Cuprins

Capitolul 1

Şiruri şi serii numerice

1.1 Şiruri numerice în $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$.

Prin şir numeric vom înţelege orice aplicaţie a mulţimii numerelor naturale în multimea numerelor reale sau, mai generel, a numerelor complexe. Notăd cu f această funcţie, vom considera $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $f(1), f(2), ..., f(n), ...$ care se numesc termenii şirului dat.

Vom nota, în cazul şirului complex, $f(n) = z_n = x_n + iy_n$, prescurtat cu $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau prin $(z_1, z_2, ..., z_n, ...)$. Evident termenii şirului pot fi toţi numere reale în care caz avem $z_n = x_n, y_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Şirul real fiind cunoscut din liceu.

Vom face observaţia că nu trebuie să identificăm termenii unui şir numeric cu mulţimea de numere corespunzătoare şirului sau asfel scris:

$(z_1, z_2, ..., z_n, ...) \neq \{z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$, unde am notat prin $\{z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$ mulţimea şir. Aceasta înseamnă că în cazul unui şir $z_j \neq z_k$, dacă $j \neq k$ în timp pentru mulţimea şir se poate întâmpla ca $z_j = z_k$ pentru $j \neq k$.

Exemplu: Şirul complex definit prin $z_n = i^{n-1}$ este:

$(1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, ...)$ Se vede că $z_1 = z_5 = z_9$ şi $z_2 = z_4$. Mulţimea în acest caz este $\{1, i, -1, -i\}$.

Vom conveni să notăm <u>şir staţionar</u> şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în care $z_n = c$=constant oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare şirul staţionar este acela pentru care mulţimea sa este formată dintr-un singur element. Şirul staţionar se mai numeşte şir consant. Vom spune, de asemeni că termenul $z_n = x_n + y_n$ este termenul general al şirului dat şi el este considerat diferit de termenul $z_{n+1} = x_{n+1}+y_{n+1}$ sau de orice alt termen al şirului.

Pentru şirurile numerice reale se defineşte noţiunea de şir monoton. Asfel dacă $x_n \leq x_{n+1}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şirul se numeşte <u>monoton crescător</u> şi dacă $x_{n+1} \leq x_n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şirul se numeşte <u>monoton descrescător</u>. Dacă semnul inegalităţilor este strict vom avea şiruri monotone stricte.

Noţiunea de bază, fundamentală, din teoria şirurilor este noţiunea de şir convergent. Astfel, un şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$ se spune că este convergent către un număr $z \in \mathbb{C}$ dacă pentru orice număr real pozitiv ($\varepsilon > 0$) se poate determina un număr real dependent de ε ($N = N(\varepsilon)$), astfel încât $|z_n - z| < \varepsilon$ pentru orice indice natural n astfel încât $n \geq N$. Fără a constitui o restricţie putem presupune $N \in \mathbb{N}$ deoarece se poate considera partea întreagă $[N]$ a lui N şi dacă $n \geq N$ atunci $n \geq [N]$

Din punct de vedere geometric putem interpreta un şir convergent către un număr z în felul următor. În iteriorul oricărui cerc cu centrul în punctul de afix z se află o infinitate de punte ale şirului adică: $z_{N+1}, z_{N+2}, ...z_n, ...$, iar în exteriorul acestui cerc se pot afla doar $z_1, z_2, ..., z_{N-1}$.

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coverge către z vom scrie $z_n \to z$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ sau mai comod $\lim z_n = z$, iar numărul z se numeşte limita şirului $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 Proprietăţi ale şirurilor convergente.

Principalele proprietati ale sirurilor convergente vor fi prezentate sub forma de teoreme.

Teorema 1: Dacă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri din $\mathbb{C}$ atunci:

a) limita unui şir este unic determinată.

b) orice şir convergent este mărginit.

c) $z_n \to z \Leftrightarrow w_n = z_n - z \to 0$

d) dacă $z_n \to z$, $|z_n| \to |z|$, reciproca nu este adevarată ntodeauna (numai dacă z=0)

e) dacă $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ atunci $z_n \to z \Leftrightarrow x_n \to x$ şi $y_n \to y$.

f) $z_n \to z$, $w_n \to w \Rightarrow z_n + w_n \to z + w$ şi $z_n w_n \to zw$.

g) dacă $z_n \to z \neq 0$ şi dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel inct $z_n \neq 0$ pentru orice $n > k$ atunci $\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$.

⌈ a) dacă $z_n \to a$, $z_n \to b$ şi dacă $a \neq b$ atunci $|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|z_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon > 0$ arbitrar si $n \in \mathbb{N}$ iar dacă se consideră modulul diferenţei $|a - b| = |z_n - b + a - z_n| = |z_n - a| + |z_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Cum inegalitatea $|a - b| < \varepsilon$ nu poate avea loc pentru orice $\varepsilon > 0$; de exemplu se poate lua $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$ şi atunci vom avea: $|a - b| < \frac{|a-b|}{2}$ adica $1 < \frac{1}{2}$, fals. Falsul provine din ipoteza $a \neq b$.

b) dacă $z_n \to z$, vom avea $|z_n - z| < 1$, pentru orice $n > N(1)$ si deci $|z_n| = |z + z_n - z| \leq |z| + 1$, prin urmare dacă notăm cu $A = max\{|z1|, |z2|, ..., |z_{N-1}|, |z| + 1\}$ va rezulta $|z_n| \leq A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ deci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

c) Dacă $z_n \to z$, $|z_n - z| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$ adică $|w_n| < \varepsilon$ şi deci $w_n \to 0$.

d) În baza inegalităţii $||z_n| - |z|| < |z_n - z|$. Din $|z_n - z| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ rezultă $||z_n| - |z|| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ adică $|z_n| \to |z|$;

invers dacă luăm de exemplu $z_n = i^n$, atunci $|z_n| = 1$ care este un şir staţionar convergent în timp ce şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent, după cum am văzut.

e) Dacă $z_n = x_n + iy_n \to x + iy = z$, deoarece $|Re(z_n - z)| \leq |z_n - z|$ si $|Im(z_n - z)| \leq |z_n - z|$ rezultă: $|x_n - x| = |Re(z_n - z)| \leq \varepsilon$ şi $|y_n - y| = |Im(z_n - z)| \leq \varepsilon$ ceea ce înseamnă că $x_n \to x$ si $y_n \to y$. Reciproc dacă $|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ şi $|z_n - z| < \varepsilon$ dacă $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi deci $z_n \to z$.

f) Din inegalitatea $|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w|$ rezultă $z_n + w_n \to z + w$; apoi deoarece $|z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + w(z_n - z)| \leq |z_n||w_n - w| + |w||z_n - z|$. Cum $(z_n)_{n\in N}$ este convergent rezultă $(z_n)_{n\in N}$ mărginit şi deci există $A > 0$ astfel încât $|z_n| < A$ şi dacă luăm $B = max\{A, |w|\}$ rezultă: $|z_n w_n - zw| = B\varepsilon + B\varepsilon = \varepsilon'$.

g) Deoarece $|z| = |(z - z_n) + z_n| \leq \varepsilon + |z_n|$ luând $\varepsilon = \frac{|z|}{2} > 0$ rezultă $0 < \frac{|z|)}{2} \leq |z_n|$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi atunci: $|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}| = |\frac{z - z_n}{z_n z}| \leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n| < \frac{2\varepsilon)}{|z|^2} = \varepsilon'$. $\rfloor$

Din aceasta teorema rezulta reguli de calcul posibile pentru operatia de trecere la limita. Astfel din f) rezulta:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n, \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = zw = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n., \tag{1.2}$$

În particular dacă presupunem sirul $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationar, $w_n = a \in \mathbb{R}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}(a.z_n) = az = a \lim_{n\to\infty} z_n, \tag{1.3}$$

iar pentru $a = -1$ obtinem:

$$\lim_{n\to\infty}(-z_n) = -\lim_{n\to\infty} z_n, \tag{1.4}$$

şi în plus, pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_n}{z_n}$ avem în baza lui f) şi g):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n} \tag{1.5}$$

Pentru şirurile reale avem următoarele teoreme:

Teorema 2: a) Dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ sunt astfel încât $x_n < x'_n$ pentru $n > N, N \in \mathbb{N}$, atunci dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x'$ avem $x < x'$(deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$).

b) Orice şir monoton şi mărginit este convergent şi anume dacă $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, aunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = sup\{x1, x2, ..., x_n, ...\}$ iar dacă $x_{n+1} > x_n$ pentru orice $n \in N$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta = inf\{x1, x2, ..., x_n, ...\}$.

⌈ a) Fie $d_n = x_n - x'_n$, avem $d_n \geq 0$ şi dacă $\lim_{n\to\infty} d_n = d$ $d = x - x'$ şi $d < 0$ atunci $|d_n - d| < \varepsilon$ şi deci $d - \varepsilon < d_n < d + \varepsilon$ şi pentru $\varepsilon = -(\frac{d}{2}) > 0$ vom avea $d_n < \frac{d}{2} < 0$ ceea ce contrazice ipoteza $d_n \geq 0$ şi deci $d = 0$.

b) Dacă $x_n \leq x_{n+1}$ şi $|x_n| < A$ atunci multimea $M = \{x1, x2, ..., x_n, ...\}$ are o margine superioară strictă, fie $\alpha = supM$. În baza definiţiei marginii superioare stricte avem oricare ar fi ($\varepsilon > 0$ există $n_\in\mathbb{N}$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_{n_1} \leq \alpha$ aşadar $\alpha - \varepsilon < x_{n_1} < x_{n_1+1} < ... < x_n < ... < \alpha < \alpha + \varepsilon$ ceea ce inseamnă că $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$ pentru orice $n > n_1 = N(\varepsilon)$ ceea ce înseamnă $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Rationament asemănător poate fi făcut şi în cazul şirului descrescător. Astfel, dacă $x_{n+1} \leq x_n$şi $|x_n| < A$ atunci multimea $M = \{x1, x2, ..., x_n, ...\}$ are o margine inferioară strictă, fie $\beta = infM$. În baza definiţiei marginii inferioare stricte avem pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\beta < x_{n_1} \leq \beta + \varepsilon$ aşadar $\beta - \varepsilon < \beta < ... < x_n < ... < x_{n_1+1} < x_{n_1} < \beta + \varepsilon$ ceea ce înseamn ă că $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ pentru orice $n > n_1 = N(\varepsilon)$ ceea ce înseamnă $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Observaţie. Dacă şirul în cauză este crescător si nemărginit vom avea, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, dacă este descrescator şi nemărginit vom avea $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. O consecintă importantă a teoremei 2 este următorul rezultat, cunoscut sub numele:

Teorema 3: (Teorema intervalelor incluse). Fie a_1, b_1 două numere reale diferite si $a_1 < b_1$. Considerăm intervalele $[a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ..., \tag{1.6}$$

unde a_2 coincide fie cu a_1, când $b_2 = ((a1 + b1)/2)$, fie cu $((a1 + b1)/2)$, când $b_2 = b_1$, a_3 coincide fie cu a_2, cnd $b_3 = ((a_2 + b_2)/2)$, fie cu $((a_2 + b_2)/2)$, cnd $b_3 = b_2$ şi aşa mai departe. În acest caz va exista un numar $\alpha \in [a1, b1]$ comun tuturor intervalelor $[a_n, b_n]$.

