1}$, convergent la $\lim_{n\to\infty} x_n$, din relaţia de mai sus deducem că:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{k_n} y_{k_n}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right).$$

Deci:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right) \in LIM(x_n y_n) \quad \text{şi}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right). \tag{13}$$

Pentru $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n)$ rezultă că $\exists$ un subşir $(x_{p_n} y_{p_n})_{n\geq 1} \subset (x_n y_n)_{n\geq 1},\ p_n \geq n$ astfel încât:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{p_n} y_{p_n}) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

Deoarece şirul $\left(\dfrac{1}{x_{p_n}}\right)_{n\geq 1} \subset \left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ converge la $\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$ $(x_{p_n} > 0,\ \forall\, n \geq n_0)$, din egalitatea de mai sus deducem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{p_n}} (x_{p_n} y_{p_n}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n)$$

$$\iff$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n).$$

Deci:

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) \in LIM(y_n) \quad \text{şi} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \geq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n).$$

Rezultă astfel:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n), \tag{14}$$

$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0)$.

Inegalităţile (13) şi (14) ne conduc la egalitatea:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right).$$

b) Egalitatea de la punctul b) se demonstrează în mod asemănător egalităţii de la punctul a) sau se poate deduce din punctul a) cu ajutorul relaţiilor (8) şi anume:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n \cdot (-y_n)) \overset{a)}{=}$$

$$= -\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} (-y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n\right).$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

25. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3}$, $n \geq 1$; b) $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\theta$, $n \geq 1$; $\theta \in I\!R$;

c) $x_1 = 1$, $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x_{n-1}$, $n \geq 2$; d) $x_0 = 1$, $x_n = \sqrt{a x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $a > 0$ fixat.

26. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \left(1 + \frac{1^2}{n^3}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^3}\right)$, $n \geq 1$.

27. Folosind teorema lui Weierstrass, să se studieze şi apoi să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}x_n^2,\ n \geq 1;$ b) $x_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k},\ n \geq 1.$

28. Determinaţi numerele reale α şi β astfel încât şirul dat prin:

$$a_n = \sqrt[3]{3n^3 + 2n^2 + n + 1} - \alpha n - \beta$$

să fie convergent şi să aibă limita $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

29. Să se studieze natura şirurilor:

a) $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2^2 + \cdots + \sqrt{2^n}}}},\ n \geq 1;$

b) $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}},\ n \geq 1.$

30. Fie $x_1 > x_2 > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2},\ n \geq 2$. Să se arate că:

a) Subşirul $(x_{2k+1})_{k\geq 0}$ este descrescător, iar subşirul $(x_{2k})_{k\geq 1}$ este crescător.

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

31. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1} \in I\!R_+$ cu proprietatea $x_{n+1} \leq \dfrac{1}{n^2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),\ n \geq 1$. Să se arate că şirul $\widetilde{x}_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),\ n \geq 1$ este monoton descrescător şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$.

32. Fie $a \in I\!R,\ a > 0$ şi $p \in I\!N,\ p \geq 2$ două numere arbitrare fixate. Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$x_{n+1} = \dfrac{p\,a\,x_n}{(p-1)a + x_n^p},\ n \geq 1,\ 0 < x_1 < \sqrt[p]{a};$

$y_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)y_n + \dfrac{a}{y_n^{p-1}}\right],\ n \geq 1,\ y_1 > \sqrt[p]{a}$

sunt convergente la $\sqrt[p]{a}$.

33. Să se calculeze, folosind consecinţele teoremei lui Töplitz, limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = \dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}},\ n \geq 1,\ p \in I\!N;$

b) $x_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n},\ n \geq 1;$

c) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(p\,n)!}{(n!)^p}},\ n \geq 1,\ p \in I\!N^*.$

34. Să se arate folosind teorema lui Cauchy că şirurile:

$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2},\ n \geq 1;$

$b_n = \dfrac{\cos x}{3} + \dfrac{\cos 2x}{3^2} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{3^n},\ n \geq 1,\ x \in I\!R$

sunt convergente, iar şirurile:

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}, \ n \geq 1;$$

$$y_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}, \ n \geq 1$$

sunt divergente.

35. Să se determine mulţimea punctelor limită $LIM(a_n)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ şi $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}, \ n \geq 1$; b) $a_n = (-1)^n \Big/ \left(1 + \frac{1}{n} + e^{1/n}\right), \ n \geq 1$;

c) $a_n = [1 + (-1)^n] \cdot n^{(-1)^{n+1}} + \cos \frac{n\pi}{6}, \ n \geq 1$.

36. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$ mărginite. Să se arate că:

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

c) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \geq \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right)$;

d) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leq \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n\right)$,

ultimele două inegalităţi având loc pentru $(x_n)_{n\geq 1}, \ (y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R_+$.

37. Să se demonstreze că dacă $x_n > 0, \ \forall \, n \geq 1$ şi $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \neq 0$, iar:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1$$

atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

38. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ atunci şirurile $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ au aceleaşi puncte limită.

39. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset I\!R_+^*$. Să se arate că are loc următorul şir de inegalităţi:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

§2. SERII DE NUMERE REALE

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale şi $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul:

$$S_1 = a_1, \ S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots,$$

numit şirul sumelor parţiale. Perechea $((a_n), (S_n))$ se numeşte *serie de numere reale* şi se notează:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{sau} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(pentru şirul $(a_n)_{n\in I\!\!N}$ seria este definită $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, cu $S_0 = a_0,\ S_1 = a_0 + a_1, \ldots$).

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* şi are *suma* S dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent la S. Notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este *divergentă* dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ sau $-\infty$ spunem că suma seriei este $+\infty$, respectiv $-\infty$ şi notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, respectiv $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Proprietăţi ale seriilor:

a) Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni se obţine o serie cu aceeaşi natură cu seria dată. Dacă seria dată are sumă (finită sau infinită) seria obţinută are aceeaşi sumă.

b) Dacă la o serie se adaugă sau se înlătură un număr finit de termeni seria obţinută are aceeaşi natură cu seria dată.

c) Dacă termenii unei serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu suma finită sau infinită se asociază în grupe astfel încât fiecare grupă să conţină un număr finit de termeni consecutivi şi fiecare termen să aparţină la o singură grupă, atunci seria obţinută are aceeaşi natură şi aceeaşi sumă cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

d) Şirul sumelor parţiale ale unei serii convergente este mărginit.

e) Şirul termenilor unei serii convergente, $(a_n)_{n\geq 1}$, este convergent la 0.

f) Dacă şirul termenilor unei serii nu converge la zero atunci seria este divergentă.

g) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0,\ \forall\, n \geq 1$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale este mărginit.

Teorema 1 (criteriul general al lui Cauchy). Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!\!N$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon):\ \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\, p \in I\!\!N^*$.

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni nenegativi

1. *Criteriul de comparaţie cu mărginire* (I). Fie seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n,\ a_n,\ b_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$. Dacă $\exists\, M > 0$ şi $\exists\, n_0 \in I\!\!N^*$ a.î. $a_n \leq M\, b_n,\ \forall\, n \geq n_0$ atunci:

a) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă (notăm (C)) atunci şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă (notăm (D)) atunci şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (D).

2. *Criteriul de comparaţie cu mărginire* (II). Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a_n, $b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$. Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall\, n \geq n_0$ atunci:

a) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (C) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (D).

3. *Criteriul de comparaţie cu limite extreme.* Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, cu a_n, $b_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$. Notăm cu $l_* = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi $l^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Atunci:

a) Dacă $l^* \in [0, \infty)$ atunci $\begin{cases} \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (C)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)}; \\ \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (D)}; \end{cases}$

b) Dacă $l_* \in (0, \infty]$ atunci $\begin{cases} \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (C)}; \\ \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (D)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)}; \end{cases}$

c) Dacă $0 < l_* \leq l^* < \infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură, (se notează $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

3'. Pentru $l_* = l^* = l$ în Criteriul 3 se obţine *Criteriul de comparaţie cu limită.*

4. *Criteriul de condensare al lui Cauchy.* Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$. Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

5. *Criteriul raportului al lui D'Alembert cu mărginire.* Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Dacă $\exists\, \varrho < 1$ şi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varrho$, $\forall\, n \geq n_0$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

b) Dacă $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall\, n \geq n_1$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

6. *Criteriul raportului al lui D'Alembert cu limite extreme.* Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $l^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $l_* = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Atunci:

a) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $l_* > 1$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D);

c) Dacă $l_* \leq 1$ sau $l^* \geq 1$ nu putem preciza natura seriei.

6'. Pentru $l_* = l^* = l$ în Criteriul 6 se obţine *Criteriul raportului al lui D'Alembert cu limită.*

7. *Criteriul radicalului al lui Cauchy cu mărginire.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Dacă $\exists\, \varrho < 1$ şi $\exists\, n_0 \in I\!N^*$ a.î. $\sqrt[n]{a_n} \leq \varrho$, $\forall\, n \geq n_0$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $\exists\, n_1 \in I\!N^*$ a.î. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall\, n \geq n_1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

8. *Criteriul radicalului al lui Cauchy-Hadamard cu limită superioară.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Atunci:

a) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $l^* > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D);

c) Dacă $l^* = 1$ nu putem preciza natura seriei.

8'. Dacă $\exists\, l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ Criteriul 8 se numeşte *Criteriul radicalului al lui Cauchy cu limită.*

9. *Criteriul lui Raabe-Duhamel cu limite extreme.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $l_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Atunci:

a) Dacă $l_* > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D);

c) Dacă $l_* \leq 1$ sau $l^* \geq 1$ nu putem decide natura seriei.

9'. Pentru $l_* = l^* = l$ în Criteriul 9 se obţine *Criteriul lui Raabe-Duhamel cu limită.*

10. *Criteriul lui Bertrand cu limite extreme.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $l_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \ln n$, $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \ln n$.

a) Dacă $l_* > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D);

c) Dacă $l_* \leq 1$ sau $l^* \geq 1$ atunci nu putem decide natura seriei.

10'. Pentru $l^* = l_* = l$ în Criteriul 10 se obţine *Criteriul lui Bertrand cu limită.*

11. *Criteriul logaritmic.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$ şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$. Atunci:

a) Dacă $l > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C);

b) Dacă $l < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D);

c) Dacă $l = 1$ nu putem decide natura seriei.

12. *Criteriul integral al lui Mac-Laurin–Cauchy.* Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$. Presupunem că există o funcţie continuă şi monoton descrescătoare $f : [1, \infty) \to I\!\!R_+$ cu $f(n) = a_n$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă (divergentă) dacă şi numai dacă şirul $(F_n)_{n\geq 1}$, $F_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\, dx$ este convergent (respectiv divergent).

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

1. *Criteriul lui Leibniz.* Fie seria alternată $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ (sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$) cu $\alpha_n \geq 0$, $\forall\, n \in I\!\!N$. Dacă $(\alpha_n)_{n \in I\!\!N}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la 0 atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ este convergentă.

2. *Criteriul lui Dirichlet.* Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ cu termeni oarecare. Dacă:

a) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit;

b) şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, convergent la 0,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă (C).

3. *Criteriul lui Abel.* Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ cu termeni oarecare. Dacă:

a) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); b) şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit,

atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (C).

Serii absolut convergente

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte *absolut convergentă* (A.C.) dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte *semi-convergentă* sau *simplu convergentă* (S.C.).

Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Pentru studiul absolutei convergenţe a unei serii putem folosi oricare dintre criteriile de convergenţă de mai sus pentru serii cu termeni nenegativi. Vom enunţa în continuare două dintre aceste criterii, având în vedere concluziile deosebite ale lor:

1. *Criteriul raportului al lui D'Alembert.* Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni oarecare şi $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $l_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Atunci:

a) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A.C.).

b) Dacă $l_* > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

c) Dacă $l_* \leq 1$ sau $l^* \geq 1$ nu putem decide natura seriei.

2. *Criteriul radicalului al lui Cauchy.* Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni oarecare şi $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci:

a) Dacă $l^* < 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A.C.).

b) Dacă $l^* > 1$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

c) Dacă $l^* = 1$ nu putem preciza natura seriei.

Operaţii cu serii

Fie seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Seria sumă* este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, iar *seria produs cu un scalar* $\lambda \in I\!R$ este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$.

Teorema 2. Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente cu sumele S_1 şi S_2, iar $\lambda,\ \mu \in I\!R$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ este convergentă cu suma $\lambda S_1 + \mu S_2$.

Seria produs după Cauchy a seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este seria notată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ şi definită astfel:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1, \ \ n \geq 1.$$

Teorema 3 (Mertens). Produsul Cauchy al două serii convergente, dintre care măcar una este absolut convergentă, este o serie convergentă. Suma ei este egală cu produsul sumelor celor două serii.

Teorema 4. Produsul Cauchy al două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă cu suma egală cu produsul sumelor seriilor date.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se studieze şirul sumelor parţiale pentru următoarele serii, deducându-se apoi natura acestora şi suma lor, în caz de convergenţă:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n,\ a \neq 0$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-2^n}{3^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n+1}{(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3 \dfrac{a}{3^n},\ a \in \mathbb{R}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n \cos^2 \dfrac{a}{2^n}},\ a \in [0,1]$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Rezolvare. a) Şirul sumelor parţiale al acestei serii este:

$$S_n = a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-a^n}{1-a}, & \text{dacă } a \neq 1; \\ n & \text{dacă } a = 1. \end{cases}$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-a}, & \text{dacă } |a| < 1; \\ \infty, & \text{dacă } a \geq 1; \\ \nexists, & \text{dacă } a \leq -1. \end{cases}$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ sau $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ numită *seria geometrică* (cu raţia a) este convergentă şi are suma $S = \dfrac{a}{1-a}$, respectiv $S = \dfrac{1}{1-a}$ $\left(S_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a},\ a \neq 1 \text{ şi } S_n = n+1,\ a = 1\right)$ pentru $|a| < 1$. Pentru celelalte valori ale lui a, $|a| \geq 1$ seria este divergentă.

b) Şirul sumelor parţiale este:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) - 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\dfrac{3}{2}$ rezultă că seria este convergentă cu suma $S = -\dfrac{3}{2}$.

c) Avem:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{3n}{3(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$ rezultă că seria este convergentă cu suma $S = \frac{1}{3}$.

d) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{(2k-1)(2k)(2k+1)(2k+2)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{2k(2k+2)}\right] =$
$= \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} +\right.$
$\left.+\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1} +\right.$
$\left.+\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right).$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$, deci seria este convergentă cu suma $S = \frac{1}{4}$.

e) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^{k-1} \sin^3 \frac{a}{3^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^{k-1} \cdot \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{a}{3^k} - \sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) =$
$= \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3^k \sin\frac{a}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{a}{3} - \sin a + 3^2\sin\frac{a}{3^2} - 3\sin\frac{a}{3} + \cdots +\right.$
$\left.+ 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}} - 3^{n-2}\sin\frac{a}{3^{n-2}} + 3^n \sin\frac{a}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{4}\left(3^n \sin\frac{a}{3^n} - \sin a\right).$

Dacă $a = 0$ atunci $S_n = 0$, $\forall\, n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Dacă $a \neq 0$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\left[a \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\frac{a}{3^n}}\right) - \sin a\right] = \frac{1}{4}(a - \sin a).$$

Rezultă că seria este convergentă cu suma $S = \frac{1}{4}(a - \sin a)$, $\forall\, a \in I\!R$.

f) Dacă $a \neq 0$ avem:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k \cos^2\frac{a}{2^k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2^k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^{k-1}\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{4^k\sin^2\frac{a}{2^k}}\right) = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}} - \frac{1}{4^2\sin^2\frac{a}{2^2}} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{4^{n-2}\sin^2\frac{a}{2^{n-2}}} - \frac{1}{4^{n-1}\sin^2\frac{a}{2^{n-1}}} + \frac{1}{4^{n-1}\sin^2\frac{a}{2^{n-1}}} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{a^2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{a^2}$.

Dacă $a = 0$ atunci:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$. Rezultă că seria este convergentă cu suma:

$$S = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2 a} - \dfrac{1}{a^2}, & \text{dacă } a \in (0,1] \\ 1/3, & \text{dacă } a = 0. \end{cases}$$

g) Avem:
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n -$

$$- \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ rezultă că seria este divergentă.

h) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} -$
$-\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ deducem că seria este divergentă.

2. Să se arate că următoarele serii sunt divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 2^n\right)$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n+2}$.

Rezolvare. Seriile sunt divergente deoarece termenii generali ai lor nu tind la zero. Într-adevăr:

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, pentru $n \to \infty$; b) $a_n = \frac{1}{2^n} + 2^n \to \infty$, pentru $n \to \infty$;

c) $a_n = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n+2} \to 1$, pentru $n \to \infty$.

3. Folosind criteriul de condensare al lui Cauchy, să se arate că *seria armonică generalizată* (seria lui Riemann) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Rezolvare. Dacă $\alpha \leq 0$ atunci $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$, pentru $n \to \infty$, deci seria este divergentă. Dacă $\alpha > 0$, deoarece şirul $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, conform criteriului de condensare al lui Cauchy rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$. Am obţinut o serie geometrică cu raţia $2^{1-\alpha}$. Dacă $2^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$ este convergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă. Dacă $2^{1-\alpha} \geq 1$ deci $0 < \alpha \leq 1$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$ este divergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă. În concluzie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{(D)} & \text{dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$

4. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni nenegativi convergentă, cu $a_1 \neq 0$, iar $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Să se demonstreze că următoarele serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ şi b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$

sunt şi ele convergente.

Rezolvare. Deoarece ambele serii de mai sus sunt cu termeni nenegativi, pentru a demonstra convergenţa acestora este suficient (şi necesar) să arătăm că şirurile sumelor parţiale sunt mărginite. Din ipoteză, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ fiind convergentă, rezultă că $\exists\, M > 0$ a.î. $S_n \leq M$, $\forall\, n \geq 1$.

Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ şirul sumelor parţiale este:

$$\widetilde{S}_n = \widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2 + \cdots + \widetilde{a}_n = \frac{a_1}{S_1} + \frac{a_2}{S_2} + \cdots + \frac{a_n}{S_n} = \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} = \frac{S_n}{a_1} \leq \frac{M}{a_1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ şirul sumelor parţiale este:

$$\widetilde{\widetilde{S}}_n = \widetilde{\widetilde{a}}_1 + \widetilde{\widetilde{a}}_2 + \cdots + \widetilde{\widetilde{a}}_n = \frac{a_1}{S_1^2} + \frac{a_2}{S_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{a_1}{a_1^2} + \frac{a_2}{(a_1 + a_2)^2} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2} \leq \frac{a_1}{a_1^2} + \frac{a_2}{a_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2} = \frac{S_n}{a_1^2} \leq \frac{M}{a_1^2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Deducem astfel că cele două serii sunt convergente, având şirurile sumelor parţiale convergente (monoton crescătoare şi mărginite).

5. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă cu $a_n > 0$ $\forall\, n \geq 1$. Să se arate că următoarele serii sunt convergente:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{-1} + a_{n+1}^{-1}\right)^{-1}$.

Rezolvare. a) Folosind inegalitatea mediilor termenul general al primei serii de mai sus satisface inegalitatea:

$$\sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Deoarece $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sunt serii convergente, conform criteriului de comparaţie cu mărginire (I) rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ este convergentă.

b) Folosind din nou inegalitatea mediilor, pentru termenul general al seriei a doua obţinem:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Deoarece seria $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ este convergentă (conform punctului a)) rezultă din acelaşi criteriu de comparaţie cu mărginire (I) că şi seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{-1}+a_{n+1}^{-1}\right)^{-1}$ este convergentă.

6. Folosind criteriile de comparaţie să se deducă natura următoarelor serii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a \in I\!R_+^*$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{2n}{4n^2-1}$;
d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\sin\frac{\pi}{n(n+2)}}-1\right]$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$;
f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rezolvare. Mai întâi observăm că seriile de mai sus sunt cu termeni pozitivi, deci putem folosi criteriile de comparaţie.

a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}}=\sqrt{7}\in I\!R_+.$$

Deoarece seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$), deducem conform criteriului de comparaţie cu limită că şi seria noastră este convergentă.

b) Notăm cu $a_n = \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geq 1$. Dacă $0 < a < 1$ atunci folosim inegalitatea $a_n \leq a^n$, $\forall\, n \geq 1$. Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ fiind convergentă (Problema 1, a)), conform criteriului de comparaţie cu mărginire (I) rezultă că seria noastră este şi ea convergentă.

Dacă $a \geq 1$, din inegalitatea $n! \leq n^n$, $\forall\, n \geq 1$ deducem că $a_n \geq \dfrac{a^n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$. *Seria armonică* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ fiind divergentă, rezultă conform aceluiaşi criteriu de comparaţie că seria noastră este divergentă.

Deci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n \begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } a \in (0,1) \\ \text{(D)} & \text{dacă } a \in [1,\infty). \end{cases}$

c) Comparăm seria dată cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este divergentă. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\dfrac{2n}{4n^2-1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\dfrac{2n}{4n^2-1}}{\dfrac{2n}{4n^2-1}}\cdot\frac{2n^2}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\in I\!R_+^*$$

rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{2n}{4n^2-1}$ este divergentă.

d) Comparăm seria cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ care este convergentă. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{\pi}{n(n+2)}}-1}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{\pi}{n(n+2)}}-1}{\sin\dfrac{\pi}{n(n+2)}}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n(n+2)}}{\dfrac{\pi}{n(n+2)}}\cdot\frac{\pi n^2}{n(n+2)}=\pi\in I\!R_+^*.$$

Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{\sin\frac{\pi}{n(n+2)}}-1\right]$ este convergentă.

e) Termenul general al seriei este $a_n=\ln\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Vom compara această serie cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ divergentă. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\cdot n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to I\!R$, $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. Deoarece:

$$\lim_{x\to 0_+}f(x)=\lim_{x\to 0_+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(conform teoremei lui l'Hôspital) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{6}\in I\!R_+^*$, (notăm $\lim\limits_{x\to 0_+}$ limita pentru $x\to 0$, $x>0$, iar $\lim\limits_{x\to 0_-}$ limita pentru $x\to 0$, $x<0$). Deducem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

f) Deoarece:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}},\quad\forall\, n\geq 1$$

(se demonstrează prin inducţie matematică), rezultă că:

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n},\ \ \forall\, n\geq 1.$$

Seria $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ fiind divergentă, conform criteriului de comparaţie cu mărginire (I), rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

7. Să se studieze cu ajutorul criteriului radicalului al lui Cauchy următoarele serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2+7n+4}{2n^2+5n+7}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right]^n$, $a>0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right]^n$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a^n$, $a>0$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5+(-1)^n}{2}\right]^n$.

Rezolvare. Notăm cu a_n termenul general al seriilor de mai sus; $a_n>0$, $\forall\, n\geq 1$. Avem:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+7n+4}{2n^2+5n+7} = 3 > 1.$

Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+a)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+a)}+n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(a+1)+a}{\sqrt{(n+1)(n+a)}+n} = \frac{a+1}{2}.$

Dacă $\frac{a+1}{2}<1 \Leftrightarrow a<1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); dacă $\frac{a+1}{2}>1 \Leftrightarrow a>1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D). Dacă $\frac{a+1}{2}=1 \Leftrightarrow a=1$ atunci seria are forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ fiind o serie divergentă ($a_n = 1 \not\to 0$, pentru $n\to\infty$).

Deci pentru $a\in(0,1)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), iar pentru $a\in[1,\infty)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+1-n^3+n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}} = \frac{2}{3} < 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

d) Avem : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$. Dacă $a<1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); dacă $a>1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D),

iar dacă $a = 1$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ şi este divergentă, deoarece $a_n =$
$= \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$, pentru $n \to \infty$.

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } a \in (0,1) \\ \text{(D)} & \text{dacă } a \in [1,\infty). \end{cases}$

e) Folosim criteriul lui Cauchy-Hadamard cu limită superioară. Avem:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{5+(-1)^n}{2} = 3 > 1,$$

de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

8. Să se arate că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ este convergentă cu suma e şi apoi, folosind această serie să se arate că numărul e este iraţional.

Rezolvare. Conform criteriului raportului cu limită avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ $\left(a_n = \dfrac{1}{n!}\right)$ este convergentă.

De la şiruri, Problema 4, §1, ştim că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$, unde $S_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$. Deducem astfel că suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ este $S = e$.

În continuare presupunem prin reducere la absurd că e este un număr raţional, deci $e = \dfrac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in Z^*$. Atunci:

$$e(n-1)! = \frac{m}{n}(n-1)! \quad \Leftrightarrow \quad en! = m(n-1)! \quad \Rightarrow \quad e\cdot n! \in Z.$$

Apoi:

$$0 < e - S_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} <$$

$$< \frac{1}{n\cdot n!},$$

de unde prin înmulţirea cu $n!$ obţinem:

$$0 < e\cdot n! - S_n\cdot n! < \frac{1}{n}.$$

Deoarece $S_n \cdot n! \in Z$ şi $e \cdot n! \in Z$ inegalitatea de mai sus este imposibilă. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci numărul e este iraţional. Mai mult, numărul e este un număr transcendent (adică nu satisface o ecuaţie de forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots +$ $+a_{n-1}x + a_n = 0$ cu coeficienţi numere întregi sau raţionale), după cum a arătat la sfârşitul secolului XIX Ch. Hermite.

9. Să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi cu ajutorul criteriilor lui D'Alembert, al lui Raabe-Duhamel sau al lui Bertrand:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s},\ x > 0,\ s > 0$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n},\ a > 0$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots [2+5(n-1)]}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdots [3+5(n-1)]}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\right]^2,\ \alpha \in I\!R,\ \alpha \neq -1, -2, \ldots$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a+r)\cdots(a+nr-r)}{b(b+r)\cdots(b+nr-r)}\right]^{\alpha},\ a > 0,\ b > 0,\ r > 0,\ \alpha \in I\!R$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 \cdots (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdots (4n-1)^2}$; i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^{\alpha},\ \alpha \in I\!R.$

Rezolvare. Notăm cu a_n termenul general al seriilor de mai sus.

a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^s} \cdot \frac{n^s}{x^n} = x.$$

Dacă $x < 1$ atunci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, conform criteriului raportului al lui D'Alembert cu limită. Dacă $x > 1$ seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, iar dacă $x = 1$ seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, adică este serie armonică generalizată care este convergentă pentru $s > 1$ şi divergentă pentru $s \leq 1$.

Deci: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C) dacă } x < 1 \text{ sau } \{x = 1 \text{ şi } s > 1\} \\ \text{(D) dacă } x > 1 \text{ sau } \{x = 1 \text{ şi } s \leq 1\}. \end{cases}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$; rezultă că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

c) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot a = \frac{a}{e}.$$

Dacă $a < e$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); dacă $a > e$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D), iar dacă $a = e$, din inegalitatea:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1, \ \forall\, n \geq 1,$$

deducem, conform criteriului lui D'Alembert, forma cu mărginire, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } 0 < a < e \\ \text{(D)} & \text{dacă } a \geq e. \end{cases}$

d) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5n}{3+5n} = 1$, vom încerca un criteriu mai puternic, şi anume criteriul lui Raabe-Duhamel cu limită:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3+5n}{2+5n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

e) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{(2n+2)(2n+3)-(2n+1)^2}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

Seria se mai poate studia cu ajutorul criteriului de comparaţie cu mărginire (I), folosind inegalitatea:

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Rezultă atunci că:

$$a_n \leq \frac{1}{(2n+1)^{3/2}}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^{3/2}}$ fiind convergentă (are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ convergentă) deducem că şi seria noastră $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

f) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{\alpha-n}{\alpha+n+1}\right)^2 = 1,$$

iar:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{(2n+1)(\alpha+n+1)^2-(2n+3)(\alpha-n)^2}{(2n+3)(\alpha-n)^2} = 4\alpha+1.$$

Dacă $4\alpha+1>1 \Leftrightarrow \alpha>0$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); dacă $4\alpha+1<1 \Leftrightarrow \alpha<0$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D), iar dacă $4\alpha+1=1 \Leftrightarrow \alpha=0$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ este convergentă.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C) dacă } \alpha\geq 0 \\ \text{(D) dacă } \alpha<0. \end{cases}$

g) Avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+nr}{b+nr}\right)^{\alpha} = 1$, iar:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{b+nr}{a+nr}\right)^{\alpha}-1\right].$$

Să considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to I\!R$, $f(x)=x\cdot\left[\left(\frac{b+xr}{a+xr}\right)^{\alpha}-1\right]$. Deoarece:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{b+xr}{a+xr}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{b+xr}{a+xr}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{r(a-b)}{(a+xr)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha r(b-a)x^2}{(a+xr)^2}\cdot\left(\frac{b+xr}{a+xr}\right)^{\alpha-1} = \frac{\alpha r(b-a)}{r^2} = \frac{\alpha(b-a)}{r},$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{\alpha(b-a)}{r}$. Deducem astfel că dacă $\alpha(b-a)<r$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D), iar dacă $\alpha(b-a)>r$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C). Pentru $\alpha(b-a)=r \Leftrightarrow \alpha=\frac{r}{b-a}$ $\left(a\neq b;\ \text{pentru } a=b,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ (D)}\right)$ aplicăm criteriul lui Bertrand:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\cdot\ln n = \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\left(\frac{b+nr}{a+nr}\right)^{\frac{r}{b-a}}-1\right]-1\right\}\cdot\ln n.$$

Considerând funcţia corespunzătoare, avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[\left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}}-1\right]-1}{\frac{1}{\ln x}} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}}-1+\frac{xr}{b-a}\left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}-1}\cdot\frac{r(a-b)}{(a+rx)^2}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}-1} \cdot \left(\frac{b+rx}{a+rx} - \frac{xr^2}{(a+rx)^2}\right) - 1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}-1} \cdot \frac{ab+arx+brx+r^2x^2-r^2x}{(a+rx)^2} - 1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b+rx}{a+rx}\right)^{\frac{r}{b-a}-2} \cdot \frac{x^2}{(a+rx)^5} \cdot \frac{\ln^3 x}{\ln x + 2} \cdot \{-(r-b+a)r(a+rx)(ab+arx+brx-$$

$$-r^2x+r^2x^2)+(b+rx)[(ar+br-r^2+2r^2x)(a+rx)^2-2r(a+rx)(ab+arx+brx-$$

$$-xr^2+r^2x^2)]\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^3 x}{\ln x+2} \cdot \frac{x^4(\ldots)+\ldots}{(a+rx)^5} = 0.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \cdot \ln n = 0 < 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

Deci: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C) dacă } \alpha(b-a) > r, \\ \text{(D) dacă } \alpha(b-a) \le r. \end{cases}$

h) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n+1)^2}{(4n+3)^2} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(4n+3)^2}{(4n+1)^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(16n+8)}{(4n+1)^2} = 1.$$

Aplicăm criteriul lui Bertrand:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{16n^2+8n}{(4n+1)^2} - 1\right) \cdot \ln n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{(4n+1)^2} = 0 < 1.$$

Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

i) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^{\alpha}$ este un caz particular al seriei de la punctul g) cu $a = 1$, $b = 2$ şi $r = 2$. Concluziile sunt următoarele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(C) dacă } \alpha > 2 \\ \text{(D) dacă } \alpha \le 2. \end{cases}$$

Seria de mai sus se poate studia şi cu ajutorul criteriului de comparaţie cu mărginire (I). Din dubla inegalitate:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \forall\, n \ge 1$$

rezultă că:

$$\frac{1}{2^\alpha \cdot n^{\alpha/2}} \le a_n \le \frac{1}{(2n+1)^{\alpha/2}}, \quad \forall\, n \ge 1.$$

Deci seria noastră are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$, adică este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi divergentă pentru $\alpha \le 2$.

10. Folosind criteriul raportului al lui D'Alembert cu limite extreme să se studieze următoarele serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{2}-2n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{2}+2n}$.

Rezolvare. a) Notăm cu $a_n = 2^{\frac{(-1)^n}{2}-2n}$. Atunci:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}-2(n+1)}}{2^{\frac{(-1)^n}{2}-2n}} = 2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}-\frac{(-1)^n}{2}-2} = 2^{(-1)^{n+1}-2}.$$

Avem: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{1-2} = \frac{1}{2} < 1$ $\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1-2} = \frac{1}{8}\right)$. Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este o serie convergentă.

b) Notând cu $a_n = 2^{\frac{(-1)^n}{2}+2n}$, avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}+2(n+1)}}{2^{\frac{(-1)^n}{2}+2n}} = 2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}-\frac{(-1)^n}{2}+2} = 2^{(-1)^{n+1}+2}.$$

Atunci: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+2} = 2 > 1$ $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{1+2} = 8\right)$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

11. Să se arate că pentru următoarele serii se poate aplica criteriul radicalului al lui Cauchy-Hadamard, dar criteriul raportului al lui D'Alembert cu limite extreme, nu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n-n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$.

Rezolvare. a) Notând cu $a_n = 2^{(-1)^n-n}$ avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n-n}} = 2^{(-1)^{n+1}-(-1)^n-1} = 2^{2\cdot(-1)^{n+1}-1}.$$

Deoarece $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{2-1} = 2$, iar $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-2-1} = \frac{1}{8}$ nu putem aplica criteriul raportului al lui D'Alembert cu limite extreme.

Calculând însă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ obţinem:

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(2^{\frac{(-1)^n}{n}-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Deducem astfel cu ajutorul criteriului radicalului al lui Cauchy-Hadamard că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Procedând asemănător, avem:
$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}2^{1+2\cdot(-1)^n}=2^3=8$ şi $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{1-2}=\frac{1}{2}$,
iar $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}2^{1-\frac{(-1)^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{(-1)^n}{n}}=2>1$.
Deducem astfel că seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

12. Să se studieze următoarele serii, folosind criteriul logaritmic:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln x}$, $x>0$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

Rezolvare. a) Notăm cu $a_n=n^{\ln x}$, $n\geq 1$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^{-\ln x}}{\ln n}=-\ln x.$$

Dacă $-\ln x>1 \Leftrightarrow x<e^{-1}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă; dacă $-\ln x<1 \Leftrightarrow x>$ $>e^{-1}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă. Pentru $x=e^{-1}$ seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln e^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, adică este seria armonică, divergentă.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \begin{cases}\text{(C)} & \text{dacă } 0<x<e^{-1}\\ \text{(D)} & \text{dacă } x\geq e^{-1}.\end{cases}$

b) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln\ln n)^{\ln n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\ln(\ln\ln n)=\infty>1,$$

deci seria dată este convergentă.

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)^{\ln\ln n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0<1,$

deci seria este divergentă.

13. Folosind criteriul integral al lui Mac-Laurin–Cauchy, să se studieze următoarele serii:
a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$, $p>0$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^q}$, $q>0$.

Rezolvare. a) Considerăm funcţia $f:[2,\infty)\to I\!R_+$, $f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$ continuă şi monoton descrescătoare. Atunci, dacă $p\neq 1$ avem:

$$F_n=\int_2^n f(x)\,dx=\int_2^n\frac{1}{x\ln^p x}\,dx=\left.\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right|_2^n=\frac{1}{1-p}\left[(\ln n)^{-p+1}-(\ln 2)^{-p+1}\right].$$

Şirul $(F_n)_{n\geq 2}$ este convergent dacă şi numai dacă $-p+1<0 \Leftrightarrow p>1$ şi este divergent dacă şi numai dacă $-p+1>0 \Leftrightarrow p<1$. Dacă $p=1$ atunci:

$$F_n = \int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\big|_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \to \infty, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Rezultă că seria este $\begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } p > 1 \\ \text{(D)} & \text{dacă } 0 < p \leq 1. \end{cases}$

b) Asemănător, dacă $q \neq 1$ avem:

$$F_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^q} \overset{\ln x = y}{=} \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dy}{y(\ln y)^q} = \left.\frac{(\ln y)^{-q+1}}{-q+1}\right|_{\ln 2}^{\ln n} =$$
$$= \frac{1}{1-q}\left[(\ln\ln n)^{1-q} - (\ln\ln 2)^{1-q}\right].$$

Şirul $(F_n)_{n\geq 2}$ este convergent dacă $q > 1$ şi divergent dacă $q < 1$. Dacă $q = 1$:

$$F_n = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dy}{y \ln y} = \ln(\ln y)\Big|_{\ln 2}^{\ln n} = \ln(\ln\ln n) - \ln(\ln\ln 2) \to \infty,$$

pentru $n \to \infty$.

Rezultă că seria dată este $\begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } q > 1 \\ \text{(D)} & \text{dacă } 0 < q \leq 1. \end{cases}$

14. Să se studieze simpla şi absoluta convergenţă a următoarelor serii cu termeni oarecare:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[5]{n}}{n+1}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$, $x \in I\!R$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right]^{\alpha}$, $\alpha \in I\!R$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$, $\alpha \in I\!R$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^{\beta}}$, $\alpha \in I\!R$, $\beta \in I\!R$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$; *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\lg(n+1)}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\cdot\sin^{2n}a}{n+1}$, $a \in I\!R$.

Rezolvare. Vom studia seriile de mai sus, serii cu termeni oarecare, cercetând mai întâi absoluta lor convergenţă, acolo unde se poate. Dacă ele vor fi absolut convergente atunci va rezulta că sunt şi convergente. Dacă nu vor fi absolut convergente vom studia cu unul dintre criteriile corespunzătoare simpla convergenţă a lor. Notăm cu a_n termenul general al seriilor.

a) Seria modulelor este $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n}}{n+1}$. Comparăm această serie cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/5}}$ care este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = \dfrac{4}{5} < 1$); obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[5]{n}}{n+1}}{\frac{1}{n^{4/5}}} = 1 \in I\!R_+^*,$$

de unde rezultă că seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, deci seria noastră nu este absolut convergentă.

Deoarece seria are forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$, cu $b_n = \dfrac{\sqrt[5]{n}}{n+1}$ vom încerca să aplicăm criteriul lui Leibniz, studiind şirul $(b_n)_{n\geq 1}$. Avem:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt[5]{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \sqrt[5]{\frac{(n+1)^6}{n(n+2)^5}} < 1, \ \ \forall n \geq 1,$$

deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Rezultă atunci, conform criteriului lui Leibniz că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este semi-convergentă (S.C.).

b) Seria modulelor este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3^n}$. Studiem această serie cu termeni pozitivi cu criteriul lui D'Alembert. Notăm cu $b_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$; avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n+1} = \frac{1}{3} < 1.$$

Deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă (A.C.).

c) Vom studia această serie cu ajutorul criteriului lui Dirichlet, considerând şirul $b_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$, $n \geq 1$ şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$. Deoarece şirul $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent la zero, rezultă că şi şirul mediilor aritmetice, adică $(b_n)_{n\geq 1}$ converge la zero. În plus, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător. Într-adevăr:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n+1} < 1, \quad \text{deoarece } 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \frac{n}{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ calculăm suma parţială de ordinul n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+1)\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{dacă } x \neq 2k\pi, \ k \in Z \\ 0, & \text{dacă } x = 2k\pi, \ k \in Z. \end{cases}$$

Dacă $x = 2k\pi, \ k \in Z$ atunci seria noastră devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$, o serie (absolut) convergentă. Dacă $x \neq 2k\pi$ atunci $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, $\forall n \geq 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit. Conform criteriului lui Dirichlet rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n c_n$

este convergentă. În concluzie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), $\forall\, x \in I\!R$.

Pentru a studia absoluta convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, vom studia seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Din inegalitatea:

$$|\sin nx| \geq \sin^2 nx, \ \ \forall\, n \geq 1, \ \ \forall\, x \in I\!R,$$

deducem, pentru $x \neq k\pi, \ k \in Z$, că:

$$|a_n| \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \cdot \frac{1 - \cos 2nx}{2}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2nx}{2}\right)$ este divergentă, fiind diferenţa dintre o serie divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2n}$ (termenul său general este $\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2n} \geq \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 1$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ este divergentă) şi o serie convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\cos nx}{2n}$ (după cum rezultă din criteriul lui Dirichlet, considerând şirul $b'_n = \frac{b_n}{2}$, $n \geq 1$, monoton descrescător la zero şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos 2nx$, care are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$|\widetilde{S}_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx\right| = \left|\frac{\sin nx \cdot \cos(n+1)x}{\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}, \ \ \forall\, n \geq 1).$$

Deducem astfel că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este absolut convergentă, pentru $x \neq k\pi$, $k \in Z$. Fiind o serie convergentă (am văzut mai sus aplicând criteriul lui Dirichlet) rezultă că pentru $x \neq k\pi$, $k \in Z$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este simplu convergentă. Pentru $x = k\pi, \ k \in Z$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ este (absolut) convergentă.

d) Seria modulelor este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^{\alpha}$, studiată în Problema 9, i). Rezultă că pentru $\alpha > 2$ această serie este convergentă, deci seria noastră $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă. Dacă $\alpha \leq 2$ seria modulelor este divergentă, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este absolut convergentă.

Pentru $\alpha \in (0, 2]$ vom demonstra cu ajutorul criteriului lui Leibniz că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă (deci simplu convergentă). Într-adevăr şirul $b_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^{\alpha}$ este monoton descrescător: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\alpha} < 1, \ \ \forall\, n \geq 1$, iar din relaţia:

$$0 \leq b_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^{\alpha}, \quad \forall n \geq 1,$$

prin trecere la limită obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este simplu convergentă pentru $\alpha \in (0,2]$.

Dacă $\alpha = 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ este divergentă, iar dacă $\alpha < 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^{-\alpha}$ este divergentă, deoarece $a_{2k} \to -\infty$ şi $a_{2k+1} \to +\infty$, pentru $k \to \infty$. Deci pentru $\alpha \leq 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

În concluzie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } \alpha > 2 \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } \alpha \in (0,2] \\ \text{(D)} & \text{dacă } \alpha \leq 0. \end{cases}$

e) Seria modulelor este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}\cdot\sqrt[n]{n}}$ care are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^{\alpha}\cdot\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha}}} = 1 \in I\!R_+^*.$$

Deci pentru $\alpha > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este convergentă, iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă. Pentru $\alpha \leq 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este divergentă, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este absolut convergentă.

Pentru $\alpha \in (0,1]$ vom aplica seriei noastre criteriul lui Abel, considerând seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ şi şirul $b_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $n \geq 1$. Conform criteriului lui Leibniz, şirul $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n\geq 1}$ fiind monoton descrescător la 0, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ este convergentă (simplu). Şirul $(b_n)_{n\geq 3}$ este monoton crescător, deoarece:

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \quad\Leftrightarrow\quad (n+1)^n < n^{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n, \quad n \geq 3,$$

şi mărginit $0 < b_n \leq 1, \ \forall n \geq 1$.

Conform criteriului lui Abel rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă (simplu, deoarece seria modulelor este divergentă).

Pentru $\alpha \leq 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, deoarece $a_n \not\to 0$, pentru $n \to \infty$.

În concluzie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } \alpha \in (0,1] \\ \text{(D)} & \text{dacă } \alpha \leq 0. \end{cases}$

f) Dacă $\beta > 1$ atunci folosim inegalitatea: $|a_n| \leq \frac{1}{n^\beta}, \ \forall\, n \geq 1$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ fiind convergentă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

Dacă $\beta \in (0,1]$ vom studia seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu ajutorul criteriului lui Dirichlet, considerând seria $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha$ şi şirul $b_n = \frac{1}{n^\beta}, \ n \geq 1$. Pentru $\alpha \neq 2k\pi, \ k \in Z$ şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha$ este mărginit. Într-adevăr:

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha \right| = \left| \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ fiind monoton descrescător la zero, din criteriul lui Dirichlet deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, pentru $\alpha \neq 2k\pi, \ k \in Z$. Dacă $\alpha = 2k\pi, \ k \in Z$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ este divergentă, ($\beta \in (0,1]$).

Pentru a studia absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ în cazul $\beta \in (0,1]$, vom studia seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^\beta}$. Din inegalitatea:

$$|\cos n\alpha| \geq \cos^2 n\alpha, \ \ \forall\, n \geq 1, \ \forall\, \alpha \in I\!R,$$

deducem:

$$|a_n| \geq \frac{\cos^2 n\alpha}{n^\beta} = \frac{1 + \cos 2n\alpha}{2n^\beta}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n\alpha}{2n^\beta}$ este o serie divergentă. Într-adevăr, pentru $\alpha = k\pi, \ k \in Z$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ divergentă, ($\beta \in (0,1]$). Pentru $\alpha \neq k\pi, \ k \in Z$ seria de mai sus este suma dintre o serie divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^\beta}$ şi o serie convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{2n^\beta}$ (conform criteriului lui Dirichlet, considerând şirul $b'_n = \frac{1}{2n^\beta}, \ n \geq 1$ monoton descrescător la zero şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\alpha$ care are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$|\widetilde{S}_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\alpha\right| = \left|\frac{\sin n\alpha \cdot \cos(n+1)\alpha}{\sin \alpha}\right| \leq \frac{1}{|\sin \alpha|}, \ \ \forall\, n \geq 1. \Big)$$

Deducem astfel că în acest caz $\beta \in (0,1]$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, $\forall\, \alpha \in I\!R$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este simplu convergentă, dacă $\alpha \neq 2k\pi,\ k \in Z$ (am văzut mai sus că este convergentă, aplicând criteriul lui Dirichlet). Pentru $\alpha = 2k\pi,\ k \in Z$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $\beta \leq 0$, deoarece $a_n \not\to 0$, pentru $n \to \infty$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

În concluzie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } \beta > 1 \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } \beta \in (0,1] \text{ şi } \alpha \neq 2k\pi,\ k \in Z \\ \text{(D)} & \text{dacă } \{\beta \in (0,1] \text{ şi } \alpha = 2k\pi,\ k \in Z\} \text{ sau } \beta \leq 0. \end{cases}$

g) Avem:

$$|a_n| = \frac{|\sin n| \cdot \sin \frac{1}{n}}{n^\alpha} \leq \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ care este convergentă pentru $\alpha > 0$, $(\alpha + 1 > 1)$. Într-adevăr:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}} = 1 \in I\!R_+^*.$$

Conform criteriului de comparaţie cu limită rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}$ este convergentă. Deci folosind criteriul de comparaţie cu mărginire (I) deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă. Rezultă că seria noastră $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă pentru $\forall\, \alpha > 0$.

h) Studiem seria modulelor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin \frac{n\pi}{3}\right|}{\lg(n+1)} = \left|\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\lg 2}\right| + \left|\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\lg 3}\right| + \left|\frac{\sin \frac{3\pi}{3}}{\lg 4}\right| + \left|\frac{\sin \frac{4\pi}{3}}{\lg 5}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{\lg 6}\right| + \left|\frac{\sin \frac{6\pi}{3}}{\lg 7}\right| + \cdots .$$

Fiind o serie cu termeni nenegativi, aceasta are aceeaşi natură cu seria obţinută prin gruparea a câte trei termeni consecutivi ai seriei:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\frac{0}{\lg 4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\lg 5}+\frac{1}{\lg 6}+\frac{0}{\lg 7}\right)+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{\lg(3n-1)}+\frac{1}{\lg(3n)}+\frac{0}{\lg(3n+1)}\right].$$

Notăm cu $b_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\dfrac{1}{\lg(3n-1)}+\dfrac{1}{\lg(3n)}\right]$ termenul general al seriei de mai sus. Avem:

$$b_n>\frac{2\sqrt{3}}{2\lg(3n)}=\frac{\sqrt{3}}{\lg(3n)}>\frac{\sqrt{3}}{3n},\ \ \forall\, n\geq 1.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{3n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este divergentă, deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este divergentă. Deducem de aici că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nu este absolut convergentă.

Pentru a studia simpla convergenţă aplicăm criteriul lui Dirichlet. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{3}\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{n}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}\right|\leq 2,\ \ \forall\, n\geq 1,$$

iar şirul $\left(\dfrac{1}{\lg(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător la 0. Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este o serie simplu convergentă.

i) Aplicăm criteriul radicalului al lui Cauchy pentru serii cu termeni oarecare; avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\sin^2 a}{\sqrt[n]{n+1}}=2\sin^2 a.$$

Dacă $2\sin^2 a<1\ \Leftrightarrow\ |\sin a|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ a\in\bigcup_{k\in Z}\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este absolut convergentă.

Dacă $2\sin^2 a>1\ \Leftrightarrow\ |\sin a|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ a\in\bigcup_{k\in Z}\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Dacă $2\sin^2 a=1\ \Leftrightarrow\ a=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ este simplu convergentă, deoarece seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ fiind convergentă, conform criteriului lui Leibniz (şirul $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător la 0.)

15. Să se arate că dacă într-o serie alternată $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n$ care satisface condiţiile din criteriul lui Leibniz (şirul $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător cu limita egală cu 0), înlocuim suma seriei cu suma parţială S_n facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat α_{n+1}. Eroarea este prin lipsă dacă n este par şi prin adaos dacă n este impar.

Rezolvare. Fie:

$$S_n = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_n, \ \ n \in I\!N,$$

suma parţială de ordinul n. Dacă p este par atunci:

$$S_{n+p} = S_n + (-1)^{n+2}\alpha_{n+1} + (-1)^{n+3}\alpha_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p+1}\alpha_{n+p} =$$
$$= S_n + (-1)^{n+2} \cdot [\underbrace{(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})}_{\geq 0}].$$

Deci:

$$|S_{n+p} - S_n| = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} -$$
$$- \cdots - \underbrace{(\alpha_{n+p-2} - \alpha_{n+p-1})}_{\geq 0} - \alpha_{n+p} < \alpha_{n+1}, \ \ \forall\, n \in I\!N,$$

(şirul $(\alpha_n)_{n\in I\!N}$ este monoton descrescător).

Dacă p este impar atunci:

$$S_{n+p} = S_n + (-1)^{n+2} \cdot [\alpha_{n+1} - (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) - \cdots - (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})],$$

de unde rezultă că:

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \alpha_{n+1}, \ \ \forall\, n \in I\!N.$$

Deci pentru $\forall\, p \in I\!N$ avem: $|S_{n+p} - S_n| \leq \alpha_{n+1}$, $\forall\, n \in I\!N$. Trecând la limită pentru $p \to \infty$ în inegalitatea de mai sus, rezultă că:

$$|S - S_n| \leq \alpha_{n+1}, \ \ \forall\, n \in I\!N.$$

Dacă n este par atunci $S - S_n = (-1)^{n+2}\alpha_{n+1} + \cdots \geq 0$, deci eroarea este prin lipsă ($S_n \leq S$), iar dacă n este impar atunci $S - S_n = (-1)^{n+2}\alpha_{n+1} + \cdots \leq 0$, deci eroarea este prin adaos ($S_n \geq S$).

16. Să se afle rangul minim al sumei parţiale a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ care aproximează suma S a acestei serii cu o eroare inferioară lui $\varepsilon = 10^{-4}$ şi să se precizeze dacă aproximarea este prin lipsă sau prin adaos.

Rezolvare. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ este o serie tip Leibniz şi, conform Problemei 15

$(\alpha_0 = 0,\ \ \alpha_n = 1/n^2,\ n \geq 1)$: $|S - S_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$,

unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k^2}$. Impunem condiţia $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n+1 > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}} = 100$. Găsim rangul minim $n_0 = 100$ pentru care $|S - S_n| < 10^{-4}$. Suma parţială S_{100} aproximează suma S a seriei date prin lipsă ($S_{100} < S$) cu o eroare inferioară lui 10^{-4}.

17. Să se calculeze seria produs pentru următoarele serii, comentându-se rezultatele:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(a+n)}$, $a > 0$;

b) $\left[1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right]$ şi $\left[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Rezolvare. a) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{n!}$ este (absolut) convergentă, conform criteriului lui D'Alembert, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(a+n)}$ cu termenul general $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!(a+n)}$ este absolut convergentă, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a+n}{(n+1)(a+n+1)} = 0 < 1.$$

Aplicând Teorema 4 rezultă că seria produs este absolut convergentă cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii. Pentru a determina această serie calculăm termenul său general:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1 \cdot \frac{(-1)^n}{n!(a+n)} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(a+n-1)} +$$
$$+ \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!(a+n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(-1)^1}{1!(a+1)} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(a+n-k)} =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{a+n-k} \overset{n-k:=k}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{a+k}.$$

Pentru a determina suma de mai sus pornim de la identitatea:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = (1-x)^n,$$

pe care o înmulţim membru cu membru cu x^{a-1}, $x \in I\!R$. Obţinem:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{k+a-1} = (1-x)^n \cdot x^{a-1}, \ \ \forall\, x \in I\!R.$$

Integrând egalitatea de mai sus pe intervalul $[0,1]$ rezultă:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \left.\frac{x^{a+k}}{a+k}\right|_0^1 = \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^{a-1}\, dx,$$

deci:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{a+k} = \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^{a-1}\, dx.$$

Pentru a calcula în continuare integrala $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \cdot x^{a-1}\, dx$ vom determina o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-1}. Avem:

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^{a-1}\, dx = \int_0^1 (1-x)^n \cdot \left(\frac{x^a}{a}\right)' dx = \left.\frac{x^a}{a}(1-x)^n\right|_0^1 +$$
$$+\frac{n}{a}\int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^a\, dx = \frac{n}{a}\int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^{a-1} \cdot [1-(1-x)]\, dx =$$
$$= \frac{n}{a} I_{n-1} - \frac{n}{a} I_n,$$

de unde rezultă că:

$$I_n = \frac{n}{a+n} I_{n-1}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Deoarece $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a}$, deducem din relaţia de recurenţă de mai sus că:

$$I_n = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(a+n)(a+n-1)\cdots(a+1)a} = \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}.$$

Revenind la termenul general c_n al seriei produs, avem:

$$c_n = \frac{1}{n!} I_n = \frac{1}{a(a+1)\cdots(a+n)}, \ \ n \in I\!N.$$

Deci:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(a+n)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a(a+1)\cdots(a+n)}.$$

b) Notăm cu $a_n = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, $n \geq 1$ $(a_0 = 1)$ termenul general al primei serii, iar cu $b_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$, $n \geq 1$ $(b_0 = 1)$ termenul general al celei de-a doua serii. Deoarece $a_n \not\to 0$ şi $b_n \not\to 0$ pentru $n \to \infty$ rezultă că ambele serii sunt divergente.

Calculând produsul acestor serii obţinem o serie cu termenul general c_n:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) -$$
$$-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - 2^{n-1} - \frac{1}{2^n} - 2^{n-2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right] =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - 2 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2-1} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\right] =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n, \ \forall\, n \in I\!N.$$

Deci seria produs este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, o serie convergentă (este seria geometrică cu raţia $\frac{3}{4} < 1$).

Această problemă (b)) este un exemplu în care produsul a două serii divergente este o serie absolut convergentă. Deducem de aici că proprietatea de convergenţă pentru seriile factor nu este o condiţie necesară pentru convergenţa seriei produs.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ este simplu convergentă, conform criteriului lui Leibniz, seria modulelor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ fiind divergentă (are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentă).

Calculăm termenul general al seriei produs (putere):

$$c_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots a_{n-1} a_1 + a_n a_0 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}, \ \ \forall\, n \in I\!N.$$

Deci seria produs este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\right].$$

Deoarece:

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{n+1}{n+1} = 1, \ \ \forall\, n \in I\!N,$$

rezultă că $c_n \not\to 0$, pentru $n \to \infty$, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă. Din acest exemplu deducem că produsul a două serii semi-convergente poate fi o serie divergentă.

18. Să se calculeze sumele următoarele serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, $\alpha \geq 0$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}$, $\alpha \geq 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)}$, $\alpha \geq 0$, $p \in I\!N^*$.

Rezolvare. Seriile de mai sus sunt convergente, ele având aceeaşi natură cu seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, respectiv $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$, care sunt convergente.

a) Şirul sumelor parţiale este:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1}\right] = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1}.$$

Pentru $n \to \infty$ obţinem suma seriei: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

b) Avem:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right].$$

Pentru $n \to \infty$ obţinem suma seriei: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$.

c) Şirul sumelor parţiale este:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\cdots(\alpha+k+p)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\cdots(\alpha+k+p-1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\cdots(\alpha+k+p)}\right] = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+p)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)\cdots(\alpha+n+p)}\right].$$

Pentru $n \to \infty$ obţinem suma seriei:

$$S = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+p)}.$$

Dacă $\alpha = 0$ deducem că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p\cdot p!}, \quad \forall\, p \in I\!N^*.$$

19. Serii duble. Fie matricea infinită:

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_i^2 & \cdots \\ \vdots & & & & \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_i^k & \cdots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

Elementele acestei matrice infinite se pot reprezenta prin şirul: (2) $u_1,\ u_2,\ \ldots, u_r,$ $\ldots$.

Să considerăm următoarele serii:

(3) $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^k$, (o serie dublă); (4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_i^k$; (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k$; (6) $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$.

Seriile (4) şi (5) se numesc serii iterate.

Teorema 5. Presupunem că matricea (1) şi şirul (2) au aceiaşi termeni. Dacă cel puţin una din seriile (3), (4), (5) sau (6) este absolut convergentă atunci rezultă că toate cele patru serii sunt convergente şi au aceeaşi sumă.

Dacă seriile au termenii $a_i^k \geq 0$ atunci este suficient ca una din cele patru serii (3)-(6) să fie convergentă pentru ca toate celelalte să fie convergente şi atunci ele vor avea aceeaşi sumă.

Pentru demonstraţia Teoremei 5 vezi [14, Vol.II, p.394].

Folosind rezultatul de mai sus să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Rezolvare. Să considerăm $a_i^k = \dfrac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \dfrac{(i-1)!}{k(k+1)\cdots(k+i)}$.
Conform Problemei 18, c) cu $\alpha = 0$ şi $p = k$ avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!},$$

iar:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = (k-1)! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)} = (k-1)! \frac{1}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2}$$

şi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (o serie convergentă).

Modificăm în continuare matricea (1) astfel:

$$\text{(7)} \qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1^2 & r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1^3 & a_2^3 & r_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \\ a_1^k & a_2^k & a_3^k & \cdots & a_{k-1}^k & r_k & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix} = \left((a_i^k)'\right)_{i,k}.$$

Pe locul k din linia k am pus elementul r_k egal cu suma termenilor din rândul k de la dreapta termenului k, inclusiv acest termen. Atunci sumele elementelor de pe fiecare linie rămân neschimbate faţă de cele corespunzătoare matricei (1). În mod asemănător, a doua sumă iterată $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^k)'$ rămâne neschimbată, şi anume:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^k)' = \sum_{k=1}^{\infty}(a_1^1 + a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^k + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Pentru elementul r_k avem expresia:

$$r_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^k = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(n+k-1)\cdots(n+2k-1)}.$$

Aplicăm în continuare din nou Problema 18, c) cu $\alpha = k-1$ şi $p = k$. Obţinem:

$$r_k = \frac{(k-1)!}{k\cdot k(k+1)\cdots(2k-1)}.$$

Apoi, suma elementelor a_k^j de pe coloana k cu $j > k$ pentru matricea (7) este:

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} a_k^j = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{j(j+1)\cdots(j+k)} = (k-1)!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(k+j)\cdots(2k+j)}.$$

Conform Problemei 18, c) cu $\alpha = k$ şi $p = k$ obţinem:

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} a_k^j = (k-1)!\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k+1)\cdots(2k)} = \frac{(k-1)!}{k(k+1)\cdots(2k)}.$$

Atunci suma elementelor de pe coloana k pentru matricea (7) este:

$$r_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_k^j = \frac{(k-1)!}{k^2(k+1)\cdots(2k-1)} + \frac{(k-1)!}{k(k+1)\cdots(2k)} =$$

$$= \frac{3(k-1)!}{k(k+1)\cdots(2k-1)(2k)} = \frac{3\cdot[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Aplicând Teorema 5 matricei (7), seria $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^k)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ fiind convergentă, rezultă că şi seria:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_i^k)' = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(a_k^j)' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(r_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_k^j\right) = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}$$

este convergentă şi are aceeaşi sumă cu prima serie, adică:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}. \tag{8}$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

20. Să se studieze şirul sumelor parţiale pentru următoarele serii, deducându-se apoi natura acestora şi suma lor, în caz de convergenţă:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\alpha+1} - 2\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\alpha-1}\right)$, $\alpha > 0$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+12n+8}{n^2(n+1)^3(n+2)^3}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)(4n^2-1)}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n-2}{n!}$.

21. Să se arate că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n$ $(a_n \geq 0,\ \forall\, n \geq 1)$ converge, atunci converge şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

22. Să se arate că dacă seria cu termeni negativi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci şi seriile:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$
sunt convergente.

23. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie divergentă cu $a_n \geq 0,\ \forall\, n \geq 1$. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ este divergentă.

24. Să se studieze natura următoarelor serii folosind criteriile de comparaţie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^4+2n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{2^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln n \, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \, \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

25. Să se studieze cu ajutorul criteriului radicalului al lui Cauchy următoarele serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}\right]^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n+2}}{n^n+1}$.

26. Să se studieze natura următoarelor serii, folosind criteriile lui D'Alembert, al lui Raabe-Duhamel sau al lui Bertrand:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$, $a > 0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$, $a > 0$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$, $\alpha > 0$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, b^n}{(b+a_1)(2b+a_2)\cdots(nb+a_n)}$, $b > 0$, $(a_n)_{n\geq 1} \subset I\!\!R_+$; $a_n \to a$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\operatorname{tg} a)\left(1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\operatorname{tg}\frac{a}{n}\right)}$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$, $a > 0$, $\alpha \in I\!\!R$.

27. Să se studieze următoarele serii, folosind criteriul logaritmic:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$, $\alpha \in I\!\!R$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n^2+2}}{n^3+2n+1}$.

28. Folosind criteriul de comparaţie şi apoi criteriul integral să se deducă natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln(n+1)}$.

29. Să se studieze simpla şi absoluta convergenţă a următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+2}{5^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(2+e^{2n})}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$, $(a_n)_{n\geq 1} \subset I\!\!R_+$, $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton descrescător cu limita 0; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Capitolul 3
SPAŢII METRICE

Spaţii metrice

Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte *metrică* sau *distanţă* pe X o aplicaţie $d : X \times X \to I\!R$ care satisface următoarele axiome:

a) $d(x, y) \geq 0, \ \forall\, x,\ y \in X; \quad d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y;$

b) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall\, x,\ y \in X;$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \ \forall\, x, y, z \in X$, (numită inegalitatea triunghiulară).

O mulţime X dotată cu o metrică d se numeşte *spaţiu metric*, notat (X, d). Elementelor lui X le vom mai spune şi puncte.

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Se numeşte *sferă deschisă* cu centrul în $x_0 \in X$ şi de rază ε mulţimea:

$$S_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\},$$

iar *sferă închisă* cu centrul în x_0 şi de rază ε mulţimea:

$$\bar{S}_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq \varepsilon\},$$

notate uneori mai simplu cu $S(x_0, \varepsilon)$, respectiv $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$.

Mulţimea A din spaţiul metric (X, d) este *mărginită* dacă $\exists\, x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ a.î. $A \subset \bar{S}(x_0, \varepsilon)$. Se numeşte *vecinătate* a punctului $x_0 \in X$ o mulţime $V \subset X$ care conţine o sferă deschisă cu centrul în x_0, deci $\exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $S(x_0, \varepsilon) \subset V$.

Metricele d_1 şi d_2 definite pe mulţimea X se numesc *echivalente* dacă:

a) pentru $\forall\, x \in X$ şi $\forall\, r > 0 \ \exists\, \mu > 0$ a.î. $S_{d_2}(x, \mu) \subset S_{d_1}(x, r)$ şi

b) pentru $\forall\, x \in X$ şi $\forall\, r > 0 \ \exists\, \lambda > 0$ a.î. $S_{d_1}(x, \lambda) \subset S_{d_2}(x, r)$.

Dacă pentru două metrice $d_1,\ d_2 : X \times X \to I\!R$ există constantele $a, b \in I\!R$, $0 < a \leq b$ astfel încât $a\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b\, d_1(x, y), \ \forall\, x, y \in X$, atunci cele două metrice d_1 şi d_2 sunt echivalente.

Fie $(x_n)_{n \in I\!N}$ (sau $(x_n)_{n \in I\!N^*}$, notat şi $(x_n)_{n \geq 1}$) un şir de puncte din spaţiul metric (X, d). Şirul $(x_n)_{n \in I\!N}$ *converge* la $x \in X$ dacă $\forall\, V(x)$ o vecinătate a punctului x

$\exists\, n_V \in I\!N$ a.î. $x_n \in V(x)$, $\forall\, n \geq n_V$. Elementul $x \in X$ se numeşte *limita şirului* $(x_n)_{n \in I\!N}$; se notează $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$.

Teorema 1. Şirul $(x_n)_{n\in I\!N} \subset (X,d)$ converge la $x \in X$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \text{ are loc } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Proprietăţi ale şirurilor convergente

a) Limita unui şir convergent este unică.

b) $x_n \to x$, pentru $n \to \infty \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$, pentru $n \to \infty$.

c) Dacă $\exists\, (\alpha_n)_{n \in I\!N} \subset I\!R$, $\alpha_n \to 0$, pentru $n \to \infty$ a.î. $d(x_n, x) \leq \alpha_n$, $\forall\, n \in I\!N$ atunci $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$.

d) Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită cu şirul dat.

e) Un şir convergent este mărginit (mulţimea termenilor săi este mărginită).

Şirul $(x_n)_{n \in I\!N} \subset (X,d)$ se numeşte *şir Cauchy* sau *şir fundamental* dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon) \text{ are loc } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \text{ are loc } d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \;\; \forall\, p \in I\!N.$$

Orice şir fundamental este mărginit. Orice şir convergent este şir fundamental.

Spaţiul metric (X,d) se numeşte *complet* dacă orice şir Cauchy din X este şir convergent.

Spaţiul metric $(I\!R, d)$, unde $d(x,y) = |x-y|$, $\forall\, x, y \in I\!R$ este spaţiu metric complet, conform Teoremei 5, §1, Capitolul 2.

Fie (X,d) un spaţiu metric. O mulţime $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă ea este vecinătate pentru orice punct al ei. Numim mulţime *închisă* o mulţime a cărei complementară este deschisă. Mulţimea vidă $\emptyset$ şi spaţiul întreg X sunt mulţimi deschise şi închise.

Un punct $x \in X$ se numeşte *punct de acumulare* pentru o mulţime $A \subset X$ dacă orice vecinătate a sa conţine puncte din A, diferite de x, adică:

$$\forall\, V, \;\; V \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Teorema 2. Punctul $x \in X$ este punct de acumulare pentru mulţimea A dacă şi numai dacă $\exists\, (x_n)_{n \in I\!N} \subset A$, $x_n \neq x$, $\forall\, n \in I\!N$ a.î. $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$.

Un punct $x \in X$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A dacă orice vecinătate a sa conţine puncte din A, adică:

$$\forall\, V, \;\; V \bigcap A \neq \emptyset.$$

Teorema 3. Punctul x este punct aderent pentru A dacă şi numai dacă $\exists\, (x_n)_{n \in I\!N} \subset$

$\subset A$ a.î. $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$.

Un punct $x \in X$ se numeşte *punct izolat* al mulţimii A dacă el aparţine mulţimii, dar nu este punct de acumulare pentru A.

Un punct $x \in X$ se numeşte *punct interior* pentru mulţimea A dacă $\exists$ o vecinătate a sa inclusă în mulţimea A.

Un punct $x \in X$ se numeşte *punct frontieră* pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a sa conţine puncte atât din mulţime, cât şi din complementara sa.

Pentru o mulţime $A \subset X$, notăm cu:

A' – mulţimea punctelor de acumulare pentru A, numită *mulţimea derivată* a lui A;

$\bar{A}$ – mulţimea punctelor aderente ale mulţimii A, numită *aderenţa* sau *închiderea* lui A;

$\mathring{A}$ sau *int* A – mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A, numită *interiorul* lui A;

$Fr\,A$ – mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A, numită *frontiera* lui A.

O mulţime $A \subset X$ se numeşte *compactă* dacă orice şir $(x_n)_{n\in I\!N}$ de elemente din A conţine un subşir $(x_{k_n})_{n\in I\!N}$ convergent la un punct din A. O mulţime $A \subset X$ compactă este mărginită şi închisă.

Principiul contracţiei

Aplicaţia $\varphi : X \to X$ a spaţiului metric (X, d) se numeşte *contracţie* dacă $\exists\, q \in \in (0,1)$ a.î. $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le q\, d(x,y),\ \ \forall\, x, y \in X$.

Punctul $x \in X$ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei $\varphi : X \to X$ dacă $\varphi(x) = x$.

Teorema 4 (Banach). O contracţie φ a spaţiului metric complet (X, d) are un singur punct fix.

În demonstraţia Teoremei 4, şirul care aproximează punctul fix este construit astfel: $x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ n = 1, 2, \ldots$, unde $x_0 \in X$ este arbitrar, iar eroarea care se obţine înlocuind soluţia ecuaţiei $\varphi(x) = x$ cu aproximanta x_n de ordin n este mai mică sau egală cu $\dfrac{d(x_0, x_1)}{1-q} \cdot q^n$.

Spaţii liniare normate

Fie V un spaţiu liniar (vectorial) real (sau complex). Aplicaţia $\|\cdot\| : V \to I\!R$ se numeşte *normă* pe spaţiul V dacă satisface următoarele axiome:

a) $\|\vec{u}\| \ge 0,\ \ \forall\, \vec{u} \in V;\quad \|\vec{u}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{u} = \vec{0}$;

b) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|,\ \ \forall\, \vec{u} \in V,\ \ \forall\, \alpha \in I\!R\ (C)$;

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,\ \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Numărul $\|\vec{u}\|$ se numeşte *norma* vectorului $\vec{u}$. Un spaţiu liniar V pe care s-a definit o normă $\|\cdot\|$ se numeşte *spaţiu liniar normat* sau *spaţiu normat*; se notează $(V, \|\cdot\|)$.

Normele $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2 : V \to I\!R$ se numesc *echivalente* dacă $\exists\, a, b \in I\!R,\ \ 0 < a \leq b$ astfel încât:

$$a\,\|\vec{u}\|_1 \leq \|\vec{u}\|_2 \leq b\,\|\vec{u}\|_1,\ \ \forall\, \vec{u} \in V.$$

Dacă $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat atunci aplicaţia $d : V \times V \to I\!R$, definită prin:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|,\ \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$$

defineşte o metrică pe V, numită *metrica indusă de normă.* Deci orice spaţiu normat este spaţiu metric cu metrica indusă de normă.

Proprietăţi ale şirurilor din $(V, \|\cdot\|)$

a) $\vec{x}_n \to \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon) :\ \ \|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon.$

b) $\vec{x}_n \to \vec{x}$, pentru $n \to \infty \ \Rightarrow\ \|\vec{x}_n\| \to \|\vec{x}\|$, pentru $n \to \infty$.

c) $\vec{x}_n \to \vec{x},\ \vec{y}_n \to \vec{y}$, pentru $n \to \infty \ \Rightarrow\ \alpha\vec{x}_n + \beta\vec{y}_n \to \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, pentru $n \to \infty$, $\forall\, \alpha, \beta \in I\!R\ (C)$.

d) Dacă $(\alpha_n)_{n \in I\!N} \subset I\!R\,(C)$, $(\vec{x}_n)_{n \in I\!N} \subset V$, $\{\alpha_n \to 0$, pentru $n \to \infty$ şi $\|\vec{x}_n\| \leq$ $\leq M, \forall\, n \in I\!N\}$ sau $\{|\alpha_n| \leq M,\ \forall\, n \in I\!N$ şi $\vec{x}_n \to \vec{0}$, pentru $n \to \infty\}$ atunci $\alpha_n\vec{x}_n \to \vec{0}$, pentru $n \to \infty$.

e) Dacă $(\alpha_n)_{n \in I\!N} \subset I\!R\,(C)$, $\alpha_n \to \alpha$, pentru $n \to \infty$, iar $(\vec{x}_n)_{n \in I\!N} \subset V, \vec{x}_n \to \vec{x}$, pentru $n \to \infty$ atunci $\alpha_n\vec{x}_n \to \alpha\vec{x}$, pentru $n \to \infty$.

Un spaţiu liniar normat $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte *spaţiu Banach* dacă V este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă.

Spaţii prehilbertiene şi spaţii Hilbert

Fie H un spaţiu liniar real (sau complex). Aplicaţia $g : H \times H \to I\!R\,(C)$ se numeşte *produs scalar* pe spaţiul H dacă satisface următoarele axiome:

a) $g(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0,\ \forall\, \vec{x} \in H;\quad g(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{x} = \vec{0}$;

b) $g(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{g(\vec{y}, \vec{x})}$;

c) $g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = g(\vec{x}, \vec{z}) + g(\vec{y}, \vec{z}),\ \ \forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in H$;

d) $g(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}),\ \ \forall\, \alpha \in I\!R\,(C),\ \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in H.$

Numărul real (complex) $g(\vec{x}, \vec{y})$ se numeşte *produsul scalar al vectorilor* $\vec{x}$ şi $\vec{y}$; el se mai notează şi $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Un spaţiu liniar H pe care s-a definit un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se numeşte *spaţiu* *prehilbertian*, notat $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Un spaţiu prehilbertian este spaţiu normat cu norma $\|\cdot\| : H \to I\!R$, definită prin:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}, \ \forall\, \vec{x} \in H,$$

numită *norma indusă de produsul scalar.*

Un spaţiu prehilbertian care este complet în norma indusă de produsul scalar se numeşte *spaţiu Hilbert.*

Proprietăţi ale şirurilor din spaţiul prehilbertian $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

a) $\vec{x}_n \to \vec{x},\ \vec{y}_n \to \vec{y},$ pentru $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \langle\vec{x}_n, \vec{y}_n\rangle \to \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle,$ pentru $n \to \infty$.

b) Dacă unul din şirurile $(\vec{x}_n)_{n\in I\!N} \subset H$ sau $(\vec{y}_n)_{n\in I\!N} \subset H$ este mărginit, iar celălalt are limita $\vec{0}$ atunci $\langle\vec{x}_n, \vec{y}_n\rangle \to 0,$ pentru $n \to \infty$.

Spaţiul $I\!R^k$

Produsul cartezian $I\!R^k = \underbrace{I\!R \times I\!R \times \cdots \times I\!R}_{k\ ori}$, adică mulţimea sistemelor ordonate de k numere reale:

$$I\!R^k = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid \ x_i \in I\!R,\ \ i = \overline{1,k}\}$$

se organizează ca spaţiu liniar real, în raport cu operaţiile:

a) adunarea: $(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k),$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k),\ \ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots y_k) \in I\!R^k$;

b) înmulţirea cu scalari din $I\!R$: $(\lambda, \vec{x}) \to \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k),$

unde $\lambda \in I\!R,\ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I\!R^k$.

Spaţiul $I\!R^k$ se numeşte *spaţiul liniar (vectorial) aritmetic cu k dimensiuni.* Elementul $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k) \in I\!R^k$ (notat uneori mai simplu cu x) se numeşte *vector k-dimensional*, iar $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *componentele* vectorului $\vec{x}$ în raport cu baza canonică $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\} \subset I\!R^k$:

$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \ \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_k = (0, 0, \ldots, 1).$

Aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle : I\!R^k \times I\!R^k \to I\!R$ care ataşează vectorilor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k),\ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in I\!R^k$ numărul $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ky_k$ este produs scalar pe $I\!R^k$, numit *produsul scalar euclidian*; deci $I\!R^k$ este *spaţiu prehilbertian (numit şi euclidian)* de dimensiune k. *Norma euclidiană* este $\vec{x} \to \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2}$, iar *metrica euclidiană* este $(\vec{x}, \vec{y}) \to d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$.

Şirul $(\vec{x}_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R^k$ este *convergent* cu limita $\vec{x} \in I\!R^k$ dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \ \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \ \|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană sau orice altă normă echivalentă cu aceasta.

Teorema 5. Un şir de elemente din spaţiul $I\!R^k$ este convergent dacă şi numai dacă toate cele k şiruri coordonate (şiruri de numere reale) sunt convergente; în plus, limita şirului din $I\!R^k$ este k-uplul format din limitele celor k şiruri coordonate.

Proprietăţile şi teoremele (Weierstrass, Cesaro, Cauchy) din cazul şirurilor reale (vezi Capitolul 2, §1) rămân valabile şi în spaţiul $I\!R^k$. O consecinţă imediată a teoremei lui Cauchy este că spaţiul $I\!R^k$ este *complet* (Banach) în raport cu norma euclidiană sau cu orice altă normă echivalentă cu aceasta, deci $I\!R^k$ este *spaţiu Hilbert* în raport cu produsul scalar euclidian.

Vom identifica spaţiul $I\!R^2$ cu planul euclidian $\mathcal{E}_2$, asociind unui element $(x,y) \in \in I\!R^2$ punctul unic $M(x,y) \in \mathcal{E}_2$; în mod asemănător spaţiul $I\!R^3$ va fi identificat cu spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$. Astfel pe parcursul culegerii vom întâlni elemente $(x,y) \in I\!R^2$ sau $(x,y,z) \in I\!R^3$ notate cu $M(x,y)$, respectiv $M(x,y,z)$. În general, elementelor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I\!R^k$ le vom mai spune şi puncte.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie X o mulţime nevidă. Să se arate că dacă ϱ este o funcţie definită pe produsul cartezian $X \times X$ cu valori în $I\!R_+$ care satisface condiţiile:

a) $\varrho(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;

b) $\varrho(x,z) \leq \varrho(y,x) + \varrho(y,z), \ \ \forall\, x,y,z \in X$

atunci axioma de simetrie este îndeplinită, adică $\varrho(x,y) = \varrho(y,x), \ \ \forall\, x,y \in X$.

Rezolvare. Luând $y = z$ în condiţia b) obţinem:

$$\varrho(x,z) \leq \varrho(z,x) + \varrho(z,z),$$

de unde folosind a), rezultă că $\varrho(x,z) \leq \varrho(z,x), \ \ \forall\, x,z \in X$.

Din condiţia b) scrisă sub forma:

$$\varrho(z,x) \leq \varrho(y,z) + \varrho(y,x), \ \ \forall\, x,y,z \in X,$$

luând $y = x$, obţinem:

$$\varrho(z,x) \leq \varrho(x,z) + \varrho(x,x)$$

sau $\varrho(z,x) \leq \varrho(x,z), \ \ \forall\, x,z \in X$, (deoarece $\varrho(x,x) = 0$).

Din cele două inegalităţi de mai sus deducem că $\varrho(x,z) = \varrho(z,x), \ \ \forall\, x,z \in X$.

2. Să se arate că nenegativitatea unei metrice $\varrho : X \times X \to I\!R$ se poate obţine ca o consecinţă a următoarelor axiome ale metricei:

a) $\varrho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$;

b) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x),\;\; \forall\, x, y \in X$;

c) $\varrho(x, z) \le \varrho(x, y) + \varrho(y, z),\;\; \forall\, x, y, z \in X$.

Rezolvare. Vom arăta că în ipotezele a)-c) avem $\varrho(x, y) \ge 0,\;\; \forall\, x, y \in X$. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists\, x, y \in X$ a.î. $\varrho(x, y) < 0$. Din ipoteza c) deducem că:

$$\varrho(x, z) - \varrho(y, z) \le \varrho(x, y) < 0,\;\; \forall\, z \in X \quad \text{sau} \quad \varrho(x, z) < \varrho(y, z),\;\; \forall\, z \in X.$$

Luând în inegalitatea de mai sus $z = x$, avem $\varrho(x, x) < \varrho(y, x)$ sau $0 < \varrho(y, x)$, conform ipotezei a). Din proprietatea de simetrie b) deducem că $\varrho(x, y) > 0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Deci presupunerea făcută este falsă, adică rezultă că $\varrho(x, y) \ge 0,\;\; \forall\, x, y \in X$.

3. Să se demonstreze că dacă $d : S \times S \to I\!\!R_+$ este o metrică pe mulţimea S atunci şi funcţia $d_1 : S \times S \to I\!\!R_+$ definită prin:

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

este o metrică pe mulţimea S.

Rezolvare. Vom verifica axiomele metricei pentru funcţia d_1:

a) $d_1(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y;\quad d_1(x, y) \ge 0,\;\; \forall\, x, y \in S$.

Avem: $d_1(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \;\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$, conform axiomei a) de la metrica d. Apoi condiţia $d_1(x, y) \ge 0,\;\; \forall\, x, y \in S$ este verificată deoarece $d(x, y) \ge 0,\;\; \forall\, x, y \in S$.

b) $d_1(x, y) = d_1(y, x),\;\; \forall\, x, y \in S$.

Avem: $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \dfrac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d_1(y, x)$, conform axiomei b) de la metrica d.

c) $d_1(x, y) \le d_1(x, z) + d_1(z, y),\;\; \forall\, x, y, z \in S$.

Din axioma c) a metricei d avem:

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y),\;\; \forall\, x, y, z \in S.$$

Să considerăm acum funcţia $f : I\!\!R_+ \to I\!\!R,\;\; f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$. Deoarece $f'(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2},\;\; \forall\, x \in I\!\!R_+$, deci $f'(x) > 0,\;\; \forall\, x \in I\!\!R_+$, rezultă că funcţia f este (strict) crescătoare pe $I\!\!R_+$, adică $x_1 \le x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$.

Luând $x_1 = d(x, y)$ şi $x_2 = d(x, z) + d(z, y)$, deoarece $x_1 \le x_2$, deducem că:

$$f(d(x, y)) \le f(d(x, z) + d(z, y)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \le \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq$$
$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}, \ \ \forall\, x,y,z \in S,$$

adică $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y), \ \forall\, x,y,z \in S$.

Fiind verificate cele trei axiome ale metricei rezultă că funcţia d_1 este o metrică pe mulţimea S.

4. Fie X o mulţime nevidă. Să se demonstreze că funcţia $d : X \times X \to I\!R_+$, definită prin:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y \\ 0, & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

este o metrică pe mulţimea X, numită *metrica discretă* pe mulţimea X. (X,d) se numeşte *spaţiu metric discret.*

Rezolvare. Evident $d(x,y) \geq 0, \ \forall\, x,y \in X$. Din definiţie deducem imediat că $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$ şi $d(x,y) = d(y,x), \ \forall\, x,y \in X$. Să verificăm inegalitatea triunghiulară:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \ \forall\, x,y,z \in X.$$

Dacă $x = y$ atunci $d(x,y) = 0$ şi inegalitatea de mai sus este verificată pentru orice $z \in X$. Dacă $x \neq y$ atunci $d(x,y) = 1$, iar pentru $z \in X$ avem următoarele posibilităţi:

i) $z = x$ atunci $d(x,z) = 0, \ \ d(z,y) = 1$; deci ineg. de mai sus devine: $1 \leq 1$;

ii) $z = y$ atunci $d(y,z) = 0, \ \ d(x,z) = 1$; deci ineg. de mai sus devine: $1 \leq 1$;

iii) $z \neq x$ şi $z \neq y$ atunci $d(x,z) = 1, \ \ d(y,z) = 1$; deci ineg. de mai sus devine $1 \leq 2$.

Deci în toate cazurile de mai sus este verificată axioma c) din definiţia metricei, adică d este o metrică pe mulţimea X.

5. Fie $X = (0,\infty) \subset I\!R$. Să se arate că aplicaţia:

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \text{ pentru } x,y > 0$$

este o metrică pe X.

Rezolvare. Verificăm axiomele metricei:

a) Evident $d(x,y) \geq 0, \ \forall\, x,y \in X$, iar $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$. Într-adevăr:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \ \Leftrightarrow \ x = y.$$

b) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall\, x,y \in X \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|, \ \ \forall\, x,y \in X.$

c) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y), \ \forall\, x,y,z \in X$. Într-adevăr:

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\right| \le \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right| =$$
$$= d(x,z) + d(z,y), \ \forall\, x,y,z \in X.$$

6. Să se demonstreze că $(I\!R^n, d)$, $(I\!R^n, \delta)$ şi $(I\!R^n, \Delta)$, unde $d, \delta, \Delta : I\!R^n \times I\!R^n \to$ $\to I\!R_+$ sunt definite astfel:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad \delta(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \quad \Delta(\vec{x},\vec{y}) = \max_{i=\overline{1,n}}|x_i - y_i|,$$

$\forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I\!R^n$, sunt spaţii metrice.

Rezolvare. Pentru aplicaţia $d : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ avem:

a) $d(\vec{x},\vec{y}) \ge 0, \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in I\!R^n$ şi

$$d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0, \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$
$$x_i = y_i, \ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

b) $d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(\vec{y},\vec{x}), \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in I\!R^n.$

c) $d(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y}), \ \forall\, \vec{x}, \ \vec{y}, \ \vec{z} \in I\!R^n.$

Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}.$$

Folosind inegalitatea lui Minkowski cu $p = 2$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2},$$

şi $a_i = |x_i - z_i|, \ b_i = |z_i - y_i|, \ i = \overline{1,n}$ (vezi Capitolul 1, Problema 23), obţinem:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[|x_i - z_i| + |z_i - y_i|]^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2},$$

adică inegalitatea triunghiulară.

Pentru aplicaţia $\delta : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ avem:

a) $\delta(\vec{x},\vec{y}) \ge 0, \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in I\!R^n$ şi

$$\delta(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x_i = y_i, \ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$
$$\vec{x} = \vec{y}.$$

b) $\delta(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = \delta(\vec{y},\vec{x}), \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!\!R^n.$

c) $\delta(\vec{x},\vec{y}) \le \delta(\vec{x},\vec{z}) + \delta(\vec{z},\vec{y}), \ \forall\, \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in I\!\!R^n.$

Această inegalitate este echivalentă cu:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|,$$

care se obţine adunând inegalităţile evidente:

$$|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

pentru $i = \overline{1,n}$.

În sfârşit, pentru aplicaţia $\Delta : I\!\!R^n \times I\!\!R^n \to I\!\!R$ avem:

a) $\Delta(\vec{x},\vec{y}) \ge 0, \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!\!R^n$ şi

$\Delta(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow 0 \le |x_j - y_j| \le \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| = 0, \ \forall\, j = \overline{1,n} \Leftrightarrow$

$|x_j - y_j| = 0, \ \forall\, j = \overline{1,n} \Leftrightarrow x_j = y_j, \ \forall\, j = \overline{1,n} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$

b) $\Delta(\vec{x},\vec{y}) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |y_i - x_i| = \Delta(\vec{y},\vec{x}), \ \forall\, \vec{x},\vec{y} \in I\!\!R^n.$

c) $\Delta(\vec{x},\vec{y}) \le \Delta(\vec{x},\vec{z}) + \Delta(\vec{z},\vec{y}), \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in I\!\!R^n.$

Inegalitatea de mai sus se obţine din inegalităţile evidente:

$$|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i|, \ \forall\, i = \overline{1,n},$$

luând maximul după $i = \overline{1,n}$ în ambii membri. Rezultă:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| \le \max_{i=\overline{1,n}} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \le \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - z_i| + \max_{i=\overline{1,n}} |z_i - y_i|,$$

adică inegalitatea triunghiulară pentru aplicaţia Δ.

7. Să se demonstreze că pe spaţiul $I\!\!R^n$ metricele d, δ şi Δ de la Problema 6 sunt echivalente.

Rezolvare. Vom demonstra următoarele inegalităţi:

a) $\dfrac{1}{n} \cdot \delta(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y}) \le \delta(\vec{x},\vec{y})$ şi

b) $\Delta(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y}) \le \sqrt{n} \cdot \Delta(\vec{x},\vec{y}), \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!\!R^n,$

de unde va rezulta că metricele δ şi d, respectiv Δ şi d sunt echivalente, deci cele trei metrice d, δ şi Δ sunt echivalente.

Într-adevăr, avem:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \delta(\vec{x},\vec{y}), \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!\!R^n \quad \text{şi}$$

$$\delta(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le n \cdot \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| \le n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = n \cdot d(\vec{x},\vec{y}),$$

$\forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!\!R^n$, de unde rezultă a).

O inegalitate mai bună este următoarea:

$$\delta(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \cdot n^{1/2} = n^{1/2} \cdot d(\vec{x},\vec{y}),\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n,$$

conform inegalităţii lui Cauchy (Capitolul 1, Problema 17).

Apoi:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{n \cdot \max_{i=\overline{1,n}}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{n} \cdot \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \Delta(\vec{x},\vec{y}),\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n \quad \text{şi}$$

$$\Delta(\vec{x},\vec{y}) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = d(\vec{x},\vec{y}),\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n,$$

de unde rezultă b).

8. Să se demonstreze că $(I\!R^n, \varrho)$, unde $\varrho : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R_+$ este definită prin:

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)}\,,\ \ \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n$$

este spaţiu metric şi apoi să se arate că această metrică nu provine dintr-o normă.

Rezolvare. Vom verifica cele trei axiome ale metricei pentru funcţia ϱ:

a) Evident $\varrho(\vec{x},\vec{y}) \ge 0,\ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n$ şi

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)} = 0 \Leftrightarrow \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)} = 0,\ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$

$$|x_i - y_i| = 0,\ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x_i = y_i,\ \forall\, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

b) $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - x_i|}{2^i(1 + |y_i - x_i|)} = \varrho(\vec{y},\vec{x}),\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n.$

c) $\varrho(\vec{x},\vec{y}) \le \varrho(\vec{x},\vec{z}) + \varrho(\vec{z},\vec{y}),\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in I\!R^n \quad \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - z_i|}{2^i(1 + |x_i - z_i|)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i - y_i|}{2^i(1 + |z_i - y_i|)}\,.$$

Pentru a demonstra inegalitatea de mai sus, pornim de la inegalităţile evidente:

$$|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,\ \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Pentru un i fixat din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, folosind funcţia $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, (strict) crescătoare pe $I\!R_+$ (vezi Problema 3), deducem:

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \le \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} = \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} +$$

$$+ \frac{|z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \le \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|}\,.$$

Înmulţind inegalitatea obţinută cu $1/2^i$ şi adunând după i de la 1 la n obţinem inegalitatea triunghiulară scrisă mai sus.

Vom demonstra în continuare că această metrică nu provine dintr-o normă prin metoda reducerii la absurd. Presupunem deci că $\exists$ o normă $\|\cdot\| : I\!R^n \to I\!R_+$ cu proprietatea $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|,\ \ \forall\, \vec{x},\, \vec{y} \in I\!R^n$, adică:

$$\|\vec{x}\| = \varrho(\vec{x},\vec{0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{2^i(1+|x_i|)}\,, \quad \forall\,\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in I\!R^n.$$

Această normă nu satisface axioma a doua, adică:

$$\exists\,\lambda \in I\!R,\ \ \exists\,\vec{x} \in I\!R^n \ \text{ a.î. } \ \|\lambda\vec{x}\| \neq |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|.$$

Într-adevăr:

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\lambda x_i|}{2^i(1+|\lambda x_i|)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\lambda||x_i|}{2^i(1+|\lambda|\cdot|x_i|)} = |\lambda|\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{2^i(1+|\lambda|\cdot|x_i|)}\,,$$

iar $|\lambda|\cdot\|\vec{x}\| = |\lambda|\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{2^i(1+|x_i|)}$.