⌈ Din constructia intervalelor incluse avem ca sirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt monotone si marginite. Astfel:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1, \tag{1.7}$$

iar $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Utiliznd teorema 2, punctul b), avem $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = sup\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta = inf\{b_n\}$ si $\alpha = \beta$(daca am avea $\alpha > \beta$ atunci în baza teoremei 2, punctul a), am avea de la un rang n suficient de mare $b_n \leq a_n$). Deoarece $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \to 0$ pentru orice $n \to \infty$ vom avea $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ si deci $\alpha = \beta$.⌋

O consecintă importantă a acestei teoreme este rezultatul următor:

Teorema 4: (Bolzano-Weierstrass) Orice şir mărginit din $\mathbb{R}$, conţine un subşir convergent în $\mathbb{R}$.

$\lceil$Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $a_1 \leq x_n \leq b_1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Vom nota cu x_{n_2} un termen al şirului considerat, aflat în intervalul $[a_2, b_2]$, construit la teorema3; se notează cu x_{n_3} un termen al şirului considerat, aflat în intervalul $[a_3, b_3]$, construit la teorema 3 cu $x_{n_2} \neq x_{n_3}$ (lucru posibil de realizat deoarece un şir are o infinitate de termeni distincţi) şi se alege acea jumatate $[a_3, b_3]$ a intervalului $[a_2, b_2]$ care contine o infinitate de termeni ai şirului. Continunnd acest procedeu, se obţine subşirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iar $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ si, $1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...$ În baza teoremei 3 avem $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha \in [a_1, b_1]$.$\rfloor$

Astfel un şir dat poate avea mai multe subşiruri convergente. Numărul real α se va numi limita parţială a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ dacă există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent către α, adică dacă $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, adică există a, b astfel încât $a \leq x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci toate limitele parţiale ale acestui şir se vor afla în intervalul $[a, b]$.

Cea mai mică limită parţială, care se află în intervalul $[a, b]$ şi există în baza axiomei marginii inferioare se va numi limita inferioara a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se va nota cu $\underline{lim}x_n = x'$ (sau $\liminf x_n = x'$), iar cea mai mare limită parţială care se află în intervalul $[a, b]$ şi există în baza axiomei marginii superioare, se va numi limita superioară a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se va utiliza notaţia $\overline{lim}x_n = x''$ (sau $\limsup x_n = x''$). Rezultă inegalităţile:

$$a \leq inf\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \leq \underline{lim}x_n \leq \overline{lim}x_n \leq sup\{x1, x2, ..., x_n, ...\} \leq b, \tag{1.8}$$

şi în baza teoremei 1, punctul a) va rezulta că un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marginit din $\mathbb{R}$ va fi convergent dacă şi numai dacă $\underline{lim}x_n = \overline{lim}x_n$.

Un sir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$ se numeşte şir Cauchy sau şir fundamental dacă:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât inegalitatea $|z_n - z_m| < \varepsilon$ să fie verificată pentru orice numere naturale n si m care verifică inegalităţile $n \geq N, m \geq N$.

Teorema 5:

a) Orice şir convergent este fundamental.

b) Orice şir fundamental este mărginit.

$\lceil$a) Rezultă din inegalitatea $|z_n - z_m| = |z_n - z + z - z_m| = |z_n - z| + |z_m - z| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pentru $n \geq N$ şi $m \geq N$, dacă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la z adică dacă $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. b) Din definiţia şirului fundamental, pentru $\varepsilon = 1$ (alegerea este pur ntmplatoare) vom avea : $|z_n - z_m| = 1$ dacă $n \geq N(1), m \geq N(1)$ deci în particular $|z_n - z_N| < 1$ pentru $n \geq N$; apoi deoarece $|z_n| = |z_n - z_N + z_N| \leq 1 + |z_N|$ pentru orice $n \leq N$, rezultă că termenii: $z_N, z_{N+1}, ...$ sunt mărginiti, adică $|z_n| < A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde am notat cu $A = max\{|z1|, |z2|, ..., |z_{N-1}|, |z_N| + 1\}$.⌋

Teorema 6 (Criteriul lui Cauchy):

Un şir din $\mathbb{C}$ este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.

⌈ Teorema 5, punctul a, ne spune că un şir convergent este fundamental deci ne mai rămâne de demonstrat că un şir fundamental din $\mathbb{C}$ este convergent. Vom arăta că un şir fundamental din $\mathbb{R}$ este convergent. Teorema 5, punctul b, ne spune că un şir fundamental este mărginit, iar în baza teoremei 4 ştiim că şirul în cauză conţine un subşir convergent, fie acesta $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$; ori atunci:

$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \to 0, n \to \infty$ ($|x_n - x_{n_k}| \to 0, n \to \infty, k \to \infty$, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind un şir fundamental, iar $|x_{n_k} - x| \to 0, k \to \infty$). Mai rămâne de arătat că orice şir fundamental complex este convergent. Aceasta rezultă din inegalităţile evidente pentru $z_n = x_n + iy_n, z_m = x_m + iy_m, n, m \in \mathbb{N}$ $|z_n - z_m| < |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$ şi deci dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt fundamentale ele sunt convergente şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = x + iy$.⌋

Diferenţa dintre un şir fundamental şi un şir convergent este următoarea: În cazul unui şr convergent trebuie să cunoaştem atât termenii şirului cât şi limita sa pe când în cazul unui şir fundamental nu este necesar decât cunoaşterea termenilor şirului şi atât. Teorema 6 este importanta pentru că permite să se pună în evidenţă convergenţa unui şir fără cunoaşterea prealabilă a limitei acelui şir.

Ca aplicaţie, fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ unde $x_m = r, r_1 r_2 ... r_m = r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + ... + \frac{r_m}{10^m}$, cu $r \in \mathbb{Z}$, $r_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$. Presupund $n > m$ atunci: $x_n - x_m = \frac{1}{10^{m+1}}[r_{m+1} + \frac{r_{m+2}}{10} + ... + \frac{r_n}{10^{n-m-1}}]$, deoarece $0 \leq r_j \leq 9$ vom avea:

$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{10^{m+1}}[9 + \frac{9}{10} + ... + \frac{9}{10^{n-m-1}}] < \frac{9}{10^{m+1}}(1 + \frac{1}{10} = ...) = \frac{1}{10^m} \leq \varepsilon$, pentru m suficient de mare şirul cu termenul general x_n este deci fundamental deci va exista un x real şi $x = lim x_n$. În acest caz s-a justificat faptul că prin reprezentarea zecimală: $x = r, r_1 r_2 ... r_n ...$ se definesc de fapt numerele reale.

O altă teoremă utilă în calculul limitelor este:

Teorema 7 (Teorema lui Stoltz):

⌈ Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător şi nemărginit (deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$) şi dacă şirul $(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent către un număr $\ell \in \mathbb{R}$ pentru orice şir real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atunci şirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent de asemeni către ℓ.

Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, găsim $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel fracţiile $\frac{x_N - x_{N-1}}{y_N - y_{N-1}}$, $\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, ..., \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, ...$ sunt cuprinse între $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Conform proprieţătii fracţiilor, dacă mai multe fracţii sunt cuprinse între două numere atunci adunând numărătorii fracţiilor între ei şi numitorii aceloraşi fracţii între ei vom obţine o fracţie ce se găseşte de asemeni între cele două numere. În cazul fracţiilor :

$\frac{x_N-x_{N-1}}{y_N-y_{N-1}}$, $\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}$,...,$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$, cu $n > N$, vom obţine fracţia $\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}$, care este cuprinsă între $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$ şi deci $|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă $n > N$, şi deoarece: $\frac{x_n}{y_n} - \ell = \frac{1}{y_n}(x_N - \ell y_N) + (1 - \frac{y_N}{y_n})(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N} - \ell)$, pentru că: $\frac{x_n-\ell y_n}{y_n} = \frac{x_N-\ell y_N+x_n-x_N+\ell y_N-\ell y_n}{y_n} = \frac{x_N-\ell y_N}{y_n} + \frac{y_n-y_N}{y_n}\frac{x_n-x_N-\ell(y_n-y_N)}{y_n-y_N} = \frac{1}{y_n}(x_N - \ell y_N) + (1 - \frac{y_N}{y_n})(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N} - \ell)$. În baza faptului că $y_n \to \infty$ se obţine $\frac{x_n}{y_n} - \ell \to 0$.⌋

1.3 Şiruri numerice în $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

Un şir din $\mathbb{R}^2$ este o funcţie(o aplicaţie) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ notată prin $s(n) = x_n \in \mathbb{R}^2$ unde x_n este o pereche ordonată de numere reale, adică $x_n = (a_n, b_n)$ (perechea (a_n, b_n) este diferita de perechea (b_n, a_n)). Un şir din $\mathbb{R}^2$ se va scrie deci sub forma: $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sau $((a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), ...)$.

Se observă că un şir din $\mathbb{R}^2$ este format cu ajutorul a două şiruri din $\mathbb{R}$: şirul primelor componente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şi şirul componentelor secunde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Şi reciproc, cu ajutorul a două şiruri din $\mathbb{R}$, fie ele $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se formează un şir, numit şir dublu , $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^2$ cu păstrarea ordinii, adică termenii primului şir se află pe primul loc în perechea (a_n, b_n), iar termenii celui de-al doilea şir se afla toti pe locul al doilea al perechi (a_n, b_n).

Se poate remarca, că aceeaşi situatie apare şi în cazul şirurilor din $\mathbb{C}$, iar între şirurile din $\mathbb{C}$ şi cele din $\mathbb{R}^2$ se poate stabili un izomorfism natural.

Se va face totuşi distinctia între şirurile din $\mathbb{C}$ şi cele din $\mathbb{R}^2$ datorită structurii algebrice diferite a celor două mulţimi. În $\mathbb{C}$ se poate defini produsul a două elemente, deci şi câtul pe când în $\mathbb{R}^2$ nu există operatia de împărţire a elementelor.

Şirul $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este convergent catre (a, b) din $\mathbb{R}^2$ dacă:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N$, $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$.

De reţinut că N se schimbă o dată cu $\varepsilon(N = N(\varepsilon))$. Elementul (a, b) din $\mathbb{R}$ se va numi în acest caz limita şirului $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ şi vom folosi notaţiile: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (a, b)$ sau, mai comod $\lim(a_n, b_n) = (a, b)$, sau încă $(a_n, b_n) \to (a, b)$.

Convergenţa şirurilor din $\mathbb{R}^2$ se rezolvă imediat cu ajutorul următoarei teoreme:

<u>Teorema 8</u>: Un şir $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^2$ este convergent şi are limita (a, b) dacă şi numai dacă $\lim a_n = a$ şi $\lim b_n = b$, ceeace se poate scrie:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n) \tag{1.9}$$

⌈ Dacă $(a_n, b_n) \to (a, b)$ atunci conform definitiei limitei din $\mathbb{R}^2$ vom avea $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ ori care ar fi $n \geq N$, ori atunci:

$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ şi deci $a_n \to a$ şi
$|b_n - b| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ şi deci $b_n \to b$.

Reciproc, din $a_n \to a$ rezultă $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ iar din $b_n \to b$ rezultă $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ şi deoarece $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ va rezulta: $(a_n, b_n) \to (a, b)\rfloor$.

Se poate arăta uşor că orice şir convergent din $\mathbb{R}^2$ este mărginit, adică va exista un patrat centrat în $(0, 0)$ şi de latura $2A > 0$ în interiorul căruia se vor afla toate elementele sirului din $\mathbb{R}^2$.

De asemenea, se poate arăta că un şir din $\mathbb{R}^2$ este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental în $\mathbb{R}^2$ adică:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice numere naturale n, m şi $n > m = N(\varepsilon)$ să avem: $\sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2} < \varepsilon$.

Într-adevăr, $|a_n - a_m| = \sqrt{(a_n - a_m)^2} \leq \sqrt{(a_n - a_m)^2 + (a_n - a_m)^2} < \varepsilon$ şi deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental în $\mathbb{R}$, deci va exista un $a \in \mathbb{R}$, unic, şi $\lim a_n = a$. Similar $|b_n - b_m| = \sqrt{(b_n - b_m)^2} \leq \sqrt{(a_n - a_m)^2 + (a_n - a_m)^2} < \varepsilon$ şi deci şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental în $\mathbb{R}$, deci va exista un $b \in \mathbb{R}$, unic, si $\lim b_n = b$. Aşadar $(a_n, b_n) \to (a, b)$.

În $\mathbb{R}^3$ problemele legate de convergenţa şirurilor se rezolvă n mod similar.

Un şir din $\mathbb{R}^3$ fiind o funcţie (o aplicaţie) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ notată prin $s(n) = x_n \in \mathbb{R}^3$, unde x_n este un triplet ordonat de numere reale, adică $x_n = (a_n, b_n, c_n)$ (tripletul (a_n, b_n, c_n) este diferit de orice alt triplet format cu a_n, b_n, c_n în alt ă ordine).

Un şir din $\mathbb{R}^3$ se va scrie deci sub forma: $((a_n, b_n, c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sau $((a_1, b_1, c_1)$, (a_2, b_2, c_2),..., (a_n, b_n, c_n),...). Se observă că un şir din $\mathbb{R}^3$ este format cu ajutorul a trei şiruri din $\mathbb{R}$: şirul primelor componente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şirul componentelor secunde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi şirul componentelor de pe locul trei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Acest şir va fi convergent şi va avea limita (a, b, c) din $\mathbb{R}^3$ dacă:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât dacă $n \geq N$ $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 (c_n - c)^2} < \varepsilon$, iar o condiţie necesară şi suficientă de convergenţa va fi convergenţa sirurilor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, din $\mathbb{R}$ către a, b, c, având loc relaţia:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n, b_n, c_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n, \lim_{n\to\infty} c_n) \tag{1.10}$$

Un şir din $\mathbb{R}^3$ este convergent daca şi numai daca este şir fundamental în $\mathbb{R}^3$ adică:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $m, n \in \mathbb{N}, n > m \geq N(\varepsilon)$ să avem:

$$\sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 + (c_n - c_m)^2} < \varepsilon \tag{1.11}$$

La fel ca n $\mathbb{R}^2$, se poate arăta uşor c ă orice şir convergent din $\mathbb{R}^3$ este mărginit, adică va exista un cub cu centru n $(0,0,0)$ şi de latură $A > 0$ în interiorul căruia se vor afla toate elementele şirului din $\mathbb{R}^3$.

Extinderea la spaţiul $\mathbb{R}^m, m > 3$ se poate face fară probleme.

1.4 Serii numerice în $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$.

Daca $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{R}$, cu ajutorul termenilor acestui şir se poate construi un alt şir $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general dat de relaţia:

$$s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \tag{1.12}$$

Dacă şirul nou construit este convergent este natural să se presupună că limita sa $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, este suma expresiei $z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$, numită suma infinită sau serie infinită sau mai simplu serie asociata sirului $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi vom scrie prin definiţie:

$$s = z_1 + z_2 + ... + z_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \tag{1.13}$$

subînţelegând faptul că suma(însumarea) se face după toti indicii $n \in \mathbb{N}$ şi operatia de însumare se realizează în ordinea scrisă a termenilor.

Vom extinde însă noţiunea de serie la orice sumă $z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$ cu un număr infinit de termeni, fară a pretinde că şirul construit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent. Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construit din $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şirul sumelor parţiale. Pentru seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ putem spune:

a) seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este convergentă si are suma s dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are limita s.

b) seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este divergentă dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Termenul z_n al seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ se numeşte termenul general al seriei.

Exemple:

1.) Fie termenul general $z_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ Putem scrie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$. Putem scrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

2.) Dacă termenul general este $z_n = i^n$; şirul sumelor patţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conţine partu subşiruri staţionare $(s_{4n}) = 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ $(s_{4n+1}) = i$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ $(s_{4n+2}) = i-1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ $(s_{4n+3}) = -1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$. prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} i^n$este divergentă, nu are sens.

3.) Dacă termenul general este $z_n = 1 + in$; şirul sumelor parţiale $(s_n) = n + i\frac{n(n+1)}{2} \to \infty$, prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + in) = \infty$. Seria este divergentă şi are limita ∞.

4.) Dacă termenul general este $z_n = q^{n-1}$; şirul sumelor patţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 + q + q^2 + ...q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ şi pentru $|q| < 1$ $(s_n) \to \frac{1}{1-q}$ iar pentru $|q| > 1$ $(s_n) \to \infty$. Mai rămân cazurile $q = 1$ şi $q = -1$. Pentru $q = 1$ avem $(s_n) = n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ prin urmare, în acest caz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = \infty$. Pentru $q = -1$ şirul sumelor patţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conţine două subşiruri staţionare $(s_{2n}) = 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ $(s_{2n+1}) = 1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nu există.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ se numeşte sera geometrică.

Să considerăm două serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z'_n$, Dacă există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $z_n \neq z'_n$, pentru $n \leq n_0$ şi $z_n = z'_n$ pentru $n > n_0$ aceste serii sunt în acelaşi timp convergente sau divergente şi vom spune că au aceeaşi natură, deoarece presupunnd $n > n_0$, dacă se notează cu $c = \sum\limits_{k=1}^{n_0}(z_k - z'_k)$, $s_n = s'_n + c$, unde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z'_k$ şi dacă şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge atunci $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dacă şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent atunci şi $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Stabilim următorul rezultat: Dacă seria $c = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$este convergentă, atunci seria:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k \tag{1.14}$$

se numeşte restul de ordin n al seriei date şi au loc relaţiile:

$$r_n = s - s_n, \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \tag{1.15}$$

Aceste relaţii se justifică astfel:

Dacă se consideră şirul: $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, ..., 0, z_{n+1}, ...)$ şi seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z'_n$ corespunzatoare, care diferă de seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ doar prin înlocuirea primilor n termeni cu 0 seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z'_n$ este convergentă la fel ca seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ în baza celor stabilite mai sus: $c = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $s_n = c$, $s' = \sum_{n\in\mathbb{N}} z'_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_n = r_n$, $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ şi cum $s = s' + c$ şi deci $r_n = s - s_n$ şi cum $(s - s_n) \to 0$ atunci $r_n \to 0$.

Diferenţa $s - s_n$ se numeşte <u>eroare de triunchere</u> şi ea măsoara eroarea care apare atunci când se înlocuiesc s prin s_n.

Seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ i se poate ataşa întotdeauna o serie cu termeni pozitivi şi anume seria:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \tag{1.16}$$

unde $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$

Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ este convergentă, vom spune că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ este absolut convergent ă.

1.5 Criterii de convergenţă pentru serii numerice.

Vom pune în evidenţă criterii de stabilire a convergenţei seriilor prin următoarele teoreme:

<u>Teorema</u> 1 (Criteriul general de convergenţă pentru serii numerice)

Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, este convergentădacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|\sum_{k=n+1}^{m} z_k| < \varepsilon \tag{1.17}$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n \geq N(\varepsilon)$.

$\lceil$ Fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k, s_m = \sum_{k=1}^{m} z_k$ atunci $|\sum_{k=n+1}^{m} z_k| = |z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_m| = |s_m - s_n|$ şi deci putem aplica teorema 3, de la şiruri, pentru şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \rfloor$.

<u>Teorema</u> 2 (Criteriul necesar dar nu suficient de convergenţă pentru serii numerice)

a) Pentru ca seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, să fie convergentă este necesar (dar nu suficient) ca termenul general al său să tinda la zero ($z_n \to 0$).

b) Dacă termenul general al seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, nu tinde la zero ($\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$) seria este sigur divergentă.