Luând, de exemplu, $\lambda = 2$ şi $\vec{x} = (1,0,\ldots,0)$ avem $\|\lambda\vec{x}\| = 1/3 \neq 1/2 = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$. Deducem astfel că ipoteza făcută - metrica ϱ provine dintr-o normă - este falsă.

9. Să se precizeze sferele deschise şi închise centrate în $\vec{0}$ şi de rază 1 în spaţiile metrice $(I\!R^2,d)$, $(I\!R^2,\delta)$, $(I\!R^2,\Delta)$, $(I\!R^3,d)$, $(I\!R^3,\delta)$, $(I\!R^3,\Delta)$, unde d, δ şi Δ sunt definite în Problema 6.

Rezolvare. Sfera deschisă centrată în $\vec{0}$ şi de rază 1 în spaţiul $I\!R^2$ cu metrica d este:

$$S_d(\vec{0};1) = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ d(\vec{0},\vec{x}) < 1\} = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1\}.$$

Imaginea geometrică a acestei sfere în sistemul ortogonal de axe (Ox_1x_2) este interiorul discului de centru $O(0,0)$ şi rază egală cu 1 (Figura 3.1).

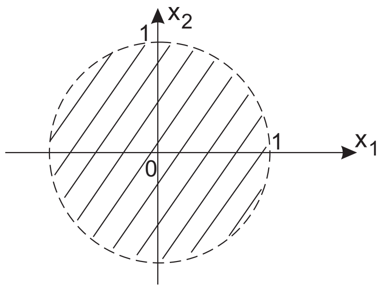

Figura 3.1

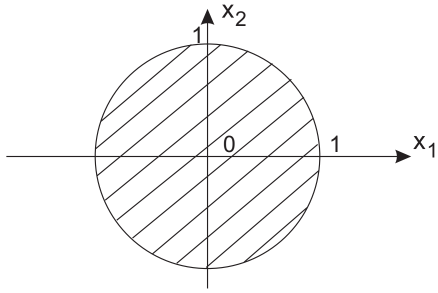

Figura 3.2

Sfera închisă $\bar{S}_d(\vec{0};1) = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ \sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq 1\}$ are reprezentarea geometrică în sistemul (Ox_1x_2) discul centrat în origine de rază egală cu 1 (Figura 3.2).

În metrica δ sfera deschisă şi sfera închisă centrate în $\vec{0} \in I\!R^2$ şi de rază egală cu 1 sunt:

$$S_\delta(\vec{0};1) = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ \delta(\vec{0};\vec{x}) < 1\} = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ |x_1|+|x_2| < 1\},$$

respectiv:

$$\bar{S}_\delta(\vec{0};1) = \{\vec{x} = (x_1,x_2) \in I\!R^2 \mid \ |x_1|+|x_2| \leq 1\}$$

reprezentate într-un sistem ortogonal de axe (Ox_1x_2) în Figura 3.3 şi Figura 3.4.

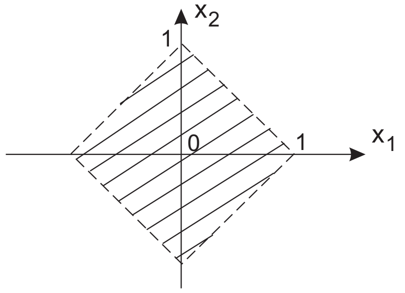

Figura 3.3

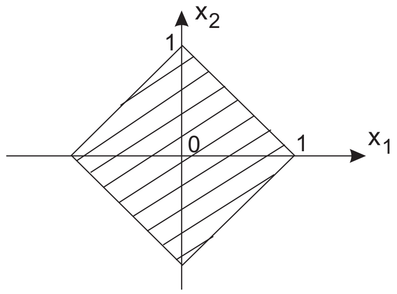

Figura 3.4

În metrica Δ sfera deschisă şi sfera închisă centrate în $\vec{0} \in I\!R^2$ şi de rază egală cu 1 sunt:

$S_\Delta(\vec{0}; 1) = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in I\!R^2 \mid \ \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$,

respectiv:

$\bar{S}_\Delta(\vec{0}; 1) = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in I\!R^2 \mid \ \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\}$

reprezentate în sistemul (Ox_1x_2) în Figura 3.5 şi Figura 3.6.

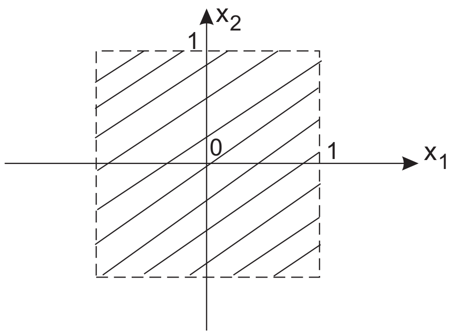

Figura 3.5

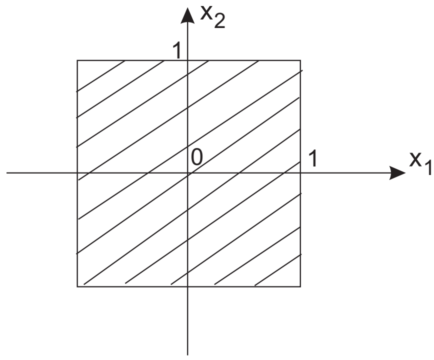

Figura 3.6

În spaţiul $I\!R^3$ sferele deschise în metricele d, δ şi Δ centrate în $\vec{0}$ şi de raze egale cu 1 sunt:

$S_d(\vec{0}; 1) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \mid \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\}$,

$S_\delta(\vec{0}; 1) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \mid \ |x_1| + |x_2| + |x_3| < 1\}$,

$S_\Delta(\vec{0}; 1) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \mid \ \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} < 1\}$.

În sistemul ortogonal de axe $(Ox_1x_2x_3)$ $S_d(\vec{0}; 1)$ este interiorul sferei centrată în origine şi de rază egală cu 1 (Figura 3.7), $S_\delta(\vec{0}; 1)$ este interiorul octaedrului din Figura 3.8, iar $S_\Delta(\vec{0}; 1)$ este interiorul cubului de latură egală cu 2 şi cu feţele paralele cu planele de coordonate (Figura 3.9).

Reprezentările geometrice ale sferelor închise centrate în $\vec{0}$ şi de raze egale cu 1 vor conţine şi frontierele corpurilor de mai jos.

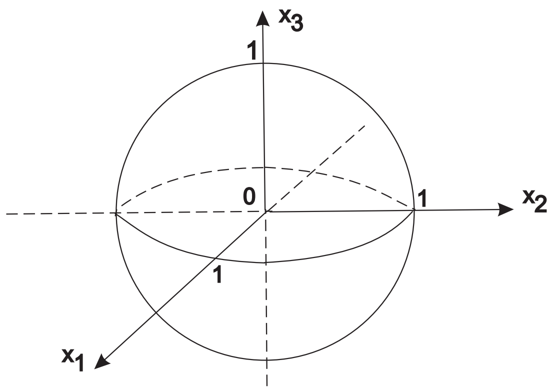

Figura 3.7

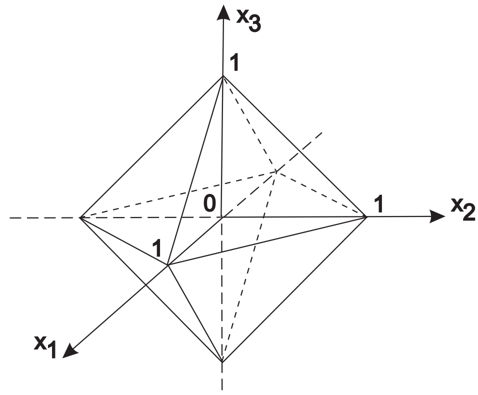

Figura 3.8

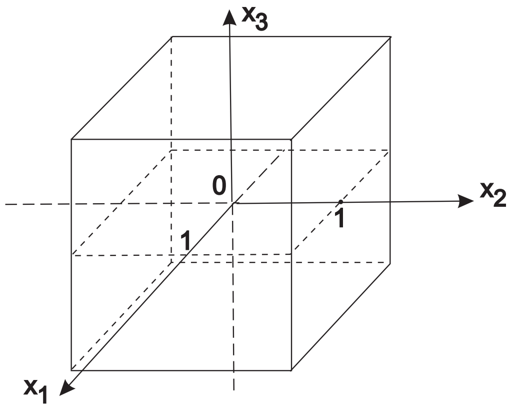

Figura 3.9

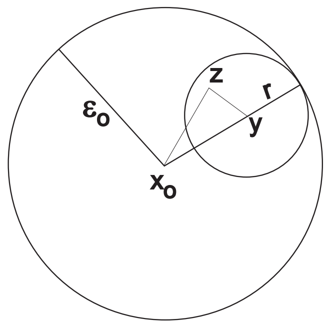

Figura 3.10

10. Să se arate că sfera deschisă $S(x_0, \varepsilon_0)$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ din spaţiul metric (X, d) este o mulţime deschisă.

Rezolvare. Pentru a demonstra că sfera deschisă centrată în $x_0 \in X$ şi de rază egală cu $\varepsilon_0 > 0$, $S(x_0, \varepsilon_0)$, este o mulţime deschisă, vom arăta că pentru orice element $y \in S(x_0, \varepsilon_0)$ $\exists S(y, r) \subset S(x_0, \varepsilon_0)$. Fie $y \in S(x_0, \varepsilon_0)$ şi sfera $S(y, r)$ centrată în y şi de rază egală cu $r = \varepsilon_0 - d(x_0, y)$. Vom demonstra că $S(y, r) \subset S(x_0, \varepsilon_0)$ (vezi Figura 3.10). Pentru aceasta, fie $z \in S(y, r)$, adică $d(y, z) < r$. Atunci:

$$d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) < r + d(y, x_0) = \varepsilon_0 - d(x_0, y) + d(x_0, y) = \varepsilon_0.$$

Deci $z \in S(x_0, \varepsilon_0)$, de unde rezultă că $S(y, r) \subset S(x_0, \varepsilon_0)$.

11. Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale interiorului unei mulţimi dintr-un spaţiu metric (X, d):

a) $\mathring{A} \subset A$; b) A este deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$; c) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.

Rezolvare. a) Fie $x \in \mathring{A}$ un element arbitrar, momentan fixat. Din definiţia punctului interior rezultă că $\exists$ o vecinătate V a punctului x a.î. $V \subset A$. Dar $x \in V \subset A$, deci $x \in A$. Deoarece x este arbitrar rezultă că $\overset{\circ}{A} \subset A$.

b) Dacă A este deschisă, conform definiţiei ea este formată numai din puncte interioare, deci $A \subset \overset{\circ}{A}$. Deoarece $\overset{\circ}{A} \subset A$ (punctul a)) rezultă că $A = \overset{\circ}{A}$. Reciproc, dacă $A = \overset{\circ}{A}$ rezultă că punctele mulţimii A sunt puncte interioare; deci, conform definiţiei, mulţimea A este o mulţime deschisă.

c) Fie A_1, A_2 două mulţimi ale spaţiului metric (X, d) cu $A_1 \subset A_2$ şi fie $x \in \overset{\circ}{A_1}$. Rezultă că $\exists$ o vecinătate V a punctului x a.î. $V \subset A_1$. Dar $A_1 \subset A_2$, deci rezultă că $V \subset A_2$, adică x este punct interior şi pentru mulţimea A_2. Deci $x \in \overset{\circ}{A_2}$. Deoarece x este arbitrar în mulţimea $\overset{\circ}{A_1}$, rezultă că $\overset{\circ}{A_1} \subset \overset{\circ}{A_2}$.

12. Să se demonstreze că interiorul unei mulţimi dintr-un spaţiu metric (X, d) este o mulţime deschisă şi este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în mulţimea respectivă.

Rezolvare. Fie A o mulţime a spaţiului metric (X, d). Dacă $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ atunci prin convenţie $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă. Dacă $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ să considerăm un element oarecare, momentan fixat $x \in \overset{\circ}{A}$. Conform definiţiei punctului interior rezultă că $\exists$ o vecinătate $V \subset A$, care conţine o sferă deschisă $S(x, \varepsilon) \subset V$. Deci $x \in S(x, \varepsilon) \subset A$. Trecând la interioare (Problema 11, c)) obţinem $\overbrace{S(x,\varepsilon)}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$. Dar $\overbrace{S(x,\varepsilon)}^{\circ} = S(x, \varepsilon)$ (Problema 10 şi Problema 11, b)), deci $S(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A}$. Deoarece mulţimea $S(x, \varepsilon)$ este o vecinătate pentru punctul x, rezultă că x este punct interior pentru mulţimea $\overset{\circ}{A}$. Deducem astfel că $\overset{\circ}{A}$ are numai puncte interioare, deci mulţimea $\overset{\circ}{A}$ este deschisă.

Pentru a demonstra că $\overset{\circ}{A}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în mulţimea A să considerăm o mulţime arbitrară deschisă $D \subset A$. Trecând la interioare obţinem $\overset{\circ}{D} \subset \overset{\circ}{A}$ sau $D \subset \overset{\circ}{A}$, D fiind o mulţime deschisă ($D = \overset{\circ}{D}$). Deducem că $\overset{\circ}{A}$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A.

13. Să se demonstreze următoarele proprietăţi într-un spaţiu metric (X, d):

a) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$; b) $\overbrace{A_1 \cap A_2}^{\circ} = \overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2}$; c) $\overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2} \subset \overbrace{A_1 \cup A_2}^{\circ}$.

Rezolvare. a) Din Problema 12 deducem că $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă, deci conform Problemei 11 b) ea coincide cu interiorul său, adică $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ\circ}{A}$.

b) Fie $x \in \overbrace{A_1 \cap A_2}^{\circ} \Leftrightarrow \exists$ o vecinătate V a punctului x a.î. $V \subset A_1 \cap A_2 \Rightarrow \exists V$ o vecinătate a lui x a.î. $V \subset A_1$ şi $V \subset A_2 \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A_1}$ şi $x \in \overset{\circ}{A_2} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2}$. Deci $\overbrace{A_1 \cap A_2}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2}$.

Reciproc, fie $x \in \overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A_1}$ şi $x \in \overset{\circ}{A_2} \Rightarrow \exists V_1$ o vecinătate a lui x a.î. $V_1 \subset A_1$ şi $\exists V_2$ o vecinătate a lui x a.î. $V_2 \subset A_2$. Atunci $V = V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a punctului x cu proprietatea $V \subset A_1 \cap A_2$. Deducem astfel că $x \in \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cap A_2}}$, deci $\overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cap A_2}}$, care împreună cu cealaltă incluziune ne dă egalitatea b).

c) Avem $\overset{\circ}{A_1} \subset A_1 \subset A_1 \cup A_2$, de unde rezultă că $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A_1}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}}$ sau $\overset{\circ}{A_1} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}}$. Asemănător $\overset{\circ}{A_2} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}}$. Rezultă astfel că $\overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}}$.

Incluziunea inversă nu are loc în general. Pentru a arăta acest lucru, să considerăm spaţiul metric $(I\!\!R, d)$ cu $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x,\, y \in I\!\!R$ şi mulţimile $A_1 = [2, 3]$, $A_2 =$ $= [3, 4]$. Avem:

$$\overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}} = (2, 4) \neq (2, 3) \cup (3, 4) = \overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2}\ .$$

Deci proprietatea $\overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}} = \overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2}$ este falsă.

14. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Să se demonstreze că:

a) $C\bar{A} = \overset{\circ}{\overbrace{CA}}$ b) $C\overset{\circ}{A} = \overline{CA}$.

Rezolvare. a) Fie $x \in C\bar{A} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists V$ o vecinătate a punctului x a.î. $V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists V$ o vecinătate a lui x a.î. $V \subset CA \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\overbrace{CA}}$. Rezultă astfel relaţia a).

b) Demonstrăm că complementarele celor două mulţimi $C\overset{\circ}{A}$ şi $\overline{CA}$ sunt egale, folosind punctul a), de unde va rezulta că mulţimile sunt egale. Avem:

$$C\left(C\overset{\circ}{A}\right) = \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overbrace{C(CA)}} \overset{a)}{=} C\left(\overline{CA}\right), \text{ deci } C\overset{\circ}{A} = \overline{CA}.$$

15. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Să se demonstreze următoarele relaţii:

a) $Fr\, A = \bar{A} \cap \overline{CA}$; b) $Fr\, A = Fr\,(CA)$; c) $A \subset \bar{A}$; d) $\bar{A} \setminus A \subset A'$.

Rezolvare. a) Fie $x \in Fr\, A \Leftrightarrow \forall V$ o vecinătate a punctului x, $V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap CA \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ şi $x \in \overline{CA} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \overline{CA}$. Rezultă că $Fr\, A = \bar{A} \cap \overline{CA}$.

b) Conform punctului a) $Fr\,(CA) = \overline{CA} \cap \overline{C(CA)} = \overline{CA} \cap \bar{A} = Fr\, A$.

c) Fie $x \in A \Rightarrow \forall V$ vecinătate a punctului x, $V \cap A \supset \{x\}$, de unde rezultă că $V \cap A \neq \emptyset$, deci $x \in \bar{A}$. Deducem că $A \subset \bar{A}$.

d) Fie $x \in \bar{A} \setminus A$, deci $x \in \bar{A}$ şi $x \notin A$. Rezultă că $\forall$ o vecinătate V a punctului x, $V \cap A \neq \emptyset$. Deoarece $A \setminus \{x\} = A$, deducem că $\forall V$ vecinătate a punctului x, $V \cap$ $\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, deci x este punct de acumulare pentru mulţimea A. Rezultă astfel că $\bar{A} \setminus A \subset A'$.

16. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Să se demonstreze că:

a) A este o mulţime deschisă $\Leftrightarrow A \cap Fr\,A = \emptyset$;

b) A este o mulţime închisă $\Leftrightarrow Fr\,A \subset A$.

Rezolvare. a) Deoarece $A \cap Fr\,A = A \cap \left(\bar{A} \cap \overline{CA}\right) = \left(A \cap \bar{A}\right) \cap \overline{CA} = A \cap \overline{CA} = A \cap C\overset{\circ}{A}$, rezultă că A este o mulţime deschisă (adică $A = \overset{\circ}{A}$) dacă şi numai dacă $A \cap C\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $A \cap Fr\,A = \emptyset$.

b) A este o mulţime închisă dacă şi numai dacă CA este deschisă. Deci conform punctului a) CA este deschisă $\Leftrightarrow CA \cap Fr\,(CA) = \emptyset \Leftrightarrow CA \cap Fr\,A = \emptyset \Leftrightarrow Fr\,A \subset A$.

17. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A,\ B \subset X$. Să se demonstreze:

a) $A' \subset \bar{A}$; b) $\bar{A} = A \cup A'$; c) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$; d) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Rezolvare. a) Fie $x \in A'$; deci $\forall\, V$ o vecinătate a punctului x are proprietatea $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Atunci:

$$V \cap A \supset V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

deci $V \cap A \neq \emptyset$. Rezultă că x este punct aderent pentru mulţimea A, adică $x \in \bar{A}$. Deci $A' \subset \bar{A}$.

b) Din incluziunile $A \subset \bar{A}$ (Problema 15, c)) şi $A' \subset \bar{A}$ (punctul a)) rezultă că $A \cup A' \subset \bar{A}$. Pentru a demonstra incluziunea reciprocă, fie $x \in \bar{A}$. Atunci $\forall\, V$ vecinătate a punctului x are proprietatea că $V \cap A \neq \emptyset$. Pentru punctul x există două posibilităţi: $x \in A$ sau $x \notin A$. Dacă $x \in A$ atunci $x \in A \cup A'$; dacă $x \notin A$ atunci orice vecinătate V a punctului x are proprietatea că $V \cap A = V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Rezultă că x este punct de acumulare pentru mulţimea A, deci $x \in A' \subset A \cup A'$. Deducem astfel că $\bar{A} \subset A \cup A'$. Din cele două incluziuni rezultă că $\bar{A} = A \cup A'$.

c) Fie A, B, $A \subset B$ şi fie $x \in A'$; atunci pentru $\forall\, V$ vecinătate a punctului x, $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Deoarece $A \subset B$ rezultă că pentru $\forall\, V$: $V \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, deci $x \in B'$. Deducem astfel că $A' \subset B'$.

d) Fie $x \in (A \cup B)'$, deci pentru $\forall\, V$ vecinătate a punctului x, $V \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Presupunem prin reducere la absurd că $x \notin A' \cup B'$, deci $x \notin A'$ şi $x \notin B'$. Rezultă că $\exists\, V_1$ o vecinătate a punctului x a.î. $V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ şi $\exists\, V_2$ o vecinătate a punctului x a.î. $V_2 \cap (B \setminus \{x\}) = \emptyset$. Atunci $V = V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x care satisface condiţia:

$$(V_1 \cap V_2) \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) = \emptyset,$$

ceea ce contrazice ipoteza că $x \in (A \cup B)'$. Deci $x \in A' \cup B'$ şi în concluzie $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$.

Pentru cealaltă incluziune avem: $A \subset A \cup B \Rightarrow A' \subset (A \cup B)'$ şi $B \subset A \cup B \Rightarrow B' \subset (A \cup B)'$. Deci $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

Din cele două incluziuni deducem că $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

18. Să se găsească interiorul, mulţimea derivată, aderenţa şi frontiera următoarelor submulţimi ale lui $I\!R$ dotat cu metrica uzuală $d(x, y) = |x - y|$:

a) $A = \left\{\dfrac{1}{n};\ n \in I\!N^*\right\}$; b) $B = \left\{\dfrac{n+1}{n} \sin\dfrac{n\pi}{3};\ n \in I\!N^*\right\}$;

c) $C = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \dfrac{n}{2n+3};\ n \in I\!N\right\}$.

Rezolvare. a) Interiorul mulţimii A este mulţimea vidă: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Într-adevăr, mulţimea A nu are puncte interioare; $\forall\, x = \dfrac{1}{n} \in A$, $x \notin \overset{\circ}{A}$ deoarece $\nexists V$ vecinătate a punctului x a.î. $V \subset A$. Orice vecinătate $V = \left(\dfrac{1}{n} - \varepsilon, \dfrac{1}{n} + \varepsilon\right)$ conţine numere iraţionale care nu aparţin lui A.

Punctele mulţimii A sunt izolate. Pentru orice element $x = \dfrac{1}{n} \in A$, $\exists\, V$ o vecinătate a punctului x a.î. $V \cap A = \{x\}$; de exemplu $V = \left(\dfrac{1}{n} - \varepsilon, \dfrac{1}{n} + \varepsilon\right)$ cu $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ are proprietatea $V \cap A = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

Mulţimea derivată $A' = \{0\}$. Într-adevăr, $\forall\, V$ o vecinătate a punctului 0, $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $V \cap (A \setminus \{0\}) = V \cap A \neq \emptyset$. Pentru $n = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, elementul $\dfrac{1}{n} \in V \cap (A \setminus \{0\}) = V \cap A$. Orice punct al mulţimii A nu este punct de acumulare, fiind punct izolat. De asemenea se arată că orice punct $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq \dfrac{1}{n}$, $n \in I\!N^*$ nu este punct de acumulare pentru mulţimea A.

Aderenţa mulţimii A, conform Problemei 17, b) este $\bar{A} = A \cup A'$, deci $\bar{A} = \left\{0;\ \dfrac{1}{n},\ n \in I\!N^*\right\}$, iar frontiera $Fr\,A = \bar{A} \cap \overline{CA} = \bar{A} \cap C\overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap C\emptyset = \bar{A} \cap I\!R = \bar{A} = \left\{0;\ \dfrac{1}{n},\ n \in I\!N^*\right\}$.

b) Descompunem mulţimea B în şase submulţimi $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_6$, unde:

$$B_1 = \left\{\frac{n+1}{n} \sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k,\ k \in I\!N^*\right\} = \left\{\frac{6k+1}{6k} \cdot 0;\ k \in I\!N^*\right\} = \{0\},$$

$$B_2 = \left\{\frac{n+1}{n} \sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k+1,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6k+2}{6k+1};\ k \in I\!N\right\},$$

$$B_3 = \left\{\frac{n+1}{n} \sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k+2,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6k+3}{6k+2};\ k \in I\!N\right\},$$

$$B_4 = \left\{\frac{n+1}{n} \sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k+3,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{6k+4}{6k+3} \cdot 0;\ k \in I\!N\right\} = \{0\},$$

$$B_5 = \left\{\frac{n+1}{n}\sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k+4,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{6k+5}{6k+4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ k \in I\!N\right\},$$
$$B_6 = \left\{\frac{n+1}{n}\sin\frac{n\pi}{3};\ n = 6k+5,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{6k+6}{6k+5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ k \in I\!N\right\}.$$

Deoarece B este o reuniune finită de mulţimi numărabile, rezultă ca la punctul a) că: $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, $B' = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (limitele şirurilor mulţimilor B_2, B_3, B_5, B_6), $\bar{B} = B \cup B'$, iar $Fr\,B = \bar{B} \cap \overline{CB} = \bar{B} \cap C\overset{\circ}{B} = \bar{B} \cap I\!R = \bar{B}$.

c) Avem $C = C_1 \cup C_2$, unde:

$$C_1 = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n\frac{n}{2n+3};\ n = 2k,\ k \in I\!N\right\} = \left\{\frac{6k+3}{4k+3};\ k \in I\!N\right\},$$
$$C_2 = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n\frac{n}{2n+3};\ n = 2k+1,\ k \in I\!N\right\} = \left\{-\frac{2k+1}{4k+5};\ k \in I\!N\right\}.$$

Deci: $C = \left\{\frac{6k+3}{4k+3};\ k \in I\!N\right\} \cup \left\{-\frac{2k+1}{4k+5};\ k \in I\!N\right\}$.

Rezultă că: $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, $C' = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $\bar{C} = C \cup C'$ şi $Fr\,C = \bar{C}$.

19. Să se arate că:

a) Dacă $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ sunt şiruri convergente în spaţiul metric (X,d), atunci $(d(x_n,y_n))_{n\in I\!N}$ este un şir convergent în $I\!R$.

b) Dacă $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ sunt şiruri Cauchy în spaţiul metric (X,d), atunci $(d(x_n,y_n))_{n\in I\!N}$ este şir Cauchy în $I\!R$.

Rezolvare. a) Presupunem că $(x_n)_{n\in I\!N}$, $(y_n)_{n\in I\!N}$ sunt şiruri convergente, $x_n \to x$, pentru $n \to \infty$ şi $y_n \to y$, pentru $n \to \infty$ în spaţiul X. Demonstrăm mai întâi următoarea inegalitate în spaţiul metric (X,d):

$$(1) \qquad |d(\alpha,\beta) - d(\gamma,\delta)| \le d(\alpha,\gamma) + d(\beta,\delta), \quad \forall\, \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in X.$$

Într-adevăr, avem: $d(\alpha,\beta) \le d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\delta) + d(\delta,\beta)$, de unde rezultă că:

$$(2) \qquad d(\alpha,\beta) - d(\gamma,\delta) \le d(\alpha,\gamma) + d(\delta,\beta), \quad \forall\, \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in X.$$

Apoi: $d(\gamma,\delta) \le d(\gamma,\alpha) + d(\alpha,\beta) + d(\beta,\delta)$ de unde deducem:

$$(3) \qquad d(\gamma,\delta) - d(\alpha,\beta) \le d(\alpha,\gamma) + d(\beta,\delta), \quad \forall\, \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in X.$$

Din inegalităţile (2) şi (3) rezultă inegalitatea (1). Luând $\alpha = x_n$, $\beta = y_n$, $\gamma = x$ şi $\delta = y$ în (1) obţinem inegalitatea:

$$(4) \qquad |d(x_n,y_n) - d(x,y)| \le d(x_n,x) + d(y_n,y), \quad \forall\, n \in I\!N.$$

Şirurile $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ fiind convergente la $x \in X$, respectiv $y \in Y$, avem:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n'_\varepsilon \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n'_\varepsilon$ are loc $d(x_n, x) < \varepsilon$ şi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n''_\varepsilon \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n''_\varepsilon$ are loc $d(y_n, y) < \varepsilon$.

Atunci pentru $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon = \max\{n'_{\varepsilon/2}, n''_{\varepsilon/2}\} \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$ rezultă, folosind inegalitatea (4), că:

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Deci $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$, pentru $n \to \infty$ în spaţiul $I\!R$. Din acest rezultat deducem că aplicaţia $d(\cdot, \cdot)$ este continuă în ambele argumente.

b) Deoarece şirurile $(x_n)_{n\in I\!N}$ şi $(y_n)_{n\in I\!N}$ sunt şiruri Cauchy în spaţiul X, avem:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n'_\varepsilon \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n'_\varepsilon$ are loc $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon, \ \forall p \in I\!N$ şi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n''_\varepsilon \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n''_\varepsilon$ are loc $d(y_{n+p}, y_n) < \varepsilon, \ \forall p \in I\!N$.

Folosind inegalitatea (1) cu $\alpha = x_{n+p}, \ \beta = y_{n+p}, \ \gamma = x_n, \ \delta = y_n$, adică:

$$|d(x_{n+p}, y_{n+p}) - d(x_n, y_n)| \le d(x_{n+p}, x_n) + d(y_{n+p}, y_n),$$

deducem, din cele de mai sus, că pentru $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon = \max\{n'_{\varepsilon/2}, n''_{\varepsilon/2}\} \in I\!N$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$:

$$|d(x_{n+p}, y_{n+p}) - d(x_n, y_n)| < \varepsilon, \ \forall p \in I\!N.$$

Rezultă astfel că şirul $(d(x_n, y_n))_{n\in I\!N}$ este un şir Cauchy în $I\!R$, deci convergent.

20. Fie A o mulţime a spaţiului metric (X, d). Numărul $d(A) \in I\!R$ definit prin: $d(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$ se numeşte *diametrul* mulţimii A, (prin convenţie dacă $A = \emptyset, \ d(A) = 0$). Să se arate că:

a) A este mărginită $\Leftrightarrow d(A) < \infty$.

b) Dacă $A \subset B$ atunci $d(A) \le d(B)$.

c) $d(A) = d(\bar{A}), \ \forall A \subset (X, d)$.

d) Dacă mulţimea $A \subset X$ este compactă ($A \ne \emptyset$), atunci $\exists (x_0, y_0) \in A \times A$ astfel încât $d(x_0, y_0) = d(A)$.

Rezolvare. a) Dacă A este mărginită rezultă că $\exists x_0 \in X$ şi $\exists r > 0$ a.î. $A \subset \subset \bar{S}(x_0, r)$; deci $\forall x \in A$ avem $d(x, x_0) \le r$. Atunci:

$$d(x, y) \le d(x, x_0) + d(x_0, y) \le 2r, \ \forall x, y \in A,$$

de unde rezultă că: $d(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \le 2r < \infty$.

Reciproc, dacă $d(A) < \infty$, fie $x_0 \in A$ un element fixat al mulţimii A, presupusă nevidă (dacă $A = \emptyset$ atunci A este mărginită). Atunci: $d(x, x_0) \le d(A), \ \forall x \in A$, deci $A \subset \bar{S}(x_0, d(A))$, adică A este o mulţime mărginită.

b) Fie $A, \ B$ două mulţimi din spaţiul X cu $A \subset B$. Avem:

$$d(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y\in B} d(x,y) = d(B).$$

c) Fie $A \subset (X,d)$. Din incluziunea $A \subset \bar{A}$, conform punctului b) deducem că $d(A) \leq d(\bar{A})$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, să considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat şi $x,\ y \in \bar{A}$. Din definiţia punctului aderent al unei mulţimi rezultă, considerând vecinătatea $V = S(x,\varepsilon/2)$, că $\exists\, x_1 \in A$ a.î. $x_1 \in S(x,\varepsilon/2)$, adică $d(x,x_1) < < \varepsilon/2$. În mod asemănător $\exists\, y_1 \in A$ a.î. $y_1 \in S(y,\varepsilon/2)$, deci $d(y,y_1) < \varepsilon/2$. Atunci:

$$d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(x_1,y_1) + d(y_1,y) < \varepsilon/2 + d(x_1,y_1) + \varepsilon/2 = \varepsilon + d(x_1,y_1) \leq \\ \leq \varepsilon + d(A).$$

Deci $d(x,y) < \varepsilon + d(A),\ \ \forall\, x,y \in \bar{A}$, de unde rezultă că $d(\bar{A}) \leq \varepsilon + d(A)$. Deoarece ε este arbitrar, deducem că $d(\bar{A}) \leq d(A)$, care împreună cu cealaltă inegalitate ne conduc la concluzia că $d(A) = d(\bar{A})$.

d) Deoarece mulţimea A este compactă, rezultă că ea este mărginită, deci $d(A) < < \infty$. Conform teoremei de caracterizare a marginei superioare a unei mulţimi, avem:

1. $d(x,y) \leq d(A),\ \ \forall\, x,\ y \in A$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x_\varepsilon,\ y_\varepsilon \in A$ a.î. $d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > d(A) - \varepsilon$.

Luând $\varepsilon = 1/n$ în proprietatea 2. de mai sus deducem existenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ a.î. $d(x_n,y_n) > d(A) - \dfrac{1}{n}$. Deci:

$$d(A) - \frac{1}{n} < d(x_n,y_n) \leq d(A).$$

Deoarece A este o mulţime compactă, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ convergent la $x_0 \in A$, iar şirul $(y_{k_n})_{n\geq 1} \subset (y_n)_{n\geq 1} \subset A$ conţine un subşir $(y_{p_{k_n}})_{n\geq 1}$ convergent la $y_0 \in A$. Avem:

$$d(x_0,y_0) - \frac{1}{p_{k_n}} \leq d(A) - \frac{1}{p_{k_n}} < d\left(x_{p_{k_n}}, y_{p_{k_n}}\right) \leq d\left(x_{p_{k_n}}, x_0\right) + d(x_0,y_0) + d(y_0, y_{p_{k_n}}).$$

Şirurile $(x_{p_{k_n}})_{n\geq 1}$ şi $(y_{p_{k_n}})_{n\geq 1}$ fiind convergente la x_0, respectiv y_0, rezultă că pentru $\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in I\!N^*$ a.î. $d(x_{p_{k_n}}, x_0) < \varepsilon/2$ şi $d(y_{p_{k_n}}, y_0) < \varepsilon/2,\ \ \forall\, n \geq n_0$. Atunci:

$$d(x_0,y_0) - \frac{1}{p_{k_n}} \leq d(A) - \frac{1}{p_{k_n}} < \varepsilon + d(x_0,y_0),\ \ \forall\, n \geq n_0.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ deducem, din inegalităţile de mai sus, că:

$$d(x_0,y_0) \leq d(A) \leq d(x_0,y_0),$$

adică $d(x_0,y_0) = d(A)$.

21. Fie c mulţimea şirurilor de numere reale convergente:

$$c = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \mid\ x_n \in I\!R,\ \forall\, n \geq 1;\ \ (x_n)_{n\geq 1}\ \text{convergent}\}.$$

Să se arate că aplicaţia:

$$(x,y) \to d(x,y) = \sup\nolimits_{n\geq 1} |x_n - y_n| \in I\!R,\ \ x = (x_n)_{n\geq 1},\ \ y = (y_n)_{n\geq 1} \in c$$

defineşte o metrică pe c şi că spaţiul metric (c, d) este complet.

Rezolvare. Verificăm mai întâi axiomele metricii:

a) Evident $d(x,y) = \sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| \geq 0,\ \forall\, x,\, y \in c,\ \ x = (x_n)_{n\geq 1},\ \ y = (y_n)_{n\geq 1}$, iar

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow |x_k - y_k| \leq \sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| = 0,\ \ \forall\, k \geq 1 \\ &\Leftrightarrow |x_k - y_k| = 0,\ \ \forall\, k \geq 1 \Leftrightarrow x_k = y_k,\ \ \forall\, k \geq 1 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

b) $d(x,y) = \sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| = \sup_{n\geq 1} |y_n - x_n| = d(y,x),\ \ \forall\, x,\, y \in c.$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \ \forall\, x = (x_n)_{n\geq 1},\ \ y = (y_n)_{n\geq 1},\ \ z = (z_n)_{n\geq 1} \in c.$ Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu:

$$\sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| \leq \sup_{n\geq 1} |x_n - z_n| + \sup_{n\geq 1} |z_n - y_n|.$$

Pentru a o demonstra, plecăm de la inegalităţile evidente:

$$|x_n - y_n| = |(x_n - z_n) + (z_n - y_n)| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|,\ \ \forall\, n \geq 1.$$

Luând supremul după $n \geq 1$ în ambii membri ai inegalităţii de mai sus, obţinem:

$$\sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| \leq \sup_{n\geq 1} [|x_n - z_n| + |z_n - y_n|] \leq \sup_{n\geq 1} |x_n - z_n| + \sup_{n\geq 1} |z_n - y_n|,$$

adică inegalitatea triunghiulară. Rezultă astfel că spaţiul (c, d) este spaţiu metric.

Pentru a demonstra că (c, d) este spaţiu complet, vom arăta că orice şir Cauchy din spaţiul c este şir convergent. Fie şirul Cauchy $(x^{(k)})_{k\geq 1} \subset c$, $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\geq 1}$:

$$\begin{aligned} &x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots) \in c, \\ &x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots) \in c, \\ &\vdots \\ &x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots) \in c, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ fiind şir Cauchy, avem:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon) \geq 1\ \text{ a.î }\ \forall\, k,\, k' \geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ d(x^{(k)}, x^{(k')}) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon\ \ \left(\Rightarrow |x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon,\ \ \forall\, n \geq 1\right), \end{aligned}$$

de unde rezultă că pentru $\forall\, n \geq 1$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon) \geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k,\, k' \geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ |x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon.$$

Deducem astfel că pentru $\forall\, n \geq 1$, şirul $(x_n^{(k)})_{k\geq 1}$ este un şir Cauchy de numere reale, deci convergent. Rezultă că pentru $\forall\, n \geq 1\ \exists\, x_n^{(0)} \in I\!R$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^{(0)}$. Trecând la limită în (5) pentru $k' \to \infty$ obţinem că:

$$(6)\qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon) \geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k \geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \leq \varepsilon,\ \ \forall\, n \geq 1.$$

Vom arăta în continuare că şirul $x^{(0)} = (x_n^{(0)})_{n\geq 1} \in c$, adică este un şir convergent. Pentru aceasta vom demonstra că $x^{(0)}$ este un şir Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$; şirul $x^{(k'_0)}$, $k'_0 = k_0(\varepsilon/3)$ este convergent, deci Cauchy, adică pentru $\varepsilon/3 > 0$:

$$\exists\, n_0(\varepsilon/3) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon/3) \text{ are loc } |x_{n+p}^{(k'_0)} - x_n^{(k'_0)}| < \varepsilon/3, \ \forall\, p \in I\!N.$$

Pentru $n \geq n_0(\varepsilon/3)$ şi $\forall\, p \in I\!N$ din inegalitatea de mai sus şi din inegalităţile (6) rezultă că:

$$|x_{n+p}^{(0)} - x_n^{(0)}| \leq |x_{n+p}^{(0)} - x_{n+p}^{(k'_0)}| + |x_{n+p}^{(k'_0)} - x_n^{(k'_0)}| + |x_n^{(k'_0)} - x_n^{(0)}| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Deci pentru

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \tilde{n}_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/3) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon) \text{ are loc } |x_{n+p}^{(0)} - x_n^{(0)}| < \varepsilon, \ \forall\, p \in I\!N.$$

Rezultă că şirul $x^{(0)}$ este Cauchy, deci convergent.

Demonstrăm în continuare că $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ în spaţiul (c, d). Din (6) avem:
$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \widetilde{k}_0(\varepsilon) = k_0(\varepsilon/2) \geq 1$ a.î. $\forall\, k \geq \widetilde{k}_0(\varepsilon)$ are loc $\sup_{n\geq 1} |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ sau

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \widetilde{k}_0(\varepsilon) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, k \geq \widetilde{k}_0(\varepsilon) \text{ are loc } d(x^{(k)}, x^{(0)}) < \varepsilon.$$

Deducem că şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ este un şir convergent cu limita $x^{(0)}$, deci spaţiul (c, d) este spaţiu metric complet.

22. Fie $A = [0, \infty)$ cu metrica euclidiană d, $d(x, y) = |x - y|$ şi fie funcţia $f : [0, \infty) \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\forall\, x \in [0, \infty)$.

Să se arate că funcţia $f : A \to A$ satisface relaţia:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y), \ \forall\, x, y \in A$$

şi că funcţia f are un singur punct fix.

Rezolvare. Demonstrăm mai întâi că:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \ \Leftrightarrow \ \left|\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + y^2}\right| \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \in [0, \infty).$$

Inegalitatea de mai sus este echivalentă pentru $x \neq y$ (pentru $x = y$ este evidentă) cu:

$$\frac{|y^2 - x^2|}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leq |x - y| \ \Leftrightarrow \ \frac{|x - y| \cdot (x + y)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \in [0, \infty) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x + y \leq (1 + x^2)(1 + y^2) \ \Leftrightarrow \ x^2(1 + y^2) - x + y^2 - y + 1 \geq 0, \ \forall\, x, y \in A.$$

Privit ca un trinom de gradul al doilea în necunoscuta x, membrul stâng al ultimei inegalităţi de mai sus are discriminantul: $\Delta = 1 - 4(1 + y^2)(y^2 - y + 1)$. Deoarece $y^2 - y + 1 \geq 3/4$, $\forall\, y \in I\!R$, rezultă că $\Delta \leq 1 - 4 \cdot \frac{3}{4}(1 + y^2) = 1 - 3(1 + y^2) = -2 - 3y^2 \leq -2 < 0$. Deducem că trinomul de mai sus în variabila x are semnul lui $a = 1 + y^2 > 0$, deci:

$$x^2(1 + y^2) - x + y^2 - y + 1 > 0, \ \forall\, x, y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \geq 0.$$

Arătăm în continuare că $\exists$ un singur element $x_0 \in [0,\infty)$ a.î. $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x_0^2} = x_0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 1 = 0$. Într-adevăr, funcţia $g(x) = x^3 + x - 1,\ x \in [0,\infty)$ are derivata $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, deci g este o funcţie strict crescătoare. Deoarece $g(0) = -1$, iar $g(\infty) = \infty$, rezultă că $\exists\, x_0 \in [0,\infty)$ unic a.î. $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Mai mult, $x_0 \in (0,1)$, deoarece $g(0) = -1 < 0$, iar $g(1) = 1 > 0$.

Pentru funcţia din enunţul Problemei putem demonstra o inegalitate mai puternică, adică putem arăta că $\exists$ un număr $q \in (0,1)$ a.î.:

$$d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x,y),\ \ \forall\, x,\, y \ge 0.$$

Notând cu $\alpha = 1/q$ (> 1), inegalitatea de mai sus este echivalentă pentru $x \ne y$ (pentru $x = y$ este adevărată, $\forall\, q$) cu:

$$\alpha(x+y) \le (1+x^2)(1+y^2) \Leftrightarrow x^2(1+y^2) - \alpha x + y^2 - \alpha y + 1 \ge 0,\ \ \forall\, x,\, y \ge 0.$$

Pentru $\alpha < 2$ $(\alpha > 1)$ avem: $1 - \alpha y + y^2 \ge \dfrac{4-\alpha^2}{4} > 0,\ \ \forall\, y \ge 0$, iar:

$$\widetilde{\Delta} = \alpha^2 - 4(1+y^2)(y^2 - \alpha y + 1) \le \alpha^2 - 4 \cdot \frac{4-\alpha^2}{4}(y^2+1) = \alpha^2 - (4-\alpha^2)(y^2+1) =$$
$$= 2\alpha^2 - 4 - (4-\alpha^2)y^2 \le 2\alpha^2 - 4 < 0,$$

de îndată ce $\alpha < \sqrt{2}$ $(\alpha > 1)$.

Deci $\exists\, \alpha \in (1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow q \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ astfel încât $d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x,y),\ \forall\, x,\, y \ge 0$. Deducem astfel că aplicaţia f este o contracţie pe spaţiul metric (A,d). Deci conform Teoremei 4 (teorema de punct fix a lui Banach) rezultă că f are un singur punct fix.

23. Să se calculeze cu precizia de 10^{-4} unica rădăcină reală a ecuaţiei:

$$x^3 + 12x - 1 = 0.$$

Rezolvare. Cu ajutorul şirului lui Rolle deducem că ecuaţia de mai sus are o singură rădăcină $\tilde{x} \in [0,1]$. Ecuaţia se scrie în mod echivalent sub forma $x = \varphi(x)$, unde $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+12}$. Vom arăta mai întâi că aplicaţia φ este o contracţie pe spaţiul $[0,1]$, spaţiu metric complet în raport cu metrica uzuală $d(x,y) = |x-y|$. Deoarece:

$$q = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{2x}{(x^2+12)^2} = \frac{2}{169} < 1,$$

deducem, conform teoremei lui Lagrange, că:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-y| \le \frac{2}{169}|x-y|,\ \ \forall\, x,\, y \in [0,1].$$

Deci funcţia φ este o contracţie. Aplicând Teorema 4 rezultă că există un singur punct fix al funcţiei φ, $\tilde{x}$: $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, adică soluţia ecuaţiei iniţiale, a cărei existenţă o dedusesem mai sus cu teorema lui Rolle. Teorema 4 a lui Banach ne va da aproximarea soluţiei $\tilde{x}$ cu precizia cerută. Şi anume, luând primul termen al şirului aproximaţiilor succesive $x_0 = 0$, avem $x_1 = \varphi(x_0) = \dfrac{1}{12}$, iar $d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1| = \dfrac{1}{12}$. Eroarea care se face înlocuind soluţia ecuaţiei $x = \varphi(x)$ cu aproximanta de ordinul n este:

$$|x_n - \widetilde{x}| \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-q} \cdot q^n.$$

Impunând condiţia ca $\dfrac{d(x_0, x_1)}{1-q} \cdot q^n < 10^{-4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{1 - 2/169} \cdot \left(\dfrac{2}{169}\right)^n < 10^{-4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{169}\right)^n < \dfrac{167 \cdot 12}{169 \cdot 10^4}$, obţinem $n \geq 2$. Deci $\widetilde{x} \simeq x_2 = \varphi(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2 + 12} = \dfrac{144}{1729} \simeq$ $\simeq 0,083285$ sau $\widetilde{x} \simeq 0,0833$.

24. Să se aplice teorema de punct fix a lui Banach (Teorema 4) în rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,n},$$

cu $a_{ij} \in I\!R, \ \ b_i \in I\!R, \ \ i, j = \overline{1,n}, \ \ a_{ii} \neq 0, \ \forall\, i = \overline{1,n}$.

Rezolvare. Deoarece $a_{ii} \neq 0, \ \ \forall\, i = \overline{1,n}$, sistemul de ecuaţii liniare se poate scrie în mod echivalent astfel:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

sau, în notaţie matricială:

$$X = \widetilde{A} X + \widetilde{B},$$

unde:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Notăm cu $\vec{f} : I\!R^n \to I\!R^n$ aplicaţia $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})), \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\vec{x} \in I\!R^n$, unde $f_j(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk} x_k + \widetilde{b}_j, \ \ j = \overline{1,n} \ \ \widetilde{a}_{jk} = -\dfrac{a_{jk}}{a_{jj}}, \ \ k, j = \overline{1,n}, \ \ k \neq j;$ $\widetilde{a}_{jj} = 0, \ \ j = \overline{1,n}, \ \ \widetilde{b}_j = \dfrac{b_j}{a_{jj}}, \ \ j = \overline{1,n}$. Ecuaţia matriceală $X = \widetilde{A}X + \widetilde{B}$ este echivalentă cu ecuaţia din spaţiul $I\!R^n$: $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x})$.

Vom arăta că, în anumite condiţii asupra elementelor matricei $\widetilde{A}$, $\vec{f}$ este o contracţie pe spaţiul metric complet $(I\!R^n, d)$. Avem:

$$d(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}[f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{y})]^2}, \ \ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \ \ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I\!R^n.$$

Dar:

$$|f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{y})| = \left|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}(x_k - y_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} (|\widetilde{a}_{jk}| \cdot |x_k - y_k|) \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}, \ \ j = \overline{1,n} \quad \text{şi}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{y})|^2 \le \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)\right] =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right).$$

Astfel obţinem:

$$d(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) \le \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} \quad \text{sau}$$

$$d(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) \le \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2\right)^{1/2} \cdot d(\vec{x}, \vec{y}).$$

Aplicaţia $\vec{f}$ este o contracţie dacă $q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2 < 1$. Din modul de definire a elementelor matricei $\widetilde{A}$ în funcţie de elementele matricei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ deducem:

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk} = \frac{1}{a_{jj}^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} a_{jk}^2, \ \ j = \overline{1,n},$$

de unde rezultă că:

$$q = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{jj}^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} a_{jk}^2\right).$$

Să observăm, în particular, că dacă $|\widetilde{a}_{jk}| \le \dfrac{1}{n}$, pentru $j \ne k$ avem $q < 1$. Într-adevăr: $\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2 \le \dfrac{n-1}{n^2}$, deoarece cel mult $n-1$ dintre coeficienţii a_{jk}, $k = \overline{1,n}$ sunt diferiţi de zero, $\forall\, j = \overline{1,n}$, iar $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}^2 \le \dfrac{n(n-1)}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} < 1$. Astfel dacă $\dfrac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} \le \dfrac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $k \ne j$, sistemul de ecuaţii are soluţie pentru orice $(b_j)_{j=\overline{1,n}}$, iar Teorema 4 a lui Banach furnizează şi un calcul aproximativ pentru soluţia sistemului.

Aplicaţie. Vom materializa cele expuse mai sus pe cazul unui sistem de trei ecuaţii liniare (de altfel el ar putea fi rezolvat prin diverse metode clasice: metoda substituţiei, metoda reducerii, metoda lui Cramer). Menţionăm că metoda prezentată mai sus este foarte utilizată în rezolvarea aproximativă cu ajutorul calculatorului a sistemelor de ecuaţii liniare cu un număr mare de necunoscute.

Să considerăm următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 20x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0,1x_2 + 0,1x_3 \\ x_2 = -0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,4 \\ x_3 = -0,05x_1 - 0,1. \end{cases}$$

În notaţie matriceală, avem:

$$X = \widetilde{A}X + \widetilde{B}, \text{ unde } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ -0,05 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sau, în spaţiul $I\!R^3$, obţinem ecuaţia vectorială:

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}), \ \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3, \ \ \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x})),$$

unde $f_1(\vec{x}) = -0,1x_2 + 0,1x_3$; $f_2(\vec{x}) = -0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,4$; $f_3(\vec{x}) = -0,05x_1 - 0,1$.

Condiţia $q < 1$ de mai sus este îndeplinită, deoarece:

$$q = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \tilde{a}_{jk}^2 = 3 \cdot 0,1^2 + 0,2^2 + 0,05^2 = 0,0725 < 1.$$

Luând $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0) \in I\!R^3$ avem: $\vec{x}^{(1)} = \vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = (0; 0,4; -0,1)$, iar $D = d(\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}) =$ $= \sqrt{0,16 + 0,01} = \sqrt{0,17}$.

Dacă dorim determinarea soluţiei sistemului cu o precizie de 10^{-2}, impunem condiţia:

$$\frac{D}{1-q} \cdot q^n < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{0,17}}{1 - 0,0725} \cdot (0,0725)^n < \frac{1}{100} \Leftrightarrow (0,0725)^n < \frac{0,009275}{\sqrt{0,17}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0,0725)^n < 0,022495,$$

îndeplinită pentru $n \geq 2$.

Deci soluţia sistemului este $\vec{x} \simeq \vec{x}^{(2)} = \vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = (-0,05; 0,38; -0,1)$. Rezultă $\vec{x} \simeq (-0,05; 0,38; -0,1)$.

25. Fie $C([a,b])$ (notată şi $C^0([a,b])$) mulţimea tuturor funcţiilor reale, definite şi continue pe $[a,b]$: $C([a,b]) = \{f \mid f : [a,b] \to I\!R, \ f \text{ continuă pe } [a,b]\}$.

Să se arate că aplicaţia:

$$f \to \|f\|_0 = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

este o normă pe spaţiul liniar $C([a,b])$.

Rezolvare. Spaţiul $C([a,b])$ este spaţiu liniar real în raport cu operaţiile:

$$(f,g)\to f+g,\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \ \forall\, x\in[a,b];$$
$$(\lambda,f)\to\lambda f,\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ \ \forall\, x\in[a,b],\ \ \lambda\in I\!\!R.$$

Dacă f şi g sunt funcţii continue pe $[a,b]$ atunci $f+g$ şi λf ($\lambda\in I\!\!R$) sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Celelalte axiome ale unui spaţiu liniar real se verifică fără probleme.

Verificăm în continuare axiomele normei:

a) Evident $\|f\|_0\ge 0,\ \ \forall\, f\in C([a,b])$ şi

$$\|f\|_0=0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|=0 \Leftrightarrow 0\le|f(y)|\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|=0,\ \ \forall\, y\in[a,b] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(y)=0,\ \ \forall y\in[a,b] \Leftrightarrow f=0,\ \ (0 - \text{funcţia identic zero}).$$

b) $\|\lambda f\|_0=\sup\limits_{x\in[a,b]}|(\lambda f)(x)|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|\lambda f(x)|=|\lambda|\cdot\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=|\lambda|\cdot\|f\|_0,\ \ \forall\, f\in$ $\in C([a,b]),\ \ \forall\,\lambda\in I\!\!R.$

c) $\|f+g\|_0\le\|f\|_0+\|g\|_0,\ \ \forall\, f,\, g\in C([a,b])$.

Pentru această inegalitate avem:

$$\|f+g\|_0=\sup_{x\in[a,b]}|(f+g)(x)|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}[|f(x)|+|g(x)|]\le$$
$$\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|=\|f\|_0+\|g\|_0,\ \ \forall\, f,\, g\in C([a,b]).$$

26. Fie $C^1([a,b])$ mulţimea tuturor funcţiilor reale derivabile pe $[a,b]$ cu derivata continuă: $C^1([a,b])=\{f\mid\ f:[a,b]\to I\!\!R,\ \ f \text{ derivabilă},\ \ f' \text{ continuă pe } [a,b]\}$.

Să se demonstreze că următoarea aplicaţie definită pe $C^1([a,b])$ este normă pe acest spaţiu liniar:

$$f\to\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Rezolvare. Se verifică imediat că mulţimea $C^1([a,b])$ cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea cu scalari (numere reale) a funcţiilor (vezi Problema 25) este spaţiu liniar real. Să verificăm în continuare axiomele normei:

a) Evident $\|f\|\ge 0,\ \ \forall\, f\in C^1([a,b])$ şi

$$\|f\|=0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|=0 \Leftrightarrow 0\le|f(y)|\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+$$
$$+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|=0\ \ \forall\, y\in[a,b] \Leftrightarrow f(y)=0,\ \ \forall\, y\in[a,b] \Leftrightarrow f=0.$$

b) $\|\lambda f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|(\lambda f)(x)|+\sup\limits_{x\in[a,b]}|(\lambda f)'(x)|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|\lambda f(x)|+\sup\limits_{x\in[a,b]}|\lambda f'(x)|=$

$$=|\lambda|\left[\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\right]=|\lambda|\cdot\|f\|,\ \ \forall\, f\in C^1([a,b]),\ \ \forall\,\lambda\in I\!\!R.$$

c) $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|,\ \ \forall\, f,g\in C^1([a,b])$.

Pentru această inegalitate avem:

$$\|f+g\|=\sup_{x\in[a,b]}|(f+g)(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|(f+g)'(x)|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)+$$

$+g'(x)| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}[|f(x)|+|g(x)|]+\sup\limits_{x\in[a,b]}[|f'(x)|+|g'(x)|] \le \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|+$
$+\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|+\sup\limits_{x\in[a,b]}|g'(x)| = \|f\|+\|g\|, \ \forall\, f,\, g \in C^1([a,b]).$

27. Să se demonstreze că mulţimea şirurilor mărginite de numere reale

$$l^\infty = \{x=(x_n)_{n\ge1} \subset I\!R \,|\, (x_n)_{n\ge1} \text{ mărginit}\},$$

notată şi cu m, cu aplicaţia:

$$x \to \|x\|_\infty = \sup_{n\ge1}|x_n|, \ \forall\, x=(x_n)_{n\ge1} \in l^\infty$$

este spaţiu liniar normat complet, deci spaţiu Banach.

Rezolvare. Spaţiul l^∞ este un spaţiu liniar real în raport cu operaţiile:

$$(x,y) \to x+y=(x_n+y_n)_{n\ge1}, \ x=(x_n)_{n\ge1}, \ y=(y_n)_{n\ge1} \in l^\infty$$
$$(\lambda,x) \to \lambda x=(\lambda x_n)_{n\ge1}, \ x=(x_n)_{n\ge1} \in l^\infty, \ \lambda \in I\!R.$$

Într-adevăr, de la şiruri de numere reale ştim că dacă $x,\, y \in l^\infty$, $\lambda \in I\!R$ atunci $x+y \in l^\infty$ şi $\lambda x \in l^\infty$. Celelalte axiome ale unui spaţiu liniar real se verifică imediat.

În continuare să verificăm axiomele normei:

a) Evident $\|x\|_\infty = \sup_{n\ge1}|x_n| \ge 0, \ \forall\, x \in l^\infty$ şi
$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{n\ge1}|x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_n|=0, \ \forall\, n\ge1 \Leftrightarrow x_n=0, \ \forall\, n \ge 1 \Leftrightarrow x=0$ (0-şirul identic zero).

b) $\|\lambda x\|_\infty = \sup_{n\ge1}|\lambda x_n| = |\lambda|\sup_{n\ge1}|x_n| = |\lambda|\cdot\|x\|_\infty, \ \forall\, x\in l^\infty, \ \forall\,\lambda \in I\!R.$

c) $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \ \forall\, x,\, y \in l^\infty.$

Într-adevăr, avem:

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{n\ge1}|x_n+y_n| \le \sup_{n\ge1}(|x_n|+|y_n|) \le \sup_{n\ge1}|x_n| + \sup_{n\ge1}|y_n| =$$
$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \ \forall\, x,\, y \in l^\infty.$$

Pentru a demonstra că l^∞ este spaţiu liniar normat complet în metrica indusă de norma $\|\cdot\|_\infty$, adică în metrica:

$$d(x,y) = \|x-y\|_\infty = \sup_{n\ge1}|x_n-y_n|, \ x=(x_n)_{n\ge1}, \ y=(y_n)_{n\ge1} \in l^\infty,$$

vom proceda asemănător Problemei 21, arătând că orice şir Cauchy este convergent. Pentru aceasta, fie $(x^{(k)})_{k\ge1} \subset l^\infty$ un şir Cauchy, adică:

$$\text{(7)} \quad \begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0 \ \exists\, k_0(\varepsilon)\ge1 \text{ a.î. } \forall\, k,\, k' \ge k_0(\varepsilon) \text{ are loc } \|x^{(k)}-x^{(k')}\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sup_{n\ge1}|x_n^{(k)}-x_n^{(k')}| < \varepsilon \ (\Rightarrow |x_n^{(k)}-x_n^{(k')}| < \varepsilon, \ \forall\, n\ge1). \end{aligned}$$

Din relaţia de mai sus deducem că pentru $\forall\, n \ge 1$:

$\forall\,\varepsilon>0 \ \exists\, k_0(\varepsilon)\ge1$ a.î. $\forall\, k,\, k' \ge k_0(\varepsilon)$ are loc $|x_n^{(k)}-x_n^{(k')}| < \varepsilon$,

adică pentru $\forall\, n\ge1$ şirul $(x_n^{(k)})_{n\ge1}$ este un şir Cauchy de numere reale, deci convergent. Rezultă că pentru $\forall\, n \ge 1 \ \exists\, x_n^{(0)} \in I\!R$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^{(0)}$.

Trecând la limită pentru $k' \to \infty$ în inegalitatea (7) obţinem:

(8) $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0(\varepsilon) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, k \geq k_0(\varepsilon) \text{ are loc } |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \leq \varepsilon,\ \forall\, n \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \|x^{(k)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Şirul $x^{(0)} = (x_n^{(0)})_{n\geq 1}$ este un şir mărginit. Într-adevăr, considerând $k_0(1)$, din relaţia (8) avem:

$$\|x^{(0)}\|_\infty \leq \|x^{(0)} - x^{(k_0(1))}\|_\infty + \|x^{(k_0(1))}\|_\infty \leq 1 + \|x^{(k_0(1))}\|_\infty \leq 1 + M_1,$$

şirul $x^{(k_0(1))}$ fiind mărginit. Rezultă că $x^{(0)}$ este mărginit.

Demonstrăm acum că $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ în spaţiul $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Din relaţia (8) deducem că:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \widetilde{k}_0(\varepsilon) = k_0(\varepsilon/2) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, k \geq \widetilde{k}_0(\varepsilon) \text{ are loc } \|x^{(k)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

adică şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ este un şir convergent. Rezultă astfel că spaţiul $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ este complet.

28. Să se demonstreze că spaţiul $l^1 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \subset I\!R \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} \subset s$, s fiind mulţimea tuturor şirurilor de numere reale, cu aplicaţia:

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|,\ \forall\, x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^1$$

este un spaţiu Banach.

Rezolvare. Spaţiul l^1 este un spaţiu liniar real în raport cu adunarea şirurilor şi înmulţirea cu numere reale a şirurilor. Vom arăta doar, că pentru $x, y \in l^1$, $\lambda \in I\!R$ avem $x + y$ şi $\lambda x \in l^1$, celelalte axiome ale spaţiului liniar verificându-se fără probleme. Fie deci $x = (x_n)_{n\geq 1}$ şi $y = (y_n)_{n\geq 1} \in l^1$. Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$. Folosind proprietăţile seriilor de numere reale rezultă că seriile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda| \cdot |x_n|$$

sunt convergente, deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie cu mărginire (I) ($|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|,\ \forall\, n \geq 1$). Rezultă că $x + y$ şi $\lambda x \in l^1$.

Să verificăm în continuare axiomele normei:

a) Evident $\|x\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| \geq 0,\ \forall\, x \in l^1$ şi

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = 0,\ \forall\, n \geq 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

b) $\|\lambda x\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n| = |\lambda| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = |\lambda| \cdot \|x\|_1,\ \forall\, x \in l^1,\ \forall\, \lambda \in I\!R.$

c) $\|x+y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1, \ \forall\, x,\, y \in l^1$.

Pentru a verifica inegalitatea de mai sus, fie $x = (x_n)_{n\ge 1} \in l^1$ şi $y = (y_n)_{n\ge 1} \in l^1$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$. Din inegalităţile:

$$|x_k + y_k| \le |x_k| + |y_k|, \ \forall\, k \ge 1,$$

sumând de la $k=1$ la $k=n$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|, \ \forall\, n \ge 1.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$, deducem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|,$$

adică $\|x+y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Demonstrăm în continuare că spaţiul $(l^1, \|\cdot\|_1)$ este complet, deci orice şir Cauchy este convergent. Fie $(x^{(k)})_{k\ge 1}$ un şir Cauchy din spaţiul l^1, $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\ge 1}$. Atunci:

$$\text{(9)} \quad \begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_0(\varepsilon) \ge 1 \ \text{ a.î. } \forall\, k,\, k' \ge k_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \ \|x^{(k)} - x^{(k')}\|_1 < \varepsilon \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Din relaţia de mai sus deducem că pentru $\forall\, n \ge 1$ avem:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_0(\varepsilon) \ge 1$ a.î. $\forall\, k,\, k' \ge k_0(\varepsilon)$ are loc $|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon$,

adică pentru $\forall\, n \ge 1$ şirul $(x_n^{(k)})_{k\ge 1}$ este un şir Cauchy de numere reale, deci convergent. Rezultă că pentru $\forall\, n \ge 1 \ \exists\, x_n^{(0)} \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^{(0)}$. Vom arăta că $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ în spaţiul l^1 şi că şirul $(x_n^{(0)})_{n\ge 1} \in l^1$.

Din relaţia (9) deducem că:

$$\text{(10)} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_0(\varepsilon) \ge 1 \ \text{ a.î. } \forall\, k,\, k' \ge k_0(\varepsilon) \ \text{ are loc } \sum_{n=1}^{p} |x_n^{(k)} - x_n^{(k')}| < \varepsilon, \ \forall\, p \ge 1.$$

Trecând la limită în (10) pentru $k' \to \infty$, obţinem:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_0(\varepsilon) \ge 1$ a.î. $\forall\, k \ge k_0(\varepsilon)$ are loc $\sum\limits_{n=1}^{p} |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \le \varepsilon, \ \forall\, p \ge 1$,

de unde rezultă că:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_0(\varepsilon) \ge 1$ a.î. $\forall\, k \ge k_0(\varepsilon)$ are loc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(0)}| \le \varepsilon$.

Deducem astfel că:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \widetilde{k}_0(\varepsilon) = k_0(\varepsilon/2) \ge 1$ a.î. $\forall\, k \ge \widetilde{k}_0(\varepsilon)$ are loc $\|x^{(k)} - x^{(0)}\|_1 \le \varepsilon/2 < \varepsilon$,

deci $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$.

Şirul $x^{(0)} \in l^1$, deoarece:

$$\|x^{(0)}\|_1 \leq \|x^{(0)} - x^{(k_0(1))}\|_1 + \|x^{(k_0(1))}\|_1 \leq 1 + \|x^{(k_0(1))}\|_1 \leq M,$$

şirul $x^{(k_0(1))}$ fiind din spaţiul l^1.

Rezultă că şirul $(x^{(k)}) \subset l^1$ este convergent, iar spaţiul $(l^1, \|\cdot\|_1)$ este spaţiu liniar normat complet, deci spaţiu Banach.

29. Să se arate că aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle : I\!R^3 \times I\!R^3 \to I\!R$ definită prin:

$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3, \ \vec{x} = (x_1,x_2,x_3), \ \vec{y} = (y_1,y_2,y_3) \in I\!R^3$ este un produs scalar pe spaţiul liniar $I\!R^3$.

Rezolvare. Verificăm axiomele produsului scalar:

a) $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = x_1^2+2x_1x_3+x_2^2+2x_3^2 = (x_1+x_3)^2+x_2^2+x_3^2 \geq 0, \ \forall\,\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in I\!R^3$ şi $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1+x_3)^2+x_2^2+x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1+x_3 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = {}$ $= x_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

b) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1+x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1+2x_3y_3 = y_1x_1+y_1x_3+y_2x_2+y_3x_1+2y_3x_3 = {}$ $= \langle\vec{y},\vec{x}\rangle, \ \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in I\!R^3$.

c) $\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = (x_1+y_1)z_1+(x_1+y_1)z_3+(x_2+y_2)z_2+(x_3+y_3)z_1+2(x_3+y_3)z_3 = {}$ $= (x_1z_1 + x_1z_3 + x_2z_2 + x_3z_1 + 2x_3z_3) + (y_1z_1 + y_1z_3 + y_2z_2 + y_3z_1 + 2y_3z_3) = {}$ $= \langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle, \ \forall\,\vec{x},\,\vec{y},\,\vec{z} \in I\!R^3$.

d) $\langle\alpha\vec{x},\vec{y}\rangle = \alpha x_1y_1+\alpha x_1y_3+\alpha x_2y_2+\alpha x_3y_1+2\alpha x_3y_3 = \alpha(x_1y_1+x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1+{}$ $+2x_3y_3) = \alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle, \ \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in I\!R^3, \ \forall\,\alpha \in I\!R$.

30. Fie X un spaţiu prehilbertian real cu produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ şi $x,\,y \in X$. Să se arate că:

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\| \Leftrightarrow x \text{ şi } y \text{ sunt liniar dependenţi, adică } \exists\,\lambda,\,\mu \in I\!R,$$
$$\lambda^2+\mu^2 \neq 0 \ \text{ a.î. } \ \lambda x + \mu y = 0.$$

Rezolvare. Presupunem mai întâi că x şi y sunt liniar dependenţi, deci $\exists\,\lambda,\,\mu \in$ $\in I\!R, \ \lambda^2+\mu^2 \neq 0$ a.î. $\lambda x + \mu y = 0$ sau $x = \widetilde{\lambda}y$ cu $\widetilde{\lambda} \in I\!R$, dacă $\lambda \neq 0$. Atunci $|\langle x,y\rangle| = |\widetilde{\lambda}|\cdot|\langle x,x\rangle| = |\widetilde{\lambda}|\cdot\|x\|^2 = \|x\|\cdot\|y\|$. Dacă $\lambda = 0$, deoarece $\mu \neq 0$ rezultă că $y = 0$ şi relaţia $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$ este evidentă.

Să presupunem acum că $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$. Dacă $y \neq 0$ să considerăm $\lambda =$ $= -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$. Atunci:

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} =$$
$$= \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} = 0,$$

de unde rezultă $\|x+\lambda y\|^2 = 0$ sau $x + \lambda y = 0$. Deci x şi y sunt liniar dependenţi. Dacă $y = 0$ atunci din relaţia $0\cdot x + y = 0$ rezultă că, şi în acest caz, x şi y sunt liniar dependenţi.

31. Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian real şi $x,\ y \in X$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $x \perp y$, adică $\langle x, y\rangle = 0$;

b) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

c) $\|x\| \le \|x + \lambda y\|,\ \ \forall\,\lambda \in I\!R$;

d) $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Rezolvare. Vom demonstra că a) $\Leftrightarrow$ b), a) $\Leftrightarrow$ c) şi a) $\Leftrightarrow$ d).

Pentru a) $\Leftrightarrow$ b) avem:

$x \perp y \overset{def}{\Leftrightarrow} \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$.

Arătăm în continuare că a) $\Rightarrow$ c), deci presupunem că $x \perp y$. Atunci, pentru un $\lambda \in I\!R$, $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 \ge \|x\|^2$, deci $\|x+\lambda y\| \ge \|x\|$. Pentru implicaţia inversă c) $\Rightarrow$ a) să considerăm în inegalitatea $\|x\| \le \|x+\lambda y\|$, $\lambda = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dacă $y \ne 0$, (dacă $y = 0$ atunci $\langle x,y\rangle = 0$, deci $x \perp y$). Obţinem:

$$\|x\|^2 \le \|x\|^2 - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^4}\cdot\|y\|^2 \Leftrightarrow 0 \le -2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \le 0 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0, \text{ adică } x \perp y.$$

Pentru ultima echivalenţă a) $\Leftrightarrow$ d) avem:

$$\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow 2\langle x,y\rangle = -2\langle x,y\rangle \Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle +$$
$$+\|y\|^2 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|.$$

32. Fie X un spaţiu liniar real normat. Condiţia necesară şi suficientă ca să existe pe X un produs scalar astfel încât $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$, $\forall\,x \in X$ este ca $\forall\,x,\ y \in X$ are loc relaţia $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$, (numită identitatea paralelogramului).

Rezolvare. Presupunem mai întâi că pe spaţiul liniar normat X există un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ astfel încât $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$, $\forall\,x \in X$. Atunci:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 =$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \ \forall\,x,\ y \in X.$$

Reciproc, presupunem că în spaţiul liniar real normat X este îndeplinită identitatea paralelogramului. Definim următoarea aplicaţie:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to I\!R,\ \ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],\ \ \forall\,x,\ y \in X.$$

Vom arăta că aplicaţia astfel definită este un produs scalar pe X. Avem: $\langle x,x\rangle = = \dfrac{1}{4}[\|2x\|^2 - 0] = \|x\|^2 \ge 0$, $\forall\,x \in X$ şi $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Apoi:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] = \frac{1}{4}[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2] = \langle y, x\rangle, \ \ \forall\, x,\, y \in X.$$

Pentru a demonstra celelalte două axiome ale produsului scalar, să calculăm mai întâi următoarea expresie:

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle + \langle x_1 - x_2, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2 -$$
$$- \|x_1 - x_2 - y\|^2] = \frac{1}{4}\left[\left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2\right) - \left(\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \ x_2 - y\|^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[2\left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2\|^2\right) - 2\left(\|x_1 - y\|^2 + \|x_2\|^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\|x_1 + y\|^2 -\right.$$
$$\left. - \|x_1 - y\|^2\right] = 2\langle x_1, y\rangle, \ \ \forall\, x_1, x_2, y \in X.$$

Deci:

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle + \langle x_1 - x_2, y\rangle = 2\langle x_1, y\rangle, \ \ \forall\, x_1,\, x_2,\, y \in X. \tag{11}$$

Pentru $x_1 = x_2$ relaţia (11) ne dă:

$$\langle 2x_1, y\rangle = 2\langle x_1, y\rangle, \ \ \forall\, x,\, y \in X. \tag{12}$$

Notând cu $u = x_1 + x_2$ şi $v = x_1 - x_2$, de unde $x_1 = \dfrac{u+v}{2}$, $x_2 = \dfrac{u-v}{2}$, deducem din relaţiile (11) şi (12) că:

$$\langle u, y\rangle + \langle v, y\rangle = 2\langle \frac{u+v}{2}, y\rangle \Leftrightarrow \langle u, y\rangle + \langle v, y\rangle = \langle u+v, y\rangle, \ \ \forall\, u,\, v,\, y \in X,$$

adică aplicaţia $\langle \cdot, \cdot\rangle$ este aditivă.

Din relaţia $\langle 2x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$, $\forall\, x,\, y \in X$ (relaţia (12)) obţinem:

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle, \ \ \forall\, n \in Z \quad \text{şi}$$
$$m\langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \langle nx, y\rangle \Leftrightarrow \langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \frac{n}{m}\langle x, y\rangle, \ \ \forall\, n,\, m \in Z, \ \ m \neq 0,$$

adică $\langle qx, y\rangle = q\langle x, y\rangle$, $\forall\, q \in Q$.

Apoi, deoarece funcţia $\|\cdot\|$ este continuă (conform proprietăţii a) a şirurilor din spaţii liniare normate şi a caracterizării continuităţii unei funcţii cu ajutorul şirurilor, vezi Capitolul 4), deci şi aplicaţia $\langle \cdot, \cdot\rangle$ este continuă, rezultă că:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \ \ \forall\, \lambda \in I\!R, \ \ \forall\, x,\, y \in X,$$

adică este îndeplinită şi ultima axiomă a produsului scalar.

Rezultă că aplicaţia $\langle \cdot, \cdot\rangle$ definită mai sus este un produs scalar pe spaţiul liniar real X astfel încât $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$, $\forall\, x \in X$.

33. Fie mulţimea $l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \subset I\!R;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\} \subset s$ şi aplicaţia:

$$x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}, \ \ \forall\, x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2.$$

Să se arate că $(l^2, \|\cdot\|_2)$ este un spaţiu liniar normat real în care este îndeplinită identitatea paralelogramului. Să se deducă apoi expresia produsului scalar corespunzător $\langle\cdot,\cdot\rangle$ şi să se demonstreze că $(l^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este spaţiu Hilbert.

Rezolvare. l^2 este spaţiu liniar real în raport cu adunarea şirurilor şi înmulţirea cu numere reale a şirurilor. Verificăm că dacă $x,\ y \in l^2,\ \ \lambda \in I\!R$ atunci $x+y$ şi $\lambda x \in l^2$. Fie $x = (x_n)_{n\geq 1},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ şi $y = (y_n)_{n\geq 1},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$. Atunci, din inegalitatea: $(x_n+y_n)^2 \leq 2(x_n^2+y_n^2),\ \ \forall\, n \geq 1$, deducem, folosind criteriul de comparaţie cu mărginire (I), că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2$ este convergentă (seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(x_n^2+y_n^2) = 2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)$ $< \infty$.) Iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)^2 = \lambda^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ este şi ea convergentă, deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Celelalte axiome ale spaţiului liniar se verifică fără probleme.

Verificăm în continuare axiomele normei:

a) Evident $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \geq 0,\ \ \forall\, x \in l^2$ şi

$$\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow x_n = 0,\ \ \forall\, n \geq 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

b) $\|\lambda x\|_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)^2\right)^{1/2} = |\lambda|\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} = |\lambda|\cdot\|x\|_2,\ \ \forall\, x \in l^2,\ \ \forall\, \lambda \in I\!R.$

c) $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2,\ \ \forall\, x,\ y \in l^2.$

Pentru a verifica această inegalitate, fie $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2,\ \ y = (y_n)_{n\geq 1} \in l^2$, deci $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} < \infty$ şi $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2} < \infty$. Folosind inegalitatea lui Minkowski cu $p = 2$ avem:

$$\left(\sum_{n=1}^{m}(x_n+y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{m}(|x_n|+|y_n|)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{m} y_n^2\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2},\ \ \forall\, m \geq 1.$$

Pentru $m \to \infty$ obţinem:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2} \quad \text{sau} \quad \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Deducem astfel că $(l^2, \|\cdot\|_2)$ este spaţiu liniar real normat. Să verificăm în continuare identitatea paralelogramului, adică:

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2),\ \ \forall\, x,\ y \in l^2.$$

Avem:

$$\|x+y\|_2^2+\|x-y\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2+2x_ny_n+y_n^2+x_n^2-$$

$$-2x_ny_n+y_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(2x_n^2+2y_n^2)=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2\right)=2(\|x\|_2^2+\|y\|_2^2),\ \ \forall\, x,\, y\in l^2.$$

Aplicând Problema 32 rezultă că $\exists$ pe l^2 un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cu proprietatea $(\langle x,x\rangle)^{1/2}=$ $=\|x\|_2$. Din rezolvarea Problemei 32 deducem forma produsului scalar:

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}[\|x+y\|_2^2-\|x-y\|_2^2]=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n,\ \ \forall\, x,\, y\in l^2.$$

Pentru a demonstra, în final, că $(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ este spaţiu Hilbert vom arăta că $(l^2,\|\cdot\|_2)$ este spaţiu normat complet, adică orice şir Cauchy este convergent. Procedând ca în Problema 28, fie $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ un şir Cauchy din spaţiul l^2, $x^{(k)}=(x_n^{(k)})_{n\geq 1}$. Avem:

$$\tag{13}\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k,\, k'\geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ \|x^{(k)}-x^{(k')}\|_2<\varepsilon\ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^{(k)}-x_n^{(k')})^2\right)^{1/2}<\varepsilon.\end{gathered}$$

Din relaţia de mai sus deducem că pentru $\forall\, n\geq 1$ avem:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k,\, k'\geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ |x_n^{(k)}-x_n^{(k')}|<\varepsilon,$$

adică pentru $\forall\, n\geq 1$ şirul $(x_n^{(k)})_{k\geq 1}$ este un şir Cauchy de numere reale, deci convergent. Rezultă că pentru $\forall\, n\geq 1\ \ \exists\, x_n^{(0)}\in I\!\!R$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(k)}=x_n^{(0)}$. Vom arăta că $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^{(0)}$ în spaţiul l^2 şi că şirul $x^{(0)}=(x_n^{(0)})_{n\geq 1}\in l^2$. Din relaţia (13) deducem:

$$\tag{14}\forall\varepsilon>0\ \ \exists k_0(\varepsilon)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k,\, k'\geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ \left(\sum_{n=1}^{p}(x_n^{(k)}-x_n^{(k')})^2\right)^{1/2}<\varepsilon,\ \ \forall p\geq 1.$$

Trecând la limită în (14) pentru $k'\to\infty$, obţinem:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k\geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ \left(\sum_{n=1}^{p}(x_n^{(k)}-x_n^{(0)})^2\right)^{1/2}\leq\varepsilon,\ \ \forall\, p\geq 1,$$

de unde rezultă:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, k_0(\varepsilon)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k\geq k_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^{(k)}-x_n^{(0)})^2\right)^{1/2}\leq\varepsilon.$$

Deducem astfel că:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\widetilde{k}_0(\varepsilon)=k_0(\varepsilon/2)\geq 1\ \text{ a.î. }\ \forall\, k\geq\widetilde{k}_0(\varepsilon)\ \text{ are loc }\ \|x^{(k)}-x^{(0)}\|_2\leq\varepsilon/2<\varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^{(0)}$.

Şirul $x^{(0)}\in l^2$ deoarece:

$$\|x^{(0)}\|_2\leq\|x^{(0)}-x^{(k_0(1))}\|_2+\|x^{(k_0(1))}\|_2\leq 1+\|x^{(k_0(1))}\|_2\leq M,$$

şirul $x^{(k_0(1))}$ fiind din spaţiul l^2.

Rezultă că şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1}\subset l^2$ este convergent, deci spaţiul $(l^2,\|\cdot\|_2)$ este spaţiu Banach, iar $(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ este spaţiu Hilbert.

34. Să se demonstreze că mulţimea $\mathcal{M} = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2 \mid \ \|x\|_2^2 = 1\} \subset l^2$ este mărginită şi închisă, dar nu este compactă.

Rezolvare. Avem $\mathcal{M} \subset \bar{S}(0,1),\ \ 0 = (0)_{n\geq 1} \in l^2$, deci $\mathcal{M}$ este mărginită. Pentru a demonstra că $\mathcal{M}$ este o mulţime închisă vom arăta că $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ (vezi Problema 42), adică $\mathcal{M}$ îşi conţine punctele aderente. Cu alte cuvinte $\forall\, (x^{(k)})_{k\geq 1} \subset \mathcal{M},\ x^{(k)} \to x^{(0)}$, pentru $k \to \infty$, rezultă că $x^{(0)} \in \mathcal{M}$. Fie $(x^{(k)})_{k\geq 1} \subset \mathcal{M}$ cu $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$; avem $\|x^{(k)}\|_2 = 1,\ \ \forall\, k \geq 1$. Folosind continuitatea normei deducem că $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)}\|_2 = \|x^{(0)}\|_2$, adică $\|x^{(0)}\|_2 = 1$. Deci $x^{(0)} \in \mathcal{M}$ şi astfel $\mathcal{M}$ este o mulţime închisă.

Vom arăta în continuare că $\mathcal{M}$ nu este compactă, adică $\exists\, (x^{(k)})_{k\geq 1} \subset \mathcal{M}$ care nu conţine nici un subşir convergent. Să considerăm şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1} \subset \mathcal{M}$ definit astfel:

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n \neq k. \end{cases}$$

Avem $\|x^{(k)}\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k)})^2 = 1$, deci $x^{(k)} \in \mathcal{M},\ \ \forall\, k \geq 1$. Apoi:

$$\|x^{(k)} - x^{(p)}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k)} - x_n^{(p)})^2 \right)^{1/2} = \sqrt{2},\ \ \forall\, k, p \in I\!N^*,\ \ k \neq p.$$

Deducem astfel că distanţa dintre orice două elemente ale şirului $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ este $\sqrt{2}$, adică şirul $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ nu conţine nici un subşir Cauchy, deci nu conţine nici un subşir convergent.

Din acest exemplu deducem că nu orice mulţime mărginită şi închisă a unui spaţiu metric este mulţime compactă.

35. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri din spaţiul $I\!R^k$:

a) $\vec{x}_n = (a_n, b_n) \in I\!R^2,\ \ n \geq 1$, unde:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!\, 8^n}},\ \ n \geq 1; \quad b_n = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} 3k^2 \right) \Big/ (n+1)^3 \right]^{\alpha n^2},\ \ n \geq 1,\ \ \alpha \geq 0.$$

b) $\vec{x}_n = (a_n, b_n) \in I\!R^2,\ \ n \geq 1$, unde:

$$a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2),\ \ n \geq 1; \quad b_n = b_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!},\ \ n \geq 2,\ \ b_1 \text{ fixat}.$$

c) $\vec{x}_n = (a_n, b_n, c_n) \in I\!R^3,\ \ n \geq 1$, unde:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+3}{k(k+1)} - \frac{(n+1)^2}{n},\ \ n \geq 1;$$

$$b_n = \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n},\ \ n \geq 1; \quad c_n = \sqrt{\alpha + c_{n-1}},\ \ n \geq 2,\ \ c_1 = \sqrt{\alpha},\ \ \alpha > 0.$$

Rezolvare. Conform Teoremei 5 este suficient (şi necesar) să calculăm limitele şirurilor componente ale şirurilor din spaţiul $I\!R^2$ sau $I\!R^3$ de mai sus.

a) Notăm cu $c_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!\,8^n}$, $n \geq 1$; avem:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!\,8^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!\,8^n}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{8(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{32}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Folosind consecinţa 4) a Teoremei lui Töplitz (Capitolul 2, §1, Problema 12) rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \dfrac{1}{32}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{32}$.

Pentru şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ avem:

$$b_n = \left[\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)^3}\right]^{\alpha n^2} = \left[\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2}\right]^{\alpha n^2}, \quad n \geq 1.$$

Dacă $\alpha = 0$ atunci $b_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Dacă $\alpha \neq 0$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3n+2}{2(n+1)^2}\right)^{\alpha n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-\alpha)n^2(3n+2)}{2(n+1)^2}} = 0.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{32}, 0\right), & \text{dacă } \alpha > 0; \\ \left(\dfrac{1}{32}, 1\right), & \text{dacă } \alpha = 0. \end{cases}$$

b) Avem:

$$a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3} \to \frac{1}{4}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Pentru şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, din relaţia de recurenţă deducem că:

$$b_{n+1} - b_n = -\frac{n+1}{(n+2)!} = -\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right], \quad \forall\, n \geq 1.$$

Deci:

$$\begin{aligned} b_2 - b_1 &= -\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] \\ b_3 - b_2 &= -\left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right] \\ &\vdots \\ b_{n+1} - b_n &= -\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right], \end{aligned}$$

de unde rezultă, prin adunare, că:

$$b_{n+1} - b_1 = \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{2!} \quad \text{sau} \quad b_{n+1} = b_1 + \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{2!}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Deci: $b_n = b_1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{(n+1)!}$, $\forall\, n \geq 2$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_1 - \dfrac{1}{2}$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \left(\dfrac{1}{4}; b_1 - \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Studiem şirurile componente; avem:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{3}{k(k+1)}\right] - \frac{(n+1)^2}{n} = n + 3\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] - \frac{(n+1)^2}{n} =$$
$$= n+3\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^2-3n-1}{n(n+1)} \to 1, \text{ pentru } n\to\infty.$$

Apoi $b_n = \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n} = \sin^2[\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi] = \sin^2\dfrac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} \to \sin^2\dfrac{\pi}{2} = 1.$

Pentru şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ vom arăta că el este monoton şi mărginit. Din relaţia de recurenţă rezultă că $c_n > 0,\ \forall\, n \geq 1$. Demonstrăm în continuare prin inducţie matematică că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, adică $c_n < c_{n+1},\ \forall\, n\geq 1$. Avem $c_2 = = \sqrt{\alpha + c_1} = \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}} > \sqrt{\alpha} = c_1$. Apoi presupunând că $c_n < c_{n+1}$ obţinem $c_{n+1} = = \sqrt{\alpha+c_n} < \sqrt{\alpha + c_{n+1}} = c_{n+2}$, deci $c_{n+1} < c_{n+2}$.

În plus, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Arătăm prin inducţie matematică că $c_n < 1+2\alpha,\ \forall\, n\geq 1$. Avem $c_1 = \sqrt{\alpha} < 1 + 2\alpha$ (deoarece $1+3\alpha+4\alpha^2 > 0$). Apoi din $c_n < 1+2\alpha$ rezultă că $c_{n+1} = \sqrt{\alpha+c_n} < \sqrt{\alpha+1+2\alpha} = \sqrt{1+3\alpha} < 1+2\alpha$ (deoarece $4\alpha^2+4\alpha > 0$).

Aplicând teorema lui Weierstrass deducem că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent, deci $\exists\, c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \geq 0$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem: $c = \sqrt{\alpha + c} \Rightarrow c = \dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \left(1,\ 1,\ \dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)$.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

36. Fie $(X_i, d_i),\ i = \overline{1,n}$ spaţii metrice şi fie $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Să se demonstreze că următoarele aplicaţii $d,\ \delta$ şi $\Delta : X\times X \to I\!\!R_+$ definite prin:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,y_i)},\quad \delta(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i),\quad \Delta(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} d_i(x_i,y_i),$$

$\forall\, x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n) \in X$ sunt metrice pe mulţimea X.

37. Pe mulţimea $\overline{I\!\!R}$ se defineşte funcţia $f : \overline{I\!\!R} \to \overline{I\!\!R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & \text{dacă } x = -\infty, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x \in I\!\!R, \\ \pi/2, & \text{dacă } x = +\infty. \end{cases}$$

Să se arate că funcţia $d(x,y) = |f(x) - f(y)|,\ x,\ y\in \overline{I\!\!R}$ este o metrică pe $\overline{I\!\!R}$.

38. Să se demonstreze că pe spaţiul s al tuturor şirurilor de numere reale aplicaţia $\varrho : s \times s \to I\!R$ definită prin:
$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n - y_n|)}, \quad x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad y = (y_n)_{n\geq 1} \in s$$
este o metrică.

39. Fie E o mulţime nevidă, (X,d) spaţiu metric şi $\mathcal{B}(E;X) = \{f \mid f : E \to X,$ mărginită$\}$. Să se arate că aplicaţia $\varrho : \mathcal{B}(E,X) \times \mathcal{B}(E,X) \to I\!R$ definită prin:
$$\varrho(f,g) = \sup_{x\in E} d(f(x), g(x)), \quad \forall\, f,\, g \in \mathcal{B}(E,X)$$
este o metrică pe $\mathcal{B}(E,X)$, numită *metrica convergenţei uniforme* sau *metrica lui Cebîşev.*

40. Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se demonstreze că:

a) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

b) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

41. Să se arate că sfera închisă $\bar{S}(x_0, \varepsilon_0)$, $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ din spaţiul metric (X,d) este o mulţime închisă.

42. Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) $A \subset X$ este închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;

b) $A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; \overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

43. Să se demonstreze că închiderea unei mulţimi dintr-un spaţiu metric (X,d) este o mulţime închisă şi este cea mai mică mulţime închisă care include acea mulţime.

44. Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; b) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$; c) $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

45. Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) $A \subset X$ este închisă $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$;

b) $\overset{\circ}{A} = A \setminus Fr\, A$; c) $\overline{A} = A \cup Fr\, A$.

46. Să se găsească interiorul, mulţimea derivată, aderenţa şi frontiera următoarelor submulţimi ale lui $I\!R$ dotat cu metrica uzuală $d(x,y) = |x-y|$, $x,\, y \in I\!R$:

a) $A = (0,1] \cup (2,3)$; b) $B = [(-3,1) \cap Q_+] \cup \left\{ \dfrac{2+(-1)^n n}{3n+1};\ n \geq 1 \right\}$;

c) $C = [(-1,1) \cap Q_+] \cup \left\{ \dfrac{1}{n+1} \cdot n^{(-1)^n} + \sin\dfrac{n\pi}{3};\ n \geq 1 \right\}$.

47. Fie (X,d) un spaţiu metric, iar A şi B două mulţimi nevide din X. Numărul $d(A,B) = \inf\limits_{(x,y)\in A\times B} d(x,y) \geq 0$ se numeşte *distanţa dintre mulţimile A şi B.* Dacă $B = \{x_0\}$, $d(x_0, A) = \inf\limits_{x\in A} d(x_0, x) \geq 0$ se numeşte *distanţa de la x_0 la mulţimea A.* Să se arate că:

a) Dacă A şi B sunt mulţimi compacte şi $A \cap B = \emptyset$ atunci $d(x,y) > 0$, $\forall\,(x,y) \in$ $\in A \times B$ şi $\exists\,(x_0,y_0) \in A \times B$ a.î. $d(A,B) = d(x_0,y_0)$.

b) Dacă A este compactă atunci $\exists\, a \in A$ a.î. $d(x_0,A) = d(x_0,a)$.

c) $d(x_0,A) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \overline{A}$.

48. Fie $f : (0,1/3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se arate că f este o contracţie, dar că f nu are nici un punct fix.

49. Să se calculeze cu precizia de 10^{-2} unica rădăcină reală a ecuaţiei:

$$x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

50. Să se demonstreze că $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_d)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\delta)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\Delta)$, unde $\|\cdot\|_d$, $\|\cdot\|_\delta$, $\|\cdot\|_\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt definite prin:

$$\|\vec{x}\|_d = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2};\quad \|\vec{x}\|_\delta = \sum_{i=1}^n |x_i|;\quad \|\vec{x}\|_\Delta = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|,\ \ \forall\, \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

sunt spaţii normate şi, în plus, normele de mai sus sunt echivalente, (vezi Problema 7).

51. Să se demonstreze că mulţimea c a şirurilor de numere reale convergente cu aplicaţia:

$$x \to \|x\| = \sup_{n\geq 1} |x_n|,\ \ \forall\, x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$$

este spaţiu liniar normat complet (vezi Problema 21).

52. Să se demonstreze că următoarea aplicaţie pe spaţiul $C([0,1])$:

$$f \to \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt,\ \ f \in C([0,1])$$

este o normă pe $C([0,1])$.

53. Să se demonstreze că următoarele aplicaţii definite pe $C^1([0,1])$:

$$f \to \|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} [|f(x)| + |f'(x)|],\ \ f \in C^1([0,1]),$$

$$f \to \|f\|_2 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,\ \ f \in C^1([0,1])$$

sunt norme pe $C^1([0,1])$.

54. Fie $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor cu elemente reale de tipul $m \times n$ (m linii şi n coloane) care se organizează ca spaţiu liniar real (în raport cu adunarea matricelor şi înmulţirea cu numere reale a acestora) de dimensiune $m \cdot n$. Să se demonstreze că aplicaţiile:

$$A \to \|A\|_1 = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2},$$

$$A \to \|A\|_2 = \max_{i=\overline{1,m}} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right),$$

$$A \to \|A\|_3 = \max_{j=\overline{1,n}} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right),$$
$$A \to \|A\|_4 = \max\left(|a_{ij}|;\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right),$$
$$A \to \|A\|_5 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!R)$$

sunt norme echivalente pe spaţiul $\mathcal{M}_{m,n}(I\!\!R)$.

55. Să se demonstreze că aplicaţiile $\langle \cdot, \cdot \rangle : I\!\!R^3 \times I\!\!R^3 \to I\!\!R$ definite prin:

a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$,

b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in I\!\!R^3$

sunt produse scalare pe spaţiul liniar $I\!\!R^3$.

56. Fie $\mathcal{M}_{n,n}(I\!\!R)$ (notat şi $\mathcal{M}_n(I\!\!R)$) mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente reale.

(I) Să se demonstreze că aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(I\!\!R) \times \mathcal{M}_n(I\!\!R) \to I\!\!R$ definită prin:

$\langle A, B \rangle = tr\,(AB^T) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(I\!\!R)$

este un produs scalar pe $\mathcal{M}_n(I\!\!R)$. (Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(I\!\!R)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ suma elementelor de pe diagonala principală se notează cu $tr\,A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ şi se numeşte *urma* matricei A).

(II) Notăm cu $\|A\| = (\langle A, A \rangle)^{1/2} = \left[tr\,(A\,A^T)\right]^{1/2}$. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) Dacă $U \in \mathcal{M}_n(I\!\!R)$ şi $U \cdot U^T = I_n$ atunci $\|U \cdot A\| = \|A \cdot U\| = \|A\|$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(I\!\!R)$.

b) Dacă A este o matrice diagonală, atunci:

$$\|AB - BA\| \le \sqrt{2}\,\|A\| \cdot \|B\|, \ \ \forall\, B \in \mathcal{M}_n(I\!\!R).$$

(III) Să se demonstreze că spaţiul $(\mathcal{M}_n(I\!\!R), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este spaţiu Hilbert.

57. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri din spaţiul $I\!\!R^3$:

a) $\vec{x}_n = \left(\sqrt[n]{n},\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n,\ \cos\dfrac{2\pi}{n} \right)$, $\ n \ge 1$;

b) $\vec{x}_n = (a_n,\, b_n,\, c_n)$, $\ n \ge 1$, unde:

$$a_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{3n+2}, \quad b_n = n(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,n), \quad c_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)^{1/2n}, \ \ n \ge 1.$$

Capitolul 4
LIMITE DE FUNCŢII. CONTINUITATEA FUNCŢIILOR

Fie funcţia $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^q$ (pentru $q = 1$, notată cu f), $D \subset \mathbb{R}^p$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), iar $\vec{x}_0$ un punct de acumulare pentru mulţimea D. Elementul $\vec{l} \in \mathbb{R}^q$ este *limita* funcţiei $\vec{f}$ în punctul $\vec{x}_0$, notat $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l}$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $(\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall \vec{x} \in D$, $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_p < \delta(\varepsilon)$ are loc $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{l}\|_q < \varepsilon$, ($\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ sunt norme în spaţiul $\mathbb{R}^p$, respectiv $\mathbb{R}^q$.)

Pentru $p = q = 1$ obţinem următoarele caracterizări, cu extinderi în $\overline{\mathbb{R}}$:

1°. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru D, $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ are loc $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2°. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punct de acumulare pentru D, $l = \infty$ $(-\infty)$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(-\infty)$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in D$ cu $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ are loc $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$.

3°. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = \infty$ $(-\infty)$ punct de acumulare pentru D, $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l)$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in D$ cu $x > \delta(\varepsilon)$ $(x < -\delta(\varepsilon))$ are loc $|f(x) - l| < \varepsilon$.

4°. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = \infty$ $(-\infty)$ punct de acumulare pentru D, $l = \infty$, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty)$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in D$ cu $x > \delta(\varepsilon)$ $(x < -\delta(\varepsilon))$ are loc $f(x) > \varepsilon$.

5°. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = \infty$ $(-\infty)$ punct de acumulare pentru D, $l = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty)$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in D$ cu $x > \delta(\varepsilon)$ $(x < -\delta(\varepsilon))$ are loc $f(x) < -\varepsilon$.

Proprietăţi ale funcţiilor cu limită:

a) Fie $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2 : D \to \mathbb{R}^q$, $D \subset \mathbb{R}^p$, $\vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D. Dacă:

$$\exists \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}_1(\vec{x}) = \vec{l}_1 \quad \text{şi} \quad \exists \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}_2(\vec{x}) = \vec{l}_2$$

atunci $\forall\,\lambda,\ \mu \in I\!R\ \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[\lambda\vec{f_1}(\vec{x}) + \mu\vec{f_2}(\vec{x})] = \lambda\vec{l_1} + \mu\vec{l_2}$.

b) Fie $\vec{f} : D \to I\!R^q,\ D \subset I\!R^p$, iar $\varphi : D \to I\!R,\ \vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D. Dacă $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l}$ şi $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varphi(\vec{x}) = a$ atunci $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[\varphi(\vec{x})\vec{f}(\vec{x})] = a\vec{l}$.

c) Fie $f_1,\ f_2 : D \to I\!R,\ D \subset I\!R^p,\ \vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D. Dacă:

$$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}) = l_1 \text{ şi } \exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x}) = l_2$$

atunci:

$$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[f_1(\vec{x}) \cdot f_2(\vec{x})] = l_1 \cdot l_2 \quad \text{şi} \quad \exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{l_1}{l_2},\ \ (l_2 \neq 0),$$

(pentru cazurile în care operaţiile de mai sus au sens).

d) Fie $f,\ F_1,\ F_2 : D \to I\!R,\ D \subset I\!R^p,\ \vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D. Dacă:

$$F_1(\vec{x}) \le f(\vec{x}) \le F_2(\vec{x}),\ \ \forall\,\vec{x} \in D,\ \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_p < a$$

şi $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F_1(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F_2(\vec{x}) = l$ atunci $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = l$ (criteriul cleştelui).

e) Fie $\vec{\varphi} : E \subset I\!R^p \to F \subset I\!R^q,\ \ \vec{f} : F \subset I\!R^q \to I\!R^r$, $\vec{x}_0$ punct de acumulare pentru E şi fie $\vec{y}_0 = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{\varphi}(\vec{x})$ punct de acumulare pentru F, ($\vec{\varphi}(\vec{x}) \neq \vec{y}_0$, pentru $\vec{x} \neq \vec{x}_0$). Dacă $\exists \lim\limits_{\vec{y}\to\vec{y}_0} \vec{f}(\vec{y}) = \vec{l}$ atunci funcţia $\vec{g} : E \subset I\!R^p \to I\!R^r,\ \ \vec{g} = \vec{f} \circ \vec{\varphi},\ \ \vec{g}(\vec{x}) = (\vec{f} \circ \vec{\varphi})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}(\vec{x}))$ are limită în $\vec{x}_0$ şi $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{l}$.

Teorema 1. Elementul $\vec{l} \in I\!R^q$ este limita funcţiei $\vec{f}$ în $\vec{x}_0 \in D$, $\vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D dacă şi numai dacă $\forall\,(\vec{x}_n)_{n\ge1} \subset D \setminus \{\vec{x}_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{l}$.

Dacă $\exists\,(\vec{x}^1_n)_{n\in I\!N} \subset D \setminus \{\vec{x}_0\}$ şi $(\vec{x}^2_n)_{n\in I\!N} \subset D \setminus \{\vec{x}_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^1_n = \vec{x}_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^2_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^1_n) = \vec{l_1} \neq \vec{l_2} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^2_n)$ va rezulta că nu există limita funcţiei $\vec{f}$ în punctul $\vec{x}_0$.

Teorema 2. Funcţia $\vec{f} : D \subset I\!R^p \to I\!R^q$ are limita $\vec{l}$ în punctul de acumulare $\vec{x}_0$ pentru mulţimea D dacă şi numai dacă toate cele q funcţii componente cu valori reale au limită în $I\!R$, limitele lor fiind componentele lui $\vec{l}$.

Teorema 3 (Cauchy-Bolzano). Fie $\vec{f} : D \subset I\!R^p \to I\!R^q,\ \ \vec{x}_0$ punct de acumulare pentru D. Atunci $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l}$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall\,\vec{x}', \vec{x}'' \in D,\ \ 0 < \|\vec{x}' - \vec{x}_0\|_p < \delta(\varepsilon),\ \ 0 < \|\vec{x}'' - \vec{x}_0\|_p < \delta(\varepsilon)$$
$$\text{are loc } \|\vec{f}(\vec{x}') - \vec{f}(\vec{x}'')\|_q < \varepsilon.$$

Funcţia $\vec{f} : D \to I\!R^q,\ \ D \subset I\!R^p$ este *continuă în* $\vec{x}_0 \in D$ dacă $\vec{x}_0$ este punct izolat pentru mulţimea D sau dacă există $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$, în cazul în care $\vec{x}_0$ este punct de acumulare pentru D. Funcţia $\vec{f}$ este continuă pe D dacă este continuă în fiecare punct din mulţime.

Funcţiile continue lasă invariante mulţimile compacte (dacă $K \subset I\!R^p$ este o mulţime compactă şi $\vec{f}$ este continuă atunci $\vec{f}(K) \subset I\!R^q$ este compactă).

Teorema 4 (Weierstrass). Funcţia $f : K \subset I\!R^p \to I\!R$ (K mulţime compactă) continuă pe K este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile.

Funcţia $f : I \to I\!R$ ($I \subset I\!R$ interval) are proprietatea lui Darboux dacă pentru orice $x_1,\ x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2$ şi oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ există cel puţin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ a.î. $f(\xi) = c$. Orice funcţie $f : I \to I\!R$ ($I \subset I\!R$ interval) continuă pe I are proprietatea lui Darboux, iar mulţimea $J = f(I)$ este, de asemenea, un interval.

Fie $D \subset I\!R$ şi $f : D \to I\!R$. Un punct $a \in D$ se numeşte *punct de discontinuitate* pentru funcţia f dacă f nu este continuă în a. Un punct de discontinuitate se numeşte *punct de discontinuitate de specia I-a* dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \overset{not}{=} f(a-0) \in I\!R$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \overset{not}{=} f(a+0) \in I\!R$. Un punct $a \in D$ de discontinuitate care nu este punct de discontinuitate de specia I-a se numeşte *punct de discontinuitate de specia a II-a.*

Dacă I este un interval din $I\!R$, iar $f : I \to I\!R$ este o funcţie monotonă pe I atunci punctele de discontinuitate ale lui f sunt de specia I-a, iar mulţimea punctelor sale de discontinuitate este cel mult numărabilă.

Funcţia $\vec{f} : D \subset I\!R^p \to I\!R^q$ se numeşte *uniform continuă* pe D dacă:
$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall \vec{x}_1,\ \vec{x}_2 \in D$ cu $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_p < \delta(\varepsilon)$ are loc $\|\vec{f}(\vec{x}_1) - \vec{f}(\vec{x}_2)\|_q < \varepsilon$.

Teorema 5 (Cantor). O funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe acea mulţime.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că funcţia $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ este mărginită pe mulţimea $I\!R$.

Rezolvare. Evident $f(x) > 0,\ \ \forall x \in I\!R$. Apoi $f(x) < 2,\ \ \forall x \in I\!R$. Într-adevăr:

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} < 2,\ \ \forall x \in I\!R \Leftrightarrow 2x^4 - x^2 + 1 > 0,\ \ \forall x \in I\!R,$$

ultima inegalitate fiind adevărată, deoarece trinomul $2y^2 - y + 1 > 0,\ \ \forall y \in I\!R$.

Deci $0 < f(x) < 2,\ \ \forall x \in I\!R$, adică funcţia f este mărginită pe $I\!R$.

2. Să se arate că funcţia $f : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R,\ \ f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$

a) este nemărginită în orice vecinătate a punctului $x = 0$;

b) nu tinde la ∞ atunci când $x \to 0$.

Rezolvare. a) Deoarece orice vecinătate a punctului $x = 0$ conţine un interval de forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, vom arăta că funcţia f este nemărginită în orice interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Fie, deci, o vecinătate oarecare a lui $x = 0$, $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Construim următorul şir $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n \in I\!N^*$. Pentru $n \geq n_0$, unde $n_0 = \left[\dfrac{1}{2n\varepsilon}\right] + 1$ avem $x_n \in (0, \varepsilon) \subset V$, iar:

$$f(x_n) = 2n\pi \cdot \cos(2n\pi) = 2n\pi \to \infty, \text{ pentru } n \to \infty.$$

Astfel am găsit un şir de puncte x_n din V pentru care $f(x_n) \to \infty$, pentru $n \to \infty$, fapt care ne arată că f este nemărginită în vecinătatea V. Deoarece $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ era o vecinătate arbitrară rezultă că f este nemărginită în orice vecinătate a punctului $x = 0$.

b) Pentru a arăta că funcţia f nu tinde la ∞ atunci când $x \to 0$, să considerăm şirul $y_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$, pentru $n \to \infty$, pentru care:

$$f(y_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0, \ \ \forall\, n \in I\!N.$$

Deci $f(y_n) \to 0 \neq \infty$, pentru $n \to \infty$. Deoarece există un astfel de şir $(y_n)_{n \in I\!N}$, $y_n \to 0$, pentru $n \to \infty$, pentru care $f(y_n) \to 0$, pentru $n \to \infty$, deducem că funcţia f nu tinde la ∞ când $x \to 0$.

3. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară a funcţiilor:

a) $f : (0, \infty) \to I\!R$, $\ f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^3}$; b) $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$, $\ f(x) = \sin x + \cos x$;

c) $f : [0, 2\sqrt{3}] \to I\!R$, $\ f(x) = x - [x]$,

($[x]$ este partea întreagă a numărului x).

Rezolvare. Pentru a determina marginile inferioară şi superioară ale funcţiilor de mai sus, vom studia aceste funcţii, cercetând comportarea acestora, adică semnul derivatelor de ordinul întâi.

a) Avem $f'(x) = \dfrac{2(1 - 2x^3)}{(1 + x^3)^2}$, $\ x \in (0, \infty)$.

Tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	0		$1/\sqrt[3]{2}$		∞
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - - -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{4}/3$	$\searrow$	0

Din ultima linie a tabelului de mai sus deducem că:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\left(=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right),\quad \text{iar} \inf_{x\in(0,\infty)} f(x)=0.$$

b) Avem $f'(x)=\cos x-\sin x$; $f'(x)=0$ pentru $x=\pi/4$ şi $x=-3\pi/4$. Tabelul de variaţie a funcţiei f este următorul:

x	$-\pi$		$-3\pi/4$		$\pi/4$		π
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

Deducem că $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, iar $\inf_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)=f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$. Facem observaţia că funcţia f fiind continuă pe intervalul compact $[-\pi,\pi]$ îşi atinge marginile, deci $\exists x_0=\frac{\pi}{4}\in[-\pi,\pi]$ a.î. $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ şi $\exists\, x_1=-\frac{3\pi}{4}\in[-\pi,\pi]$ a.î. $\inf_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)=f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

c) Funcţia $f(x)=x-[x],\ \ x\in[0,2\sqrt{3}]$ se explicitează astfel:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in[0,1);\\ x-1, & \text{dacă } x\in[1,2);\\ x-2, & \text{dacă } x\in[2,3);\\ x-3, & \text{dacă } x\in[3,2\sqrt{3}]. \end{cases}$$

În acest caz determinarea $\sup f$ şi $\inf f$ se poate face uşor cu ajutorul graficului funcţiei (vezi Figura 4.1). Din grafic deducem că:

$$\sup_{x\in[0,2\sqrt{3}]} f(x)=1, \text{ iar } \inf_{x\in[0,2\sqrt{3}]} f(x)=0.$$

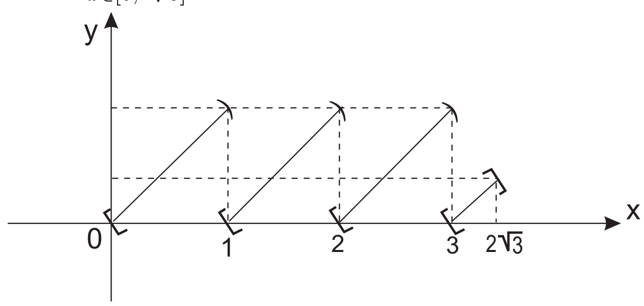

Figura 4.1

4. Să se demonstreze, folosind caracterizarea "ε, δ" că:

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(1+x)^2}=+\infty$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+1)=\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+5}=2$.

Rezolvare. a) Vom arăta că:

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$ a.î. $\forall\, x\in I\!R,\ 0<|x-3|<\delta(\varepsilon)$ are loc $|f(x)-9|<\varepsilon$, unde $f: I\!R\to I\!R,\ f(x)=x^2$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Vom determina $\delta(\varepsilon) > 0$, pornind de la inegalitatea:

$$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x - 3 + 6| < \delta(\varepsilon) \cdot (\delta(\varepsilon) + 6),$$

impunând condiţia ca $\delta(\varepsilon) \cdot (\delta(\varepsilon) + 6) = \varepsilon$. Din ecuaţia obţinută pentru $\delta(\varepsilon)$ găsim $\delta(\varepsilon) = -3 + \sqrt{9+\varepsilon}$. Deci de îndată ce $0 < |x-3| < \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon) = -3 + \sqrt{9+\varepsilon}$ avem $|x^2 - 9| < \varepsilon$.

b) Vom demonstra că:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall\, x \in I\!R,\ \ 0 < |x+1| < \delta(\varepsilon) \text{ are loc } \frac{1}{(1+x)^2} > \varepsilon.$$

Pentru $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ avem, în ipoteza $0 < |x+1| < \delta(\varepsilon)$, că $\dfrac{1}{(1+x)^2} > \varepsilon$, adică tocmai caracterizarea "ε, δ" a limitei de la acest punct.

c) Conform caracterizării "ε, δ" vom arăta că:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall\, x > \delta(\varepsilon) \text{ are loc } 2x^2 + 1 > \varepsilon.$$

Luând $\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\varepsilon - 1}{2}}, & \text{dacă } \varepsilon > 1; \\ 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \le 1, \end{cases}$

avem îndeplinită afirmaţia de mai sus.

d) Pentru această limită avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall\, x \in I\!R,\ \ x < -\delta(\varepsilon) \text{ are loc } \left|\frac{2x+1}{x+5} - 2\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall\, x \in I\!R,\ \ x < -\delta(\varepsilon) \text{ are loc } \frac{9}{|x+5|} < \varepsilon.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ să considerăm $\delta(\varepsilon) = \dfrac{9}{\varepsilon} + 5$. Atunci de îndată ce $x < -\dfrac{9}{\varepsilon} - 5 \Leftrightarrow x + 5 < -\dfrac{9}{\varepsilon} \Rightarrow |x+5| > \dfrac{9}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{9}{|x+5|} < \varepsilon$.

Deci conform caracterizării limitei în limbajul "ε, δ" rezultă că $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+5} = 2$.

5. Se consideră funcţia $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ a, & \text{dacă } x = 0, \ a \in I\!R. \end{cases}$

Să se arate că:

a) În orice vecinătate a originii există puncte unde f ia valoarea 1 şi -1.

b) Pentru orice $A \in [-1, 1]$ există un şir de puncte $x_n \to 0$, pentru $n \to \infty$ a.î. $f(x_n) \to A$, pentru $n \to \infty$.

c) Nu există $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ şi nici $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, punctul $x = 0$ fiind deci punct de discontinuitate de specia a doua.

d) Funcţia f are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $a \in [-1, 1]$.

Rezolvare. a) Fie V o vecinătate arbitrară a originii. Deoarece V conţine un interval simetric de forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, vom arăta că proprietatea a) are loc pentru orice astfel de interval simetric centrat în origine.

Fie deci $\varepsilon > 0$ fixat. Vom determina un număr natural k a.î. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ şi $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de unde va rezulta că $\sin\dfrac{1}{x} = 1$. Impunând condiţia $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2k\pi > \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{\pi}{2}$, găsim:

$$k_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{2-\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon < \dfrac{2}{\pi}; \\ \quad 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq \dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Deci $x_0 = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ şi $\sin\dfrac{1}{x_0} = 1$.

Procedând asemănător pentru valoarea -1, pentru o vecinătate simetrică de forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ putem considera:

$$k_1 = \begin{cases} \left[\dfrac{2-3\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\right] + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon < \dfrac{2}{3\pi}; \\ \quad 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq \dfrac{2}{3\pi}. \end{cases}$$

Atunci $x_1 = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k_1\pi} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ şi $\sin\dfrac{1}{x_1} = -1$.

b) Notând cu $\alpha = \arcsin A \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{\alpha + 2n\pi}$ satisface condiţiile problemei, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n} = A$, $\forall\, n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

c) Vom demonstra că funcţia f nu are limită la dreapta în punctul 0, folosind caracterizarea cu şiruri.

Fie $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n \geq 1$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \to 0 = l_1$, pentru $n \to \infty$. Să considerăm şi şirul $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \geq 1$, pentru care $y_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ şi $f(y_n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1 = l_2$, pentru $n \to \infty$. Deoarece $l_1 \neq l_2$ rezultă că nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

Pentru limita la stânga în $x = 0$ procedăm asemănător, considerând şirurile $\widetilde{x}_n = -\dfrac{1}{2n\pi}$ şi $\widetilde{y}_n = -\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \geq 1$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{y}_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = 0 \neq -1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{y}_n)$.

Rezultă deci că funcţia f nu are limită în punctul $x = 0$ nici la dreapta, nici la stânga, deci este un punct de discontinuitate de specia a doua.

d) Presupunem mai întâi că f are proprietatea lui Darboux şi de asemenea presupunem prin reducere la absurd că $a \notin [-1,1]$.

Dacă $a>1$ luând punctele $x=0$ şi $x=\frac{2}{\pi}$ rezultă că pentru orice $\lambda \in \left(f\left(\frac{2}{\pi}\right), f(0)\right) = (1,a)$ nu există nici un punct $x \in I\!R$ a.î. $f(x) = \lambda$ $\left(|f(x)| \le 1,\ \forall x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)\right)$.

Dacă $a < -1$, pentru punctele $x = -\frac{2}{\pi}$ şi $x = 0$ rezultă că pentru $\forall \lambda \in \left(f(0), f\left(-\frac{2}{\pi}\right)\right) = (a,-1)$ nu există nici un punct $x \in I\!R$ a.î. $f(x) = \lambda$, $(|f(x)| \le 1$, $\forall\ x \in \left(-\frac{2}{\pi}, 0\right)\Big)$.

Concluziile la care am ajuns ne indică faptul că f nu are proprietatea lui Darboux, ceea ce contrazice ipoteza. Deci în mod necesar $a \in [-1,1]$.

Să presupunem acum că $a \in [-1,1]$ şi să arătăm că f are proprietatea lui Darboux, adică:

(1) $\quad \forall \tilde{a},\ \tilde{b} \in I\!R$ şi $\lambda \in (f(\tilde{a}), f(\tilde{b}))$ sau $(f(\tilde{b}), f(\tilde{a}))$ $\exists\, x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ a.î. $f(x_0) = \lambda$.

Avem următoarele situaţii:

1°. $\tilde{a} > 0$, $\tilde{b} > 0$ sau $\tilde{a} < 0$, $\tilde{b} < 0$. Deoarece $f|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ este o funcţie continuă rezultă că ea are proprietatea lui Darboux, deci are loc (1).

2°. $\tilde{a} < 0$, $\tilde{b} > 0$. Fie $c = \min(\tilde{b}, -\tilde{a}) > 0$ şi $\lambda \in (f(\tilde{a}), f(\tilde{b})) \subset [-1,1]$ sau $(f(\tilde{b}), f(\tilde{a})) \subset [-1,1]$. Să considerăm $\lambda_0 = \arcsin\lambda$, $(\lambda \in [-1,1])$. Vom determina $x_0 \in (0,c)$ a.î. $f(x_0) = \lambda$. Pentru aceasta alegem $x_0 = \frac{1}{2n_0\pi + \lambda_0}$ $(n_0 \in I\!N)$. Punând condiţia ca $0 < x_0 < c$ obţinem $n_0 > \left(\frac{1}{c} - \lambda_0\right)\frac{1}{2\pi}$ şi $n_0 > -\frac{\lambda_0}{2\pi}$. Deci pentru $n_0 = \max\left\{1, \left[\left(\frac{1}{c} - \lambda_0\right)\frac{1}{2\pi}\right] + 1, \left[-\frac{\lambda_0}{2\pi}\right] + 1\right\}$ avem $f(x_0) = \sin\lambda_0 = \lambda$, cu x_0 de forma menţionată mai sus.

În mod asemănător se tratează cazul $\tilde{a} > 0$, $\tilde{b} < 0$.

3°. $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} > 0$. Să arătăm că pentru $\forall \lambda \in (a, f(\tilde{b}))$ sau $(f(\tilde{b}), a)$ $\exists\, x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b}) = (0, \tilde{b})$ a.î. $f(\tilde{x}_0) = \lambda$. Asemănător cazului 2° determinăm un $x_0 \in (0, \tilde{b})$ de forma $x_0 = \frac{1}{2n_1\pi + \lambda_0}$, $(n_1 \in I\!N$, $\lambda_0 = \arcsin\lambda)$. Impunând condiţia ca $0 < x_0 < \tilde{b}$ găsim $n_1 = \max\left\{1, \left[\left(\frac{1}{b} - \lambda_0\right)\frac{1}{2\pi}\right] + 1, \left[-\frac{\lambda_0}{2\pi}\right] + 1\right\}$. Pentru un astfel de punct $x_0 = \frac{1}{2n\pi + \lambda_0} \in (0, \tilde{b})$ avem $f(x_0) = \lambda$.

În mod asemănător se tratează cazurile $a = 0$, $b < 0$; $a > 0$, $b = 0$; $a < 0$, $b = 0$. Graficul acestei funcţii pentru $a = 0$ este cel din Figura 4.2.

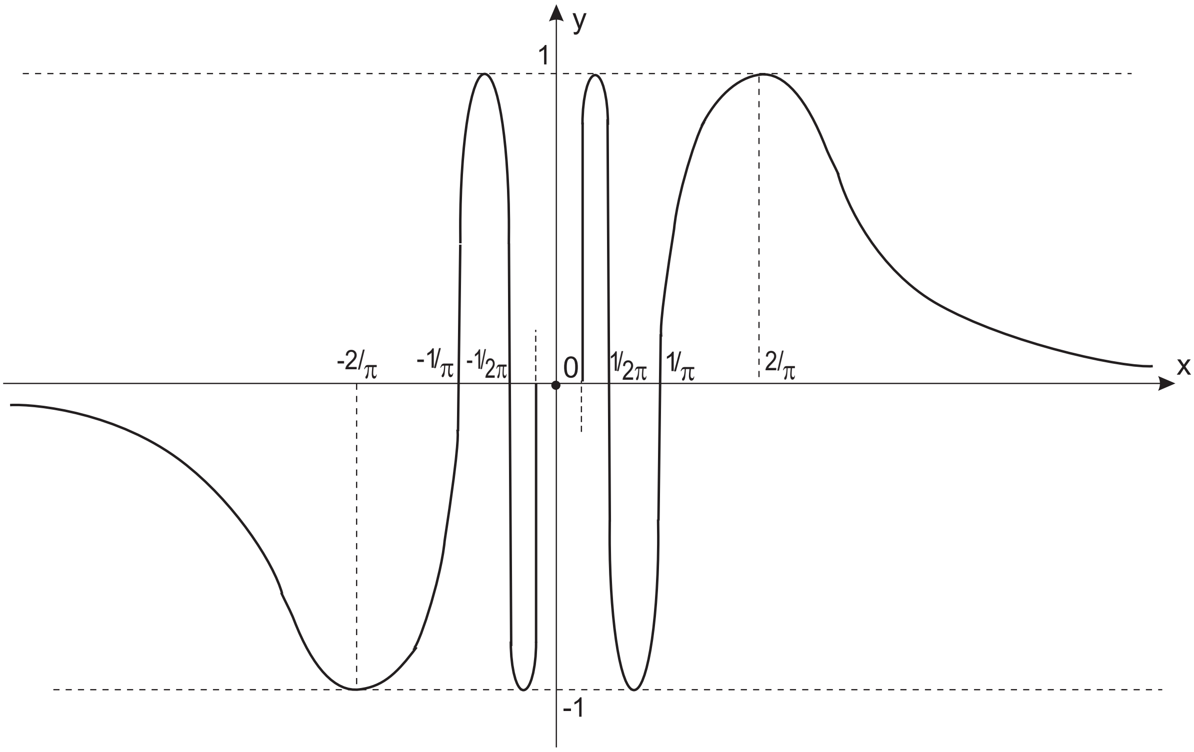

Figura 4.2

6. Fie funcţia $f:[0,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in Q\cap[0,1];\\ x^3, & \text{dacă } x\in(I\!R\setminus Q)\cap[0,1].\end{cases}$
Să se arate că $f([0,1])$ este un interval, dar f nu are proprietatea lui Darboux.

Rezolvare. Evident $f([0,1])\subset[0,1]$. Vom arăta că avem chiar egalitate de mulţimi, adică $f([0,1])=[0,1]$. Într-adevăr, pentru $\forall\,\lambda\in[0,1]\ \exists\,x_0\in[0,1]$ a.î. $f(x_0)=\lambda$. Dacă $\lambda\in Q$ atunci putem lua $x_0=\lambda$ şi avem $f(x_0)=f(\lambda)=\lambda$, iar dacă $\lambda\notin Q$ luăm $x_0=\sqrt[3]{\lambda}\notin Q$ pentru care $f(x_0)=f(\sqrt[3]{\lambda})=(\sqrt[3]{\lambda})^3=\lambda$.

Arătăm în continuare că f nu are proprietatea lui Darboux. Să considerăm $a=\dfrac{1}{2}$ şi $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Atunci pentru $\forall\,\lambda\in\left(f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right),f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ nu există $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ a.î. $f(x_0)=\lambda$. Într-adevăr, pentru $\lambda\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ avem:
$\forall\,x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\cap Q,\ \ f(x_0)=x_0,$ iar $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\cap\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)=\emptyset$, deci $f(x_0)\neq\lambda$ şi
$\forall\,x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\cap(I\!R\setminus Q),\ \ f(x_0)=x_0^3,$ iar $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{3}\right)\cap\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)=\emptyset$, deci $f(x_0)\neq\lambda$.

7. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiilor $f:I\!R\to I\!R$ definite prin:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in Q; \\ 5x, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus Q. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in Q; \\ 0, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus Q. \end{cases}$

Rezolvare. a) Vom demonstra că în orice punct $x_0 \in I\!R \setminus \{0\}$ funcţia f este discontinuă. În aceste puncte nu există limita funcţiei. Fie $x_0 \in I\!R \setminus \{0\}$ arbitrar, momentan fixat. Luând un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset Q$, $x_n < x_0$, $\forall\, n \geq 1$, $x_n \to x_0$, pentru $n \to \infty$, avem $f(x_n) = x_n \to x_0 = l_1$, pentru $n \to \infty$; pentru un şir $(\widetilde{x}_n)_{n\geq 1} \subset I\!R \setminus Q$, $\widetilde{x}_n < x_0$, $\forall\, n \geq 1$, $\widetilde{x}_n \to x_0$, pentru $n \to \infty$, $f(\widetilde{x}_n) = 5\widetilde{x}_n \to 5x_0 = l_2$, pentru $n \to \infty$. Deoarece $l_1 \neq l_2$ rezultă că f nu are limită la stânga în punctul x_0. Analog f nu are limită la dreapta în punctul x_0. Rezultă că x_0 este un punct de discontinuitate de specia a doua pentru funcţia f.

Singurul punct de continuitate pentru funcţia f este $x_0 = 0$, aşa cum rezultă din caracterizarea cu şiruri: $\forall\, (x_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$, $x_n \to x_0 = 0$, pentru $n \to \infty$ rezultă că $f(x_n) \to f(x_0) = 0$, pentru $n \to \infty$. Într-adevăr:

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n, & \text{dacă } x_n \in Q; \\ 5x_n, & \text{dacă } x_n \in I\!R \subset Q \end{cases}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Se arată în mod asemănător punctului a), folosind caracterizarea cu şiruri, că toate punctele $x_0 \in I\!R \setminus \{0\}$ sunt puncte de discontinuitate de specia a doua, singurul punct de continuitate fiind $x_0 = 0$.

8. Să se studieze punctele de discontinuitate de specia I-a sau de specia a II-a pentru următoarele funcţii $f : I\!R \to I\!R$ definite astfel:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0; \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in Q; \\ 0, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus Q, \end{cases}$

(numită funcţia lui Dirichlet);

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Rezolvare. a) Pentru $x_0 = 0$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$, iar $f(0) = 0$. Rezultă că 0 este un punct de discontinuitate de prima specia. Restul punctelor din $I\!R$ sunt puncte de continuitate.

b) Fie $x_0 \in Q$. Atunci $f(x_0) = 1$, dar $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$. Într-adevăr $\exists\, (x_n)_{n\geq 1} \subset Q$, $x_n < x_0$, $\forall\, n \geq 1$, $x_n \to x_0$, pentru $n \to \infty$ cu $f(x_n) = 1 \to 1$, pentru $n \to \infty$ şi $\exists\, (y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R \setminus Q$, $y_n < x_0$, $\forall\, n \geq 1$, $y_n \to x_0$, pentru $n \to \infty$, cu $f(y_n) = 0 \to 0$, pentru $n \to \infty$. Analog $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

În mod asemănător se arată că pentru $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus Q$, $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$. Deducem astfel că toate punctele din $\mathbb{R}$ sunt puncte de discontinuitate de specia a doua.

c) În punctul $x_0 = 0$ avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. Rezultă că 0 este un punct de discontinuitate de specia a doua. În orice alt punct din $\mathbb{R}$ funcţia f este continuă.

9. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^n - (\sqrt{1 + x^2} - x)^n}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)}$;

f) $\lim\limits_{x \to \infty} [x - \sqrt[n]{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)}]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Avem: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2 \cdot \sqrt[3]{x^4}} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{27 + x - 27 + x}{x(1 + 2\sqrt[3]{x}) \cdot [\sqrt[3]{(27 + x)^2} + \sqrt[3]{(27 + x)(27 - x)} + \sqrt[3]{(27 - x)^2}]} = \frac{2}{27}.$$

b) $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^n - (\sqrt{1 + x^2} - x)^n}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{1+x^2})^n + C_n^1 (\sqrt{1+x^2})^{n-1} x + C_n^2 (\sqrt{1+x^2})^{n-2} x^2 + \ldots + C_n^{n-1} \sqrt{1+x^2} \cdot x^{n-1}}{x} + \right.$$

$$+ \frac{C_n^n x^n - (\sqrt{1 + x^2})^n + C_n^1 (\sqrt{1 + x^2})^{n-1} x - C_n^2 (\sqrt{1 + x^2})^{n-2} x^2 + \ldots +}{x} +$$

$$\left. + \frac{(-1)^n C_n^{n-1} \sqrt{1 + x^2} \cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1} C_n^n x^n}{x} \right] =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2C_n^1 (\sqrt{1+x^2})^{n-1} x + 2C_n^3 (\sqrt{1+x^2})^{n-3} x^3 + \ldots + 2C_n^{n-1} \sqrt{1+x^2} x^{n-1}}{x}, & \text{pt. n par;} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2C_n^1 (\sqrt{1+x^2})^{n-1} x + 2C_n^3 (\sqrt{1+x^2})^{n-3} x^3 + \ldots + 2C_n^n x^n}{x}, & \text{pt. n impar.} \end{cases}$$

Obţinem $l = 2n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem:

$$\lim_{x \to \pi/4} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \overset{x - \pi/4 = y}{=} -\lim_{y \to 0} \operatorname{tg} 2\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} y = -\lim_{y \to 0} \operatorname{tg} \left(2y + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} y =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} 2y} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{2 \operatorname{tg} y} \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)} \overset{\frac{1}{x}=y}{=} e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y+\cos y-1}{y}} =$

$= e^{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}-\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y}\right)} = e.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}\frac{1+x-1+x}{1+(1+x)(1-x)}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\frac{2x}{1-x}}{\frac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x^2}{1-x} = 2.$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-\sqrt[n]{(x-a_1)\dots(x-a_n)}] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n-(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{x^{n-1}+x^{n-2}\cdot\sqrt[n]{(x-a_1)\dots(x-a_n)}+\dots+\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\dots(x-a_n)}\right]^{n-1}} =$

$= \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}.$

10. Să se determine $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p\in I\!R$ astfel încât:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-(\alpha x^p+\beta x+\gamma)\right]=\frac{7}{3}.$$

Rezolvare. Observăm mai întâi că dacă $p\neq 2$ atunci limita din membrul stâng al egalităţii de mai sus este $+\infty$ sau $-\infty$. Deci în mod necesar $p=2$. Din acelaşi motiv $\alpha>0$ (pentru $\alpha\leq 0$ limita este $+\infty$).

Avem:

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{9x^4-24x^3+6x^2+5-\alpha^2x^4-\beta^2x^2-\gamma^2-2\alpha\beta x^3-2\alpha\gamma x^2-2\beta\gamma x}{\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(9-\alpha^2)x^4-2(12+\alpha\beta)x^3+(6-\beta^2-2\alpha\gamma)x^2-2\beta\gamma x+5-\gamma^2}{\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}.$$

Pentru ca limita de mai sus să fie finită trebuie ca $9-\alpha^2=0$, de unde rezultă $\alpha=3$ ($\alpha>0$). Apoi $12+\alpha\beta=0$ şi $\frac{6-\beta^2-2\alpha\gamma}{3+\alpha}=\frac{7}{3}$. Din ultimele două relaţii rezultă $\beta=-4$ şi $\gamma=-4$.

Deci am obţinut $p=2,\ \ \alpha=3,\ \ \beta=-4,\ \ \gamma=-4$.

11. Să se demonstreze că spaţiul liniar $C([a,b])=\{f\mid\ f:[a,b]\to I\!R,\ \ f \text{ continuă}\}$ cu aplicaţia:

$$f\to\|f\|_0=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ \ f\in C([a,b])$$

este un spaţiu Banach.

Rezolvare. Conform Problemei 25, Capitolul 3, spaţiul $(C([a,b]), \|\cdot\|_0)$ este un spaţiu liniar real normat. Vom demonstra în continuare că acest spaţiu este spaţiu Banach, adică orice şir Cauchy este convergent. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy din spaţiul $C([a,b])$, adică:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \geq 1$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc $\|f_{n+p} - f_n\|_0 < \varepsilon,\ \ \forall\, p \in I\!N \quad \Rightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \text{ are loc } |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, p \in I\!N. \tag{2}$$

Din relaţia de mai sus deducem că pentru $\forall\, x \in [a,b]$ avem:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \geq 1$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \ \forall\, p \in I\!N$, adică pentru $\forall\, x \in [a,b]$, şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy de numere reale, deci convergent. Rezultă că pentru $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, f_0(x) \in I\!R$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$. Să notăm cu f_0 funcţia $f_0 : [a,b] \to I\!R$ definită prin $f_0(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in I\!R$. Trecând la limită în relaţia (2) pentru $p \to \infty$, obţinem:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \geq 1 \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \text{ are loc } |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon,\ \ \forall\, x \in [a,b]. \tag{3}$$

Să demonstrăm acum că $f_0 \in C([a,b])$, adică f_0 este o funcţie continuă pe $[a,b]$. Fie $x_0 \in [a,b]$ arbitrar, dar momentan fixat. Vom arăta că $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x) = f_0(x_0)$. Pentru aceasta să considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat şi $n_0(\varepsilon/3) \in I\!N^*$ dat de relaţia (2). Deoarece funcţia $f_{n_0(\varepsilon/3)}$ este continuă, deci $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0(\varepsilon/3)}(x)$ $(= f_{n_0(\varepsilon/3)}(x_0))$, din teorema de caracterizare a lui Cauchy, deducem că pentru $\varepsilon > 0$ considerat mai sus:

$$\begin{gathered}\exists\, \delta(\varepsilon/3) > 0 \text{ a.î. } \forall\, x',\ x'',\ 0 < |x' - x_0| < \delta,\ 0 < |x'' - x_0| < \delta \\ \text{are loc } |f_{n_0(\varepsilon/3)}(x') - f_{n_0(\varepsilon/3)}(x'')| < \varepsilon/3.\end{gathered} \tag{4}$$

Atunci, folosind (3) şi (4) obţinem:

$$\begin{gathered}|f_0(x') - f_0(x'')| \leq |f_0(x') - f_{n_0(\varepsilon/3)}(x')| + |f_{n_0(\varepsilon/3)}(x') - f_{n_0(\varepsilon/3)}(x'')| + \\ + |f_{n_0(\varepsilon/3)}(x'') - f_0(x'')| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{gathered}$$

Deci pentru $\varepsilon > 0\ \exists\, \widetilde{\delta}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon/3) > 0$ a.î. $\forall\, x',\ x'' :\ 0 < |x' - x_0| < \delta,\ 0 <$ $< |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f_0(x') - f_0(x'')| < \varepsilon$, de unde rezultă că $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x)$.

Trecând la limită în (3) pentru $x \to x_0$, obţinem:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \geq 1$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc $\left|\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x)\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow$

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, \tilde{n}_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/2)$ a.î. $\forall\, n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon)$ are loc $\left|f_n(x_0) - \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x)\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ (f_n este continuă, deci are limită în x_0, iar $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$).

Rezultă astfel că $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{x\to x_0} f_0(x)$ sau $f_0(x_0) = \lim_{x\to x_0} f_0(x)$, de unde deducem că funcţia f_0 este continuă în punctul x_0.

Punctul x_0 fiind arbitrar în intervalul $[a,b]$, rezultă că funcţia f_0 este continuă pe $[a,b]$, deci $f_0 \in C([a,b])$.

Apoi, din relaţia (3) deducem:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\tilde{n}_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/2) \in I\!N^*$ a.î. $\forall\, n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon)$ are loc $\|f_n - f_0\|_0 \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.
Rezultă astfel că $f_n \to f_0$, pentru $n \to \infty$ în spaţiul $(C([a,b]), \|\cdot\|_0)$. Deci acest spaţiu este spaţiu liniar normat complet sau spaţiu Banach.

12. Să se determine pentru un $\varepsilon > 0$ un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ care să satisfacă condiţia de continuitate uniformă pentru funcţia f în intervalul dat, dacă:

a) $f(x) = 2\sin x - \cos x,\ x \in I\!R$; b) $f(x) = 5x - 3,\ x \in I\!R$; c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,\infty)$; d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x,\ x \in (0,\infty)$.

Rezolvare. a) Pentru $\varepsilon > 0$ vom determina $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru $\forall\, x,\ y \in I\!R$ cu $|x-y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Avem:

$$|f(x) - f(y)| = |2\sin x - \cos x - 2\sin y + \cos y| \leq 4\left|\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}\right| +$$
$$+2\left|\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 4\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 4\cdot\frac{|x-y|}{2} + 2\,\frac{|x-y|}{2} =$$
$$= 3\,|x-y|.$$

Dacă luăm $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$ atunci pentru $|x-y| < \varepsilon/3$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

b) Avem: $|f(x) - f(y)| = 5\,|x-y|$. Pentru $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/5$ de îndată ce $|x-y| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

c) Pentru $x,\ y \in [0,\infty)$ obţinem:

$$\sqrt{x} = \sqrt{(x-y)+y} \leq \sqrt{|x-y|+y} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}.$$

Analog se obţine şi inegalitatea: $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|}$, de unde rezultă:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

Luând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$, pentru $x,\ y \in [0,\infty)$ cu $|x-y| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

d) Calculăm:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{x+1} + x - \frac{y}{y+1} - y\right| = \left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)} + x - y\right| \leq$$
$$\leq \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} + |x-y| \leq 2\,|x-y|.$$

Luând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ avem îndeplinită condiţia de continuitate uniformă pentru funcţia f dată.

13. Să se arate că următoarele funcţii sunt uniform continue pe domeniile de definiţie indicate:

a) $f:[-1,1]\to I\!R,\ \ f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$; b) $f:(0,\pi)\to I\!R,\ \ f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

c) $f:[0,\pi]\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases} x\,\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

Rezolvare. a) Funcţia f este o funcţie continuă (este o compunere de funcţii elementare) pe compactul $[-1,1]$, deci ea este uniform continuă, conform Teoremei 5 a lui Cantor.

b) Prelungim funcţia f la funcţia $\widetilde{f}:[0,\pi]\to I\!R$, definită prin:

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } x\in(0,\pi);\\ 1, & \text{dacă } x=0;\\ 0, & \text{dacă } x=\pi.\end{cases}$$

Deoarece funcţia $\widetilde{f}$ este continuă pe intervalul compact $[0,\pi]$, rezultă că $\widetilde{f}$ este uniform continuă, deci şi restricţia sa la intervalul deschis $(0,\pi)$, adică funcţia f este uniform continuă.

c) Deoarece $\left|x\,\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|,\ \forall x\in I\!R\setminus\{0\}$ rezultă că $\exists\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$. Deci funcţia f este continuă în $x=0$. Fiind compunere de funcţii elementare (pentru $x\neq0$) rezultă că f este o funcţie continuă pe intervalul $[0,\pi]$. Conform Teoremei 5 a lui Cantor funcţia f este uniform continuă pe $[0,\pi]$.

14. Să se arate că funcţia $f:I\!R\to I\!R,\ \ f(x)=x^2$ este continuă pe $I\!R$, dar nu este uniform continuă pe $I\!R$.

Rezolvare. Fiind o funcţie elementară, f este continuă pe $I\!R$. Pentru a demonstra că f nu este uniform continuă pe $I\!R$ vom arăta că:

$\exists\,\varepsilon_0(=1)$ a.î. $\forall\,\delta>0\ \exists\,x_\delta,\ y_\delta\in I\!R$ a.î. $|x_\delta-y_\delta|<\delta$ şi $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geq\varepsilon_0$.

Într-adevăr pentru $\varepsilon_0=1$ şi $\delta>0$ arbitrar, momentan fixat, determinăm elementele x_δ şi y_δ $(x_\delta>\pm y_\delta)$ din condiţiile:

$$\begin{cases}|x_\delta-y_\delta|=\delta/2\\ |x_\delta^2-y_\delta^2|=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_\delta-y_\delta=\delta/2\\ x_\delta+y_\delta=2/\delta,\end{cases}$$

de unde rezultă:

$$x_\delta=\frac{\delta^2+4}{4\,\delta},\quad y_\delta=\frac{4-\delta^2}{4\,\delta}\,.$$

15. Să se arate că funcţia $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ este continuă şi mărginită în intervalul $(0,1)$, dar nu este uniform continuă în acest interval.

Rezolvare. Fiind compunere de funcţii elementare rezultă că f este continuă pe $(0,1)$. Evident f este şi mărginită: $|f(x)|\leq1,\ \ \forall\,x\in(0,1)$.

Pentru a demonstra că f nu este uniform continuă pe intervalul $(0,1)$ vom arăta că:

$$\text{(5)}\qquad \exists\,\varepsilon_0(=2) \text{ a.î. } \forall\,\delta>0\ \exists\,x=x(\delta) \text{ şi } y=y(\delta)\in(0,1) \text{ a.î. } |x-y|<\delta \text{ şi } |f(x)-f(y)|=\varepsilon_0$$

Fie $\varepsilon_0=2$ şi $\delta>0$ arbitrar, momentan fixat. Vom determina numerele x şi y de forma:

$$x=\frac{1}{\frac{1}{2}+2n} \quad \text{şi} \quad y=\frac{1}{\frac{3}{2}+2n},$$

deci depinzând de un număr natural n, pe care-l vom găsi impunând condiţia $|x-y|<\delta$. Cealaltă condiţie este evident satisfăcută:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)\right|=2.$$

Deci pentru $|x-y|$ avem $|x-y|=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\left(\frac{3}{2}+2n\right)}$. Această expresie, în variabila n, reprezintă un şir care tinde la 0, pentru $n\to\infty$. Deci pentru $\delta>0\ \exists\,n_0(\delta)\in I\!N$ a.î. $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n_0\right)\left(\frac{3}{2}+2n_0\right)}<\delta$. Considerând numărul natural $n_0(\delta)$ de mai sus, elementele:

$$x(\delta)=\frac{1}{\frac{1}{2}+2n_0(\delta)} \quad \text{şi} \quad y(\delta)=\frac{1}{\frac{3}{2}+2n_0(\delta)}$$

satisfac condiţia (5), deci f nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

16. Să se demonstreze că funcţia $f:(-1,\infty)\to I\!R$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+x$ nu este uniform continuă pe domeniul de definiţie considerat.

Rezolvare. Vom arăta că pentru $\varepsilon_0=1$, $\forall\,\delta>0\ \exists\,x=x(\delta)$ şi $y=y(\delta)\in$ $\in(-1,\infty)$ a.î. $|x-y|<\delta$ şi $|f(x)-f(y)|\geq 1$.

Folosind aceeaşi idee ca cea din Problema 15 vom determina pe x şi y de forma:

$$x=-\frac{n}{n+1} \quad \text{şi} \quad y=-\frac{n+1}{n+2},$$

unde n este un număr natural pe care-l vom găsi impunând condiţia $|x-y|<\delta$. Deoarece:

$$|x-y|=\left|-\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}\right|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{(n+1)^2} \text{ şi } \frac{1}{(n+1)^2}\to 0, \text{ pt. } n\to\infty,$$

pentru $\delta>0$ considerăm rangul $n_0(\delta)\in I\!N$ cu proprietatea $\dfrac{1}{(n_0(\delta)+1)^2}<\delta$. Astfel:

$$x(\delta)=-\frac{n_0(\delta)}{n_0(\delta)+1} \quad \text{şi} \quad y(\delta)=-\frac{n_0(\delta)+1}{n_0(\delta)+2}$$

satisfac condiţiile $|x(\delta)-y(\delta)|<\delta$ şi

$$|f(x(\delta))-f(y(\delta))|=\left|f\left(-\frac{n_0}{n_0+1}\right)-f\left(-\frac{n_0+1}{n_0+2}\right)\right|=\left|1+\frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)}\right|>1.$$

17. Să se specifice cu ajutorul diagramelor relaţiile care există între diverse clase de funcţii definite pe un interval $I \subset I\!R$ (funcţii continue, funcţii uniform continue, funcţii monotone, funcţii cu proprietatea lui Darboux şi funcţii cu proprietatea $f(I) = J$– interval din $I\!R$).

Rezolvare. Obţinem schema din Figura 4.3.

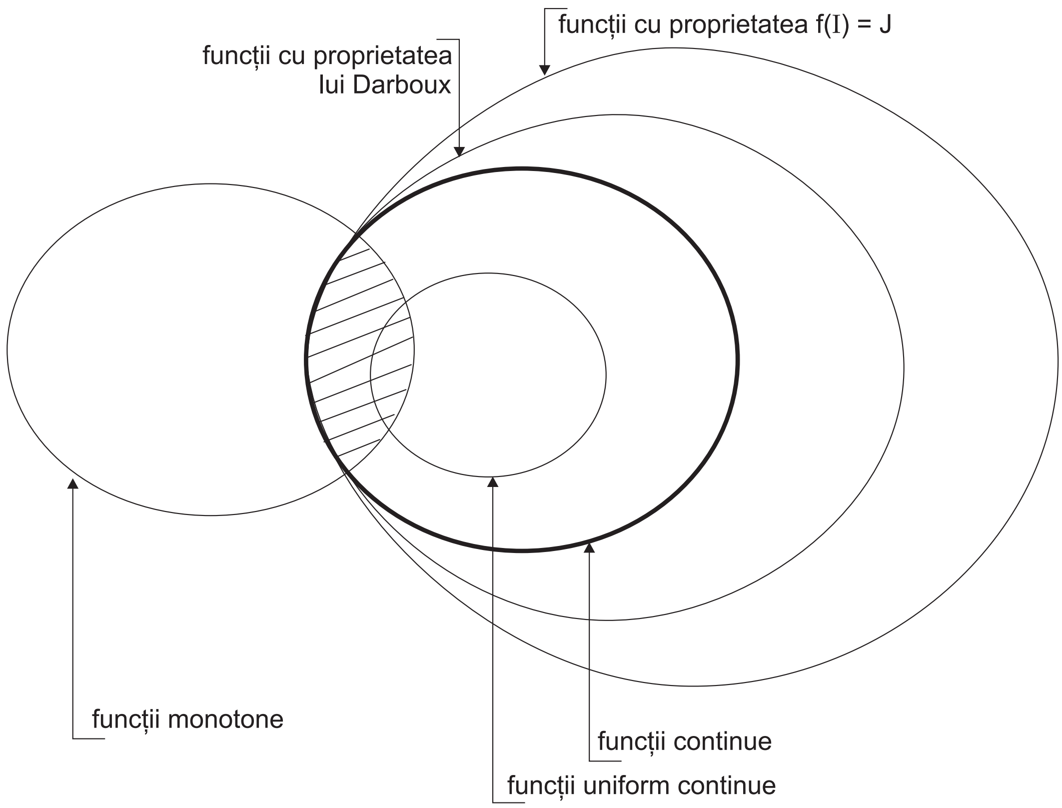

Figura 4.3

În realizarea acestei diagrame am folosit rezultatele:

1°. Dacă f este uniform continuă atunci ea este continuă (cu observaţia că dacă $I = [a, b]$ atunci mulţimile corespunzătoare continuităţii şi uniformei continuităţi coincid).

2°. Dacă f este continuă (zona cu contur întărit) atunci ea are proprietatea lui Darboux.

3°. Dacă f are proprietatea lui Darboux pe I atunci $f(I) = J$ este un interval.

4°. Dacă f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux (zona haşurată) atunci ea este continuă.

5°. Dacă f este monotonă şi $f(I) = J$ interval din $I\!R$ (zona haşurată) atunci f este continuă.

6°. Există funcţii care au proprietatea lui Darboux, dar nu sunt continue (vezi Problema 5).

7°. Există funcţii cu proprietatea $f(I) = J$, dar care nu au proprietatea lui Darboux (vezi Problema 6).

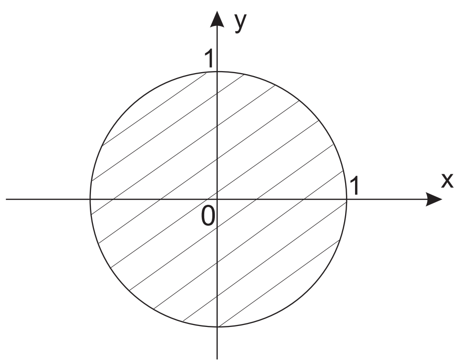

Figura 4.4

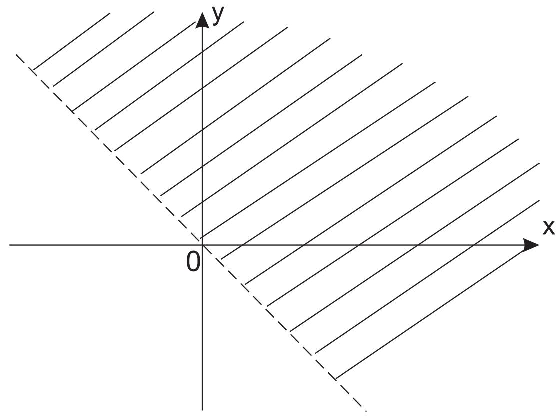

Figura 4.5

18. Să se determine domeniile de definiţie pentru următoarele funcţii de două variabile reale:
a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; b) $f(x,y) = \ln(x+y)$; c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-4}$;
d) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

Rezolvare. a) Condiţia pe care trebuie să o punem este $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Deci domeniul de definiţie al funcţiei f este:

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x^2+y^2 \leq 1\},$$

adică reprezentat grafic în sistemul ortogonal de axe Oxy este discul centrat în origine, de rază 1 (Figura 4.4).

b) Avem $x + y > 0$, de unde rezultă domeniul:

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x+y > 0\}$$

reprezentat în sistemul Oxy de zona haşurată din Figura 4.5.

c) $D = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x \in [-1,1] \text{ şi } y \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)\}$

reprezentat în Figura 4.6.

d) Condiţia pe care trebuie s-o impunem pentru existenţa funcţiei f este $\left|\dfrac{y}{x}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq |x|,\ x \neq 0$. Deci:

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2;\ |y| \leq x,\ x > 0\} \cup \{(x,y) \in I\!R^2;\ |y| \leq -x,\ x < 0\},$$

reprezentat în Figura 4.7.

19. Folosind definiţia limitei unei funcţii într-un punct să se arate că:

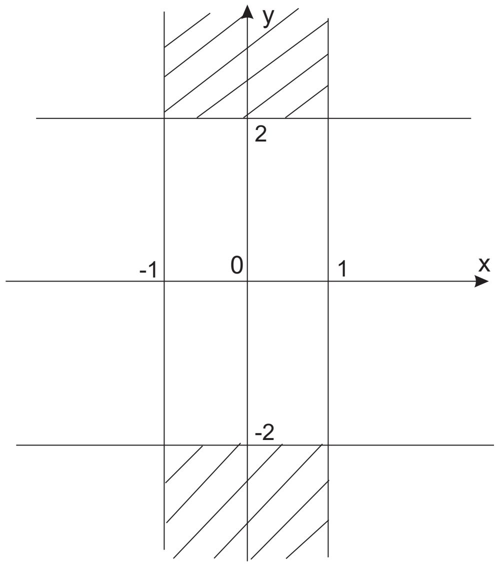

Figura 4.6

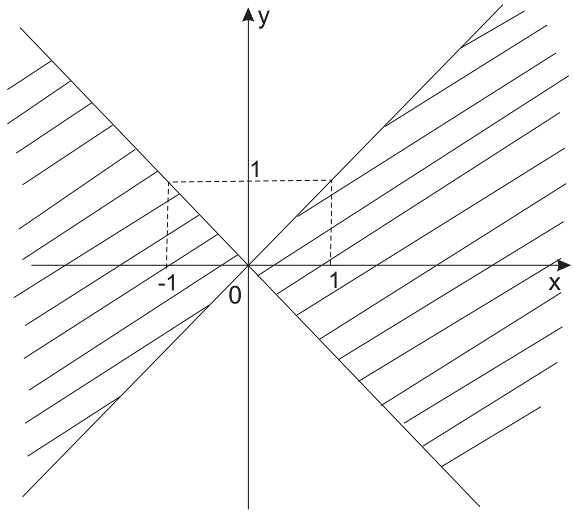

Figura 4.7

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x^3\, y) = 0.$$

Rezolvare. Vom arăta că:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\text{ a.î. }\; \forall\, (x, y) \in I\!R^2 \;\text{ cu }\; 0 < \|(x, y) - (0, 1)\| < \delta(\varepsilon)$$
$$\text{are loc }\; |x^3\, y| < \varepsilon.$$

Folosind $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ în spaţiul liniar normat $I\!R^2$ afirmaţia de mai sus este echivalentă cu:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\text{ a.î. }\; \forall\, (x, y) \in I\!R^2 \;\text{ cu }\; 0 < |x| + |y - 1| < \delta(\varepsilon) \quad \text{are loc }\; |x^3\, y| < \varepsilon. \tag{6}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar momentan fixat. Vom determina pe $\delta(\varepsilon)$ astfel încât de îndată ce $0 < |x| + |y - 1| < \delta(\varepsilon)$ să obţinem $|x^3\, y| < \varepsilon$. Din inegalitatea $0 < |x| + |y - 1| < < \delta(\varepsilon)$ deducem $|x| < \delta(\varepsilon)$ şi $|y| \le |y - 1| + 1 < \delta(\varepsilon) + 1$. Deci:

$$|x^3\, y| = |x|^3 \cdot |y| < \delta^3(\delta + 1).$$

Punând condiţia $\delta^3(\delta + 1) = \varepsilon$ obţinem o ecuaţie de gradul patru în δ, care are o singură soluţie pozitivă. Într-adevăr, dacă notăm cu $f(t) = t^4 + t^3 - \varepsilon$ avem $f'(t) = 4t^3 + 3t^2 = = t^2(4t + 3)$, iar şirul lui Rolle pentru ecuaţia $f(t) = 0$ îl determinăm din tabelul:

t	$-\infty$	$-3/4$	0	∞
$f'(t)$		0	0	
$f(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Deci $\exists$ o singură soluţie pozitivă a ecuaţiei $f(t) = 0$. Notând cu $\delta(\varepsilon)$ această soluţie, obţinem $|x^3\,y| < \varepsilon$, de îndată ce $0 < |x| + |y-1| < \delta(\varepsilon)$. Deoarece ε a fost ales arbitrar rezultă că avem îndeplinită condiţia (6), deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x^3\,y) = 0$.

20. Să se determine următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot \sin\dfrac{1}{xy}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $a \in I\!\!R$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x^2+y^2+z^2)^{(xy+yz+zx)^2}$.

Rezolvare. a) Din inegalitatea:

$$0 \le \left|(x^2+y^2)\cdot \sin\frac{1}{xy}\right| \le x^2+y^2,\ \ \forall\,(x,y)\in I\!\!R^2,\ \ x\ne 0,\ \ y\ne 0$$

rezultă, prin trecere la limită pentru $x\to 0$ şi $y\to 0$ că:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot \sin\frac{1}{xy} = 0\,.$$

b) Deoarece:

$$0 \le \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right),\ \ \forall\,x,\,y>0,$$

rezultă că:

$$0 \le \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = 0.$$

Deci $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0\,$.

c) Avem:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \frac{x}{x+y}} = e.$$

d) Din inegalitatea:

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{y^2},\ \ \forall\,x,\,y>0$$

rezultă că:

$$0 \le \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2} \le \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{y^2} = 0.$$

Deci $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2} = 0.$

e) Folosind inegalitatea $|xy+yz+zx| \le x^2+y^2+z^2$ rezultă că $(xy+yz+zx)^2 \le$ $\le (x^2+y^2+z^2)^2$. Deoarece $(x,y,z)\to(0,0,0)$ rezultă că, într-o vecinătate a punctului

$(0,0,0)$, $0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1$ şi

$$(x^2+y^2+z^2)^{(x^2+y^2+z^2)^2} \le (x^2+y^2+z^2)^{(xy+yz+zx)^2} < 1. \tag{7}$$

Apoi:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x^2+y^2+z^2)^{(x^2+y^2+z^2)^2} = \lim_{\|\vec{x}\|\to 0} (\|\vec{x}\|^2)^{\|\vec{x}\|^4} = e^{\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to 0} \|\vec{x}\|^4 \ln \|\vec{x}\|^2} =$$
$$= e^{\lim\limits_{t\to 0} t^4 \ln t^2} = e^0 = 1,$$

unde $\vec{x} = (x,y,z)$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $t = \|\vec{x}\|$.

Trecând la limită în inegalităţile (7) obţinem:

$$1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x^2+y^2+z^2)^{(x^2+y^2+z^2)^2} \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x^2+y^2+z^2)^{(xy+yz+zx)^2} \le 1,$$

de unde deducem că:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x^2+y^2+z^2)^{(xy+yz+zx)^2} = 1.$$

21. Să se arate că deşi pentru funcţia:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

avem $\lim\limits_{x\to 0} \left\{ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right\} = \lim\limits_{y\to 0} \left\{ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right\} = 0$, totuşi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nu există.

Rezolvare. Avem:

$\lim\limits_{x\to 0} \left\{ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right\} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ şi $\lim\limits_{y\to 0} \left\{ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right\} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Vom arăta că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ cu ajutorul caracterizării cu şiruri. Pentru şirul $z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, pentru $n \to \infty$, $f(z_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^4}{1/n^4} = 1 \to 1 = l_1$, pentru $n \to \infty$, iar pentru şirul $\tilde{z}_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, pentru $n \to \infty$, $f(\tilde{z}_n) = f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^6}{1/n^6 + (1/n^2 - 1/n)^2} = \frac{1}{1 + n^2(1-n)^2} \to 0 = l_2$, pentru $n \to \infty$. Deoarece $l_1 \ne l_2$ rezultă că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

22. Să se arate că deşi pentru funcţia:

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$$

limitele iterate $\lim\limits_{x\to 0} \left\{ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right\}$ şi $\lim\limits_{y\to 0} \left\{ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right\}$ nu există, totuşi există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

Rezolvare. Avem:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} =$$
$$= \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = x\sin\frac{1}{x}\ \lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}.$$

Dar $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ nu există (vezi Problema 5, c)), de unde rezultă că nu există nici $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$. În mod asemănător se arată că nu există $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$.

Apoi, din inegalitatea:

$$0 \le \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x+y|, \ \ \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^*$$

prin trecere la limită pentru $x \to 0$ şi $y \to 0$ obţinem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

23. Să se arate că funcţia:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

deşi are limite parţiale în punctul $(0,0)$, însă nu are limită în $(0,0)$.

Rezolvare. Limitele parţiale ale acestei funcţii în punctul $(0,0)$ există, şi anume:

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot x = 0$ şi

$l_2 = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y^5}{y^4} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y^5}{y^5}\cdot y = 0.$

Pentru a demonstra că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ vom considera drumuri de ecuaţie $y^2 = mx$ $(m>0,\ x>0,\ y>0)$, adică nişte arce de parabolă şi apoi vom calcula limita funcţiei f pe aceste curbe pentru $x\to 0$ şi $y \to 0$ (vezi Figura 4.8).

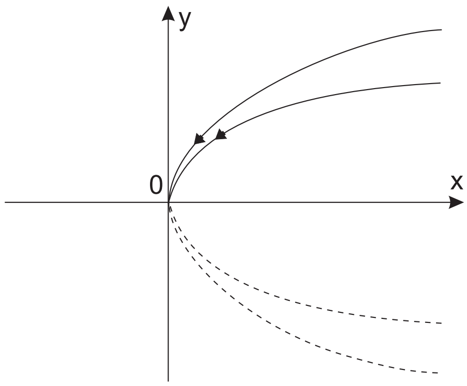

Figura 4.8

Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,\sqrt{mx}) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{mx^2 + \sin(x^3 + m^2x^2\sqrt{mx})}{x^2+m^2x^2} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{m}{1+m^2} + \frac{\sin(x^3+m^2x^2\sqrt{mx})}{x^2(1+m^2)}\right) = \frac{m}{1+m^2} + \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^3+m^2x^2\sqrt{mx}}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Deoarece limita obţinută depinde de m (deci de drumul corespunzător) rezultă că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

24. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} \quad \text{şi} \quad \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}$$

dacă:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; $a=\infty,\ b=\infty$; b) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$; $a=\infty,\ b=0^+$;

c) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; $a=0,\ b=\infty$; d) $f(x,y)=\log_x(x+y)$; $a=1^+,\ b=0^+$.

Rezolvare. a) Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$; $\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right\}=$ $=\lim\limits_{y\to\infty} 0=0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{y\to 0^+}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim\limits_{y\to 0^+} 1=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}\right\}=\lim\limits_{x\to 0} 0\cdot\operatorname{tg}1=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$;

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\cdot\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\cdot\frac{1}{1+xy}\right\}=\lim_{y\to\infty} 1=1.$$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left\{\lim\limits_{y\to 0^+}\log_x(x+y)\right\}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left\{\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$;

$$\lim_{y\to 0^+}\left\{\lim_{x\to 1^+}\log_x(x+y)\right\}=\lim_{y\to 0^+}\left\{\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{y\to 0^+}\left\{\ln(1+y)\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x}\right\}=$$
$$=\lim_{y\to 0^+}\infty=\infty.$$

25. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se studieze limita şi continuitatea lui f în punctul $(0,0)$, precum şi limitele şi continuitatea parţială a funcţiei în punctul $(0,0)$.

Rezolvare. Din inegalitatea:

$$0\le |f(x,y)|=\frac{|x^3y^2|}{x^2y^2+(x-y)^2}=\frac{|x|\cdot x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\le |x|,\quad (x,y)\neq(0,0),$$

prin trecere la limită obţinem că $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$, adică f este continuă în punctul $(0,0)$.

Pentru limitele parţiale, avem:

$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0=f(0,0)$ şi $\exists \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0=f(0,0)$, de unde deducem că $\exists$ limitele parţiale ale funcţiei f în punctul $(0,0)$ şi că funcţia f este continuă parţial în acest punct.

26. Se dă funcţia $f : I\!\!R^2 \to I\!\!R$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y + 2}}{y^2 - 4}, & \text{dacă } y \le x^2 + 2 \text{ şi } y \ne 2; \\ \dfrac{1}{8}, & \text{în rest.} \end{cases}$$
Să se cerceteze existenţa limitei şi continuitatea funcţiei f în punctul $(1,2)$.

Rezolvare. Notăm cu $D_1 = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ \ y \le x^2 + 2 \text{ şi } y \ne 2\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \in I\!\!R^2;\ \ y > x^2 + 2\}$ şi $D_3 = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ \ y = 2\}$. Evident $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = I\!\!R^2$. Atunci:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y + 2}}{y^2 - 4}, & \text{dacă } (x,y) \in D_1; \\ \dfrac{1}{8}, & \text{dacă } (x,y) \in D_2 \cup D_3. \end{cases}$$
Deoarece $(1,2) \in D_3$ vom studia limita funcţiei f în punctul $(1,2)$ prin puncte din vecinătatea acestuia situate în D_3 sau în D_1. Reprezentând grafic D_1, D_2 şi D_3, precum şi $P(1,2)$ în sistemul ortonal de axe Oxy, obţinem Figura 4.9.

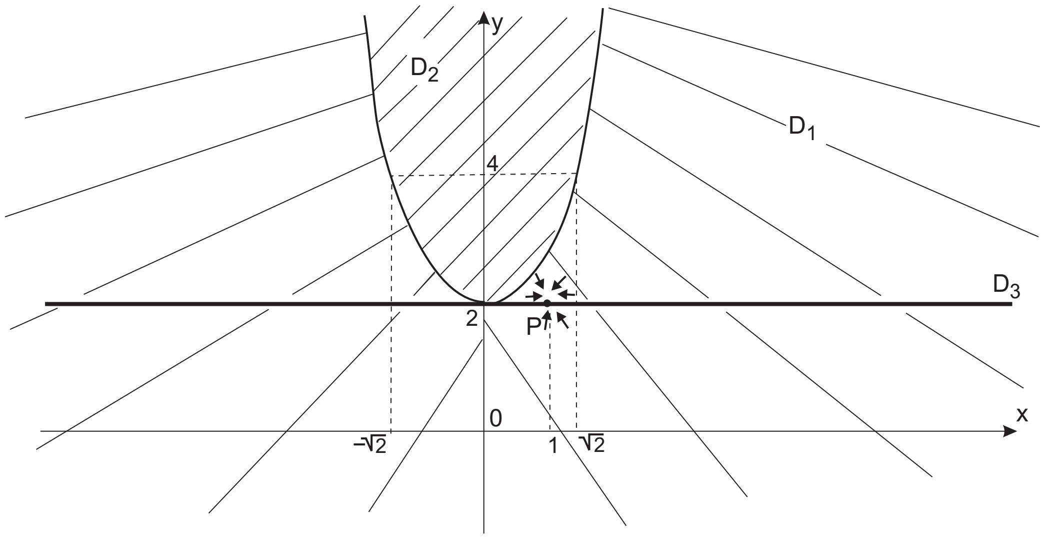

Figura 4.9

Pentru $(x,y) \in D_1$ avem:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x - \sqrt{x^2 - y + 2}}{y^2 - 4} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x^2 - x^2 + y - 2}{(y^2 - 4)\cdot(x + \sqrt{x^2 - y + 2})} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{1}{(y+2)\cdot(x + \sqrt{x^2 - y + 2})} = \frac{1}{8},$$
iar pentru $(x,y) \in D_3$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$.

De aici deducem că $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \dfrac{1}{8}$. Deoarece $f(1,2) = \dfrac{1}{8}$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $P(1,2)$.

27. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f : I\!\!R^2 \to I\!\!R$,

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ y, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4 - y^2)^2}{x^6}, & \text{dacă } y^2 < x^4 \text{ şi } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } y^2 \geq x^4 \text{ sau } x = 0. \end{cases}$

Rezolvare. a) Fie $z_0 = (0, y_0)$, cu $y_0 \in I\!\!R$. Avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y_0 = 0; \\ y_0, & \text{dacă } y_0 \neq 0, \text{ (vezi Figura 4.10).} \end{cases}$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = y_0 = f(0,y_0),\ \forall y_0 \in I\!\!R$. Rezultă că funcţia f este continuă în punctele $(0,y_0),\ y_0 \in I\!\!R$. În rest, funcţia fiind o compunere de funcţii elementare, rezultă că ea este continuă. Deci f este o funcţie continuă pe $I\!\!R^2$.

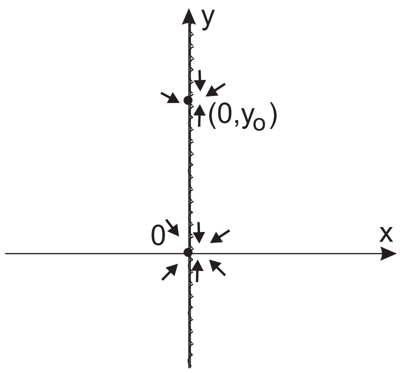

Figura 4.10

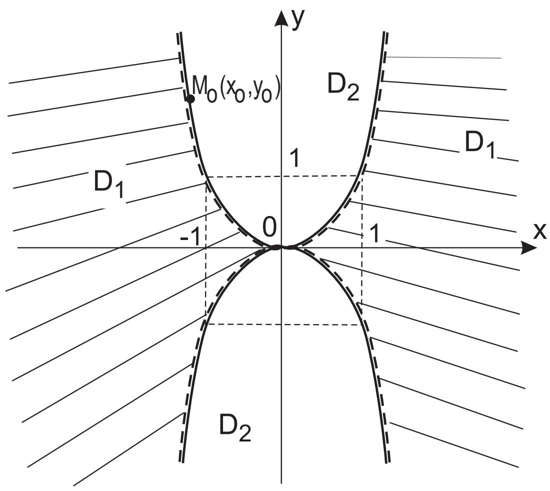

Figura 4.11

b) Notăm cu $D_1 = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ y^2 < x^4 \text{ şi } x \neq 0\} = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ -x^2 < y < x^2$ şi $x \neq 0\}$ şi cu $D_2 = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ y^2 \geq x^4 \text{ sau } x = 0\} = \{(x,y) \in I\!\!R^2;\ y \geq x^2$ sau $y \leq -x^2$ sau $x = 0\}$. Evident $D_1 \cup D_2 = I\!\!R^2$ (vezi Figura 4.11) şi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4 - y^2)^2}{x^6}, & \text{dacă } (x,y) \in D_1; \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \in D_2. \end{cases}$$

Pentru punctele (x_0,y_0) cu $y_0^2 = x_0^4$ şi $x_0 \neq 0$ avem:

$$f(x_0,y_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D_2}} f(x,y) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D_1}} f(x,y) = \frac{0}{x_0^6} = 0.$$

Rezultă că f este continuă în aceste puncte.

Pentru $(x_0, y_0) = (0,0)$ avem: $f(0,0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = 0$ şi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2<x^4,\,x\neq 0}} \frac{(x^4-y^2)^2}{x^6} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2<x^4,\,x\neq 0}} \left(x - \frac{y^2}{x^3}\right)^2 = 0,$$

deoarece $0 \le \left|\dfrac{y^2}{x^3}\right| = \dfrac{y^2}{|x|^3} < \dfrac{x^4}{|x|^3} = |x|$ şi $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} \dfrac{y^2}{x^3} = 0.$

Deducem astfel că funcţia f este continuă şi în punctul $(0,0)$. În celelalte puncte din $\mathbb{R}^2$ fiind funcţie elementară, rezultă că funcţia f este continuă. Deci, în final, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

28. Să se afle valoarea constantei a astfel încât funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x^2+y^2 < \pi/2\}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}, & \text{dacă } 0 < x^2+y^2 < \pi/2; \\ a, & \text{dacă } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

să fie continuă în origine.

Rezolvare. Calculăm limita funcţiei f în punctul $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D\setminus\{(0,0)\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)} = \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{1-\cos\|(x,y)\|}{\operatorname{tg}\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\operatorname{tg} t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{4}} \cdot \frac{t^2}{\operatorname{tg} t^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

(cu observaţia că $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$).

Pentru ca f să fie continuă în $(0,0)$ trebuie ca $a = \dfrac{1}{2}$.

29. Fie funcţia vectorială $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4\} \subset \mathbb{R}^2$, definită prin $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, $(x,y) \in D$, unde:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}, & \text{dacă } (x,y) \in D,\ x \neq 0; \\ 1, & \text{dacă } (x,y) \in D,\ x = 0 \end{cases} \quad \text{şi}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2+x^3y}}, & \text{dacă } (x,y) \in D,\ x \neq 0 \text{ şi } xy \neq -1; \\ e, & \text{dacă } (x,y) \in D,\ x = 0; \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \in D,\ xy = -1. \end{cases}$$

Să se studieze limita funcţiei $\vec{f}$ în punctul $(0,1)$.

Rezolvare. Descompunem domeniul D în $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, unde:

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in D,\ x \neq 0 \text{ şi } xy \neq -1\}$,

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in D,\ x = 0\}$,

$D_3 = \{(x,y) \in I\!R^2;\ \ (x,y) \in D,\ \ xy = -1\}$, (vezi Figura 4.12).

Pentru a studia limita funcţiei $\vec{f}$ în punctul $(0,1)$ vom studia limitele funcţiilor componente f_1 şi f_2 în $(0,1)$.

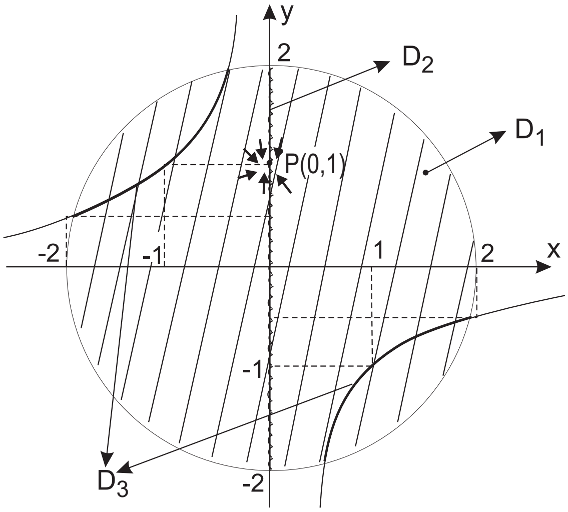

Figura 4.12

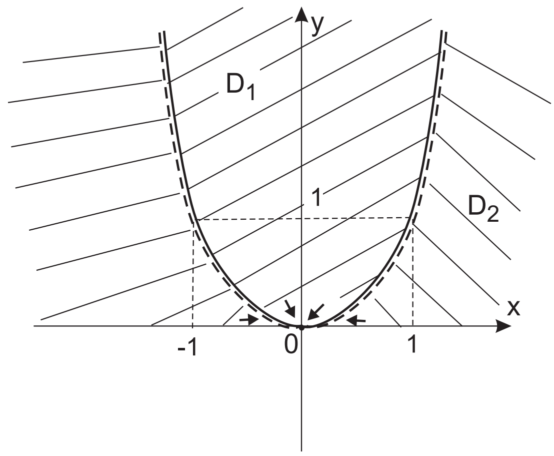

Figura 4.13

Pentru funcţia f_1, deoarece $P(0,1) \in D_2$ vom calcula limita sa în acest punct, considerând puncte din D_1 şi apoi din D_2. Avem:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in D_1}} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}\cdot y = 1, \quad \text{iar}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in D_2}} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} 1 = 1 = f_1(0,1).$$

Astfel deducem că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f_1(x,y) = f_1(0,1) = 1$.

Pentru funcţia f_2, deoarece $P(0,1) \in D_2$, vom proceda ca la f_1 (nu intervine D_3):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in D_1}} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2+x^3y}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1}{1+xy}} = e,$$

iar: $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in D_2}} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} e = e = f_2(0,1).$$

Rezultă că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f_2(x,y) = f_2(0,1) = e$.

În concluzie:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,1)} \vec{f}(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} f_1(x,y),\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} f_2(x,y)\right) = \vec{f}(0,1) = (1,e),$$

deci $\vec{f}$ are limită în punctul $(0,1)$. Mai mult această funcţie este continuă în $(0,1)$.

30. Se consideră funcţia vectorială $\vec{f} : D \to I\!R^2,\ \ D = I\!R \times [0,\infty) \subset I\!R^2$, definită prin $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y),\ f_2(x,y)),\ \ (x,y) \in D$, unde: $f_1(x,y) = x$ şi:

$$f_2(x,y) = \begin{cases} y - x^2, & \text{dacă } x^2 \le y; \\ \dfrac{y^2 - x^2 y}{x^2}, & \text{dacă } 0 \le y < x^2. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui $\vec{f}$ în punctul $(0,0)$.

Rezolvare. Descompunem domeniul D în $D = D_1 \cup D_2$, unde:

$D_1 = \{(x,y) \in D;\ x^2 \le y\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D;\ 0 \le y < x^2\}$, (vezi Figura 4.13).

Studiem continuitatea funcţiilor componente f_1 şi f_2 în punctul $(0,0)$. Funcţia f_1 fiind elementară rezultă că este continuă în punctul $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) =$ $= f_1(0,0) = 0$.

Pentru a studia existenţa limitei funcţiei f_2 în $(0,0)$ vom studia limitele lui f_2 prin puncte din mulţimile D_1 şi D_2. Avem:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y - x^2) = 0 = f_2(0,0),$$

iar $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f_2(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0\le y<x^2}} \left(\dfrac{y^2}{x^2} - y\right) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0\le y<x^2}} \dfrac{y^2}{x^2}$.

Din inegalităţile:

$$0 \le \frac{y^2}{x^2} < \frac{x^4}{x^2} = x^2, \quad \text{pentru } (x,y) \in D_2,$$

prin trecere la limită pentru $x \to 0$, $y \to 0$ obţinem:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} \frac{y^2}{x^2} = 0, \quad \text{deci} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f_2(x,y) = 0.$$

Din cele de mai sus rezultă că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = f_2(0,0) = 0$. Deducem astfel că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y) = \vec{f}(0,0) = (0,0)$, deci $\vec{f}$ este continuă în punctul $(0,0)$.

31. Să se determine punctele de discontinuitate ale următoarelor funcţii:

a) $f : I\!R^2 \to I\!R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0); \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f : I\!R^2 \to I\!R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}, & \text{dacă } x+y \ne 0; \\ 0, & \text{dacă } x+y = 0. \end{cases}$

c) $f : I\!R^3 \to I\!R$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{xyz}, & \text{dacă } x \cdot y \cdot z \ne 0; \\ 0, & \text{dacă } x \cdot y \cdot z = 0. \end{cases}$

Rezolvare. a) Fiind o compunere de funcţii elementare, deci continue, funcţia f este continuă în orice punct $(x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pentru punctul $(0,0)$ avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty,$$

de unde deducem că f nu este continuă în punctul $(0,0)$.

b) În orice punct $(x,y)\in I\!R^2\setminus\{(x,y);\ x+y=0\}$ funcţia f este continuă. Vom studia acum limita şi continuitatea funcţiei f într-un punct arbitrar (x_0,y_0), momentan fixat, cu $x_0+y_0=0$.

Dacă $x_0\neq 0$ atunci considerând şirul $z_n=(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n}+x_0,\frac{1}{n}-x_0\right)\to$ $\to(x_0,-x_0)$, pentru $n\to\infty$ rezultă că:

$$f(x_n,y_n)=\frac{\left(\frac{1}{n}+x_0\right)\left(\frac{1}{n}-x_0\right)}{\frac{1}{n}+x_0+\frac{1}{n}-x_0}=\frac{\frac{1}{n^2}-x_0^2}{\frac{2}{n}}=\frac{1-n^2x_0^2}{2n}\to-\infty,\ \text{ pentru } n\to\infty.$$

Deducem de aici că f nu este continuă în punctele $(x_0,-x_0)$, $x_0\neq 0$.

Şi punctul $(0,0)$ este punct de discontinuitate pentru funcţia f, deoarece nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, lucru pe care-l ilustrăm cu ajutorul unor şiruri:

$z_n=(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$, pentru $n\to\infty$ şi $f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2n}\to 0=$ $=l_1$, pentru $n\to\infty$, şi

$\widetilde{z}_n=(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right)\to(0,0)$, pentru $n\to\infty$ şi $f(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)=\frac{-\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=$ $=-1\to-1=l_2$, pentru $n\to\infty$.

Deoarece $l_1\neq l_2$ rezultă că $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f nu este continuă în punctul $(0,0)$.

În concluzie punctele de discontinuitate ale funcţiei f sunt punctele $(x,y)\in I\!R^2$ cu $x+y=0$, deci reprezentate grafic în sistemul ortogonal de axe Oxy sunt punctele dreptei de ecuaţie $x+y=0$.

c) În orice punct $(x,y,z)\in I\!R^3\setminus\{(x,y,z);\ x=0 \text{ sau } y=0 \text{ sau } z=0\}$ funcţia f este continuă. Punctele $(x,y,z)\in I\!R^3$ cu $x=0$ sau $y=0$ sau $z=0$ sunt puncte de discontinuitate pentru f_0. Verificăm acest lucru pentru punctele $(x_0,y_0,0)$ cu $x_0,\ y_0\in$ $\in I\!R$, în mod asemănător verificându-se şi celelalte puncte: $(x_0,0,z_0)$ şi $(0,y_0,z_0)$.

Pentru un punct $(x_0,y_0,0)$ cu $x_0,\ y_0\in I\!R$ arbitrare, dar momentan fixate avem următoarele cazuri:

1°. Dacă $x_0,\ y_0\neq 0$, atunci considerând şirul $w_n=\left(x_0,y_0,\frac{1}{n}\right)\to(x_0,y_0,0)$, pentru $n\to\infty$ obţinem că $f(w_n)=\frac{n}{x_0y_0}$, şir care are limita $+\infty$ sau $-\infty$ în funcţie de semnele lui x_0 şi y_0.

2°. Dacă $x_0=0$ şi $y_0\neq 0$ considerăm şirul $\widetilde{w}_n=\left(\frac{1}{n},y_0,\frac{1}{n}\right)\to(0,y_0,0)$, pentru $n\to\infty$ şi atunci $f(\widetilde{w}_n)=\frac{n^2}{y_0}$, şir cu limita $+\infty$ sau $-\infty$ în funcţie de semnul lui y_0.

3°. Dacă $x_0\neq 0$ şi $y_0=0$ considerăm în mod asemănător cazului 2° un şir $\widetilde{\widetilde{w}}_n=$

$= \left(x_0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (x_0, 0, 0)$, pentru $n \to \infty$, pentru care $f(\tilde{\tilde{w}}_n) = \frac{n^2}{x_0}$ are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

4°. Dacă $x_0 = y_0 = 0$ atunci pentru şirul $\bar{w}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0,0)$, pentru $n \to \infty$, $f(\bar{w}_n) = n^3 \to \infty$, pentru $n \to \infty$.

În toate situaţiile de mai sus, deoarece limitele obţinute pentru funcţia f sunt infinite, rezultă că $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,0)} f(x,y,z)$.

Asemănător se arată că $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,0,z_0)} f(x,y,z)$ şi $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,y_0,z_0)} f(x,y,z)$. În concluzie punctele de discontinuitate ale funcţiei f sunt punctele $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cu $x = 0$ sau $y = 0$ sau $z = 0$, deci reprezentate grafic în sistemul ortogonal de axe $Oxyz$ sunt punctele planelor de coordonate $(xOy): \ z = 0$, $(xOz): \ y = 0$ şi $(yOz): \ x = 0$.

32. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x+y)$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. Vom arăta că:

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ cu } \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \\ &< \delta(\varepsilon) \text{ are loc } |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Conform Problemei 50, Capitolul 3 (vezi şi Problema 7, Capitolul 3) normele $\|\cdot\|_d$, $\|\cdot\|_\delta$ şi $\|\cdot\|_\Delta$ definite pe spaţiul liniar $\mathbb{R}^2$ sunt echivalente. Alegem pentru verificarea relaţiei (8) norma $\|\cdot\|_\delta$, adică vom arăta că:

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ cu } |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \\ &< \delta(\varepsilon) \text{ are loc } |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Din inegalităţile:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |\sin(x_1+y_1) - \sin(x_2+y_2)| = 2\left|\sin\frac{x_1+y_1-x_2-y_2}{2} \times\right.$$
$$\left.\times \cos\frac{x_1+y_1+x_2+y_2}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)}{2}\right| \le 2\frac{|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)|}{2} \le$$
$$\le |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

deducem că pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat, putem considera $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ şi atunci, de îndată ce $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ avem $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$.