⌈ Pentru punctul a), dacă în (1.17) se ia $n-1$ în loc de n şi n în loc de m, se obţine $|z_n| < \varepsilon$, pentru orice n suficient de mare, deci dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, în mod obligatoriu. Pentru a arăta că nu este suficient ca z_n să tindă la zero considerând de exemplu seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$, numită seria armonică, deoarece trei temeni consecutivi ai săi z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, satisfac relaţia armonică, adică:

$$\frac{1}{z_{n-1}} + \frac{1}{z_{n+1}} = \frac{2}{z_n}. \tag{1.18}$$

Calculnd, de exemplu, $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ...\frac{1}{2n}$, deoarece $\frac{1}{n+j} > \frac{1}{2n}$ pentru $j = 1, 2, ..., n$, vom obţine $|s_{2n} - s_n| > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, care dovedeşte că şirul sumelor parţiale nu este şir convergent, prin urmare seria este divergentă, deşi $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Punctul b) rezultă evident din a)⌋.

<u>Teorema </u>3

Orice serie absolut convergentă este convergentă.(reciproca nu este în general adevarată.)

⌈ Daca seria (1.16) este convergentă, din (1.17) rezultă: $|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_m| = ||z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_m|| < \varepsilon$, dacă $m > n = N(\varepsilon)$ si deci:

$|s_m - s_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_m| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_m| < \varepsilon$

Reciproca nu este în general adevarată. De exemplu seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergentă (aceasta se arată considernd şirul cu termen general $c_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ care este convergent şi are limita $c \in (0, 1)$, $s_{2n} = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n$ iar $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \ln 2$, si deci $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = ln2$, în timp ce seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ este divergentă după cum am văzut la demonstraţia teoremei anterioare.⌋

<u>Teorema </u>4

O serie cu termeni reali pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor partiale este mărginit.

⌈ Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$ şi deci $s_{n+1} \geq s_n$, prin urmare şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi mărginit, deci convergent.⌋

<u>Teorema </u>5(Criteriul comparaţiei)

Fie seriile de studiat $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ şi seriile reale cu termeni pozitivi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ atunci:

a) Dacă $|z_n| \leq Ma_n$, pentru orice $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $M > 0$, atunci:

Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă (M nu depinde de n_0, iar $a_n > 0$)

b) Dacă $0 < Ab_n < x_n$, pentru orice $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $A > 0$ şi dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este divergentă atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este divergentă$\rfloor$.

$\lceil$ a) Din convergenţa seriei cu termeni pozitivi, în baza teoremei 1, pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m < \frac{\varepsilon}{M}$ ceeace antrnează: $|s_m - s_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_m| < |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_m| < M(a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m) < \varepsilon$, daca m¿n=N(e).

b) Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ar fi convergentă, atunci acelaşi lucru ar fi valabil şi pentru $\sum_{n\in\mathbb{N}} n_n$, conform cu punctul a), dacă luăm $\frac{1}{A}$, ceea ce nu se poate $\rfloor$.

Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ se numeşte <u>serie majorantă</u> pentru $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$. Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ se numeşte <u>serie minorantă</u> pentru $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

<u>Teorema 6</u> (Criteriul raportului la limită).

Fie , două serii cu termeni pozitivi $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$este convergent şi dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a > 0$, atunci:

a) Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ convergentă.

b) Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ este divergentă atunci $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este divergentă.

$\lceil$ Din $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ rezultă:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aetfel încât pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ să avem:

$(a - \varepsilon)y_n < x_n < (a + \varepsilon)y_n$ şi din teorema 5, punctul a), rezultă că dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convege atunci $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge, luând de exemplu $M = a + \varepsilon$. Iar dacă $a - \varepsilon > 0$(se poate alege ε corespunzător astfel încât $a - \varepsilon > 0$) şi din teorema 5, punctul b), rezultă punctul b) al teoremei 6$\rfloor$.

Exemplu: Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n sin\frac{1}{3^n}$, are aceeaşi natură ca seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{2}{3})^n$.

Vom face observaţia că în cazul $a = 0$, teorema 6, punctul a) nu mai este valabil. De exemplu, dacă luăm $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$, şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este convergentă în timp ce $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ este divergentă.

Teorema 7(Criteriul rapoartelor inegale):

Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ două serii cu termeni strict pozitivi şi dacă avem: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:

a) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ este convergentă atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este convergentă

b) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este divergentă atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ este divergentă.

$\lceil$ Dând lui n valorile $1, 2, ..., n-1$, vom avea: $\frac{x_2}{x_1} \le \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{x_3}{x_2} \le \frac{y_3}{y_2}$, ..., $\frac{x_n}{x_{n-1}} \le \frac{y_n}{y_{n-1}}$. Înmulţind termen cu termen (lucru posibil seriile fiind strict pozitive), vom obtine:

$\frac{x_2 x_3 ... x_n}{x_1 x_2 ... x_{n-1}} \le \frac{y_2 y_3 ... y_n}{y_1 y_2 ... y_{n-1}}$ sau $\frac{x_n}{x_1} \le \frac{y_n}{y_1}$. Ultima relaţie poate fi scrisă în douîmoduri:

$x_n \le \frac{x_1}{y_1} y_n$ şi $\frac{y_1}{x_1} x_n \le y_n$

Aplicnd acestor relatii teorema 5 punctul a), respectiv punctul b), vom obtine punctele a), b) ale teoremei n cauza$\rfloor$.

Teorema 8 (Criteriul lui Cauchy al condensării sau criteriul lui 2^n)

Daca termenii reali pozitivi ai seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ îndeplinesc condiţia: $x_1 > x_2 > ... > x_n > ... > 0$, atunci seria respectivă va avea aceeaşi natură (este convergentă sau divergentă), după cum seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n z_{2^n}$, este convergentă sau divergentă.

$\lceil$ Fie $s_m = x_1 + x_2 + ... + x_m$ şi aleg $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $m < 2^{n+1}$. În baza ipotezei făcute în teoremă cu referire la monotonie vom putea scrie grupat: $s_m < x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + (x_8 + x_9 + ... + x_{15}) + ... + (x_{2^n} + x_{2^{n+1}} + ... + x_{2^{n+1}-1}) < x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + 2^3 x_{2^3} ... + 2^n x_{2^n} = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k} = s'_n$ şi din convergenţa lui s'_n va rezulta convergenţa lui s_n.

Pentru divergenţă vom alege $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $m > 2^n$ şi vom avea, n baza monotoniei $s_m > s_{2^n} = x_1 + x_2 + ... + x_{2^n} > \frac{1}{2} x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + ... + (x_{2^{n-1}-1} + ... + x_{2^n}) > \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + ... + 2^n x_{2^n}) = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}$ şi divergenţa seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n x_{2^n}$ implică divergenţa seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ $\rfloor$.

Ca aplicaţie vom considera seria generalizată a lui Riemann $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$. Această serie va avea aceeaşi natură ca seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n (\frac{1}{2^n})^\alpha = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^n$, iar aceasta din urmă este seria geometrică care este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi este divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 9 (Criteriul logaritmic):

Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{lnn} = \ell$, atunci:

a) Dacă $\ell > 1$ seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este convergentă

b) Dacă $\ell \leq 1$ seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este divergentă.

$\lceil$ În baza definiţiei limitei date rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ vom avea:

$\ell - \varepsilon < \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{lnn} < \ell + \varepsilon$, sau $lnn^{\ell-\varepsilon} < \ln \frac{1}{x_n} < lnn^{\ell+\varepsilon}$, sau $n^{\ell-\varepsilon} < \frac{1}{x_n} < n^{\ell+\varepsilon}$, sau încă $\frac{1}{n^\ell} n^{-\varepsilon} < x_n < \frac{1}{n^\ell} n^\varepsilon$ şi cum seria cu termenul general $\frac{1}{n^\ell}$ este seria lui Riemann studiata ca aplicatie la teorema 8 va rezulta cu aceasta convergenţa respectiv divergenţa seriei după numărul real $\ell \rfloor$.

Teorema 10(Criteriul lui Abel):

Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este o serie cu şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mărginit (există $M > 0$ astfel ca $|s_n| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$) şi dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pozitive descrescător convergent la zero, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n a_n$ este convergentă.

$\lceil$ Conform criteriului general, teorema 1, va trebui sa evaluăm suma: $|a_{n+1}z_{n+1} + a_{n+2}z_{n+2} + ... + a_m z_m| = |a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + ... + a_m(s_m - s_{m-1})| = |-a_{n+1}s_n + s_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + s_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+3}) + ... + s_{m-1}(a_{m-1} - a_m) + s_m a_m| \leq a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + ... + (a_{m-1} - a_m)|s_{m-1}| + a_m|s_m| \leq M(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + ... + a_{m-1} - a_m + a_m) = 2Ma_{n+1} < \varepsilon(\text{pentru} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0) \rfloor$.

Exemplu: Seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ numită seria lui Leibnitz este convergentă, conform teoremei lui Abel, $z_n = (-1)^n$, $a_n = \frac{1}{n}$ îndeplinind condiţiile respectivei teoreme.

Teorema 13 (Criteriul radacinii al lui Cauchy):

Fie sirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, atunci:

a) Dacă $\limsup |\frac{z_{n+1}}{z_n}| < 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $\liminf |\frac{z_{n+1}}{z_n}| > 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este divergentă.

⌈a) Dacă $\limsup |\frac{z_{n+1}}{z_n}| = r_1 < 1$, atunci pentru un $\varepsilon > 0$ exista un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| < r_1 + \varepsilon$, pentru orice $n > N$. Daca alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $r = r_1 + \varepsilon < 1$ vom avea $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| < r$ sau $|z_{n+1}| < r|z_n < r^2|z_{n-1}| < ... < r^{n-N}|z_N| = Mr^n$ si cu teorema 5, punctul a) rezultă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ absolut convergentă.

b) Dacă $\liminf |\frac{z_{n+1}}{z_n}| = r_2 > 1$, atunci pentru un $\varepsilon > 0$ există un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| > r_2 - \varepsilon$ pentru orice $n > N$. Dacă alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $r = r_2 - \varepsilon > 1$ vom avea $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| > 1$ sau $|z_n| > 1$ şi deci z_n nu converge la zero⌋.

<u>Observatia 1</u>:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât $z_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = r$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă, dacă $0 < r < 1$.

Într-adevăr, în acest caz $\limsup |\frac{z_{n+1}}{z_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = r < 1$.

<u>Observatia 2</u>:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât $z_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = r$, atunci seria este divergentă, dacă $r > 1$.

Într-adevăr, în acest caz $\liminf |\frac{z_{n+1}}{z_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = r > 1$.