33. Să se arate că funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $E = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ nu este uniform continuă pe mulţimea E.

Rezolvare. Negând definiţia uniformei continuităţi, vom arăta că:

$$\begin{aligned}&\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ a.î. } \forall \delta > 0 \ \exists (x_1^\delta, y_1^\delta),\ (x_2^\delta, y_2^\delta) \in \mathbb{R}^2 \text{ cu } \|(x_1^\delta, y_1^\delta) - (x_2^\delta, y_2^\delta)\|_\delta < \delta \text{ şi} \\ &|f(x_1^\delta, y_1^\delta) - f(x_2^\delta, y_2^\delta)| \ge \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Pentru $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{8}$ şi $\delta > 0$ arbitrar, dar momentan fixat, vom determina elementele (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sub forma $x_1 = \dfrac{1}{n}$, $y_1 = \dfrac{1}{n+1}$, $x_2 = \dfrac{1}{n}$, $y_2 = \dfrac{1}{n}$, unde n este un număr natural pe care-l vom găsi impunând condiţia:

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\delta < \delta. \tag{9}$$

Avem:

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\delta = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Pentru $n_0(\delta) = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right] + 1$, rezultă că $\dfrac{1}{n_0^2} < \delta$, deci avem îndeplinită condiţia (9). Apoi, pentru $x_1^\delta = \dfrac{1}{n_0(\delta)}$, $y_1^\delta = \dfrac{1}{n_0(\delta)+1}$, $x_2^\delta = \dfrac{1}{n_0(\delta)}$, $y_2^\delta = \dfrac{1}{n_0(\delta)}$, avem:

$$|f(x_1^\delta, y_1^\delta) - f(x_2^\delta, y_2^\delta)| = \left|\frac{1}{x_1^\delta + y_1^\delta} - \frac{1}{x_2^\delta + y_2^\delta}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n_0(\delta)} + \frac{1}{n_0(\delta)+1}} - \frac{1}{\frac{1}{n_0(\delta)} + \frac{1}{n_0(\delta)}}\right| =$$
$$= \frac{n_0(\delta)}{2(2n_0(\delta)+1)} > \frac{1}{8}.$$

Deci funcţia $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}$ deşi este continuă (fiind compunere de funcţii elementare, deci continue), nu este uniform continuă pe mulţimea E.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

34. Să se cerceteze dacă funcţia $f(x) = \ln x \cdot \cos^2 \dfrac{\pi}{2x}$ este mărginită în intervalul $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ fixat.

35. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară a funcţiilor:

a) $f : [0, 2\pi] \to I\!R$, $f(x) = \sin x - \cos x$; b) $f : (-2, 1) \to I\!R$, $f(x) = 2^x$;

c) $f : (0, \infty) \to I\!R$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

36. Să se demonstreze, folosind caracterizarea "ε, δ", că:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 + 3) = \infty$; *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+2} = 0$.

37. Să se arate că funcţia:

a) $f : (0, \infty) \to I\!R$, $f(x) = (1 + \sin x) \cdot \ln x$ nu tinde la ∞ atunci când $x \to \infty$.

b) $g : (0, \infty) \to I\!R$, $g(x) = (2 + \sin x) \cdot \ln x$ tinde la ∞ atunci când $x \to \infty$.

38. Se consideră funcţia $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se arate că:

a) f este continuă pe $I\!R$;

b) în nici o vecinătate a originii funcţia f nu este monotonă.

39. Fie funcţia $f : [0,1] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0,1] \cap Q; \\ 1-x, & \text{dacă } x \in [0,1] \cap (I\!R \setminus Q). \end{cases}$
Să se arate că această funcţie ia o singură dată orice valoare cuprinsă între 0 şi 1, când x variază în intervalul $(0,1)$, dar este discontinuă în orice punct din acest interval, în afară de punctul $x = \frac{1}{2}$.

40. Să se arate că funcţia $f : I\!R \to I\!R$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus Q; \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } x \in Q,\ x = \frac{m}{n},\ (m,n) = 1, \end{cases}$$

nu este continuă decât pentru valorile iraţionale ale lui x, ((m,n) este cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n).

41. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$; $m,\ n \in I\!N^*$; $\alpha,\ \beta > 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,2x}{x(1-\cos 3x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\mathrm{tg}\,x)}{\cos 2x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \mathrm{arctg}\,x}{x^3}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

42. Să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos şi să se determine natura punctelor lor de discontinuitate:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{ctg}^2 \pi x, & \text{dacă } x \notin Z; \\ 0, & \text{dacă } x \in Z. \end{cases}$

b) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{dacă } x \in Q; \\ 0, & \text{dacă } x \notin Q. \end{cases}$

43. Să se determine constantele $a_i,\ b_i,\ i = 1,2$ din condiţiile:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0$.

44. Să se studieze uniforma continuitate pe domeniile de definiţie indicate pentru următoarele funcţii:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \mathrm{arctg}\,x$; b) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = x + \sin x$;

c) $f : [-2,5] \to I\!R,\ f(x) = x^2 - 2x - 1$.

45. Să se arate că funcţia $f : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ este continuă în intervalul $(0,1)$, dar nu este uniform continuă pe acest interval. Să se arate că această funcţie este uniform continuă pe intervalul $[0,1;1]$.

46. Să se arate că funcţia $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \sin x^2$ este continuă şi mărginită pe $I\!R$, dar nu este uniform continuă pe $I\!R$.

47. Să se demonstreze că următoarele funcţii nu sunt uniform continue pe domeniile de definiţie indicate:

a) $f : (0,1) \to I\!R$, $f(x) = \ln x$; b) $f : (0,1) \to I\!R$, $f(x) = e^x \cdot \cos \dfrac{1}{x}$;

c) $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

48. Folosind definiţia limitei unei funcţii într-un punct, să se arate că:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + y) = 3$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x-y} = -1$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{3}{5}$.

49. Să se determine următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2 + y^2}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$.

50. Să se studieze existenţa şi în caz că există, să se calculeze următoarele limite:

$l_{12} = \lim\limits_{x\to 0} \left\{ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right\}$, $l_{21} = \lim\limits_{y\to 0} \left\{ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right\}$,

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$, $l_2 = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ şi $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

pentru funcţiile:

a) $f : I\!R^2 \setminus \{(0,0)\} \to I\!R$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

b) $f : I\!R^2 \setminus \{(0,0)\} \to I\!R$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$;

c) $f : E = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x \neq 0\} \to I\!R$, $f(x,y) = x + y \cdot \sin \dfrac{1}{x}$;

d) $f : E = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x \neq 0\} \to I\!R$, $f(x,y) = y + 1 + x \cdot \cos^2 \dfrac{1}{x}$.

51. Să se arate că funcţia $f : D \to I\!R$, $D = [0,\infty) \times [0,\infty) \subset I\!R^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x^2 y \cdot \ln(x+y)}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă parţial în punctul $(0,0)$, însă nu este continuă în raport cu ambele variabile în acest punct.

52. Fie funcţia $f : I\!R^2 \to I\!R$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y^2} \cdot e^{-\frac{|x|}{y^2}}, & \text{dacă } y \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$$

Să se arate că f nu este continuă în punctul $(0,0)$.

53. Să se afle valoarea constantei a astfel încât funcţia $f : D \to I\!R$, $D = \{(x,y) \in$

$\in I\!R^2,\ \ x^2+y^2<1\}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{(x^2+y^2)}-1}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\in D,\ \ (x,y)\neq(0,0);\\ a, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

să fie continuă în $(0,0)$.

54. Să se determine punctele de discontinuitate pentru următoarele funcţii:

a) $f:I\!R^2\to I\!R,\ \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}, & \text{dacă } x+y\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x+y=0.\end{cases}$

b) $f:I\!R^2\to I\!R,\ \ f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{xy}, & \text{dacă } x\cdot y\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x\cdot y=0.\end{cases}$

c) $\vec{f}:I\!R^3\to I\!R^2,\ \ \vec{f}=(f_1,f_2),\ \ f_1(x,y,z)=xy+yz+zx,$

$$f_2(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2-y^2-z^2}, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2\neq 1;\\ 2, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

55. Să se arate că funcţia $f:I\!R^2\to I\!R,\ \ f(x,y)=\cos(x+y)$ este uniform continuă pe $I\!R^2$.

56. Să se arate că funcţia $f:I\!R^3\to I\!R,\ \ f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$ este continuă, dar nu este uniform continuă pe $I\!R^3$.

Capitolul 5
CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ REALĂ

Fie funcţia:

$$\vec{f} : E \to I\!R^m, \;\; E \subset I\!R \;\; (m \geq 1), \;\; \vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \tag{1}$$

şi $t_0 \in E$ un punct de acumulare al mulţimii E.

Funcţia $\vec{f}$ se numeşte *diferenţiabilă* în t_0 dacă $\exists\, \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m) \in I\!R^m$ şi funcţia $\vec{\alpha} : E \to I\!R^m$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ cu proprietăţile $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0) = \vec{0}$ a.î.

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \vec{A}(t - t_0) + \vec{\alpha}(t)(t - t_0), \;\; \forall\, t \in E.$$

Aplicaţia $d\vec{f}(t_0) : I\!R \to I\!R^m$, $d\vec{f}(t_0)(h) = \vec{A}h$, $\forall\, h \in I\!R$ se numeşte *diferenţiala* funcţiei $\vec{f}$ în t_0. O funcţie $\vec{f}$ diferenţiabilă în t_0 este continuă în punctul t_0.

Funcţia $\vec{f}$ se numeşte *derivabilă* în t_0 dacă funcţia:

$$t \to \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}, \;\; t \in E \setminus \{t_0\} \tag{2}$$

are limită în t_0 şi aceasta aparţine lui $I\!R^m$. Dacă $\vec{f}$ este derivabilă în t_0 atunci limita funcţiei de mai sus se numeşte *derivata* funcţiei $\vec{f}$ în t_0, notată $\vec{f}'(t_0)$ sau $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$. Funcţia $\vec{f}$ este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_k : E \to I\!R$, $k = \overline{1, m}$ sunt derivabile în t_0. În acest caz avem:

$$\vec{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_m'(t_0)).$$

Teorema 1. Funcţia $\vec{f}$ este diferenţiabilă în t_0 dacă şi numai dacă $\vec{f}$ este derivabilă în t_0. În plus:

$$d\vec{f}(t_0)(h) = \vec{f}'(t_0)h, \;\; \forall\, h \in I\!R, \;\; (\vec{A} = \vec{f}'(t_0)).$$

Funcţia $\vec{f}$ se numeşte *derivabilă la stânga (la dreapta)* lui $t_0 \in E$, t_0 fiind punct de acumulare la stânga (respectiv la dreapta) pentru mulţimea E, dacă funcţia (2) are limită la stânga (respectiv la dreapta) în t_0. În acest caz limita funcţiei (2) se numeşte *derivata la stânga* (respectiv *la dreapta*) a funcţiei $\vec{f}$ în t_0, notată $\vec{f}'_s(t_0)$ (respectiv $\vec{f}'_d(t_0)$). Dacă funcţia $\vec{f}$ este derivabilă în $t_0 \in E$ (t_0 punct de acumulare bilateral pentru E) atunci $\exists\, \vec{f}'_s(t_0),\ \ \vec{f}'_d(t_0)$ şi $\vec{f}'_s(t_0) = \vec{f}'_d(t_0) = \vec{f}'(t_0)$. Reciproc, dacă $\exists\, \vec{f}'_s(t_0),\ \ \vec{f}'_d(t_0)$ şi $\vec{f}'_s(t_0) = \vec{f}'_d(t_0)$ atunci $\vec{f}$ este derivabilă în t_0 şi $\vec{f}'(t_0) = \vec{f}'_s(t_0) = \vec{f}'_d(t_0)$. O funcţie $\vec{f}$ derivabilă la stânga în t_0 (la dreapta în t_0) este continuă la stânga (respectiv la dreapta) în t_0.

Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile.

Fie funcţiile $\vec{f},\ \vec{g} : E \to I\!R^m,\ \ E \subset I\!R$ şi $\varphi : E \to I\!R$ diferenţiabile ($\Leftrightarrow$ derivabile) în $t_0 \in E$, t_0 punct de acumulare pentru E. Atunci:

a) Funcţia $t \to (\varphi\vec{f})(t) = \varphi(t)\vec{f}(t) \in I\!R^m,\ \ t \in E$ este diferenţiabilă în t_0 şi

$$d(\varphi\vec{f})(t_0) = \varphi(t_0)\, d\vec{f}(t_0) + \vec{f}(t_0)\, d\varphi(t_0) \quad \text{şi} \quad (\varphi\vec{f})'(t_0) = \varphi(t_0)\vec{f}'(t_0) + \vec{f}(t_0)\varphi'(t_0).$$

b) Pentru $\forall\, \lambda,\ \mu \in I\!R$ funcţia $t \to (\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})(t) = \lambda\vec{f}(t) + \mu\vec{g}(t)$ este diferenţiabilă în t_0 şi

$$d(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})(t_0) = \lambda\, d\vec{f}(t_0) + \mu\, d\vec{g}(t_0) \quad \text{şi} \quad (\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})'(t_0) = \lambda\vec{f}'(t_0) + \mu\vec{g}'(t_0).$$

Fie funcţia $f : E \to I\!R$, $E \subset I\!R$, iar $A \subset I\!R$ mulţimea punctelor în care f este derivabilă ($\Leftrightarrow$ diferenţiabilă). Dacă $A \neq \emptyset$ funcţia $t \to f'(t),\ \ t \in A$ se numeşte *derivata* funcţiei f. Să considerăm funcţia de două variabile:

$$df(\cdot,\cdot) : A \times I\!R \to I\!R,\ \ (t, h) \to df(t)(h) = f'(t)h,\ \ \forall\, (t, h) \in A \times I\!R.$$

Fixând primul argument al funcţiei de mai sus obţinem diferenţiala lui f într-un punct $t \in A$, iar dacă fixăm al doilea argument obţinem funcţia:

$$t \to df(t, h) = f'(t)h,\ \ t \in A, \tag{3}$$

numită funcţia diferenţială a lui f corespunzător creşterii h a variabilei independente.

Funcţia f este *de 2 ori derivabilă* în t_0, unde $t_0 \in A$ este punct de acumulare pentru A dacă f' este derivabilă în t_0. În acest caz $(f')'(t_0) \overset{not}{=} f''(t_0)$ se numeşte *derivata a doua* a funcţiei f în t_0. Folosind recurenţa, funcţia f este *de n ori derivabilă* în t_0 dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă în t_0 şi

$$f^{(n)}(t_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(t_0)$$

se numeşte *derivata a n-a* a funcţiei f în t_0. În mod asemănător se introduc derivatele laterale de ordin superior ale funcţiei f într-un punct $t_0 \in E$.

Funcţia f se numeşte *de două ori diferenţiabilă* în t_0, $t_0 \in A$ fiind punct de acumulare pentru mulţimea A, dacă funcţia (3) este diferenţiabilă în t_0, $\forall h \in I\!R$. În această situaţie, aplicaţia:

$$d^2 f(t_0) : I\!R \to I\!R, \;\; h \to d^2 f(t_0)(h) = f''(t_0) h^2, \;\; \forall h \in I\!R$$

se numeşte *diferenţiala a doua* a lui f în t_0. Procedând prin recurenţă, spunem că f este *de n ori diferenţiabilă* în $t_0 \in A$ dacă diferenţiala de ordinul $(n-1)$ a funcţiei f:

$$t \to d^{n-1} f(t)(h) = f^{(n-1)}(t) h^{n-1}, \;\; t \in A$$

este diferenţiabilă în t_0, $\forall h \in I\!R$. În acest caz funcţia:

$$d^n f(t_0) : I\!R \to I\!R, \;\; h \to d^n f(t_0)(h) = f^{(n)}(t_0) h^n, \;\; \forall h \in I\!R$$

se numeşte *diferenţiala de ordinul n* a lui f în t_0. Deoarece $dt(h) = h$, $\forall h \in I\!R$ (diferenţiala funcţiei identice pe $I\!R$) rezultă că $h^n = (dt)^n(h)$, $\forall h \in I\!R$ şi

$$d^n f(t_0) = f^{(n)}(t_0)\, dt^n.$$

În mod asemănător se introduc *derivata de ordinul n a funcţiei* $\vec{f}$ într-un punct $t_0 \in A$, punct de acumulare pentru A şi *diferenţiala de ordinul n a funcţiei* $\vec{f}$ în t_0:

$$\vec{f}^{(n)}(t_0) = \left(\vec{f}^{(n-1)}\right)'(t_0) = \left(f_1^{(n)}(t_0), f_2^{(n)}(t_0), \ldots, f_m^{(n)}(t_0)\right) \quad \text{şi}$$

$$d^n \vec{f}(t_0) = \vec{f}^{(n)}(t_0)\, dt^n = \left(f_1^{(n)}(t_0)\, dt^n, f_2^{(n)}(t_0)\, dt^n, \ldots, f_m^{(n)}(t_0)\, dt^n\right).$$

Teorema 2. Fie funcţiile $f : E \to I\!R$ şi $\varphi : D \to I\!R$, $\varphi(D) \subset E \subset I\!R$, $t_0 \in D$ punct de acumulare pentru D, iar $x_0 = \varphi(t_0) \in E$ punct de acumulare pentru E. Dacă f este diferenţiabilă în x_0 şi φ este diferenţiabilă în t_0 atunci funcţia $f \circ \varphi$ este diferenţiabilă în t_0 şi

$$d(f \circ \varphi)(t_0) = f'(x_0) \cdot d\varphi(t_0), \quad (f \circ \varphi)'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Teorema 3 (Rolle). Fie funcţia $f : [a, b] \to I\!R$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $f(a) = f(b)$ atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = 0$.

Teorema 4 (Lagrange). Fie funcţia $f : [a, b] \to I\!R$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema 5. Dacă funcţia $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : [a, b] \to I\!R^m$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $\|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)\| \le \|\vec{f}'(c)\|(b - a)$.

Teorema 6 (Cauchy). Fie funcţiile f, $g : [a, b] \to I\!R$. Dacă f şi g sunt continue pe $[a, b]$ şi derivabile pe (a, b), iar $g'(x) \ne 0$, $\forall x \in (a, b)$ atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î.:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema 7 (Cauchy). Fie $I \subset I\!R$ un interval, $x_0 \in I$, iar f, $g : I \to I\!R$. Dacă:

a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$; b) f, g sunt derivabile în x_0; c) $g'(x_0) \ne 0$

atunci $\exists$ o vecinătate V a punctului x_0 a.î. $g(x) \neq 0, \ \forall x \in V \setminus \{x_0\}$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

(cunoscută şi sub numele de prima regulă a lui l'Hôspital).

Teorema 8 (regula lui l'Hôspital). Fie $f, \ g : (a,b) \to I\!R$, unde $-\infty \leq a < < b \leq \infty$. Dacă:

a) f şi g sunt derivabile pe (a,b) cu $g'(x) \neq 0$ pe o vecinătate V a punctului a $(g'(x) \neq 0, \ \forall x \in V \cap (a,b))$;

b) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{I\!R}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = l \quad (l = 0 \text{ sau } \infty \text{ sau } -\infty)$,

atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Un rezultat analog are loc şi pentru $x \to b, \ \ x < b$. Pentru $x_0 \in I\!R$, $f, \ g : I \setminus \{x_0\} \to \to I\!R$, $x_0 \in I$ se poate formula teorema de mai sus cu $\lim\limits_{x \to x_0}$.

Teorema 9 (generalizarea teoremei lui Cauchy - Teorema 7). Fie $I \subset I\!R$ un interval, $x_0 \in I, \ \ f, \ g : I \to I\!R$. Dacă:

a) f şi g sunt derivabile de n ori în x_0 şi $g^{(n)}(x_0) \neq 0$;

b) $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$

atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Teorema 10 (generalizarea regulei lui l'Hôspital - Teorema 8). Fie $f, \ g : (a,b) \to \to I\!R$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dacă:

a) f şi g sunt derivabile de n ori pe (a,b) cu $g', \ g'', \ldots, g^{(n)}$ nenule pe o vecinătate V a punctului a $(\forall x \in V \cap (a,b))$;

b) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = \cdots = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f^{(n-1)}(x) = l$ şi

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g'(x) = \cdots = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g^{(n-1)}(x) = l \quad (l = 0 \text{ sau } \infty \text{ sau } -\infty)$;

c) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L \in \overline{I\!R}$

atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Un rezultat analog are loc şi pentru $x \to b, \ \ x < b$.

Teorema 11 (formula lui Taylor cu restul lui Peano). Dacă funcţia $f:I\to I\!R$ (I interval $\subset I\!R$) este de n ori derivabilă în $x_0\in I$, atunci există o funcţie $\alpha:I\to I\!R$ cu proprietatea $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)=0$ astfel încât:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ \forall\, x\in I.$$

Polinomul $T_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se numeşte *polinomul lui Taylor* de gradul n.

Teorema 12 (formula lui Taylor cu restul lui Lagrange). Fie $f:I\to I\!R$ o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I. Pentru orice $x,\ x_0\in I,\ \ x\neq x_0$, există un element ξ_n cuprins între x_0 şi x, adică de forma $\xi_n=x_0+\theta_n(x-x_0),\ \ \theta_n\in(0,1)$ a.î.:

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Dacă $0\in I$, luând $x_0=0$ în relaţiile de mai sus, obţinem formulele lui Mac-Laurin:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\,x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n+R_n(x),$$

unde $R_n(x)=\dfrac{\alpha(x)\cdot x^n}{n!}$, respectiv $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\theta_n x),\ \ \theta_n\in(0,1)$.

Teorema 13. Fie funcţia $f:I\to I\!R$ (I interval $\subset I\!R$) derivabilă de n ori în $x_0\in\overset{\circ}{I}$ pentru care $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Dacă $n=2k,\ \ k\in I\!N^*$ punctul x_0 este punct de extrem al funcţiei f şi anume punct de maxim dacă $f^{(n)}(x_0)<0$ şi punct de minim dacă $f^{(n)}(x_0)>0$. Dacă $n=2k+1,\ \ k\in I\!N$ atunci x_0 nu este punct de extrem.

Derivatele şi diferenţialele funcţiilor elementare sunt prezentate în Anexă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

a) $f:(0,\infty)\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+3x), & \text{dacă } 0<x<1;\\ \dfrac{5}{4}(x-1)+2\ln 2, & \text{dacă } x\geq 1;\end{cases}$

b) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to I\!R,\ \ f(x)=\max\left\{\dfrac{\operatorname{tg}x}{2},\ \operatorname{tg}x\cdot\sin x\right\};$

c) $f:I\!R\to I\!R,\ \ f(x)=\max\{|1-x|,\ 3|x|\};$

d) $f:I\!R\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x\in Q;\\ -x^2, & \text{dacă } x\in I\!R\setminus Q.\end{cases}$

Rezolvare. a) Funcţia f este continuă în punctul $x = 1$, deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln\left(x^2+3x\right) = \ln 4 = 2\ln 2,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left[\frac{5}{4}(x-1)+2\ln 2\right] = 2\ln 2 = f(1).$$

Deci $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$. În orice punct $x \neq 1$ funcţia fiind elementară este continuă, chiar şi derivabilă, cu derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2+3x}, & \text{dacă } 0 < x < 1; \\ \dfrac{5}{4}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Pentru a studia derivabilitatea lui f în punctul $x = 1$, calculăm derivatele laterale ale funcţiei f în punctul 1:

$$f_s'(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln\left(x^2+3x\right)-\ln 4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln\frac{x^2+3x}{4}}{x-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2+3x-4}{4}\right)}{\frac{x^2+3x-4}{4}} \cdot \frac{x^2+3x-4}{4(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x+4}{4} = \frac{5}{4},$$

iar $f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\frac{5}{4}(x-1)+2\ln 2-2\ln 2}{x-1} = \dfrac{5}{4}.$

Deci f este derivabilă în $x = 1$ şi $f'(1) = f_s'(1) = f_d'(1) = \dfrac{5}{4}$.

În final f este derivabilă pe $\mathbb{R}_+^*$ cu derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2+3x}, & \text{dacă } 0 < x < 1; \\ \dfrac{5}{4}, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}_+^*$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ şi, în plus, $\exists \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{5}{4}$ putem deduce, conform unui rezultat cunoscut (vezi [17], p.155), că funcţia f este derivabilă şi în punctul 1, iar $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{5}{4}$.

b) Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}, & \text{dacă } \dfrac{\operatorname{tg} x}{2} \geq \operatorname{tg} x \cdot \sin x; \\ \operatorname{tg} x \cdot \sin x, & \text{dacă } \dfrac{\operatorname{tg} x}{2} < \operatorname{tg} x \cdot \sin x, \end{cases}$$

de unde rezultă că:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}, & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]; \\ \operatorname{tg} x \cdot \sin x, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Funcţia f este continuă în punctul $x = \dfrac{\pi}{6}$, deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to\pi/6\\x<\pi/6}} f(x)=\frac{\sqrt{3}}{6}=\lim_{\substack{x\to\pi/6\\x>\pi/6}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Funcţia f fiind o compunere de funcţii elementare, este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ şi derivabilă pe $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ cu derivata:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cos^2 x}, & \text{dacă } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right);\\[2mm] \dfrac{\sin x\cdot(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}, & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right].\end{cases}$$

Pentru a stabili derivabilitatea lui f în punctul $x=\frac{\pi}{6}$, avem:

$$f'_s\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{\substack{x\to\pi/6\\x<\pi/6}}\frac{\frac{\operatorname{tg}x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}\overset{x-\pi/6=y}{=}\lim_{\substack{y\to0\\y<0}}\frac{\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2y}=\lim_{\substack{y\to0\\y<0}}\frac{\frac{4}{3}\operatorname{tg}y}{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}y\right)\cdot 2y}=\frac{2}{3},$$

iar $f'_d\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi/6\\x>\pi/6}}\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\sin x-\frac{\sqrt{3}}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}\overset{x-\pi/6=y}{=}\lim\limits_{\substack{y\to0\\y>0}}\dfrac{\frac{\sin^2(y+\pi/6)}{\cos(y+\pi/6)}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{y}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{\substack{y\to0\\y>0}}\frac{\frac{3}{4}\sin^2 y+\frac{1}{4}\cos^2 y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\,\cos y-\frac{1}{4}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin y}{y}=\frac{7}{6}.$$

Deoarece $f'_s\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq f'_d\left(\frac{\pi}{6}\right)$, deducem că funcţia f nu este derivabilă în punctul $x=\frac{\pi}{6}$.

c) Avem:

$$f(x)=\begin{cases}|1-x|, & \text{dacă } |1-x|\geq 3|x|;\\ 3|x|, & \text{dacă } |1-x|<3|x|,\end{cases}$$

de unde rezultă că:

$$f(x)=\begin{cases}-3x, & \text{dacă } x\in(-\infty,-1/2);\\ 1-x, & \text{dacă } x\in[-1/2,1/4];\\ 3x, & \text{dacă } x\in(1/4,\infty).\end{cases}$$

Deoarece $f\left(-\frac{1}{2}-0\right)=f\left(-\frac{1}{2}+0\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, iar $f\left(\frac{1}{4}-0\right)=f\left(\frac{1}{4}+0\right)=$ $=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$ rezultă că f este continuă în $x=-1/2$ şi $x=1/4$; fiind în rest o funcţie elementară, deducem că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Derivata sa este:

$$f'(x)=\begin{cases}-3, & \text{dacă } x\in(-\infty,-1/2);\\ -1, & \text{dacă } x\in(-1/2,1/4);\\ 3, & \text{dacă } x\in(1/4,\infty).\end{cases}$$

Pentru a studia derivabilitatea lui f în punctele $x=-1/2$ şi $x=1/4$ calculăm derivatele laterale:

$$f'_s\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to -1/2\\ x<-1/2}} \frac{f(x)-f(-1/2)}{x+1/2} = \lim_{\substack{x\to -1/2\\ x<-1/2}} \frac{-3x-3/2}{x+1/2} = -3,$$

$$f'_d\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to -1/2\\ x>-1/2}} \frac{f(x)-f(-1/2)}{x+1/2} = \lim_{\substack{x\to -1/2\\ x>-1/2}} \frac{1-x-3/2}{x+1/2} = -1,$$

$$f'_s\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to 1/4\\ x<1/4}} \frac{f(x)-f(1/4)}{x-1/4} = \lim_{\substack{x\to 1/4\\ x<1/4}} \frac{1-x-3/4}{x-1/4} = -1,$$

$$f'_d\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to 1/4\\ x>1/4}} \frac{f(x)-f(1/4)}{x-1/4} = \lim_{\substack{x\to 1/4\\ x>1/4}} \frac{3x-3/4}{x-1/4} = 3.$$

Deoarece $f'_s(-1/2) \neq f'_d(-1/2)$ şi $f'_s(1/4) \neq f'_d(1/4)$ deducem că f nu este derivabilă în punctele $x=-1/2$ şi $x=1/4$.

d) Arătăm mai întâi că funcţia f nu este continuă (deci nici derivabilă) în nici un punct $x_0 \neq 0$, folosind caracterizarea cu şiruri. Fie $x_0 \neq 0$ arbitrar, momentan fixat. Există un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset Q$, $x_n \to x_0$, pentru $n\to\infty$, pentru care $f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$, pentru $n\to\infty$. De asemenea există un şir $(y_n)_{n\geq 1} \subset I\!R \setminus Q$, $y_n \to x_0$, pentru $n\to\infty$, pentru care $f(y_n) = -y_n^2 \to -x_0^2$, pentru $n\to\infty$. Deoarece $x_0^2 \neq -x_0^2$, deducem că f nu are limită în x_0, deci nu este continuă în x_0 şi nici derivabilă.

Funcţia f este continuă în punctul $x_0=0$. Într-adevăr, pentru orice şir $(x_n)_{n\in I\!N} \subset$ $\subset I\!R$, $x_n \to 0$, pentru $n\to\infty$, avem:

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n^2, & \text{dacă } x_n \in Q; \\ -x_n^2, & \text{dacă } x_n \in I\!R\setminus Q. \end{cases}$$

Deoarece $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, rezultă, conform caracterizării cu şiruri a limitei, că funcţia f are limită în 0 şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0)=0$ rezultă că f este continuă în $x=0$.

Derivabilitatea are sens s-o studiem doar în punctul $x=0$. Din:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in Q}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in I\!R\setminus Q}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = 0$$

deducem că $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, deci f este derivabilă în punctul $x=0$ şi $f'(0)=0$.

2. Fie funcţia $f: I\!R \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x=0. \end{cases}$

Să se arate că f este derivabilă pe $I\!R$, dar derivata funcţiei este discontinuă în origine.

Rezolvare. Pentru $x\neq 0$ avem $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ $= f(0) = 0$ $\left(\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq x^2\right)$, rezultă că funcţia f este continuă în $x=0$.

Studiem derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0, \quad \left(\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|\right).$$
Rezultă că f este derivabilă şi în punctul $x = 0$ şi $f'(0) = 0$. Deci:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$
Arătăm acum că funcţia f' nu are limită în $x = 0$, deci este discontinuă în origine. Considerăm şirurile $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$, pentru $n \to \infty$ şi $y_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$, pentru $n \to \infty$. Avem:
$$f'(x_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \to -1, \text{ pentru } n\to\infty \quad \text{şi}$$
$$f'(y_n) = \frac{4}{\pi + 4n\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{4}{\pi + 4n\pi} \to 0, \text{ pentru } n\to\infty.$$
Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = -1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f'(y_n)$ rezultă că $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, deci f' este discontinuă în origine.

3. Fie funcţia $f : I\!\!R \to I\!\!R$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & \text{dacă } x \neq 1; \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$

Să se arate că f nu este derivabilă în $x = 1$, deşi $\exists \lim\limits_{x\to 1} f'(x)$.

Rezolvare. Pentru $x \neq 1$ avem:
$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$
Funcţia f nu are limită în $x = 1$, deoarece:
$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{iar}$$
$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$
Deci f nu este continuă în $x = 1$ şi nici derivabilă în acest punct.

Dar $\exists \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}$.

4. Să se determine coeficienţii α şi β astfel încât funcţia $f : (0,\infty) \to I\!\!R$,
$$f(x) = \begin{cases} \ln^4 x, & \text{dacă } x \in (0, e]; \\ \alpha x + \beta, & \text{dacă } x \in (e, \infty), \end{cases}$$
să fie derivabilă pentru orice $x > 0$.

Rezolvare. Impunând condiţia ca f să fie continuă în $x = e$, obţinem:
$$\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x) = \alpha e + \beta \ (= f(e)).$$
Deci $\alpha e + \beta = 1$, de unde rezultă că $\beta = 1 - \alpha e$.

Pentru $x \neq e$ avem:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln^3 x}{x}, & \text{dacă } x \in (0,e); \\ \alpha, & \text{dacă } x \in (e,\infty). \end{cases}$$

Calculăm acum derivatele laterale ale funcţiei f în punctul $x = e$:

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} \frac{\ln^4 x - 1}{x-e} = \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} \frac{(\ln x - 1)(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1)}{x-e} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} \frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}} \cdot \frac{1}{e} \cdot (\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1) = \frac{4}{e},$$

iar $f'_d(e) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} \dfrac{\alpha x + 1 - \alpha e - 1}{x-e} = \alpha.$

Pentru ca funcţia f să fie derivabilă în $x = e$ impunem condiţia ca $\alpha = 4/e$. Obţinem $\beta = 1 - \alpha e = 1 - \frac{4}{e}e = -3$.

În concluzie pentru $\alpha = 4/e$ şi $\beta = -3$ funcţia f este derivabilă pentru orice $x > 0$ şi derivata sa este:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln^3 x}{x}, & \text{dacă } x \in (0,e); \\ 4/e, & \text{dacă } x \in [e,\infty). \end{cases}$$

5. Să se calculeze, folosind regulile de derivare, derivatele următoarelor funcţii:
a) $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; d) $f(x) = x^{\sin x}$;
e) $f(x) = x^{x^x}$; b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$; g) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^2 + \sqrt{1-x^2} - 1}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}$,
(funcţiile sunt definite pe domeniile lor de definiţie).

Rezolvare. a) Avem $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

b) $f'(x) = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \sec^2\dfrac{1}{x}$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2-1}} \cdot \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = -\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

d) $f'(x) = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln x = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \cdot \cos x \cdot \ln x)$, $((u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u)$.

e) $f'(x) = x^x \cdot x^{x^x - 1} + x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x) = x^x \cdot x^{x^x-1} +$
$+ x^x \cdot x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (1 + \ln x) = x^x \cdot x^{x^x-1} \cdot [1 + x\ln x(1+\ln x)] =$
$= x^{x^x+x-1} \cdot [1 + x\ln x \cdot (1+\ln x)]$.

f) $f'(x) = \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \ln\sin x =$
$= (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x)$.

g) Avem:

$$f'(x)=\frac{\left[4x+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right]x(2\sqrt{1-x^2}-1)-(2x^2+\sqrt{1-x^2}-1)\left[2\sqrt{1-x^2}-1+x\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right]}{x^2[2\sqrt{1-x^2}-1]^2\left[1+\frac{(2x^2+\sqrt{1-x^2}-1)^2}{x^2[2\sqrt{1-x^2}-1]^2}\right]}=$$

$$=\frac{x^2(4\sqrt{1-x^2}-1)(2\sqrt{1-x^2}-1)-(2x^2+\sqrt{1-x^2}-1)(2-2x^2-\sqrt{1-x^2}-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\,[x^2(4-4x^2+1-4\sqrt{1-x^2})+4x^4+1-4x^2+1-x^2+2(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}]}=$$

$$=\frac{3-3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(2-2\sqrt{1-x^2})}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Să se demonstreze că polinoamele lui Cebîşev $P_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$, $n\in I\!N$, verifică ecuaţia:

$$(1-x^2)P_n''(x)-xP_n'(x)+n^2P_n(x)=0.$$

Rezolvare. Avem:

$$P_n'(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot[-\sin(n\arccos x)]\cdot n\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

iar $$P_n''(x)=\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{\cos(n\arccos x)\cdot\dfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\sin(n\arccos x)\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=-\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{n\cdot\cos(n\arccos x)\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\sin(n\arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Atunci:

$$(1-x^2)P_n''(x)-xP_n'(x)+n^2P_n(x)=-\frac{n^2\cdot\cos(n\arccos x)}{2^{n-1}}+\frac{nx\cdot\sin(n\arccos x)}{2^{n-1}\cdot\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{nx}{2^{n-1}}\cdot\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{n^2}{2^{n-1}}\cdot\cos(n\arccos x)=0.$$

7. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcţii:

a) $f:[-2\sqrt{3},3]\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+4}, & \text{dacă } x\in[0,3];\\ \dfrac{x^2}{4}+2, & \text{dacă } x\in[-2\sqrt{3},0).\end{cases}$

b) $f:[0,2]\to I\!R,\ \ f(x)=|x-1|^3$.

Rezolvare. a) Funcţia f este continuă pe $[-2\sqrt{3},3]$. Într-adevăr pentru $x=0$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=f(0)=2$.

Pentru $x\neq0$ obţinem:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+4}}, & \text{dacă } x\in(0,3];\\ \dfrac{x}{2}, & \text{dacă } x\in[-2\sqrt{3},0).\end{cases}$$

În punctul $x=0$ calculăm derivatele laterale:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{x^2}{4}+2-2}{x}=0,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2+x+4-4}{x(\sqrt{x^2+x+4}+2)} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Deoarece $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ rezultă că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$, deci nu se poate aplica teorema lui Rolle.

b) Funcţia $f : [0,2] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{dacă } x \in [1,2]; \\ -(x-1)^3, & \text{dacă } x \in [0,1) \end{cases}$

este continuă pe $[0,2]$. Derivata sa într-un punct $x \neq 1$ este:

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2, & \text{dacă } x \in (1,2]; \\ -3(x-1)^2, & \text{dacă } x \in [0,1). \end{cases}$$

Deoarece $\exists \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 0$, deducem că f este derivabilă în punctul $x = 1$ şi $f'(1) = 0$. Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2, & \text{dacă } x \in [1,2]; \\ -3(x-1)^2, & \text{dacă } x \in [0,1). \end{cases}$$

Cum $f(0) = f(2) = 1$ rezultă că avem toate ipotezele din teorema lui Rolle îndeplinite, deci conform acestui rezultat deducem existenţa unui punct $c \in (0,2)$ a.î. $f'(c) = 0$. Impunând condiţia $f'(x) = 0$ găsim singurul punct $c = 1$ cu această proprietate.

8. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru următoarele funcţii, iar în caz afirmativ să se determine constanta c din enunţul teoremei:

a) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to I\!R,\ f(x) = |\sin x| \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$;

b) $f : [-4,3] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{dacă } x \in (0,3]; \\ \dfrac{x}{2}+1, & \text{dacă } x \in [-4,0]. \end{cases}$

Rezolvare. a) Funcţia f este:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot (+1), & \text{dacă } x \in (0,\pi/2]; \\ 0, & \text{dacă } x = 0; \\ -\sin x \cdot (-1), & \text{dacă } x \in [-\pi/2, 0). \end{cases}$$

Deci $f(x) = \sin x,\ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deoarece funcţia f este continuă pe $[-\pi/2, \pi/2]$ şi derivabilă pe $[-\pi/2, \pi/2]$ rezultă, conform teoremei lui Lagrange, că $\exists c \in (-\pi/2, \pi/2)$ a.î. $f(\pi/2) - f(-\pi/2) = f'(c) \cdot (\pi/2 - (-\pi/2)) \Rightarrow 2 = \pi f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = 2/\pi \Rightarrow \cos c = 2/\pi$. Punctele care satisfac condiţia din concluzia teoremei lui Lagrange sunt $c = \pm \arccos 2/\pi$.

b) Deoarece $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 1$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x = 0$. Deci f este continuă pe intervalul $[-4, 3]$, (fiind pe $[-4, 3] \setminus \{0\}$ compuneri de funcţii elementare). În orice punct $x \neq 0$ funcţia f este derivabilă cu derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & \text{dacă } x \in (0, 3]; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x \in [-4, 0). \end{cases}$$

Din faptul că $\exists \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1/2$ deducem că f este derivabilă şi în punctul $x = 0$ cu $f'(0) = 1/2$. Deci f este derivabilă pe întreg intervalul $[-4, 3]$. Conform teoremei lui Lagrange rezultă că $\exists\, c \in (-4, 3)$ a.î. $f(3) - f(-4) = f'(c)(3 - (-4)) \Rightarrow 3 = 7f'(c) \Rightarrow f'(c) = 3/7$. Punctele c cu această proprietate nu se găsesc în intervalul $(-4, 0)$, deoarece aici derivata este egală cu $1/2$. Impunând condiţia $\dfrac{1}{2\sqrt{c+1}} = \dfrac{3}{7}$, deducem punctul c (care este şi unic) egal cu $\dfrac{13}{36} \in (0, 3)$.

9. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Cauchy pentru următoarele funcţii, iar în caz afirmativ să se determine constanta c din enunţul teoremei:

$$f : [0, 3] \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1, & \text{dacă } x \in (1, 3]; \\ -x + \dfrac{4}{3}, & \text{dacă } x \in [0, 1], \end{cases}$$

$g : [0, 3] \to I\!R,\ \ g(x) = x.$

Rezolvare. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{3}$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x = 1$. Fiind pe intervalele $[0, 1)$ şi $(1, 3]$ funcţie elementară, deducem că f este continuă pe întreg intervalul $[0, 3]$. Derivata lui f într-un punct $x \neq 1$ este:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{dacă } x \in (1, 3]; \\ -1, & \text{dacă } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Deoarece $\exists \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = -1$ rezultă că f este derivabilă în punctul $x = 1$, iar $f'(1) = -1$. Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, 3]; \\ -1, & \text{dacă } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Funcţia g este continuă pe $[0, 3]$ şi derivabilă pe $[0, 3]$, iar $g'(x) = 1 \neq 0,\ \forall\, x \in (0, 3)$. Din cele de mai sus tragem concluzia că avem îndeplinite toate ipotezele din teorema lui Cauchy. Rezultă că $\exists\, c \in (0, 3)$ a.î.:

$$\frac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{1 - 4/3}{3 - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{1}{9}.$$

Pe intervalul $(0,1)$ $\nexists$ nici un punct c cu această proprietate, deoarece $f'(x) = -1$, $g'(x) = 1,\ \forall\, x \in (0,1)$. Însă pe intervalul $(1,3)$ avem:

$$c^2 - 2c = -\frac{1}{9} \Rightarrow c = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \in (1,3).$$

10. Să se arate că dacă f, g şi h sunt funcţii continue pe $[a,b]$ şi derivabile pe (a,b) atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î.:

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Rezolvare. Să considerăm funcţia $\varphi : [a,b] \to I\!\!R$,

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g(a) & g(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} \cdot f(x) - \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} \cdot g(x) +$$
$$+ \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} \cdot h(x).$$

Deoarece funcţia φ este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ deducem, conform teoremei lui Rolle, că $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\varphi'(c) = 0$. Dar:

$$\varphi'(x) = \begin{vmatrix} g(a) & g(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} f'(x) - \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ h(a) & h(b) \end{vmatrix} g'(x) + \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} h'(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ h(a) & h(b) & h'(x) \end{vmatrix}.$$

Deci $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0.$

11. Fie $f : [0,1] \to I\!\!R_+^*$ o funcţie care admite o primitivă $F : [0,1] \to I\!\!R$ (F derivabilă pe $(0,1)$ şi $F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in (0,1)$) cu proprietatea $F(1) = 0$. Să se arate că $\exists\, c \in (0,1)$ a.î.:

$$F(c) > -\frac{c}{2} e^{c^2} \cdot f(c).$$

Rezolvare. Considerăm funcţia $G : [0,1] \to I\!\!R$, $G(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right) \cdot F(x)$. Funcţia G este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, iar $G(0) = G(1) = 0$. Conform teoremei lui Rolle există $c \in (0,1)$ a.î. $G'(c) = 0$.

Dar $G'(x) = 2x\, e^{-x^2} F(x) + \left(1 - e^{-x^2}\right) \cdot f(x),\ \forall\, x \in (0,1)$. Deci relaţia $G'(c) = 0$ devine:

$$2c\,e^{-c^2}F(c) - e^{-c^2}f(c) + f(c) = 0 \ \Leftrightarrow$$

(4) $$2c\,e^{-c^2}F(c) = \left(e^{-c^2} - 1\right)f(c).$$

Folosim în continuare inegalitatea $e^{-x^2} - 1 > -x^2$, $\forall\, x \in (0,1)$. Într-adevăr, considerând funcţia $f_1 : [0,\infty) \to I\!R$, $f_1(x) = e^{-x^2} + x^2 - 1$, avem $f_1(0) = 0$ şi $f_1'(x) = -2x\,e^{-x^2} + 2x = 2x\left(1 - e^{-x^2}\right) > 0$, $\forall\, x \in (0,\infty)$. Rezultă că f_1 este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deci $f_1(x) > 0$, $\forall\, x \in (0,\infty)$.

Utilizând inegalitatea de mai sus în relaţia (4) obţinem:

$$2c\,e^{-c^2}F(c) > -c^2 f(c),\ \ (f(c) > 0),$$

de unde rezultă că:

$$F(c) > -\frac{c}{2}e^{c^2} \cdot f(c).$$

12. Fie $f,\ g \in C^1([a,b])$ şi să presupunem că $fg' - f'g$ nu se anulează în nici un punct din $[a,b]$. Să se arate că între două zerouri ale funcţiei f se găseşte unul al funcţiei g şi reciproc.

Rezolvare. Fie $x_1,\ x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, două zerouri ale funcţiei f, adică $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Presupunem prin reducere la absurd că $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [x_1,x_2]$. Să considerăm în continuare funcţia $\dfrac{f}{g} : [x_1,x_2] \to I\!R$. Această funcţie este continuă pe $[x_1,x_2]$, derivabilă pe (x_1,x_2) şi $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_1) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_2) = 0$. Conform teoremei lui Rolle rezultă că $\exists\, c \in (x_1,x_2)$ a.î. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = 0 \Leftrightarrow (f'g)(c) - (fg')(c) = 0$. Relaţia obţinută contrazice ipoteza, care spune că $f'g - fg'$ nu se anulează pe $[a,b]$. Rezultă astfel că presupunerea făcută este falsă, deci $\exists\, x_0 \in [x_1,x_2]$ a.î. $g(x_0) = 0$.

În mod asemănător se demonstrează că între două zerouri ale funcţiei g se găseşte un zero al funcţiei f.

13. Să se arate că polinomul:

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

nu are rădăcini multiple.

Rezolvare. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists\, c \in I\!R$, rădăcină multiplă a polinomului P, deci cel puţin rădăcină dublă, adică $P(c) = 0$ şi $P'(c) = 0$. Astfel obţinem relaţiile:

$$1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^n}{n!} = 0 \quad \text{şi} \quad 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^{n-1}}{(n-1)!} = 0,$$

de unde rezultă că $c = 0$. Dar $P(0) = 1 \neq 0$, deci $c = 0$ nu este rădăcină a polinomului P. Contradicţia obţinută ne conduce la concluzia că P nu are rădăcini multiple.

14. Să se arate că:

a) $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \ \forall\, x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$; b) $\dfrac{x+a}{2} > \dfrac{x-a}{\ln x - \ln a}, \ \forall\, x > a > 0$.

Rezolvare. a) Notăm $\sqrt{x} = y$. Atunci inegalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$$\frac{\ln y^2}{y^2-1} < \frac{1}{y}, \ \forall\, y \in (0,\infty) \setminus \{1\}.$$

Dacă $y \in (1,\infty)$ inegalitatea de mai sus se transformă în:

$$2\ln y < \frac{y^2-1}{y}, \ \forall\, y \in (1,\infty), \tag{5}$$

iar pentru $y \in (0,1)$ inegalitatea devine:

$$2\ln y > \frac{y^2-1}{y}, \ \forall\, y \in (0,1). \tag{6}$$

Pentru a demonstra inegalităţile (5) şi (6), să considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to I\!R$, $f(y) = 2\ln y - \dfrac{y^2-1}{y}$. Avem:

$$f'(y) = \frac{2}{y} - \frac{y^2+1}{y^2} = -\frac{(y-1)^2}{y^2} < 0, \ \forall\, y \in (0,\infty)\setminus\{1\}.$$

Rezultă astfel că f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$. Deoarece $f(1) = 0$, deducem că $f(y) > 0, \ \forall\, y \in (0,1)$, adică inegalitatea (5), şi $f(y) < 0, \ \forall\, y \in (1,\infty)$, adică inegalitatea (6).

b) Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$$\ln x - \ln a > \frac{2(x-a)}{x+a}, \ \forall\, x > a > 0. \tag{7}$$

Considerăm funcţia $f:(a,\infty)\to I\!R$, $f(x) = \ln x - \ln a - \dfrac{2(x-a)}{x+a}$. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4a}{(x+a)^2} = \frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2} > 0, \ \forall\, x \in (a,\infty).$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = 0$, iar funcţia f este strict crescătoare, deducem că $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (a,\infty)$, adică inegalitatea (7).

15. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + \lambda = 0$$

după valorile parametrului real λ, folosind şirul lui Rolle.

Rezolvare. Avem:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2-3x-4).$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 0, \ x_2 = -1, \ x_3 = 4$. Şirul lui Rolle este:

$$\begin{array}{ccccc} f(-\infty) & f(-1) & f(0) & f(4) & f(\infty) \\ + & \lambda-3 & \lambda & \lambda-128 & + \end{array}$$

Dacă $\lambda \in (-\infty, 0)$ şirul lui Rolle este: $+ \ - \ - \ - \ +$. Atunci ecuaţia admite două rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (4, \infty)$ şi două rădăcini complexe x_3, $x_4 \in C$.

Dacă $\lambda = 0$ şirul lui Rolle este: $+ \ - \ 0 \ - \ +$. Atunci ecuaţia admite patru rădăcini reale $x_1 = 2 - 2\sqrt{3} \in (-\infty, -1)$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2 + 2\sqrt{3} \in (4, \infty)$.

Dacă $\lambda \in (0, 3)$ şirul lui Rolle este: $+ \ - \ + \ - \ +$. Atunci ecuaţia admite patru rădăcini reale distincte $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 0)$, $x_3 \in (0, 4)$, $x_4 \in (4, \infty)$.

Dacă $\lambda = 3$ şirul lui Rolle este: $+ \ 0 \ + \ - \ +$. Atunci ecuaţia admite patru rădăcini reale $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 3 - \sqrt{6} \in (0, 4)$, $x_4 = 3 + \sqrt{6} \in (4, \infty)$.

Dacă $\lambda \in (3, 128)$ şirul lui Rolle este: $+ \ + \ + \ - \ +$. Atunci ecuaţia are două rădăcini reale $x_1 \in (0, 4)$, $x_2 \in (4, \infty)$ şi două rădăcini complexe x_3, $x_4 \in C$.

Dacă $\lambda = 128$ şirul lui Rolle este: $+ \ + \ + \ 0 \ +$. Atunci ecuaţia are două rădăcini reale $x_1 = x_2 = 4$ şi două rădăcini complexe x_3, $x_4 \in C$.

Dacă $\lambda \in (128, \infty)$ şirul lui Rolle este: $+ \ + \ + \ + \ +$. Atunci ecuaţia nu are nici o rădăcină reală, x_1, x_2, x_3, $x_4 \in C$.

16. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui l'Hôspital (Teorema 8) pentru funcţiile:

a) $f(x) = x + \sin x \cdot \cos x$, $g(x) = e^{\sin x}(x + \sin x \cdot \cos x)$ şi punctul limită ∞.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$ $g(x) = \sin x$ şi punctul $x_0 = 0$.

Rezolvare. a) f, $g : I\!R \to I\!R$ sunt funcţii continue şi derivabile pe $I\!R$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ($|\sin x \cos x| \leq 1$) şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ($0 < e^{\sin x} \leq e$, $|\sin x \cos x| \leq 1$). Să verificăm acum condiţia $g'(x) \neq 0$ într-o vecinătate a lui ∞, deci pentru $x \in [A, \infty)$, $A \in I\!R$, A suficient de mare. Avem $g'(x) = \cos x \, e^{\sin x}(x + \sin x \cos x) + e^{\sin x}(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = e^{\sin x}(x \cos x + \sin x \cos^2 x + 2\cos^2 x) = e^{\sin x} \cos x \, (x + \sin x \cos x + 2 \cos x)$. Pentru A mare, $A > 0$ $\exists A' > 0$ a.î. $x + \sin x \cos x + 2 \cos x \geq A'$, $\forall x \in [A, \infty)$. Deci $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$, adică $\exists$ valori ale lui x oricât de mari care să anuleze pe g'. Deducem astfel că această condiţie $g' \neq 0$ într-o vecinătate a lui ∞ nu este îndeplinită, deci nu putem aplica regula lui l'Hôspital, deşi:

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \sin^2 x + \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x \, (x + \sin x \cos x + 2 \cos x)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x}(x + \sin x \cos x + 2 \cos x)} = 0.$$

Din calcul direct se poate vedea că:
$\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x\cos x}{e^{\sin x}(x+\sin x\cos x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{\sin x}}$.

b) Să considerăm funcţiile $f,\ g:(-a,a)\to I\!R,\ \ 0<a<\pi/2$. Evident f şi g sunt continue şi derivabile pe $(-a,a)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, iar $g'(x)=\cos x\neq 0,\ \ \forall x\in$ $\in(-a,a)$. Să studiem existenţa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right),$$

care nu există. Deci nu putem aplica teorema lui l'Hôspital. Din calcul direct deducem că:

$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Facem observaţia că în acest caz b) putem aplica Teorema 7 a lui Cauchy (prima regulă a lui l'Hôspital). Într-adevăr $f(0)=g(0)=0,\ \ f$ şi g sunt derivabile în 0 (pentru funcţia f vezi Problema 2), iar $g'(0)=1\neq 0$. Rezultă, conform Teoremei 7 că:

$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

17. Să se calculeze, folosind regula lui l'Hôspital, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$;

g) $\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$, unde $a=0$ sau 1; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\arcsin x)}{a^{x^2}-b^{x^2}}$.

Rezolvare. a) Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{3x^2} \overset{l'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2\cos x + 4x\sin x + x^2\cos x}{6x} \overset{l'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x + 6\sin x + 6x\cos x - x^2\sin x}{6} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\pi-2\operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2.$

$$\text{c) } \lim_{x\to\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}} \overset{l'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{\sin^2\frac{1}{x}}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin^2\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x+xe^x-1}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x}=$
$\displaystyle=-\frac{1}{2}.$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{\ln x}}\overset{l'H}{=}$
$\displaystyle=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi/2-\operatorname{arctg}x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{1}{\pi/2-\operatorname{arctg}x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\pi/2-\operatorname{arctg}x}}\overset{l'H}{=}$
$\displaystyle=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}=e^{-1}.$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}{3\sin^2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3x}{3\cos^3x\sin^2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3x}{\sin^2x}\overset{l'H}{=}$
$\displaystyle=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2x\cdot\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$

g) Avem: $\displaystyle\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}=$
$\displaystyle=\lim_{x\to a}\left[\left[(1+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1}}\right]^{\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1)}\right]=$
$\displaystyle=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x(1-x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}(1-x-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{1-2x}}=e.$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\arcsin x)}{a^{x^2}-b^{x^2}}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x\arcsin x}\cdot\left(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{2x\ln a\cdot a^{x^2}-2x\ln b\cdot b^{x^2}}=$
$\displaystyle=\frac{1}{2\ln\frac{a}{b}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{\ln\frac{a}{b}},\ (a,b>0,\ a\neq b).$

18. Să se calculeze derivatele şi diferenţialele de ordinul n ($n\geq 1$) pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=e^x,\ x\in I\!R$; b) $f(x)=\sin x,\ x\in I\!R$; c) $f(x)=\cos x,\ x\in I\!R$;
d) $\vec{f}(x)=\left(\frac{1}{x},\ln x\right),\ x\in(0,\infty)$; e) $\vec{f}(x)=\left(\frac{1}{x^2-3x+2},\ln(x-2),x^m\right)$, $m\in I\!N^*$, $x\in(2,\infty)$.

Rezolvare. a) Avem $f^{(n)}(x)=e^x,\ \forall x\in I\!R,\ \forall n\in I\!N$. Demonstrăm acest lucru prin inducţie matematică. Pentru $n=1$, $f'(x)=e^x$. Presupunem propoziţia $P(n)$: $f^{(n)}(x)=e^x$ adevărată şi o demonstrăm pe $P(n+1)$. Din $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)=$ $=(e^x)'=e^x$, rezultă că şi $P(n+1)$ este adevărată.

Diferenţiala de ordinul n a funcţiei f într-un punct $x\in I\!R$ este:

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n,\ \text{deci}\ d^nf(x)=e^x\,dx^n.$$

b) Derivata de ordinul n a funcţiei f este:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N.$$

Formula o demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$, $f'(x) = \cos x = = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem că $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ este adevărată şi demonstrăm formula pentru $(n+1)$. Avem: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

Diferenţiala funcţiei f este:

$$d^n f(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\, dx^n, \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

c) Se demonstrează prin inducţie matematică că:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N,$$

iar $d^n f(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\, dx^n, \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N^*$.

d) Avem $\vec{f}^{(n)}(x) = \left(f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x)\right)$, unde $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \ln x$.

Se demonstrează prin inducţie matematică că:

$$f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \ \ f_2^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}, \ \ \forall\, x \in (0,\infty), \ \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

Deci:

$$\vec{f}^{(n)}(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}\right), \ \ \forall\, x \in (0,\infty), \ \ \forall\, n \in I\!N^* \quad \text{şi}$$

$$d^n \vec{f}(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\, dx^n, \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}\, dx^n\right), \ \ \forall\, x \in (0,\infty), \ \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

e) Avem $\vec{f}^{(n)}(x) = (f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), f_3^{(n)}(x))$, unde $f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $f_2(x) = = \ln(x-2)$, $f_3(x) = x^m$.

Descompunem pe f_1 în fracţii simple:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \ \ \forall\, x \in (2,\infty),$$

de unde rezultă că:

$$f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \ \ \forall\, n \in I\!N, \ \ \forall\, x \in (2,\infty).$$

Pentru f_2 şi f_3 avem:

$$f_2^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x-2)^n}, \ \ \forall\, n \in I\!N^*, \ \ \forall\, x \in (2,\infty),$$

$$f_3^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)\, x^{m-n}, & \text{dacă } m \geq n; \\ 0, & \text{dacă } m < n. \end{cases}$$

Deci pentru $n \leq m$:

$$\vec{f}^{(n)}(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-2)^n}, m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\right),$$

iar $d^n \vec{f}(x) = \vec{f}^{(n)}(x)\, dx^n, \ \ \forall\, x \in (2,\infty)$.

Pentru $n > m$:

$$\vec{f}^{(n)}(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-2)^n}, 0\right),$$

iar $d^n\vec{f}(x) = \vec{f}^{(n)}(x)\,dx^n, \ \forall\, x \in (2,\infty)$.

19. Să se demonstreze, folosind metoda inducţiei matematice, formula lui Leibniz-Newton:

$$(f\cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots C_n^{n-1}f'g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)}, \ \ n \in I\!N^*$$

şi apoi să se aplice pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = e^x \sin x, \ \ x \in I\!R$; b) $f(x) = x^m \ln x, \ \ x \in I\!R_+^*, \ \ m \in I\!N$;

c) $f(x) = \sin ax \cdot \sin bx, \ \ x \in I\!R$; $a, b \in I\!R^*$; d) $f(x) = x^3 e^{-2x}, \ x \in I\!R$ pt. $n = 5$.

Să se scrie şi diferenţialele de ordinul n ale acestor funcţii.

Rezolvare. Pentru $n = 1$ formula este adevărată: $(f\cdot g)' = f'g + fg' = C_1^0 f'g + C_1^1 fg'$. Să presupunem formula adevărată pentru n şi s-o demonstrăm pentru $(n+1)$:

$$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left((f\cdot g)^{(n)}\right)' = \left(C_n^0 f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^{n-1}f'g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)}\right)' =$$
$$= C_n^0\left(f^{(n+1)}g + f^{(n)}g'\right) + C_n^1\left(f^{(n)}g' + f^{(n-1)}g''\right) + \cdots + C_n^{n-1}\left(f''g^{(n-1)} + f'g^{(n)}\right) +$$
$$+ C_n^n\left(f'g^{(n)} + fg^{(n+1)}\right) = C_n^0 f^{(n+1)}g + (C_n^0 + C_n^1)f^{(n)}g' + (C_n^1 + C_n^2)f^{(n-1)}g'' + \cdots +$$
$$+(C_n^{n-1} + C_n^n)f'g^{(n)} + C_n^n fg^{(n+1)} = C_{n+1}^0 f^{(n+1)}g + C_{n+1}^1 f^{(n)}g' + C_{n+1}^2 f^{(n-1)}g'' + \cdots +$$
$$+ C_{n+1}^n f'g^{(n)} + C_{n+1}^{n+1} fg^{(n+1)}.$$

Deci formula este adevărată şi pentru $(n+1)$. Conform principiului inducţiei matematice rezultă că formula lui Leibniz-Newton este adevărată pentru $\forall\, n \in I\!N^*$.

a) Din Problema 18 a)-b) avem: $(e^x)^{(n)} = e^x$, iar $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right), \ \forall\, x \in I\!R, \forall\, n \in I\!N$. Deci: $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)}(\sin x)^{(k)} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right), \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N^* \quad \text{şi}$$

$$d^n f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right)\right) dx^n, \ \ \forall\, x \in I\!R, \ \ \forall\, n \in I\!N^*.$$

b) Conform Problemei 18 d)-e) obţinem: $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (x^m)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)} =$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{m!}{(m-n+k)!}x^{m-n+k}\cdot\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}, & \text{dacă } n \le m; \\ \displaystyle\sum_{k=n-m}^{n} C_n^k \frac{m!}{(m-n+k)!}x^{m-n+k}\cdot\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}, & \text{dacă } n > m. \end{cases}$$

Deci:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{C_n^k m!(k-1)!}{(m-n+k)!}x^{m-n}, & \text{dacă } n \le m; \\ \sum\limits_{k=n-m}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{C_n^k m!(k-1)!}{(m-n+k)!}x^{m-n}, & \text{dacă } n > m, \end{cases}$$

iar $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall\, n \in I\!N^*$, $\forall\, x \in (0, \infty)$.

c) Avem: $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (\sin ax)^{(n-k)}(\sin bx)^{(k)} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \sin\left(ax + \frac{(n-k)\pi}{2}\right)\sin\left(bx + \frac{k\pi}{2}\right),\ \forall\, x \in I\!R,\ n \in I\!N^*,$$

iar $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall\, x \in I\!R$, $\forall\, n \in I\!N^*$.

d) $f^{(5)}(x) = C_5^2\, 6 \cdot (-2)^2 e^{-2x} + C_5^3\, 6x \cdot (-2)^3 e^{-2x} + C_5^4\, 3x^2 \cdot (-2)^4 e^{-2x} +$ $+ C_5^5\, x^3 \cdot (-2)^5 e^{-2x} = (240 - 480x + 240x^2 - 32x^3)e^{-2x}$, $\forall\, x \in I\!R$,

iar $d^5 f(x) = (240 - 480x + 240x^2 - 32x^3)e^{-2x}\,dx^5$, $\forall\, x \in I\!R$.

20. Să se verifice că dacă $f(x) = (ax+b)^m \cdot (cx+d)^{n-m-1}$ atunci:

$f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(ad-bc)^n(ax+b)^{m-n}(cx+d)^{-m-1}$.

Rezolvare. Demonstrăm relaţia din enunţ prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ avem $f(x) = (ax+b)^m(cx+d)^{-m}$ şi:

$$f'(x) = ma(ax+b)^{m-1}(cx+d)^{-m} + (-m)c(ax+b)^m(cx+d)^{-m-1} =$$
$$= (ax+b)^{m-1}(cx+d)^{-m-1}m[a(cx+d) - c(ax+b)] = m(ad-bc)(ax+b)^{m-1}(cx+d)^{-m-1}.$$

Presupunem adevărată relaţia pentru $n-1$, adică:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right] = m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}\times$$
$$\times (ax+b)^{m-n+1}(cx+d)^{-m-1}$$

şi o vom demonstra pentru n (relaţia din enunţ). Avem:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-1}\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left\{(cx+d)\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right]\right\} \overset{Prob.19}{=}$$
$$= cn\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right] + (cx+d)\frac{d^n}{dx^n}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right] =$$
$$= cn\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right] + (cx+d)\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(ax+b)^m(cx+d)^{n-m-2}\right]\right\} =$$
$$= cnm(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n+1}(cx+d)^{-m-1} + (cx+d)\frac{d}{dx}[m(m-1)\times$$
$$\times\cdots(m-n+2)\cdot(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n+1}(cx+d)^{-m-1}] = cnm(m-1)\cdots(m-n+2)\times$$
$$\times(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n+1}\cdot(cx+d)^{-m-1} + (cx+d)m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}\times$$
$$\times[a(m-n+1)(ax+b)^{m-n}(cx+d)^{-m-1} - (m+1)c(ax+b)^{m-n+1}(cx+d)^{-m-2}] =$$
$$= m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n}\cdot(cx+d)^{-m-1}[cn(ax+b) + a(cx+d)\times$$
$$\times(m-n+1) - (m+1)c(ax+b)] = m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n}(cx+$$

$+d)^{-m-1}[acnx+bcn+acmx+adm-acnx-adn+acx+ad-macx-acx-mbc-bc]=$
$=m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n}(cx+d)^{-m-1}[bcn+adm-adn+ad-$
$-mbc-bc]=m(m-1)\cdots(m-n+2)(ad-bc)^{n-1}(ax+b)^{m-n}(cx+d)^{-m-1}(ad-bc)\times$
$\times(m-n+1)=m(m-1)\cdots(m-n+2)(m-n+1)(ad-bc)^{n}(ax+b)^{m-n}\times$
$\times(cx+d)^{-m-1}$.

21. Să se scrie formula lui Mac-Laurin cu restul lui Lagrange pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=\sin x,\ \ x\in I\!R$; b) $f(x)=\cos x,\ \ x\in I\!R$; c) $f(x)=e^{x},\ \ x\in I\!R$;

d) $f(x)=\ln(1+x),\ \ x\in(-1,\infty)$; e) $f(x)=(1+x)^{\alpha},\ \ x\in(-1,\infty),\ \ \alpha\in I\!R$.

Rezolvare. a) Deoarece $f^{(2m)}(x)=(-1)^{m}\sin x$ şi $f^{(2m+1)}(x)=(-1)^{m}\cos x$ rezultă că $f^{(2m)}(0)=0$ şi $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^{m},\ \ \forall\, m\in I\!N$. Deci pentru $\forall\, x\in I\!R$:

$$\sin x=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^{p}\frac{x^{2p}}{(2p)!}\sin(\theta_{2p-1}x),\ \ \text{pentru}\ \ n=2p-1,\ \ \theta_{2p-1}\in(0,1)$$

şi $$\sin x=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^{p}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\cos(\theta_{2p}x),\ \ \text{pentru}\ \ n=2p,\ \ \theta_{2p}\in(0,1).$$

b) Deoarece $f^{(2m)}(x)=(-1)^{m}\cos x$ şi $f^{(2m+1)}(x)=(-1)^{m+1}\sin x$ rezultă că $f^{(2m)}(0)=(-1)^{m}$ şi $f^{(2m+1)}(0)=0,\ \ \forall\, m\in I\!N$. Deci pentru $\forall\, x\in I\!R$:

$$\cos x=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{p+1}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\sin(\theta_{2p}x),\ \ \text{pentru}\ \ n=2p,\ \ \theta_{2p}\in(0,1)\quad \text{şi}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{p}\frac{x^{2p}}{(2p)!}\cos(\theta_{2p-1}x),\ \ \text{pentru}\ \ n=2p-1,\ \ \theta_{2p-1}\in(0,1).$$

c) Deoarece $(e^{x})^{(m)}=e^{x}$, rezultă că $f^{(m)}(0)=1,\ \ \forall\, m\in I\!N$ şi deci pentru $\forall\, x\in I\!R$ avem:

$$e^{x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_n x},\ \ \theta_n\in(0,1).$$

d) Din $f^{(m)}(x)=(-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(1+x)^{m}},\ \ \forall\, m\in I\!N^{*}$ şi $f^{(m)}(0)=(-1)^{m-1}(m-1)!$ pentru $m\in I\!N^{*}$ şi $f^{(0)}(0)=0$ rezultă că pentru $\forall\, x\in(-1,\infty)$:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^{k}+(-1)^{n}\frac{n!}{(n+1)!}x^{n+1}\frac{1}{(1+\theta_n x)^{n+1}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k}+(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\theta_n x)^{n+1}},\ \ \theta_n\in(0,1).$$

e) Deoarece $f^{(m)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m},\ \ m\in I\!N^{*}$, iar $f^{(m)}(0)=$ $=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1),\ \ m\in I\!N^{*}$ şi $f(0)=1$ rezultă că pentru $\forall\, x\in(-1,\infty)$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\frac{x^{k}}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\cdot$$
$$\cdot(1+\theta_n x)^{\alpha-n-1},\ \ \theta_n\in(0,1).$$

22. Să se dezvolte funcţia $f(x) = e^x, \ \ x \in I\!\!R$ după puterile binomului $(x-1)$.

Rezolvare. Folosim formula lui Taylor pentru $x_0 = 1$. Deoarece $f^{(k)}(x) = e^x$ şi $f^{(k)}(1) = e, \ \ \forall\, k \in I\!\!N$ rezultă că pentru $\forall\, x \in I\!\!R$:

$$e^x = e\left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}\right] + \frac{e^{\xi_n}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

unde $\xi_n = 1 + \theta_n(x-1), \ \ \theta_n \in (0,1)$.

23. Să se dezvolte polinomul $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ după puterile lui $(x-2)$.

Rezolvare. Avem:

$$P(x) = P(2) + \frac{x-2}{1!}P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}P'''(2) =$$

$$= 1 + \frac{x-2}{1!}(-1) + \frac{(x-2)^2}{2!}2 + \frac{(x-2)^3}{3!}6 = (x-2)^3 + (x-2)^2 - (x-2) + 1.$$

24. Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea:

$$e^{-1} \simeq 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.$$

Rezolvare. Deoarece:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}e^{\theta x}, \ \ \theta \in (0,1)$$

rezultă că:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}e^{-\theta}.$$

Deci eroarea comisă prin aproximarea lui e^{-1} cu $\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) =$ $= 0,3666$ este $\varepsilon = \frac{e^{-\theta}}{6!}$. Deoarece $\theta \in (0,1)$ rezultă că $\varepsilon < \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. Deci eroarea este mai mică decât $0,0014$.

25. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{83}$ şi să se evalueze eroarea comisă.

Rezolvare. Avem $83 = 81 + 2 = 3^4 + 2$. Considerăm funcţia $f(x) = x^{1/4}$ pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor de ordinul doi $(n = 2)$ în punctul $x_0 = 3^4$:

$$f(x) = 3 + \frac{x-3^4}{1!}\cdot\frac{1}{4\cdot 27} - \frac{(x-3^4)^2}{2!}\cdot\frac{1}{16\cdot 3^6} + \frac{(x-3^4)^3}{3!}\cdot\frac{21}{64}\left[3^4 + \theta(x-3^4)\right]^{-11/4}, \ \ \theta \in$$
$\in (0,1)$.

Pentru $x = 83$ obţinem:

$$\sqrt[4]{83} = 3 + \frac{2}{4\cdot 27} - \frac{4}{2!\cdot 16\cdot 3^6} + \frac{8\cdot 21}{3!\cdot 64}(2\theta + 3^4)^{-11/4} =$$

$$= 3 + \frac{1}{54} - \frac{1}{3^6\cdot 2^3} + \frac{7}{16}(2\theta + 3^4)^{-11/4}, \ \ \theta \in (0,1).$$

Rezultă că $\sqrt[4]{83} \simeq 3 + \frac{1}{54} - \frac{1}{5832} \simeq 3,01835$ şi eroarea comisă este $\varepsilon = \frac{7}{16}(2\theta +$ $+3^4)^{-11/4}$. Deoarece $\theta \in (0,1)$ rezultă că $\varepsilon < \frac{7}{16}\cdot 3^{-11} < 2,47\cdot 10^{-6}$.

26. Să se calculeze $\sqrt[5]{40}$ cu cinci zecimale exacte.

Rezolvare. Considerăm funcţia $f(x) = x^{1/5}$ şi aplicăm formula lui Taylor pentru această funcţie în punctul $x_0 = 2^5 = 32$. Avem:

$$f(x) = f(2^5) + \frac{x-2^5}{1!}f'(2^5) + \cdots + \frac{(x-2^5)^n}{n!}f^{(n)}(2^5) + \frac{(x-2^5)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_n),$$
$$\xi_n = 2^5 + \theta \cdot (x - 2^5),\ \ \theta \in (0,1).$$

Calculăm derivatele funcţiei f. Obţinem: $f'(x) = \dfrac{1}{5}x^{-4/5}$, $f''(x) = -\dfrac{4}{5^2}x^{-9/5}$,

$f'''(x) = \dfrac{4\cdot 9}{5^3}x^{-14/5}, \cdots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{4\cdot 9\cdots(5n-6)}{5^n}x^{-(5n-1)/5}.$

Pentru a avea o eroare mai mică decât 10^{-5} trebuie să impunem condiţia $|R_n(40)| < < 10^{-5}$. Dar:

$$|R_n(40)| = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}}\cdot \xi_n^{-\frac{5n+4}{5}} < \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}}\cdot 2^{-5n-4} =$$
$$= \left(\frac{8}{5}\right)^{n+1}\cdot\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{(n+1)!\,2^{5n+4}}.$$

Punând condiţia:

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{n+1}\cdot\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{(n+1)!\,2^{5n+4}} < 10^{-5}$$

obţinem $n \geq 5$. Deci pentru $n = 5$ avem:

$$\sqrt[5]{40} \simeq T_5(40) = 2 + \frac{8}{1!}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2^{-4} - \frac{8^2}{2!}\cdot\frac{4}{5^2}\cdot 2^{-9} + \frac{8^3}{3!}\cdot\frac{4\cdot 9}{5^3}\cdot 2^{-14} -$$
$$-\frac{8^4}{4!}\cdot\frac{4\cdot 9\cdot 14}{5^4}\cdot 2^{-19} + \frac{8^5}{5!}\cdot\frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5^5}\cdot 2^{-24} = 2,09128$$

cu o eroare mai mică decât $9,975\cdot 10^{-6}$.

27. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{3\sin 2x - 2\sin 3x}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Rezolvare. a) Folosind formula lui Mac-Laurin obţinem:

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x}{1!}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Bigg|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\right)\Bigg|_{x=0} + R_2(x) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + R_2(x),\ \ \text{unde}\ \ \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Atunci: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+R_2(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{R_2(x)}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Folosind formula lui Taylor cu $x_0 = a$, avem:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\cos a + R_1(x), \quad \text{unde } \lim_{x\to a}\frac{R_1(x)}{x-a} = 0.$$

Deci:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cos a + R_1(x)}{x-a} = \cos a + \lim_{x\to a}\frac{R_1(x)}{x-a} = \cos a.$$

c) Avem: $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + R_2(x)$, unde $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2} = 0$ şi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) \quad \text{cu } \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = 0.$$

Atunci:

$$\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} + xR_2(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{6}R_2(x) + R_3(x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + xR_2(x) - \frac{x^3}{6}R_2(x) + R_3(x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)\right)}{x^3}.$$

Deci: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \dfrac{1}{3} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2} - \dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\dfrac{R_2(x)}{x^2} +$

$$+ \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)\right) = \frac{1}{3}.$$

d) Avem: $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + R_3(x)$ cu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_3(x)}{x^3} = 0$, iar

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \widetilde{R}_3(x) \quad \text{cu } \lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{R}_3(x)}{x^3} = 0.$$

Atunci:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} + R_3(x) - x - \frac{x^3}{6} - \widetilde{R}_3(x)}{x^3} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} -$$

$$- \lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{R}_3(x)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

e) Notăm $\dfrac{1}{x} = y$; atunci:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0+}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right].$$

Din: $\ln(1+y) = y - \dfrac{y^2}{2} + R_2(y)$, cu $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R_2(y)}{y^2} = 0$, obţinem:

$$\lim_{y\to 0+}\left[\frac{1}{y} - \frac{y - \frac{y^2}{2} + R_2(y)}{y^2}\right] = \lim_{y\to 0+}\left(\frac{1}{2} - \frac{R_2(y)}{y^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

f) Avem: $\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \dfrac{2x^3}{3!} + R_3(x)$ cu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_3(x)}{x^3} = 0$,

de unde rezultă că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

g) Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3\sin 2x-2\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{3!}-R_3(x)}{3\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\bar{R}_3(x)\right)-2\left(3x-\frac{27x^3}{3!}+\bar{\bar{R}}_3(x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{R_3(x)}{x^3}}{-4+3\frac{\bar{R}_3(x)}{x^3}+9-2\frac{\bar{\bar{R}}_3(x)}{x^3}}=\frac{1}{30}\,.$$

h) Notăm $x-1=y$, de unde rezultă $x=y+1$. Atunci:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y+1}{y}-\frac{1}{\ln(1+y)}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1)\ln(1+y)-y}{y\ln(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1)\left(y-\frac{y^2}{2}+R_2(y)\right)-y}{y\left(y-\frac{y^2}{2}+R_2(y)\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2+y-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}+yR_2(y)+R_2(y)-y}{y^2-\frac{y^3}{2}+yR_2(y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}+(1+y)R_2(y)}{y^2-\frac{y^3}{2}+yR_2(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{y}{2}+(1+y)\frac{R_2(y)}{y^2}}{1-\frac{y}{2}+y\frac{R_2(y)}{y^2}}=\frac{1}{2}\,,$$

deoarece $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R_2(y)}{y^2}=0$.

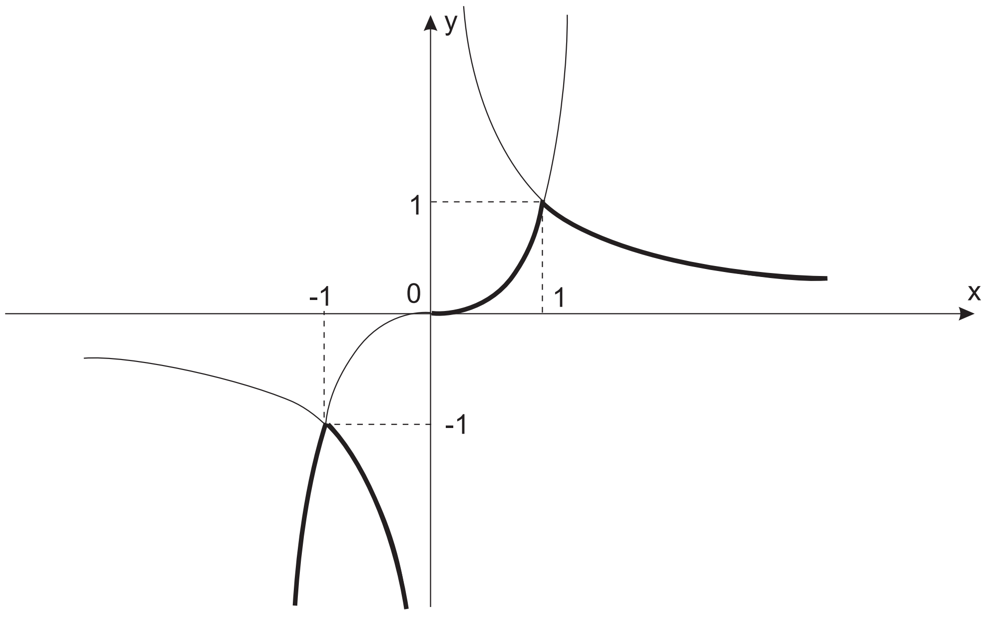

Figura 5.1

28. Să se determine extremele locale ale funcţiei $f:I\!R\to I\!R$,

$$f(x)=\begin{cases}\min\left\{x^3,\ \dfrac{1}{x}\right\}, & \text{dacă } x\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Rezolvare. Utilizând graficele funcţiilor $f_1(x)=x^3$ şi $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ trasate în raport cu acelaşi sistem de axe (vezi Figura 5.1), găsim:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]; \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup [1, \infty); \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Se observă că $x = -1$ este un punct de continuitate, iar f este crescătoare pe $(-\infty, -1)$ şi descrescătoare pe $(-1, 0)$. De aceea $x = -1$ este punct de maxim local şi $\max\limits_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = f(-1) = -1$. Analog $x = 1$ este un punct de maxim local şi $\max\limits_{x \in (0, \infty)} f(x) = f(1) = 1$.

29. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcţii:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = 2\sin x + x^2$; b) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = a\cos x + b\sin x$, $a^2 + b^2 \neq 0$; c) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{dacă } x \leq 0; \\ x^n + e^{-1/x}, & \text{dacă } x > 0,\ n \in I\!N^*; \end{cases}$

d) $f : (0, \infty) \to I\!R,\ f(x) = (x - 1)\ln x - x$.

Rezolvare. a) Derivata funcţiei f este $f'(x) = 2(\cos x + x)$. Rădăcina ecuaţiei $f'(x) = 0$ este $x_0 \in (-\pi/2, 0)$, după cum se vede şi din graficele funcţiilor $h_1(x) = \cos x$ şi $h_2(x) = -x$ (vezi Figura 5.2).

Deoarece $f''(x_0) = 2(-\sin x_0 + 1) > 0$ rezultă că x_0 este un punct de minim (global) pentru funcţia f.

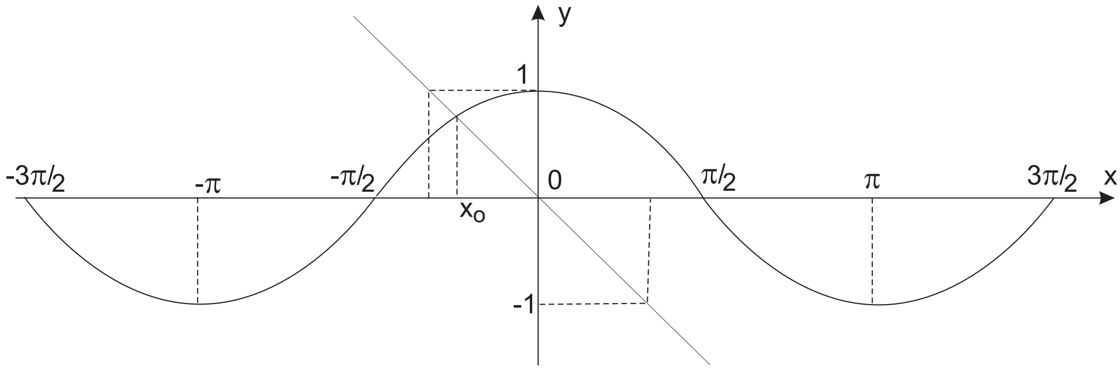

Figura 5.2

b) Avem:

$$f'(x) = -a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Observăm că $\exists\, \varphi \in [0, 2\pi)$ unic astfel încât $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ şi $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Atunci: $f'(x) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x + \varphi)$. Rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ sunt $x_{1k} = -\varphi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ şi $x_{2k} = -\varphi + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in Z$. Deoarece $f''(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$ avem: $f''(x_{1k}) = -\sqrt{a^2 + b^2}\sin(-\pi/2 + 2k\pi) =$

$= \sqrt{a^2+b^2} > 0$ şi $f''(x_{2k}) = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\pi/2+2k\pi) = -\sqrt{a^2+b^2} < 0$, de unde rezultă că punctele $x_{1k} = -\varphi-\pi/2+2k\pi,\ \ k\in Z$ sunt puncte de minim pentru funcţia f, iar $x_{2k} = -\varphi+\pi/2+2k\pi,\ \ k\in Z$ sunt puncte de maxim pentru funcţia f.

c) Funcţia f posedă derivate de orice ordin, în orice punct $x \neq 0$. În plus:

$$0 = f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \cdots,\ f^{(n)}(0) = n!.$$

Dacă n este par, punctul $x=0$ este punct de minim (global), iar dacă n este impar atunci $x=0$ nu este punct de extrem (este punct de inflexiune).

d) Derivata funcţiei f este $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x} - 1 = \ln x - \dfrac{1}{x}$. Rădăcina ecuaţiei $f'(x)=0$ este $x_0 \in (1,e)$, după cum se vede din reprezentarea grafică a funcţiilor $h_1(x) = \ln x$ şi $h_2(x) = \dfrac{1}{x}$ (vezi Figura 5.3).

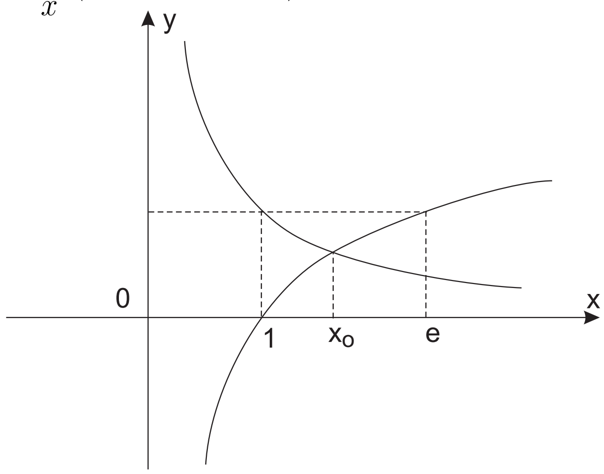

Figura 5.3

Deoarece $f''(x_0) = \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_0^2} > 0$ rezultă că punctul x_0 este un punct de minim (global) pentru funcţia f.

30. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = \sin^4 x\cdot\cos^3 x;\ \ x\in I\!R;$ b) $f(x) = \dfrac{a^2}{\sin^2 x} + \dfrac{b^2}{\cos^2 x};\ \ a,\, b>0;\ x \neq \dfrac{k\pi}{2};$

c) $f(x) = e^{x^2 e^{-x^2}};\ \ x\in I\!R;$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x},\ \ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

Rezolvare. a) Derivata funcţiei f este:

$$f'(x) = 4\sin^3 x\cos^4 x - 3\sin^5 x\cos^2 x = \sin^3 x\cos^2 x\,(4\cos^2 x - 3\sin^2 x).$$

Ecuaţia $f'(x)=0$ ne dă: $\sin x = 0 \Rightarrow x_k^1 = k\pi,\ k\in Z;$ $\cos x = 0 \Rightarrow x_k^2 = \pi/2 + k\pi,$ $k\in Z;$ $4\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2 x = 4$ ($\cos x \neq 0$; pentru $\cos x = 0$ obţinem soluţiile x_k^2) $\Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_k^3 = \pm\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}} + k\pi,\ k\in Z.$

Pentru a verifica dacă punctele staţionare obţinute mai sus sunt puncte de extrem sau nu, calculăm derivatele de ordin superior. Avem:

$$f''(x) = 12\sin^2 x\cos^5 x - 16\sin^4 x\cos^3 x - 15\sin^4 x\cos^3 x + 6\sin^6 x\cos x =$$
$$= \sin^2 x\cos x\,(12\cos^4 x - 31\sin^2 x\cos^2 x + 6\sin^4 x).$$

Deoarece $f''(x_k^3) = -\dfrac{224}{9}\cos^7 x_k^3 \neq 0$ deducem că punctele x_k^3 sunt puncte de extrem pentru funcţia f şi anume cele pentru care $\cos x_k^3 > 0:\ \ x_{2k}^3 = \pm\text{arctg}\,\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 2k\pi,\ k \in Z$, adică $f''(x_k^3) < 0$, sunt puncte de maxim, iar cele pentru care $\cos x_k^3 < 0:\ \ x_{2k+1}^3 = \pm\text{arctg}\,\dfrac{2}{\sqrt{3}} + (2k+1)\pi,\ k \in Z$, adică $f''(x_k^3) > 0$ sunt puncte de minim.

Pentru x_k^1 şi x_k^2 avem $f''(x_k^1) = f''(x_k^2) = 0$. Calculăm derivatele următoare:
$f'''(x) = 24\sin x\cos^6 x - 60\sin^3 x\cos^4 x - 124\sin^3 x\cos^4 x + 93\sin^5 x\cos^2 x + 36\sin^5 x\cos^2 x - 6\sin^7 x = 24\sin x\cos^6 x - 184\sin^3 x\cos^4 x + 129\sin^5 x\cos^2 x - 6\sin^7 x$.

Pentru x_k^1 avem $f'''(x_k^1) = 0$, iar pentru x_k^2, $f'''(x_k^2) = -6\sin^7 x_k^2 = \pm 6 \neq 0$. Deducem că punctele x_k^2 nu sunt puncte de extrem. Pentru a stabili natura punctelor x_k^1 trebuie să calculăm şi derivata a patra a funcţiei f:

$f^{(4)}x = 24\cos^7 x - 144\sin^2 x\cos^5 x - 552\sin^2 x\cos^5 x + 736\sin^4 x\cos^3 x + 645\sin^4 x\cos^3 x - 258\sin^6 x\cos x - 42\sin^6 x\cos x = 24\cos^7 x - 696\sin^2 x\cos^5 x + 1381\sin^4 x\cos^3 x - 300\sin^6 x \times \cos x$, iar $f^{(4)}(x_k^1) = 24\cos^7 x_k^1 = \pm 24 \neq 0$.

Rezultă că punctele x_k^1 sunt puncte de extrem şi anume $x_{2k}^1 = 2k\pi,\ k \in Z$ pentru care $f^{(4)} > 0$ sunt puncte de minim, iar $x_{2k+1}^1 = (2k+1)\pi,\ k \in Z$, pentru care $f^{(4)} < 0$ sunt puncte de maxim.

Valorile extreme ale lui f sunt:

$$f(x_k^1) = 0 \text{ şi } f(x_k^3) = \frac{16}{9}\cos^7 x_k^3 = \frac{16}{9}\left[(-1)^k\cos\left(\text{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]^7 = (-1)^k\frac{16}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^7.$$

b) Avem: $f'(x) = \dfrac{-2a^2\sin x\cos x}{\sin^4 x} + \dfrac{2b^2\cos x\sin x}{\cos^4 x} = \dfrac{-2a^2\cos x}{\sin^3 x} + \dfrac{2b^2\sin x}{\cos^3 x}$.

Ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2\cos^4 x - b^2\sin^4 x = 0,\ \cos x \neq 0,\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \text{tg}\,x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ are soluţiile $x_k = \pm\text{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}} + k\pi,\ k \in Z$. Derivata a doua a funcţiei f este:

$$f''(x) = -2a^2\frac{-\sin^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^6 x} + 2b^2\frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^6 x} =$$
$$= 2a^2\frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin^4 x} + 2b^2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Avem: $f''(x_k) = 2a^2\dfrac{\frac{a}{b}\cos^2 x_k + 3\cos^2 x_k}{\frac{a^2}{b^2}\cos^4 x_k} + 2b^2\dfrac{\cos^2 x_k + 3\frac{a}{b}\cos^2 x_k}{\cos^4 x_k} =$

$$= \left[2a^2\frac{(a+3b)b}{a^2} + 2b^2\frac{b+3a}{b}\right]\frac{1}{\cos^2 x_k} = 8b(a+b)\frac{1}{\cos^2 x_k} = 8b(a+b)\cdot\frac{a+b}{b} = 8(a+b)^2 > 0.$$

Rezultă că punctele x_k sunt puncte de minim pentru funcţia f, iar:

$$f(x_k) = b(a+b)\frac{1}{\cos^2 x_k} = (a+b)^2.$$

c) Avem:

$$f'(x) = \left(2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}\right)e^{x^2e^{-x^2}} = 2x(1-x^2)e^{-x^2}\cdot e^{x^2e^{-x^2}} = 2x(1-x^2)e^{x^2(e^{-x^2}-1)}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$. Derivata a doua a funcţiei f este:

$$f''(x) = (2-6x^2)e^{x^2(e^{-x^2}-1)} + 2x(1-x^2)(2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} - 2x)e^{x^2(e^{-x^2}-1)} =$$
$$= (2-6x^2-4x^2+4x^4)e^{x^2(e^{-x^2}-1)} + 4x^2(1-x^2)^2e^{-x^2}\cdot e^{x^2(e^{-x^2}-1)} = (2-10x^2+$$
$$+4x^4)e^{x^2(e^{-x^2}-1)} + 4x^2(1-x^2)^2e^{x^2(e^{-x^2}-2)}.$$

Avem $f''(0) = 2 > 0$, deci $x_1 = 0$ este punct de minim; $f''(1) = -4e^{e^{-1}-1} < 0$, deci x_2 este punct de maxim, iar $f''(-1) = -4e^{e^{-1}-1} < 0$, deci x_3 este şi el punct de maxim. Extremele funcţiei f sunt: $f(0) = 1,\ \ f(1) = f(-1) = e^{e^{-1}}$.

d) Avem:

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(1+\operatorname{tg} x) - \sin x\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{(\sin x+\cos x)\cos^2 x - \sin x}{(\sin x+\cos x)^2} = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$. Derivata a doua a funcţiei f este:

$$f''(x) = \frac{-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)^2 - 2(\cos x - \sin x)^2(1+\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3} =$$
$$= \frac{-3\sin x\cos x(1+2\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3} - \frac{2(1-2\sin x\cos x)(1+\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3} =$$
$$= \frac{-2-\sin x\cos x - 2\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^3}.$$

Avem $f''(x_k) = \dfrac{-2-\sin^2 x_k - 2\sin^4 x_k}{8\sin^3 x_k}$. Rezultă că $f''(x_k) < 0$ pentru $x_{2k} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$, deci x_{2k} sunt puncte de maxim şi $f''(x_k) > 0$ pentru $x_{2k+1} = \dfrac{\pi}{4} + (2k+1)\pi,\ k \in Z$, deci x_{2k+1} sunt puncte de minim. Extremele lui f sunt: $f(x_{2k}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, iar $f(x_{2k+1}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

31. Fie M şi m extremele locale ale funcţiei $x \to f(x) = ax^3 + px + q,\ \ x \in I\!R$, $ap < 0$. Să se arate că $M\,m = q^2 + \dfrac{4p^3}{27a}$.

Rezolvare. Rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + p = 0$ sunt $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{p}{3a}}$. Deoarece $f''(x) = 6ax$, rezultă că $f''(x_{1,2}) = \pm 6a\sqrt{-\dfrac{p}{3a}}$; deci $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{p}{3a}}$ este punct de maxim pentru funcţia f, iar $x_2 = \sqrt{-\dfrac{p}{3a}}$ este punct de minim pentru f.

Rezultă că $M = f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3a}}\right) = -\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3a}} + q$, iar $m = f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3a}}\right) =$

$= \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3a}} + q$. Atunci $m\,M = q^2 - \dfrac{4p^2}{9}\left(-\dfrac{p}{3a}\right) = q^2 + \dfrac{4p^3}{27a}$.

32. Se consideră funcţia $x \to f(x) = \dfrac{m-x}{x^2-3x+2}$, unde m este un parametru. Care este numărul extremelor lui f când m ia valori reale?

Rezolvare. Domeniul de definiţie al funcţiei f este $I\!R \setminus \{1, 2\}$. Derivata f' este:

$$f'(x) = \frac{-x^2+3x-2-(m-x)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{x^2-2mx+(3m-2)}{(x^2-3x+2)^2}.$$

Discriminantul trinomului $x^2 - 2mx + (3m-2)$ este $\Delta = 4(m-1)(m-2)$. Dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (1,2)$ atunci $f'(x) = 0$ nu are soluţii reale, deci f nu are extreme. Dacă $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ are două soluţii reale $x_{1,2} = m \pm \sqrt{(m-1)(m-2)}$. Deoarece la trecerea prin aceste puncte f' îşi schimbă semnul, rezultă că x_1 şi x_2 sunt puncte de extrem. Pentru $m = 1$ sau $m = 2$ funcţia $f(x) = -\dfrac{1}{x-2}$, respectiv $f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ nu are extreme.

33. Să se arate că:

a) Dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru cea mai mare arie o are pătratul.

b) Dintre toate dreptunghiurile cu aceeaşi arie cel mai mic perimetru îl are pătratul.

Rezolvare. a) Notăm cu P perimetrul dreptunghiurilor, iar cu x şi y laturile unui astfel de dreptunghi. Atunci $P = 2\,(x+y)$, iar aria $A = x \cdot y = x\left(\dfrac{P}{2} - x\right)$. Trinomul $x\left(\dfrac{P}{2} - x\right)$ îşi atinge maximul în $x_{max} = \dfrac{P}{4}$, iar $A_{max} = \dfrac{P^2}{16}$. Pentru $x_{max} = \dfrac{P}{4}$ rezultă $y_{max} = \dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{4} = \dfrac{P}{4}$, deci $x_{max} = y_{max}$, adică dreptunghiul cu aria maximă este pătratul.

b) Fie A aria dreptunghiurilor, iar x şi y laturile unui astfel de dreptunghi. Atunci $A = x \cdot y$, iar $P = 2\,(x+y) = 2\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$. Deoarece ecuaţia $P'(x) = 0$ are soluţia pozitivă $x = \sqrt{A}$, iar $P''(\sqrt{A}) = \dfrac{4}{\sqrt{A}} > 0$ rezultă că $x = \sqrt{A}$ este punct de minim pentru funcţia $P = P(x)$. Valoarea minimă pentru P este $P_{min} = 4\sqrt{A}$, iar $y_{min} = \sqrt{A} = x_{min}$. Rezultă că dreptunghiul cu perimetrul minim este pătratul.

34. Dintre toate conurile de generatoare dată g, să se determine conul de volum maxim.

Rezolvare. Volumul unui con de rază r şi generatoare g este $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, cu $h = \sqrt{g^2 - r^2}$, deci $V = \dfrac{\pi r^2\sqrt{g^2-r^2}}{3}$. Vom determina r astfel încât $V(r)$ să fie maxim. Avem:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3}\left[2r\sqrt{g^2-r^2} - r^2\frac{r}{\sqrt{g^2-r^2}}\right] = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{2r(g^2-r^2)-r^3}{\sqrt{g^2-r^2}} = \frac{2rg^2-3r^3}{\sqrt{g^2-r^2}}\cdot\frac{\pi}{3}.$$

Rezultă că $V'(r) = 0$ pentru $r_0 = \dfrac{g\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{g\sqrt{6}}{3}$. Pentru această valoare a lui r, $V''(r_0) < 0$. Deci volumul respectiv este maxim. Deci conul căutat de volum maxim are raza bazei $r_0 = \dfrac{g\sqrt{6}}{3}$ şi înăţimea $h_0 = \sqrt{g^2 - \dfrac{6g^2}{9}} = \dfrac{g\sqrt{3}}{3}$.

35. Să se circumscrie unei sfere un con având volumul minim.

Rezolvare. Fie R raza sferei date. Notăm cu r raza bazei conului circumscris sferei, iar cu h înălţimea acestui con. Din asemănarea $\triangle VOM$ cu $\triangle VO_1B$ (vezi Figura 5.4) obţinem:

$$\frac{R}{r} = \frac{h-R}{\sqrt{h^2+r^2}} \Rightarrow R\sqrt{h^2+r^2} = r(h-R)\ \ (h > 2R) \Rightarrow r^2[(h-R)^2 - R^2] = R^2h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{R^2h^2}{h^2-2hR}.$$

Calculând volumul conului în funcţie de h deducem:

$$Vol_{con} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi R^2 h^3}{3(h^2-2hR)}.$$

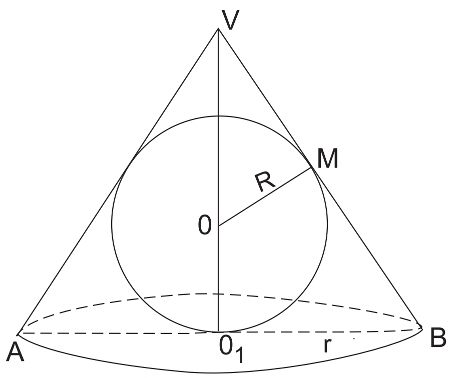

Figura 5.4

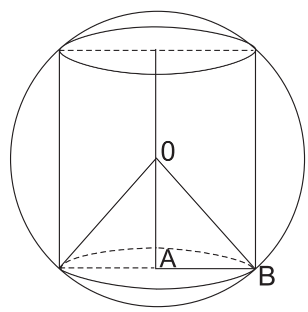

Figura 5.5

Vom determina în continuare pe h în funcţie de R astfel încât volumul conului circumscris sferei să fie minim. Pentru aceasta să considerăm funcţia $f:(2R,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2xR}$. Calculăm punctele sale staţionare:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-4xR)}{(x^2-2xR)^2} = 0 \Rightarrow x_0 = 4R.$$

Pentru $x_0 = 4R$, $f''(x_0) > 0$, deci acest punct reprezintă un punct de minim pentru funcţia f. Rezultă că pentru $h = 4R$ şi $r = R\sqrt{2}$ obţinem conul de volum minim circumscris sferei date. Volumul conului este:

$$Vol_{con} = \frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{64R^3}{16R^2-8R^2} = \frac{8\pi R^3}{3} = 2\,Vol_{sferei},$$

deci volumul minim al conului circumscris sferei este dublul volumului sferei.

36. Într-o sferă de rază dată R să se înscrie un cilindru de volum maxim.

Rezolvare. Să notăm lungimea lui OA (jumătate din înălţimea cilindrului) cu x (vezi Figura 5.5). Atunci raza bazei cilindrului este $AB = \sqrt{R^2 - x^2}$, iar volumul $V = \pi\, AB^2 \cdot h = \pi(R^2 - x^2) \cdot 2x = 2\pi x(R^2 - x^2)$. Derivata acestei funcţii (de variabilă x) este: $V' = 2\pi(R^2 - 3x^2)$. Soluţia ecuaţiei $V'(x) = 0$ este $x_0 = R/\sqrt{3}$. Deoarece $V''(x_0) = -12\pi x_0 < 0$, rezultă că pentru această valoare x_0 volumul cilindrului este maxim, iar valoarea volumului maxim este:

$$V_{max} = 2\pi \frac{R}{\sqrt{3}} \left(R^2 - \frac{R^2}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Se observă că $V_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} V_{sf}, \quad \left(V_{sf} = \dfrac{4\pi R^3}{3} \right).$

37. Dintre toate dreptunghiurile cu perimetrul de 24 cm, care este cel ce dă prin rotaţie în jurul bazei un cilindru de volum maxim?

Rezolvare. Să notăm lungimile laturilor dreptunghiului cu x şi y. Dacă dreptunghiul se roteşte în jurul laturii $AB = x$ (vezi Figura 5.6), atunci volumul cilindrului este $V = \pi y^2 x$. Deoarece $2\,(x + y) = 24$ rezultă că $x = 12 - y$, iar $V = \pi\,(12 - y)y^2$. Derivata funcţiei V (în variabila y) este $V'(y) = 24\pi y - 3\pi y^2$, care se anulează în $y_1 = 0$ şi $y_2 = 8$. Valoarea $y = 0$ ne dă un cilindru redus la o dreaptă. Valoarea căutată este $y = 8$ $(V''(8) = -24\pi < 0)$. În acest caz $x = 4$, iar volumul maxim este $V = 256\pi$.

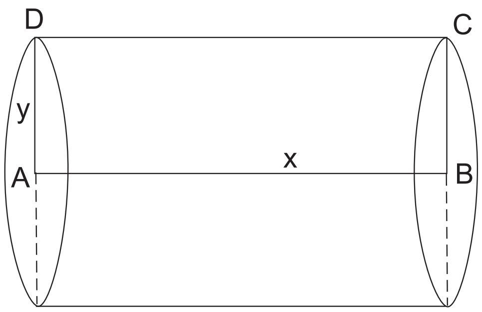

Figura 5.6

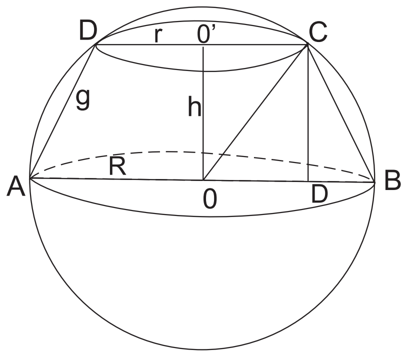

Figura 5.7

38. Să se înscrie într-o sferă de rază R un trunchi de con, având una din baze un cerc mare şi

a) suprafaţa laterală maximă;

b) suprafaţa totală maximă.

Rezolvare. a) Avem $A_l = \pi g(R + r)$. Din $\triangle\, BCD$ (vezi Figura 5.7) avem:

$g=\sqrt{h^2+(R-r)^2}$, iar din $\triangle\, OO'C$: $h^2=R^2-r^2$, deci
$g=\sqrt{R^2-r^2+R^2-2Rr+r^2}=\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}$. Rezultă:

$$A_l=\pi\left(R+r\right)\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}=\sqrt{2}\pi\left(R+r\right)\sqrt{R^2-Rr}.$$

Considerăm funcţia $\varphi(r)=(R+r)\sqrt{R^2-Rr}$, căreia îi vom determina punctele de extrem. Avem:

$$\varphi'(r)=\sqrt{R^2-Rr}+(R+r)\cdot\frac{-R}{2\sqrt{R^2-Rr}}=\frac{2R^2-2Rr-R^2-rR}{2\sqrt{R^2-Rr}}=\frac{R^2-3Rr}{2\sqrt{R^2-Rr}}.$$

Rezultă că $\varphi'(r)=0$ pentru $r_0=\dfrac{R}{3}$, iar $\varphi''(r_0)<0$. Deducem astfel că pentru această valoare a lui r suprafaţa laterală a trunchiului de con este maximă. Înălţimea sa este: $h=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}R}{3}$.

b) Avem:

$$A_t=\pi g\left(R+r\right)+\pi R^2+\pi r^2=\pi\left(R+r\right)\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}+\pi R^2+\pi r^2.$$

Atunci: $A_t'(r)=\pi\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}+\pi\left(R+r\right)\dfrac{-2R}{2\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}}+2\pi r=$

$$=\frac{\pi\left(R^2-3Rr+2r\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}\right)}{\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}}.$$

Rezultă că $A_t'(r)=0\ \Leftrightarrow\ R^2-3Rr+2r\sqrt{2\left(R^2-Rr\right)}=0$. Deci $r>\dfrac{R}{3}$ şi după separarea radicalului în ecuaţia de mai sus, prin ridicare la pătrat, obţinem:

$$4r^2\left(2R^2-2Rr\right)=R^4+9R^2r^2-6R^3r\ \Leftrightarrow\ 8R^2r^2-8Rr^3=R^4+9R^2r^2-6R^3r\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ R^4+R^2r^2+8Rr^3-6R^3r=0\ \Leftrightarrow\ 8Rr^3+R^2r^2-6R^3r+R^4=0.$$

Rezultă $r_1=-R$ şi $8Rr^2-7R^2r+R^3=0$, de unde $r_{2,3}=\dfrac{7R\pm\sqrt{17}R}{16}$.

Soluţia bună este $r_2=\dfrac{7R+\sqrt{17}R}{16}>\dfrac{R}{3}$, pentru care $A_t''(r_2)<0$. Generatoarea trunchiului de con cu razele bazelor R şi r_2 este:

$$g=\sqrt{2\left(R^2-R\cdot\frac{7R+\sqrt{17}R}{16}\right)}=\frac{R}{4}\sqrt{18-2\sqrt{17}}=\frac{R}{4}(\sqrt{17}-1).$$

39. Prin măsurarea directă s-a găsit că diametrul unui cerc este $x=4,2$ cm, eroarea maximă fiind mai mică decât $0,05$ cm. Să se găsească eroarea maximă aproximativă comisă în evaluarea ariei A a acestui cerc. Să se afle eroarea relativă $\dfrac{dA}{A}$ şi cea procentuală $\dfrac{dA}{A}100$.

Rezolvare. Deoarece $|dx|\le 0,05$ cm este mic în raport cu x rezultă că putem aproxima variaţia ariei $\triangle A$ prin diferenţiala dA. Deoarece $A=\dfrac{\pi x^2}{4}$ rezultă că $dA=$ $=\dfrac{\pi x}{2}\,dx$ şi deci $|dA|\le 0,33$ cm^2. Eroarea relativă este $\dfrac{dA}{A}=\dfrac{\pi x}{2}\,dx\cdot\dfrac{4}{\pi x^2}=\dfrac{2}{x}\,dx=$

$= 0,0238$, iar eroarea procentuală este $2,38\,\%$.

40. Un canal de scurgere are secţiunea un dreptunghi de dimensiuni 2α şi β, căreia îi este fixat un semicerc de diametru 2α (vezi Figura 5.8). Ştiind că costul construirii canalului este proporţional cu perimetrul canalului, se cere secţiunea maximă pentru un perimetru dat P.

Rezolvare. Considerăm sistemul ortogonal de axe Oxy ca în Figura 5.8. Atunci perimetrul canalului este: $P = 2\alpha + 2\beta + \pi\alpha$, iar aria secţiunii este:

$$A = 2\alpha\beta + \frac{\pi\alpha^2}{2} = \alpha\,(P - 2\alpha - \pi\alpha) + \frac{\pi\alpha^2}{2} = \alpha P - 2\alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{2}.$$

Deoarece $A'(\alpha) = P - 4\alpha - \pi\alpha$, ecuaţia $A'(\alpha) = 0$ are soluţia $\alpha_0 = \dfrac{P}{4+\pi}$. Din $A''(\alpha_0) = -4 - \pi < 0$ rezultă că α_0 este punct de maxim pentru A. Deci obţinem secţiunea maximă pentru $\alpha_0 = \dfrac{P}{4+\pi}$ şi $\beta_0 = \dfrac{P - 2\alpha_0 - \pi\alpha_0}{2} = \dfrac{P}{4+\pi}$, aria maximă fiind $A_{max} = \dfrac{P^2}{2\,(4+\pi)}$.

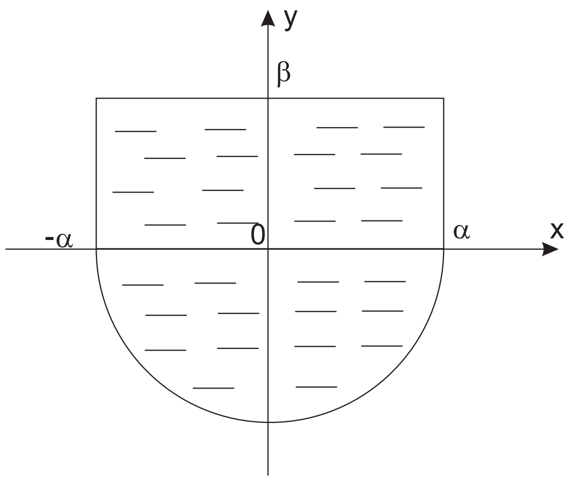

Figura 5.8

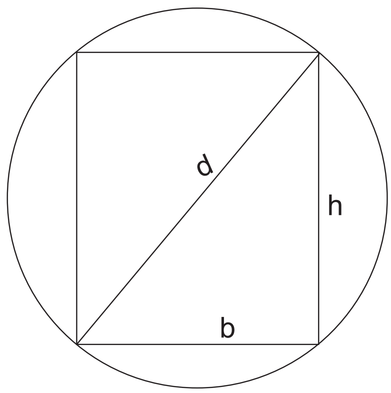

Figura 5.9

41. Dintr-un trunchi de copac cu secţiunea circulară de diametru d se scoate o grindă cu secţiune dreptunghiulară (vezi Figura 5.9). Care sunt dimensiunile grinzii pentru ca forţa de susţinere T să fie maximă, ştiind că aceasta este proporţională cu lăţimea b şi cu pătratul înălţimii h: $T = c\,b\,h^2$ ($c = \text{const.}$)?

Rezolvare. Deoarece $h^2 = d^2 - b^2$, rezultă că: $T = cb\,(d^2 - b^2)$, adică forţa de susţinere T este exprimată în funcţie de lăţimea b a secţiunii dreptunghiulare. Calculăm derivata funcţiei $T(b)$: $T'(b) = c\,(d^2 - b^2) - 2cb^2 = c\,(d^2 - 3b^2)$. Ecuaţia $T'(b) = 0$ are soluţia pozitivă $b_0 = \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$. Deoarece $T''(b_0) < 0$ rezultă că b_0 este punct de maxim pentru T. Deci forţa de susţinere este maximă dacă $b = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{d\sqrt{6}}{3}$, iar $T = \frac{2\sqrt{3}cd^3}{9}$. Se observă că independent de diametrul trunchiului rezultă raportul $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$.

42. Care este viteza maximă a unui tren astfel încât la frânare, încetinind uniform cu acceleraţia $b = 0,5$ m/s^2, să nu depăşească distanţa de frânare de $s_1 = 500$ m?

Rezolvare. Din fizică ştim că spaţiul în mişcarea uniformă încetinită este dat de relaţia $s = vt - \frac{b}{2}t^2$. Notăm cu t_1 timpul de frânare. Atunci din relaţia de mai sus obţinem: $s_1 = vt_1 - \frac{b}{2}t_1^2 \Leftrightarrow 500 = vt_1 - 0,25\,t_1^2$, unde v este viteza trenului de la începutul frânării. După timpul de frânare t_1 viteza trenului $s'(t) = v - bt$ este nulă, adică $v - 0,5\,t_1 = 0$. Din sistemul:

$$\begin{cases} vt_1 - 0,25\,t_1^2 = 500 \\ v - 0,5\,t_1 = 0 \end{cases}$$

rezultă $t_1 = 20\sqrt{5}$ sec. şi $v = 10\sqrt{5}$ m/s$= 36\sqrt{5}$ Km/h. Deci trenul are la începutul frânării viteza (maximă) de $36\sqrt{5}$ Km/h $\simeq 80$ Km/h. Scoţând pe v din relaţia $500 = vt - 0,25t^2$, adică $v = \frac{500 + 0,25t^2}{t}$ şi rezolvând ecuaţia $v'(t) = 0$ obţinem valoarea de mai sus $t_1 = 20\sqrt{5}$ sec. Deoarece $v''(t_1) < 0$, rezultă că $v_{max} = v(t_1) \simeq 80$ Km/h.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

43. Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

a) $f : (0,\infty) \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2}, & \text{dacă } 0 < x \le 2, \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4}, & \text{dacă } x > 2; \end{cases}$

b) $f : [0,\pi] \to I\!R,\ f(x) = \max\{\cos x,\ \cos^3 x\}$;

c) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{dacă } x < 1, \\ 0, & \text{dacă } x = 1, \\ \ln(x^2-2x+2), & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

d) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \min\{x^2+x,\ 4x-2\}$.

44. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

a) $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$; c) $f(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2-ax-a^2}{x^2+2ax-a^2}$, (funcţiile sunt definite pe domeniile lor de definiţie).

45. Să se arate că funcţia $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$
este derivabilă în orice punct, iar derivata sa este nemărginită în vecinătatea originii.

46. Să se calculeze $f''(x)$ pentru următoarele funcţii în punctele specificate:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} \ln^2 (x-2), & \text{dacă } x \geq 3; \\ (x-3)^2, & \text{dacă } x < 3; \end{cases} \quad x_0 = 3;$

b) $f : I\!R \to I\!R,\ f(x) = |x-2|^3, \quad x_0 = 2;$

47. Să se determine a şi $b \in I\!R$ astfel încât funcţia $f : I\!R \to I\!R$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{dacă } x \leq 0; \\ a \sin x + b \cos x, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $I\!R$.

48. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcţii:

a) $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to I\!R,\ f(x) = |\sin x|;$

b) $f : [-1, 1] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0]; \\ x + 1, & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$

49. Să se determine constanta c care intervine în teorema lui Lagrange pentru următoarele funcţii:

a) $f : [0, 2] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1]; \\ 2x - 1, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$

b) $f : [1, 3] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [1, 2]; \\ \dfrac{x^2}{4} + 1, & \text{dacă } x \in (2, 3]. \end{cases}$

50. Să se determine constanta c care intervine în teorema lui Cauchy pentru următoarele funcţii:

$f : [-2, 5] \to I\!R,\ f(x) = x,$

$g : [-2, 5] \to I\!R,\ g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & \text{dacă } x \in [-2, 1), \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{4}, & \text{dacă } x \in [1, 5]. \end{cases}$

51. Să se demonstreze folosind teorema lui Lagrange următoarele inegalităţi:

a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|,\ \forall\, a,\, b \in I\!R;$ b) $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b},\ \ 0 < b < a.$

c) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b},\ \ 0 \leq a < b < \dfrac{\pi}{2}.$

52. Să se arate că dacă $f \in C^1([a, b])$ şi $f(a) = f(b) = 0$ atunci pentru orice k dat, există un $\xi \in (a, b)$ astfel încât $f'(\xi) = k\, f(\xi)$.

53. Să se arate că valorile maxime şi minime ale funcţiei $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P şi Q sunt polinoame, se găsesc printre valorile parametrului λ pentru care ecuaţia: $f(x) = P(x) - \lambda Q(x) = 0$ are o rădăcină comună cu $f'(x) = 0$.

54. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$; b) $x^3 - \ln x - 2x - 1 = 0$;

c) $x^3 + x^2 - x + \lambda = 0,\ \lambda \in I\!R$; d) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + \lambda = 0,\ \lambda \in I\!R$.

55. Să se calculeze, folosind regula lui l'Hôspital, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln \dfrac{1+x}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)^{x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}\right)^{x\sqrt{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(e^x - e^2)^3}{(x-4)e^x + e^2 x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3^{x-1} + 3^{2x-1} + 3^{3x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$; i) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$;

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

56. Să se demonstreze că polinoamele lui Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)},\quad n = 0, 1 \dots$$

verifică ecuaţia:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

57. Să se calculeze derivatele şi diferenţialele de ordinul n pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x},\ x \in I\!R \setminus \{1\}$; b) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, \infty)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)},\ x \in I\!R \setminus \{-1, 0\}$; d) $\vec{f}(x) = \left(\dfrac{x}{x+2}, \ln\dfrac{2+x}{2-x}\right),\ x \in (-2, 2)$;

e) $\vec{f}(x) = (\sin ax, \cos bx, e^{cx}),\ x \in I\!R,\ a, b, c \in I\!R$.

58. Folosind formula lui Leibniz-Newton de derivare a unui produs de funcţii (vezi Problema 19), să se calculeze derivatele şi diferenţialele de ordinul n pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = x^2 \cos 3x,\ x \in I\!R$, pentru $n = 5$; b) $f(x) = x^3 e^{mx},\ x \in I\!R$;

c) $f(x) = x^5 \ln x,\ x \in (0, \infty)$; d) $f(x) = x^3 \sin ax,\ a \in I\!R^*,\ x \in I\!R$;

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1},\ x \in I\!R \setminus \{1\}$, pentru $n = 6$; f) $f(x) = e^{ax} \cdot e^{bx},\ x \in I\!R$.

59. Să se demonstreze egalităţile:

a) $[e^{ax} \cdot \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} \cdot (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin(bx + n\varphi + c),\ \forall x \in I\!R,\ \forall n \in I\!N$, unde $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2 \neq 0$;

b) $\left(\dfrac{x^4+1}{x^3-x}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot n!\left[\dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$, $\forall\, x \in I\!R\backslash\{0,-1,1\}$, $\forall\, n \in I\!N$, $n \geq 2$;

c) $\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^{(n)} = 4^{n-1}\cdot\cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $\forall\, x \in I\!R$, $\forall\, n \in I\!N^*$.

60. Să se arate că dacă funcţia f şi derivatele ei verifică relaţia: $x^2 f'' + xf' + f = 0$ atunci are loc şi următoarea relaţie:

$$x^2 f^{(n+2)} + (2n+1)xf^{(n+1)} + (n^2+1)f^{(n)} = 0.$$

61. Să se arate că:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

62. Să se dezvolte funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in I\!R$ după puterile binomului $(x-1)$.

63. Să se dezvolte polinomul $P(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 - x + 1$ după puterile lui $(x+1)$.

64. Să se determine $n \in I\!N$ astfel încât polinomul Taylor $T_n(x)$ în punctul $x_0 = 0$ asociat funcţiei $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in (-\infty, 1]$ să difere de funcţie cu mai puţin de $\dfrac{1}{16}$ în intervalul $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

65. Să se calculeze:

a) $\sqrt[5]{250}$ cu cinci zecimale exacte; b) $\sqrt[3]{30}$ cu patru zecimale exacte.

66. Să se calculeze:

a) $\dfrac{1}{e}$ cu patru zecimale exacte; b) $\sqrt{e}$ cu patru zecimale exacte; c) $\cos 10°$ cu cinci zecimale exacte.

67. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x - \sin x}{x(\cos x - \cos 2x)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt[3]{3-x} - x + 1}{\ln(x-1)}$.

68. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcţii:

a) $f : [0, 2\pi] \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & \text{dacă } x \in [0, 3\pi/2]; \\ \dfrac{9}{x^2}(x-2\pi)^2, & \text{dacă } x \in (3\pi/2, 2\pi]; \end{cases}$

b) $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos^2 x}$; c) $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \sin x^2$;

d) $f : (1,\infty) \to I\!R$, $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$; e) $f : I\!R\setminus\{0\} \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2-x}}{x}$;

f) $I\!R\setminus\{a,b\} \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$, $a\cdot b > 0$;

g) $f : I\!R\setminus\left\{\dfrac{a}{2}\right\} \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$.

69. Să se afle triunghiul isoscel cu aria maximă înscris într-un cerc de rază 2.

70. Dintre toate trapezele (isoscele) înscrise într-un semicerc de rază R, care are cea mai mare arie?

71. Într-un semicerc de rază dată R să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.

72. Să se determine triunghiul dreptunghic de arie maximă când suma dintre lungimea ipotenuzei şi a unei catete este constantă l.

73. Să se găsească volumul maxim al unui con, înscris într-o sferă de rază R.

74. Dintre toate conurile înscrise în sfera de rază R să se determine:

a) cel de suprafaţă laterală maximă;

b) cel de suprafaţă totală maximă.

75. Să se determine cilindrul de volum maxim înscris într-un con circular de rază R şi înălţime H.

76. Într-o emisferă cu raza R să se înscrie un paralelipiped de volum maxim, având baza un pătrat.

77. Fie parabola $y^2 = 6x$ şi punctul $A\,(5, 8)$. Să se găsească punctul M de pe parabolă cel mai apropiat de punctul A.

78. Prin punctul fix $P\,(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$ se duce o dreaptă care taie axele de coordonate în punctele $A\,(x, 0)$ şi $B\,(0, y)$, x, $y > 0$. Să se determine poziţia dreptei astfel încât:

a) suma $x + y$ să fie minimă;

b) aria triunghiului AOB să fie minimă.

79. Se consideră un cerc de centru O şi rază $R = 3$ cm şi un punct exterior A la distanţa $a = 7$ cm de centrul cercului. Se duce o dreaptă perpendiculară pe OA care intersectează cercul în două puncte B şi B'. Să se determine poziţia dreptei BB' pentru care aria triunghiului ABB' este maximă.

80. Într-un sector circular avem $R = 80$ cm şi unghiul la centru $\alpha = 60°$. Cu cât variază aria acestui sector, dacă:

a) raza R se măreşte cu 1 cm?

b) unghiul α se micşorează cu $30'$?

81. Din punctele A şi A_1 pornesc de-a lungul dreptelor AO şi A_1O în direcţia punctului O, concomitent, două corpuri cu vitezele v şi v_1. Ştiind că $AO = l$, $A_1O = l_1$, iar unghiul între AO şi A_1O este egal cu α, să se afle când distanţa dintre aceste două corpuri va fi minimă.

82. Se ştie că iluminarea E a unei suprafeţe situată la distanţa d de o sursă de lumină de intensitate I este dată de formula $E = \dfrac{I}{d^2}\cos\alpha$, unde α este unghiul de incidenţă (unghiul format de raze cu normala la suprafaţa iluminată). La ce înălţime deasupra unei pieţe circulare de rază r trebuie atârnat un bec pentru ca iluminarea trotuarului să fie cea mai bună?

83. Deasupra axei unei străzi sunt atârnate două becuri identice. Înăţimea becurilor este h, iar distanţa dintre ele este d.

a) Să se arate că iluminarea străzii are un extrem la mijlocul distanţei dintre proiecţiile becurilor.

b) Să se precizeze natura acestui extrem.

84. Se taie în două bucăţi o sârmă de lungime l şi se conturează cu una din bucăţi un cerc, iar cu cealaltă un pătrat. Cum trebuie tăiată sârma pentru ca suma ariilor acestor două figuri să fie minimă?

85. Care sunt dimensiunile pe care trebuie să le aibă o cutie de conserve cilindrică astfel încât pentru o capacitate dată de $1\,l = 1000$ cm^3 să se consume minimum de tablă?

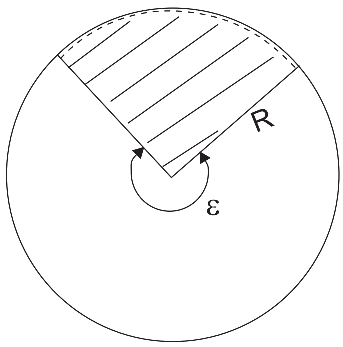

Figura 5.10

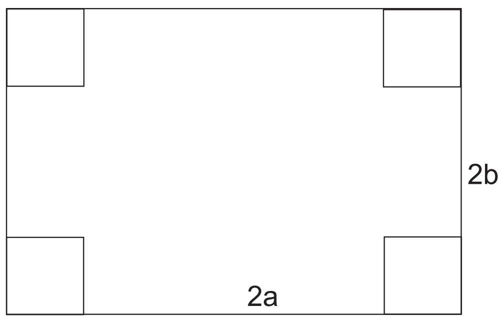

Figura 5.11

86. Dintr-o bucată de tablă de formă circulară cu raza R se decupează un sector din care se confecţionează o pâlnie (vezi Figura 5.10). Pentru ce unghi la centru ε pâlnia are capacitatea maximă?

87. Dintr-o bucată de tablă dreptunghiulară $ABCD$, de dimensiuni $2a$ şi $2b$, tăind din fiecare colţ câte un pătrat (vezi Figura 5.11), să se formeze o cutie cu volumul cel mai mare posibil.

88. Care este lungimea grinzii de volum maxim şi de secţiune pătrată care se poate scoate dintr-un copac în formă de trunchi de con cu lungimea l şi razele r şi R.

Capitolul 6
CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE REALE

§1. DERIVATE PARŢIALE, DIFERENŢIABILITATE, FUNCŢII COMPUSE

Fie $E \subset I\!R^n$, $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in \overset{\circ}{E}$ şi funcţia $f : E \to I\!R$.

Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă* în $\vec{x}_0$ dacă $\exists$ aplicaţia liniară $df(\vec{x}_0) : I\!R^n \to I\!R$ numită *diferenţiala funcţiei f în $\vec{x}_0$* şi funcţia $\alpha : E \to I\!R$ cu condiţiile: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \alpha(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}_0) = 0$ astfel încât:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \alpha(\vec{x})\|\vec{x} - \vec{x}_0\|, \ \forall\, x \in E,$$

(unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană pe spaţiul $I\!R^n$).

Dacă f este diferenţiabilă în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ atunci f este în mod necesar continuă în $\vec{x}_0$. Pentru o funcţie f diferenţiabilă în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$, numim *gradientul* funcţiei f în $\vec{x}_0$, matricea funcţionalei liniare $df(\vec{x}_0)$ în raport cu baza canonică $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ din $I\!R^n$; se notează cu $\nabla f(\vec{x}_0)$ sau $grad\, f(\vec{x}_0)$ sau $f'(\vec{x}_0)$. Dacă $df(\vec{x}_0)(\vec{e}_k) = A_k$, $k = \overline{1,n}$ atunci $\nabla f(\vec{x}_0) = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{A} \in I\!R^n$ şi pentru $\forall\, \vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in I\!R^n$ avem:

$$df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i = \langle \vec{A}, \vec{h} \rangle = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle, \ \forall\, \vec{h} \in I\!R^n.$$

Funcţia f se numeşte *derivabilă în raport cu x_k* în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ dacă aplicaţia:

$$t \to f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_k) = f(x_{10}, \ldots, x_{k0} + t, \ldots, x_{n0}), \ \vec{x}_0 + t\vec{e}_k \in E$$

este derivabilă în $t = 0$. În acest caz derivata funcţiei de mai sus în $t = 0$ se numeşte *derivata parţială în raport cu x_k* a funcţiei f în $\vec{x}_0$, notată $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)$ sau $f'_{x_k}(\vec{x}_0)$.

Dacă funcţia f este diferenţiabilă în $\vec{x}_0$ atunci există toate derivatele parţiale în $\vec{x}_0$ şi:

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right), \quad \text{iar}$$

$$df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\, h_i, \quad \forall\, \vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in I\!R^n.$$

Teorema 1. Dacă funcţia f are toate derivatele parţiale pe o vecinătate $V \subset E$ a punctului $\vec{x}_0$ şi dacă acestea sunt continue în $\vec{x}_0$ atunci f este diferenţiabilă în $\vec{x}_0$.

Fie funcţia $f : E \to I\!R$ şi $A_i \subset \overset{\circ}{E}$ $(A_i \neq \emptyset)$ mulţimea punctelor în care f este derivabilă în raport cu variabila x_i. Dacă funcţia $\vec{x} \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$, $\vec{x} \in A_i$ este derivabilă în raport cu variabila x_j în $\vec{x}_0$ vom spune că f este *derivabilă de două ori* în punctul $\vec{x}_0$, iar $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}_0) \overset{not}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\vec{x}_0)$ se numeşte *derivata parţială de ordinul al doilea* a funcţiei f în punctul $\vec{x}_0$ în raport cu variabilele x_i şi x_j (notată şi $f''_{x_i x_j}(\vec{x}_0)$).

Prin recurenţă se definesc *derivatele parţiale de un anumit ordin* N a funcţiei f în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$. Astfel avem:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{N-1} f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_N}}\right)(\vec{x}_0) = \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_N}}(\vec{x}_0), \quad i_1, i_2, \ldots i_N \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

pentru derivata de ordinul N a funcţiei f în punctul $\vec{x}_0$ în raport cu variabilele $x_{i_N}, \ldots, x_{i_1}$.

Teorema 2 (criteriul lui Schwarz). Dacă există derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$ $(i \neq j)$ pe o vecinătate V a punctului $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ şi acestea sunt continue în $\vec{x}_0$ atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\vec{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

Teorema 3 (criteriul lui Young). Dacă funcţia f are derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i \neq j)$ pe o vecinătate V a punctului $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ şi acestea sunt diferenţiabile în $\vec{x}_0$ atunci f admite derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\vec{x}_0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\vec{x}_0)$ şi în plus $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\vec{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

Fie $A \subset \overset{\circ}{E}$ mulţimea punctelor în care f este diferenţiabilă. Dacă $A \neq \emptyset$ definim funcţia:

$$(\vec{x}, \vec{h}) \to df(\vec{x})(\vec{h}) = \langle f(\vec{x}), \vec{h}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, h_i, \quad (\vec{x}, \vec{h}) \in A \times I\!R^n.$$

Fixând primul argument în funcţia de mai sus obţinem diferenţiala funcţiei f în punctul

$\vec{x} \in A$. Dacă se fixează al doilea argument obţinem funcţia:

$$\vec{x} \to df(\vec{x})(\vec{h}) = \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{h} \rangle, \quad \vec{x} \in A, \tag{1}$$

numită diferenţiala funcţiei f corespunzătoare creşterii $\vec{h}$.

Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă de două ori* în punctul $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ dacă funcţia (1) este diferenţiabilă în $\vec{x}_0$, pentru $\forall\, \vec{h} \in I\!R^n$, iar diferenţiala funcţiei (1) în punctul $\vec{x}_0$ se numeşte *diferenţiala de ordinul al doilea* a funcţiei f în punctul $\vec{x}_0$, notată $d^2 f(\vec{x}_0)$. Deci:

$$d^2 f(\vec{x}_0) : I\!R^n \to I\!R, \;\; d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\vec{x}_0)\, h_i h_j, \quad \forall\, \vec{h} \in I\!R^n \quad \text{sau}$$

$$d^2 f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\vec{x}_0)\, dx_i dx_j, \quad \text{scrisă ca o egalitate de funcţii.}$$

Prin recurenţă vom spune că f este *de N ori diferenţiabilă* în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ dacă diferenţiala de ordinul $N-1$ a funcţiei f este diferenţiabilă în $\vec{x}_0$, $\forall\, \vec{h} \in I\!R^n$. Diferenţiala acestei funcţii a vom numi *diferenţiala de ordinul* N a funcţiei f în punctul $\vec{x}_0$. Folosind inducţia matematică se arată că:

$$d^N f(\vec{x}_0) = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=N} \frac{N!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \cdot \frac{\partial^N f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(\vec{x}_0) dx_1^{k_1} \cdots dx_n^{k_n}.$$

Cu ajutorul operatorului de diferenţiere $d = \dfrac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_n} dx_n$ diferenţiala de ordinul N a funcţiei f în punctul $\vec{x}_0$ o putem scrie astfel:

$$d^N f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{\{N\}} f(\vec{x}_0).$$

Fie $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ şi $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in I\!R^n$ cu $\|\vec{\omega}\| = 1$. Spunem că funcţia f este *derivabilă în raport cu $\vec{\omega}$* în punctul $\vec{x}_0$ dacă funcţia $t \to f(\vec{x}_0 + t\vec{\omega})$, $\vec{x}_0 + t\vec{\omega} \in E$, $t > 0$ este derivabilă la dreapta în punctul $t = 0$. În acest caz derivata acestei funcţii la dreapta în $t = 0$ se numeşte *derivata funcţiei f în raport cu $\vec{\omega}$* în $\vec{x}_0$ şi se notează cu $\dfrac{df}{d\vec{\omega}}(\vec{x}_0)$. Dacă f este diferenţiabilă în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ atunci f este derivabilă în raport cu orice $\vec{\omega}$ în punctul $\vec{x}_0$ şi avem:

$$\frac{df}{d\vec{\omega}}(\vec{x}_0) = df(\vec{x}_0)(\vec{\omega}) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{\omega} \rangle.$$

Spunem că funcţia $f : D \to I\!R$, unde D este o mulţime deschisă din $I\!R^n$, este *de clasă C^k pe D* dacă f are toate derivatele parţiale până la ordinul k inclusiv, continue pe D; vom nota acest lucru cu $f \in C^k(D)$.

În cazul funcţiilor $\vec{f} : E \subset I\!R^n \to I\!R^m$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ studiul diferenţiabilităţii şi a derivabilităţii parţiale se reduce la studiul diferenţiabilităţii, respectiv a derivabilităţii parţiale a funcţiilor componente $f_k : E \to I\!R$, $k = \overline{1, m}$.

Teorema 4. Fie funcţiile:
$\vec{\varphi}: D \subset I\!\!R^n \to I\!\!R^m,\ \vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to \vec{u}=\vec{\varphi}(\vec{x})=(\varphi_1(\vec{x}),\ldots,\varphi_m(\vec{x})),\ \vec{x}\in D,$
$f: E\subset I\!\!R^m \to I\!\!R,\ \ \vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\to y=f(\vec{u})\in I\!\!R,\ \ \vec{u}\in E,$
unde D şi E sunt mulţimi deschise, iar $\vec{\varphi}(D)\subset E$, şi funcţia compusă
$F=f\circ\vec{\varphi}: D\to I\!\!R,\ \ \vec{x}\to y=F(\vec{x})=(f\circ\vec{\varphi})(\vec{x})=f(\vec{\varphi}(\vec{x}))=f(\varphi_1(\vec{x}),\ldots,\varphi_m(\vec{x})),\ \vec{x}\in D.$
Dacă funcţiile $u_j=\varphi_j(\vec{x}),\ \ j=\overline{1,m}$ sunt diferenţiabile în $\vec{x}_0\in D$, iar funcţia $y=f(\vec{u})$ este diferenţiabilă în $\vec{u}_0=\vec{\varphi}(\vec{x}_0)\in E,\ \ u_{j0}=\varphi_j(\vec{x}_0),\ \ j=\overline{1,m}$, atunci funcţia compusă F este diferenţiabilă în punctul $\vec{x}_0$. În plus:

$$dF(\vec{x}_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}(\vec{u}_0)\,d\varphi_j(\vec{x}_0)\quad \text{şi}\quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}(\vec{u}_0)\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0),\ \ i=\overline{1,n}.$$

Dacă funcţiile $u_j=\varphi_j(\vec{x}),\ \ j=\overline{1,m}$ sunt diferenţiabile de două ori în $\vec{x}_0\in D$, iar funcţia $y=f(\vec{u})$ este diferenţiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului $\vec{u}_0=$ $=\vec{\varphi}(\vec{x}_0)\in E$ atunci funcţia compusă $F=f\circ\vec{\varphi}$ este diferenţiabilă de două ori în punctul $\vec{x}_0$ şi avem:

$$d^2F(\vec{x}_0)=\sum_{l,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_l\,\partial u_j}(\vec{u}_0)\cdot d\varphi_l(\vec{x}_0)d\varphi_j(\vec{x}_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}(\vec{u}_0)\cdot d^2\varphi_j(\vec{x}_0),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\,\partial x_i}(\vec{x}_0)=\sum_{l,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_l\,\partial u_j}(\vec{u}_0)\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}(\vec{u}_0)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_k\,\partial x_i}(\vec{x}_0),\ \ k,\,i=\overline{1,n}.$$

O mulţime $E\subset I\!\!R^n$ se numeşte *con* cu vârful în $\vec{x}_0\in I\!\!R^n$ dacă pentru $\forall\,\vec{x}\in E$, $t(\vec{x}-\vec{x}_0)\in E,\ \ \forall\,t>0$. Funcţia $f: E\to I\!\!R,\ \ (E\subset I\!\!R^n$ con cu vârful în origine) se numeşte *omogenă de grad* $\alpha\in I\!\!R$ dacă $f(t\vec{x})=t^{\alpha}f(\vec{x}),\ \ \forall\,\vec{x}\in E,\ \ \forall\,t>0.$

Teorema 5. Funcţia $f: E\to I\!\!R$ $(E\subset I\!\!R^n$ con cu vârful în origine) diferenţiabilă pe $E\setminus\{\vec{0}\}$ este omogenă de grad α dacă şi numai dacă:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x})+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})=\alpha f(\vec{x}),\ \ \forall\,\vec{x}\in E\setminus\{\vec{0}\},$$

(numită relaţia lui Euler).

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze, folosind definiţia, următoarele derivate parţiale:
a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$ pentru $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;
b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,0,1),\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,-3)$ pentru $f(x,y,z)=x^3+3x^2y+z^3$.
Rezolvare. a) Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - 0}{x-0} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \lim_{y\to -1}\frac{f(1,y)-f(1,-1)}{y+1} = \lim_{y\to -1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \operatorname{arctg}(-1)}{y+1} =$$

$$= \lim_{y\to -1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg} 1}{y+1} = \lim_{y\to -1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y+1}{y-1}}{\frac{y+1}{y-1}}\cdot\frac{1}{y-1} = \lim_{y\to -1}\frac{1}{y-1} = -\frac{1}{2}.$$

b) Folosind definiţia derivatelor parţiale, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0,1) = \lim_{x\to -1}\frac{f(x,0,1)-f(-1,0,1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1-0}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = \lim_{y\to 2}\frac{f(1,y,-1)-f(1,2,-1)}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{3y-6}{y-2} = 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-3) = \lim_{z\to -3}\frac{f(1,1,z)-f(1,1,-3)}{z+3} = \lim_{z\to -3}\frac{z^3+4+23}{z+3} = \lim_{z\to -3}(z^2-3z+9) = 27.$$

2. Se dă funcţia $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$. Să se verifice, folosind regulile de derivare, următoarea relaţie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}.$$

Rezolvare. Derivatele parţiale ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz},\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}.$$

Deci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3(x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}.$$

Deoarece $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy)(x+y+z)$, rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}.$$

3. Fie funcţia $f(x,y,z) = \dfrac{ax+by+cz}{x^2+y^2+z^2}$. Să se arate că:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -f(x,y,z).$$

Rezolvare. Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a(x^2+y^2+z^2)-2x(ax+by+cz)}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b(x^2+y^2+z^2)-2y(ax+by+cz)}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{c(x^2+y^2+z^2)-2z(ax+by+cz)}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Atunci rezultă că:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2)-2(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= -\frac{(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -\frac{ax+by+cz}{x^2+y^2+z^2} = -f.$$

4. Fie funcţia $f(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$. Să se arate că:

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot f.$$

Rezolvare. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{\frac{y}{x}} \cdot \ln y \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}y^{\frac{y}{x}} \cdot \cos\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \ln y \cdot \sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}y^{\frac{y}{x}-1} + y^{\frac{y}{x}} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos\frac{y}{x} = \frac{1}{x}y^{\frac{y}{x}} \cdot \sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}y^{\frac{y}{x}}\ln y \cdot \sin\frac{y}{x} +$$
$$+\frac{1}{x}y^{\frac{y}{x}} \cdot \cos\frac{y}{x}.$$

Deci:

$$x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \ln y \cdot \sin\frac{y}{x} - y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \cos\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}+1}\ln y \cdot \sin\frac{y}{x} +$$
$$+y^{\frac{y}{x}+1}\cos\frac{y}{x} = y^{\frac{y}{x}+1} \cdot \sin\frac{y}{x} = y\left(y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x}\right) = y \cdot f,$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

5. Fie funcţia $f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Să se arate că:

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2f.$$

Rezolvare. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + (x^2+y^2) \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = 2x\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + (x^2+y^2) \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - x.$$

Apoi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + y\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + 2x \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} +$$
$$+\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - x\right) = 2y \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} - 1 = \frac{2y^2}{x^2+y^2} - 1 =$$
$$= \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, \quad \text{iar:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - x\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + 2y \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Atunci:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{2x^3y}{x^2+y^2} + \frac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2} + 2y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} -$$

$-\dfrac{2xy^3}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \dfrac{2x^3y+2xy^3-2x^3y-2xy^3}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 2f.$

6. Să se arate că funcţia $f(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy)$ verifică relaţia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Rezolvare. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy).$$

Derivatele de ordinul al doilea sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2xe^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy)\right] =$$

$= 2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 4x^2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 4xye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy) + 4xye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy) -$
$-4y^2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) = [2\sin(2xy) + 4x^2\sin(2xy) + 8xy\cos(2xy) - 4y^2\sin(2xy)]\cdot e^{x^2-y^2},$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-2ye^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy)\right] =$$

$= -2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) + 4y^2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) - 4xye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy) - 4xye^{x^2-y^2}\cdot\cos(2xy) -$
$-4x^2e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy) = [-2\sin(2xy) + 4y^2\sin(2xy) - 8xy\cos(2xy) - 4x^2\sin(2xy)]\times$
$\times e^{x^2-y^2}.$

Atunci rezultă că: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

7. Să se arate că funcţia $f(t,x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, a, b constante, verifică relaţia:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Rezolvare. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-3/2}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{(x-b)^2}{4a^2t^2}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}} =$$
$$= \left[-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}t^{-3/2} + \frac{1}{8a^3\sqrt{\pi}}t^{-5/2}\cdot(x-b)^2\right]\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{(x-b)}{2a^2t\cdot 2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}} = -\frac{(x-b)}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{(x-b)}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\right] = -\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}t^{-3/2}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-b)^2}{8a^5\sqrt{\pi}t^{5/2}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}} =$$
$$= \left[-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}t^{-3/2} + \frac{1}{8a^5\sqrt{\pi}}t^{-5/2}\cdot(x-b)^2\right]\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}.$$

Se verifică imediat relaţia din enunţ: $\dfrac{\partial f}{\partial t} = a^2\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$

8. Fie funcţia $f : I\!R^2 \to I\!R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Să se calculeze, folosind definiţia, derivatele parţiale ale funcţiei f în origine şi apoi să se studieze proprietatea de diferenţiabilitate în $(0,0)$.

Rezolvare. Calculăm mai întâi derivatele parţiale ale lui f în $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

Arătăm în continuare că funcţia f nu are limită în punctul $(0,0)$, deci nu este continuă şi nici diferenţiabilă în acest punct. Într-adevăr, pentru drumuri de ecuaţie $y = mx$, avem:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Deoarece am obţinut dependenţă de panta drumului rezultă că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Să se arate că f este diferenţiabilă în punctul $(0,0)$, că există $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ în orice punct $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dar aceste funcţii nu sunt continue în $(0,0)$.

Rezolvare. Din inegalitatea:

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le x^2+y^2,$$

rezultă că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Deci f este continuă în punctul $(0,0)$.

Derivatele parţiale ale funcţiei f în origine sunt:

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0$$

$\left(\text{deoarece } \left|x\sin\dfrac{1}{|x|}\right| \le |x|\right)$ şi

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{|y|}}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{|y|} = 0$$

$\left(\text{analog } \left|y\sin\dfrac{1}{|y|}\right| \le |y|\right)$.

Pentru a demonstra că f este diferenţiabilă în $(0,0)$ trebuie să arătăm că există o funcţie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cu condiţiile: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0) = 0$ astfel încât:

$$f(x,y) = f(0,0) + A_1(x-0) + A_2(y-0) + h(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2},\ \ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Impunând condiţia de mai sus, găsim pentru funcţia h următoarea formă:

$$h(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Deoarece:

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\sqrt{x^2+y^2},$$

deducem că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0=h(0,0)$. Deci funcţia h de mai sus satisface toate condiţiile din definiţia diferenţiabilităţii (funcţiei f în punctul $(0,0)$), de unde rezultă că f este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Să calculăm în continuare derivatele parţiale în raport cu x şi y ale funcţiei f într-un punct oarecare $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Deci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}2y\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vom arăta că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, deci funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în punctul $(0,0)$. Într-adevăr, deşi $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$, funcţia $g(x,y)=$ $=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$ nu are limită în punctul $(0,0)$. Considerând drumuri de ecuaţie $y=mx$, obţinem:

$$g(x,mx)=\frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+m^2}}\cos\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{1+m^2}},$$

funcţie care nu are limită în punctul $x=0$. Deci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nu are limită în punctul $(0,0)$, deci nu este continuă în $(0,0)$.

10. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$, dar acestea sunt diferite.

Rezolvare. Calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f

în raport cu x şi y. Pentru $(x,y)\neq(0,0)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

În punctul $(x,y)=(0,0)$ obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

Deci: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Calculăm acum derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f în punctul $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{x^4}}{x}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{y^5}{y^4}}{y}=-1.$$

Deci $\exists\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$, dar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=1\neq -1=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

11. Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; b) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$; c) $f(x,y)=\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

d) $f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}$; e) $f(x,y,z)=\cos(x+2y+3z)$; f) $f(x,y,z)=e^{xyz}$.

Rezolvare. a) Calculăm derivatele de ordinele întâi şi al doilea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right.$, deoarece funcţia f satisface condiţiile din criteriul lui Schwarz$\Big)$.

Diferenţialele cerute în enunţ sunt:

$$df(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}\,dx+\frac{2y}{x^2+y^2}\,dy,\quad \forall\,(x,y)\in I\!R^2\setminus\{(0,0)\},$$

$$d^2f(x,y)=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx^2-\frac{8xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dy^2,\ \forall\,(x,y)\in I\!R^2\setminus\{(0,0)\}.$$

b) Avem:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot\cos(x^2+y^2),\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\cdot\cos(x^2+y^2);\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\cdot\sin(x^2+y^2);$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-4xy\cdot\sin(x^2+y^2);\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\cdot\sin(x^2+y^2).$

Atunci:

$$df(x,y)=2x\cos(x^2+y^2)\,dx+2y\cos(x^2+y^2)\,dy,$$

$d^2f(x,y)=[2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)]\,dx^2-8xy\sin(x^2+y^2)\,dxdy+[2\cos(x^2+y^2)-$
$-4y^2\sin(x^2+y^2)]\,dy^2,\ \ \forall\,(x,y)\in I\!R^2.$

c) Derivatele parţiale ale funcţiei f sunt:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}};\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x\sin\frac{2y}{x}};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2y\left[2x\sin\frac{2y}{x}-2y\cos\frac{2y}{x}\right]}{x^4\sin^2\frac{2y}{x}}=\dfrac{4y\left(x\sin\frac{2y}{x}-y\cos\frac{2y}{x}\right)}{x^4\sin^2\frac{2y}{x}};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{-2\left[\sin\frac{2y}{x}-\frac{2y}{x}\cos\frac{2y}{x}\right]}{x^2\sin^2\frac{2y}{x}}=\dfrac{2\left(-x\sin\frac{2y}{x}+2y\cos\frac{2y}{x}\right)}{x^3\sin^2\frac{2y}{x}};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{-\frac{2}{x}\cos\frac{2y}{x}}{\sin^2\frac{2y}{x}}=\dfrac{-4\cos\frac{2y}{x}}{x^2\sin^2\frac{2y}{x}}.$

Deci:

$$df(x,y)=\frac{-2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}\,dx+\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\,dy;$$

$$d^2f(x,y)=\frac{4y\left(x\sin\frac{2y}{x}-y\cos\frac{2y}{x}\right)}{x^4\sin^2\frac{2y}{x}}\,dx^2+\frac{4\left(-x\sin\frac{2y}{x}+2y\cos\frac{2y}{x}\right)}{x^3\sin^2\frac{2y}{x}}\,dxdy-\frac{4\cos\frac{2y}{x}}{x^2\sin^2\frac{2y}{x}}\,dy^2,$$

$\forall\,(x,y)\in D_f=\left\{(x,y)\in I\!R^2,\ \ \operatorname{tg}\frac{y}{x}>0\right\}.$

d) Avem:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=a\,e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=b\,e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial f}{\partial z}=c\,e^{ax+by+cz};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a^2e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=b^2e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=c^2e^{ax+by+cz};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=ab\,e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=bc\,e^{ax+by+cz};\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=ac\,e^{ax+by+cz}.$

Deci: $df(x,y,z)=(a\,dx+b\,dy+c\,dz)e^{ax+by+cz}$ şi

$d^2f(x,y,z)=(a^2\,dx^2+b^2\,dy^2+c^2\,dz^2+2ab\,dxdy+2bc\,dydz+2ac\,dxdz)e^{ax+by+cz},$
$\forall\,(x,y,z)\in I\!R^3.$

e) Calculând derivatele parţiale obţinem pentru diferenţiale următoarele expresii:

$$df(x,y,z)=-(dx+2\,dy+3\,dz)\sin(x+2y+3z)\ \ \text{şi}$$

$d^2f(x,y,z)=-(dx^2+4dy^2+9dz^2+4dxdy+12dydz+6dzdx)\cos(x+2y+3z),$
$\forall\,(x,y,z)\in I\!R^3.$

f) Avem:

$$df(x, y, z) = (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)e^{xyz} \quad \text{şi}$$

$d^2 f(x, y, z) = [y^2 z^2\,dx^2 + x^2 z^2\,dy^2 + x^2 y^2\,dz^2 + 2(z\,dxdy + x\,dydz + y\,dxdz)(1+$
$+xyz)]e^{xyz}$, $\forall\,(x, y, z) \in I\!R^3$.

12. Utilizând regulile de diferenţiere, să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii şi apoi să se precizeze derivatele parţiale (de ordinul întâi şi al doilea) ale acestora:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$; b) $f(x, y) = x^{y^2}$; c) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z^2}$;

d) $f(x, y, z) = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$.

Rezolvare. a) Avem:

$df(x, y) = 3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3(x\,dy + y\,dx) = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$, iar:

$d^2 f(x, y) = 3(2x\,dx - dy)\,dx + 3(2y\,dy - dx)\,dy = 6x\,dx^2 - 6\,dxdy + 6y\,dy^2$.

Din forma acestor diferenţiale deducem derivatele parţiale ale funcţiei f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y),\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -3.$$

b) Folosind regulile de diferenţiere, obţinem:

$df(x, y) = y^2 x^{y^2 - 1}\,dx + x^{y^2} \ln x \cdot 2y\,dy$, iar:

$d^2 f(x, y) = [2yx^{y^2-1}\,dy + y^2(y^2 - 1)x^{y^2-2}\,dx + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x\,dy]\,dx+$
$+\left[2y^2 x^{y^2-1} \cdot y \ln x\,dx + x^{y^2} \ln x \cdot 4y^2 \ln x\,dy + \dfrac{2y}{x} x^{y^2}\,dx + 2x^{y^2} \ln x\,dy\right] dy =$
$= y^2(y^2 - 1)x^{y^2-2}\,dx^2 + 4\left(yx^{y^2-1} + y^3 x^{y^2-1} \ln x\right)\,dxdy + 2x^{y^2} \ln x\,(2y^2 \ln x + 1)\,dy^2$.

Deci: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2(y^2-1)x^{y^2-2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1}+$
$+2y^3 x^{y^2-1} \ln x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^{y^2} \ln x + 4y^2 x^{y^2} (\ln x)^2$.

c) Avem:

$$df(x, y, z) = \frac{1}{1 + \frac{x^2y^2}{z^4}} \left(\frac{y}{z^2}\,dx + \frac{x}{z^2}\,dy - \frac{2xy}{z^3}\,dz\right) = \frac{1}{z^4 + x^2y^2}(yz^2\,dx + xz^2\,dy - 2xyz\,dz).$$

Apoi: $d^2 f(x, y, z) = \dfrac{-4z^3\,dz - 2xy^2\,dx - 2x^2 y\,dy}{(z^4 + x^2y^2)^2}(yz^2\,dx + xz^2\,dy - 2xyz\,dz)+$
$+\dfrac{1}{z^4 + x^2y^2}[(z^2\,dy + 2yz\,dz)\,dx + (z^2\,dx + 2xz\,dz)\,dy - 2(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)\,dz] =$
$= \dfrac{-2xy^3z^2}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dx^2 - \dfrac{2x^3yz^2}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dy^2 + \dfrac{2xy(3z^4 - x^2y^2)}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dz^2 + \dfrac{2z^2(z^4 - x^2y^2)}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dxdy+$
$+\dfrac{4xz(x^2y^2 - z^4)}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dydz + \dfrac{4yz(x^2y^2 - z^4)}{(z^4 + x^2y^2)^2}\,dzdx.$

De aici rezultă: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{yz^2}{z^4 + x^2y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{xz^2}{z^4 + x^2y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-2xyz}{z^4 + x^2y^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2xy^3z^2}{(z^4+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^3yz^2}{(z^4+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2xy(3z^4-x^2y^2)}{(z^4+x^2y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{z^2(z^4-x^2y^2)}{(z^4+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{2xz(x^2y^2-z^4)}{(z^4+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{2yz(x^2y^2-z^4)}{(z^4+x^2y^2)^2}.$$

d) Procedând asemănător, obţinem:

$$df(x,y,z) = z\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(x\,dy+y\,dx+\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}\right)+\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\Big(xy+$$
$$+\frac{x}{y}\Big)\,dz = z\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+z\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z}\times$$
$$\times\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz = zx^{z-1}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z}dx+zx^{z}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)dy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z}\times$$
$$\times\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz,$$

de unde rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = zx^{z-1}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z};\ \frac{\partial f}{\partial y} = zx^{z}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1}\left(1-\frac{1}{y^2}\right);$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right).$$

Diferenţiind acum pe $df(x,y,z)$ obţinem derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z(z-1)x^{z-2}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z(z-1)x^{z}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-2}\cdot\frac{(y^2-1)^2}{y^4}+$$
$$+\frac{2zx^z}{y^3}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1};\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z}\ln^2\left(xy+\frac{x}{y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = z^2x^{z-1}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1}\times$$
$$\times\frac{y^2-1}{y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = x^{z-1}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z}+zx^{z-1}\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z}\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = zx^z\times$$
$$\times\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(\frac{y^2-1}{y^2}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)+x^z\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{y^2-1}{y^2}\right).$$

13. Să se calculeze diferenţiala de ordinul n a funcţiei:

$$f(x,y,z) = \ln\,(x^x\cdot y^y\cdot z^z)\,;\quad x,y,z>0.$$

Rezolvare. Funcţia f se mai scrie astfel: $f(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z$. Pentru $n=1$ diferenţiala este:

$$df(x,y,z) = (1+\ln x)\,dx+(1+\ln y)\,dy+(1+\ln z)\,dz.$$

Din forma de mai sus a funcţiei f, în care variabilele sunt separate, deducem că derivatele mixte de ordin mai mare sau egal cu 2 vor fi toate egale cu 0. Atunci în formula pentru diferenţiala de ordinul n a funcţiei f:

$$d^n f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^{\{n\}} f(x,y,z) =$$

$$= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(x,y,z)\, dx^i dy^j dz^k$$

vor fi nenuli doar trei termeni şi anume cei care conţin $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}$. Deci:

$$d^n f(x,y,z) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y,z)\, dx^n + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y,z)\, dy^n + \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,y,z)\, dz^n, \quad n \geq 2.$$

Aplicând principiul inducţiei matematice, deducem că pentru $n \geq 2$:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-2)!}{x^{n-1}}; \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-2)!}{y^{n-1}}; \quad \frac{\partial^n f}{\partial z^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-2)!}{z^{n-1}}.$$

Deci diferenţiala de ordinul n a funcţiei f $(n \geq 2)$ este:

$$d^n f(x,y,z) = (-1)^n \cdot (n-2)! \left(\frac{dx^n}{x^{n-1}} + \frac{dy^n}{y^{n-1}} + \frac{dz^n}{z^{n-1}} \right).$$

14. S-au măsurat două laturi ale unui triunghi cu o eroare relativă de $2/1000$ şi unghiul cuprins între ele cu o precizie de $15'$. Care este eroarea relativă exprimată în procente cu care s-a obţinut suprafaţa triunghiului?

Rezolvare. Aria triunghiului este: $A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$. Diferenţiala totală a lui S este:

$$dS = \frac{1}{2}\, bc\cos\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2}\, c\sin\alpha\, db + \frac{1}{2}\, b\sin\alpha\, dc.$$

Împărţind dS cu S obţinem: $\frac{dS}{S} = \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha + \frac{1}{b}\, db + \frac{1}{c}\, dc$, deci:

$$\left|\frac{dS}{S}\right| \leq |\operatorname{ctg}\alpha|\, d\alpha + \left|\frac{db}{b}\right| + \left|\frac{dc}{c}\right|.$$

Din datele problemei rezultă că: $\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{2}{1000}$, iar $d\alpha = 15' = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{4}$ rad.

Eroarea în procente a suprafeţei măsurate este:

$$100\left|\frac{dS}{S}\right| \leq |\operatorname{ctg}\alpha| \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{100}{4} + \frac{4 \cdot 100}{1000},$$

de unde rezultă că: $100\left|\frac{dS}{S}\right| \leq 0,4 + 0,436 \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|$.

15. Fie funcţia $f : I\!R^2 \to I\!R$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se studieze existenţa derivatei funcţiei f în punctul $(0,0)$ după versorul $\vec{v} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, (am identificat elementul $\vec{v} = (x,y)$ din $I\!R^2$ cu vectorul de poziţie $\vec{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $M(x,y)$, în reperul $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$).

Rezolvare. Conform definiţiei, avem:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\vec{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\sin\theta\cos\theta}{t^2\sin^2\theta + t^2\cos^2\theta} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\theta\cos\theta}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}.$$

Dacă $\sin 2\theta = 0$, deci $\theta \in \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$ atunci $\exists\ \frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = 0$. Dacă $\sin 2\theta \neq 0$, deci $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$ atunci $\nexists\ \frac{df}{d\vec{v}}(0,0)$.

16. Se consideră funcţia $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ şi punctul $M_0(2,1,1)$. Să se calculeze $\frac{df}{d\vec{s}}(M_0)$, unde $\vec{s} = \frac{\vec{\imath} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$.

Rezolvare. Calculăm mai întâi gradientul funcţiei f în punctul M_0. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2x|_{M_0} = 4;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 4y|_{M_0} = 4;\quad \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 6z|_{M_0} = 6,$$

deci: $\nabla f(M_0) = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

Derivata funcţiei f după direcţia lui $\vec{s}$ în punctul M_0 va fi, conform formulei:

$$\frac{df}{d\vec{s}}(M_0) = \langle \nabla f(M_0), \vec{s}\rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}.$$

17. Să se determine derivata funcţiei $z(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ în punctul $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ care aparţine cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2x = 0$, după direcţia tangentei la cerc în M_0.

Rezolvare. Ecuaţia tangentei la cerc în punctul M_0 se obţine prin procedeul de dedublare: $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 - (x + x_0) = 0$, unde $x_0 = 1/2$, $y_0 = \sqrt{3}/2$. Deci ecuaţia tangentei este:

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{sau} \quad x - \sqrt{3}y + 1 = 0.$$

Versorul director al acestei drepte este $\vec{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$. Gradientul funcţiei z în punctul $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este: $\nabla z(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\vec{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\vec{\jmath}$.

Avem: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{-y}{x^2+y^2}\Big|_{M_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{M_0} = \frac{1}{2}$.

Deci: $\nabla z(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$.

Atunci derivata lui z după direcţia $\vec{s}$ în punctul M_0 este:

$$\frac{dz}{d\vec{s}}(M_0) = \langle \nabla z(M_0),\ \vec{s}\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

18. Să se calculeze derivata funcţiei $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ după direcţia gradientului ei într-un punct arbitrar $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Rezolvare. Gradientul funcţiei u într-un punct $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ este:

$$\nabla u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\vec{k} =$$
$$= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\imath} - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\jmath} - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

Versorul gradientului funcţiei f într-un punct (x,y,z) este:

$$\vec{s}=\frac{\nabla u(x,y,z)}{\|\nabla u(x,y,z)\|}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\vec{i}-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\vec{j}-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\vec{k}.$$

Deci: $\displaystyle\frac{du}{d\vec{s}}(x,y,z)=\langle\nabla u(x,y,z),\frac{\nabla u(x,y,z)}{\|\nabla u(x,y,z)\|}\rangle=\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+$

$$+\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},\quad \forall\,(x,y,z)\in I\!\!R^3\setminus\{(0,0,0)\}.$$

19. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ dacă $z(x,y)=f(u,v)$, unde $u(x,y)=xy$, $v(x,y)=\dfrac{x}{y}$, $(f\in C^1(D),\ \ D\subset I\!\!R^2)$.

b) $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)$ şi $\dfrac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)$ dacă $\omega(x,y)=f(u,v,w)$, unde $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=$ $=x^2-y^2$, $w(x,y)=2xy$, $(f\in C^1(D),\ \ D\subset I\!\!R^3)$.

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ dacă $z(x,y)=f(u)$, unde $u(x,y)=xy+\dfrac{y}{x}$, $(f\in C^1(I),\ \ I\subset$ $\subset I\!\!R)$.

Rezolvare. a) Deoarece $z(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$ calculăm derivatele parţiale ale funcţiei z prin intermediul derivatelor parţiale ale funcţiei f în raport cu variabilele u şi v, conform formulei de calcul:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v),$$

unde $u=xy,\ \ v=\dfrac{x}{y}$.

b) Avem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)=$$
$$=2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)+2x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)+2y\cdot\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\cdot\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)=$$
$$=2y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)-2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)+2x\cdot\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w),$$

unde variabilele u, v şi w sunt x^2+y^2, x^2-y^2, respectiv $2xy$.

c) Derivatele parţiale ale funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\left(y-\frac{y}{x^2}\right)\cdot f'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot f'(u),$$

$\left(u = xy + \dfrac{y}{x}\right).$

Observaţie. În exerciţiile care urmează nu vom mai scrie variabilele funcţiilor care apar în compuneri, dar vor fi subînţelese în fiecare din cazurile respective.

20. Arătaţi că funcţiile de mai jos verifică egalităţile scrise alăturat:

a) $z = \varphi(t),\ \ t(x,y) = bx - ay;\quad a \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + b \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ \ (\varphi \in C^1(I),\ \ I \subset \mathbb{R});$

b) $z = xy + x \cdot \varphi(t),\ \ t(x,y) = \dfrac{y}{x};\quad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z,\ \ (\varphi \in C^1(I),\ \ I \subset \mathbb{R});$

c) $w = f(u,v),\ \ u = x + at,\ \ v = y + bt;\quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} + b \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \ (f \in C^1(D),\ \ D \subset \mathbb{R}^2);$

d) $w = f(u,v),\ \ u = xy,\ \ v = x^2 + y^2 - z^2;\quad xz \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} - yz \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y} + (x^2 - y^2)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0,$ $(f \in C^1(D),\ \ D \subset \mathbb{R}^2).$

e) $z = \dfrac{y}{f(t)},\ \ t = x^2 - y^2;\quad \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2},\ \ (f \in C^1(I),\ \ I \subset \mathbb{R}).$

Rezolvare. a) Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = b \cdot \varphi'(t);\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -a \cdot \varphi'(t).$$

Atunci: $a \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + b \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = a(b\varphi'(t)) + b(-a\varphi'(t)) = 0.$

b) Derivatele funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(t) + x \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = y + \varphi(t) - \frac{y}{x}\varphi'(t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = x + \varphi'(t).$$

Deci:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\varphi(t) - y\varphi'(t) + yx + y\varphi'(t) = xy + (xy + x\varphi(t)) =$$
$$= xy + z.$$

c) Avem:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u};\quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Atunci: $a \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} + b \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y} = a \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} + b \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial w}{\partial t},$ adică relaţia din enunţ.

d) Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei w în raport cu $x,\ y$ şi z:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -2z \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Atunci:

$$xz \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - yz \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + (x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = xyz \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2x^2 z \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - xyz \cdot \frac{\partial f}{\partial u} -$$

$$-2y^2 z \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - 2x^2 z \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + 2y^2 z \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

e) Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x}}{f^2(t)} = \frac{-2xy \cdot f'(t)}{f^2(t)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(t) - y \cdot f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y}}{f^2(t)} = \frac{f(t) + 2y^2 \cdot f'(t)}{f^2(t)}.$$

Atunci:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \cdot f'(t)}{f^2(t)} + \frac{1}{y \cdot f(t)} + \frac{2y \cdot f'(t)}{f^2(t)} = \frac{1}{y \cdot f(t)} = \frac{z}{y^2}.$$

21. Fie funcţia $u = \dfrac{1}{y}[\varphi(ax + y) + \psi(ax - y)]$. Să se arate că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (\varphi,\ \psi \in C^2(I),\ \ I \subset I\!\!R).$$

Rezolvare. Să notăm cu u şi v argumentele funcţiei φ, respectiv ψ. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\left[\varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \psi'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{y}[a \cdot \varphi'(u) + a \cdot \psi'(v)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}\left[a \cdot \varphi''(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + a \cdot \psi''(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{y}[a^2 \cdot \varphi''(u) + a^2 \cdot \psi''(v)].$$

Apoi:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}[\varphi(u) + \psi(v)] + \frac{1}{y}\left[\varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \psi'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{1}{y^2}[\varphi(u) + \psi(v)] +$$

$$+\frac{1}{y}[\varphi'(u) - \psi'(v)],$$

$$y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -[\varphi(u) + \psi(v)] + y[\varphi'(u) - \psi'(v)], \quad \text{iar:}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\left[\varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \psi'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \varphi'(u) - \psi'(v) + y \cdot \left[\varphi''(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} -\right.$$

$$\left.- \psi''(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\varphi'(u) + \psi'(v) + \varphi'(u) - \psi'(v) + y[\varphi''(u) + \psi''(v)] = y[\varphi''(u) + \psi''(v)].$$

Rezultă:

$$\frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{a^2}{y^2} \cdot y[\varphi''(u) + \psi''(v)] = \frac{a^2}{y}[\varphi''(u) + \psi''(v)] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

22. Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă $z(x, y) = f(u, v, w)$, $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$, $w = xy$, $(f \in C^2(D),\ \ D \subset I\!\!R^3)$.

Rezolvare. Calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Pentru derivata $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ avem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) +$$
$$+2\frac{\partial f}{\partial v} + 2x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right).$$

Derivata în raport cu x a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial u}$, care se face prin intermediul variabilelor sale u, v, w, este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}.$$

În mod asemănător avem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} + 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2x\left(2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\right) + 2x\left(2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\right.$$
$$\left.+2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\right) + y\left(2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} + 2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w} + y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) +$$
$$+4x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + 8x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} + 4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w},$$

(derivatele mixte sunt egale, deoarece $f \in C^2(D)$).

Să calculăm acum derivata de ordinul al doilea în raport cu y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + x\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - 2\frac{\partial f}{\partial v}-$$
$$-2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)-$$
$$-2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) + x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2y\left(2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\right) - 2y\left(2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - 2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\right.$$
$$\left.+x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\right) + x\left(2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} - 2y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w} + x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + 4y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+$$
$$+4y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} - 8y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} - 4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}.$$

Pentru derivata $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial w}+4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-4xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}+2(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}+2(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}.$$

23. Să se arate că funcţia $u(x,y)=\varphi(x\cdot y)+\sqrt{x\cdot y}\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$(\varphi,\ \psi\in C^2(I),\ \ I\subset \mathbb{R})$.

Rezolvare. Notăm cu u şi v argumentele funcţiei φ, respectiv ψ. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\varphi'(u)+\sqrt{y}\frac{1}{2\sqrt{x}}\psi(v)+\sqrt{xy}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\psi'(v)=y\varphi'(u)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}\psi(v)-$$
$$-x^{-3/2}y^{3/2}\psi'(v),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\varphi''(u)-\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}\psi(v)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\psi'(v)+\frac{3}{2}x^{-5/2}y^{3/2}\psi'(v)-$$
$$-x^{-3/2}y^{3/2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\psi''(v)=y^2\varphi''(u)-\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}\psi(v)+x^{-5/2}y^{3/2}\psi'(v)+x^{-7/2}y^{5/2}\psi''(v).$$

Apoi:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'(u)+\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{y}}\psi(v)+\sqrt{xy}\frac{1}{x}\psi'(v)=x\varphi'(u)+\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}\psi(v)+x^{-1/2}y^{1/2}\psi'(v),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\varphi''(u)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}\psi(v)+\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}\frac{1}{x}\psi'(v)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-1/2}\psi'(v)+$$
$$+x^{-1/2}y^{1/2}\frac{1}{x}\psi''(v)=x^2\varphi''(u)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}\psi(v)+x^{-1/2}y^{-1/2}\psi'(v)+x^{-3/2}y^{1/2}\psi''(v).$$

Atunci:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2y^2\varphi''(u)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}\psi(v)+x^{-1/2}y^{3/2}\psi'(v)+x^{-3/2}y^{5/2}\psi''(v)-$$
$$-x^2y^2\varphi''(u)+\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}\psi(v)-x^{-1/2}y^{3/2}\psi'(v)-x^{-3/2}y^{5/2}\psi''(v)=0.$$

24. Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii compuse:

a) $u(x,y,z)=f(\alpha,\beta,\gamma),\ \ \alpha=ax,\ \ \beta=by,\ \ \gamma=cz.$

b) $u(x,y)=f(\alpha,\beta,\gamma),\ \ \alpha=x^2+y^2,\ \ \beta=x^2-y^2,\ \ \gamma=2xy.$

c) $u(x,y,z)=f(t),\ \ t=xyz.$

d) $u(x,y,z)=f(\alpha,\beta,\gamma),\ \ \alpha=x^y,\ \ \beta=y^z,\ \ \gamma=z^x.$

Rezolvare. a) Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}=a\frac{\partial f}{\partial\alpha};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial y}=b\frac{\partial f}{\partial\beta};$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z}=c\frac{\partial f}{\partial\gamma}.$$

Apoi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2},\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2},\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2},\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ab\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta};\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=bc\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = ac\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}.$

Deci:

$$du(x,y,z) = a\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,\gamma)\,dx + b\frac{\partial f}{\partial\beta}(\alpha,\beta,\gamma)\,dy + c\frac{\partial f}{\partial\gamma}(\alpha,\beta,\gamma)\,dz \quad \text{şi}$$

$$d^2u(x,y,z) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}(\alpha,\beta,\gamma)\,dx^2 + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}(\alpha,\beta,\gamma)\,dy^2 + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}(\alpha,\beta,\gamma)\,dz^2+$$
$$+2ab\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}(\alpha,\beta,\gamma)\,dxdy + 2bc\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}(\alpha,\beta,\gamma)\,dydz + 2ac\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}(\alpha,\beta,\gamma)\,dxdz,$$

(cu $\alpha = ax,\ \ \beta = by,\ \ \gamma = cz$).

b) Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha} + 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\gamma},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha} - 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\gamma}.$$

Apoi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial\alpha} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\alpha}\cdot 2y\right) + 2\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot 2x+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\cdot 2y\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\cdot 2y\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+$$
$$+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2} + 8x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial f}{\partial\alpha} + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\cdot 2y - \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\alpha}\cdot 2x\right) - 2\frac{\partial f}{\partial\beta} - 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot 2y-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\cdot 2x\right) + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}\cdot 2y - \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\cdot 2x\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+$$
$$+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2} - 8y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma} - 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\alpha}\cdot 2y\right) - 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\cdot 2x+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\cdot 2y\right) + 2\frac{\partial f}{\partial\gamma} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\cdot 2y\right) = 2\frac{\partial f}{\partial\gamma} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}-$$
$$-4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2} + 4(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma} + 4(x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}.$$

Deci:

$$du(x,y) = \left[2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,\gamma) + 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\beta}(\alpha,\beta,\gamma) + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\gamma}(\alpha,\beta,\gamma)\right]dx+$$
$$+\left[2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,\gamma) - 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial\beta}(\alpha,\beta,\gamma) + 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial\gamma}(\alpha,\beta,\gamma)\right]dy \quad \text{şi}$$

$$d^2u(x,y) = \left[2\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\beta}\right) + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2} + 8x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+\right.$$

$$+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\Big]\,dx^2+2\left[2\frac{\partial f}{\partial\gamma}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}-4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+4(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+\right.$$
$$\left.+4(x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\right]dxdy+\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}-8y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+\right.$$
$$\left.+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}-8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\right]dy^2.$$

c) Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xzf'(t),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xyf'(t).$$

Apoi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2z^2f''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2z^2f''(t),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=x^2y^2f''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zf'(t)+$$
$$+xyz^2f''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xf'(t)+x^2yzf''(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=yf'(t)+xy^2zf''(t).$$

Deci:

$$du(x,y,z)=(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)f'(t)\quad \text{şi}$$

$$d^2u(x,y,z)=[(y^2z^2\,dx^2+x^2z^2\,dy^2+x^2y^2\,dz^2)f''(t)+2z(f'(t)+xyzf''(t))\,dxdy+$$
$$+2x(f'(t)+xyzf''(t))\,dydz+2y(f'(t)+xyzf''(t))\,dxdz]=(y^2z^2\,dx^2+x^2z^2\,dy^2+$$
$$+x^2y^2\,dz^2)f''(t)+2(z\,dxdy+x\,dydz+y\,dxdz)(f'(t)+xyzf''(t)).$$

d) Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}=yx^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z^x\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial y}=x^y\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+zy^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z}=y^z\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+xz^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}.$$

Apoi, derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+yx^{y-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)+z^x(\ln z)^2\frac{\partial f}{\partial\gamma}+z^x\ln z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)=$$
$$=y(y-1)x^{y-2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z^x(\ln z)^2\frac{\partial f}{\partial\gamma}+yx^{y-1}\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\alpha}\right]+z^x\ln z\times$$
$$\times\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\right]=y(y-1)x^{y-2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z^x(\ln z)^2\frac{\partial f}{\partial\gamma}+y^2x^{2y-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+$$
$$+z^{2x}(\ln z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2yx^{y-1}z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^y\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)+z(z-1)y^{z-2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+zy^{z-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)=$$
$$=x^y(\ln x)^2\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z(z-1)y^{z-2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+x^y\ln x\left[x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+zy^{z-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}\right]+$$
$$+zy^{z-1}\left[x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+zy^{z-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right]=x^y(\ln x)^2\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z(z-1)y^{z-2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+x^{2y}(\ln x)^2\times$$

$$\times\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+z^2y^{2z-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+2zy^{z-1}x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=y^z(\ln y)^2\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^z\ln y\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+x(x-1)z^{x-2}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)=$$

$$=y^z(\ln y)^2\frac{\partial f}{\partial\beta}+x(x-1)z^{x-2}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+y^z\ln y\left[y^z\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+xz^{x-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\right]+$$

$$+xz^{x-1}\left[y^z\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}+xz^{x-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\right]=y^z(\ln y)^2\frac{\partial f}{\partial\beta}+x(x-1)z^{x-2}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+y^{2z}(\ln y)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+$$

$$+x^2z^{2x-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2xy^zz^{x-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^y\ln x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)+zy^{z-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)=$$

$$=yx^{y-1}\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^y\ln x\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\alpha}\right]+zy^{z-1}\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+\right.$$

$$\left.+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\right]=yx^{y-1}\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^{2y-1}y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+x^yz^x\ln x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+$$

$$+x^{y-1}y^zz\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+z^{x+1}y^{z-1}\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=y^z\ln y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+z^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)=$$

$$=y^z\ln y\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma\partial\beta}\right]+z^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\cdot\left[yx^{y-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+\right.$$

$$\left.+z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}\right]=z^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{2x-1}\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+y^{z+1}x^{y-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+$$

$$+y^zz^x\ln y\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}+x^yyz^{x-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=zy^{z-1}\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^z\ln y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)+xz^{x-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)=$$

$$=zy^{z-1}\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^z\ln y\left[x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+zy^{z-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right]+xz^{x-1}\cdot\left[x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+\right.$$

$$\left.+zy^{z-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\right]=zy^{z-1}\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta}+zy^{2z-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+x^yy^z\ln y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+$$

$$+x^{y+1}z^{x-1}\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+xy^{z-1}z^x\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}.$$

Rezultă atunci:

$$du(x,y,z)=\left(yx^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z^x\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)dx+\left(x^y\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+zy^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)dy+$$

$$+\left(y^z\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+xz^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)dz \quad \text{şi}$$

$$d^2u(x,y,z)=\left[y(y-1)x^{y-2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z^x(\ln z)^2\frac{\partial f}{\partial\gamma}+y^2x^{2y-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+z^{2x}(\ln z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+\right.$$

$$+2yx^{y-1}z^x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}\Bigg]\,dx^2+\Bigg[x^y(\ln x)^2\frac{\partial f}{\partial\alpha}+z(z-1)y^{z-2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+x^{2y}(\ln x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+$$
$$+\,z^2y^{2z-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+2zy^{z-1}x^y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\Bigg]\,dy^2+\Bigg[y^z(\ln y)^2\frac{\partial f}{\partial\beta}+x(x-1)z^{x-2}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+$$
$$+y^{2z}(\ln y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+x^2z^{2x-2}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2xy^zz^{x-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\Bigg]\,dz^2+2\Bigg[yx^{y-1}\ln x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+x^{y-1}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+$$
$$+x^{2y-1}y\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+x^yz^x\ln x\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+x^{y-1}y^zz\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+z^{x+1}y^{z-1}\ln z\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\Bigg]\,dxdy+$$
$$+2\Bigg[z^{x-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{x-1}\ln z\frac{\partial f}{\partial\gamma}+xz^{2x-1}\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+y^{z+1}x^{y-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+y^zz^x\ln y\ln z\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}+$$
$$+x^yyz^{x-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}\Bigg]dxdz+2\Bigg[zy^{z-1}\ln y\frac{\partial f}{\partial\beta}+y^{z-1}\frac{\partial f}{\partial\beta}+zy^{2z-1}\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+x^yy^z\ln x\ln y\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+$$
$$+x^{y+1}z^{x-1}\ln x\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+xy^{z-1}z^x\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma}\Bigg]\,dydz.$$

25. Să se arate că dacă $f : E \to I\!R$ ($E \subset I\!R^2$ con cu vârful în origine) este o funcţie omogenă de grad n atunci avem relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y).$$

Să se generalizeze, apoi, relaţia de mai sus.

Rezolvare. Funcţia omogenă f satisface relaţia lui Euler:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=n\cdot f(x,y).$$

Derivând egalitatea de mai sus în raport cu x şi apoi în raport cu y, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=n\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(n-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\quad \text{şi}$$
$$x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\quad\Rightarrow\quad x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Înmulţim prima dintre relaţiile obţinute cu x şi a doua cu y. Prin adunare, rezultă:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\left(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

relaţie, care combinată cu relaţia lui Euler, ne conduce la egalitatea din enunţ.

În continuare vom demonstra prin inducţie matematică următoarea relaţie:

$$\left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{p\}}f(x,y)=\frac{n!}{(n-p)!}f(x,y),\ \ p\le n.$$

Pentru $p=1$ avem exact relaţia lui Euler. Să presupunem relaţia de mai sus adevărată pentru $p\in I\!N^*$ şi o vom demonstra pentru $(p+1)$:

$$\left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{p+1\}}f(x,y)=\frac{n!}{(n-p-1)!}f(x,y).$$

Pentru aceasta, relaţia pentru p, scrisă sub forma:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} y^k \cdot \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k} = \frac{n!}{(n-p)!} f(x,y)$$

o vom deriva în raport cu x, apoi în raport cu y. Obţinem:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k y^k \left[(p-k)x^{p-k-1}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k} + x^{p-k}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-k+1}\partial y^k}\right] = \frac{n!}{(n-p)!}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} \left[k y^{k-1}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k} + y^k\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-k}\partial y^{k+1}}\right] = \frac{n!}{(n-p)!}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Înmulţim prima relaţie obţinută cu x, iar a doua cu y şi apoi le adunăm. Rezultă:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k \left[(p-k)y^k x^{p-k} + k y^k x^{p-k}\right]\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k} + \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p+1-k} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1-k}\partial y^k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} y^{k+1}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-k}\partial y^{k+1}} = \frac{n!}{(n-p)!}\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

de unde deducem:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p+1-k} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1-k}\partial y^k} + \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} y^{k+1}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-k}\partial y^{k+1}} = \frac{n!}{(n-p)!} n f(x,y) -$$

$$-p\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p-k} y^k \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k} = \frac{n!}{(n-p)!} n f(x,y) - p\frac{n!}{(n-p)!} f(x,y) =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}(n-p) f(x,y) = \frac{n!}{(n-p-1)!} f(x,y).$$

Schimbând indicele cu o unitate în suma a doua a primului membru din şirul de egalităţi de mai sus, obţinem:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p+1-k} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1-k}\partial y^k} + \sum_{k=1}^{p+1} C_p^{k-1} x^{p-k+1} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-k+1}\partial y^k} = \frac{n!}{(n-p-1)!} f(x,y)$$

sau

$$C_p^0 x^{p+1}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p}\left(C_p^k + C_p^{k-1}\right) x^{p+1-k} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1-k}\partial y^k} + C_p^p y^{p+1}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p-1)!} f(x,y).$$

Astfel am obţinut relaţia pentru $(p+1)$:

$$\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k x^{p+1-k} y^k \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1-k}\partial y^k} = \frac{n!}{(n-p-1)!} f(x,y) \quad \text{sau}$$

$$\left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{p+1\}} f(x,y) = \frac{n!}{(n-p-1)!} f(x,y).$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

26. Să se calculeze, folosind definiţia, următoarele derivate parţiale:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ pentru $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1,3)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(2,2,0)$ pentru $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

27. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=xy+x^y$; b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; c) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$; e) $f(x,y,z)=x^{y/z}$; f) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

g) $f(x,y,z)=\sin\left(x\sin\left(y\sin z\right)\right)$,

(funcţiile fiind definite pe domeniile lor de definiţie).

28. Să se verifice că ordinea de derivare nu schimbă valoarea derivatei, şi anume avem: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=\sin\left(ax+by\right)$; b) $f(x,y)=x^{y^2}$; c) $f(x,y)=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

d) $f(x,y)=x^2\cdot\ln(1+xy)$.

29. Arătaţi că funcţiile de mai jos satisfac relaţiile indicate:

a) $f(x,y)=y\cdot\ln\left(x^2-y^2\right)$; $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{f}{y^2}$.

b) $f(x,y)=xy+x\cdot e^{y/x}$; $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=xy+f$.

c) $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$; $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=2$.

d) $f(x,y,z)=\ln\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z\right)$; $\sin 2x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin 2y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\sin 2z\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}=2$.

e) $f(x,y,z)=x+\dfrac{x-y}{y-z}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}=1$.

f) $f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$.

30. Arătaţi că funcţiile de mai jos satisfac relaţiile indicate:

a) $f(x,y)=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

b) $f(x,y,z)=\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]^{-1/2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$.

c) $f(x,y,z)=e^{xyz}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=xy\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+f$.

d) $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2-y^2}{xy}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}-\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}-\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=2\left(\dfrac{1}{y^3}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

31. Se consideră funcţia $f(x,y,z)=y^2z^2e^{-x}+x^2z^2e^{-y}+x^2y^2e^{-z}$. Să se arate că derivatele ei parţiale verifică relaţia:

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x^3\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^7 f}{\partial x^2\partial y^3\partial z^2}+\frac{\partial^7 f}{\partial x^2\partial y^2\partial z^3}+\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}=0.$$

32. Să se studieze proprietatea de diferenţiabilitate a funcţiei f în punctul $(0,0)$ şi existenţa derivatelor parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ într-un punct (x,y) arbitrar din $I\!R^2$, unde:

a) $f: I\!R^2 \to I\!R,\quad f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

b) $f: I\!R^2 \to I\!R,\quad f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

33. Fie funcţia:

$$f: I\!R^2 \to I\!R,\quad f(x,y) = \begin{cases} y^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & \text{dacă } y\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } y=0.\end{cases}$$

Să se arate că există derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte ale funcţiei f în orice punct $(x,y)\in I\!R^2$, dar acestea nu sunt continue în $(0,0)$.

34. Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; b) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

c) $f(x,y)=e^{x+y}\cdot(x\cos y+y\sin x)$; d) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{2(x+\sin y)}{4-x\sin y}$;

e) $f(x,y,z)=x^{y^z}$.

35. Se determină latura a a triunghiului ABC cu o eroare relativă de $2/1000$, iar unghiurile B şi C au erori absolute de $10'$ şi $15'$ de arc. Să se exprime în procente eroarea relativă cu care va fi cunoscută suprafaţa triunghiului.

36. Fie funcţia $f: I\!R^2\to I\!R$ definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(y-x^2)^2+x^4}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se studieze existenţa derivatei funcţiei f în punctul $(0,0)$ după versorul $\vec{v}=$ $=\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath},\ \ \theta\in[0,2\pi)$.

37. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y)=5x^2-3x-y-1$ în punctul $M(2,1)$ după direcţia $\overrightarrow{MN}$, unde $N(3,4)$.

38. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ în punctul $M(1,1,1)$ după direcţia $\overrightarrow{MN}$, ştiind că $N(2,3,-4)$.

39. Să se calculeze derivatele după versorul $\vec{v}=\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath},\ \ \theta\in[0,2\pi)$ ale următoarelor funcţii în punctele precizate:

a) $f(x,y)=x^2-2xy-y^3$ în punctul $M(2,-1)$.

b) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ în punctul $M(0,\pi/2)$.

40. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial w}{\partial z}$ dacă $w(x,y,z)=f(u,v),\ u=ax+by+cz,\ v=ax-by-cz,$ $(f\in C^1(D),\ D\subset \mathbb{R}^2)$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z(x,y)=f(u,v),\ u=x^2+y^2,\ v=xy,\ (f\in C^1(D),\ D\subset \mathbb{R}^2)$.

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v},\ u=x\sin y,\ v=y\sin x$.

d) $\dfrac{dz}{dt}$, dacă $z(t)=e^{x^2+y^2},\ x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

41. Fie funcţia $z(x,y)=f\left(\dfrac{x}{y},x^y\right)+y\cdot g(x+y)$, unde f şi g sunt funcţii diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $E(x,y)=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

b) Să se arate că $E(x,y)=3(x+y)^2$, dacă $f(u,v)=g(u)=u^2,\ \forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

42. Arătaţi că funcţiile de mai jos verifică egalităţile scrise alăturat:

a) $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2),\quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2},\quad (\varphi\in C^1(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

b) $z=xy\cdot\varphi(x^2-y^2),\quad xy^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot(x^2+y^2),\quad (\varphi\in C^1(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

c) $z=\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)\cdot\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right),\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-a},\quad (\varphi\in C^1(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

d) $z=\sin y\cdot\varphi(\sin x-y),\quad \dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\operatorname{ctg} y,\quad (\varphi\in C^1(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

e) $u=\sin x+f(\sin y-\sin x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos y=\cos x\cdot\cos y,\quad (f\in C^1(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

43. Să se arate că $\forall\, f,\ g\in C^2(\mathbb{R})$ funcţia $z(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$ satisface relaţia: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

44. Să se arate că funcţia $u(x,y)=x\cdot f\left(\dfrac{x}{y}\right)+y\cdot g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ verifică relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$(f,\ g\in C^2(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

45. Să se arate că funcţia $z(x,y)=\dfrac{x}{y}\left[f(y)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$ verifică relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$(f,\ g\in C^2(I),\ I\subset\mathbb{R})$.

46. Să se arate că funcţia $u(x,y)=x^n\cdot\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+y^{-n}\cdot\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifică relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=n^2\cdot u,$$

$(\varphi,\ \psi\in C^2(I),\ \ I\subset I\!R)$.

47. Să se arate că funcţia $u(x,y)=x^n\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică relaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)\cdot u,$$

$(\varphi,\ \psi\in C^2(I),\ \ I\subset I\!R)$.

48. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcţiei $u(x,y,z)=\varphi(t)$, unde $t=ax+by+cz$, $(\varphi\in C^n(I),\ \ I\subset I\!R)$.

49. Să se calculeze $\frac{\partial^n u}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n u}{\partial y^n},\ \frac{\partial^n u}{\partial z^n}$ dacă $u(x,y,z)=\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, $\xi=ax$, $\eta=$ $=by$, $\zeta=cz$, $(\ \varphi\in C^n(D),\ \ D\subset I\!R^3)$.

50. Să se verifice relaţia lui Euler pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=x^3+y^3-2xy(x+y)$; b) $f(x,y)=\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

c) $f(x,y,z)=\dfrac{ax+by+cz}{x^2+y^2+z^2}$.

§2. FORMULA LUI TAYLOR, FUNCŢII IMPLICITE, DEPENDENŢĂ ŞI INDEPENDENŢĂ FUNCŢIONALĂ

Teorema 1 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange). Fie $f\in C^{N+1}(D)$, unde $D\subset I\!R^n$ este o mulţime deschisă şi convexă (adică $\forall\,\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\in D,\ \ t\vec{x}_1+(1-t)\vec{x}_2\in$ $\in D,\ \ \forall\, t\in(0,1)$). Atunci pentru $\forall\,\vec{x}_0,\ \vec{x}\in D\ \exists\,\vec{\xi}_N\in(\vec{x}_0,\vec{x})$ astfel încât:

$$f(\vec{x})=T_N(\vec{x})+\frac{1}{(N+1)!}\,d^{N+1}f(\vec{\xi}_N)(\vec{x}-\vec{x}_0),$$

unde $T_N(\vec{x})$ este polinomul lui Taylor de grad N a funcţiei f în $\vec{x}_0$:

$$T_N(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\,d^kf(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0),$$

$(\vec{\xi}_N=\vec{x}_0+\theta_N(\vec{x}-\vec{x}_0),\ \ \theta_N\in(0,1))$.

Pentru $\vec{x}_0=\vec{0}$ formula de mai sus este cunoscută şi sub numele de formula lui Mac-Laurin.

Teorema 2 (existenţa şi continuitatea funcţiilor definite implicit). Fie funcţia $F:D=A\times I\subset I\!R^{n+1}\to I\!R$ ($A\subset I\!R^n$ mulţime deschisă, $I\subset I\!R$ interval deschis) şi $(\vec{x}_0,y_0)\in D$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

a) $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$;

b) $\exists$ o vecinătate $U \subset A$ a punctului $\vec{x}_0$ şi $\exists$ o vecinătate $V \subset I$ a punctului y_0 astfel încât:

i) pentru $\forall x \in U$ fixat, funcţia $y \to F(\vec{x}, y)$ este continuă şi strict monotonă pe V;

ii) pentru $\forall\, y \in V$ fixat, funcţia $\vec{x} \to F(\vec{x}, y)$ este continuă în $\vec{x}_0$;

atunci:

1) $\exists$ o vecinătate U_0 a punctului $\vec{x}_0$ şi o vecinătate V_0 a lui y_0 astfel încât pentru $\forall\, \vec{x} \in U_0$ fixat ecuaţia în y: $F(\vec{x}, y) = 0$ are o soluţie unică $y = f(\vec{x})$, $\ y \in V_0$, pentru care $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$ în U_0;

2) funcţia $f : U_0 \to V_0$ este continuă în $\vec{x}_0$ şi verifică egalitatea $f(\vec{x}_0) = y_0$.

Corolar 1. Dacă în enunţul teoremei se înlocuieşte ipoteza ii) cu:

ii') pentru $\forall\, y \in V$ fixat, funcţia $\vec{x} \to F(\vec{x}, y)$ este continuă pe U,

atunci funcţia definită implicit f este continuă pe U_0.

Teorema 3. Fie funcţia $F : D = A \times I \subset I\!\!R^{n+1} \to I\!\!R$ ($A \subset I\!\!R^n$ mulţime deschisă, $I \subset I\!\!R$ interval deschis) şi $(\vec{x}_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

a) $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$;

b) $F \in C^1(U \times V)$, unde U este o vecinătate a punctului $\vec{x}_0$, iar V este o vecinătate a punctului y_0;

c) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$,

atunci:

1) $\exists$ o vecinătate U_0 a punctului $\vec{x}_0$ şi o vecinătate V_0 a punctului y_0 şi o funcţie $f : U_0 \to V_0$ astfel încât $f(\vec{x}_0) = y_0$ şi $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$, $\ \forall\, x \in U_0$;

2) funcţia f are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe U_0 date de:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}, f(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, f(\vec{x}))}, \ \ \forall\, \vec{x} \in U_0, \ \ i = \overline{1, n};$$

3) dacă în plus F are derivate parţiale de ordinul k continue pe $U \times V$ atunci funcţia implicită f are derivate parţiale de ordinul k continue pe U_0.

Teorema 4. Fie funcţia $\vec{F} : D = A \times B \subset I\!\!R^{n+m} \to I\!\!R^m$ ($A \subset I\!\!R^n$, $B \subset I\!\!R^m$ mulţimi deschise), $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ şi $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

a) $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$;

b) funcţiile $F_j \in C^1(U \times V)$, $\ j = \overline{1, m}$, unde U este o vecinătate a punctului $\vec{x}_0$, iar V este o vecinătate a punctului $\vec{y}_0$;

c) $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \det \nabla_{\vec{y}} \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$

atunci:

1) $\exists$ o vecinătate $U_0 \times V_0$ a punctului $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ şi o funcţie vectorială unică $\vec{f}: U_0 \to V_0$, $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x}))$ a.î. $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ şi $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ în U_0;

2) funcţiile $f_j : U_0 \to I\!R$, $j = \overline{1,m}$ au derivate parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ continue în U_0, aceste derivate fiind soluţiile sistemului:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\vec{x}) = -\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{y}), \quad i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ \vec{y} = \vec{f}(\vec{x});$$

3) dacă în plus funcţiile F_j, $j = \overline{1,m}$ au derivate parţiale de ordinul k continue pe $U \times V$ atunci funcţiile f_j, $j = \overline{1,m}$ vor avea derivate parţiale de ordinul k continue pe U_0,

$$\text{(unde } \nabla_{\vec{y}} \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\vec{x}, \vec{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\vec{x}, \vec{y}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(\vec{x}, \vec{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix},$$

iar $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(\vec{x}, \vec{y}) = \det \nabla_{\vec{y}} \vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$ sunt *gradientul*, respectiv *iacobianul* funcţiei $\vec{F}$ în raport cu $\vec{y}$ în punctul $(\vec{x}, \vec{y})$).

Fie $\vec{f} : E \subset I\!R^n \to I\!R^n$, E mulţime deschisă. Transformarea $T : E \subset I\!R^n \to F = \vec{f}(E) \subset I\!R^n$, dată prin ecuaţiile $T : y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$ este o *tranformare regulată* în punctul $\vec{x}_0 \in E$ dacă $\exists$ şi sunt continue derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = \overline{1,n})$ pe o vecinătate V a punctului $\vec{x}_0$ şi:

$$J(\vec{x}_0) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\vec{x}_0) = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\vec{x}_0) = \det \nabla \vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0.$$

Dacă transformarea T este regulată în punctul $\vec{x}_0 \in E$ atunci ea este regulată într-o vecinătate a lui $\vec{x}_0$. O transformare regulată în $\vec{x}_0$ este diferenţiabilă în $\vec{x}_0$, deci continuă în x_0.

Mulţimea $E \subset I\!R^n$ este *conexă* dacă ea nu se poate reprezenta ca reuniune de două mulţimi simultan deschise şi închise sau, echivalent (în spaţiul $I\!R^n$), orice două puncte din E pot fi unite printr-un arc de curbă complet conţinut în mulţimea E. O mulţime $E \subset I\!R^n$ se numeşte *domeniu* dacă este deschisă şi conexă.

Iacobianul unei transformări regulate pe un domeniu E păstrează semn constant în acest domeniu.

Teorema 5 (derivarea funcţiilor inverse). Fie E o mulţime deschisă din $I\!R^n$.

Dacă transformarea T este regulată în punctul $\vec{x}_0 \in E$ atunci:

i) $\exists$ o vecinătate $U_0 \subset E$ a punctului $\vec{x}_0$ şi o vecinătate $V_0 \subset F = \vec{f}(E)$ a punctului $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$ a.î. restricţia T la U_0 este o bijecţie a lui U_0 pe V_0.

ii) Transformarea inversă $\vec{y} \to \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{y}) = (\varphi_1(\vec{y}), \ldots, \varphi_n(\vec{y})) \in U_0$, $\vec{y} \in V_0$ satisface condiţiile $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(\vec{y}_0)$, este regulată în $\vec{y}_0$ şi, în plus:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(\vec{y}_0) = \left(\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\vec{x}_0)\right)^{-1}.$$

Vom spune că funcţia $\varphi : E \subset I\!R^n \to I\!R$ *depinde de funcţiile* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe o mulţime $D \subset E$ dacă $\exists$ funcţia $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ definită pe o mulţime $B \subset I\!R^m$ a.î. $\varphi(\vec{x}) = \Phi(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$, $\forall \vec{x} \in D$. Sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ se numeşte *funcţional dependent pe* D dacă cel puţin una din funcţiile sistemului depinde de celelalte. Sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ se numeşte *funcţional independent în* $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ dacă nu există nici o vecinătate a lui $\vec{x}_0$ a.î. una dintre ele să depindă de celelalte pe acea vecinătate. Funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt independente pe o mulţime deschisă $D \subset E$ dacă sunt independente în orice punct $x \in D$.

Teorema 6. Fie funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \subset I\!R^n \to I\!R$, D mulţime deschisă. Dacă aceste funcţii au derivate parţiale de ordinul întâi continue într-o vecinătate $V \subset D$ a punctului $\vec{x}_0 \in D$ şi dacă rangul matricei $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ într-un punct $\vec{x}_1 \in V$ este egal cu numărul funcţiilor m atunci funcţiile sunt independente în $\vec{x}_0$.

Teorema 7. Fie funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \subset I\!R^n \to I\!R$, D deschisă şi $\vec{x}_0 \in D$. Dacă funcţiile f_i, $i = \overline{1,m}$ au derivatele parţiale de ordinul întâi continue într-o vecinătate $U \subset D$ a punctului $\vec{x}_0$ şi dacă rangul matricei $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ este egal cu $s \leq m$ în U atunci printre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ există s funcţii independente pe U, iar celelalte $m - s$ depind de acestea.

Corolar 2. Condiţia necesară şi suficientă ca n funcţii $f_1, \ldots, f_n : D \to I\!R$ ($D \subset$ $\subset I\!R^n$ deschisă), cu derivate parţiale de ordinul întâi continue pe D, să fie dependente funcţional pe D este ca determinantul funcţional $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ să fie identic nul.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se dezvolte funcţia $f(x, y) = e^x \sin y$ până la termenii de ordinul al treilea cu ajutorul formulei lui Mac-Laurin.

Rezolvare. Conform formulei lui Taylor pentru $(x_0, y_0) = (0, 0)$, avem:

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(0,0) + R_3,$$

unde R_3 este restul scris sub forma lui Lagrange astfel:

$$R_3 = \frac{1}{4!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{4\}} f(\xi,\eta), \quad \text{cu} \quad (\xi,\eta) = \theta(x,y), \quad \theta \in (0,1).$$

Să calculăm derivatele parţiale ale lui f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = -e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = e^x \sin y.$$

Atunci: $f(x,y) = y + xy + \dfrac{1}{3!}(3x^2y - y^3) + R_3$,

unde $R_3 = \dfrac{1}{4!}\left(e^\xi \sin\eta\, x^4 + 4e^\xi \cos\eta\, x^3 y - 6e^\xi \sin\eta\, x^2y^2 - 4e^\xi \cos\eta\, xy^3 + e^\xi \sin\eta\, y^4\right)$,
cu $\xi = \theta x$, $\eta = \theta y$, $\theta \in (0,1)$.

2. Să se dezvolte funcţia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ cu ajutorul formulei lui Taylor în vecinătatea punctului $M_0(1,1,1)$.

Rezolvare. Avem:

$$f(x,y,z) = f(1,1,1) + \frac{1}{1!}\left[(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) + (z-1)\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) + (y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) + (z-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) + 2(x-1)(y-1)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) + 2(y-1)(z-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) + 2(x-1)(z-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1)\right].$$

Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei f:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = (2x+2y-4)|_{M_0} = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = (2y+2x-z-3)|_{M_0} = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) =$
$= (2z - y - 1)|_{M_0} = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) = 2$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) = -1$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) = 0$.

Deoarece $f(1,1,1) = 0$, obţinem:

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)(z-1).$$

3. Să se găsească creşterea funcţiei $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ atunci când se trece de la valorile $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ la valorile $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$.

Rezolvare. Creşterea funcţiei, adică $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ o evaluăm cu ajutorul formulei lui Taylor:

$$\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{1!}\left[(x_1 - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y_1 - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{1\}} f(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y_1-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{2\}} f(x_0, y_0)+\frac{1}{3!}\left[(x_1-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y_1-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{3\}} f(x_0, y_0),$$

$(R_3 = 0)$.

Derivatele parţiale ale funcţiei f în punctul $(1, 2)$ sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = (3x^2 + 3y)|_{(1,2)} = 9; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = (-6y^2 + 3x)|_{(1,2)} = -21;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 6x|_{(1,2)} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = -12y|_{(1,2)} = -24;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1, 2) = 6; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1, 2) = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1, 2) = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1, 2) = -12.$$

Deci: $\Delta f = 9h - 21k + \frac{1}{2}(6h^2 + 6hk - 24k^2) + \frac{1}{6}(6h^3 - 12k^3) =$

$= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.$

4. Să se scrie dezvoltarea polinomului: $P(x, y) = x^2y - 2xy + 2x^2 - 4x + y + 2$ după puterile lui $(x - 1)$ şi $(y + 2)$.

Rezolvare. Conform formulei lui Taylor, avem:

$$P(x, y) = P(1, -2) + \frac{1}{1!}\left[(x - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (y + 2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{1\}} P(1, -2) + \frac{1}{2!}\left[(x - 1)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(y + 2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{2\}} P(1, -2) + \frac{1}{3!}\left[(x - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (y + 2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{3\}} P(1, -2), \quad (R_3 = 0).$$

Calculând derivatele funcţiei f în punctul $(1, -2)$, obţinem:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(1, -2) = (2xy - 2y + 4x - 4)|_{(1,-2)} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(1, -2) = (x^2 - 2x + 1)|_{(1,-2)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1, -2) = (2y+4)|_{(1,-2)} = 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(1, -2) = (2x-2)|_{(1,-2)} = 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, -2) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}(1, -2) = 0; \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y}(1, -2) = 2; \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y^2}(1, -2) = 0; \quad \frac{\partial^3 P}{\partial y^3}(1, -2) = 0.$$

Deoarece $P(1, -2) = 0$, obţinem: $P(x, y) = (x - 1)^2(y + 2)$.

5. Să se calculeze aproximativ numărul $N = \sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$ plecând de la valoarea funcţiei $z(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ pentru $x_0 = \pi/2$ rad. şi $y_0 = 0$, $(\pi/2 \simeq 1,571)$.

Rezolvare. Pe numărul $N = z(1,55;\ 0,015)$ îl vom aproxima astfel:

$$z(1,55;\ 0,015) \simeq z(x_0, y_0) + (1,55 - x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + (0,015 - y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

(am considerat prima aproximaţie - diferenţiala întâia din formula lui Taylor).

Deoarece:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\left.\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+8e^y}}\right|_{(\pi/2,0)}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\left.\frac{4e^y}{\sqrt{\sin^2 x+8e^y}}\right|_{(\pi/2,0)}=\frac{4}{3},$$

iar $z(x_0,y_0)=3$, obţinem: $N\simeq 3+0,015\cdot\dfrac{4}{3}=3,02$.

6. Să se calculeze derivatele y' şi y'' ale funcţiei $y=y(x)$ pentru:

a) $x=1$ şi $y=1$ dacă funcţia y este definită prin: $4x^2-xy+y^2-4=0$.

b) $x=0$ şi $y=0$ dacă funcţia y este definită prin: $x\cos y+y\cos x+\sin x+\sin y=0$.

Rezolvare. a) Să notăm cu $F(x,y)=4x^2-xy+y^2-4$. Deoarece F împreună cu toate derivatele sale de ordinele întâi şi doi sunt continue pe $I\!R^2$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)=(-x+$ $+2y)|_{(1,1)}=1\neq 0$, rezultă, conform Teoremei 3, că funcţia F defineşte în vecinătatea punctului 1 o funcţie $y=y(x)$ a cărei derivată în punctul $x=1$ este:

$$y'(1)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right|_{(x,y)=(1,1)}=-\left.\frac{8x-y}{-x+2y}\right|_{(1,1)}=-7.$$

Pentru derivata de ordinul al doilea a funcţiei y în punctul $x=1$, avem:

$$y''(1)=-\left.\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\right|_{(1,1)}=$$

$$=-\left.\frac{8(-x+2y)^2-2\cdot(-1)\cdot(8x-y)(-x+2y)+2(8x-y)^2}{(-x+2y)^3}\right|_{(1,1)}=-120.$$

O altă metodă de calcul a derivatelor y' şi y'' este derivarea relaţiei din enunţ funcţie de x, ţinând cont de funcţia $y=y(x)$:

$$8x-y-xy'+2yy'=0\quad\Rightarrow\quad y'(x)=\frac{8x-y}{x-2y}.$$

Deci $y'(1)=-7$. Pentru derivata a doua, derivăm y' găsit mai sus:

$$y''(x)=\frac{(8-y')(x-2y)-(8x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}.$$

În punctul $x=1$ avem: $y''(1)=\dfrac{15\cdot(-1)-7\cdot 15}{1}=-120$.

b) Fie $F(x,y)=x\cos y+y\cos x+\sin x+\sin y$. Deoarece:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=(-x\sin y+\cos x+\cos y)|_{(0,0)}=2\neq 0,$$

avem: $$y'(0)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right|_{(0,0)}=-\left.\frac{\cos y-y\sin x+\cos x}{-x\sin y+\cos x+\cos y}\right|_{(0,0)}=-1,$$

iar: $$y''(0)=-\frac{(-y\cos x-\sin x)(-x\sin y+\cos x+\cos y)^2}{(-x\sin y+\cos x+\cos y)^3}-$$

$$-\frac{2(-\sin y-\sin x)(\cos y-y\sin x+\cos x)(-x\sin y+\cos x+\cos y)}{(-x\sin y+\cos x+\cos y)^3}+$$

$$+\left.\frac{(-x\cos y-\sin y)(\cos y-y\sin x+\cos x)^2}{(-x\sin y+\cos x+\cos y)^3}\right|_{(0,0)}=0.$$

7. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pentru $x = y = 2$, $z = 0$ dacă funcţia $z = z(x, y)$ este definită prin: $(x+y)e^z - xy - z = 0$.

Rezolvare. Funcţia $F(x, y, z) = (x+y)e^z - xy - z$ satisface toate condiţiile din Teorema 3 $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,2,0) = (x+y)e^z - 1|_{(2,2,0)} = 3 \neq 0\right)$. Conform formulei de calcul, avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,2) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\right|_{(2,2,0)} = -\frac{e^z - y}{(x+y)e^z - 1}\Big|_{(2,2,0)} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,2) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\right|_{(2,2,0)} = -\frac{e^z - x}{(x+y)e^z - 1}\Big|_{(2,2,0)} = \frac{1}{3}.$$

Apoi: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,2) = -\left.\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}\right|_{(2,2,0)} =$$

$$= -\frac{-2e^z(e^z - y)\left[(x+y)e^z - 1\right] + (x+y)e^z(e^z - y)^2}{[(x+y)e^z - 1]^3}\Big|_{(2,2,0)} = -\frac{10}{27},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,2) = -\left.\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}\right|_{(2,2,0)} =$$

$$= -\frac{(-1)[(x+y)e^z - 1]^2 - e^z(e^z - x)[(x+y)e^z - 1] - e^z(e^z - y)[(x+y)e^z - 1]}{[(x+y)e^z - 1]^3} +$$

$$+ \frac{(x+y)e^z(e^z - y)(e^z - x)}{[(x+y)e^z - 1]^3}\Big|_{(2,2,0)} = -\frac{1}{27}, \text{ iar:}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,2) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3} =$$

$$= -\frac{-2e^z(e^z - x)[(x+y)e^z - 1] + e^z(x+y)(e^z - x)^2}{[(x+y)e^z - 1]^3} = -\frac{10}{27}.$$

Rezultatele de mai sus le putem găsi şi prin derivarea relaţiei din enunţ în raport cu x şi apoi cu y, ţinând cont că z este funcţie de x şi y:

$$e^z + (x+y)e^z\frac{\partial z}{\partial x} - y - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - e^z}{(x+y)e^z - 1} \quad \text{şi}$$

$$e^z + (x+y)e^z\frac{\partial z}{\partial y} - x - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - e^z}{(x+y)e^z - 1}.$$

Deci: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,2) = \dfrac{1}{3}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,2) = \dfrac{1}{3}$.

Derivând în continuare prima dintre relaţiile găsite mai sus $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, în raport cu x şi apoi cu y, iar a doua relaţie $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ în raport cu y vom determina derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\left[(x+y)e^z-1\right] - (y-e^z)\cdot\left[e^z + (x+y)e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{[(x+y)e^z-1]^2} =$$
$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left[-e^{2z}(x+y)+e^z-(y-e^z)(x+y)e^z\right]-e^z(y-e^z)}{[(x+y)e^z-1]^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\left(1-e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\left[(x+y)e^z-1\right]-(y-e^z)\left[e^z+(x+y)e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]}{[(x+y)e^z-1]^2} =$$
$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial y}\left[-(x+y)e^{2z}+e^z-(y-e^z)(x+y)e^z\right]+(x+y)e^z-1-(y-e^z)e^z}{[(x+y)e^z-1]^2},$$
iar: $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}[(x+y)e^z-1]-\left[e^z+(x+y)e^z\frac{\partial z}{\partial y}\right](x-e^z)}{[(x+y)e^z-1]^2} =$$
$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial y}\left[-(x+y)e^{2z}+e^z-(x+y)e^z(x-e^z)\right]-e^z(x-e^z)}{[(x+y)e^z-1]^2}.$$
Derivatele cerute sunt:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,2) = -\frac{10}{27},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,2) = -\frac{1}{27},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,2) = -\frac{10}{27}.$$

8. Fie relaţia $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ şi $f(x,y,z)=xy^2z^3$. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$ dacă $z=z(x,y)$ este o funcţie implicită definită de relaţia de mai sus.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$ dacă $y=y(x,z)$ este o funcţie implicită definită de relaţia de mai sus.

Rezolvare. a) Derivata funcţiei f în raport cu variabila x, ţinând cont de faptul că z este funcţie de x şi y, este:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = y^2z^3 + 3xy^2z^2\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}.$$
Derivând relaţia din enunţ în raport cu x, obţinem:
$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \text{ de unde rezultă că: } \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-2x}{2z-3xy}.$$
În punctul $(1,1)$, avem: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-1$ $(z=1)$, iar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=1+3\cdot(-1)=-2$.

b) Procedând în mod asemănător punctului a), avem:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = y^2z^3 + 2xyz^3\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}.$$
Derivând relaţia din enunţ în raport cu x, unde y este funcţie de x şi z, obţinem:
$$2x+2y\frac{\partial y}{\partial x}-3yz-3xz\frac{\partial y}{\partial x}=0, \text{ de unde rezultă că: } \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{3yz-2x}{2y-3xz}.$$
În punctul $(1,1)$ avem: $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1)=-1$ $(y=1)$, iar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=-1$.

9. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z=z(x,y)$ este o funcţie implicită definită prin relaţia:
$$F(x-y,y-z,z-x)=0, \quad (F\in C^1(D),\ D\subset I\!R^3).$$
b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ dacă $z=z(x,y)$ este o funcţie implicită definită prin relaţia:

$$G(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0, \quad (G \in C^2(D), \;\; D \subset I\!R^2).$$

Rezolvare. a) Derivând relaţia din enunţ $F=0$ în raport cu x, prin intermediul variabilelor u, v şi w ale funcţiei F, obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0.$$

De aici deducem că: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial v}}$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial w}\neq\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)$.

Derivând acum relaţia $F=0$ în raport cu y, obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial F}{\partial u}\cdot(-1)+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

De aici rezultă că: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial v}}$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial w}\neq\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)$.

Putem calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ folosind şi formulele:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial w}}{-\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial w}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial v}} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}}=-\frac{-\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}}{-\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial w}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

b) Derivăm relaţia din enunţ $G=0$ în raport cu y, prin intermediul variabilelor u şi v ale funcţiei G:

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\left(2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

De aici rezultă că: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-\frac{\partial G}{\partial u}-2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\dfrac{\partial G}{\partial v}}$, $\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\dfrac{\partial G}{\partial v}\neq 0\right)$.

Derivând în continuare pe $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ în raport cu x, ţinând cont că $\dfrac{\partial G}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial G}{\partial v}$ depind de x prin intermediul variabilelor lor u şi v, obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-\left[\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+2y\cdot\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2}+$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}+2z\cdot\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+2y\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}+2y\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2}+$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)\cdot\left[2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+2z\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}+2z\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}+2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2}=$$

$$= \frac{2\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\right)\cdot\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)\cdot\left(2x + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} + 2x\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} - 2x\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\left[2\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right) + 2(y-z)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}\right)\right]\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2} +$$

$$+ \frac{4(y-z)z\left(\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2}.$$

Derivând relaţia $G = 0$ în raport cu x obţinem:

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\left(2x + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

de unde deducem că: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\frac{\partial G}{\partial u} - 2x\cdot\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}}$.

Înlocuind această derivată $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ în expresia lui $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, rezultă, în urma calculelor:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{2\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2y\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2x\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^3} -$$

$$-\frac{4(y-z)(x-z)\cdot\left[\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} - 2\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]}{\left(\frac{\partial G}{\partial u} + 2z\cdot\frac{\partial G}{\partial v}\right)^3}.$$

10. a) Să se arate că dacă $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$ defineşte în mod implicit funcţia $z = z(x,y)$ atunci are loc relaţia: $z\cdot\sin z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} - y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

b) Să se arate că dacă $x^2 + y^2 - 2xz - 2yf(z) = 0$ defineşte implicit funcţia $z = z(x,y)$ atunci are loc relaţia:

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (f\in C^1(I),\ I\subset \mathbb{R}).$$

Rezolvare. a) Calculăm mai întâi derivatele parţiale ale funcţiei z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{-y}{\sin z+(y+z)\cos z-y} \quad \text{şi}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{\sin z-x-z}{\sin z+(y+z)\cos z-y},$$
unde $F(x,y,z)=(y+z)\sin z-y(x+z),\quad (\sin z+(y+z)\cos z-y\neq 0)$.

Atunci:
$$z\cdot\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yz\sin z+y^2\sin z-y^2(x+z)}{\sin z+(y+z)\cos z-y}=\frac{-y[y(x+z)-(y+z)\sin z]}{\sin z+(y+z)\cos z-y}=0,$$
conform relaţiei iniţiale.

b) Derivatele parţiale ale lui z în raport cu x şi y sunt:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{2x-2z}{-2x-2yf'(z)}=\frac{x-z}{x+yf'(z)} \quad \text{şi}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{2y-2f(z)}{-2x-2yf'(z)}=\frac{y-f(z)}{x+yf'(z)},$$
unde $F(x,y,z)=x^2+y^2-2xz-2yf(z),\quad (x+yf'(z)\neq 0)$.

Înlocuind aceste derivate în membrul stâng al relaţiei pe care trebuie s-o demonstrăm, obţinem:
$$(y^2-x^2+2xz)\cdot\frac{x-z}{x+yf'(z)}+2y(z-x)\cdot\frac{y-f(z)}{x+yf'(z)}=$$
$$=\frac{(x-z)\cdot[y^2-x^2+2xz-2y^2+2yf(z)]}{x+yf'(z)}=\frac{-(x-z)(x^2+y^2-2xz-2yf(z))}{x+yf'(z)}=0.$$

11. Fie funcţia $z=z(x,y)$ definită prin eliminarea lui u între ecuaţiile:
$$\begin{cases} z\varphi'(u)=[y-\varphi(u)]^2 \\ (x+u)\varphi'(u)=y-\varphi(u), \quad (u=u(x,y)). \end{cases}$$
Să se arate că, oricare ar fi u, funcţia z verifică relaţia: $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

Rezolvare. Derivăm a doua relaţie din enunţ în raport cu x şi y. Obţinem:
$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\varphi'(u)+(x+u)\cdot\varphi''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\varphi'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{şi}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\varphi'(u)+(x+u)\varphi''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=1-\varphi'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$
de unde rezultă:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varphi'}{-\varphi'-(x+u)\varphi''-\varphi'}=-\frac{\varphi'}{2\varphi'+(x+u)\varphi''},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\varphi'+(x+u)\varphi''}.$$
Să derivăm în continuare prima relaţie din enunţ în raport cu x şi y. Avem:
$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\varphi'(u)+z\cdot\varphi''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2(y-\varphi(u))\cdot\left(-\varphi'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\varphi'(u)+z\cdot\varphi''(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2(y-\varphi(u))\cdot\left(1-\varphi'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

de unde rezultă, folosind $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$ determinate mai sus, că:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \varphi'(u) = [-z\varphi'' - 2(y-\varphi)\cdot\varphi'] \cdot \frac{-\varphi'}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} = \frac{[z\varphi'' + 2(y-\varphi)\varphi']\varphi'}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\varphi'' + 2(y-\varphi)\varphi'}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \varphi'(u) = 2(y-\varphi) + (-z\varphi'' - 2(y-\varphi)\cdot\varphi') \cdot \frac{1}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(y-\varphi)\varphi' + 2(y-\varphi)(x+u)\varphi'' - z\varphi''}{\varphi'[2\varphi' + (x+u)\varphi'']}.$$

Folosind din nou relaţiile din enunţ deducem că $z = (x+u)(y-\varphi(u))$. Deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+u)(y-\varphi)\varphi'' + 2(y-\varphi)\varphi'}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} = \frac{(y-\varphi)[2\varphi' + (x+u)\varphi'']}{2\varphi' + (x+u)\varphi''} = y - \varphi(u) \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(y-\varphi)\varphi' + 2(y-\varphi)(x+u)\varphi'' - (x+u)(y-\varphi)\varphi''}{\varphi'[2\varphi' + (x+u)\varphi'']} = \frac{y-\varphi(u)}{\varphi'(u)}.$$

Rezultă atunci că:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{[y-\varphi(u)]^2}{\varphi'(u)} = z$$, folosind încă o dată prima relaţie din problemă.

12. Să se calculeze derivatele y' şi z' ale funcţiilor $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ definite prin sistemul următor:

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10 = 0 \end{cases}$$

în punctul $A(2, 3, -1)$.

Rezolvare. Notăm cu $f(x,y,z) = x+y+z-4$ şi $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x-10$. Atunci, conform Teoremei 4, deducem:

$$y'(2) = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(x,z)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x-2 & 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix}}\Bigg|_{(2,3,-1)} =$$

$$= -\frac{2z - 2x + 2}{2z - 2y}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{1}{2}, \quad \text{iar}$$

$$z'(2) = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(y,x)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix}}\Bigg|_{(2,3,-1)} =$$

$$= -\frac{2x - 2 - 2y}{2z - 2y}\Bigg|_{(2,3,-1)} = -\frac{1}{2}.$$

Derivatele de mai sus se pot obţine şi prin derivarea directă în raport cu variabila

x a ecuaţiilor sistemului dat:

$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ y'(2) = -\frac{1}{2},\ \ z'(2) = -\frac{1}{2}.$$

13. Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiilor $z = z(x, y)$ şi $u = u(x, y)$ definite în mod implicit prin sistemul următor:

$$\begin{cases} ax + by + cz + du - p = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Să notăm cu $f(x, y, z, u) = ax + by + cz + du - p = 0$ şi $g(x, y, z, u) = = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - R^2$. Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(x,u)}}{\frac{D(f,g)}{D(z,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} a & d \\ 2x & 2u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & d \\ 2z & 2u \end{vmatrix}} = \frac{-(au - xd)}{cu - zd},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(y,u)}}{\frac{D(f,g)}{D(z,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} b & d \\ 2y & 2u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & d \\ 2z & 2u \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-(bu - yd)}{cu - zd},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(z,x)}}{\frac{D(f,g)}{D(z,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} c & a \\ 2z & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & d \\ 2z & 2u \end{vmatrix}} = \frac{-(cx - az)}{cu - zd},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(f,g)}{D(z,y)}}{\frac{D(f,g)}{D(z,u)}} = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ 2z & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & d \\ 2z & 2u \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-(cy - bz)}{cu - zd},$$

$(cu - zd \neq 0)$.

14. Să se arate că sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 \cdot e^v + u - f\left(\frac{u}{x}, u - v\right) = 0 \\ y \cdot e^u - v - x^2 = 0, \end{cases}$$

unde f este o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul întâi continue pe o vecinătate V a punctului $(0, 0)$ şi satisface condiţiile $f(0, 0) = 1$, $\operatorname{grad} f(0, 0) = (1, 0)$, defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y pe o vecinătate a punctului $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 0)$ şi să se calculeze $du(1, 1)$ şi $dv(1, 1)$.

Rezolvare. Să notăm cu $F(x, y, u, v) = x^2 e^v + u - f\left(\frac{u}{x}, u - v\right)$ şi $G(x, y, u, v) = = ye^u - v - x^2$. Deoarece $F(1, 1, 0, 0) = G(1, 1, 0, 0) = 0$,

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)}(1, 1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{(1,1,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \beta} & x^2 e^v + \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ ye^u & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,0,0)} =$$

$$= \left[-1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} - ye^u \cdot \left(x^2 e^v + \frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\right]_{(1,1,0,0)} = -1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \beta}(0,0) - 1 -$$
$$- \frac{\partial f}{\partial \beta}(0,0) = -1 \neq 0,$$

iar F şi G împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi sunt continue pe o vecinătate $\widetilde{V}$ a punctului $(1,1,0,0)$, rezultă, conform Teoremei 4, că sistemul din enunţul problemei defineşte funcţiile u şi v de variabile x şi y pe o vecinătate U a lui $(1,1)$, cu valori într-o vecinătate V_1, respectiv V_2 a punctului 0, (am notat cu α şi β variabilele funcţiei f). În plus:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}\right|_{(1,1,0,0)} = -\frac{\left.\begin{vmatrix} 2xe^v + \frac{u}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} & x^2 e^v + \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ -2x & -1 \end{vmatrix}\right|_{(1,1,0,0)}}{-1} =$$
$$= \left(-2xe^v - \frac{u}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2x^3 e^v + 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\Big|_{(1,1,0,0)} = -2 + 2 + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \beta}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}\right|_{(1,1,0,0)} = -\frac{\left.\begin{vmatrix} 0 & x^2 e^v + \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ e^u & -1 \end{vmatrix}\right|_{(1,1,0,0)}}{-1} = \Big(- e^u x^2 e^v -$$
$$-e^u \cdot \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big|_{(1,1,0,0)} = -1 - \frac{\partial f}{\partial \beta}(0,0) = -1.$$

Apoi:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}\right|_{(1,1,0,0)} = -\frac{\left.\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \beta} & 2xe^v + \frac{u}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ ye^u & -2x \end{vmatrix}\right|_{(1,1,0,0)}}{-1} =$$
$$= \left(-2x + 2\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2x\frac{\partial f}{\partial \beta} - 2xye^u e^v - \frac{uy}{x^2} e^u \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\Big|_{(1,1,0,0)} = -2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}\right|_{(1,1,0,0)} = -\frac{\left.\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \beta} & 0 \\ ye^u & e^u \end{vmatrix}\right|_{(1,1,0,0)}}{-1} = \Big(e^u - \frac{e^u}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} -$$
$$-e^u \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big|_{(1,1,0,0)} = 0.$$

Deci:

$$du(1,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1)\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,1)\, dy = -dy \quad \text{şi}$$
$$dv(1,1) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,1)\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}(1,1)\, dy = -2\, dx.$$

O altă metodă pentru determinarea derivatelor parţiale ale funcţiilor u şi v este diferenţierea ecuaţiilor sistemului din problemă, ţinând cont că u şi v sunt funcţii de argumente x şi y:

$$\begin{cases} 2x\,dx\,e^v + x^2e^v\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) - \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\Big[-\dfrac{u}{x^2}\,dx + \\ \quad + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)\Big] - \dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy - \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy\right] = 0 \\ e^u\,dy + ye^u\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) - \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy - 2x\,dx = 0. \end{cases}$$

Din sistemul obţinut deducem:

$$\begin{cases} 2xe^v + x^2e^v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{u}{x^2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ x^2e^v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ ye^u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} - 2x = 0 \\ e^u + ye^u\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Pentru $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 0)$ găsim:

$$\begin{cases} 2 + \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,1) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,1) + \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) - \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,1) - 2 = 0 \\ 1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) - \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,1) = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = 0,$$

deci: $du(1,1) = -dy$ şi $dv(1,1) = -2\,dx$.

15. Să se arate că sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2u^2 + xzv + y^2 = 0 \\ yzu + xyv^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

determină în mod unic pe u şi v ca funcţii de x, y şi z într-o vecinătate a punctului $(x, y, z, u, v) = (3, 3, -3, 0, 1)$ şi să se găsească $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$.

Rezolvare. Notăm cu $F(x, y, z, u, v) = x^2u^2 + xzv + y^2$ şi $G(x, y, z, u, v) = yzu+$ $+xyv^2 - 3x$. Funcţiile F şi G sunt continue cu derivatele parţiale de ordinul întâi continue pe $I\!R^5$, $F(3, 3, -3, 0, 1) = G(3, 3, -3, 0, 1) = 0$, iar:

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}(3,3,-3,0,1) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{(3,3,-3,0,1)} = \begin{vmatrix} 2x^2u & xz \\ yz & 2xyv \end{vmatrix}_{(3,3,-3,0,1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = -81 \neq 0.$$

Rezultă, conform Teoremei 4, că sistemul din enunţul problemei defineşte în mod unic funcţiile u şi v de variabile x, y şi z pe o vecinătate U a punctului $(3, 3, -3)$ cu valori într-o vecinătate V_1 a punctului 0, respectiv într-o vecinătate V_2 a punctului 1.

Pentru a calcula derivatele parţiale ale funcţiilor u şi v putem proceda ca în Problema 38, deci sau aplicăm formulele cu determinanţii funcţionali sau diferenţiem ecuaţiile sistemului, sau mai simplu derivăm ecuaţiile sistemului în raport cu x, y şi apoi cu z. Derivând în raport cu x, obţinem:

$$\begin{cases} 2xu^2 + x^2 \cdot 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + zv + xz\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ yz\dfrac{\partial u}{\partial x} + yv^2 + 2xyv\dfrac{\partial v}{\partial x} - 3 = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-4xyu^2v + yzv^2 - 3z}{y(4x^2uv - z^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{6x^2u - 2x^2yuv^2 + 2xyzu^2 + yz^2v}{xy(4x^2uv - z^2)}.$$

Derivând apoi ecuaţiile sistemului în raport cu y şi z, deducem:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4y^2v + z^2u + xzv^2}{y(4x^2uv - z^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2x^2zu^2 - 2x^3uv^2 + 2y^2z}{xy(4x^2uv - z^2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xv^2 + zu}{4x^2uv - z^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-2xu^2 + zv}{4x^2uv - z^2}.$$

16. Fie funcţia $\vec{f} = (f_1, f_2) : I\!R^2 \to I\!R^2$, $f_1(x, y) = e^x \cos y$, $f_2(x, y) = e^x \sin y$. Să se arate că $\vec{f}$ poate fi inversată local în jurul oricărui punct din $I\!R^2$.

Rezolvare. Transformarea $\vec{f}$ este regulată în orice punct $(x_0, y_0) \in I\!R^2$ deoarece există şi sunt continue derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor f_1 şi f_2 pe $I\!R^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = e^x \cos y,$$

iar iacobianul transformării în (x_0, y_0) este nenul:

$$J(x_0, y_0) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} = e^{2x_0} \neq 0.$$

Conform teoremei de derivare a funcţiilor inverse cu $E = F = I\!R^2$ (domenii), pentru $(x_0, y_0) \in I\!R^2$, rezultă că există o vecinătate U a punctului (x_0, y_0) şi o vecinătate V a punctului $(u_0, v_0) = \vec{f}(x_0, y_0) = (e^{x_0} \cos y_0, e^{x_0} \sin y_0)$ astfel încât restricţia lui $\vec{f}$ la U este o bijecţie a lui U pe V ($\vec{f}|_U : U \to V$ bijectivă), deci $\vec{f}$ poate fi inversată în vecinătatea lui (x_0, y_0). În plus, tranformarea inversă $(u, v) \to \vec{\varphi}(u, v) =$
$= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in U$, pentru $(u, v) \in V$ satisface condiţia $(x_0, y_0) = \vec{\varphi}(u_0, v_0)$, este regulată în (u_0, v_0) şi:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)=\left(\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x_0,y_0)\right)^{-1}.$$

17. Să se arate cu ajutorul determinanţilor funcţionali că între grupurile de funcţii indicate în continuare există relaţii de legătură directe. Să se găsească relaţiile de legătură.

$$\text{a)}\begin{cases} u=\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ v=\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}};\end{cases}\quad \text{b)}\begin{cases} u=\dfrac{x}{x+y},\\ v=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\end{cases};\quad \text{c)}\begin{cases} u=xy-z,\\ v=xz+y,\\ w=(x^2+1)(y^2+z^2);\end{cases}$$

$$\text{d)}\begin{cases} u=\dfrac{1}{(x-y)(x-z)},\\ v=\dfrac{1}{(y-z)(y-x)},\\ w=\dfrac{1}{(z-x)(z-y)};\end{cases}\quad \text{e)}\begin{cases} u=\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)},\\ v=\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)},\\ w=\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)};\end{cases}$$

$$\text{f)}\begin{cases} u=x+y+z,\\ v=x^3+y^3+z^3+6xyz\\ w=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).\end{cases}$$

Rezolvare. a) Determinantul funcţional este:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{ay^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\dfrac{axy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\ -\dfrac{bxy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \dfrac{bx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{vmatrix}=ab\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}-$$

$$-ab\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}=0.$$

De aici deducem că funcţiile u şi v sunt dependente funcţional, relaţia de legătură dintre ele fiind $\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1$.

b) Avem:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{y}{(x+y)^2} & -\dfrac{x}{(x+y)^2}\\ -\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{2x^2y^2}{(x+y)^2(x^2+y^2)^2}-$$

$$-\frac{2x^2y^2}{(x+y)^2(x^2+y^2)^2}=0.$$

Pentru determinarea relaţiei de legătură dintre funcţiile u şi v, din prima relaţie, scrisă sub forma: $u=\dfrac{1}{1+\frac{y}{x}}$, deducem că $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{u}-1$ sau $\dfrac{x}{y}=\dfrac{u}{1-u}$. Înlocuind pe $\dfrac{x}{y}$ în a doua relaţie: $v=\dfrac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$ găsim: $v=\dfrac{1}{\frac{u^2}{(1-u)^2}+1}$ sau $v=\dfrac{(1-u)^2}{2u^2-2u+1}$.

c) Determinantul funcţional al transformării este:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & -1 \\ z & 1 & x \\ 2x(y^2+z^2) & 2y(x^2+1) & 2z(x^2+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ xy+z & 1+x^2 & x \\ 2yz(x^2+1)+2x(y^2+z^2) & 2xz(x^2+1)+2y(x^2+1) & 2z(x^2+1) \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1+x^2) \begin{vmatrix} xy+z & 1 \\ (xy+z)(xz+y) & xz+y \end{vmatrix} = 0.$$

Relaţia de legătură este: $w = u^2 + v^2$.

d) Avem:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{-2x+y+z}{(x-y)^2(x-z)^2} & \frac{x-z}{(x-y)^2(x-z)^2} & \frac{x-y}{(x-y)^2(x-z)^2} \\ \frac{y-z}{(y-z)^2(y-x)^2} & \frac{-2y+x+z}{(y-z)^2(y-x)^2} & \frac{y-x}{(y-z)^2(y-x)^2} \\ \frac{z-y}{(z-x)^2(z-y)^2} & \frac{z-x}{(z-x)^2(z-y)^2} & \frac{-2z+y+x}{(z-x)^2(z-y)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(x-y)^4(y-z)^4(x-z)^4} \cdot \begin{vmatrix} -2x+y+z & x-z & x-y \\ y-z & -2y+x+z & y-x \\ z-y & z-x & -2z+y+x \end{vmatrix} = 0,$$

(adunarea coloanelor la prima coloană în determinantul de mai sus ne dă 0 pe întreaga coloană).

În plus: $u+v = \dfrac{y-z-x+z}{(x-y)(x-z)(y-z)} = -\dfrac{1}{(x-z)(y-z)} = -w$. Deci: $u+v+w=0$.

e) Avem: $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} =$

$$= \frac{xyz}{(x-y)^4(x-z)^4(y-z)^4} \begin{vmatrix} 2yz-xy-xz & x^2-xz & x^2-xy \\ y^2-yz & 2xz-xy-yz & y^2-yx \\ z^2-zy & z^2-zx & 2xy-xz-yz \end{vmatrix}.$$

Adunând coloanele la prima coloană în determinantul de mai sus, obţinem:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \frac{2xyz}{(x-y)^4(x-z)^4(y-z)^4} \begin{vmatrix} (z-x)(y-x) & x(x-z) & x(x-y) \\ (x-y)(z-y) & 2xz-xy-yz & y(y-x) \\ (x-z)(y-z) & z(z-x) & 2xy-xz-yz \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (z-x)(y-x)(y-z) & x(x-z)(y-z) & x(x-y)(y-z) \\ (x-y)(z-y)(z-x) & (2xz-xy-yz)(z-x) & y(y-x)(z-x) \\ (x-z)(y-z)(y-x) & z(z-x)(y-x) & (2xy-xz-yz)(y-x) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\frac{2xyz}{(y-x)^5(z-x)^5(y-z)^5}=\begin{vmatrix} 1 & -x(y-z) & -x(y-z)\\ 1 & 2xz-xy-yz & y(z-x)\\ -1 & z(y-x) & 2xy-xz-yz\end{vmatrix}\times$$

$$\times\frac{2xyz(z-x)(y-x)}{(y-x)^4(z-x)^4(y-z)^4}=\frac{2xyz}{(y-x)^3(z-x)^3(y-z)^4}\begin{vmatrix} 0 & y(z-x) & y(x-z)\\ 0 & x(z-y) & x(y-z)\\ -1 & z(y-x) & 2xy-xz-yz\end{vmatrix}=0.$$

Conform identităţii lui Euler: $\sum\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}=1$ deducem că: $u+v+w=1$.

f) Avem:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3x^2+6yz & 3y^2+6xz & 3z^2+6xy\\ 2x(y+z)+y^2+z^2 & 2y(x+z)+x^2+z^2 & 2z(x+y)+x^2+y^2\end{vmatrix}=$$

$$=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ x^2+2yz & (y-x)(y+x-2z) & (z-x)(z+x-2y)\\ 2x(y+z)+y^2+z^2 & (x-y)(x+y-2z) & (x-z)(x+z-2y)\end{vmatrix}=0.$$

Relaţia de legătură între funcţiile u, v şi w este: $u^3=v+3w$.

18. Ce condiţie trebuie să satisfacă derivatele funcţiei de trei variabile $u=$ $=f(x,y,z)$ dacă ea depinde de x, y şi z prin intermediul funcţiilor:

$$f_1=ax+by+cz \quad \text{şi} \quad f_2=a'x+b'y+c'z\ ?$$

Rezolvare. Conform ipotezei funcţiile f, f_1 şi f_2 sunt dependente funcţional, deci determinantul lor funcţional este zero. Rezultă că:

$$\frac{D(f,f_1,f_2)}{D(x,y,z)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (bc'-b'c)\frac{\partial f}{\partial x}+(ca'-c'a)\frac{\partial f}{\partial y}+(ab'-a'b)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Deci funcţia f satisface o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară cu coeficienţi constanţi.

19. Să se stabilească dacă următoarele funcţii:

$$u=f\left(\frac{y+z}{y+z-x}\right),\quad v=g\left(\frac{z+x}{z+x-y}\right),\quad w=h\left(\frac{x+y}{x+y-z}\right)$$

sunt în dependenţă funcţională, (f, g şi h sunt funcţii bijective).

Rezolvare. Din relaţiile din enunţul problemei deducem:

$$\frac{y+z}{y+z-x}=F(u),\quad \frac{z+x}{z+x-y}=G(v),\quad \frac{x+y}{x+y-z}=H(w),$$

unde am notat cu F, G şi H inversele funcţiilor f, g, respectiv h. Transformând prima relaţie de mai sus, obţinem:

$$F(u)-1=\frac{x}{y+z-x} \Leftrightarrow \frac{1}{F(u)-1}=\frac{y+z-x}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{F(u)-1}+2=\frac{x+y+z}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(u)-1}{2F(u)-1}=\frac{x}{x+y+z}.$$

În mod asemănător, avem:

$$\frac{G(v)-1}{2G(v)-1}=\frac{y}{x+y+z} \quad \text{şi} \quad \frac{H(w)-1}{2H(w)-1}=\frac{z}{x+y+z}.$$

Astfel din relaţiile obţinute deducem că funcţiile u, v şi w sunt dependente funcţional, relaţia lor de legătură fiind:

$$\frac{F(u)-1}{2F(u)-1}+\frac{G(v)-1}{2G(v)-1}+\frac{H(w)-1}{2H(w)-1}=1.$$

20. Să se arate că funcţiile $u=\dfrac{a_1x+a_2y+a_3z}{a_1'x+a_2'y+a_3'z}$, $v=\dfrac{b_1x+b_2y+b_3z}{b_1'x+b_2'y+b_3'z}$ şi $w=$ $=\dfrac{c_1x+c_2y+c_3z}{c_1'x+c_2'y+c_3'z}$ sunt în dependenţă funcţională. Care este legătura dintre ele ?

Rezolvare. Deoarece funcţiile u, v şi w sunt funcţii omogene de grad zero, rezultă, conform relaţiei lui Euler, că:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0 \\ x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}+z\dfrac{\partial v}{\partial z}=0 \\ x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Din sistemul de mai sus (în necunoscutele x, y şi z este un sistem omogen cu soluţii nenule) deducem că determinantul funcţional:

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}=0,$$

deci u, v şi w sunt dependente funcţional.

Din forma funcţiilor u, v şi w deducem următoarele relaţii:

$$\begin{cases} (a_1'u-a_1)x+(a_2'u-a_2)y+(a_3'u-a_3)z=0 \\ (b_1'v-b_1)x+(b_2'v-b_2)y+(b_3'v-b_3)z=0 \\ (c_1'w-c_1)x+(c_2'w-c_2)y+(c_3'w-c_3)z=0. \end{cases}$$

Acest sistem în necunoscutele x, y şi z este un sistem liniar omogen cu soluţii nenule. Deci condiţia pe care trebuie s-o impunem şi care va fi tocmai relaţia de legătură dintre funcţiile u, v şi w este următoarea:

$$\begin{vmatrix} a_1'u - a_1 & a_2'u - a_2 & a_3'u - a_3 \\ b_1'v - b_1 & b_2'v - b_2 & b_3'v - b_3 \\ c_1'w - c_1 & c_2'w - c_2 & c_3'w - c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

21. Să se determine funcţia φ derivabilă astfel încât:

$$u = \varphi(x+y) \quad \text{şi} \quad v = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{1 - \varphi(x) \cdot \varphi(y)}$$

să fie în dependenţă funcţională.

Rezolvare. Punând condiţia ca determinantul funcţional $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ să fie zero, obţinem:

$$\begin{vmatrix} \varphi'(x+y) & \varphi'(x+y) \\ \dfrac{\varphi'(x)[1+\varphi^2(y)]}{[1-\varphi(x)\varphi(y)]^2} & \dfrac{\varphi'(y)[1+\varphi^2(x)]}{[1-\varphi(x)\varphi(y)]^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Presupunem că $\varphi \neq$ constantă. Atunci din ecuaţia de mai sus rezultă:

$$\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} = \frac{\varphi'(y)}{1+\varphi^2(y)}.$$

Rapoartele obţinute mai sus sunt funcţii numai de x, respectiv de y. Pentru ca ele să fie egale pentru $\forall\, x$, y este necesar ca ele să fie o constantă a. Deci:

$$\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} = a \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} \varphi(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \operatorname{tg}(ax+b), \quad a, b \in I\!R.$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

22. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcţia:

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

în punctul $(-2, 1)$.

23. Să se dezvolte polinomul:

a) $P(x,y) = 2x^3 - 3x^2y + 2y^3 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$ după puterile lui $(x+1)$ şi $(y-1)$.

b) $P(x,y) = (x+1)^3(y-2)^2 + 5(x+4)(y+1)^3 - 24$ după puterile lui x şi y fără a efectua ridicările la puteri.

24. Ce devine ecuaţia:

$$x^3 + 2y^3 + 4x^2 + 2xy - 6y^2 + 2x + 10y - 6 = 0$$

dacă se face o translaţie de axe astfel ca noua origine să fie în punctul $A(-2, 1)$.

25. Să se scrie dezvoltarea după puterile lui x şi y a funcţiei $f(x,y) = e^{\sin(ax+by)}$ până la termenii de gradul al doilea inclusiv.

26. Să se calculeze aproximativ numărul:

a) $\operatorname{arctg}(1,02/0,95)$ pornind de la valoarea funcţiei $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ pentru $x = 1$ şi $y = 1$.

b) $1,02^{4,05}$ pornind de la valoarea funcţiei $z = x^y$ pentru $x = 1$ şi $y = 4$.

c) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$ pornind de la valoarea funcţiei $z = \ln(x^3 + y^3)$ pentru $x = 0$ şi $y = 1$.

d) $\sqrt{5 \cdot e^{0,02} + 2,03^2}$ folosind funcţia $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ şi $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

e) $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$ folosind funcţia $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ şi $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1)$.

27. Să se calculeze derivatele y', y'' şi y''' ale funcţiei $y = y(x)$ pentru:

a) $x = 1$ şi $y = 1$ dacă funcţia y este definită prin: $x^2 + xy + y^2 = 3$.

b) $x = 0$ şi $y = 1$ dacă funcţia y este definită prin: $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

28. Să se calculeze derivatele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale funcţiei $z = z(x, y)$ dacă aceasta este definită prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; b) $z^3 - 3xyz = a^3$; c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$;

d) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

29. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pentru $x = y = z = 0$ dacă funcţia $z = z(x, y)$ este definită prin: $z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0$.

30. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dacă $z = z(x, y)$ este o funcţie implicită definită prin relaţia:

$$F(x, x + y, x + y + z) = 0, \quad (F \in C^2(D), \ \ D \subset I\!R^3).$$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă $z = z(x, y)$ este o funcţie implicită definită prin relaţia:

$$F(xz, yz) = 0, \quad (F \in C^2(D), \ \ D \subset I\!R^2).$$

31. Să se arate că dacă $y(x + z) - (y + z)f(z) = 0$ defineşte implicit funcţia $z = z(x, y)$, $(f \in C^1(I), \ \ I \subset I\!R)$ atunci are loc relaţia:

$$z(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

32. Să se arate că dacă $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ defineşte implicit funcţia $z = z(x, y)$, $(\varphi, \psi \in C^2(I), \ \ I \subset I\!R)$, atunci are loc şi relaţia:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

33. Fie funcţia $z = z(x, y)$ definită de relaţiile:

$$\begin{cases} z = ux + yf(u) + \varphi(u), \\ x + yf'(u) + \varphi'(u) = 0, \quad (u = u(x, y)) \end{cases}$$

după eliminarea lui u. Să se arate că oricare ar fi f şi φ, are loc relaţia:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

34. Să se calculeze:

a) derivatele y' şi z' ale funcţiilor $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ definite prin sistemul următor:

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 - z^2 + x - y - 8 = 0 \\ 2x^2 - 4y - 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

în punctul $(x, y, z) = (1, 2, -2)$.

b) derivatele y' şi z' ale funcţiilor $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ definite prin sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 9 = 0 \\ x^3 - y^3 + z^3 - 3z = 0 \end{cases}$$

în punctul $(x, y, z) = (3, 3, -\sqrt{3})$.

c) derivatele $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ ale funcţiilor $x = x(z)$ şi $y = y(z)$ definite prin sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

în punctul $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

d) derivatele $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ ale funcţiilor $x = x(z)$ şi $y = y(z)$ definite prin sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

e) derivatele $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ definite prin sistemul:

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 0. \end{cases}$$

35. Fie sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} xyu - yv^2 + 2v^3 = 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - x^3y = 0. \end{cases}$$

Să se arate că sistemul se poate rezolva găsind u şi v ca funcţii de x şi y într-o vecinătate a punctului $(x, y, u, v) = (1, 2, 0, 1)$ şi să se determine $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

36. Fie sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} xu + yv = 0 \\ uv - xy = 5. \end{cases}$$

Să se arate că sistemul se poate rezolva găsind u şi v ca funcţii de x şi y într-o vecinătate a punctului $(x, y, u, v) = (1, -1, 2, 2)$ şi apoi să se calculeze $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$.

37. Fie $z = z(x,y)$ funcţia implicită definită de ecuaţia: $z^3 - 2xz + y = 0$ care pentru $x = y = 1$ ia valoarea $z = 1$. Să se scrie primii trei termeni din dezvoltarea Taylor a funcţiei z în vecinătatea punctului $(1,1)$.

38. Să se calculeze determinanţii funcţionali ai următoarelor grupe de funcţii aşa cum este indicat la fiecare grupă, studiindu-se regularitatea transformărilor respective:

a) $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta, \quad \varrho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi); \end{cases} \qquad \dfrac{D(x,y)}{D(\varrho,\theta)}.$

b) $\begin{cases} u = \dfrac{a^2 x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{a^2 y}{x^2+y^2}, \quad a > 0, \quad (x,y) \neq (0,0); \end{cases} \qquad \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}.$

c) $\begin{cases} x = \varrho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \varrho\cos\varphi, \quad \varrho > 0, \quad \varphi \in (0,\pi), \quad \theta \in [0,2\pi); \end{cases} \qquad \dfrac{D(x,y,z)}{D(\varrho,\varphi,\theta)}.$

d) $\begin{cases} u = axy\cos z \\ y = bxy\sin z \\ w = cx, \quad a,\ b,\ c > 0, \quad x,\ y \neq 0; \end{cases} \qquad \dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}.$

39. Să se arate cu ajutorul determinanţilor funcţionali că între grupurile de funcţii indicate în continuare există relaţii de legătură directe. Să se găsească relaţiile de legătură:

a) $\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = \ln x - \ln y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x^2+y^2+z^2 \\ w = xy+yz+zx; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = (u+v)\cos\theta \\ y = (u-v)\sin\theta \\ z = u^2+v^2+2uv\cos 2\theta; \end{cases}$

d) $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\ w = x^3+y^3+z^3-3xyz; \end{cases}$ e) $\begin{cases} u = ax+by+cz \\ v = x^2+y^2+z^2 \\ w = (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y_1 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ y_2 = x_1x_4 - x_2x_3 \\ y_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \\ y_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \end{cases}$

40. Ce relaţie trebuie să satisfacă derivatele parţiale ale funcţiei $z = f(x,y)$ pentru ca z să nu depindă decât de produsul xy ?

41. Să se stabilească dacă următoarele funcţii:

$$u = f\left(\frac{y-z}{x+z}\right), \quad v = g\left(\frac{x+2y+z}{x+y}\right), \quad w = h\left(\frac{x-y}{y+z}\right)$$

sunt în dependenţă funcţională, (f, g şi h sunt funcţii bijective).

42. Să se determine funcţia φ astfel încât $u = \varphi(x+y)$ şi $v = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ să fie în dependenţă funcţională.

§3. PUNCTE DE EXTREM LIBERE ŞI CU LEGĂTURI. SCHIMBĂRI DE VARIABILE

Teorema 1 (Fermat). Fie funcţia $f : E \subset I\!\!R^n \to I\!\!R$ şi $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ punct de extrem local ($\exists\, V$ vecinătate a punctului $\vec{x}_0$ a.î. $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ păstrează semn constant sau este nulă pe $V \bigcap E$) pentru funcţia f. Dacă $\exists\, \nabla f(\vec{x}_0)$ atunci $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ($\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$).

Punctul $\vec{x}_0 \in E$ în care $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ se numeşte *punct staţionar* sau *critic* pentru funcţia f.

Teorema 2. Fie $f : E \subset I\!\!R^n \to I\!\!R$ diferenţiabilă de două ori în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$, $\vec{x}_0$ fiind punct staţionar al funcţiei f.

a) Dacă $d^2 f(\vec{x}_0)$ este o formă pătratică definită atunci $\vec{x}_0$ este punct de extrem şi anume:

i) $\vec{x}_0$ este punct de minim dacă $d^2 f(\vec{x}_0)$ este pozitiv definită;

ii) $\vec{x}_0$ este punct de maxim dacă $d^2 f(\vec{x}_0)$ este negativ definită.

b) Dacă $d^2 f(\vec{x}_0)$ este formă pătratică nedefinită atunci $\vec{x}_0$ nu este punct de extrem pentru f ($\vec{x}_0$ este punct şa).

c) Dacă $d^2 f(\vec{x}_0)$ este formă pătratică semidefinită (pozitiv sau negativ) atunci nu putem stabili natura punctului $\vec{x}_0$ cu ajutorul diferenţialei a doua.

Pentru $n = 2$ obţinem următoarea teoremă:

Teorema 3. Dacă funcţia $f : E \subset I\!\!R^2 \to I\!\!R$ este diferenţiabilă de două ori în punctul $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{E}$, (x_0, y_0) fiind punct staţionar pentru f, iar $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ atunci:

a) i) Dacă $AC - B^2 > 0$ şi $A > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de minim pentru f.

ii) Dacă $AC - B^2 > 0$ şi $A < 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de maxim pentru f.

b) Dacă $AC - B^2 < 0$ atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem.

c) Dacă $AC - B^2 = 0$ atunci nu putem decide natura punctului (x_0, y_0).

Notând cu $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$, $i, j = \overline{1,n}$ şi cu:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

obţinem cu ajutorul teoremei lui Sylvester următoarea teoremă:

Teorema 4. Fie $f : E \subset I\!R^n \to I\!R$ diferenţiabilă de două ori în $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$, $\vec{x}_0$ punct staţionar. Atunci:

a) i) Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ atunci $d^2 f(\vec{x}_0)$ este pozitiv definită, deci $\vec{x}_0$ este punct de minim pentru f.

ii) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci $d^2 f(\vec{x}_0)$ este negativ definită, deci $\vec{x}_0$ este punct de maxim pentru f.

b) Dacă $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ şi $\exists\, j = \overline{1,n}$ a.î. $\Delta_j = 0$ atunci $d^2 f(\vec{x}_0)$ este semidefinită pozitiv, respectiv semidefinită negativ, deci nu putem decide asupra naturii punctului $\vec{x}_0$.

c) Dacă şirul minorilor principali nu este în nici una din situaţiile de mai sus atunci $d^2 f(\vec{x}_0)$ este nedefinită, deci $\vec{x}_0$ nu este punct de extrem pentru funcţia f.

Puncte de extrem cu legături. Fie sistemul de ecuaţii $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = \overline{1,m}$ $(m < n)$, unde F_i sunt componentele lui $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m) : D \subset I\!R^n \to I\!R^m$ şi fie $E = \{\vec{x} \in D;\ \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}\} \subset D$. Să considerăm funcţia lui Lagrange:

$$(\vec{x}, \vec{\lambda}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \to L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \in I\!R, \quad (\vec{x}, \vec{\lambda}) \in D \times I\!R^m,$$

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \lambda_1 F_1(\vec{x}) + \cdots \lambda_m F_m(\vec{x}).$$

Teorema 5. Fie $\vec{x}_0 \in D$ soluţie a sistemului de ecuaţii $F_i(\vec{x}) = 0$, $i = \overline{1,m}$, deci $\vec{x}_0 \in E$. Presupunem că f şi F_i, $i = \overline{1,m}$ admit derivate parţiale de ordinul întâi continue pe o vecinătate V a lui $\vec{x}_0$ şi rang $\nabla \vec{F}(\vec{x}_0) = m$. Dacă $\vec{x}_0$ este punct de extrem (local) al funcţiei f condiţionat de sistemul de ecuaţii $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ atunci $\exists\, \vec{\lambda}_0 \in I\!R^m$ a.î. $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ este punct staţionar al funcţiei L, deci soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0, \quad i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = F_j(\vec{x}) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Să presupunem că funcţiile f şi F_i, $i = \overline{1,m}$ sunt de două ori diferenţiabile pe D, iar $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \in D \times I\!R^m$ o soluţie a sistemului de mai sus, numit şi punct critic condiţionat.

Pentru a studia natura punctului $\vec{x}_0$ pentru funcţia f vom cerceta diferenţiala a doua a funcţiei $\Phi(\vec{x}) = L(\vec{x}, \vec{\lambda}_0)$ în punctul $\vec{x}_0$, deoarece $\vec{x}_0$ este punct de extrem al funcţiei f condiţionat de sistemul $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ dacă şi numai dacă $\vec{x}_0$ este punct de extrem liber pentru Φ. În acest scop vom ţine cont şi de faptul că diferenţialele $dx_1, \ldots, dx_n$ nu sunt independente, relaţiile de legătură dintre ele obţinându-se prin diferenţierea ecuaţiilor sistemului $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$. Astfel se obţine pentru $d^2\Phi(\vec{x}_0)$ o formă pătratică în $(n-m)$ dimensiuni cu următoarele situaţii:

a) $d^2\Phi(\vec{x}_0)$ formă pătratică pozitiv (negativ) definită $\Rightarrow \vec{x}_0$ punct de minim (maxim) pentru f.

b) $d^2\Phi(\vec{x}_0)$ formă pătratică nedefinită $\Rightarrow \vec{x}_0$ nu este punct de extrem pentru f.

c) $d^2\Phi(\vec{x}_0)$ formă pătratică semidefinită $\Rightarrow$ nu putem stabili natura punctului $\vec{x}_0$ numai cu diferenţiala a doua a lui Φ.

Schimbări de variabile

1. Schimbarea de variabile în expresii care conţin derivate ordinare. Să considerăm expresia diferenţială $A = \Phi(x, y, y', y'', \ldots)$ în care funcţia necunoscută este $y = y(x)$ şi să trecem de la variabila independentă x la noua variabilă independentă t şi de la funcţia necunoscută $y = y(x)$ la o nouă funcţie $u = u(t)$, folosind ecuaţiile $x = f(t, u)$, $y = g(t, u)$.

Întrebarea firească care se pune în acest moment este cum se transformă expresia A la această schimbare de variabile. Ecuaţiile de mai sus le putem scrie comasat în următoarea relaţie $y(f(t, u)) = g(t, u)$.

Derivând relaţia obţinută în raport cu t vom determina pe y' funcţie de u şi u'_t (derivata lui u în raport cu t):

$$y' \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'_t\right) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'_t \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'_t}.$$

Derivând în continuare relaţia de mai sus în raport cu t vom găsi şi celelalte derivate ale lui y în funcţie de derivatele lui u (în raport cu t) şi de derivatele parţiale ale funcţiilor f şi g. Obţinem în cele din urmă $A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \ldots)$.

2. Schimbarea variabilelor independente în expresii care conţin derivate parţiale. Vom considera cazul funcţiilor de două variabile reale. În expresia diferenţială:

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots\right)$$

să trecem de la variabilele x, y la noile variabile independente u şi v, prin intermediul relaţiilor $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$. Astfel pentru funcţia z putem scrie următorul şir de egalităţi:

$$z = z(x,y) = z(f(u,v), g(u,v)) = \tilde{z}(u,v) \overset{not}{=} z(u,v),$$

deci $z(f(u,v), g(u,v)) = z(u,v)$.

Derivând egalitatea obţinută în raport cu u şi v vom găsi un sistem din care vom determina pe $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \cdots$$

Procedând asemănător în continuare putem determina toate derivatele funcţiei z în funcţie de derivatele parţiale ale lui z în raport cu u şi v şi în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiilor f şi g, obţinându-se:

$$B = \tilde{F}\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \cdots\right).$$

3. Schimbarea variabilelor independente şi a funcţiei în expresii care conţin derivate parţiale. Să vedem acum cum se transformă expresia B de la cazul 2., dacă se face atât o schimbare de variabile $(x,y) \to (u,v)$, cât şi o schimbare a funcţiei necunoscute $z \to w$ prin intermediul ecuaţiilor:

$$x = f(u,v,w), \quad y = g(u,v,w), \quad z = h(u,v,w).$$

Pentru funcţia z putem scrie egalitatea $z(f(u,v,w), g(u,v,w)) = h(u,v,w)$.

Derivând relaţia de mai sus în raport cu u şi apoi cu v vom determina derivatele parţiale ale funcţiei z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiei w în raport cu u şi v:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial h}{\partial u} + \dfrac{\partial h}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\dfrac{\partial g}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial h}{\partial v} + \dfrac{\partial h}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

Derivând în continuare vom găsi toate derivatele parţiale ale funcţiei z în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiei w. Astfel vom obţine:

$$B = \tilde{\tilde{F}}\left(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \cdots\right).$$

Observaţie. În unele cazuri este comod să folosim diferenţialele totale pentru schimbarea de variabile.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze extremele (locale) ale următoarelor funcţii:
a) $z(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y, \quad (x,y) \in I\!R^2$;
b) $z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (x,y) \in I\!R^2$; c) $z(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in I\!R^2$;
d) $z(x,y) = \dfrac{a(x+y)-1}{x^2+y^2}, \quad a \in I\!R^*, \quad (x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$;
e) $z(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y), \quad 0 < x < 3\pi/2, \quad 0 < y < 3\pi/2$;
f) $z(x,y) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x+y), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$.

Rezolvare. a) Determinăm mai întâi punctele staţionare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 6 = 0 \\ 2x - 10y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Deoarece $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = -4, \ B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 2$ şi $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = -10$, iar $AC - B^2 = 36 > 0$ şi $A < 0$ rezultă că punctul $M(2,1)$ este punct de maxim pentru funcţia z, iar valoarea sa maximă este $z(2,1) = 9$.

b) Avem $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0,0)$ şi $M_2(1,1)$ sunt punctele staţionare ale funcţiei z. Derivatele de ordinul al doilea ale lui z sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Pentru punctul $M_1(0,0)$ avem $A = 0, \ B = -3, \ C = 0$, iar $AC - B^2 = -9 < 0$. Rezultă că M_1 nu este punct de extrem (este punct şa). Pentru punctul $M_2(1,1)$ avem $A = 6, \ B = -3, \ C = 6$, iar $AC - B^2 = 27 > 0, \ A > 0$. Rezultă că M_2 este punct de minim pentru funcţia z, iar valoarea minimă este $z(1,1) = -1$.

c) Punctele staţionare sunt soluţii ale sistemului:

$$\begin{cases} (1 - 2x^2 - 2xy)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ (1 - 2y^2 - 2xy)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 - 2xy = 0 \\ 1 - 2y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 1 - 2x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 1 - 2x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = -y \\ 1 - 2x^2 - 2xy = 0. \end{cases}$$

Doar primul sistem de mai sus are soluţii reale, şi anume $M_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ şi $M_2\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-6x - 2y + 4x^3 + 4x^2 y)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x - 2y + 4x^2y + 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-6y - 2x + 4y^3 + 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Pentru punctul $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ avem $A = -3e^{-1/2}$, $B = -e^{-1/2}$, $C = -3e^{-1/2}$, iar $AC - B^2 = 8e^{-1} > 0$, $A < 0$. Deci M_1 este punct de maxim, iar $z_{max} = e^{-1/2}$. Pentru punctul $M_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ avem $A = 3e^{-1/2}$, $B = e^{-1/2}$, $C = 3e^{-1/2}$, iar $AC - B^2 = 8e^{-1} > 0$, $A > 0$. Deci M_2 este punct de minim, iar $z_{min} = -e^{-1/2}$.

d) Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(x^2+y^2) - 2x[a(x+y)-1] = 0 \\ a(x^2+y^2) - 2y[a(x+y)-1] = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay^2 - ax^2 - 2axy + 2x = 0 \\ ax^2 - ay^2 - 2axy + 2y = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y-x)[a(x+y)-1] = 0 \\ ay^2 - ax^2 - 2axy + 2x = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ ay^2 - ax^2 - 2axy + 2x = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} a(x+y) = 1 \\ ay^2 - ax^2 - 2axy + 2x = 0 \\ (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Primul sistem de mai sus are soluţia $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, iar al doilea nu are soluţii reale.

Derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(ax^3 - ay^3 + 3ax^2y - 3axy^2 - 3x^2 + y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(-ax^3 - ay^3 + 3ax^2y + 3axy^2 - 4xy)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(ay^3 - ax^3 - 3ax^2y + 3axy^2 - 3y^2 + x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Atunci pentru punctul M avem $A = -\frac{a^4}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{a^4}{2}$, iar $AC - B^2 = \frac{a^8}{4} > 0$, $A < 0$. Rezultă că M este punct de maxim pentru funcţia z, iar $z_{max} = \frac{a^2}{2}$.

e) Sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin(x+y) \\ \cos y = \sin(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \cos x = \sin(x+y) \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = -y + 2\pi \\ \cos x = \sin(x+y) \end{cases}$$

are soluţiile $M_1(\pi/2, \pi/2)$, $M_2(\pi/6, \pi/6)$ şi $M_3(5\pi/6, 5\pi/6)$ în domeniul $D = \{(x,y) \mid 0 <$

$< x < 3\pi/2,\ \ 0 < y < 3\pi/2\}$.

Derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x+y),\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y),\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y - \cos(x+y).$$

Pentru punctul $M_1(\pi/2, \pi/2)$ avem $A = 0,\ \ B = 1,\ \ C = 0,\ \ AC - B^2 = -1 < 0$, deci M_1 nu este punct de extrem. Pentru punctul $M_2(\pi/6, \pi/6)$ avem $A = -1,\ \ B = -1/2,\ \ C = -1,\ \ AC - B^2 = 3/4 > 0,\ \ A < 0$, deci M_2 este punct de maxim pentru funcţia z, iar $z_{max} = z(M_2) = 3/2$. Pentru punctul $M_3(5\pi/6, 5\pi/6)$ avem $A = -1,\ \ B = -1/2,\ \ C = -1,\ \ AC - B^2 = 3/4 > 0,\ \ A < 0$, deci punctul M_3 este şi el punct de maxim pentru funcţia z, iar $z'_{max} = z(M_3) = z_{max} = 3/2$. Rezultă că funcţia z pe domeniul D are două puncte de maxim, iar valoarea maximă a funcţiei este $3/2$.

f) Avem $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y \cdot \sin(2x+y) = 0 \\ \cos x \cdot \sin(x+2y) = 0, \end{cases}$ sistem care are soluţiile $M_1(\pi/2, \pi/2),\ \ M_2(\pi/3, \pi/3)$ şi $M_3(2\pi/3, 2\pi/3)$ în domeniul $D = \{(x,y)\mid\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei z sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\cos y \cdot \cos(2x+y);\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos(2x+2y);\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\cos x \cdot \cos(x+2y).$$

Pentru punctul $M_1(\pi/2, \pi/2)$ rezultă $A = 0,\ \ B = -1,\ \ C = 0$, deci $AC - B^2 = -1 < 0$, de unde deducem că M_1 nu este punct de extrem. Pentru punctul $M_2(\pi/3, \pi/3)$ avem $A = 1,\ \ B = 1/2,\ \ C = 1,\ \ AC - B^2 = 3/4 > 0,\ \ A > 0$, deci M_2 este punct de minim pentru funcţia z, iar $z_{min} = z(M_2) = -1/8$. Pentru punctul $M_3(2\pi/3, 2\pi/3)$ avem $A = 1,\ \ B = 1/2,\ \ C = 1,\ \ AC - B^2 = 3/4 > 0,\ \ A > 0$, deci M_3 este şi el punct de minim pentru z, iar $z'_{min} = z(M_3) = z_{min} = -1/8$. Rezultă că funcţia z are pe domeniul indicat D două puncte de minim, iar valoarea minimă a funcţiei este $-1/8$.

2. Să se calculeze extremele (locale) ale următoarelor funcţii:

a) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z,\ \ (x,y,z) \in I\!R^3$;

b) $u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z,\ \ (x,y,z) \in I\!R^3$;

c) $u(x,y,z) = xy^2z^3 \cdot (a - x - 2y - 3z),\ \ a > 0,\ \ (x,y,z) \in I\!R^3$;

d) $u(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z),\ \ 0 < x < \pi,\ \ 0 < y < \pi,\ \ 0 < z < \pi$.

Rezolvare. a) Determinăm mai întâi punctele staţionare ale funcţiei u:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1, -2, 3).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

Deducem astfel că $d^2u(-1, -2, 3) = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2\,dz^2$, care este o formă pătratică pozitiv definită, deci punctul M este punct de minim pentru funcţia u, valoarea sa minimă fiind $u_{min} = u(M) = -14$.

b) Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0, 0, -1) \text{ şi } M_2(24, -144, -1).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei u în punctul M_1 este:

$$d^2u(0, 0, -1) = 2\,dy^2 + 2\,dz^2 + 24\,dxdy.$$

Deoarece şirul minorilor principali ai formei pătratice de mai sus este:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = -144, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -288,$$

deducem că $d^2u(0, 0, -1)$ este nedefinită, deci M_1 nu este punct de extrem pentru u.

Pentru punctul $M_2(24, -144, -1)$ avem:

$$d^2u(24, -144, -1) = 144\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2\,dz^2 + 24\,dxdy.$$

Deoarece pentru forma pătratică obţinută avem:

$$\Delta_1 = 144 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

deducem că $d^2u(M_2)$ este pozitiv definită, deci M_2 este punct de minim pentru funcţia u. Valoarea minimă a lui u este $u(M_2) = -6913$.

c) Sistemul pentru determinarea punctelor staţionare ale funcţiei u este:

$$\begin{cases} y^2z^3(a-x-2y-3z)-xy^2z^3=0 \\ 2xyz^3(a-x-2y-3z)-2xy^2z^3=0 \\ 3xy^2z^2(a-x-2y-3z)-3xy^2z^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0 \\ 2xyz^3(a-x-3y-3z)=0 \\ 3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de mai sus obţinem următoarele soluţii $M_1^{\alpha\beta}(\alpha,0,\beta)$, $\alpha,\ \beta\in I\!R$; $M_2^{\alpha\beta}(\alpha,\beta,0)$, $\alpha,\ \beta\in I\!R$; $M_3^{\alpha}\left(0,\alpha,\dfrac{a-2\alpha}{3}\right)$, $\alpha\in I\!R$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\dfrac{a}{2}$; $M_4\left(\dfrac{a}{7},\dfrac{a}{7},\dfrac{a}{7}\right)$.

Derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y^2z^3$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2xz^3(a-x-6y-3z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6xy^2z(a-x-2y-6z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yz^3(a-2x-3y-3z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=6xyz^2(a-x-3y-4z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=3y^2z^2(a-2x-2y-4z)$.

Deoarece pentru punctele $M_1^{\alpha\beta}$ cu $\alpha=0$ sau $\beta=0$ sau $\beta=\dfrac{a-\alpha}{3}$ şi $M_2^{\alpha\beta}$, $\alpha,\ \beta\in I\!R$ formele pătratice $d^2u(M_i^{\alpha\beta})$, $i=1,2$ sunt toate egale cu zero, iar funcţia u ia valori şi pozitive şi negative în vecinătatea punctelor respective deducem că nici unul dintre aceste puncte nu este punct de extrem pentru u.

Pentru punctele $M_1^{\alpha\beta}(\alpha,0,\beta)$ cu $\alpha,\ \beta\neq 0$ şi $\beta\neq\dfrac{a-\alpha}{3}$, avem $d^2u(M_1^{\alpha\beta})=2\alpha\beta^3(a-\alpha-3\beta)\,dy^2$. Deci dacă $\alpha\beta^3(a-\alpha-3\beta)>0$ rezultă că $M_1^{\alpha\beta}$ sunt puncte de minim pentru funcţia u, iar dacă $\alpha\beta^3(a-\alpha-3\beta)<0$ rezultă că $M_1^{\alpha\beta}$ sunt puncte de maxim pentru u. Valoarea lui u în aceste puncte este 0.

Pentru punctele M_3^{α} obţinem:

$$d^2u(M_3^{\alpha})=-\frac{2\alpha^2}{27}(a-2\alpha)^3\,dx^2-\frac{4\alpha^2}{27}(a-2\alpha)^3\,dxdy-\frac{2\alpha^2}{9}(a-2\alpha)^3\,dxdz,$$

cu $\Delta_1=-\dfrac{2\alpha^2}{27}(a-2\alpha)^3$, $\Delta_2=-\dfrac{4\alpha^4}{729}(a-2\alpha)^6$, $\Delta_3=0$. Din şirul minorilor obţinut mai sus deducem că M_3^{α}, $\alpha\in I\!R\setminus\left\{0,\dfrac{a}{2}\right\}$ nu sunt puncte de extrem pentru funcţia u.

Pentru punctul $M_4\left(\dfrac{a}{7},\dfrac{a}{7},\dfrac{a}{7}\right)$ avem:

$$d^2u(M_4)=-\frac{2a^5}{7^5}\,dx^2-\frac{6a^5}{7^5}\,dy^2-\frac{12a^5}{7^5}\,dz^2-\frac{4a^5}{7^5}\,dxdy-\frac{6a^5}{7^5}\,dxdz-\frac{12a^5}{7^5}\,dydz,$$

iar $\Delta_1=-\dfrac{2a^5}{7^5}<0$, $\Delta_2=\dfrac{8a^{10}}{7^{10}}>0$, $\Delta_3=-\dfrac{42a^{15}}{7^{15}}<0$. Din şirul minorilor $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$ obţinut mai sus tragem concluzia că punctul M_4 este punct de maxim pentru funcţia u, iar $u_{max}=u(M_4)=\dfrac{a^7}{7^7}$.

d) Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos(x+y+z) \\ \cos y = \cos(x+y+z) \\ \cos z = \cos(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos y = \cos z \\ \cos x = \cos(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

singurul punct staţionar al funcţiei u din domeniul $D = \{(x, y, z) \in I\!R^3,\ \ 0 < x < \pi,$ $0 < y < \pi,\ \ 0 < z < \pi\}$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x + \sin(x+y+z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x+y+z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\sin z +$ $+ \sin(x+y+z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin(x+y+z)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \sin(x+y+z)$;
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \sin(x+y+z)$.

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei u în punctul M este:

$$d^2u(M) = -2\,dx^2 - 2\,dy^2 - 2\,dz^2 - 2\,dxdy - 2\,dydz - 2\,dxdz.$$

Minorii principali asociaţi acestei forme pătratice sunt $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -4 < 0$. Rezultă că M este punct de maxim pentru funcţia u, iar $u_{max} =$ $= u(M) = 4$.