<u>Observatia 3</u>:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât $z_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = 1$, atunci criteriul raportului nu dă nici un răspuns asupra convergenţei sau divergenţei seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$.

De exemplu dacă $z_n = \frac{1}{n}$, atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este divergentă, iar $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, iar în cazul $z_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este convergentă, iar $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$.

<u>Teorema 12</u>(Criteriul Raabe-Duhamel):

Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Seria aceasta converge (diverge), daca pentru $n > N \in \mathbb{N}$, avem: $n(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}) = r > 1 (n(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}) \leq 1)$.

⌈ În cazul convergenţei avem, conform ipotezei $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 - \frac{r}{n}, r > 0$.

Cum sirul $(\frac{(1-\frac{1}{n})^r-1}{-\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător iar $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{(1-\frac{1}{n})^r-1}{-\frac{1}{n}}) = r$, rezultă: $\frac{(1-\frac{1}{n})^r-1}{-\frac{1}{n}} \leq r$. Vom avea $(1-\frac{1}{n})^r - 1 \geq -\frac{r}{n}$ şi deci $(1-\frac{1}{n})^r \geq 1-\frac{r}{n}$. Prin urmare: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq (1-\frac{1}{n})^r = \frac{\frac{1}{n^r}}{\frac{1}{(n-1)^r}} = \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Cum seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{r^n}$ este convergentă pentru $r > 1$, conform cu teorema 7 vom avea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ convergentă. Pentru afirmaţia din paranteză(divergenţa) avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1-\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{y_{n+1}}{y_n}$, şi deoarece $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n-1}$ este divergentă rezultă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ divergentă$\rfloor$.

De exemplu seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$, nu poate fi caracterizată cu criteriul raportului deoarece limita raportului este 1, în timp ce cu criteriul Raabe-Duhamel, pentru că avem: $n(1-\frac{(2n+2)(2n=1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n^2+2n}{4(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)} < \frac{1}{2}$,ce ne dă divergenţa.

Teorema 13(Criteriul radacinii al lui Cauchy):

Fie şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, atunci:

a) Dacă $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $\liminf \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este divergentă.

$\lceil$a) Dacă $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} = r_1 < 1$, atunci pentru un $\varepsilon > 0$ exista un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt[n]{|z_n|} < r_1 + \varepsilon$, pentru orice $n > N$. Dacă alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $r = r_1 + \varepsilon < 1$ vom avea $\sqrt[n]{|z_n|} < r$ sau $|z_n| < r^n$ şi cu teorema 4, punctul a) luând $M = 1$, rezulta $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ absolut convergentă. b) Dacă $\liminf \sqrt[n]{|z_n|} = r_2 > 1$, atunci pentru un $\varepsilon > 0$ există un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt[n]{|z_n|} > r_2 - \varepsilon$ pentru orice $n > N$. Dacă alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $r = r_2 - \varepsilon > 1$ vom avea $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$ sau $|z_n| > 1$ şi deci z_n nu converge la zero$\rfloor$.

De exemplu seria $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^5}+...$, are $\limsup \sqrt{|z_n|} = \frac{1}{2}$ şi $\liminf \sqrt{|z_n|} = \frac{1}{3}$ şi este convergentă.

Observatia 1:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ este absolut convergentă, dacă $0 < r < 1$.

Într-adevăr, în acest caz $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r < 1$.

Observatia 2:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r$, atunci seria este divergentă, dacă $r > 1$.

Într-adevăr, în acest caz $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r > 1$.

<u>Observatia 3</u>:

Dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{C}$, este astfel încât $z_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$, atunci criteriul rădăcinii nu dă nici un răspuns asupra convergenţei sau divergenţei seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$.

Analizând criteriile de convergenţă date de teoremele: 6, 7, 10, 11, 12. se observă că aceste criterii sunt de fapt consecinţe ale criteriului comparaţiei (teorema 5), seria majoranta fiind, în cazul teoremei 12 seria geometrică, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n$ de exemlu; înlocuind seria geometrică cu o alta serie vom obţine alte criterii de convergentă şi în mod natural se justifica întrbarea: nu exista un criteriu generel de convergenţă, bazat pe o serie standart, care să rezolve problema convergenţei(sau a divergenţei) a oricarei serii numerice din $\mathbb{C}(\mathbb{R})$?. Răspunsul este negativ, ceeace înseamnă că se pot găsi serii care nu pot fi analizate cu ajutorul criteriilor stabilite anterior.

Vom arăta în continuare că nu există o serie universală de comparaţie.

Fie seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z'_n$ pentru care r_n, r'_n vor fi resturile lor de ordin n. Vom spune că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z'_n$ converge mai lent ca seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{r'_n} = 0$ şi vom arăta că oricărei serii, convergentă i se poate pune în evidentă(corespondentă) o altă serie care converge mai lent decât seria data.

Astfel, luând de exemplu $z'_n = \sqrt{r_{n-1})} - \sqrt{r_n}$ si deoarece $r'_n = z'_{n+1} + z'_{n+2} + ... = \sqrt{r_n}$, rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{\sqrt{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{r_n} = 0$. Dacă am considera seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, drept serie universală, luând seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x'_n$ cu $x'_n = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}$ atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n} = 0$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ $\frac{x_n}{x'_n} < \varepsilon$ dacă $n = N(\varepsilon)$ şi deci $x_n < \varepsilon x'_n$ iar convergenta seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x'_n$ nu poate fi dedusă din convergenta seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

O altă întrebare care se pune în legatură cu criteriile date de teorema 11 si teorema 13 si anume: Care dintre acestea este mai puternic, sau care dintre acestea îl implică pe celalalt.

Dacă de exemplu, vom lua seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a + (-1)^n}{2^{n+1}}$ cu $a \geq 2, z_n = \frac{a+(-1)^n}{2^{n+1}}$ şi calculând $|\frac{z_{n+1}}{z_n}|$ obţinem $|\frac{1}{2}\frac{a+(-1)^{n+1}}{a+(-1)^n}|$ care ia valoarea $|\frac{1}{2}\frac{a+1}{a-1}|$, dacă n este impar şi $|\frac{1}{2}\frac{a-1}{a+1}|$, dacă n este număr par şi deci nu avem limită. Dacă aplicăm criteriul rădăcinii, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n| = \frac{1}{2}}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a-1|} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a+1|} = 1$ şi deci criteriul radăcinii este mai puternic. Invers, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = r$ atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x_n} = r$, care se poate justifica cu ajutorul unei probleme cunoscută din liceu, anume: Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n = a}$, şi luând $a_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, cu $x_0 = 1$, $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_1} ... \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \sqrt[n]{x_n}$.

O serie cu termeni reali se numeşte serie alternată dacă orice doi termeni consecutivi ai ei sunt cu semne contre; putem preciza: pentru $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$: $x_{2n-1} > 0$, iar $x_{2n} < 0$ sau $x_{2n} > 0$, iar $x_{2n-1} < 0$.

Pentru seriile alternate vom avea:

Teorema 14(Leibniz):

Dacă în seria alternată $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ avem:

$|x_1| \geq |x_2| \geq ... \geq |x_n| \geq ... \geq 0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci:

Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este convergentă şi

$$|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n| \leq |x_1| \tag{1.19}$$

⌈Presupunem că ne aflăm în cazul $x_{2n-1} > 0$, iar $x_{2n} < 0$. Notând cu: $a_1 = x_1, a_2 = -x_2, a_3 = x_3, a_4 = -x_4, ...$, obtinem şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n > 0$ şi $a_1 > a_2 > ... > a_n > ... > 0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ se va scrie acum sub forma:

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} a_n$ Lu ând n consideraţie sumele parţiale vom avea:

$s_1 = x_1 = a_1$

$s_3 = x_1 + x_2 + x_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - (a_2 - a_3) < a_1 = s_1$

$s_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_3 - (a_4 - a_5) < s_3$

....

Vom avea deci: $s_1 > s_3 > ... > a_{2n-1} > ... > 0$ ţi deci ţirul $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător şi mărginit, deci convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = a > 0$. Cum $s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 0$ vom avea $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = a$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Iar, cum $s_{2n-1} \leq s_1 = a_1 = x_1$ prin trecere la limită vom avea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq x_1$.

Dacă ne situam n cazul $x_{2n} > 0$, iar $x_{2n-1} < 0$, vom nota cu:

$a_1 = x_1, a_2 = -x_2, a_3 = x_3, a_4 = -x_4, ...$, obţinem şirul: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n < 0$ şi $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq 0$ iar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. În acest caz avem:

$s_2 = x_1 + x_2 = a_1 - a_2 < 0$,

$s_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = s_2 + (a_3 - a_4) > s_2$,

$s_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = s_4 + (a_5 - a_6) > s_4$,

....

Prin urmare vom avea:

$s_2 \leq s_4 \leq ... \leq s_{2n} \leq ... \leq 0$, şi deci şirul $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton descrescător si mărginit, deci convergent, fie $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = b < 0$

Cum $s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1}$ şi $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$ vom avea $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = b$ şi deci $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Iar, cum $s_{2n} \geq s_2 = x_1 + x_2 = -a_1 + a_2 > -a_1 = x_1$ vom avea prin trecere la limită $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \geq x_1$ sau $-\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq -x_1$. Condensat cele două rezultate ne vor conduce la 1.19⌋.

Ţinând seama de această teoremă vom putea evalua eroarea ce apare când se aproximează suma unei serii alternate convergente printr-o suna parţială s_n.

Astfel, deoarece, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ este tot o serie alternată vom avea $|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k| \leq |x_{n+1}|$ ceeeace face ca să avem evaluarea erorii $|s - s_n| < |x_{n+1}|$ şi deci:

Eroarea ce se face înlocuind s prin s_n este inferioară primului termen în valoare absolută din restul seriei.

Ca exemplu important de aplicare a teoremei lui Leibnitz vom lua seria armonică alternata, adică seria:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ...$$

care verifică ipotezele teoremei 14 deci este convergentă. Se arată că seria are suma $\ln 2$.

Se poate constata că seria armonică alternată nu este absolut convergentă, deoarece seria modulelor coincide cu seria armonica despre care ştim că este divergentă.

Se poate constata că seria armonică alternată nu este absolut convergentă, deoarece seria modulelor coincide cu seria armonică despre care ştim că este divergentă.