3. Să se determine triunghiul de arie maximă care se poate înscrie într-un cerc de rază dată R.

Rezolvare. Fie cercul Γ de rază R şi un triunghi ABC arbitrar înscris în el. Presupunem că unghiul cel mai mare al triunghiului este A, (în caz contrar schimbăm notaţia triunghiului), deci centrul cercului O este în interiorul $\widehat{BAC}$, (vezi Figura 6.1). Notăm cu α şi β măsurile unghiurilor $\widehat{BAA'}$ şi $\widehat{A'AC}$.

Atunci aria $\triangle ABC$ este $A = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta)$. Din $\triangle AA'B$ deducem $\dfrac{AB}{\sin(90° - \alpha)} = 2R \Rightarrow AB = 2R\cos\alpha$, iar din $\triangle AA'C$ avem $\dfrac{AC}{\sin(90° - \beta)} = 2R \Rightarrow$ $AC = 2R\cos\beta$. Rezultă astfel:

$$A = \frac{1}{2} 4R^2 \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin(\alpha+\beta).$$

Avem de determinat α şi β astfel încât aria A să fie maximă, adică avem de determinat extremele funcţiei $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y)$, $(x,\ y > 0,\ x+y < 180°)$. Derivatele parţiale ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cos y \cdot \sin(x+y) + \cos x \cos y \cdot \cos(x+y) = \cos y \cdot \cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos x \sin y \cdot \sin(x+y) + \cos x \cos y \cdot \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos(x+2y).$$

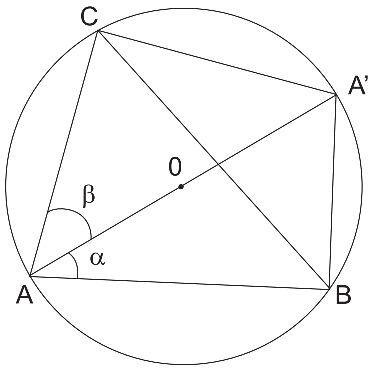

Figura 6.1

Sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y \cdot \cos(2x+y) = 0 \\ \cos x \cdot \cos(x+2y) = 0 \end{cases}$ are soluţia convenabilă problemei noastre $2x + y = \dfrac{\pi}{2}$, $x + 2y = \dfrac{\pi}{2}$, de unde rezultă $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{6}$. Deducem astfel că $m(\widehat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$. Pentru a vedea dacă punctul găsit $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{6}$ este un punct de extrem sau nu, calculăm derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei f:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\cos y \cdot \sin(2x+y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y \cdot \cos(2x+y) - \cos y \cdot \sin(2x+y) =$ $= -\sin(2x+2y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos x \cdot \sin(x+2y)$.

Avem $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\sqrt{3} = C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$; $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $AC - B^2 = \dfrac{9}{4} > 0$ şi $A = -\sqrt{3} < 0$. Rezultă că punctul $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{6}$ este punct de maxim pentru funcţia f. Deducem astfel că pentru $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{6}$, (deci $m(\widehat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$), aria $\triangle\, ABC$ este maximă. Din Figura 6.1 se vede că dacă $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{6}$, $AB = AC$, deci $\triangle\, ABC$ este echilateral, adică dintre triunghiurile înscrise într-un cerc, aria maximă o are triunghiul echilateral.

4. Să se împartă numărul 24 în trei părţi astfel încât produsul lor să fie maxim.

Rezolvare. Fie x şi y primele două părţi. A treia va fi $24 - x - y$. Se cere să determinăm cele trei părţi astfel încât produsul $P = xy(24 - x - y) = 24xy - x^2y - xy^2$ să fie maxim. Punctele staţionare ale funcţiei $P = P(x, y)$ se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24y - 2xy - y^2 = 0 \\ 24x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(24 - 2x - y) = 0 \\ x(24 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Deducem soluţiile $(0,0)$, $(0,24)$, $(24,0)$ şi $(8,8)$. Primele trei soluţii le înlăturăm deoarece ne dau $P=0$. Pentru ultima soluţie $x=y=8$ avem:

$$A=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(8,8)=-16,\quad B=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(8,8)=-8,\quad C=\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(8,8)=-16.$$

Deoarece $AC-B^2=192>0$, iar $A<0$ rezultă că punctul $(8,8)$ este punct de maxim pentru funcţia P, iar $P_{max}=512$. Deci produsul este maxim dacă toate cele trei părţi sunt egale cu 8.

5. Să se găsească un plan tangent la elipsoidul (E) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ care să formeze cu planele de simetrie un tetraedru de volum minim.

Rezolvare. Ecuaţia planului tangent într-un punct arbitrar, momentan fixat $M(x_0,y_0,z_0)\in$ (E) este $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$. Acest plan intersectează axele de coordonate în punctele (vezi Figura 6.2) $A\left(\dfrac{a^2}{x_0},0,0\right)$, $B\left(0,\dfrac{b^2}{y_0},0\right)$, $C\left(0,0,\dfrac{c^2}{z_0}\right)$ (presupunem x_0, y_0, $z_0\neq 0$).

Volumul tetraedrului astfel format $OABC$ este dat de formula:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{a^2}{x_0} & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{b^2}{y_0} & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{c^2}{z_0} & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0},$$

(presupunem fără a restrânge generalitatea problemei că M se găseşte în primul octant, deci x_0, y_0, $z_0>0$).

Deoarece $M\in(E)$, adică $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$, rezultă că $z_0=c\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}}$.

Atunci volumul tetraedrului devine $V=\dfrac{a^2b^2c}{6x_0y_0\cdot\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}}}$.

A determina poziţia planului tangent astfel încât volumul tetraedrului să fie minim este echivalent cu a determina punctele de extrem (în special cele de maxim) pentru funcţia de două variabile $u(x,y)=xy\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. Punctele staţionare ale acestei funcţii sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)=0\\ x\left(1-\dfrac{2y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}\right)=0.\end{cases}$$

Obţinem soluţia $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $(x,\, y > 0)$. Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\frac{3xy}{a^2} + \frac{2x^3y}{a^4} + \frac{3xy^3}{a^2b^2}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\frac{3xy}{b^2} + \frac{3x^3y}{a^2b^2} + \frac{2xy^3}{b^4}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2x^4}{a^4} + \frac{2y^4}{b^4} + \frac{3x^2y^2}{a^2b^2}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}.$$

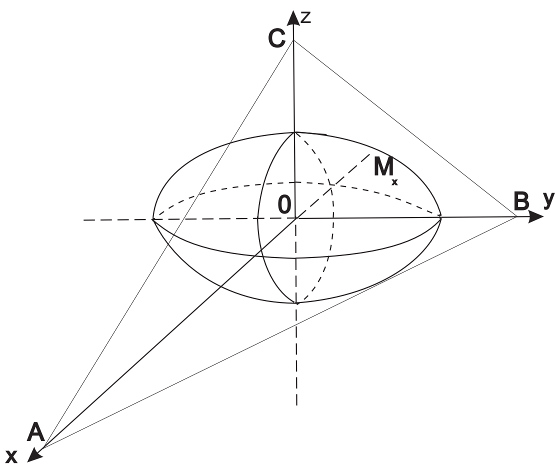

Figura 6.2

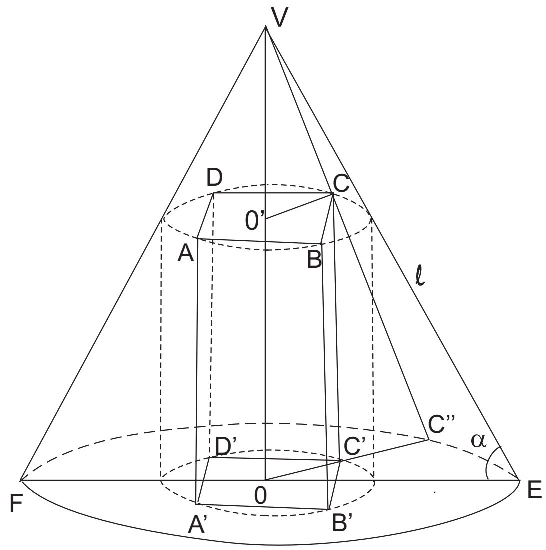

Figura 6.3

În punctul M avem $A = -\dfrac{4\sqrt{3}b}{3a}$, $B = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $C = -\dfrac{4\sqrt{3}a}{3b}$, $AC - B^2 = 4 > 0$, $A < 0$. Rezultă că punctul M este punct de maxim pentru funcţia u.

Deci punctul $M_0\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ este un punct al elipsoidului (E) pentru care volumul tetraedrului corespunzător este minim. Planul tangent la (E) în M_0 are ecuaţia $\dfrac{x}{a\sqrt{3}} + \dfrac{y}{b\sqrt{3}} + \dfrac{z}{c\sqrt{3}} - 1 = 0$. Din simetria elipsoidului deducem că punctele cerute în problemă sunt $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

6. Să se înscrie în conul circular drept, a cărei generatoare l este înclinată faţă de planul bazei cu un unghi α, un paralelipiped dreptunghic de arie totală maximă.

Rezolvare. Să notăm cu x şi y laturile bazei paralelipipedului înscris în con, $AB = x$ şi $AD = y$, (vezi Figura 6.3). Atunci $OE = l\cos\alpha$, $VO = l\sin\alpha$, iar din asemănarea triunghiurilor $VO'C$ şi VOC'' deducem $\dfrac{O'C}{l\cos\alpha} = \dfrac{VO'}{l\sin\alpha} \Rightarrow VO' = O'C\times$ $\times\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Înălţimea paralelipipedului OO' este:

$$OO' = VO - VO' = l\sin\alpha - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left(2l\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ este:

$$A_t = 2xy + (2x+2y)\cdot OO' = 2xy + (x+y)\cdot(2l\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha).$$

Să determinăm în continuare punctele de extrem ale funcţiei de două variabile:

$$u(x,y) = 2xy + (x+y)(2l\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{tg}\alpha).$$

Punctele sale staţionare le vom determina rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2l\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{tg}\alpha - (x+y)\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2x + 2l\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{tg}\alpha - (x+y)\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \end{cases}$$

Obţinem soluţia $x_0 = \dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}$, $y_0 = \dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}$, ($\operatorname{tg}\alpha \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; pentru $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, sistemul de mai sus nu are soluţii).

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x^3+3xy^2+y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\operatorname{tg}\alpha,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y^3+3x^2y+x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2 - \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

În punctul (x_0,y_0) avem $A = C = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $B = \dfrac{4-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2}$. Pentru ca punctul (x_0,y_0) să fie punct de maxim pentru funcţia u trebuie ca $AC - B^2 > 0$, adică $\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha - 1 > 0$. Obţinem $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ($\operatorname{tg}\alpha > 0$) sau $\alpha > \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Deci pentru $x = y = \dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}$ obţinem paralelipipedul dreptunghic înscris în con de arie totală maximă. Înălţimea sa este:

$$OO' = \frac{1}{2}\left(2l\sin\alpha - \sqrt{2}\cdot\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1},$$

iar aria totală este $A_t = \dfrac{2l^2\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}$.

7. Să se determine extremele (locale) cu legături pentru următoarele funcţii:

a) $z(x,y) = x^2 + y^2$; $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $(a,b \in I\!\!R^*)$.

b) $z(x,y) = x\cdot y$; $x^2 + y^2 = a^2$, $(a > 0)$.

c) $z(x,y) = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2}$; $x + y = a$, $(a \in I\!\!R^*)$.

d) $z(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$; $x - y = \dfrac{\pi}{4}$, $x,\ y \in (0, 2\pi)$.

e) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $ax + by + cz = k$, $(a,b,c,k \in I\!\!R;\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

f) $u(x,y,z) = x^m y^n z^p$; $x + y + z = a$, $(a \in I\!\!R^*;\ m,n,p \in I\!\!N;\ m,n,p \geq 2)$.

g) $u(x,y,z) = xyz, \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0. \end{cases}$

h) $f(x,y,z,u) = ax+by+cz+du; \quad x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2, \quad (R>0,\ a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0).$

Rezolvare. a) Funcţia lui Lagrange asociată lui z şi legăturii menţionate este:

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right).$$

Determinăm mai întâi punctele staţionare ale acestei funcţiei L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{\lambda}{a} = 0 \\ 2y+\dfrac{\lambda}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y_0 = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} \\ \lambda_0 = -\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Calculăm acum $d^2\Phi(x_0,y_0)$, unde:

$$\Phi(x,y) = L(x,y,\lambda_0) = x^2+y^2-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right).$$

Avem $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 2, \quad \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2, \quad \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0$, iar $d^2\Phi(x_0,y_0) = 2\,dx^2+2\,dy^2$.

Deoarece diferenţialele dx şi dy sunt în relaţia $\dfrac{dx}{a}+\dfrac{dy}{b} = 0 \Rightarrow dy = -\dfrac{b}{a}\,dx$ rezultă că $d^2\Phi(x_0,y_0) = 2\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)dx^2$.

Am obţinut o formă pătratică (într-o singură dimensiune) pozitiv definită. Deducem astfel că punctul $M(x_0,y_0)$ este punct de minim pentru funcţia z supusă la legătura $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} = 1$. Valoarea sa minimă este $z(x_0,y_0) = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

b) Fie funcţia $L(x,y,\lambda) = xy+\lambda(x^2+y^2-a^2)$.

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2\lambda x = 0 \\ x+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-a^2 = 0. \end{cases}$$

Sistemul $\begin{cases} 2\lambda x+y = 0 \\ x+2\lambda y = 0 \end{cases}$ (în necunoscutele x şi y) trebuie să aibă soluţii diferite de soluţia banală. Deci determinantul său este zero, adică $\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ şi $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Pentru $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ din ecuaţia $y+2\lambda x = 0$ rezultă $y = -x$, iar din ecuaţia $x^2+y^2 = a^2$ deducem $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ şi $x_2 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Pentru $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ rezultă $x = y$ şi din ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$ deducem $x_3 = y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ şi $x_4 = y_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$. Deci funcţia L are patru puncte staţionare.

Pentru $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ să considerăm funcţia:

$$\Phi_1(x, y) = L(x, y, \lambda_1) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 1$, $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 1$, $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} = 1$. Diferenţiind legătura $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ obţinem relaţia $x\,dx + y\,dy = 0$. Pentru primul punct $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ relaţia de mai sus devine $dx = dy$, iar:

$$d^2\Phi_1(x_1, y_1) = dx^2 + 2\,dxdy + dy^2 = 4\,dx^2.$$

Deducem astfel că punctul $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim pentru funcţia z supusă la legătura $x^2 + y^2 = a^2$; valoarea sa minimă este $z_{min} = z\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a^2}{2}$. Pentru al doilea punct $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, legătura dintre diferenţialele dx şi dy fiind aceeaşi $dx = dy$, obţinem $d^2\Phi_1(x_2, y_2) = 4\,dx^2$. Deci şi punctul (x_2, y_2) este punct de minim pentru funcţia z, valoarea sa minimă fiind $z'_{min} = z\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = z_{min} = -\frac{a^2}{2}$.

Pentru $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ să considerăm funcţia:

$$\Phi_2(x, y) = L(x, y, \lambda_2) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei Φ_2 sunt $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = -1$, $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = -1$, $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} = 1$. Diferenţiind legătura $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ obţinem din nou relaţia $x\,dx + y\,dy = 0$. Pentru punctul $x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, relaţia de mai sus ne dă $dy = -dx$, iar:

$$d^2\Phi_2(x_3, y_3) = -dx^2 + 2\,dxdy - dy^2 = -4\,dx^2.$$

Rezultă astfel că punctul (x_3, y_3) este punct de maxim pentru funcţia z supusă la legătura $x^2 + y^2 = a^2$, iar $z_{max} = z(x_3, y_3) = \frac{a^2}{2}$. Pentru punctul $x_4 = y_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, legătura dintre diferenţialele dx şi dy este $dy = -dx$, iar $d^2\Phi_2(x_4, y_4) = -4\,dx^2$. Deci şi punctul (x_4, y_4) este punct de maxim pentru funcţia z şi $z'_{max} = z(x_4, y_4) = z_{max} = \frac{a^2}{2}$.

c) Funcţia lui Lagrange este:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} + \lambda(x + y - a).$$

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda = 0 \\ \dfrac{xy^2 - x^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda = 0 \\ x + y = a. \end{cases}$$

Făcând diferenţa primelor două ecuaţii ale sistemului de mai sus obţinem ecuaţia:

$$\frac{x^2y - y^3 - xy^2 + x^3}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)^2 = 0, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

care combinată cu ultima ecuaţie $x + y = a$ formează sistemul în (x, y):

$\begin{cases} (x-y)(x+y)^2 = 0 \\ x + y = a \end{cases}$ cu soluţia $x_0 = y_0 = \dfrac{a}{2}$. Pentru λ găsim valoarea corespunzătoare $\lambda_0 = 0$.

Considerăm în continuare funcţia $\Phi(x, y) = L(x, y, \lambda_0) = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2}$, care are următoarele derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{6xy^3 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{6x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Diferenţiind legătura $x + y = a$, obţinem $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$. Diferenţiala a doua a funcţiei Φ în punctul (x_0, y_0) este:

$$d^2\Phi\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{2}{a^2}\,dx^2 - \frac{4}{a^2}\,dxdy + \frac{2}{a^2}\,dy^2 = \frac{8}{a^2}\,dx^2 > 0.$$

Deducem astfel că punctul $M_0\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$ este un punct de minim pentru funcţia z, supusă la legătura $x + y = a$. Valoarea minimă a lui z este $z_{min} = z\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

d) Avem $L(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(x - y - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Sistemul care ne dă punctele staţionare ale funcţiei L este:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\cos x \sin x + \lambda = 0 \\ -2\cos y \sin y - \lambda = 0 \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 0 \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \\ \lambda = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \\ \lambda = \sin 2x, \end{cases}$$

care are soluţiile $x_1 = \dfrac{5\pi}{8}$, $y_1 = \dfrac{3\pi}{8}$, $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \dfrac{9\pi}{8}$, $y_2 = \dfrac{7\pi}{8}$, $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_3 = \dfrac{13\pi}{8}$, $y_3 = \dfrac{11\pi}{8}$, $\lambda_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \lambda_1$.

Să considerăm acum funcţiile $\Phi_1(x, y) = L(x, y, \lambda_1)$ şi $\Phi_2(x, y) = L(x, y, \lambda_2)$. Din legătura $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ obţinem prin diferenţiere $dx = dy$. Atunci:

$d^2\Phi_1(x_1, y_1) = \sqrt{2}\,dx^2 + \sqrt{2}\,dy^2 = 2\sqrt{2}\,dx^2$, $d^2\Phi_1(x_3, y_3) = \sqrt{2}\,dx^2 + \sqrt{2}\,dy^2 =$ $= 2\sqrt{2}\,dx^2$, $d^2\Phi_2(x_2, y_2) = -\sqrt{2}\,dx^2 - \sqrt{2}\,dy^2 = -2\sqrt{2}\,dx^2$.

Din cele de mai sus deducem că funcţia z pe domeniul indicat şi supusă la legătura

$x-y=\dfrac{\pi}{4}$ admite două puncte de minim $M_1\left(\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right)$ şi $M_3\left(\dfrac{13\pi}{8},\dfrac{11\pi}{8}\right)$ şi un punct de maxim $M_2\left(\dfrac{9\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8}\right)$, valorile corespunzătoare ale lui z fiind $z_{min}=z(M_1)=$ $=z(M_3)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, iar $z_{max}=z(M_2)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

e) Funcţia lui Lagrange este:

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(ax+by+cz-k).$$

Punctele sale staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda a=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda b=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z+\lambda c=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=ax+by+cz-k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\lambda a}{2}\\ y=-\dfrac{\lambda b}{2}\\ z=-\dfrac{\lambda c}{2}\\ ax+by+cz-k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{ak}{a^2+b^2+c^2}\\ y_0=\dfrac{bk}{a^2+b^2+c^2}\\ z_0=\dfrac{ck}{a^2+b^2+c^2}\\ \lambda_0=-\dfrac{2k}{a^2+b^2+c^2}\end{cases}.$$

Considerăm funcţia:

$$\Phi(x,y,z)=L(x,y,z,\lambda_0)=x^2+y^2+z^2-\frac{2k}{a^2+b^2+c^2}(ax+by+cz-k)$$

care are derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=2,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}=0.$$

Diferenţiind legătura $ax+by+cz=k$ obţinem $a\,dx+b\,dy+c\,dz=0$. Diferenţiala a doua a funcţiei Φ în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este (fără a mai ţine cont de legătură):

$$d^2\Phi(x_0,y_0,z_0)=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0.$$

Deducem astfel că punctul M_0 este un punct de minim pentru funcţia u, iar valoarea minimă a lui u este $u_{min}=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\dfrac{k^2}{a^2+b^2+c^2}$.

f) Funcţia lui Lagrange este $L(x,y,z,\lambda)=x^my^nz^p+\lambda(x+y+z-a)$.

Punctele sale staţionare le determinăm rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mx^{m-1}y^nz^p+\lambda=0\\ nx^my^{n-1}z^p+\lambda=0\\ px^my^nz^{p-1}+\lambda=0\\ x+y+z=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{m-1}y^{n-1}z^p(my-nx)=0\\ x^my^{n-1}z^{p-1}(nz-py)=0\\ x+y+z=a\\ \lambda=-mx^{m-1}y^nz^p\end{cases}\Rightarrow$$

$M^\alpha(0,\alpha,a-\alpha)$, $\alpha\in I\!R$, $M^\beta(\beta,0,a-\beta)$, $\beta\in I\!R$, $M^\gamma(\gamma,a-\gamma,0)$, $\gamma\in I\!R$ cu $\bar\lambda=0$ şi $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $x_0=\dfrac{am}{m+n+p}$, $y_0=\dfrac{an}{m+n+p}$, $z_0=\dfrac{ap}{m+n+p}$, cu

$$\lambda_0=-\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-1}m^mn^np^p.$$

Să considerăm acum funcţia:

$$\Phi_1(x,y,z) = L(x,y,z,\lambda_0) = x^m y^n z^p + \lambda_0(x+y+z-a),$$

care are următoarele derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n z^p,\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} = n(n-1)x^m y^{n-2}z^p,\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} = p(p-1)x^m y^n z^{p-2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} = mnx^{m-1}y^{n-1}z^p,\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\partial z} = npx^m y^{n-1}z^{p-1},\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z} = mpx^{m-1}y^n z^{p-1}.$$

Atunci diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei Φ_1 în punctul M_0 este:

$$d^2\Phi_1(x_0,y_0,z_0) = m(m-1)x_0^{m-2}y_0^n z_0^p\,dx^2 + n(n-1)x_0^m y_0^{n-2}z_0^p\,dy^2 + p(p-1)x_0^m y_0^n z_0^{p-2}\,dz^2 +$$
$$+2mnx_0^{m-1}y_0^{n-1}z_0^p\,dxdy + 2npx_0^m y_0^{n-1}z_0^{p-1}\,dydz + 2mpx_0^{m-1}y_0^n z_0^{p-1}\,dxdz,$$

care în prezenţa legăturii $dx+dy+dz=0$ sau $dz=-dx-dy$ devine:

$$d^2\Phi_1(x_0,y_0,z_0) = [m(m-1)x_0^{m-2}y_0^n z_0^p + p(p-1)x_0^m y_0^n z_0^{p-2} - 2mpx_0^{m-1}y_0^n z_0^{p-1}]\,dx^2 +$$
$$+[n(n-1)x_0^m y_0^{n-2}z_0^p + p(p-1)x_0^m y_0^n z_0^{p-2} - 2npx_0^m y_0^{n-1}z_0^{p-1}]\,dy^2 + 2[mnx_0^{m-1}y_0^{n-1}z_0^p +$$
$$+p(p-1)x_0^m y_0^n z_0^{p-2} - npx_0^m y_0^{n-1}z_0^{p-1} - mpx_0^{m-1}y_0^n z_0^{p-1}]\,dxdy =$$
$$= [m(m-1)z_0^2 - 2mpx_0z_0 + p(p-1)x_0^2]x_0^{m-2}y_0^n z_0^{p-2}\,dx^2 + [n(n-1)z_0^2 - 2npy_0z_0 +$$
$$+p(p-1)y_0^2]x_0^m y_0^{n-2}z_0^{p-2}dy^2 + 2[mnz_0^2 + p(p-1)x_0y_0 - npx_0z_0 - mpy_0z_0]x_0^{m-1}y_0^{n-1}z_0^{p-2}dxdy.$$

Coeficienţii formei pătratice obţinută mai sus sunt:

$$A = -\frac{(m+p)}{(m+n+p)^{m+n+p-2}}\cdot a^{m+n+p-2}m^{m-1}n^n p^{p-1},$$

$$C = -\frac{(n+p)}{(m+n+p)^{m+n+p-2}}\cdot a^{m+n+p-2}m^m n^{n-1}p^{p-1},$$

$$B = -\frac{1}{(m+n+p)^{m+n+p-2}}\cdot a^{m+n+p-2}m^m n^n p^{p-1}.$$

Atunci, deoarece $AC-B^2 = \dfrac{1}{(m+n+p)^{2(m+n+p)-5}}\cdot a^{2(m+n+p-2)}m^{2m-1}n^{2n-1}p^{2p-1} > 0$, iar $A<0$ rezultă că punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ este punct de maxim pentru funcţia u şi $u_{max} = u(M_0) = \dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

Considerăm în continuare funcţia:

$$\Phi_2(x,y,z) = L(x,y,z,\bar\lambda) = x^m y^n z^p$$

care are aceleaşi derivate parţiale de ordinul al doilea ca şi funcţia Φ_1. Rezultă că în punctele M^α, M^β, M^γ avem:

$$d^2\Phi_2(M^\alpha) = d^2\Phi_2(M^\beta) = d^2\Phi_2(M^\gamma) = 0.$$

În acest caz sau se apelează la diferenţialele de ordin superior ale funcţiei Φ_2 sau se studiază diferenţa (pentru punctele M^α):

$$u(x,y,z) - u(M^\alpha) = x^m y^n z^p \text{ în prezenţa legăturii } x+y+z=a.$$

Rezultă astfel că pentru $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \neq a$ dacă m este par atunci punctele M^α sunt puncte de extrem şi anume puncte de minim dacă $\alpha^n(a-\alpha)^p > 0$ şi puncte de maxim dacă $\alpha^n(a-\alpha)^p < 0$. Pentru $\alpha = 0$ dacă m şi n sunt pare punctul $M^0(0,0,a)$ este punct de extrem şi anume punct de minim dacă $a^p > 0$ şi punct de maxim dacă $a^p < 0$. Pentru $\alpha = a$ dacă m şi p sunt pare punctul $M^a(0,a,0)$ este punct de extrem şi anume punct de minim dacă $a^n > 0$ şi punct de maxim dacă $a^n < 0$. În mod asemănător se studiază şi punctele M^β, M^γ.

g) Funcţia lui Lagrange este:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-1) + \mu(x+y+z),$$

iar punctele sale staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ xy + 2\lambda z + \mu = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ x+y+z = 0. \end{cases}$$

Punând condiţia ca sistemul format din primele trei ecuaţii ale sistemului de mai sus, în necunoscutele λ şi μ, să fie compatibil obţinem ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} yz & 2x & 1 \\ xz & 2y & 1 \\ xy & 2z & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y-x)(z-x)(y-z) = 0.$$

Astfel sistemul de mai sus este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{3}(yz+xz+xy) \\ 2\lambda x = -\mu - yz \\ (y-x)(z-x)(y-z) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 0. \end{cases}$$

Obţinem soluţiile $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt6}, \dfrac{1}{\sqrt6}, -\dfrac{2}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$; $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt6}, -\dfrac{1}{\sqrt6}, \dfrac{2}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$; $M_3\left(\dfrac{1}{\sqrt6}, -\dfrac{2}{\sqrt6}, \dfrac{1}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$; $M_4\left(-\dfrac{1}{\sqrt6}, \dfrac{2}{\sqrt6}, -\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$; $M_5\left(-\dfrac{2}{\sqrt6}, \dfrac{1}{\sqrt6}, \dfrac{1}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$; $M_6\left(\dfrac{2}{\sqrt6}, -\dfrac{1}{\sqrt6}, -\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$ cu $\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt6}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$.

Să considerăm funcţiile:

$$\Phi_1(x,y,z)=L\left(x,y,z,\frac{1}{2\sqrt{6}},\frac{1}{6}\right)=xyz+\frac{1}{2\sqrt{6}}(x^2+y^2+z^2-1)+\frac{1}{6}(x+y+z) \quad \text{şi}$$

$$\Phi_2(x,y,z)=L\left(x,y,z,-\frac{1}{2\sqrt{6}},\frac{1}{6}\right)=xyz-\frac{1}{2\sqrt{6}}(x^2+y^2+z^2-1)+\frac{1}{6}(x+y+z).$$

Vom studia diferenţialele de ordinul al doilea ale funcţiei Φ_1 în punctele M_1, M_3 şi M_5 şi apoi ale funcţiei Φ_2 în punctele M_2, M_4 şi M_6. Legăturile din problemă ne dau:

$$\begin{cases} x\,dx+y\,dy+z\,dz=0 \\ dx+dy+dz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz=-dx-dy \\ (x-z)\,dx+(y-z)\,dy=0. \end{cases}$$

Pentru punctul M_1 avem:

$$d^2\Phi_1(M_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2-\frac{4}{\sqrt{6}}\,dxdy+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdz+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dydz,$$

care în prezenţa legăturilor $\begin{cases} dz=-dx-dy \\ \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dx+\dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy=-dx \\ dz=0 \end{cases}$

devine $d^2\Phi_1(M_1)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dx^2+\dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dx^2=\sqrt{6}\,dx^2$. Rezultă că punctul $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim pentru funcţia u supusă la cele două legături, iar $u(M_1)=$ $=-\dfrac{2}{6\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Pentru punctul M_3 avem:

$$d^2\Phi_1(M_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdy-\frac{4}{\sqrt{6}}\,dxdz+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dydz.$$

Legăturile pentru punctul M_3 devin $\begin{cases} dz=-dx-dy \\ -\dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy=0 \\ dz=-dx. \end{cases}$

Deci $d^2\Phi_1(M_3)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dx^2+\dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dx^2=\sqrt{6}\,dx^2$. Rezultă că $M_3\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim pentru funcţia u, iar $u(M_3)=-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Pentru punctul M_5 avem:

$$d^2\Phi_1(M_5)=\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdy+\frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdz-\frac{4}{\sqrt{6}}\,dydz.$$

Legăturile sunt $\begin{cases} dz=-dx-dy \\ -\dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dz=-dy, \end{cases}$ de unde deducem că $d^2\Phi_1(M_5)=$ $=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dy^2+\dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dy^2=\sqrt{6}\,dy^2$. Deci şi $M_5\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim pentru funcţia u, iar $u(M_5)=-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Să studiem în continuare punctele M_2, M_4 şi M_6 relativ la funcţia Φ_2.

Pentru punctul M_2 avem:

$$d^2\Phi_2(M_2) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\,dxdy - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdz - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dydz.$$

Legăturile între diferenţialele dx, dy şi dz sunt $\begin{cases} dz = -dx - dy \\ -\dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dx - \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = 0 \\ dy = -dx. \end{cases}$

Obţinem $d^2\Phi_2(M_2) = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dx^2 = -\sqrt{6}\,dx^2$. Deducem de aici că punctul $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim pentru funcţia u supusă la cele două legături, iar $u(M_2) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Pentru punctul M_4 avem:

$$d^2\Phi_2(M_4) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdy + \frac{4}{\sqrt{6}}\,dxdz - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dydz,$$

iar legăturile sunt $\begin{cases} dz = -dx - dy \\ \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \\ dz = -dx. \end{cases}$ Deci $d^2\Phi_2(M_4) = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dx^2 = -\sqrt{6}\,dx^2$. Rezultă că $M_4\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim pentru funcţia u, iar $u(M_4) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

În sfârşit, pentru punctul M_6 avem:

$$d^2\Phi_2(M_6) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dz^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdy - \frac{2}{\sqrt{6}}\,dxdz + \frac{4}{\sqrt{6}}\,dydz$$

cu legăturile $\begin{cases} dz = -dx - dy \\ \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dz = -dy. \end{cases}$ Deci $d^2\Phi_2(M_6) = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,dy^2 - \dfrac{4}{\sqrt{6}}\,dy^2 = -\sqrt{6}\,dy^2$, de unde rezultă că şi $M_6\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim pentru funcţia u, iar $u(M_6) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Deci funcţia u supusă la cele două legături admite trei puncte de minim M_1, M_3 şi M_5 cu valoarea $u_{min} = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ şi trei puncte de maxim M_2, M_4 şi M_6 cu valoarea $u_{max} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

h) Funcţia lui Lagrange este:

$$L(x, y, z, u, \lambda) = ax + by + cz + du + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - R^2).$$

Punctele sale staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = a + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = b + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = c + 2\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = d + 2\lambda u = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - R^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x = -\dfrac{a}{2} \\ \lambda y = -\dfrac{b}{2} \\ \lambda z = -\dfrac{c}{2} \\ \lambda u = -\dfrac{d}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{Ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}},\quad y_{1,2} = \pm\frac{Rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}},\quad z_{1,2} = \pm\frac{Rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}},$$

$$u_{1,2} = \pm\frac{Rd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}},\quad \lambda_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}{2R}.$$

Considerăm funcţiile:

$\Phi_1(x,y,z,u) = L(x,y,z,u,\lambda_1) = ax+by+cz+du-\dfrac{1}{2R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}(x^2+y^2+$ $+z^2+u^2-R^2)$,

$\Phi_2(x,y,z,u) = L(x,y,z,u,\lambda_2) = ax+by+cz+du+\dfrac{1}{2R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}(x^2+y^2+$ $+z^2+u^2-R^2)$.

Vom studia diferenţialele de ordinul al doilea $d^2\Phi_1(M_1)$, $M_1(x_1,y_1,z_1,u_1)$ şi $d^2\Phi_2(M_2)$, $M_2(x_2,y_2,z_2,u_2)$. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial u^2} = 2\lambda = -\frac{1}{R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial u} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\partial u} = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z\partial u} = 0,$$

iar $d^2\Phi_1(M_1) = -\dfrac{1}{R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}(dx^2+dy^2+dz^2+du^2) < 0$. Aici nu a fost nevoie să ţinem cont de legătura $2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz + 2u\,du = 0$. Deci punctul M_1 este un punct de maxim pentru funcţia f, iar $f_{max} = R\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

În mod asemănător pentru Φ_2 obţinem:

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial u^2} = 2\lambda = \frac{1}{R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial u} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y\partial u} = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z\partial u} = 0,$$

iar $d^2\Phi_2(M_2) = \dfrac{1}{R}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}(dx^2+dy^2+dz^2+du^2) > 0$. Deci punctul M_2 este un punct de minim pentru funcţia f, iar $f_{min} = -R\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

8. Se dă un cerc Γ şi trei puncte fixe A, B, C în planul cercului. Să se determine punctul M pe cerc astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie maximă sau minimă.

Rezolvare. Fie cercul Γ de ecuaţie $x^2+y^2=r^2$, iar $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$

cele trei puncte fixe din plan raportate la un sistem de axe ortogonale Oxy, a cărui origine am considerat-o centrul cercului Γ, (vezi Figura 6.4).

Să notăm cu (x, y) coordonatele unui punct $M \in \Gamma$, deci $x^2+y^2 = r^2$. Presupunem mai întâi că centrul de greutate G al triunghiului ABC este diferit de O. Atunci avem de determinat extremele funcţiei:

$$u(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

supusă la legătura $x^2 + y^2 = r^2$.

Funcţia lui Lagrange asociată lui u şi legăturii de mai sus este:

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Să determinăm punctele staţionare ale funcţiei L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2[(x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_3)] + 2\lambda x = 0 \\ 2[(y - y_1) + (y - y_2) + (y - y_3)] + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 + \lambda)x - (x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ (3 + \lambda)y - (y_1 + y_2 + y_3) = 0 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0. \end{cases}$$

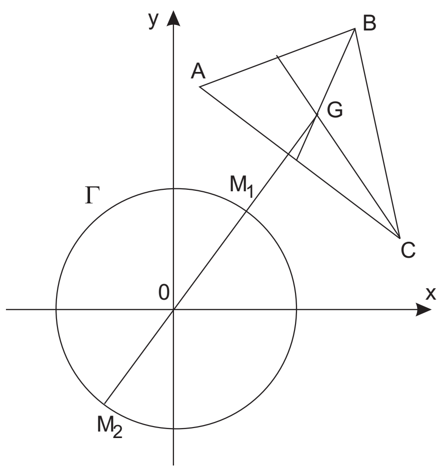

Figura 6.4

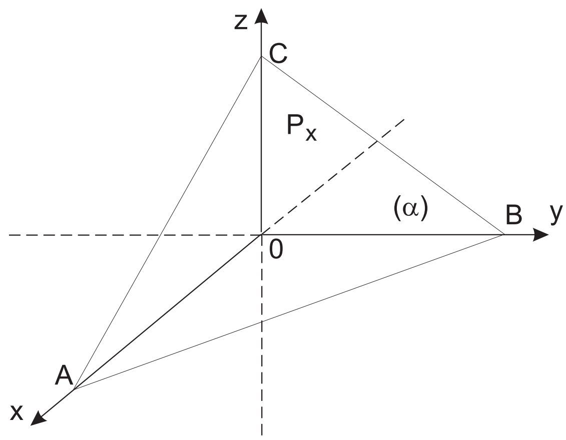

Figura 6.5

Deoarece $G \neq O$ rezultă că $\lambda \neq -3$; înlocuind x şi y din primele două ecuaţii ale sistemului de mai sus în ultima ecuaţie, obţinem $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3+\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3+\lambda}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}}{r} - 3.$$

Atunci:

$$x^{1,2}=\frac{(x_1+x_2+x_3)r}{\pm\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}},\quad y^{1,2}=\frac{(y_1+y_2+y_3)r}{\pm\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}}.$$

Punctele astfel găsite $M_1(x^1,y^1)$ şi $M_2(x^2,y^2)$ se găsesc la intersecţia cercului Γ cu dreapta (OG). Într-adevăr, $\dfrac{y^{1,2}}{x^{1,2}}=\dfrac{\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}=\dfrac{y_G}{x_G}$, $(G(x_G,y_G))$. Folosind desenul din Figura 6.4 putem trage direct concluziile referitoare la extremele funcţiei u, fără a mai utiliza diferenţiala de ordinul al doilea. Şi anume, cel mai apropiat punct de G, M_1, va determina un minim pentru u, iar cel mai îndepărtat de G, M_2, va da un maxim pentru funcţia u.

Dacă $x_G=y_G=0$, $(G=O)$ deducem că pentru orice punct $M\in\Gamma$ suma $MA^2+MB^2+MC^2=3r^2+x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2=const.$

9. Se dă un punct fix $P(a,b,c)$ în primul octant al axelor de coordonate $Oxyz$. Un plan variabil care trece prin P taie semiaxele pozitive Ox, Oy şi Oz în A, B, respectiv C. Să se determine planul pentru care volumul tetraedrului $OABC$ este minim.

Rezolvare. Un plan variabil (α) prin P are ecuaţia $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}-1=0$. Punctele de intersecţie ale acestui plan cu semiaxele pozitive Ox, Oy şi Oz sunt $A(\alpha,0,0)$, $B(0,\beta,0)$ şi $C(0,0,\gamma)$, (vezi Figura 6.5), iar coordonatele punctului P satisfac condiţia $\dfrac{a}{\alpha}+\dfrac{b}{\beta}+\dfrac{c}{\gamma}=1$.

Volumul tetraedrului $OABC$ este:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}0&0&0&1\\ \alpha&0&0&1\\ 0&\beta&0&1\\ 0&0&\gamma&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma.$$

Pentru a determina poziţia planului (α) astfel încât volumul tetraedrului $OABC$ să fie minim, vom studia extremele funcţiei $u(x,y,z)=xyz$ în prezenţa legăturii $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1$, ($\alpha$, β şi γ sunt notate în funcţia u cu x, y, respectiv z).

Funcţia lui Lagrange asociată funcţiei u şi legăturii de mai sus este:

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-1\right).$$

Să determinăm acum punctele staţionare ale acestei funcţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz - \dfrac{a\lambda}{x^2} = 0 \\ xz - \dfrac{b\lambda}{y^2} = 0 \\ xy - \dfrac{c\lambda}{z^2} = 0 \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2yz}{a} = \dfrac{y^2xz}{b} = \dfrac{z^2xy}{c} \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 1 \\ \lambda = \dfrac{x^2yz}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ \dfrac{3a}{x} = 1 \\ \lambda = \dfrac{x^2yz}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3a \\ y_0 = 3b \\ z_0 = 3c \\ \lambda_0 = 81abc. \end{cases}$$

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei:

$\Phi(x,y,z) = L(x,y,z,\lambda_0) = xyz + 81abc\left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} - 1\right)$

este $d^2\Phi(x,y,z) = \dfrac{162a^2bc}{x^3}\,dx^2 + \dfrac{162ab^2c}{y^3}\,dy^2 + \dfrac{162abc^2}{z^3}\,dz^2 + 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + {}$ $+2x\,dydz$.

Diferenţiind legătura obţinem $\dfrac{a}{x^2}\,dx + \dfrac{b}{y^2}\,dy + \dfrac{c}{z^2}\,dz = 0$, de unde rezultă: $dz = {}$ $= -\dfrac{z^2}{c}\left(\dfrac{a}{x^2}\,dx + \dfrac{b}{y^2}\,dy\right)$. În punctul M_0 avem $dz = -\dfrac{c}{a}\,dx - \dfrac{c}{b}\,dy$. Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei Φ în punctul M_0 este:

$$d^2\Phi(x_0,y_0,z_0) = \frac{6bc}{a}\,dx^2 + \frac{6ac}{b}\,dy^2 + \frac{6ab}{c}\,dz^2 + 6c\,dxdy + 6b\,dxdz + 6a\,dydz =$$
$$= \frac{6bc}{a}\,dx^2 + \frac{6ac}{b}\,dy^2 + \frac{6ab}{c}\left(\frac{c}{a}\,dx + \frac{c}{b}\,dy\right)^2 - 6b\left(\frac{c}{a}\,dx + \frac{c}{b}\,dy\right)dx - 6a\left(\frac{c}{a}\,dx + \frac{c}{b}\,dy\right)dy +$$
$$+ 6c\,dxdy = \frac{6bc}{a}\,dx^2 + \frac{6ac}{b}\,dy^2 + 6c\,dxdy,$$

adică o formă pătratică în două dimensiuni cu coeficienţii $\bar{A} = \dfrac{6bc}{a}$, $\bar{B} = 3c$, $\bar{C} = {}$ $= \dfrac{6ac}{b}$. Deoarece $\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 = 27c^2 > 0$, $\bar{A} > 0$, rezultă că punctul M_0 este punct de minim pentru funcţia u, iar valoarea sa minimă este $u(M_0) = 27abc$.

În concluzie, planul prin P care determină un tetraedru de volum minim este cel care trece prin punctele $A(3a,0,0)$, $B(0,3b,0)$, $C(0,0,3c)$, de ecuaţie $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-3=0$. În acest caz volumul tetraedrului $OABC$ este $V = \dfrac{9}{2}abc$.

10. Se dă elipsoidul (E) de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu semiaxele $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $(a > b > c > 0)$. Se cere să se găsească distanţa maximă sau minimă de la punctul O al elipsoidului până la un punct M al elipsei de secţiune cu planul (ABC).

Rezolvare. Fie M un punct oarecare al elipsoidului (E), $M(x_0, y_0, z_0)$ situat în planul (ABC), (vezi Figura 6.6). Deoarece ecuaţia planului (ABC) este $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$ rezultă că coordonatele punctului M satisfac relaţiile:

$$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}-1=0,\ \ (M\in(ABC)) \quad \text{şi} \quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0,\ \ (M\in(E)).$$

Distanţa OM fiind $OM=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, renunţând la indicele 0 de la coordonatele punctului M şi la radicalul din expresia lui OM, rezultă că avem de determinat extremele funcţiei $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, supusă la legăturile:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0. \end{cases}$$

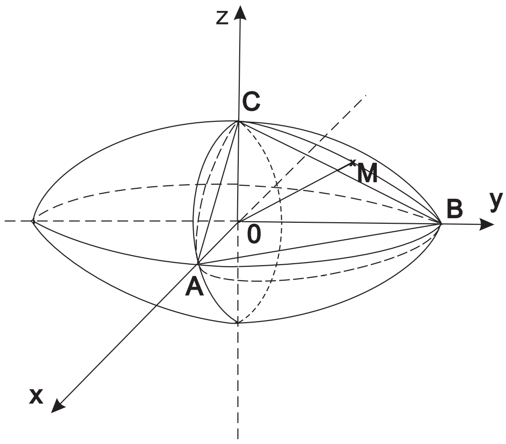

Figura 6.6

Să considerăm funcţia lui Lagrange asociată funcţiei u şi legăturilor de mai sus:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)+\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Determinăm punctele staţionare ale acestei funcţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{\lambda}{a}+\dfrac{2\mu x}{a^2}=0 \\ 2y+\dfrac{\lambda}{b}+\dfrac{2\mu y}{b^2}=0 \\ 2z+\dfrac{\lambda}{c}+\dfrac{2\mu z}{c^2}=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0. \end{cases}$$

Punând condiţia ca sistemul în necunoscutele λ şi μ format din primele trei ecuaţii ale sistemului de mai sus să fie compatibil, obţinem ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} 2x & \dfrac{1}{a} & \dfrac{2x}{a^2} \\ 2y & \dfrac{1}{b} & \dfrac{2y}{b^2} \\ 2z & \dfrac{1}{c} & \dfrac{2z}{c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Astfel obţinem pentru x, y şi z următorul sistem:

$$\begin{cases} (b^2-c^2)\dfrac{yz}{bc} + (c^2-a^2)\dfrac{xz}{ac} + (a^2-b^2)\dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{xz}{ac} + \dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1. \end{cases}$$

Primele două ecuaţii formează un sistem omogen în necunoscutele xy, xz şi yz. Deducem astfel că acest sistem poate admite:

a) soluţia banală $xy = xz = yz = 0$, care combinată cu ecuaţia $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ ne conduce la soluţiile $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

b) soluţii nenule; să notăm atunci cu $\widetilde{\lambda}$ cantitatea $\widetilde{\lambda} = \dfrac{xy}{ab(2c^2-a^2-b^2)}$. Rezultă:

$$\begin{aligned} &\frac{yz}{bc} = \widetilde{\lambda}(2a^2-b^2-c^2) \overset{not}{=} \widetilde{\lambda}\alpha, \ \ (\alpha = 2a^2-b^2-c^2 > 0), \\ &\frac{zx}{ac} = \widetilde{\lambda}(2b^2-a^2-c^2) \overset{not}{=} \widetilde{\lambda}\beta, \ \ (\beta = 2b^2-a^2-c^2 \in I\!R), \\ &\frac{xy}{ab} = \widetilde{\lambda}(2c^2-a^2-b^2) \overset{not}{=} \widetilde{\lambda}\gamma, \ \ (\gamma = 2c^2-a^2-b^2 < 0), \ \ \widetilde{\lambda} \in I\!R^*. \end{aligned}$$

Înmulţind cele trei relaţii obţinute mai sus, găsim:

$$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2} = \widetilde{\lambda}^3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \frac{xyz}{abc} = \pm\sqrt{\widetilde{\lambda}^3\alpha\beta\gamma}.$$

Dacă $\beta \neq 0$ rezultă $\dfrac{x}{a} = \pm\dfrac{\sqrt{\widetilde{\lambda}\alpha\beta\gamma}}{\alpha}$, $\dfrac{y}{b} = \pm\dfrac{\sqrt{\widetilde{\lambda}\alpha\beta\gamma}}{\beta}$, $\dfrac{z}{c} = \pm\dfrac{\sqrt{\widetilde{\lambda}\alpha\beta\gamma}}{\gamma}$.

Înlocuind aceste valori în ecuaţia a treia a sistemului în x, y, z, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, obţinem:

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2}, \ \ (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) < 0, \ \text{deoarece } \alpha+\beta+\gamma = 0).$$

Rezultă pentru x, y şi z valorile:

$$x_0 = \frac{a\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}, \ \ y_0 = \frac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}, \ \ z_0 = \frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma},$$

(luate cu semnul + pentru a satisface ecuaţia $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$).

Dacă $\beta = 0 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$ sistemul în necunoscutele x, y şi z devine:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-c^2}{2}\cdot\dfrac{yz}{bc} + (c^2-a^2)\dfrac{xz}{ac} + \dfrac{a^2-c^2}{2}\cdot\dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{xz}{ac} + \dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \end{cases}$$

de unde rezultă $(a > c)$ $\begin{cases} \dfrac{yz}{bc} - \dfrac{2xz}{ac} + \dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{xz}{ac} + \dfrac{xy}{ab} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \end{cases}$

cu soluţiile $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$.

În concluzie am găsit următoarele puncte staţionare pentru funcţia L: $A(a, 0, 0)$ cu $\lambda_1 = 0$ şi $\mu_1 = -a^2$; $B(0, b, 0)$ cu $\lambda_1 = 0$ şi $\mu_2 = -b^2$; $C(0, 0, c)$ cu $\lambda_1 = 0$ şi $\mu_3 = -c^2$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cu $\lambda_2 = -\dfrac{2\alpha\beta\gamma(a^2 - b^2)}{(\alpha - \beta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)} = -\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}$ şi $\mu_4 = \dfrac{a^2\beta - \alpha b^2}{\alpha - \beta} = -\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$, $(\beta \neq 0)$.

Să studiem în continuare natura acestor puncte. Pentru punctul A să considerăm funcţia:

$$\Phi_1(x, y, z) = L(x, y, z, \lambda_1, \mu_1) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) =$$
$$= y^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + z^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) + a^2.$$

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei Φ_1 este:

$$d^2\Phi_1(x, y, z) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) dz^2.$$

Diferenţiind legăturile din problemă, obţinem $\begin{cases} \dfrac{dx}{a} + \dfrac{dy}{b} + \dfrac{dz}{c} = 0 \\ \dfrac{x\,dx}{a^2} + \dfrac{y\,dy}{b^2} + \dfrac{z\,dz}{c^2} = 0, \end{cases}$

care în punctul A devin $\begin{cases} dx = 0 \\ dz = -\dfrac{c}{b}\,dy. \end{cases}$ Deci:

$$d^2\Phi_1(A) = 2\left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \cdot \frac{c^2}{b^2}\right] dy^2 = 2\frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{b^2}\,dy^2 = -\frac{2\alpha}{b^2}\,dy^2.$$

Am obţinut o formă pătratică negativ definită $(\alpha > 0)$, de unde rezultă că punctul A este un punct de maxim pentru funcţia u, iar $u(A) = a^2$ şi $OA = a$.

Pentru punctul C să considerăm funcţia:

$$\Phi_2(x, y, z) = L(x, y, z, \lambda_1, \mu_3) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) =$$
$$= x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) + c^2.$$

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei Φ_2 este:

$$d^2\Phi_2(x, y, z) = 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dy^2.$$

Legăturile în punctul C ne dau $\begin{cases} dz = 0 \\ dy = -\dfrac{b}{a}\,dx. \end{cases}$ Atunci:

$$d^2\Phi_2(C) = 2\left[\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b^2}{a^2}\right] dx^2 = 2\frac{a^2+b^2-2c^2}{a^2}\,dx^2 = -\frac{2\gamma}{a^2}\,dx^2,$$

care este o formă pătratică pozitiv definită ($\gamma < 0$), de unde rezultă că punctul C este un punct de minim pentru funcţia u, iar $u(C) = c^2$ şi $OC = c$.

Pentru punctul B considerăm funcţia:

$$\Phi_3(x,y,z) = L(x,y,z,\lambda_1,\mu_2) = x^2+y^2+z^2 - b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) =$$
$$= x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) + z^2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right) + b^2.$$

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei Φ_3 este:

$$d^2\Phi_3(x,y,z) = 2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2,$$

care în prezenţa legăturilor în punctul B, $\begin{cases} dy = 0 \\ dz = -\dfrac{c}{a}\,dx, \end{cases}$ devine:

$$d^2\Phi_3(B) = 2\left[\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) + \left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\cdot\frac{c^2}{a^2}\right] dx^2 = 2\frac{a^2+c^2-2b^2}{a^2}\,dx^2 = -\frac{2\beta}{a^2}\,dx^2.$$

Rezultă astfel că dacă $\beta > 0$ atunci $d^2\Phi_3(B)$ este negativ definită, deci B este un punct de maxim pentru funcţia u, iar $u(B) = b^2$ şi $OB = b$. Dacă $\beta < 0$ atunci $d^2\Phi_3(B)$ este pozitiv definită, deci B este punct de minim pentru funcţia u, iar $u(B) = b^2$ şi $OB = b$. Dacă $\beta = 0$ atunci $d^2\Phi_3(B) = 0$. Dar:

$$\Phi_3(x,y,z) - \Phi_3(0,b,0) = x^2\frac{a^2-b^2}{a^2} + z^2\frac{c^2-b^2}{c^2} = (a^2-b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

cantitate care are valori şi pozitive şi negative în vecinătatea punctului B. Rezultă astfel că pentru $\beta = 0$ punctul B nu este punct de extrem pentru funcţia Φ_3, deci nici pentru funcţia u.

În sfârşit, pentru punctul $M_0\left(\dfrac{a\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}, \dfrac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}, \dfrac{c\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}\right)$ cu $\beta \neq 0$, să considerăm funcţia:

$$\Phi_4(x,y,z) = L(x,y,z,\lambda_2,\mu_4) = x^2+y^2+z^2 - \frac{2\alpha\beta\gamma}{3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right) -$$
$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei Φ_4 sunt:

$$\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial x^2} = 2\frac{2a^2-b^2-c^2}{3a^2} = \frac{2\alpha}{3a^2},\quad \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial y^2} = 2\frac{2b^2-a^2-c^2}{3b^2} = \frac{2\beta}{3b^2},$$
$$\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial z^2} = 2\frac{2c^2-a^2-b^2}{3c^2} = \frac{2\gamma}{3c^2},\quad \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial y\partial z} = 0.$$

Deci $d^2\Phi_4(x,y,z) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\alpha}{a^2}\,dx^2 + \dfrac{\beta}{b^2}\,dy^2 + \dfrac{\gamma}{c^2}\,dz^2\right)$.

Legăturile diferenţiate în punctul M_0 ne dau:

$$dx = -\frac{a\alpha(\gamma-\beta)}{b\beta(\gamma-\alpha)}\,dy, \;\; dz = -\frac{c\gamma(\beta-\alpha)}{b\beta(\gamma-\alpha)}\,dy.$$

Atunci:

$$d^2\Phi_4(M_0) = \frac{2}{3b^2\beta^2(\gamma-\alpha)^2}\left[\alpha^3(\gamma-\beta)^2 + \beta^3(\gamma-\alpha)^2 + \gamma^3(\beta-\alpha)^2\right] dy^2 \overset{\beta=-\alpha-\gamma}{=}$$

$$= \frac{2}{3b^2\beta^2(\gamma-\alpha)^2}(3\alpha^4\gamma + 6\alpha^3\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma^3 + 3\alpha\gamma^4)\,dy^2 = -\frac{2\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)}{b^2\beta^2(\gamma-\alpha)^2}\,dy^2.$$

Deci dacă $\beta > 0$ rezultă că $d^2\Phi_4(M_0)$ este pozitiv definită, deci punctul M_0 este punct de minim pentru funcţia u, iar dacă $\beta < 0$ rezultă că $d^2\Phi_4(M_0)$ este negativ definită, deci M_0 este punct de maxim pentru funcţia u. Valoarea lui u în punctul M_0 este:

$$u(M_0) = \frac{a^2\beta^2\gamma^2 + b^2\alpha^2\gamma^2 + c^2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}, \quad ((\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2),$$

iar $OM_0 = \sqrt{u(M_0)}$. Se observă că $OA > OM_0 > OC$, deoarece:

$$OA^2 - OM_0^2 = \frac{(a^2-b^2)\alpha^2\gamma^2 + (a^2-c^2)\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2} > 0 \quad \text{şi}$$

$$OM_0^2 - OC^2 = \frac{(a^2-c^2)\beta^2\gamma^2 + (b^2-c^2)\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2} > 0.$$

Rezumând avem următoarele situaţii:

a) $\beta > 0:$ A şi B sunt puncte de maxim; C şi M_0 sunt puncte de minim.

b) $\beta < 0:$ A şi M_0 sunt puncte de maxim; B şi C sunt puncte de minim.

c) $\beta = 0:$ A este punct de maxim, C este punct de minim.

În concluzie distanţa maximă de la centrul O al elipsoidului până la un punct M al elipsei de secţiune cu planul (ABC) este a, iar cea minimă este c.

11. Să se determine triunghiul ABC pentru care produsul $\sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C$, m, n, $p > 0$ este maximă.

Rezolvare. Unghiurile A, B şi C sunt legate prin relaţia $A + B + C = \pi$. Avem de determinat extremele funcţiei $u(A,B,C) = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C$ cu legătura $A + B + C = \pi$.

Să considerăm funcţia lui Lagrange:

$$L(A,B,C,\lambda) = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C + \lambda(A + B + C - \pi).$$

Punctele staţionare ale acestei funcţii sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial B} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial C} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\sin^{m-1} A\cos A\sin^n B\sin^p C + \lambda = 0 \\ n\sin^m A\sin^{n-1} B\cos B\sin^p C + \lambda = 0 \\ p\sin^m A\sin^n B\sin^{p-1} C\cos C + \lambda = 0 \\ A + B + C - \pi = 0. \end{cases}$$

Eliminând pe λ din primele trei ecuaţii ale sistemului de mai sus, obţinem:

$$m\operatorname{ctg} A = n\operatorname{ctg} B = p\operatorname{ctg} C \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} A}{m} = \frac{\operatorname{tg} B}{n} = \frac{\operatorname{tg} C}{p},$$

relaţii care împreună cu ultima ecuaţie a sistemului $A + B + C = \pi$ ne dă următoarea soluţie:

$$\operatorname{tg} A_0 = \sqrt{\frac{m(m+n+p)}{np}},\ \operatorname{tg} B_0 = \sqrt{\frac{n(m+n+p)}{mp}},\ \operatorname{tg} C_0 = \sqrt{\frac{p(m+n+p)}{mn}},$$

iar $\lambda_0 = -m\sin^{m-1} A_0\cos A_0\sin^n B_0\sin^p C_0,\quad (A_0,\ B_0,\ C_0 \in (0,\pi/2))$.

Să considerăm în continuare funcţia:

$$\Phi(A,B,C) = L(A,B,C,\lambda_0) = \sin^m A\cdot\sin^n B\cdot\sin^p C + \lambda_0(A+B+C-\pi)$$

care are următoarele derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial A^2} = m(m-1)\sin^{m-2} A\cos^2 A\sin^n B\sin^p C - m\sin^m A\sin^n B\sin^p C,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial B^2} = n(n-1)\sin^m A\sin^{n-2} B\cos^2 B\sin^p C - n\sin^m A\sin^n B\sin^p C,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial C^2} = p(p-1)\sin^m A\sin^n B\sin^{p-2} C\cos^2 C - p\sin^m A\sin^n B\sin^p C,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial B} = mn\sin^{m-1} A\cos A\sin^{n-1} B\cos B\sin^P C,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial C} = mp\sin^{m-1} A\cos A\sin^n B\sin^{p-1} C\cos C,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial B\partial C} = np\sin^m A\sin^{n-1} B\cos B\sin^{p-1} C\cos C.$$

Diferenţiind legătura obţinem $dA + dB + dC = 0 \Rightarrow dC = -dA - dB$. Atunci:

$$\begin{aligned} d^2\Phi(A,B,C) &= [m(m-1)\sin^{m-2} A\cos^2 A\sin^n B\sin^p C - m\sin^m A\sin^n B\sin^p C]\,dA^2 + \\ &+[n(n-1)\sin^m A\sin^{n-2} B\cos^2 B\sin^p C - n\sin^m A\sin^n B\sin^p C]\,dB^2 + \\ &+[p(p-1)\sin^m A\sin^n B\sin^{p-2} C\cos^2 C - p\sin^m A\sin^n B\sin^p C]\,(dA^2 + 2\,dA\,dB + dB^2) + \\ &+2mn\sin^{m-1} A\cos A\sin^{n-1} B\cos B\sin^p C\,dA\,dB - 2mp\sin^{m-1} A\cos A\sin^n B\sin^{p-1} C\times \\ &\times\cos C\,(dA^2 + dA\,dB) - 2np\sin^m A\sin^{n-1} B\cos B\sin^{p-1} C\cos C\,(dB^2 + dA\,dB) = \\ &= [m(m-1)\sin^{m-2} A\cos^2 A\sin^n B\sin^p C - m\sin^m A\sin^n B\sin^p C + p(p-1)\sin^m A\sin^n B\times \\ &\times\sin^{p-2} C\cos^2 C - p\sin^m A\sin^n B\sin^p C - 2mp\sin^{m-1} A\cos A\sin^n B\sin^{p-1} C\cos C]\,dA^2 + \\ &+[n(n-1)\sin^m A\sin^{n-2} B\cos^2 B\sin^p C - n\sin^m A\sin^n B\sin^p C + p(p-1)\sin^m A\sin^n B\times \\ &\times\sin^{p-2} C\cos^2 C - p\sin^m A\sin^n B\sin^p C - 2np\sin^m A\sin^{n-1} B\cos B\sin^{p-1} C\cos C]\,dB^2 + \end{aligned}$$

$+2[p(p-1)\sin^m A \sin^n B \sin^{p-2} C \cos^2 C - p \sin^m A \sin^n B \sin^p C + mn \sin^{m-1} A \cos A \times$
$\times \sin^{n-1} B \cos B \sin^p C - mp \sin^{m-1} A \cos A \sin^n B \sin^{p-1} C \cos C - np \sin^m A \sin^{n-1} B \times$
$\times \cos B \sin^{p-1} C \cos C]\, dA\, dB.$

Coeficienţii formei pătratice de mai sus sunt:

$\mathcal{A} = \sin^{m-2} A \sin^n B \sin^{p-2} C \cdot [m(m-1)\cos^2 A \sin^2 C - m \sin^2 A \sin^2 C + p(p-1) \times$
$\times \sin^2 A \cdot \cos^2 C - p \sin^2 A \sin^2 C - 2mp \sin A \cos A \sin C \cos C] =$
$= \sin^{m-2} A \sin^n B \sin^{p-2} C \cdot [(m \cos A \sin C - p \sin A \cos C)^2 - m \sin^2 C - p \sin^2 A],$

$\mathcal{C} = \sin^m A \sin^{n-2} B \sin^{p-2} C \cdot [n(n-1)\cos^2 B \sin^2 C - n \sin^2 B \sin^2 C + p(p-1) \times$
$\times \sin^2 B \cdot \cos^2 C - p \sin^2 B \sin^2 C - 2np \sin B \cos B \sin C \cos C] =$
$= \sin^m A \sin^{n-2} B \sin^{p-2} C \cdot [(n \cos B \sin C - p \sin B \cos C)^2 - n \sin^2 C - p \sin^2 B],$

$\mathcal{B} = \sin^{m-1} A \sin^{n-1} B \sin^{p-2} C \cdot [p(p-1) \sin A \sin B \cos^2 C - p \sin A \sin B \sin^2 C +$
$+ mn \cos A \cos B \sin^2 C - mp \cos A \sin B \sin C \cos C - np \sin A \cos B \sin C \cos C] =$
$= \sin^{m-1} A \sin^{n-1} B \sin^{p-2} C \cdot [(p^2 \sin A \sin B \cos^2 C - mp \cos A \sin B \sin C \cos C) +$
$+ (mn \cos A \cos B \sin^2 C - np \sin A \cos B \sin C \cos C) - p \sin A \sin B].$

În punctul (A_0, B_0, C_0) rezultă:

$\mathcal{A}_0 = \sin^{m-2} A_0 \sin^n B_0 \sin^{p-2} C_0 \cdot (-m \sin^2 C_0 - p \sin^2 A_0) < 0,$

$\mathcal{C}_0 = \sin^m A_0 \sin^{n-2} B_0 \sin^{p-2} C_0 \cdot (-n \sin^2 C_0 - p \sin^2 B_0) < 0,$

$\mathcal{B}_0 = -p \sin^m A_0 \sin^n B_0 \sin^{p-2} C_0.$

Deci:

$\mathcal{A}_0 \mathcal{C}_0 - \mathcal{B}_0^2 = \sin^{2m-2} A_0 \sin^{2n-2} B_0 \sin^{2p-4} C_0 (m \sin^2 C_0 + p \sin^2 A_0)(n \sin^2 C_0 +$
$+ p \sin^2 B_0) - p^2 \sin^{2m} A_0 \sin^{2n} B_0 \sin^{2p-4} C_0 = \sin^{2m-2} A_0 \sin^{2n-2} B_0 \sin^{2p-2} C_0 (mn \times$
$\times \sin^2 C_0 + np \sin^2 A_0 + mp \sin^2 B_0) > 0.$

Rezultă că $d^2\Phi(A_0, B_0, C_0)$ este o formă pătratică negativ definită, deci (A_0, B_0, C_0) este un punct de maxim pentru funcţia u, iar $u(A_0, B_0, C_0) = \sin^m A_0 \sin^n B_0 \sin^p C_0 =$
$$= \frac{(m+n+p)^{(m+n+p)/2} m^{m/2} n^{n/2} p^{p/2}}{(m+n)^{(m+n)/2} (m+p)^{(m+p)/2} (n+p)^{(n+p)/2}}.$$

12. Să se determine extremele (globale) ale următoarelor funcţii definite pe mulţimi compacte:

a) $z(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \quad x^2 + y^2 \leq 25.$

b) $z(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad |x| + |y| \leq 1.$

Rezolvare. a) Să notăm cu $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$ şi $F = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$ reprezentate în sistemul de axe Oxy în Figura 6.7.

Pentru domeniul D avem de determinat punctele de extrem (libere) ale funcţiei z. Punctele sale staţionare le vom determina rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = -8. \end{cases}$$

Am obţinut punctul $M_0(6, -8) \notin D$. Rezultă că funcţia z nu are puncte de extrem în mulţimea D.

Pentru mulţimea F avem de determinat punctele de extrem ale funcţiei z supusă la legătura $x^2 + y^2 = 25$. Să considerăm funcţia lui Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Determinăm punctele sale staţionare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

Obţinem soluţiile $M_1(3, -4)$ cu $\lambda_1 = 1$ şi $M_2(-3, 4)$ cu $\lambda_2 = -3$.

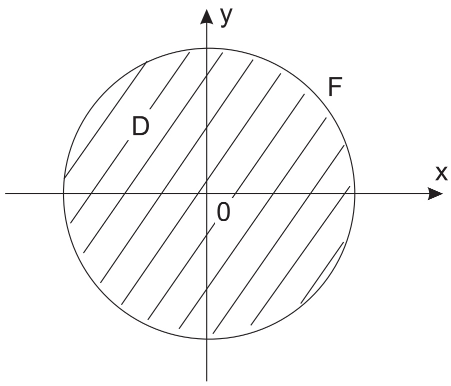

Figura 6.7

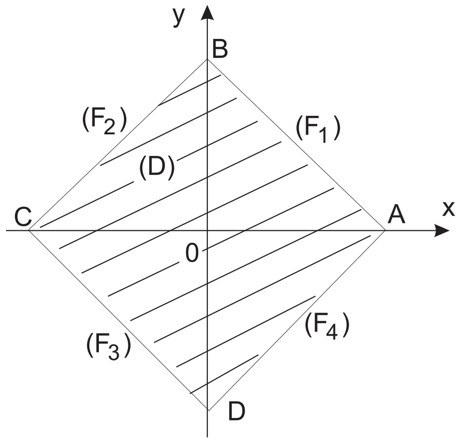

Figura 6.8

Funcţia:

$\Phi_1(x, y) = L(x, y, \lambda_1) = x^2+y^2-12x+16y+x^2+y^2-25 = 2x^2+2y^2-12x+16y-25$ are diferenţiala a doua în punctul M_1 $d^2\Phi_1(x_1, y_1) = 4\,dx^2 + 4\,dy^2$, care în prezenţa legăturii $x\,dx + y\,dy = 0$ scrisă în M_1, adică $3\,dx - 4\,dy = 0$, devine $d^2\Phi_1(x_1, y_1) = 4\,dx^2 + \frac{9}{4}\,dx^2 = \frac{25}{4}\,dx^2$. Deducem astfel că $M_1(3, -4)$ este punct de minim pentru funcţia z, iar $z_{min} = z(M_1) = -75$.

Pentru punctul M_2 considerăm funcţia:

$\Phi_2(x, y) = L(x, y, \lambda_2) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - 3(x^2 + y^2 - 25) = -2x^2 - 2y^2 - 12x + 16y + 75$.

Diferenţiind legătura $x^2 + y^2 = 25$ obţinem $x\,dx + y\,dy = 0$, care în punctul M_2 devine $-3\,dx + 4\,dy = 0$. Atunci diferenţiala a doua a funcţiei Φ_2 în M_2 este $d^2\Phi_2(x_2, y_2) = -4\,dx^2 - 4\,dy^2 = -4\,dx^2 - \frac{9}{4}\,dx^2 = -\frac{25}{4}\,dx^2$. Rezultă că $M_2(-3, 4)$ este punct de maxim pentru funcţia z, iar $z_{max} = z(M_2) = 125$.

Deci funcţia z are pe mulţimea $D \bigcup F$ două puncte de extrem, unul de maxim M_2 şi unul de minim M_1, valorile sale fiind $z_{max} = 125$ şi $z_{min} = -75$.

Conform teoremei lui Weierstrass, care spune că o funcţie continuă pe o mulţime compactă îşi atinge extremele, rezultă că extremele găsite sunt globale, deci:

$$\sup_{x^2+y^2\le 25} z(x,y) = z(-3,4) = 125 \text{ şi } \inf_{x^2+y^2\le 25} z(x,y) = z(3,-4) = -75.$$

b) Domeniul de definiţie al funcţiei z reprezentat în sistemul Oxy în Figura 6.8 se descompune în $(D):\ |x| + |y| < 1$ şi $(F) = (F_1) \cup (F_2) \cup (F_3) \cup (F_4) \cup \{A, B, C, D\}$, unde:

$(F_1):\ x + y = 1,\ x > 0,\ y > 0;\quad (F_2):\ -x + y = 1,\ x < 0,\ y > 0;$

$(F_3):\ -x - y = 1,\ x < 0,\ y < 0;\quad (F_4):\ x - y = 1,\ x > 0,\ y < 0.$

Pentru domeniul D, să determinăm mai întâi punctele staţionare ale funcţiei z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = y_0 = 0.$$

Deoarece $d^2z(0,0) = 2\,dx^2 - 2\,dxdy + 2\,dy^2$, iar $\widetilde{A} \cdot \widetilde{C} - \widetilde{B}^2 = 3 > 0$, $\widetilde{A} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, rezultă că punctul $(0,0)$ este punct de minim pentru funcţia z, iar $z_{min} = 0$.

Pentru mulţimea F_1, vom determina extremele funcţiei z supusă la legătura $x+y = 1$. Să considerăm funcţia lui Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Punctele sale staţionare le determinăm din sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ -x + 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Obţinem soluţia $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, $(x_1, y_1) \in (F_1)$ şi $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. Funcţia:

$$\Phi(x, y) = L(x, y, \lambda_1) = x^2 - xy + y^2 - \tfrac{1}{2}(x + y - 1)$$

are diferenţiala a doua $d^2\Phi(x, y) = 2\,dx^2 - 2\,dxdy + 2\,dy^2$. În prezenţa legăturii $dx+dy = 0$, $d^2\Phi(x, y)$ în (x_1, y_1) devine $d^2\Phi(x_1, y_1) = 6\,dx^2$. Rezultă că punctul $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este punct de minim pentru funcţia z, iar $z(M_1) = \frac{1}{4}$.

În mod asemănător se arată că în mulţimile (F_2), (F_3) şi (F_4) funcţia z admite câte un punct de minim $M_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ cu $z(M_2)=\frac{3}{4}$, $M_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ cu $z(M_3)=\frac{1}{4}$ şi respectiv $M_4\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ cu $z(M_4)=\frac{3}{4}$.

Deoarece $z(A)=z(1,0)=1$, $z(B)=z(0,1)=1$, $z(C)=z(-1,0)=1$, $z(D)=$ $=z(0,-1)=1$ rezultă că valoarea maximă a lui z pe mulţimea $|x|+|y|\le 1$ este 1, iar valoarea minimă a lui z pe mulţimea respectivă este 0:

$$\inf_{|x|+|y|\le 1} z(x,y)=z(0,0)=0,\quad \sup_{|x|+|y|\le 1} z(x,y)=z(1,0)=z(0,1)=z(-1,0)=$$
$$=z(0,-1)=1.$$

13. Să se determine valorile extreme (locale) ale funcţiei:

a) $y=y(x)$ definită implicit de ecuaţia $y^3+x^2-xy-3x-y+4=0$.

b) $z=x(x,y)$ definită implicit de ecuaţia:

$$x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$$

Rezolvare. a) Notăm cu $F(x,y)=y^3+x^2-xy-3x-y+4$. Atunci, din teorema de existenţă a funcţiilor definite implicit, deducem:

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}=-\frac{2x-y-3}{3y^2-x-1},\quad 3y^2-x-1\ne 0.$$

Punctele staţionare ale funcţiei $y=y(x)$ sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 & (y'(x)=0)\\ y^3+x^2-xy-3x-y+4=0 & (F(x,y)=0).\end{cases}$$

Obţinem soluţiile $M_1\,(x_1=2,\ \ y_1=1)$ şi $M_2\left(x_2=\frac{5}{8},\ \ y_2=-\frac{7}{4}\right)$. Deoarece M_2 satisface condiţia $3y^2-x-1\ne 0$ (M_1 nu satisface această condiţie) rezultă, conform teoremei funcţiilor definite implicit, că $\exists$ o funcţie $y=y(x)$ definită pe o vecinătate a punctului $5/8$ cu valori într-o vecinătate a punctului $-7/4$. În plus:

$$y''(x)=-\frac{(2-y')(3y^2-x-1)-(2x-y-3)(6yy'-1)}{(3y^2-x-1)^2},$$

iar $y''\left(\frac{5}{8}\right)=-\frac{32}{121}<0$. Rezultă că x_2 este punct de maxim pentru funcţia $y=y(x)$ definită implicit de ecuaţia din enunţ, valoarea sa maximă fiind $y_{max}=-\frac{7}{4}$.

b) Să notăm cu $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2$. Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{2x-z+2}{2z-x-y+2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}=-\frac{2y-z+2}{2z-x-y+2},$$

$(2z-x-y+2\ne 0)$.

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei z:

$$\begin{cases} 2x-z+2=0 & \left(\frac{\partial F}{\partial x}=0\right)\\ 2y-z+2=0 & \left(\frac{\partial F}{\partial y}=0\right)\\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0 & (F(x,y,z)=0).\end{cases}$$

Obţinem punctele $M_1(x_1 = -3 + \sqrt{6},\ \ y_1 = -3 + \sqrt{6})$ cu $z_1 = -4 + 2\sqrt{6}$ şi $M_2(x_2 = -3-\sqrt{6},\ \ y_2 = -3-\sqrt{6})$ cu $z_2 = -4-2\sqrt{6}$. Ambele satisfac condiţia $2z-x-y+2 \neq 0$. Conform teoremei de existenţă a funcţiilor definite implicit rezultă că $\exists\ z_1 = z_1(x, y)$ şi $z_2 = z_2(x, y)$ definite pe câte o vecinătate V_1 şi V_2 a punctului M_1, respectiv M_2.

Să calculăm în continuare derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(2 - \frac{\partial z}{\partial x}\right)(2z - x - y + 2) - (2x - z + 2)\left(2\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(2z - x - y + 2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}(2z - x - y + 2) - (2x - z + 2)\left(2\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(2z - x - y + 2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\left(2 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)(2z - x - y + 2) - (2y - z + 2)\left(2\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(2z - x - y + 2)^2}.$$

În punctele M_1 şi M_2 obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_1, y_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_1, y_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Deci $d^2z(x_1, y_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2$ şi $d^2z(x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,dx^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,dy^2$. Rezultă că punctul $M_1(x_1, y_1)$ este un punct de maxim pentru funcţia z_1 şi $z_{max} = z_1(x_1, y_1) = -4 + 2\sqrt{6}$, iar $M_2(x_2, y_2)$ este un punct de minim pentru funcţia z_2 şi $z_{min} = z_2(x_2, y_2) = -4 - 2\sqrt{6}$.

14. Ce devine ecuaţia următoare dacă se schimbă funcţia după cum urmează:

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 4x,\quad y(x) = \frac{z(x)}{x^2}.$$

Rezolvare. Derivăm de două ori relaţia de legătură dintre funcţiile y şi z, $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$. Obţinem:

$$y'(x) = \frac{z'(x) \cdot x^2 - 2x \cdot z(x)}{x^4} = \frac{xz' - 2z}{x^3},\quad y''(x) = \left(\frac{xz' - 2z}{x^3}\right)' =$$

$$= \frac{(z' + xz'' - 2z')x^3 - 3x^2(xz' - 2z)}{x^6} = \frac{x^2z'' - 4xz' + 6z}{x^4}.$$

Înlocuind în ecuaţie, avem:

$$x^2 \cdot \frac{x^2z'' - 4xz' + 6z}{x^4} + 4x \cdot \frac{xz' - 2z}{x^3} + (2 - x^2) \cdot \frac{z}{x^2} = 4x,$$

de unde rezultă $x^2z'' - x^2z = 4x^3$ sau $z'' - z = 4x$.

15. Ce devin ecuaţiile următoarele dacă se fac schimbările de variabilă indicate:

a) $x^3y''' + xy' - y = 0;\quad x = e^t,\ (y = y(x))$.

b) $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0;\quad x = \operatorname{tg} t,\ (y = y(x))$.

c) $(\sin^2 2x)y'' + \sin 4x\, y' + 4y = 0,\quad \operatorname{tg} x = e^t,\ (y = y(x))$.

d) $(x^3 - x)y'' + (3x^2 - 1)y' + xy = 0, \quad x = \sqrt{1 - t^2}, \;\; (y = y(x))$.

e) $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0, \quad x = \sin t, \;\; (y = y(x))$.

Rezolvare. a) În urma schimbării variabilei x în t prin $x = e^t$ funcţia y va avea ca nouă variabilă pe t, $y(x) = y(e^t) = \tilde{y}(t)$. Deci $y(e^t) = \tilde{y}(t)$. Să derivăm relaţia obţinută în raport cu variabila t (derivata în raport cu t o vom nota cu $\cdot$). Avem:

$$y'(e^t)\cdot e^t = \dot{\tilde{y}}\,(t) \;\Rightarrow\; y'(e^t) = e^{-t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t).$$

Derivând în continuare, rezultă:

$$y''(e^t)\cdot e^t = -e^{-t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) + e^{-t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) \;\Rightarrow\; y''(e^t) = -e^{-2t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) + e^{-2t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) \quad \text{şi}$$

$$y'''(e^t)\cdot e^t = 2e^{-2t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) - e^{-2t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) - 2e^{-2t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) + e^{-2t}\,\dddot{\tilde{y}}\,(t) \;\Rightarrow$$

$$y'''(e^t) = 2e^{-3t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) - 3e^{-3t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) + e^{-3t}\,\dddot{\tilde{y}}\,(t).$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, obţinem:

$$e^{3t}\,(2e^{-3t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) - 3e^{-3t}\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) + e^{-3t}\,\dddot{\tilde{y}}\,(t)) + e^t\cdot e^{-t}\,\dot{\tilde{y}}\,(t) - \tilde{y}(t) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\dddot{\tilde{y}}\,(t) - 3\,\ddot{\tilde{y}}\,(t) + 3\,\dot{\tilde{y}}\,(t) - \tilde{y}(t) = 0.$$

Renotând funcţia $\tilde{y}$ cu y rezultă ecuaţia $\dddot{y} - 3\,\ddot{y} + 3\,\dot{y} - y = 0$.

b) Avem $y(\operatorname{tg} t) = \tilde{y}(t)$. Derivând această egalitate, rezultă:

$$y'(\operatorname{tg} t)\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = \dot{\tilde{y}}\,(t) \quad\Rightarrow\quad y'(\operatorname{tg} t) = \cos^2 t\cdot\dot{\tilde{y}}\,(t).$$

Încă o derivare ne dă:

$$y''(\operatorname{tg} t)\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = -2\cos t\sin t\cdot\dot{\tilde{y}}\,(t) + \cos^2 t\cdot\ddot{\tilde{y}}\,(t) \quad\Rightarrow$$

$$y''(\operatorname{tg} t) = -2\cos^3 t\cdot\sin t\cdot\dot{\tilde{y}}\,(t) + \cos^4 t\cdot\ddot{\tilde{y}}\,(t).$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, obţinem:

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)^2\cdot(-2\cos^3 t\cdot\sin t\cdot\dot{\tilde{y}}\,(t) + \cos^4 t\cdot\ddot{\tilde{y}}\,(t)) + 2\operatorname{tg} t\cdot(1+\operatorname{tg}^2 t)\cdot\cos^2 t\cdot\dot{\tilde{y}}\,(t) + \tilde{y}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad -2\operatorname{tg} t\,\dot{\tilde{y}}\,(t) + \ddot{\tilde{y}}\,(t) + 2\operatorname{tg} t\,\dot{\tilde{y}}\,(t) + \tilde{y}(t) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\tilde{y}}\,(t) + \tilde{y} = 0.$$

Revenind la notaţia y, avem ecuaţia $\ddot{y} + y = 0$.

c) Avem relaţia $\underline{y(x)} = \tilde{y}(t) = \underline{\tilde{y}(\ln\operatorname{tg} x)}$. Derivăm relaţia subliniată în raport cu x şi obţinem:

$$y'(x) = \dot{\tilde{y}}\,(\ln\operatorname{tg} x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \dot{\tilde{y}}\cdot\frac{1}{\sin x\cos x} \;\Rightarrow\; y' = \dot{\tilde{y}}\,\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

Derivând încă o dată în raport cu x ultima relaţie de mai sus, găsim:

$$y'' = \ddot{\tilde{y}}\,\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} + \dot{\tilde{y}}\,\frac{-\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Atunci înlocuind y' şi y'' în ecuaţia dată, obţinem:

$$4\sin^2 x\cos^2 x\cdot(\ddot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{y}}\cos 2x)\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} + 2\sin 2x\cos 2x\cdot\dot{\tilde{y}}\,\frac{1}{\sin x\cos x} + 4\tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\,\ddot{\tilde{y}} - 4\,\dot{\tilde{y}}\cos 2x + 4\,\dot{\tilde{y}}\cos 2x + 4\tilde{y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\tilde{y}} + \tilde{y} = 0.$$

d) Relaţia dintre funcţia y de variabilă x şi noua funcţie $\tilde{y}$ de variabilă t este:

$$y(x) = \underline{y(\sqrt{1-t^2}) = \widetilde{y}(t)}.$$

Derivăm relaţia subliniată în raport cu t; obţinem:

$$y'(\sqrt{1-t^2}) \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \dot{\widetilde{y}}(t) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\dot{\widetilde{y}}\,.$$

Derivând încă o dată în raport cu t ultima relaţie de mai sus, găsim:

$$y''(\sqrt{1-t^2}) \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot t - \sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\dot{\widetilde{y}} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\ddot{\widetilde{y}} \Rightarrow$$

$$y'' \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\,\dot{\widetilde{y}} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\ddot{\widetilde{y}} \;\Rightarrow\; y'' = -\frac{1}{t^3}\,\dot{\widetilde{y}} + \frac{1-t^2}{t^2}\,\ddot{\widetilde{y}}\,.$$

Înlocuind derivatele y' şi y'' în ecuaţia dată, obţinem:

$$\sqrt{1-t^2}\,(1-t^2-1)\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\,\dot{\widetilde{y}} + \frac{1-t^2}{t^2}\,\ddot{\widetilde{y}}\right) + (3-3t^2-1)\cdot\frac{-\sqrt{1-t^2}}{t}\,\dot{\widetilde{y}} + \sqrt{1-t^2}\,\widetilde{y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\dot{\widetilde{y}} - \sqrt{1-t^2}\,(1-t^2)\,\ddot{\widetilde{y}} - \frac{2}{t}\sqrt{1-t^2}\,\dot{\widetilde{y}} + 3t\sqrt{1-t^2}\,\dot{\widetilde{y}} + \sqrt{1-t^2}\,\widetilde{y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\,\dot{\widetilde{y}} - (1-t^2)\,\ddot{\widetilde{y}} - \frac{2}{t}\,\dot{\widetilde{y}} + 3t\,\dot{\widetilde{y}} + \widetilde{y} = 0 \Rightarrow (t^3-t)\,\ddot{\widetilde{y}} + (3t^2-1)\,\dot{\widetilde{y}} + t\widetilde{y} = 0.$$

Deducem că ecuaţia îşi păstrează forma în urma schimbării de variabilă.

e) Avem relaţia $y(x) = \underline{y(\sin t) = \widetilde{y}(t)}$. Derivăm egalitatea subliniată în raport cu t şi obţinem:

$$y'(\sin t)\cdot\cos t = \dot{\widetilde{y}}(t) \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{\cos t}\,\dot{\widetilde{y}}\,.$$

Încă o derivare în raport cu t ne dă:

$$y''\cdot\cos t = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\dot{\widetilde{y}} + \frac{1}{\cos t}\,\ddot{\widetilde{y}} \;\Rightarrow\; y'' = \frac{\sin t}{\cos^3 t}\,\dot{\widetilde{y}} + \frac{1}{\cos^2 t}\,\ddot{\widetilde{y}}\,.$$

Înlocuind derivatele y' şi y'' în ecuaţie obţinem:

$$(1-\sin^2 t)\left(\frac{\sin t}{\cos^3 t}\,\dot{\widetilde{y}} + \frac{1}{\cos^2 t}\,\ddot{\widetilde{y}}\right) - \sin t\cdot\frac{1}{\cos t}\,\dot{\widetilde{y}} + a^2\widetilde{y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t}\,\dot{\widetilde{y}} + \ddot{\widetilde{y}} - \frac{\sin t}{\cos t}\,\dot{\widetilde{y}} + a^2\widetilde{y} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\widetilde{y}} + a^2\widetilde{y} = 0.$$

16. În ecuaţiile care urmează să se facă schimbările indicate:

a) $2y'' + (x+y)(1-y')^3 = 0, \quad \begin{cases} x-y=u \\ x+y=v(u), \end{cases} \quad (y=y(x),\ \ v=v(u)).$

b) $(1-x^2)y'' - 3xy' + (a^2-1)y = 0, \quad \begin{cases} x=\sin t \\ y=\dfrac{z(t)}{\cos t}, \end{cases} \quad (y=y(x),\ \ z=z(t)).$

Rezolvare. a) Din relaţiile problemei deducem:

$$x = \frac{u+v}{2},\ \ y = \frac{v-u}{2} \;\Rightarrow\; y(x) = y\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{v-u}{2}.$$

Deci $y\left(\dfrac{u+v(u)}{2}\right) = \dfrac{v(u)-u}{2}$.

Derivând ultima relaţie în raport cu u, obţinem:

$$y'\cdot\frac{1+v'}{2} = \frac{v'(u)-1}{2} \;\Rightarrow\; y' = \frac{v'-1}{v'+1}.$$

Încă o derivare, ne dă:

$$y'' \cdot \frac{1+v'}{2} = \frac{v''(v'+1) - v''(v'-1)}{(v'+1)^2} \;\Rightarrow\; y'' = \frac{4v''}{(v'+1)^3}.$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, rezultă:

$$2 \cdot \frac{4v''}{(v'+1)^3} + \left(\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v'-1}{v'+1}\right)^3 = 0 \;\Rightarrow\; v'' + v = 0.$$

b) Relaţia de legătură dintre variabilele vechi şi noi este $y(\sin t) = \dfrac{z(t)}{\cos t}$.
Derivând această relaţie în raport cu t, obţinem:

$$y' \cdot \cos t = \frac{z' \cdot \cos t + \sin t \cdot z}{\cos^2 t} \;\Rightarrow\; y' = \frac{z' \cdot \cos t + z \sin t}{\cos^3 t}.$$

O nouă derivare ne dă:

$$y'' \cdot \cos t = \frac{(z'' \cos t - z' \sin t + z' \sin t + z \cos t) \cos^3 t + 3 \cos^2 t \sin t (z' \cos t + z \sin t)}{\cos^6 t}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{z'' \cos^2 t + 3 \sin t \cos t\, z' + z(1 + 2\sin^2 t)}{\cos^5 t}.$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, rezultă:

$$(1 - \sin^2 t) \cdot \frac{z'' \cos^2 t + 3 \sin t \cos t\, z' + z(1 + 2\sin^2 t)}{\cos^5 t} - 3 \sin t \cdot \frac{z' \cos t + z \sin t}{\cos^3 t} +$$
$$+ (a^2 - 1)\frac{z}{\cos t} = 0 \;\Rightarrow\; z'' \cos^2 t + a^2 z \cos^2 t = 0 \;\text{ sau }\; z'' + a^2 z = 0.$$

17. Luând pe u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

a) $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, dacă $\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y^2, \end{cases}$ $(z = z(x, y))$.

b) $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y$, dacă $\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}), \end{cases}$ $(z = z(x, y))$.

c) $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, dacă $\begin{cases} u = x \cdot y \\ v = \dfrac{x}{y}, \end{cases}$ $(z = z(x, y))$.

Rezolvare. a) Deoarece $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ rezultă că $x = x(u, v)$ şi $y = y(u, v)$. Deci:

$$z(x, y) = z(x(u, v), y(u, v)) = \tilde{z}(u, v) = \tilde{z}(x, x^2 + y^2).$$

Vom deriva relaţia obţinută $z(x, y) = \tilde{z}(x, x^2 + y^2)$ în raport cu x şi apoi în raport cu y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + 2x \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}.$$

Atunci ecuaţia din problemă devine:

$$y(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + 2x(u, v) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\right) - x(u, v) \cdot 2y(u, v) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = 0.$$

b) Asemănător punctului a) vom deriva în raport cu x şi apoi cu y relaţia:

$$z(x,y) = \tilde{z}(\ln x, \ln(y + \sqrt{1+y^2})), \quad (\tilde{z} = \tilde{z}(u,v)).$$

Avem $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \cdot 0 = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}.$$

Înlocuind în membrul stâng al ecuaţiei, obţinem:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}.$$

Deoarece $x = e^u$, iar $y = \dfrac{e^{2v} - 1}{2e^v}$, ecuaţia devine:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = \frac{1}{2}(e^{u+v} - e^{u-v}).$$

c) Relaţia de legătură între variabilele vechi şi cele noi, prin intermediul funcţiei necunoscute z este $z(x,y) = \tilde{z}\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$, $\quad (\tilde{z} = \tilde{z}(u,v))$.