Vom introduce astfel notiunea de serie semi-convergentă, întelegând prin aceasta o serie care este convergentă şi nu este absolut convergentă. Seriile semi-convergente au unele proprietăţi deosebite astfel, proprietatea de însumare în orice ordine a termenilor unnei sume infinite de numere reale nu mai este valabilă. De exemplu în cazul seriei armonice alternate, prin permutarea unor termeni ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ se poate obţine de exemplu seria:

$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+...+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n})+...$

Evident această ultimă serie are aceeaşi termeni altfel ordonaţi. Însumând primii doi termeni din parantezele seriei armonice alternate vom avea notând cu s suma seriei armonice alternate:

$s=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+...+(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n})+...$
$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...)=\frac{1}{2}s$, deci $s=\frac{1}{2}s$, ceeace este absurd.

Aceasta înseamnă că cel puţin în cazul seriei armonice alternate modificarea ordinii termenilor este interzisă. Acest rezultat se poate extinde la orice serie semi-convergenta, fiind valabila urmatoărea teoremă:

Teorema 15(Riemann):

Dacă seria cu termeni reali $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este semi-convergentă, atunci pentru orice $r\in\mathbb{R}$, se poate considera o astfel de permutare a termenilor seriei astfel încât noua serie obţinută să fie convergentă si să aibe suma r.

⌈ În primul rând seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ semi-convergentă dată conţine o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi, deoare dacă ar avea de exemplu numai un număr finit de termeni negativi prin eliminarea lor se obţine o serie care va avea termeni pozitivi şi care va fi convergentă ca şi seria iniţiala, or o serie cu termeni pozitivi dacă este convergentă ea este absolut convergentă, ceeace contrazice ipoteza de serie semi-convergentă. Să notăm prin $a_1,a_2,...,a_n,...$, termenii pozitivi şi prin $b_1,b_2,...,b_n,...$, modulul termenilor negativi. Suntem conduşi la seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ cu termeni pozitivi care vor fi divergente(au sumele egale cu $+\infty$). Într-adevăr dacă $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt sumele parţiale ale acestor serii, atunci $s_{2n}=s'_n-s''_n$ dacă $s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n} x_k$ şi deci $s=\lim_{n\to\infty} s_{2n}=\lim_{n\to\infty} s'_n-\lim_{n\to\infty} s''_n$, iar dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este semi-convergentă $\lim_{n\to\infty} s'_n+\lim_{n\to\infty} s''_n=+\infty$

Din divergenţa în cauză rezultă că însumnd un număr convenabil de termeni atât din seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ cât şi din seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ se poate depăşi orice număr r real pozitiv dorim.

Fie $a_1+a_2+...+a_{n_1}>r$ (presupunem r¿0). Să scădem acum suma $b_1+b_2+...+b_{n_2}$ astfel ca să avem $a_1+a_2+...+a_{n_1}-b_1-b_2-...-b_{n_2}<r$.

Vom aduna acum în primul termen al ultimei inegalităţi termenii pozitivi $a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+...+a_{n_3}$ astfel să avem: $a_1+a_2+...+a_{n_1}-b_1-b_2-...-b_{n_2}+a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+...+a_{n_3}>r$, iar apoi vom scădea $b_{n_2+1}+b_{n_2+2}+...+b_{n_4}$ astfel ca să avem: $a_1+a_2+...+a_{n_1}-b_1-b_2-...-b_{n_2}+a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+...+a_{n_3}-$

$b_{n_2+1} - b_{n_2+2} - ... - b_{n_4} < r$ şi se continua acest procedeu. Evident se obţine o nouă serie în care intervin absolut toţi termenii seriei iniţiale şi mai rămâne de arătat că suma seriei nou construită este r. Pentru aceasta vom nota cu:

$\alpha_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}$
$\alpha_2 = b_1 + b_2 + ... + b_{n_2}$
$\alpha_3 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_3}$
$\alpha_4 = b_{n_2+1} + b_{n_2+2} + ... + b_{n_4}$
....

Seria nouă construită va fi de fapt seria alternată:

$\alpha 1 - \alpha 2 + \alpha 3 - a\alpha + ... = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\alpha_n,$

iar dacă vom nota cu σ_n termenul general al sirului sumelor sale partiale avem conform celor prezentate:

$$\sigma_{2n-1} < r < \sigma_{2n} \tag{1.20}$$

În baza teoremei lui Leibnitz, deoarece din convergenta seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ putem presupune $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > ... > \alpha_n > ... > 0$ şi deci $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$; trcând la limita în dubla inegalitate (1.20) avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n-1} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n}$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = r\rfloor$.

Dacă seria este absolut convergentă modificarea de însumare a termenilor în această serie nu modifică suma seriei; cu alte cuvinte proprietatea de comutativitate a termenilor valabilă în cazul sumelor finite de numere se extinde şi la serii, însă nu la serii oarecare ci numai la serii absolut convergente. Vom mai da următorul rezultat:

Teorema 16(Cauchy):

Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ din $\mathbb{C}$, este absolut convergentă atunci orice altă serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$, în care termenii provin dintr-o permutare oarecare a termenilor primei serii, este de asemeni absolut convergenta şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$.

$\lceil$ Fie p o permutare a numerelor $\{1, 2, 3, ..., N\} = B$, unde $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pentru $\varepsilon > 0$ cel care asigura absolut convergenţa seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ (deci pentru $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} z_k < \varepsilon$). Fie $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca multimea $\{p(1), p(2), p(3), ..., p(n_0)\} = A$ să conţină mulţimea B, deci $B \subset A$ (posibil pentru ca $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este bijectivă) si să notăm cu $w_k = z_{p(k)}, k \in \mathbb{N}$. În această situaţie în seria $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |w_k|$ intră termeni din seria cu termenii

$|z_{N+1}|, |z_{N+2}|, \ldots$ si dacă adăugăm termenii care lipsesc rezultă: $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |w_k| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |z_k| < \infty$ ceeace înseamnă că seria este absolut convergentă.

Considerând acum $r \in \mathbb{N}$, $r \geq n_0$ si $s \in \mathbb{N}$ $s \geq n_0$ vom avea: $|\sum\limits_{j=1}^{r} w_j - \sum\limits_{k=1}^{s} z_k| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{n_0} |z_k| \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$ pentru orice r şi s (deoarece cele doua serii au termeni comuni care vor dispare ramânând numai cei care conduc la sumă. Pentru $r, s \to \infty$ se obţine $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} w_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z_n \rfloor$.

Ne vom ocupa pe scurt de problema posibilităţii adunării, înmulţirii cu un număr complex şi a înmulţirii termen cu termen a seriilor de numere complexe.

Astfel fie seriile $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z_n, \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z'_n$, $z_n, z'_n \in \mathbb{C}$ două serii convergente având sumele s, s'.

Prin suma celor doua serii vom înţelege seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} w_n$, unde $w_n = z_n + z'_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin produsul seriei $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z_n$ cu un numar complex $\alpha \in \mathbb{C}$, vom înţelege seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} w'_n$ cu $w'_n = \alpha z_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin produsul formal al seriilor $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z_n$ si $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z'_n$ vom înţelege seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} w''_n$ unde:

$w''_1 = 0,$
$w''_2 = z_1 z'_1,$
$w''_3 = z_1 z'_2 + z_2 z'_1,$
$w''_4 = z_1 z'_3 + z_2 z'_2 + z_3 z'_1,$
$w''_5 = z_1 z'_4 + z_2 z'_3 + z_3 z'_2 + z_4 z'_1,$
....,
$w''_n = z_1 z'_{n-1} + z_2 z'_{n-2} + \ldots + z_{n-2} z'_2 + z_{n-1} z'_1,$
....

În legatură cu acestea vom da următoarea teoremă:

Teorema 17:

a) Seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} w_n$ este convergentă şi are suma $s + s'$.

b) Seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} z'_n$ este convergentă şi are suma as.

c) Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z''_n$ este convergentă şi are suma ss'.

⌈ a) Fie $\sigma_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$ atunci $\sigma_n = s_n + s'_n$ şi $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s'_n$ adică $\sigma = s + s'$.

b) Fie $s'_n = w'_1 + w'_2 + ... + w'_n$ atunci $s'_n = \alpha s_n$ şi $\lim_{n\to\infty} \sigma'_n = \lim_{n\to\infty} \alpha z_n$ adică $\sigma' = as$.

c) Fie $\sigma''_n = w''_1 + w''_2 + ... + w''_n$ şi fie $s''_n - s_{n-1}s'_{n-1} = (w''_1 + w''_2 + ... + w''_n) - (z_1+z_2+...+z_{n-1})(z'_1+z'_2+...+z'_{n-1}) = (z_1z'_1+z_1z'_2+z_2z'_1+z_1z'_3+z_2z'_2+z_3z'_1+z_1z'_4+z_2z'_3+z_3z'_2+z_4z'_1+..+z_1z'_{n-1}+z_2z'_{n-2}+...+z_{n-1}z'_1) - (z_1z'_1+z_1z'_2+...+z_1z'_{n-1}+z_2z'_1+z_2z'_2+...+z_2z'_{n-1}+...+z_{n-1}z'_1+z_{n-1}z'_2+...+z_{n-1}z'_{n-1})$

Pentru a lămurii această evaluare vom considera cazurile particulare n=1, 2, 3, 4, 5:

$\sigma''_1 - s_0s'_0 = 0$

$\sigma''_2 - s_1s'_1 = z_1z'_1 - z_1z'_1$

$\sigma 3'' - s_2s'_2 = z_1z'_1 + z_1z'_2 + z_2z'_1 - (z_1 + z_2)(z'_1 + z'_2) = z_2z'_2.$

$\sigma''_4 - s_3s'_3 = z_1z'_1+z_1z'_2+z_2z'_1+z_1z'_3+z_2z'_2+z_3z'_1-(z_1+z_2+z_3)(z'_1+z'_2+z'_3) = -z_2z'_3 - z_3z'_2 - z_3z'_3.$

$\sigma''_5 - s_4s'_4 = z_1z'_1+z_1z'_2+z_2z'_1+z_1z'_3+z_2z'_2+z_3z'_1+z_1z'_4+z_2z'_3+z_3z'_2+z_4z'_1 - (z_1+z_2+z_3+z_4)(z'_1+z'_2+z'_3+z'_4) = -z_2z'_4 - z_3z'_3 - z_3z'_4 - z_4z'_2 - z_4z'_3 - z_4z'_4.$

Se poate trage concluzia că:

$\sigma''_n - s_{n-1}s'_{n-1} = -z_2z'_{n-1} - z_3z'_{n-2} - z_4z'_{n-3} - ... - z_{n-1}z'_{n-1} = -S$

Am notat prin $S = \sum_{j\geq 2, n-1\geq j, n<i+j}^{\infty} z_iz'_j$

Avem $|S| = |\sum_{j\geq 2, n-1\geq j, n<i+j}^{\infty} z_iz'_j| \leq \sum_{j\geq 2, n-1\geq j, n<i+j}^{\infty} |z_i||z'_j| \leq \sum_{\frac{n-1}{2}<i\leq n-1} |z_i| \sum_{j=1}^{\infty} |z'_j| + \sum_{\frac{n-1}{2}<j\leq n-1} |z'_j| \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|$

Cum $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z'_n$ sunt absolut convergente putem determina un $N = N(\varepsilon)$ astfel ca:

$\sum_{k>\frac{N}{2}} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2s'}$, $\sum_{k>\frac{N}{2}} |z'_n| < \frac{\varepsilon}{2s}$

şi atunci:

$|\sum_{p=1}^{N+1} w_p - (\sum_{k=1}^{N} z_k)(\sum_{k=1}^{N} z'_n)| \leq \sum_{\frac{N}{2}<k} |z_k| \sum_{k=1}^{n} |z'_k| + \sum_{\frac{N}{2}<k} |z'_k| \sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq s'\frac{\varepsilon}{2s'} + s\frac{\varepsilon}{2s} = \varepsilon$, ceeace pentru $N\to\infty$ conduce la egalitatea $\sum_{n\in\mathbb{N}} w''_n = ss'$. În plus din

calculele anterioare se deduce convergenţa seriilor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(\sum\limits_{i+j=n}|z_i||z'_j|)$ şi absolut convergenţa $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w''_n]$.

Această teoremă rămâne valabilă chiar dacă numai una din serii este absolut convergentă cealalta fiind doar convergentă, dar nu e valabilă în cazul convergenţei neabsolute a celor două serii.

Aplicatie:

$z_n = x^{n-1}$, $z'_n = x^{n-1}$ atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w''_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^{n-1}$, pentru $0 < x < 1$.

1.6 Calculul numeric al sumei seriilor.

Sunt rare cazurile când se poate calcula exact suma unei serii convergente. În practică ne vom mulţumi să calculăm suma unei serii cu o aproximaţie stabilită apriori.

Pentru seriile cu termeni pozitivi vom folosi notaţiile:

$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$,

$s - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... = r_n$,

r_n reprezintă restul seriei şi reprezintă în cazul când seria este convergentă eroarea comisă înlocuind pe s prin s_n. Dacă pentru recunoaşterea convergenţei seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ne-am putut servi de criteriu raportului a lui D'Alambert, vom avea:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < k < 1$, pentru $n > N(\varepsilon)$ şi deci:

$x_{n+1} < kx_n$, $x_{n+2} < kx_{n+1} < k^2 x_n$,...

de unde rezultă:

$r_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... < (k + k^2 + ...)x_n = \frac{kx_n}{1-k}$.

Impunnd un $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic astfel încât $r_n < \varepsilon$ deci lund $\frac{kx_n}{1-k} = \varepsilon$ vom determina din această ultimă relaţie n pentru care s_n aproximează s cu eroarea ε.

Dacă pentru stabilirea convergentei seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ne-am putut servi de criteriu rădăcinii, a lui Cauchy, am avea:

$\sqrt[n]{x_n} < \ell < 1$ şi deci $x_n < \ell^n$, pentru $n > N(\varepsilon)$ vom avea:

$r_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... < \ell^{n+1} + \ell^{n+2} + ... = \frac{\ell^{n+1}}{1-\ell}$.

Aceste limitări ale restului ne indică la ce rang n trebuie să ne oprim în calcul pentru ca suma s_n să aproximeze pe s cu o eroare mai mica ca un numar pozitiv ε dat.

Pentru serii semi-convergente vom recomanda o metodă de creştere mai rapidă a convergenţei numită ,, metoda lui Euler".

Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n-1}z_n{=}x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+...+(-1)^{n-1}x_n+...$ convergentă, cu $x_n>0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, şi $x_1>x_2>...>x_n>...>0$ atunci seria:

$\frac{x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}+\frac{x_3-x_2}{2}-\frac{x_4-x_3}{2}+\frac{x_5-x_4}{2}-\frac{x_6-x_5}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x_n-x_{n-1}}{2}+...$ este şi ea convergentă şi are suma cât prima.

Dacă notăm cu x'_n termenii pozitivi ai seriei obţinute avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r'_n}{r_n}=0$ $(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x'_n}{x_n}=0)$ si $s'_n-s_n=(-1)^n\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\to 0$

Exemplu:

Seria $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$ este slab convergentă. Pentru calculul ei cu 3 zecimale exacte sunt necesari 999 termeni ai seriei. Aplicând transformarea lui Euler, se obţine o serie nouă şi anume:

$\ln 2=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}-1}{2}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{2}+\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{2}-\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{5}}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}}{2}+...=$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{40}-\frac{1}{60}+\frac{1}{84}-...+(-1)^n\frac{1}{2n(n-1)}+...$ care este mai rapid convergentă după cum se poate uşor constata.

Capitolul 2

Şiruri şi serii de funcţii

2.1 Scurtă introducere în subiect

Vom avea în vedere unele aspecte ale teoriei seriilor şi şirurilor de funcţii de o variabilă. Acestea apar în diverse situaţii teoretice şi practice când o funcţie este exprimată ca o limită a unui şir de funcţii care sunt mai simple decât funcţia dată. În acest sens vom avea seriile Taylor în care esenţială va fi noţiunea de convergenţă uniformă.

2.2 Şiruri de funcţii reale

Fie o submultime $\mathbb{A}$ din $\mathbb{R}$ şi pentru orice număr natural n fixat funcţia:

$f_n : \mathbb{A} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge punctual(sau simplu) pe mulţimea $\mathbb{A}_c \sqsubseteq \mathbb{A}$ către funcţia $f : \mathbb{A}_c \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ dacă:

Pentru orice $x \in \mathbb{A}_c$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Aceasta se mai scrie: $f_n(x) \overset{s}{\to} f(x)$

Şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe o multime $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}_c$ către funcţia f dacă:

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in \mathbb{B}$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Aceasta se mai scrie: $f_n(x) \overset{u}{\to} f(x)$.

Diferenţa calitativă între cele două noţiuni de convergenţă va rezulta din transcrierea definiţiei convergenţei simple(punctuale).

Astfel şirul converge în fiecare punct(simplu) pe mulţimea $\mathbb{A}_c$ către funcţia f dacă:

Pentru orice $x \in \mathbb{B}$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon, x)$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Aşadar, în cazul convergentei simple rangul N depinde atât de ε cât şi de punctul x, $x \in \mathbb{A}_c$ pe când în cazul convergenţei uniforme pe $\mathbb{B}$(care este o convergenţa globală), rangul N depinde doar de $\varepsilon > 0$, fiind acelaşi pentru toate punctele lui $\mathbb{B}$.

Fie şirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde:

$$a_n = \sup_{x \in \mathbb{B}} |f_n(x) - f(x)| \tag{2.1}$$

Vom da o condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii.

Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{B}$, $f_n(x) \xrightarrow{u} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

$\lceil$ Demonstraţia rezultă din definiţia (2.1) şi a definiţiei uniform convergenţei.

Astfel din din (2.1) rezulta că pentru orice $x \in \mathbb{B}$:

$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x \in \mathbb{B}} |f_n(x) - f(x)| = a_n \rfloor$

Din definiţia uniform convergenţei rezultă că un şir uniform convergent în fiecare punct al acestei mulţimi va fi convergent în fiecare punct al acelei mulţimi, reciproca nu este adevarată.

Exista şiruri de funcţii convergente în fiecare punct al unei mulţimi dar care nu sunt uniform convergente pe acea mulţime, după cum vom vedea în următorul exemplu:

Dacă: $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$ avem: $f_n(x) = \frac{2\frac{x}{n}}{x^2+\frac{1}{n^2}} \to 0$

Să calculăm numerele date de:

$\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = f_n(\dfrac{1}{n}) = 1$, deoarece: $f_n'(x) = \frac{2n(1+n^2x^2)-4n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$ şi f_n' se anulează pentru $x = \frac{1}{n}$ care este punct de maxim în $[0,1]$ pentru $f_n(x)$. Deci şirul cu termenul general a_n are limita 1 nu 0 aşa cum ar trebui pentru uniform convergenţă.

Convergenţa punctuală a unui şir de funcţii pe o mulţime este o proprietate mult prea generală pentru a o aplica în diverse situaţii concrete. Convergenţa uniformă este un tip de convergenţă mai specială care are numeroase aplicaţii teoretice şi practice.

Modul concret de obţinere a unor informaţii privind convergenţa unui şir de funcţii pe mulţimea $\mathbb{A}_c$ este următorul:

Se presupune x fixat în $\mathbb{A}_c$ când şirul $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ va fi un şir numeric căruia i se află limita, obtinându-se (când parcurge multimea $\mathbb{A}_c$ functia f. Apoi se investighează (utilizând de exemplu teorema 1) dacă există submultimi ale lui $\mathbb{A}_c$ în care convergenţa şirului f_n către f este uniformă.

Teorema 2(Criteriul Cauchy):

$f_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$, $x \in \mathbb{B}$ dacă şi numai dacă:

$(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)m > n \geq N$ să avem: $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$\lceil$ Fie $\varepsilon > 0$ dat $(\exists)N = N(\varepsilon)(\forall)x \in \mathbb{B}$, $(\forall)k \geq N$ avem $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| < |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Reciproc fie $x \in \mathbb{B}$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental şi $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sau $f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. Pentru $n \to \infty$ avem: $f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le f(x) \le f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. Deci $|f_m(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $(\forall) m \ge N$ unde N depinde doar de $\varepsilon\rfloor$.

2.3 Proprietăţi ale şirurilor de funcţii uniform convergente

Proprietatea 1:

Un şir uniform convergent de funcţii continue are ca limită o funcţie continuă.

$\lceil$ Fie $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ cu valori în $\mathbb{R}$, iar fiecare f_n continuă, şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergent la f. Pentru orice doua puncte $x, x_0 \in [a,b]$ putem scrie: $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \le 3\varepsilon$, pentru $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ deoarece $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $x \in [a,b]$, deci şi $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ iar $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$ şi $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$. Aceasta arată că funcţia f este continuă în $x_0\rfloor$.