Derivăm această relaţie în raport cu x. Obţinem $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$.

O nouă derivare în raport cu x ne dă:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} \cdot y + \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{y}\right) = y^2 \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2}.$$

Să derivăm acum relaţia de legătură dintre z şi $\tilde{z}$ în raport cu y. Avem $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ $= x\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} - \dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$. Apoi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} \cdot x - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v}\right) + \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot x - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2}\right) =$$

$$= \frac{2x}{y^3}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} + x^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2}.$$

Atunci ecuaţia devine:

$$x^2y^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} + 2x^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2} - \frac{2x}{y}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} - x^2y^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} + 2x^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} - \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2} = 0,$$

$$(x = x(u,v), \;\; y = y(u,v)) \;\Rightarrow\; 4x^2\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} - \frac{2x}{y}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0 \;\Rightarrow\; 4uv\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} - 2v\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0.$$

Deci $2u\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} - \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0$.

18. Transformaţi ecuaţia $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$ introducând noile variabile independente $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ şi noua funcţie necunoscută $w = \ln z - (x+y)$.

Rezolvare. Pentru funcţia nouă w de variabile u şi v putem scrie:

$$w = w(u,v) = w\left(x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \tilde{w}(x,y) = \ln z - (x+y).$$

Deci $w\left(x^2 + y^2, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \ln z - (x+y)$.

Derivând această relaţie în raport cu x şi apoi cu y, obţinem:
$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-1,$
$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-1.$
De aici deducem:
$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, găsim:
$2xyz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{yz}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+yz-2xyz\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{xz}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}-xz=yz-xz$
$\Leftrightarrow \left(\frac{xz}{y^2}-\frac{yz}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v}=0$ sau $\frac{\partial w}{\partial v}=0.$

O altă metodă de rezolvare a problemei este diferenţierea relaţiilor dintre variabilele independente vechi x şi y şi cele noi u şi v. Avem $du=2x\,dx+2y\,dy$ şi $dv=-\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{1}{y^2}\,dy$. Apoi $dw=\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}\,dv$.

Diferenţiind acum relaţia $w=\ln z-(x+y)$ obţinem $dw=\frac{dz}{z}-dx-dy$, care împreună cu relaţiile de mai sus ne dau:
$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot(2x\,dx+2y\,dy)+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{1}{y^2}\,dy\right)=\frac{dz}{z}-dx-dy.$
Obţinem astfel:
$dz=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)dx+z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)dy.$

Din relaţia de mai sus deducem derivatele parţiale ale funcţiei z în funcţie de derivatele parţiale ale lui w:
$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right),$
care înlocuite în ecuaţie (vezi mai sus) ne dă $\frac{\partial w}{\partial v}=0.$

19. Considerând pe u şi v ca noi variabile independente şi pe w ca o nouă funcţie să se transforme în noile variabile următoarea ecuaţie:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$
dacă $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$.

Rezolvare. Avem $w=w(u,v)=w(x+y,x-y)=xy-z$, de unde deducem relaţia $z(x,y)=xy-w(x+y,x-y)$.

Să calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Apoi derivatele de ordinul al doilea sunt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Înlocuind aceste derivate în ecuaţie, vom găsi:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$
$$\Rightarrow -4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$$

20. Să se arate că ecuaţia $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ nu-şi schimbă forma dacă facem schimbarea de variabile $u = x + z$, $v = y + z$.

Rezolvare. Avem $z = z(x, y) = \widetilde{z}(u, v) = \widetilde{z}(x + z, y + z)$ deci:

$$z(x, y) = \widetilde{z}(x + z, y + z).$$

Derivând această egalitate în raport cu x şi apoi cu y, obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

De aici deducem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}}{1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}}{1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}}.$$

Derivând acum pe $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ în raport cu x, obţinem $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

$$= \frac{\left(\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right)^2} =$$
$$= \frac{\left[\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right]\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v}\left(1 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right)^2} =$$
$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left[\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v}\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\right]}{\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right)^2} +$$
$$+ \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}}{\left(1 - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\left(1+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right]+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\left(1+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right)^2}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^3}+$$

$$+\frac{\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\left[1-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}+\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\left[\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right]}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^3}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\cdot\left[1-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}+\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\left(2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right)^2}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^3}.$$

Derivând apoi pe $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi pe $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ în raport cu y rezultă în mod asemănător:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\left[\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}-\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}+2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}\left[\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right)^2\right]}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\left(2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}\left[1-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}+\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\right)^2\right]}{\left(1-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\right)^3}.$$

Înlocuind aceste derivate de ordinul al doilea în ecuaţie obţinem:

$$\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}=0,$$

adică ecuaţia nu şi-a schimbat forma în urma schimbării variabilelor.

21. Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, următoarele expresii:

a) $E_1 = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$; b) $E_2 = x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x}$; c) $E_3 = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$;

d) $E_4 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$; e) $E_5 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; f) $E_6 = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$(z = z(x, y))$.

Rezolvare. În urma schimbării variabilelor funcţia z va depinde de variabilele r şi θ, $z = z(x, y) = z(r\cos\theta, r\sin\theta) = \widetilde{z}(r, \theta)$.

Vom deriva relaţia $z(r\cos\theta, r\sin\theta) = \widetilde{z}(r, \theta)$ în raport cu r şi apoi cu θ. Obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial r}\ \Rightarrow\ \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial\theta}\ \Rightarrow\ -r\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial\theta}.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii obţinute mai sus, în necunoscutele $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, găsim:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}.$$

Cu aceste derivate astfel calculate putem transforma expresiile $E_1 - E_4$. Avem:

$$E_1 = r\cos\theta \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) - r\sin\theta \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) =$$

$$= r\cos 2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \sin 2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta},$$

$$E_2 = r\cos\theta \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) - r\sin\theta \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) =$$

$$= r\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \cos^2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} - r\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \sin^2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta},$$

$$E_3 = \frac{1}{r^2}\left[r\cos\theta \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r\cos^2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + r\sin^2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} \quad \text{şi}$$

$$E_4 = \cos^2\theta \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + \sin^2\theta \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial r}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\right)^2.$$

Pentru a calcula celelalte două expresii E_5 şi E_6 să calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei z. Derivăm pe $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}$ în raport cu r şi apoi cu θ. Obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r \partial \theta} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta^2},$$

de unde rezultă:

$$\cos\theta \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + \cos\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r \partial \theta} \quad \text{şi}$$

$$-r\sin\theta \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + \cos\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta^2}.$$

Din relaţiile de mai sus deducem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\left[\frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + \sin^2\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + r\cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} - \sin 2\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r}\left[-\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} - \frac{\cos 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + r\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} + \cos 2\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r \partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial \theta^2}\right].$$

Derivând acum pe $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}$ în raport cu r şi apoi cu θ, obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r \partial \theta} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=\cos\theta\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial r}+\sin\theta\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta^2},$$

de unde rezultă:

$$\cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin\theta\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r\partial\theta}\quad\text{şi}$$

$$-r\sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\cos\theta\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial r}+\sin\theta\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta^2}.$$

Rezolvând sistemul format din ultimele două relaţii de mai sus în necunoscutele $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, găsim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\left[\cos^2\theta\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial r}-\frac{\sin 2\theta}{r}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial\theta}+r\sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r^2}+\sin 2\theta\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta^2}\right].$$

Expresiile E_5 şi E_6 devin:

$$E_5=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial r}+\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta^2}\quad\text{şi}$$

$$E_6=r\left[\left(\frac{2\sin\theta\cos^3\theta}{r}-\frac{2\sin\theta\cos^3\theta}{r}+\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{r}-\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{r}\right)\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial\theta}+\right.$$

$$+\left(\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta\right)\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial r}+(\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta)\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r^2}+$$

$$+(-2\sin\theta\cos^3\theta+2\sin\theta\cos^3\theta-2\sin^3\theta\cos\theta+2\sin^3\theta\cos\theta)\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r\partial\theta}+$$

$$\left.+\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}-2\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r}\right)\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial\theta^2}\right]=r\cdot\frac{\partial^2\tilde z}{\partial r^2}.$$

22. Ce devine operatorul lui Laplace în trei variabile:

$$\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

după următoarele schimbări de variabile:

a) $x=uv\cos w,\quad y=uv\sin w,\quad z=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ (coordonate parabolice);

b) $x=a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w,\quad y=a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w,\quad z=auv$ (coordonate eliptice).

Rezolvare. a) Avem relaţia:

$$\Phi(x,y,z)=\underline{\Phi\left(uv\cos w,uv\sin w,\frac{1}{2}(u^2-v^2)\right)=\widetilde\Phi(u,v,w)}.$$

Derivând relaţia subliniată în raport cu u, v şi respectiv w, obţinem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot v\cos w+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot v\sin w+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot u=\dfrac{\partial\widetilde\Phi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot u\cos w+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot u\sin w+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot(-v)=\dfrac{\partial\widetilde\Phi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot(-uv\sin w)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot(uv\cos w)=\dfrac{\partial\widetilde\Phi}{\partial w}.\end{cases}$$

Determinantul sistemului de mai sus este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v\cos w & v\sin w & u \\ u\cos w & u\sin w & -v \\ -uv\sin w & uv\cos w & 0 \end{vmatrix} = uv(u^2+v^2).$$

Rezolvând sistemul de mai sus în necunoscutele $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$, găsim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{v\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{u\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} - \frac{\sin w}{uv}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w},\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{v\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{u\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} + \frac{\cos w}{uv}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w},\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \frac{u}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} - \frac{v}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Să derivăm în continuare pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ în raport cu u, v şi respectiv w. Obţinem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot v\cos w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot v\sin w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot u = -\frac{2uv\cos w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{v\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2} +$$
$$+\frac{(v^2-u^2)\cos w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} + \frac{u\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v} + \frac{\sin w}{u^2v}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w} - \frac{\sin w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot u\cos w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot u\sin w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot(-v) = \frac{(u^2-v^2)\cos w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{v\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v} -$$
$$-\frac{2uv\cos w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} + \frac{u\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2} + \frac{\sin w}{uv^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w} - \frac{\sin w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot(-uv\sin w) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot(uv\cos w) = -\frac{v\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{v\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w} -$$
$$-\frac{u\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} + \frac{u\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w} - \frac{\cos w}{uv}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w} - \frac{\sin w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}.$$

Din sistemul format din ultimele trei relaţii de mai sus, îl determinăm pe $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\left(\frac{u^2v(u^2-3v^2)\cos^2 w}{(u^2+v^2)^2} + v\sin^2 w\right) + \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\left(\frac{uv^2(v^2-3u^2)\cos^2 w}{(u^2+v^2)^2} +\right.\right.$$
$$\left. + u\sin^2 w\right) + \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}\cdot\frac{2(u^2+v^2)}{uv}\sin w\cos w + \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}\cdot\frac{uv^3\cos^2 w}{u^2+v^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}\cdot\frac{u^3v\cos^2 w}{u^2+v^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\times$$
$$\left.\times\frac{(u^2+v^2)\sin^2 w}{uv} + \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{2u^2v^2\cos^2 w}{u^2+v^2} - \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}\cdot 2v\sin w\cos w - \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}\cdot 2u\sin w\cos w\right].$$

Să derivăm acum pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ în raport cu u, v şi respectiv w. Obţinem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot v\cos w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot v\sin w + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot u = -\frac{2uv\sin w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u} + \frac{v\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2} +$$
$$+\frac{(v^2-u^2)\sin w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v} + \frac{u\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v} - \frac{\cos w}{u^2v}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w} + \frac{\cos w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot u\cos w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot u\sin w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot(-v)=\frac{(u^2-v^2)\sin w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{v\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}-$$
$$-\frac{2uv\sin w}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{u\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}-\frac{\cos w}{uv^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{\cos w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w},$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot(-uv\sin w)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot(uv\cos w)=\frac{v\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{v\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}+\frac{u\cos w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+$$
$$+\frac{u\sin w}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}-\frac{\sin w}{uv}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{\cos w}{uv}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}.$$

Din sistemul de mai sus îl determinăm pe $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\left(v\cos^2 w+\frac{u^2v(u^2-3v^2)}{(u^2+v^2)^2}\sin^2 w\right)+\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\left(u\cos^2 w+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{uv^2(v^2-3u^2)}{(u^2+v^2)^2}\sin^2 w\right)-\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}\cdot\frac{2(u^2+v^2)}{uv}\sin w\cos w+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}\cdot\frac{uv^3\sin^2 w}{u^2+v^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}\cdot\frac{u^3v\sin^2 w}{u^2+v^2}+$$
$$+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\cdot\frac{(u^2+v^2)\cos^2 w}{uv}+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{2u^2v^2\sin^2 w}{u^2+v^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}\cdot 2v\sin w\cos w+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}\times$$
$$\left.\times 2u\sin w\cos w\right].$$

În sfârşit să derivăm pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ în raport cu u, v şi respectiv w. Obţinem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot v\cos w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot v\sin w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot u=\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{u}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+$$
$$+\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}-\frac{v}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v},$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot u\cos w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot u\sin w+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot(-v)=-\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{u}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}-$$
$$-\frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}-\frac{v}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot(-uv\sin w)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot(uv\cos w)=\frac{u}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}-\frac{v}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}.$$

Din sistemul de mai sus îl determinăm pe $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\left(\frac{u^2v\cos^2 w(3v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2}+\frac{u^2v\sin^2 w(3v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\left(\frac{uv^2\cos^2 w(3u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}+\frac{uv^2\sin^2 w(3u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}\right)+\frac{u^3v}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+\frac{uv^3}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}-$$
$$\left.-\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{2u^2v^2}{u^2+v^2}\right].$$

Rezultă atunci:

$$\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[v\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+u\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+uv\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+uv\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+\frac{u^2+v^2}{uv}\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\Bigg] = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{1}{u}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\right)+\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\right)+\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\right].$$

b) Avem relaţia:

$$\Phi(x,y,z)=\underline{\Phi(a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w, a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w, auv)=\widetilde{\Phi}(u,v,w)}.$$

Derivăm relaţia subliniată în raport cu u, v şi respectiv w. Obţinem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\dfrac{a(1-v^2)u\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\dfrac{a(1-v^2)u\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot av=\dfrac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\dfrac{-a(u^2-1)v\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\dfrac{-a(u^2-1)v\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot au=\dfrac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot(-a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot(a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w)=\dfrac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}.\end{cases}$$

Determinantul sistemului de mai sus în necunoscutele $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ este $\Delta=a^3(v^2-u^2)$.

Determinăm pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ din sistemul de mai sus. Avem:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{-u\cos w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{v\cos w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}-$$

$$-\frac{\sin w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{u\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{v\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+$$

$$+\frac{\cos w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{(1-u^2)v}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{(v^2-1)u}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}.$$

Derivăm în continuare pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ în raport cu u, v şi respectiv w. Obţinem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{a(1-v^2)u\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{a(1-v^2)u\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot av=$$

$$=\frac{(1-v^2)(u^2+v^2-2u^2v^2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+$$

$$+\frac{(1-v^2)uv(u^2+v^2-2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}+$$

$$+\frac{u\sin w}{a(u^2-1)\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}-\frac{\sin w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot au=$$

$$=-\frac{uv(u^2-1)(u^2+v^2-2)}{(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}-$$

$$-\frac{(u^2-1)(u^2+v^2-2u^2v^2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}-$$

$$-\frac{v\sin w}{a(1-v^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}-\frac{\sin w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\left(-a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\left(a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w\right)=$$

$$=\frac{u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\sin w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}-$$

$$-\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}-$$

$$-\frac{\cos w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}-\frac{\sin w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}.$$

Din sistemul de mai sus deducem $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2(v^2-u^2)(1-v^2)(u^2-1)}\times$

$$\times\left[\left(\frac{u(1-v^2)(u^2-1)(-u^4v^2-3v^4u^2+6u^2v^2-2v^4-u^2-3v^2)}{(v^2-u^2)^2}\cos^2 w-\right.\right.$$

$$\left.-(u^2-1)(1-v^2)u\sin^2 w\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\left(v(u^2-1)(1-v^2)\cdot\sin^2 w+\right.$$

$$\left.+\frac{v(u^2-1)(1-v^2)(3u^4v^2+u^2v^4-6u^2v^2-2u^4+3u^2+v^2)}{(v^2-u^2)^2}\cos^2 w\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+$$

$$+2(v^2-u^2)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{u^2(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{v^2-u^2}\cos^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+$$

$$+\frac{v^2(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{(v^2-u^2)}\cos^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+(v^2-u^2)\sin^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}-$$

$$-\frac{2uv(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{v^2-u^2}\cos^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}+2u(1-v^2)(u^2-1)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}-$$

$$\left.-2v(1-v^2)(u^2-1)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}\right].$$

Derivăm acum pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ în raport cu u, v şi w. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{a(1-v^2)u\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{a(1-v^2)u\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot av=$$

$$=\frac{\sin w(1-v^2)(u^2+v^2-2u^2v^2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+$$

$$+\frac{uv\sin w(1-v^2)(u^2+v^2-2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial u}-$$

$$-\frac{u(1-v^2)\cos w}{a(1-v^2)(u^2-1)\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{\cos w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot au=$$

$$=\frac{-uv(u^2-1)(u^2+v^2-2)\sin w}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}-$$

$$-\frac{\sin w(u^2-1)(u^2+v^2-2u^2v^2)}{a(v^2-u^2)^2\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sin w\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+$$

$$+\frac{v\cos w}{a(1-v^2)\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{\cos w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot(-a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot(a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w)=$$

$$=\frac{-u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}{a(v^2-u^2)}\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-\frac{u\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}+$$

$$+\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\frac{v\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}-$$

$$-\frac{\sin w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{\cos w}{a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}.$$

Din sistemul de mai sus deducem pe $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\dfrac{1}{a^2(v^2-u^2)(1-v^2)(u^2-1)}\times$

$$\times\Bigg[\Bigg(-\frac{u(1-v^2)(u^2-1)(u^4v^2+3u^2v^4-6u^2v^2+3v^2+u^2-2v^4)}{(v^2-u^2)^2}\sin^2 w-$$

$$-u(1-v^2)(u^2-1)\cos^2 w\Bigg)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\Bigg(v(1-v^2)(u^2-1)\cos^2 w-$$

$$-\frac{v(1-v^2)(u^2-1)(2u^4-3u^4v^2-u^2v^4+6u^2v^2-3u^2-v^2)}{(v^2-u^2)^2}\sin^2 w\Bigg)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}-$$

$$-2(v^2-u^2)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial w}+\frac{u^2(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{v^2-u^2}\sin^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+$$

$$+\frac{v^2(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{v^2-u^2}\sin^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+(v^2-u^2)\cos^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}-$$

$$-\frac{2uv(1-v^2)^2(u^2-1)^2}{v^2-u^2}\sin^2 w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}-2u(1-v^2)(u^2-1)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}+$$
$$+2v(1-v^2)(u^2-1)\sin w\cos w\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}.$$

Să derivăm acum pe $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ în raport cu u, v şi w. Avem:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot\frac{a(1-v^2)u\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot\frac{a(1-v^2)u\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot av=$$
$$=\frac{2uv(1-v^2)}{a(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{(1-u^2)v}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+\frac{(v^2-1)(u^2+v^2)}{a(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+$$
$$+\frac{(v^2-1)u}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\cos w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot\frac{-a(u^2-1)v\sin w}{\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot au=$$
$$=-\frac{(1-u^2)(u^2+v^2)}{a(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{(1-u^2)v}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}+\frac{2uv(1-u^2)}{a(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+$$
$$+\frac{(v^2-1)u}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\cdot(-a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\sin w)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\cdot(a\sqrt{(1-v^2)(u^2-1)}\cos w)=$$
$$=\frac{(1-u^2)v}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial w}+\frac{(v^2-1)u}{a(v^2-u^2)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v\partial w}.$$

Din sistemul de mai sus îl determinăm pe $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\dfrac{1}{a^2(v^2-u^2)(1-v^2)(u^2-1)}\times$

$$\times\left[-\frac{(1-v^2)^2(u^2-1)^2u(u^2+3v^2)}{(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+\frac{(1-v^2)^2(u^2-1)^2v(3u^2+v^2)}{(v^2-u^2)^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-v^2)(u^2-1)^3v^2}{v^2-u^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+\frac{(1-v^2)^3(u^2-1)u^2}{v^2-u^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+\frac{2(1-v^2)^2(u^2-1)^2uv}{v^2-u^2}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u\partial v}\right].$$

Rezultă atunci:

$$\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2(v^2-u^2)(1-v^2)(u^2-1)}\times$$
$$\times\left(-2u(1-v^2)(u^2-1)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}+2v(u^2-1)(1-v^2)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}-(1-v^2)(u^2-1)^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-\right.$$
$$\left.-(1-v^2)^2(u^2-1)\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+(v^2-u^2)\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\right)=\frac{1}{a^2(u^2-v^2)}\left(2u\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}-2v\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+(u^2-1)\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial u^2}+(1-v^2)\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial v^2}+\frac{(u^2-v^2)}{(1-v^2)(u^2-1)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{a^2(u^2-v^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2-1)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[(1-v^2)\cdot\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial v}\right]+\frac{u^2-v^2}{(1-v^2)(u^2-1)}\cdot\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial w^2}\right\}.$$

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

23. Să se calculeze extremele (locale) ale următoarelor funcţii:

a) $z(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$; b) $z(x,y) = x^3y^2(a - x - y)$, $a > 0$;

c) $z(x,y) = xy^2e^{x-y}$; d) $z(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

e) $z(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; f) $z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

g) $z(x,y) = \dfrac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$, $c \neq 0$; h) $u(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 + 12xy + 2z$;

i) $u(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-yz-2x+y$; j) $u(x,y,z) = x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$; $x,y,z > 0$.

24. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$$

are o infinitate de maxime locale şi nici un minim local.

25. Să se împartă numărul 24 în trei părţi, aşa fel încât pătratul primei părţi înmulţit cu celelalte două, să dea un produs maxim.

26. Să se găsească distanţa minimă dintre dreptele de ecuaţii:

(d_1) $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ şi (d_2) $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$.

27. Să se determine punctele de extrem (locale) cu legături pentru următoarele funcţii:

a) $z(x,y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$; $x^2 + y^2 = 1$, $(a,b > 0)$.

b) $z(x,y) = x + y$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,b \in \mathbb{R}^*)$.

c) $z(x,y) = ax + by$; $x^2 + xy + y^2 = k^2$, $(k > 0,\ a,b \in \mathbb{R}^*)$.

d) $u(x,y,z) = x - 2y + 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

e) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $(a > b > c > 0)$.

f) $u(x,y,z) = xy^2z^3$; $x + 2y + 3z = a$, $(a \in \mathbb{R}^*)$.

g) $u(x,y,z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(a > b > c > 0)$.

h) $u(x,y,z) = xyz$; $\begin{cases} xy + xz + yz = 8 \\ x + y + z = 5. \end{cases}$

i) $u(x,y,z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$; $\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ (R > 0). \end{cases}$

j) $f(x,y,z,t) = x + y + z + t$; $xyzt - c^4 = 0$, $(c > 0)$.

28. Să se determine distanţa minimă de la punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ până la planul $(P):\ Ax + By + Cz + D = 0$.

29. Să se demonstreze că în orice triunghi înscris în cercul de rază R are loc inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

30. Se cere distanţa minimă de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ până la dreapta:

$$(d) \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

31. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-o elipsă (dreptunghiul are laturile paralele cu axele elipsei).

32. Să se determine paralelipipedul de volum maxim înscris într-un elipsoid.

33. Să se determine elipsa de arie minimă care trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$, $x_0,\ y_0 \neq 0$ (elipsa se presupune raportată la axele ei).

34. Să se determine elipsoidul de volum minim care trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 \neq 0$ (elipsoidul se presupune raportat la axele lui).

35. Să se găsească punctele intersecţiei cilindrului de ecuaţie $x^2+y^2 = 1$ cu planul de ecuaţie $2x + 3y + z - 1 = 0$ care sunt cele mai apropiate şi apoi care sunt cele mai îndepărtate de origine.

36. Un rezervor are forma a două paralelipipede suprapuse, cel de deasupra de lungime egală cu jumătate din lungimea celui de jos, iar lăţimea şi înălţimea respectiv egale cu ale celui de jos (vezi Figura 6.9). Partea de sus a rezervorului (faţa de sus a paralelipipedului de deasupra) este descoperită. Volumul V al rezervorului fiind dat, să se determine dimensiunile lui astfel încât să se folosească minimum de material.

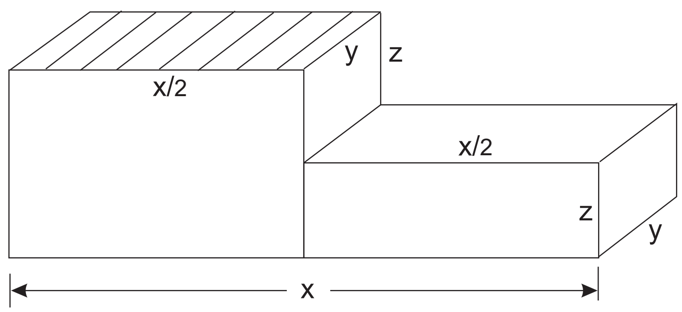

Figura 6.9

37. Să se determine extremele (globale) ale următoarelor funcţii definite pe mulţimi compacte:

a) $z(x, y) = x - 2y - 3, \quad 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq x + y \leq 1.$

b) $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 100.$

c) $u(x, y, z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$

38. Să se determine extremele (locale) ale funcţiei:

a) $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia:

i) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$;

ii) $x^3 - y^3 - 3x - 3y + 6 = 0$;

iii) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

b) $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia:

i) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 8 = 0$;

ii) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2), \quad a > 0$.

39. Ce devin ecuaţiile următoare dacă se schimbă funcţia după cum urmează:

a) $xy' - y\,[\ln(xy) - 1] = 0$ dacă $y = \dfrac{z}{x}$, $(y = y(x),\ z = z(x))$;

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$ dacă $y = \dfrac{z}{\sqrt{x}}$, $(y = y(x),\ z = z(x))$.

40. Ce devin ecuaţiile următoare dacă se fac schimbările de variabilă indicate:

a) $x^4y^{(4)} + 3x^2y'' - 7xy' + 8y = 0; \quad x = e^t, \ (y = y(x))$;

b) $(1 - x^2)y'' - xy' + \omega^2 y = 0; \quad x = \cos t, \ (y = y(x))$;

c) $xy'' + y' + xy = 0; \quad x^2 = 4t, \ (y = y(x))$;

d) $y'' + (4e^x - 1)y' + 4e^{2x}y = 0, \quad x = \ln t$;

e) $(ax + b)^3y''' + m(ax + b)^2y'' + n(ax + b)y' + ky = 0, \quad ax + b = e^t$.

41. În expresiile diferenţiale care urmează să se facă schimbările de variabilă şi de funcţie indicate la fiecare:

a) $E = \dfrac{xy' - y}{x + yy'}, \quad \begin{cases} x = \varrho\cos t \\ y = \varrho\sin t, \end{cases} \quad (y = y(x),\ \varrho = \varrho(t))$.

b) $E = \dfrac{(y')^2 - yy''}{y^2}, \quad \begin{cases} x = v - u \\ y = e^{u+v}, \end{cases} \quad (y = y(x),\ v = v(u))$.

c) $E = \dfrac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \begin{cases} x = \varrho\cos t \\ y = \varrho\sin t, \end{cases} \quad (y = y(x),\ \varrho = \varrho(t))$.

42. În ecuaţiile care urmează să se facă schimbările indicate la fiecare:

a) $xyy'' - xy'^2 + y^2 = 0, \quad \begin{cases} x = e^t \\ y = e^u, \end{cases} \quad (y = y(x),\ u = u(t))$.

b) $2y'''(1 + y') - 6y''^2 + y''(y' - 1)^2 = 0, \quad \begin{cases} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2}, \end{cases} \quad (y = y(x),\ v = v(u))$.

43. Luând pe u şi v ca noi variabile independente să se transforme următoarele ecuaţii:

a) $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0, \quad$ dacă $\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

b) $(x+y)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$ dacă $\begin{cases} u=\ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ dacă $u=\dfrac{x}{x^2+y^2},\ v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}.$

d) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ dacă $\begin{cases} u=x+2y+2 \\ v=x-y-1. \end{cases}$

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$ dacă $\begin{cases} u=x-2\sqrt{y} \\ v=x+2\sqrt{y}. \end{cases}$

f) $x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x,y>0)$ dacă $\begin{cases} x=(u+v)^2 \\ y=(u-v)^2, \end{cases}$

$(z=z(x,y))$.

44. Presupunând pe u şi v ca noi variabile independente şi pe w ca o nouă funcţie să se transforme în noile variabile următoarele ecuaţii:

a) $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2,$ dacă $u=x,\ v=\dfrac{1}{y},\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}.$

b) $(xy+z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+yz$ dacă $u=yz-x,\ v=xz-y,\ w=xy-z.$

c) $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2,$ dacă $x=u,\ y=\dfrac{u}{1+uv},\ z=\dfrac{u}{1+uw}.$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{2}y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x}$ dacă $u=\dfrac{x}{y},\ v=x,\ w=xz-y.$

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ dacă $u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x},\ w=\dfrac{z}{x},$

$(z=z(x,y),\ \ w=w(u,v))$.

45. Să se arate că ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0,\quad (z=z(x,y))$$

nu-şi schimbă forma prin transformarea de variabile $x=uv,\ \ y=\dfrac{1}{v}.$

46. Ce formă ia ecuaţia $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$ $(w=w(x,y))$ dacă punem $w=f(u)$, unde $u=(x-x_0)(y-y_0)$?

47. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $(z=z(t,x))$ introducând variabilele independente $u=x-at,\ \ v=x+at.$

48. Să se demonstreze că forma ecuaţiei lui Laplace:

$$\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

este invariantă pentru orice schimbare nesingulară de variabile $x=\varphi(u,v),\ \ y=$

$= \psi(u, v)$ $\left(\text{adică } \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0\right)$ care satisface condiţiile $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ şi $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$.

49. Să se transforme în coordonate polare (sferice), făcând înlocuirile $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$ în următoarele expresii:

a) $E_1 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$; b) $E_2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,
$(u = u(x, y, z))$.

50. Să se arate că expresiile E_1 şi E_2 din Problema 49 îşi conservă forma la o transformare oarecare a coordonatelor (x, y, z) în coordonate de forma:

$x' = a_1x + b_1y + c_1z$; $y' = a_2x + b_2y + c_2z$; $z' = a_3x + b_3y + c_3z$,

unde coeficienţii a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$ verifică relaţiile:

$$a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, 3$.

51. Să se transforme ecuaţia:

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + yz \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + xz \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + xy \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$(w = w(x, y, z))$ în noile variabile t, u şi v conform formulelor:

$$x = uv, \quad y = vt, \quad z = tu.$$

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

Capitolul 1

31. a) $\inf A = 1$; $\nexists \min A$; $\sup A = 2$; $\nexists \max A$;

b) $\inf A = 2$; $\nexists \min A$; $\sup A = \max A = 4$;

c) $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = 3$; $\nexists \max A$;

d) $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = \max A = 100$;

e) $\min A = \inf A = 1$; $\sup A = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right)$; $\nexists \max A$.

f) $\min A = \inf A = -2$; $\max A = \sup A = 3$.

g) $\sup A = 1$, $\inf A = -1$; $\nexists \max A$, $\nexists \min A$.

32. Se foloseşte inegalitatea mediilor pentru numerele $\dfrac{a_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi apoi pentru numerele $\dfrac{b_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1,n}$.

33. Se aplică Problema 32 cu $b_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

Capitolul 2

§1. 25. a) $x_n = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5}{6}$; b) $x_n = \dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{n\,\sin\frac{\theta}{2}}$, dacă $\theta \neq 2k\pi$ şi $x_n = 0$, dacă $\theta = 2k\pi$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; c) $x_n = \dfrac{n+1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$; d) $x_n = a^{1-\frac{1}{2^n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

26. Se foloseşte şirul $b_n = \ln a_n$ şi criteriul cleştelui. a) 1 ; b) $e^{1/3}$.

27. a) $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi $0 < x_n < 1$, $\forall\, n \geq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

b) $x_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(x_n + 1)$, $n \geq 1$; $(x_n)_{n\geq 4}$ este strict descrescător şi $x_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

28. $\alpha = \sqrt[3]{3}$; $\beta = -\dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$.

29. a) $a_n < \sqrt{1 + \sqrt{2a_{n-1}}}$ şi $a_n > 1 \Rightarrow a_n < a_n^2 < 1 + \sqrt{2a_{n-1}}$; din $a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_n < 1 + \sqrt{2a_n} \Rightarrow 0 < \sqrt{a_n} < \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = a$; deci $0 < a_n < a^2$, $\forall\, n \geq 1$. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit, deci convergent.

b) $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi folosind inegalitatea $\sqrt{b} \leq \dfrac{1+b}{2}$, $\forall\, b \in I\!R_+$ se arată că $a_n < 3$, $\forall\, n \geq 1$; deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

30. a) Se foloseşte inducţia matematică; b) Conform Teoremei lui Weierstrass rezultă că $\exists\, l_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$, $l_2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$; la limită în relaţia de recurenţă obţinem $l_1 = l_2$; deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

31. Din inegalităţile $\widetilde{x}_{n+1} = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n+1} + \dfrac{x_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n+1} + \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n^2(n+1)} =$ $= \dfrac{n^2+1}{n^2(n+1)}(x_1+\cdots+x_n) \leq \dfrac{1}{n}(x_1+\cdots x_n) = \widetilde{x}_n$ rezultă că $(\widetilde{x}_n)_{n\geq 1}$ este descrescător; în plus $\widetilde{x}_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$. Din Teorema lui Weierstrass rezultă că $\exists\, l = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$. Apoi din inegalităţile $0 \leq x_{n+1} \leq \dfrac{1}{n^2}(x_1+\cdots+x_n) = \dfrac{1}{n}\widetilde{x}_n \leq \dfrac{\widetilde{x}_1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, deci şi şirul mediilor aritmetice $\widetilde{x}_n \to 0$, pentru $n \to \infty$.

32. $x_{n+1} = m_{arm}\left(\underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{p-1}, \dfrac{a}{x_n^{p-1}}\right) \leq m_{geom}\left(x_n, x_n, \ldots, x_n, \dfrac{a}{x_n^{p-1}}\right) = \sqrt[p]{a};$

$$y_{n+1} = m_{aritm}\left(\underbrace{y_n, y_n, \ldots, y_n}_{p-1}, \frac{a}{y_n^{p-1}}\right) \geq m_{geom}\left(y_n, y_n, \ldots, y_n, \frac{a}{y_n^{p-1}}\right) = \sqrt[p]{a};$$

$x_{n+1} \geq x_n$, $\forall\, n \geq 1$; $y_{n+1} \leq y_n$, $\forall\, n \geq 1$; deci $\exists\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt[p]{a}$ (obţinute prin trecere la limită în relaţiile de recurenţă).

33. a) $\dfrac{2^p}{p+1}$ (cu Teorema lui Stolz-Cesaro); b) 1 (cu Teorema lui Stolz-Cesaro); c) p^p (consecinţa 4) a Teoremei lui Töplitz).

35. a) $LIM(a_n) = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $LIM(a_n) = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \dfrac{1}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\dfrac{1}{2}$;

c) $LIM(a_n) = \left\{-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$.

36. a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[(y_n+x_n)+(-x_n)] \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) =$ $= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$, conform Problemei 23, a).

Asemănător se demonstrează ineg. b)–d) folosind Problema 23.

37. Din Problema 36 rezultă că $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{x_n} = 1$; această egalitate combinată cu relaţia din enunţ ne dă: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{x_n} \in I\!R_+^*\right)$.

38. Se demonstrează că $LIM(x_n y_n) \subset LIM(y_n)$ şi $LIM(y_n) \subset LIM(x_n y_n)$.

39. Se foloseşte Teorema 7 de caracterizare a limitelor superioară şi inferioară.

§2. 20. a) $S_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{11}{18}$; seria este convergentă cu suma $S = \frac{11}{18}$.

b) $S_n = \sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha+n+1}-\sqrt{\alpha+n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}$; seria este convergentă cu suma $S = \sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}$.

c) $a_n = \frac{1}{n^2(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$; $S_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{8}$; seria este convergentă cu $S = \frac{1}{8}$.

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}+1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n(2n+3)}{2(n+2)(2n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$; seria este convergentă cu suma $S = \frac{1}{2}$.

e) $a_n = \frac{3(n-1)}{(n-1)!} + \frac{4}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$, $n \geq 1$; $S = 3e+4e-2(e-1) = 5e+2$, serie convergentă.

21. $a_n \leq n a_n$, $\forall n \geq 1$; se foloseşte criteriul de comparaţie cu mărginire (I).

22. a) $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, $\forall n \geq 1$; se foloseşte criteriul de comparaţie cu mărginire (I);

b) $\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot a_n} \leq \frac{\frac{1}{n^2}+a_n}{2} = \frac{1}{2n^2}+\frac{a_n}{2}$; se foloseşte criteriul de comparaţie cu mărginire (I), seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ fiind convergente.

23. Se dem. prin reducere la absurd. Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă. Atunci $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a_n} \to 1 \Leftrightarrow a_n \to 0$, pentru $n\to\infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ (D).

24. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (C); b) $a_n \leq \frac{4}{2^n}$, $\forall n \geq 1$, iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}$ (C) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (C); d) $a_n \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (C) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C); e) $a_n \leq n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (C) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

25. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C). b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C). c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\infty>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot(n+1)}=$ $=0<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C); c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{n+1}{(n+1)a+1}=\dfrac{e}{a}$. Dacă $\dfrac{e}{a}<1\Leftrightarrow$ $a>e:\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C); dacă $\dfrac{e}{a}>1\Leftrightarrow a<e:\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); dacă $a=e$: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=$ $=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D). Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) dacă $a>e$ şi (D) dacă $0<a\leq e$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\begin{cases}-\infty, & \text{dacă } a>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \text{ (D)}\\ \infty, & \text{dacă } a<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{ (C)}.\end{cases}$ Pentru $a=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ (D). Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) dacă $0<a<1$, (D) dacă $a\geq 1$. e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha-1$. Dacă $\alpha-1>1\Leftrightarrow\alpha>2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C); dacă $\alpha-1<1\Leftrightarrow$ $\alpha<2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); dacă $\alpha=2$: seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (D). Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) dacă $\alpha>2$, (D) dacă $0<\alpha\leq 2$. f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{a}{b}$. Dacă $\dfrac{a}{b}<1$ $\Leftrightarrow a<b$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); dacă $\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C). Dacă $a=b$ nu putem preciza natura seriei care depinde de şirul $(a_n)_{n\geq 1}$. g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a$. Dacă $0<a<1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); dacă $a>1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C); dacă $a=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\times$ $\times\ln n=0<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D). Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) dacă $a>1$, (D) dacă $0<a\leq 1$. h) Pentru $\alpha\neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha-a+1$. Dacă $\alpha-a+1>1$ $\Leftrightarrow\alpha-a>0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C); dacă $\alpha-a+1<1\Leftrightarrow\alpha-a<0:\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D); dacă $\alpha=a$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n=0<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D). Deci pentru $\alpha\neq 0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) dacă $\alpha>a$ şi (D) dacă $\alpha\leq a$. Pentru $\alpha=0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=$ $=1-a<1$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D).

27. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=0<1$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ (D), dacă $\alpha\neq 0$; dacă $\alpha=0$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}1$ (D). Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D), $\forall\,\alpha\in I\!R$. b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\infty>1$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ (C). c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\dfrac{4}{3}>1\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C).

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}\sim\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$, căreia i se aplică criteriul integral sau se aplică Problema 13, a) cu $p=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D).

29. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nu este absolut convergentă; $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\searrow 0$, $n\to\infty$, conform criteriului lui Leibniz $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (S.C.). b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{4}<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (C) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (A.C.). c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{5}<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (C) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (A.C.). d) $a_n\not\to 0$, $n\to\infty$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D). e) Se aplică criteriul lui Dirichlet pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}\searrow 0$ şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\alpha$ cu şirul sumelor parţiale S_n, unde $|S_n|\leq\dfrac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$, dacă $\alpha\neq 2k\pi$. Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) pentru $\alpha\neq 2k\pi$. Dacă $\alpha=2k\pi$ natura $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ depinde de şirul $(a_n)_{n\geq 1}$. f) Dacă $\alpha>1$: $|a_n|\leq\dfrac{1}{n^\alpha}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ (C) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (A.C.); dacă $0<\alpha\leq 1$ se aplică criteriul lui Dirichlet pentru şirul $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}\searrow 0$ şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\cos n^2$ care are şirul sumelor parţiale $S_n=\dfrac{1}{2}\sin n(n+1)$ mărginit: $|S_n|\leq\dfrac{1}{2}$. Deci pentru $0<\alpha\leq 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C).

Capitolul 3

44. c) Pentru $A_1=(1,2)$ şi $A_2=(2,3)$, $\overline{A_1\cap A_2}=\emptyset\subset\overline{A_1}\cap\overline{A_2}=\{2\}$.

46. a) $\overset{\circ}{A}=(0,1)\cup(2,3)$, $A'=[0,1]\cup[2,3]=\overline{A}$, $Fr\,A=\{0,1,2,3\}$.

b) $B=\{[0,1)\cap Q\}\bigcup\left\{\dfrac{1-2k}{6k+4},\ k\geq 1\right\}$, $\overset{\circ}{B}=\emptyset$, $B'=[0,1]\cup\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$,

$\overline{B} = [0,1] \bigcup \left\{ \dfrac{1-2k}{6k+4},\ \ k \geq 1 \right\} \bigcup \left\{ -\dfrac{1}{3} \right\},\ \ Fr\, B = \overline{B} \cap \overline{CB} = \overline{B} \cap C \overset{\circ}{B} = \overline{B} \cap \mathbb{R} = \overline{B}.$

c) $C = \{[0,1) \cap Q\} \bigcup \left\{ \dfrac{1}{(6k+1)(6k+2)} + \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ k \geq 0 \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{6k+2}{6k+3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ k \geq 0 \right\} \bigcup$
$\bigcup \left\{ \dfrac{6k+4}{6k+5} - \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ k \geq 0 \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{1}{(6k+5)(6k+6)} - \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ k \geq 0 \right\},\ \ \overset{\circ}{C} = \emptyset,\ \ C' = [0,1] \bigcup$
$\bigcup \left\{ 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\},\ \ \overline{C} = C \cup C' = [0,1] \bigcup \left\{ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\} \bigcup$
$\bigcup \left\{ \dfrac{6k+2}{6k+3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ k \geq 0 \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{4}{5} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\} \bigcup \left\{ \dfrac{1}{(6k+5)(6k+6)} - \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ k \geq 0 \right\},$
$Fr\, C = \overline{C} \cap \overline{CC} = \overline{C} \cap C \overset{\circ}{C} = \overline{C} \cap \mathbb{R} = \overline{C}.$

47. a)–c) Se foloseşte teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi, în care se ia $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.

48. $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{2}{3}\,|x-y|,\ \ \forall\, x, y \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right]$.

49. Ecuaţia este echivalentă cu $x = \dfrac{1}{x^2+3x+4}$ sau $x = \varphi(x)$, unde $\varphi : [0,1] \to$ $\to [0,1]$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+4}$; $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \dfrac{5}{16}\,|x-y|,\ \ \forall\, x, y \in [0,1]$. Pentru $x_0 = 0$, $x_1 = \varphi(x_0) = \dfrac{1}{4}$, iar $|x_n - \widetilde{x}| \leq \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} \cdot \left(\dfrac{5}{16}\right)^n;\ \dfrac{4}{11} \cdot \left(\dfrac{5}{16}\right)^n < 10^{-2} \Rightarrow n \geq 4$. Deci $\widetilde{x} \simeq x_4 = 0,2133$, adică $\widetilde{x} \simeq 0,21$.

54. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{m}\,\|A\|_2;\ \ \ \dfrac{1}{\sqrt{m}}\,\|A\|_3 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_3;$

$\|A\|_4 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{mn}\,\|A\|_4;\ \ \ \dfrac{1}{\sqrt{mn}}\,\|A\|_5 \leq \|A\|_1 \leq \|A\|_5.$

56. (II) a) $\|AU\| = \left[tr\,((AU)(AU)^T)\right]^{1/2} = \left[tr\,(AUU^TA^T)\right]^{1/2} = \left[tr\,(AA^T)\right]^{1/2} =$ $= \|A\|$ şi $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.

b) Dacă $A = diag\,(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \ B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ atunci:

$$\|AB - BA\| = \left[\sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 b_{ij}^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i \neq j} 2\,(|a_i|^2 + |a_j|^2) b_{ij}^2 \right]^{1/2} \leq \sqrt{2}\,\|A\| \cdot \|B\|.$$

(III) Se demonstrează fie direct că spaţiul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat complet, fie se foloseşte faptul că $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ este izomorf ca spaţiu liniar normat cu spaţiul $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_d)$.

57. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = (1, e, 1)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = (e^6, 2, 1)$.

Capitolul 4

34. f nu este mărginită.

35. a) $\sup f = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $\inf f = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; b) $\sup f = 2$, $\inf f = \frac{1}{4}$; c) $\sup f = \infty$, $\inf f = f(1) = 2$.

37. a) Pentru şirul $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \geq 0$, $x_n \to \infty$, $f(x_n) = 0 \to 0$; b) $\ln x \leq g(x) \leq 3\ln x$, $\forall\, x \geq 1$; deci $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

38. a) În $\forall\, x \in I\!R \setminus \{0\}$ f este continuă (este funcţie elementară); în $x = 0$, din inegalitatea $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ rezultă că $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Deci f este continuă şi în $x = 0$. b) Într-o vecinătate oarecare $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ a originii, ecuaţia $f'(x) = 0$ are o infinitate de soluţii, între două astfel de soluţii f este monoton crescătoare sau monoton descrescătoare.

41. a) $\frac{n\alpha - m\beta}{mn}$; b) $-\frac{4}{9}$; c) -1; d) $\frac{1}{2}$; e) e^2; f) e^{-1}; g) 1.

42. a) Mulţimea punctelor de discontinuitate este Z; aceste puncte sunt puncte de discontinuitate de specia a doua. În rest, f este continuă. b) Mulţimea punctelor de continuitate este Z; restul punctelor $I\!R \setminus Z$ sunt puncte de discontinuitate de specia a doua.

43. a) $a_1 = -1$, $b_1 = \frac{1}{2}$; b) $a_2 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{2}$.

44. a) $f|_{[-1,1]}$ este continuă pe compact, deci uniform continuă; $f|_{(1,\infty)}$ şi $f|_{(-\infty,-1)}$ sunt uniform continue. Deci în final f este uniform continuă pe $I\!R$. b) f uniform continuă pe $I\!R$; c) f uniform continuă pe $[-2, 5]$.

49. a) 0; b) 0; c) 2; d) 1.

50. a) $l_{12} = 1$, $l_{21} = -1$, $l_1 = 1$, $l_2 = -1$, $\nexists\, l$; b) $l_{12} = 0$, $l_{21} = 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $\nexists\, l$; c) $l_{12} = 0$, $\nexists\, l_{21}$, $l_1 = 0$, $\nexists\, l_2$, $l = 0$; d) $l_{12} = 1$, $l_{21} = 1$, $l_1 = 1$, $\nexists\, l_2$, $l = 1$.

51. Pentru $y = mx$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$. Deoarece limita depinde de m rezultă că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f nu este continuă în $(0,0)$.

52. Pentru $x = my^2$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} f(x,y) = |m|e^{-|m|}$. Limita obţinută depinzând de m rezultă că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f nu este continuă în $(0,0)$.

53. $a = 0$.

54. a) Mulţimea punctelor de discontinuitate este $\{(x,y) \in I\!R^2;\ x + y = 0\}$. b) $\{(x,y) \in I\!R^2;\ x \cdot y = 0\}$; c) $\{(x,y,z) \in I\!R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Capitolul 5

43. a) f este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+2}}, & \text{pt. } 0<x\le 2;\\ \dfrac{9}{8}, & \text{pt. } x>2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{dacă } x\in[0,\pi/2];\\ \cos^3 x, & \text{dacă } x\in(\pi/2,\pi];\end{cases}$ f este derivabilă pe $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ şi

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & \text{dacă } x\in[0,\pi/2);\\ -3\sin x\cos^2 x, & \text{dacă } x\in(\pi/2,\pi].\end{cases}$$

c) f este derivabilă pe $I\!R$ şi $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\cdot 2^{\frac{1}{x-1}}\ln 2, & \text{dacă } x<1;\\ \dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}, & \text{dacă } x\ge 1.\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & \text{dacă } x\in[1,2],\\ 4x-2, & \text{dacă } x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty);\end{cases}$ f este derivabilă pe $I\!R\setminus\{1,2\}$

şi $f'(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\in(1,2);\\ 4, & \text{dacă } x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty).\end{cases}$

44. a) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\dfrac{3}{1+x^2}$; c) $\dfrac{b-a}{(b-x)\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{b+a-2x}}$;

d) $\dfrac{3a(x^2+a^2)}{2x^4+2ax^3+a^2x^2-2a^3x+2a^4}$.

45. $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0;\end{cases}$

pentru $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0,\ \ f'(x_n)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty$.

46. a) $f''(3)=2$; b) $f''(2)=0$.

47. $a=-1,\ \ b=1$.

48. a) f nu este derivabilă pe $(-\pi/2,\pi/2)$, deci nu putem aplica teorema lui Rolle.

b) f nu este derivabilă pe $(-1,1)$, deci nu putem aplica teorema lui Rolle.

49. a) $c=\dfrac{3}{4}$; b) $c=\dfrac{9}{4}$.

50. $c=\dfrac{1}{16}\in(-2,1)$.

52. Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $\varphi(x)=f(x)\cdot e^{-kx}$.

53. Funcţiile f şi f' au rădăcini comune dacă $\lambda=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$, deci $PQ'-P'Q=$ $=0$. Adică $y'=0$. Deci pentru valorile lui x pentru care $y'=0$, valorile extreme ale lui y sunt $y=\lambda$.

54. a) $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = 2$. b) $x_1 \in (0,1)$; $x_2 \in (1,\infty)$.

c) Pentru $\lambda \in (-\infty,-1)$: $x_1 \in \left(\frac{1}{3},\infty\right)$, $x_{2,3} \notin I\!R\ (\in C)$. Pentru $\lambda = -1$: $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Pentru $\lambda \in \left(-1,\frac{5}{27}\right)$: $x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 \in \left(-1,\frac{1}{3}\right)$, $x_3 \in \left(\frac{1}{3},\infty\right)$. Pentru $\lambda = \frac{5}{27}$: $x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$. Pentru $\lambda \in \left(\frac{5}{27},\infty\right)$: $x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_{2,3} \notin I\!R$.

d) Pentru $\lambda \in \left(-\infty,-\frac{17}{16}\right)$: $x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 \in (2,\infty)$, $x_{3,4} \notin I\!R$. Pentru $\lambda = -\frac{17}{16}$: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1-3\sqrt{2}}{2} \in (-\infty,-1)$, $x_4 = \frac{1+3\sqrt{2}}{2} \in (2,\infty)$. Pentru $\lambda \in \left(-\frac{17}{16},4\right)$: $x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 \in \left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $x_3 \in \left(\frac{1}{2},2\right)$, $x_4 \in (2,\infty)$. Pentru $\lambda = 4$: $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 2$. Pentru $\lambda \in (4,\infty)$: $x_{1,2,3,4} \notin I\!R$.

55. a) 0; b) $\frac{2}{\pi}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) e^2; f) $6e^4$; g) $e^{-1/2}$; h) 9; i) 1; j) $e^{-\sqrt{3}/6}$.

56. Se consideră funcţia $f(x) = (x^2-1)^n$ care satisface relaţia $(x^2-1)f'(x) = 2nxf(x)$. Se derivează această egalitate de $(n+1)$ ori sau se foloseşte formula lui Leibniz-Newton. Ţinând cont că $f^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$, rezultă relaţia din enunţ.

57. a) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2n!}{(x-1)^{n+1}}$, $d^n f(x) = (-1)^{n+1}\frac{2n!}{(x-1)^{n+1}}\,dx^n$, $\forall x \in I\!R \setminus \{1\}$, $\forall n \geq 1$.

b) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}$, $n \geq 2$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall x \in [0,\infty)$, $\forall n \geq 1$.

c) $f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall x \in I\!R \setminus \{-1,0\}$, $\forall n \geq 1$.

d) $\vec{f}^{(n)}(x) = \left((-1)^{n+1}\frac{2n!}{(x+2)^{n+1}}, (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+2)^n} + (-1)^n\frac{(n-1)!}{(x-2)^n}\right)$, $d^n\vec{f}(x) = \vec{f}^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall x \in (-2,2)$, $\forall n \geq 1$.

e) $\vec{f}^{(n)}(x) = \left(a^n \sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right), b^n \cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right), c^n e^{cx}\right)$, $d^n\vec{f}^{(n)}(x) = \vec{f}^{(n)}(x)\,dx^n$, $\forall x \in I\!R$, $\forall n \geq 1$.

58. a) $f^{(5)}(x) = 540\sin 3x + 810x\cos 3x - 243x^2\sin 3x$, $\forall x \in I\!R$.

b) $f^{(n)}(x) = m^{n-3}e^{mx}(6C_n^3 + 6C_n^2 mx + 3m^2x^2C_n^1 + m^3x^3)$, $n \geq 3$; $f'(x) = 3x^2e^{mx} + x^3me^{mx}$; $f''(x) = 6xe^{mx} + 6mx^2e^{mx} + m^2x^3e^{mx}$, $\forall x \in I\!R$.

c) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k 5!(k-1)!}{(5-n+k)!}x^{5-n}, & \text{dacă } n \leq 5, \\ \displaystyle\sum_{k=n-5}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k 5!(k-1)!}{(5-n+k)!}x^{5-n}, & \text{dacă } n > 5,\ \forall x > 0. \end{cases}$$

d) $f^{(n)}(x) = 6C_n^{n-3}a^{n-3}\sin\left(ax + \dfrac{(n-3)\pi}{2}\right) + 6C_n^{n-2}xa^{n-2}\sin\left(ax + \dfrac{(n-2)\pi}{2}\right) +$
$+3C_n^{n-1}x^2a^{n-1}\sin\left(ax + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right) + C_n^n x^3a^n\sin\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right),\ \ n \geq 3;\ \ f'(x) =$
$= 3x^2\sin ax + ax^3\cos ax;\ \ f''(x) = 6x\sin ax + 6ax^2\cos ax - a^2x^3\sin ax,\ \ \forall\, x \in I\!R.$

e) $f^{(6)}(x) = -\dfrac{720}{(x-1)^4} + \dfrac{2160x}{(x-1)^5} - \dfrac{2160x^2}{(x-1)^6} + \dfrac{720x^3}{(x-1)^7},\ \ \forall\, x \in I\!R \setminus \{1\}.$

f) $f^{(n)})(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k e^{(a+b)x} = (a+b)^n e^{(a+b)x},\ \ \forall\, x \in I\!R,\ n \geq 1,$ iar $d^n f(x) =$
$= f^{(n)}(x)\,dx^n.$

60. Se derivează de n ori relaţia din enunţ, folosind formula lui Leibniz-Newton.

61. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \dfrac{d^n}{dx^n}\left\{x\left[x^{n-2}\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\} \overset{L-N}{=} x\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-2}\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] +$
$+n\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n-2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$, după care se foloseşte inducţia matematică.

62. $\sin x = \sin 1 + \dfrac{(x-1)}{1!}\cos 1 - \dfrac{(x-1)^2}{2!}\sin 1 + \cdots + \dfrac{(x-1)^n}{n!}\sin\left(1 + \dfrac{n\pi}{2}\right) +$
$+\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi_n + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right),\ \ \xi_n = 1 + \theta_n(x-1),\ \ \theta_n \in (0,1).$

63. $P(x) = 2 - 2(x+1) + (x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

64. $n = 2.$

65. a) Se aplică formula lui Taylor pentru funcţia $f(x) = \sqrt[5]{x}$, cu $x_0 = 3^5$; se pune condiţia ca $|R_n(250)| < 10^{-5}$. Se obţine $\sqrt[5]{250} \simeq 3,01709$.

b) Se aplică formula lui Taylor pentru funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cu $x_0 = 3^3$; se pune condiţia ca $|R_n(30)| < 10^{-4}$. Rezultă $\sqrt[3]{30} \simeq 3,10723$.

66. a) $0,3678$; b) $1,6487$; c) $0,98481$.

67. a) -2; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $-\dfrac{1}{12}$; d) $\dfrac{1}{60}$; e) $-\dfrac{5}{12}$.

68. a) puncte de maxim: $x_1 = \dfrac{\pi}{2},\ x_2 = \dfrac{3\pi}{2},\ (f(x_1) = f(x_2) = 1)$; puncte de minim: $x_3 = 0,\ x_4 = \pi,\ x_5 = 2\pi,\ (f(x_3) = f(x_4) = f(x_5) = 0)$.

b) puncte de minim: $x_{1k} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\ (f(x_{1k}) = 1),\ x_{4k} = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + k\pi,$ $k \in Z,\ \left(f(x_{4k}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{1/2}\right)$; puncte de maxim: $x_{2k} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z,\ (f(x_{2k}) =$ $= -1),\ x_{3k} = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z,\ \left(f(x_{3k}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{1/2}\right).$

c) puncte de minim: $x_0 = 0,\ x_{2k} = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k \in N^*,\ (f(x_0) = 0,\ f(x_{2k}) =$ $= -1)$; puncte de maxim: $x_{1k} = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k \in N,\ (f(x_{1k}) = 1)$.

d) punct de minim: $x_0 = e^{1/e},\ \left(f(x_0) = e^{-1/e}\right).$

e) $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ punct de maxim; $\widetilde{x_0} = 1$ punct de minim; $f(x_0) = -2e^{3/4}$; $f(\widetilde{x_0}) = 1$.

f) Dacă $a, b > 0$: $x_0 = \sqrt{ab}$ punct de maxim, $\widetilde{x_0} = -\sqrt{ab}$ punct de minim; $f(x_0) = -\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$; $f(\widetilde{x_0}) = -\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

Dacă $a, b < 0$: $x_0 = \sqrt{ab}$ punct de minim, $\tilde{x}_0 = -\sqrt{ab}$ punct de maxim; $f(x_0) = -\dfrac{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}{(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2}$; $f(\widetilde{x_0}) = -\dfrac{(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2}{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}$.

g) $x_0 = \dfrac{a}{4}$ punct de minim; $f(x_0) = \dfrac{27a^2}{32}$.

69. Triunghiul echilateral înscris în cerc de latură $2\sqrt{3}$, cu aria $3\sqrt{3}$.

70. Trapezul (isoscel) cu baza mică R, înăţimea $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, având aria $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

71. Dreptunghiul cu laturile $R\sqrt{2}$ şi $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ (înălţimea) cu aria R^2.

72. Catetele sunt $a = \dfrac{l}{3}$ şi $b = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$ (condiţia din problemă fiind $a+\sqrt{a^2+b^2} = l$), deci triunghiul are unghiul de $60°$ între ipotenuză şi cateta considerată.

73. $V_{con} = \dfrac{32\pi R^3}{81} = \dfrac{8}{27}V_{sf}$, $\left(r = \dfrac{2\sqrt{2}R}{3},\ h = \dfrac{4R}{3}\right)$.

74. a) $h = \dfrac{4}{3}R$; b) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$, ($\alpha$ fiind unghiul de la vârful conului).

75. $V_{cil} = \dfrac{4\pi R^2 H}{27} = \dfrac{4}{9}V_{con}$, $\left(r = \dfrac{2R}{3},\ h = \dfrac{H}{3}\right)$.

76. Latura bazei paralelipipedului este $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$, iar înălţimea $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. Volumul său este $\dfrac{4\sqrt{3}R^3}{9}$.

77. $M(6,6)$.

78. a) $x = a+\sqrt{ab}$, $y = b+\sqrt{ab}$; b) $x = 2a$, $y = 2b$.

79. Dreapta BB' este perpendiculară pe OA, la distanţa de 8 cm de punctul A.

80. a) $\Delta_r A \simeq d_r A = 83,78\,\text{cm}^2$; b) $\Delta_\alpha A \simeq d_\alpha A = -27,93\,\text{cm}^2$.

81. $t = \dfrac{l_1v_1 + lv - (l_1v + lv_1)\cos\alpha}{v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha}$.

82. $h = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

83. b) punct de maxim.

84. $d_1 = \dfrac{\pi l}{4+\pi}$; $d_2 = \dfrac{4l}{4+\pi}$.

85. $h = 2r$, $r = 5,42\,\text{cm}$; $h = 10,84\,\text{cm}$.

86. $\varepsilon \simeq 294°$.

87. Latura pătratului este $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}$.

88. $L = \dfrac{Rl}{3(R-r)}$.

Capitolul 6

§1. 26. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0,2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1,3) = = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(2,2,0) = 0$.

27. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + yx^{y-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + x^y \ln x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = = 1 + x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2$. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2+1}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{2y}{(y^2+1)^2}$. c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ $(y > 0)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^{z-1}y^{-z}z$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^z y^{-z-1} z$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \ln \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (z-1)x^{z-2}y^{-z}z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z(z+1)x^z y^{-z-2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \ln^2 \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -z^2 x^{z-1} y^{-z-1}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = x^{z-1}y^{-z}(z\ln x - z\ln y + 1)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x^z y^{-z-1}(z \ln y - z\ln x - 1)$. e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{z}x^{y/z-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^{y/z}}{z}\ln x$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = = -\dfrac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y}{z}\left(\dfrac{y}{z} - 1\right)x^{y/z-2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^{y/z}}{z^2}\ln^2 x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{y}{z^4}x^{y/z}\ln x \times \times (2z + y\ln x)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{z}x^{y/z-1}\left(1 + \dfrac{y}{z}\ln x\right)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\dfrac{y}{z^2}x^{y/z-1}\left(1 + \dfrac{y}{z}\ln x\right)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\dfrac{1}{z^2}x^{y/z}\ln x\left(1 + \dfrac{y}{z}\ln x\right)$. f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = = -\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = = \dfrac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = = \dfrac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. g) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(x\sin(y\sin z))\cdot\sin(y\sin z)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cos(y\sin z)\cdot\sin z$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cos(y\sin z) \times \times y\cos z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x\sin(y\sin z))\cdot\sin^2(y\sin z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x\sin(y\sin z))\cdot x^2 \times \times \cos^2(y\sin z)\cdot\sin^2 z - x\cos(x\sin(y\sin z))\cdot\sin(y\sin z)\cdot\sin^2 z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\sin(x\sin(y\sin z)) \times \times x^2\cos^2(y\sin z)\cdot y^2\cos^2 z - \cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\sin(y\sin z)\cdot y^2\cos^2 z - \cos(x\sin(y\sin z)) \times$

$\times x\cos(y\sin z)\cdot y\sin z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\sin(x\sin(y\sin z))\cdot x\cos(y\sin z)\cdot\sin z\cdot\sin(y\sin z)+$ $+\cos(x\sin(y\sin z))\cdot\cos(y\sin z)\cdot\sin z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = -\sin(x\sin(y\sin z))\cdot x\cos(y\sin z)\cdot y\cos z\times$ $\times\cdot\sin(y\sin z)+\cos(x\sin(y\sin z))\cdot\cos(y\sin z)\cdot y\cos z$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = -\sin(x\sin(y\sin z))\times$ $\times x^2\cos^2(y\sin z)\cdot y\cos z\cdot\sin z-\cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\sin(y\sin z)\cdot y\cos z\cdot\sin z+$ $+\cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cos(y\sin z)\cdot\cos z$.

28. a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -ab\sin(ax+by)$; b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 2yx^{y^2-1}(1+y^2\ln x)$; c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{1}{4x^{1/2}(y-x)^{3/2}}$, $(y>0)$; d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{2x^3y+3x^2}{(1+xy)^2}$.

31. $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2} = 4(e^{-x}+e^{-y}+e^{-z})$.

32. a) $\nexists\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\nexists\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$. Pentru $(x,y)\neq$ $\neq(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ $= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $\exists\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; funcţia f este diferenţiabilă în $(0,0)$ cu funcţia $h(x,y)$ (vezi Problema 9):

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Într-un punct $(x,y)\neq(0,0)$ derivatele parţiale ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

33. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } y\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y=0. \end{cases}$

Pentru drumuri $y=mx$, $\displaystyle\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{4m}{(m^2+1)^2}$. Deoarece limita depinde de m, rezultă că $\nexists\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, deci aceste derivate nu sunt continue în $(0,0)$.

34. a) $df(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$; $d^2f(x,y) = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx^2-$ $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy + \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy^2$.

b) $df(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}\,dy$; $d^2f(x,y)=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\times$
$\times dx^2-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy+\dfrac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy^2$.

c) $df(x,y)=e^{x+y}[(x\cos y+y\sin x+\cos y+y\cos x)\,dx+(x\cos y+y\sin x-x\sin y+$
$+\sin x)\,dy]$; $d^2f(x,y)=e^{x+y}[(x\cos y+2\cos y+2y\cos x)\,dx^2+2(x\cos y+y\sin x+$
$+y\cos x-x\sin y+\cos y+\sin x-\sin y+\cos x)\,dxdy+(y\sin x+2\sin x-2x\sin y)\,dy^2]$.

d) $df(x,y)=\dfrac{2}{x^2+4}\,dx+\dfrac{2\cos y}{4+\sin^2 y}\,dy$; $d^2f(x,y)=-\dfrac{4x}{(x^2+4)^2}dx^2-$
$-\dfrac{2\sin y(6-\sin^2 y)}{(4+\sin^2 y)^2}\,dy^2$.

e) $df(x,y,z)=y^zx^{y^z-1}\,dx+x^{y^z}y^{z-1}z\ln x\,dy+x^{y^z}y^z\ln x\ln y\,dz$; $d^2f(x,y,z)=$
$=y^z(y^z-1)x^{y^z-2}\,dx^2+x^{y^z}y^{z-2}z\ln x(y^zz\ln x+z-1)\,dy^2+x^{y^z}y^z\ln x\ln^2 y(y^z\ln x+1)\,dz^2+$
$+2x^{y^z-1}y^{z-1}z(1+y^z\ln x)\,dxdy+2x^{y^z-1}y^z\ln y(1+y^z\ln x)\,dxdz+2x^{y^z}y^{z-1}\ln x(zy^z\ln x\ln y+$
$+z\ln y+1)\,dydz$.

35. $100\left|\dfrac{dS}{S}\right|\le 0,4+0,291\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}+0,436\dfrac{\sin B}{\sin A\sin C}$.

36. Pentru $\theta\ne 0,\pi$, $\dfrac{df}{d\vec{v}}(0,0)=\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}$; pentru $\theta=0$ şi $\theta=\pi$ $\nexists\,\dfrac{df}{d\vec{v}}(0,0)$.

37. $\dfrac{14}{\sqrt{10}}$.

38. $\dfrac{13}{2\sqrt{30}}$.

39. a) $6\cos\theta-7\sin\theta$; b) $\pi\cos\dfrac{\pi^2}{4}\cdot\sin\theta$.

40. a) $\dfrac{\partial w}{\partial x}=a\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$; $\dfrac{\partial w}{\partial y}=b\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$; $\dfrac{\partial w}{\partial z}=c\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\dfrac{\partial f}{\partial u}+y\dfrac{\partial f}{\partial v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y\sin y(\sin x-x\cos x)}{x^2\sin^2 y+y^2\sin^2 x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin x(y\cos y-\sin y)}{x^2\sin^2 y+y^2\sin^2 x}$.

d) $z'(t)=0$.

41. a) $E(x,y)=x^y(1+\ln x)\dfrac{\partial f}{\partial v}+g(x+y)+(x+y)g'(x+y)$.

48. $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{n-k_1-k_2}}=a^{k_1}b^{k_2}c^{n-k_1-k_2}\varphi^{(n)}$.

49. $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}=a^n\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial\xi^n}$; $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}=b^n\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial\eta^n}$; $\dfrac{\partial^n u}{\partial z^n}=c^n\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial\zeta^n}$.

§2. 22. $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$.

23. a) $P(x,y)=6(x+1)(y-1)+6(y-1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^2(y-1)+2(y-1)^3$.
b) $P(x,y)=17x+56y+12x^2+3xy+61y^2+4x^3-12x^2y+18xy^2+20y^3-4x^3y+$

$+3x^2y^2+5xy^3+x^3y^2$.

24. Se dezvoltă polinomul din membrul stâng al ecuaţiei după puterile lui $x+2\overset{not}{=}$ $=x'$ şi $y-1\overset{not}{=}y'$. Obţinem: $x'^3+2y'^3-2x'^2+2x'y'=0$.

25. $f(x,y)=1+ax+by+\frac{1}{2}(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+\frac{1}{6}[-\cos(a\xi+b\eta)-3\sin(a\xi+$ $+b\eta)\cos(a\xi+b\eta)+\cos^3(a\xi+b\eta)]e^{\sin(a\xi+b\eta)}(a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3),\ \ \xi=\theta x,$ $\eta=\theta y,\ \ \theta\in(0,1)$.

26. a) $0,82\,\mathrm{rad}\ (47,03°)$; b) $1,08$; c) $-0,03$; d) $3,03$; e) $1,05$.

27. a) $y'(1)=-1;\ y''(1)=-\frac{2}{3};\ y'''(1)=-\frac{2}{3}$; b) $y'(0)=0;\ y''(0)=-\frac{2}{3};\ y'''(0)=$ $=-\frac{2}{3}$.

28. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}$. b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$. c) $\frac{\partial z}{\partial x}=-1;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. d) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$.

29. $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1;\ \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=-1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=4;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=3;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=$ $=4$.

30. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial w}};\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial w}};\ \ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\neq 0\right)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^3}.$$

b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz^2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]+2z\left[x\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+y\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}.$$

33. $\frac{\partial z}{\partial x}=u;\ \frac{\partial z}{\partial y}=f(u)$, deci $\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

34. a) $y'(1)=-\frac{4}{5};\ \ z'(1)=\frac{6}{5}$. b) $y'(3)=\frac{85+24\sqrt{3}}{69};\ \ z'(3)=\frac{24+36\sqrt{3}}{23}$. c) $x'(2)=0;\ \ y'(2)=-1;\ \ x''(2)=-\frac{1}{4};\ \ y''(2)=\frac{1}{4}$. d) $x'(z)=\frac{y-z}{x-y};\ \ y'(z)=$ $=\frac{z-x}{x-y},\ \ (x\neq y)$. e) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2};\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2};\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-xv+yu}{x^2+y^2};\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=$ $=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2},\ ((x,y)\neq(0,0))$.

35. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2yu-9x^2yv+3x^2y^2}{2xy-24uv+8yu}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2xu+2v^2-3x^3v+x^3y}{2xy-24uv+8yu}$;
$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{3x^3y^2+8yu^2}{4xyv-48uv^2+16yuv}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x^4y+8xu^2-8uv^2}{4xyv-48uv^2+16yuv}$.

36. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2xu^4-4yu^3v-2xy^4-4y^3uv}{(xu-yv)^3}$; $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x^3u^2+2x^3y^2+2xu^2v^2+2xy^2v^2}{(xu-yv)^3}$.

37. $z(x,y)=1+\dfrac{1}{1!}[2(x-1)-(y-1)]+\dfrac{1}{2!}[-16(x-1)^2+20(x-1)(y-1)-6(y-$ $-1)^2]+R_2(x,y)$.

38. a) $\dfrac{D(x,y)}{D(\varrho,\theta)}=\varrho$; b) $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=-\dfrac{a^4}{(x^2+y^2)^2}$; c) $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\varrho,\varphi,\theta)}=\varrho^2\sin\varphi$;
d) $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=abcx^2y$. Toate transformările sunt regulate pe mulţimile indicate.

39. a) $v=\ln u$; b) $u^2=v+2w$; c) $x^2+y^2=z$; d) $uv=w$; e) $w=(a^2+b^2+$ $+c^2)v-u^2$; f) $y_4^2=y_3^2+4y_2^2+4y_1^2$.

40. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

41. u, v şi w sunt dependente funcţional, relaţia dintre ele fiind: $(F(u)+1)(G(v)-$ $-1)(H(w)+1)=1$, unde F, G şi H sunt inversele funcţiilor f, g şi h.

42. $\varphi(x)=e^{ax+b}$, $a,b\in I\!R$, ($\varphi\neq const.$) sau $\varphi(x)=Ce^{ax}$, $(C=e^b)$.

§3. 23. a) z are două puncte de minim: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$; $z_{min}=z(M_1)=$ $=z(M_2)=-2$. b) z are punctele $M^\alpha(\alpha,0)$, $\alpha\in I\!R$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq a$ puncte de minim pentru $\alpha\in(0,a)$ şi puncte de maxim pentru $\alpha\in(-\infty,0)\cup(a,\infty)$ $(z(M^\alpha)=0)$ şi punctul $M_0\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{3}\right)$ punct de maxim, $z(M_0)=\dfrac{a^6}{432}$. c) z are punctele $M^\alpha(\alpha,0)$, $\alpha\in$ $\in I\!R$, $\alpha\neq 0$ puncte de minim pentru $\alpha>0$ şi puncte de maxim pentru $\alpha<0$ $(z(M^\alpha)=$ $=0)$ şi punctul $M_0(-1,2)$ punct de minim, $z(M_0)=-4e^{-3}$. d) $M_0(0,0)$ punct de minim, $z(M_0)=0$; $M^{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ cu $\alpha,\beta\in I\!R$, $\alpha^2+\beta^2=1$ puncte de maxim cu $z(M^{\alpha\beta})=$ $=e^{-1}$. e) $M_1(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $M_2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puncte de minim, $z(M_1)=z(M_2)=-8$. f) $M_1(2,1)$ punct de minim, $z(M_1)=-28$; $M_2(-2,-1)$ punct de maxim, $z(M_2)=28$. g) $M_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ cu $a\alpha+b\beta+c=0$ puncte de minim, $z(M_{\alpha\beta})=0$; $M^0(x^0,y^0)$, $x^0=\dfrac{a}{c}$, $y^0=\dfrac{b}{c}$ punct de maxim, $z(M^0)=a^2+b^2+c^2$. h) $M(-144,24,-1)$ punct de minim, $u(M)=-6913$. i) $M\left(1,-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ punct de minim, $u(M)=-\dfrac{4}{3}$. j) $M_0\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$ punct de minim, $u(M_0)=4$.

24. $M_k(2k\pi,0)$, $k\in Z$ puncte de maxim, $f(M_k)=2$.

25. $x=12$, $y=6$, $z=6$; $P=5184$.

26. Dacă $d_1\not\parallel d_2$ $\left(\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\text{ sau }\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\text{ sau }\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\right)$, se determină extremele

funcţiei: $f(x,\overline{x}) =$
$$=\sqrt{(x-\overline{x})^2+\left[\frac{b_1}{a_1}(x-x_1)+y_1-\frac{b_2}{a_2}(\overline{x}-x_2)-y_2\right]^2+\left[\frac{c_1}{a_1}(x-x_1)+z_1-\frac{c_2}{a_2}(\overline{x}-x_2)-z_2\right]^2}$$
sau ale funcţiei $g(x,\overline{x}) = f^2(x,\overline{x})$. Rezultă $dist\,((d_1),(d_2)) = f_{min} =$
$$= \frac{|(x_2-x_1)(b_1c_2-b_2c_1)-(y_2-y_1)(a_1c_2-a_2c_1)+(z_2-z_1)(a_1b_2-a_2b_1)|}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}.$$

Dacă $d_1 \parallel d_2$, $d_1 \neq d_2$ $\left(\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\right)$, se determină extremele funcţiei $h(x) =$ $=\sqrt{(x-x_1)^2+\left[\frac{b_2}{a_2}(x-x_2)+y_2-y_1\right]^2+\left[\frac{c_2}{a_2}(x-x_2)+z_2-z_1\right]^2}$ sau ale funcţiei $u(x) = h^2(x)$. Obţinem: $dist\,((d_1),(d_2)) = h_{min} =$
$$= \frac{\sqrt{[c_2(y_2-y_1)-b_2(z_2-z_1)]^2+[c_2(x_2-x_1)-a_2(z_2-z_1)]^2+[b_2(x_2-x_1)-a_2(y_2-y_1)]^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Dacă $(d_1) \equiv (d_2)$, $dist\,((d_1),(d_2)) = 0$.

27. a) $M_1\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ punct de maxim, $z(M_1)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$; $M_2\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ punct de minim, $z(M_2)=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

b) $M_1(x_1,y_1)$, $x_1=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y_1=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ punct de maxim, $z_{max}=z(x_1,y_1)=$ $=\sqrt{a^2+b^2}$; $M_2(x_2,y_2)$, $x_2=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y_2=-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ punct de minim, $z_{min}=$ $=z(x_2,y_2)=-\sqrt{a^2+b^2}$.

c) $M_1(x_1,y_1)$, $x_1=\frac{k(b-2a)}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-ab+b^2}}$, $y_1=\frac{k(a-2b)}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-ab+b^2}}$ punct de minim, $z_{min}=z(x_1,y_1)=-\frac{2k}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-ab+b^2}$; $M_2(x_2,y_2)$, $x_2=-\frac{k(b-2a)}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-ab+b^2}}$, $y_2=$ $=-\frac{k(a-2b)}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-ab+b^2}}$ punct de maxim, $z_{max}=z(x_2,y_2)=\frac{2k}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

d) $M_1\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ punct de maxim, $u(M_1)=3$; $M_2\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ punct de minim, $u(M_2)=-3$.

e) $M_{1,2}(\pm a,0,0)$ puncte de maxim, $u(M_{1,2})=a^2$; $M_{3,4}(0,0,\pm c)$ puncte de minim, $u(M_{3,4})=c^2$.

f) u are punctele $M^\alpha(a-3\alpha,0,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ şi $\alpha\neq\frac{a}{3}$ puncte de minim pentru $\alpha\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ şi puncte de maxim pentru $\alpha\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},\infty\right)$ $(u(M^\alpha)=0)$ şi $M_0\left(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}\right)$ punct de maxim, $u(M_0)=\frac{a^6}{6^6}$.

g) Punctele $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$ sunt puncte de minim, valoarea funcţiei u în aceste puncte fiind 0, iar punctele $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sunt puncte de maxim, valoarea lui u în aceste puncte fiind $\dfrac{(a-c)^2}{4}$.

h) Punctele $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ sunt puncte de minim, $u_{min}=4$, iar punctele $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ sunt puncte de maxim, $u_{max}=\dfrac{112}{27}$.

i) Dacă $\frac{x_0}{A}\neq\frac{y_0}{B}$ sau $\frac{x_0}{A}\neq\frac{z_0}{C}$ sau $\frac{y_0}{B}\neq\frac{z_0}{C}$ (adică $OM_0\not\perp(P)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $(P):\ Ax+By+Cz=0$) atunci u admite un punct de minim $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi un punct de maxim $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$x_{1,2}=\pm\frac{R[(B^2+C^2)x_0-ABy_0-ACz_0]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{(Bx_0-Ay_0)^2+(Cx_0-Az_0)^2+(Cy_0-Bz_0)^2}},$$

$$y_{1,2}=\pm\frac{R[(A^2+C^2)y_0-ABx_0-BCz_0]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{(Bx_0-Ay_0)^2+(Cx_0-Az_0)^2+(Cy_0-Bz_0)^2}},$$

$$z_{1,2}=\pm\frac{R[(A^2+B^2)z_0-ACx_0-BCy_0]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{(Bx_0-Ay_0)^2+(Cx_0-Az_0)^2+(Cy_0-Bz_0)^2}}.$$

Valorile minimă şi maximă ale funcţiei u (în punctele $M_{1,2}$) sunt:

$$u_{min,max}=R^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2\mp 2R\frac{\sqrt{(Bx_0-Ay_0)^2+(Cx_0-Az_0)^2+(Cy_0-Bz_0)^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dacă $\frac{x_0}{A}=\frac{y_0}{B}=\frac{z_0}{C}$ (adică $OM_0\perp(P)$) atunci $u=const.=R^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2$.

j) $M_1(c,c,c,c)$ punct de minim, $f(M_1)=4c$ şi $M_2(-c,-c,-c,-c)$ punct de maxim, $f(M_2)=-4c$.

28. Se determină extremele funcţiei $u(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ sau ale funcţiei $f(x,y,z)=u^2(x,y,z)$ cu legătura $Ax+By+Cz+D=0$. Obţinem $dist\,(M_0,(P))=u_{min}=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

29. Deoarece $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$, se determină valoarea maximă M a funcţiei $f(x,y,z)=\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z$ cu legătura $x+y+z=\pi$. Se obţine $M=\dfrac{9}{4}$.

30. Se determină extremele funcţiei $u(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ sau ale funcţiei $f(x,y,z)=u^2(x,y,z)$ cu legăturile $Ax+By+Cz+D=0$ şi $A'x+B'y+C'z+D'=0$. Rezultă $dist\,(M_0,(d))=u_{min}=$

$$=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{\sqrt{(BC'-B'C)^2+(AC'-A'C)^2+(AB'-A'B)^2}},$$

unde $\alpha=(AB'-A'B)y_0+(AC'-A'C)z_0+(AD'-A'D)$, $\beta=(A'B-AB')x_0+(BC'-B'C)z_0+(BD'-B'D)$, $\gamma=(A'C-AC')x_0+(B'C-BC')y_0+(CD'-C'D)$.

31. Se determină extremele funcţiei $u(x,y)=4xy$ $(x,y>0)$ cu legătura $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$. Rezultă $x_{max}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $y_{max}=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$, (semilaturile dreptunghiului), iar

$u_{max} = 2ab$.

32. Notând cu x, y, z lungimile semilaturilor paralelipipedului avem de determinat extremele funcţiei $u(x, y, z) = 8xyz$, $(x, y, z > 0)$ cu legătura $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Obţinem $x_{max} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y_{max} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, $z_{max} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$, iar $u_{max} = \frac{8\sqrt{3}abc}{9}$.

33. Se determină extremele funcţiei $u(x, y) = \pi xy$, $(x, y > 0)$ cu legătura $\frac{x_0^2}{x^2} +$ $+ \frac{y_0^2}{y^2} - 1 = 0$. Obţinem $x_{min} = \sqrt{2}|x_0|$, $y_{min} = \sqrt{2}|y_0|$, iar $u_{min} = 2\pi|x_0 y_0|$.

34. Se determină extremele funcţiei $u(x, y, z) = \frac{4\pi xyz}{3}$ $(x, y, z > 0)$ cu legătura $\frac{x_0^2}{x^2} + \frac{y_0^2}{y^2} + \frac{z_0^2}{z^2} - 1 = 0$. Obţinem $x_{min} = \sqrt{3}|x_0|$, $y_{min} = \sqrt{3}|y_0|$, $z_{min} = \sqrt{3}|z_0|$, iar $u_{min} = 4\sqrt{3}\pi|x_0 y_0 z_0|$.

35. Se determină punctele de extrem ale funcţiei $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ cu legăturile $x^2 + y^2 = 1$ şi $2x + 3y + z - 1$. Obţinem $x^1_{max} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $y^1_{max} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $z^1_{max} =$ $= 1 - \sqrt{13}$ $(u^1_{max} = 15 - 2\sqrt{13})$ şi $x^2_{max} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $y^2_{max} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $z^2_{max} = 1 + \sqrt{13}$, $(u^2_{max} = 15 + 2\sqrt{13})$, $x^3_{min} = \frac{2+6\sqrt{3}}{13}$, $y^3_{min} = \frac{3-4\sqrt{3}}{13}$, $z^3_{min} = 0$, $(u^3_{min} = 1)$, $x^4_{min} =$ $= \frac{2-6\sqrt{3}}{13}$, $y^4_{min} = \frac{3+4\sqrt{3}}{13}$, $z^4_{min} = 0$ $(u^4_{min} = 1)$. Rezultă punctul $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 1 + \sqrt{13}\right)$ cel mai îndepărtat de origine şi punctele $\left(\frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{13}, \frac{3 \mp 4\sqrt{3}}{13}, 0\right)$ cele mai apropiate de origine.

36. Se determină extremele funcţiei $u(x, y, z) = \frac{3}{2}xy + 3xz + 4yz$ (aria totală a rezervorului) cu legătura $xyz = \frac{2V}{3}$. Obţinem $x_{min} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{V}$, $y_{min} = \sqrt[3]{V}$, $z_{min} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{V}$, iar $u_{min} = 6\sqrt[3]{V^2}$.

37. a) $z_{max} = z(1, 0) = -2$; $z_{min} = z(0, 1) = -5$; b) $u_{max} = u(0, 0, \pm 10) = 300$, $u_{min} = u(0, 0, 0) = 0$; c) $u_{max} = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$, $u_{min} = u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$ $= -\frac{1}{2}$.

38. a) i) $x_{max} = 1$, $y_{max} = y(1) = 0$; $x_{min} = \frac{1}{2}$, $y_{min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; ii) $x_{min} = 1$, $y_{min} = y(1) = 1$; $x_{max} = -1$, $y_{max} = y(-1) = y_0$, unde y_0 este soluţia unică a ecuaţiei $y^3 + 3y - 8 = 0$, $y_0 \in (1, 2)$; iii) $x_{min} = 0$, $y_{min} = y(0) = \sqrt[3]{3}$; $x_{max} = -2$, $y_{max} = y(-2) = -1$. b) i) $x_{max} = 0$, $y_{max} = 0$, $z_{max} = 2 + 2\sqrt{3}$; $x_{min} = 0$, $y_{min} = 0$,

$z_{min} = 2 - 2\sqrt{3}$; ii) puncte de maxim (α, β) cu $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{3a^2}{8}$, $z_{max} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$; puncte de minim $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ cu $\overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 = \dfrac{3a^2}{8}$, $z_{min} = -\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

39. a) $xz' - z \ln z = 0$; b) $4x^2 z'' + (4x^2 + 1 - 4\lambda^2) z = 0$.

40. a) $\ddddot{y} - 6\dddot{y} + 14\ddot{y} - 16\dot{y} + 8y = 0$; b) $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$; c) $t\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$; d) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$; e) $a^3 \dddot{y} + a^2(m - 3a)\ddot{y} + a(2a^2 - ma + n)\dot{y} + ky = 0$.

41. a) $E = \dfrac{\varrho}{\varrho'}$; b) $E = \dfrac{2v''}{(v' - 1)^3}$; c) $E = \dfrac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2}}$.

42. a) $u'' - u' + e^t = 0$; b) $2v''' + v''v'^2 = 0$.

43. a) $u\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} - \tilde{z} = 0$; b) $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} - \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0$; c) $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial v^2} = 0$; d) $3\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = 0$; e) $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} = 0$; f) $(u^2 - v^2)\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} + v\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} - u\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = 0$.

44. a) $u^2\dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$; b) $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$; c) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 0$; d) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$; e) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

45. Ecuaţia devine: $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u^2} + 2uv^2\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + 2(v - v^3)\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} + u^2 v^2 \tilde{z}^2 = 0$.

46. $uf''(u) + f'(u) + cf(u) = 0$.

47. Ecuaţia în noile variabile este: $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} = 0$ $(\tilde{z}(u, v) = \tilde{z}(x - at, x + at) = z(x, y))$ cu soluţia $\tilde{z}(u, v) = f(u) + g(v)$. Deci $z(t, x) = f(x - at) + g(x + at)$.

48. Ecuaţia devine: $\dfrac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial v^2} = 0$, unde $\widetilde{\Phi}(u, v) = \Phi(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \Phi(x, y)$.

49. a) $E_1 = \left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\right)^2$; b) $E_2 = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \dfrac{\operatorname{ctg} \varphi}{r^2}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}$, unde $\tilde{u}(r, \varphi, \theta) = u(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$ $(= u(x, y, z))$.

50. $E_1 = \left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial z'}\right)^2$; $E_2 = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z'^2}$.

51. $t^2\dfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} + u^2\dfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial u^2} + v^2\dfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial v^2} = 0$.

ANEXĂ

Tabel cu funcţiile elementare, derivatele şi diferenţialele lor

Funcţia	Derivata	Diferenţiala
$y = c$	$y' = 0$	$dy = 0$
$y = x^\alpha$ (dacă $\alpha \in I\!R$, $x > 0$)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$dy = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$
$y = a^x$ $(a > 0)$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a\,dx$
$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$dy = \dfrac{dx}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x\,dx$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x\,dx$
$y = \operatorname{tg} x$ $(\cos x \neq 0)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$ $(\sin x \neq 0)$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$dy = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x,\ x \in [-1,1]$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$	$dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x,\ x \in [-1,1]$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$	$dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$
$y = \ln(x + \sqrt{x^2+a})$ $(x + \sqrt{x^2+a} > 0)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$dy = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

BIBLIOGRAFIE

1. L. Aramă, T. Morozan, Probleme de calcul diferenţial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

2. K.H. Bachmann, ... (colectiv), Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

3. D.M. Bătineţu, Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu - Şiruri, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

4. N. Boboc, I. Colojoară, Matematică. Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

5. Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

6. N. Calistru, Gh. Ciobanu, Curs de analiză matematică, Vol.I, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1988.

7. S. Chiriţă, Probleme de matematici superioare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

8. N. Ciorănescu, Curs de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

9. N. Ciorănescu, M.Roşculeţ, Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.

10. A. Corduneanu, Gh. Ciobanu, N. Grădinaru, Analiză matematică pentru facultăţile de electrotehnică şi mecanică, Partea I-a şi a II-a, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1979.

11. M. Craiu, M. Roşculeţ, Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

12. I. Crăciun, Gh. Procopiuc, A. Neagu, C. Fetecău, Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare, Vol.1,2, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1984.

13. B.P. Demidovici, Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

14. G.M. Fihtenholt, Curs de calcul diferenţial şi integral, Vol.1-3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963-1965.

15. D. Flondor, N. Donciu, Algebră şi analiză matematică, Culegere de probleme, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

16. S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur, Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.

17. N. Gheorghiu, T. Precupanu, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

18. Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, Matematică. Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

19. R. Luca–Tudorache, Analiză matematică. Calculul diferenţial, Tehnopress, Iaşi, 2005.

20. E. Munteanu, P. Crăciunaş, Curs de matematică pentru anul I Facultatea de tehnologia şi chimia textilelor, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1986.

21. C.P. Nicolescu, Teste de analiză matematică, Editura Albatros, Bucureşti, 1984.

22. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, Analiză matematică, Vol.I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

23. A. Precupanu, Bazele analizei matematice, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 1993.

24. M.N. Roşculeţ, Analiză matematică, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

25. Gh. Sireţchi, Calcul diferenţial şi integral, Vol.1,2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

26. A. Şaichin, Exerciţii şi probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.1,2, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.