Proprietatea 2:

Fie şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $f(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi şirul construit din derivate $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergent la $g(x)$. În aceste condiţii $g(x) = f'(x)$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

$\lceil$ Trebuie să demonstrăm, mai întâi, că f este derivabilă în (a,b). Fie $x_0 \in (a,b)$:

$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x)| \le |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}| + +|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x)| + |f_n'(x_0) - g(x_0)|$ pentru $|x - x_0| < \eta(x_0, \varepsilon)$. Vom arăta că: $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}| < \varepsilon$. Pentru aceasta considerăm inegalitatea:

$|\frac{(f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_0))-(f_n(x)+f_n(x_0))}{x-x_0}| \le |f_{n+p}'(c) - f_n'(c)|$,

pentru $n > n(\varepsilon)$ şi pentru $p \in \mathbb{N}$ (s-a aplicat criteriul general Cauchy de convergenţă uniformă pentru şirul $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $|x_0 - c| < |x - c|$ Când $p \to \infty$, cum $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent obtţnem:

$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_n(x)-f_n(x0)}{x-x_0}| < \varepsilon$, pentru $n > n(\varepsilon)$

Din derivabilitatea func ţiilor din şir rezultă că:

$|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)| < \varepsilon$, pentru $|x - x0| < \mu(\varepsilon, x_0)\rfloor$.

Proprietatea 3:

Fie $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii uniform convergent la $f(x)$, $f_n(x)$ continue pe $[a,b]$. În aceste condiţii şirul de funcţii $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ converge uniform la $\int_a^x f(t)dt$.

⌈ Pentru demonstraţie vom pune în evidenţa inegalitatea: $|g_n(x) - \int_a^x f(t)dt| \leq |\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq \varepsilon|x-a| < \varepsilon|b-a|$, pentru orice $x \in [a,b]$ şi pentru $n > n(\varepsilon)$⌋.

2.4 Serii de funcţii.

Considerăm şirul de funcţii $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{A} \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), (\forall)n \in \mathbb{N}$. În mod asemănător construcţiei seriilor numerice vom costrui seria de funcţii luând:

$$f_1(x) + f_2(x) = ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \tag{2.2}$$

Se formează, la fel ca la şirurile numerice, şiruul sumelor parţiale: $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$.

Se notează cu $\mathbb{A}_c \sqsubseteq \mathbb{A}$ mulţimea punctelor din A în care seria (2.2) este convergentă adică pentru un x_0 fixat în $\mathbb{A}$ seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, este convergentă adică şrul $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Seria de funcţii (2.2) este uniform convergentă pe mulţimea $\mathbb{B} \in \mathbb{A}_c$ dacă $s_n(x) \xrightarrow{u} s(x)$ iar $s(x)$ va fi suma seriei (2.2).

Exemple:

1° Dacă $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ va fi convergentă dacă $|x| < 1$ deci $\mathbb{A}_c = (-1,1)$ iar $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ este uniform convergentă dacă $x \in \mathbb{B}_a = [-a,a]$ cu $a \in (0,1)$. aceasta pentru că şirul cu termenul general $a_n = \sup_{-a\leq x\leq a} |s_n(x) - s(x)| = \sup_{-a\leq x\leq a} |x^{n+1} + x^{n+2} + ...| = \sup_{-a\leq x\leq a} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \to 0$

2° $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \begin{cases} 1 + x^2, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \text{ , dacă } x = 0 \end{cases}$$

Sa calculăm acum termenul general al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$s_n(x) - s(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}(1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + ...) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, rezulta $a_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{(1+x^2)^n} = 1$

Prin urmare şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu tinde la 0 şi seria respectivă nu este uniform convergentă. Seria este uniform convergentă pe orice interval ce nu conţine originea. Evaluarea lui a_n sa făcut pe baza faptului că $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ este descrescătoare.

3° $f_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ dar nu este absolut convergent pe $\mathbb{R}$.

Aşadar între convergenţa absolută şi uniform convergenţă nu există o relaţie de implicare.

Cu ajutorul criteriilor de convergenţă de la seriile numerice putem obţine criterii de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii. Astfel avem:

$I°$ Criteriul lui Cauchy:

Seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ este uniform convergentă pe mulţimea $\mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}$ dacă:

$(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)N = N(\varepsilon)$ a. î. $(\forall)n, m \in \mathbb{N}$ $n > m \geq N$ $|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + ... + f_n(x)| < \varepsilon$.

$\lceil$ Demonstraţia rezultă din teorema 2, pentru că $s_m(x) - s_n(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + ... + f_n(x)\rfloor$.

$II°$Criteriul lui Weierstrass:

Dacă $|f_n(x)| \leq Ma_n$, pentru orice $n \geq n_0, M > 0$, $(\forall)x \in \mathbb{B}$, iar seria numerică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ este uniform convergentă pe mulţimea $\mathbb{B}$.

$\lceil$ Demonstratia rezulta din $I°\rfloor$.

Proprietăţile seriilor de funcţii uniform convergente sunt date de:

Teorema 3:

i) Continuitatea sumei. Dacă $f_n(x)$ sunt continue pe $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ este uniform convergentă pe mulţimea $\mathbb{B}$, atunci suma seriei $s(x)$ va fi continuă pe $\mathbb{B}$.

ii) Integrarea termen cu termen. Dacă se verifică ipotezele de la punctul i) pe intervalul $[a, b] \subseteq \mathbb{B}$ atunci simbolurile $\int$ şi $\sum$ sunt permutabile adică:

$$\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_a^b f_n(x)dx) \tag{2.3}$$

iii) Derivarea termen cu termen. Dacă funcţiile $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ verifică ipotezele: 1) $(\exists)x_0 \in [a, b]$ pentru care seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge şi are suma $s_0 = s(x_0)$.

2) $f_n(x)$ are derivata continuă în $[a,b](\forall)n \in \mathbb{N}$.

3) Seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ iar suma ei $s(x)$ este derivabilă pe (a,b) iar derivata ei $s'(x)$ fiind continuă pe $[a,b]$ şi este valabilă egalitatea:

$$\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(f_n(x)) \tag{2.4}$$

(deci operatiile $\frac{d}{dx}$ şi $\sum$ sunt permutabile).

⌈ Justificarea se face ţinând cont de cele trei proprietăţi ale şirurilor uniform convergente, care se vor aplica şirurilor sumelor parţiale ⌋.

2.5 Serii de puteri.

Prin serie de puteri centrată în $z_0 \in \mathbb{C}$ se înţelege o serie de forma:

$$\alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + ... + \alpha_n(z-z_0)^n + ...sau, \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(z-z_0)^n \tag{2.5}$$

în care numerele $\alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt numite coeficienţii seriei iar $z, z_0 \in \mathbb{C}$. În cazul $\alpha_n = a_n \in \mathbb{R}$, iar $x, x_0 \in \mathbb{R}$. vom avea:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...sau, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n \tag{2.6}$$

care se numeşte serie de puteri reală.

Dacă în seria de puteri se dă o valoare lui z se obţine o serie numerică şi deci trebuieşte rezolvată problema convergenţei. Este evident că pentru anumite valori ale lui z seria (2.5) este convergentă, iar pentru altele divergentă. Problema fundamentală din teoria seriilor de puteri este aceea de a determina mulţimea punctelor z din $\mathbb{C}$ pentru care seria (2.5) este convergentă sau divergentă. În orice caz pentru $z = z_0$ se obţine întodeauna suma egală cu a_0 şi deci mulţimea punctelor de convergenţă a seriei de puteri (2.5) nu este vidă. Notând cu $\mathbb{D} \in \mathbb{C}$ mulţimea punctelor de convergenţă pentru seria (2.5), deoarece pentru orice $z \in \mathbb{D}$ seria (2.5) este convergentă se determină un număr complex(suma seriei (2.1)) va rezulta că această serie va defini o funcţie $s : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ cu $s(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(z-z_0)^n$.

Vom da următoarea teoremă:

<u>Teorema 4</u>: Dacă se defineste $R \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ prin:

$R = 0$, dacă şirul $(\sqrt[n]{|\alpha_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$, dacă $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} \neq 0$ (practic este > 0)

$R = +\infty$, dacă $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0$,

atunci seria de puteri(2.5) converge pentru orice z ce verifică $|z - z_0| < R$ şi diverge pentru orice z astfel încât $|z - z_0| > R$

$\lceil$ Fie $z \neq z_0$ fixat, atunci $\sqrt[n]{|\alpha_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \sqrt[n]{|\alpha_n|}$.

Dacă şirul $(\sqrt[n]{|\alpha_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit, va rezulta $\limsup |z - z_0| \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \infty$ şi seria de puteri va fi divergentă.

Deoarece $\limsup |z-z_0| \sqrt[n]{|\alpha_n|} = |z-z_0| \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}$, pentru $|z-z_0| \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1$, adică pentru $|z - z_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}} = R$, seria de puteri(2.5) va fi absolut convergentă, conform cu criteriul rădăcinii iar pentru $|z - z_0| > R$ seria este divergentă conform aceluiasi criteriu.

Daca $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0$, avem $|z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0 < 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, adică seria de puteri este absolut convergenta în $\mathbb{C}\rfloor$.

Numărul real $R \neq 0$ pus in evidenţă de teorema 4 adică:

$R = \frac{1}{\ell}$ (cu $\ell = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}$), se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri (2.5).

Semnificaţia geometrică a teoremei 4 este următoarea: $|z-z_0| = R$ reprezintă cercul cu centrul în punctul z_0 şi de raza R.

Acest cerc împarte planul complex în două. În interiorul cercului $|z-z_0| < R$, deci în discul de raza R, seria(2.5) este absolut convergentă iar în exteriorul cercului $|z - zo| > R$ seria este divergentă. Pentru punctele z situate pe cercul $|z - z_0| = R$ teorema 4 nu face nici o precizare.

Cu exemplele următoare vom vedea că pe cercul în discuţie putem avea fie convergenţă fie divergenţă într-un punct sau chiar în toate punctele circumferinţei.

Exemple:

1° Fie seria: $1 + 2(z - z_0) + 3(z - z_0)^2 + ... + n(z - z_0)^n + ...$ Aceasta are $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n+1}} = 1$ şi deci este absolut convergentă în $|z - z_0| < 1$ şi este divergentă în $|z - z_0| > 1$.

Când $|z - z_0| = 1$, de exemplu pentru $z - z_0 = 1$ vom avea: $1 + 2 + 3 + ... + n + ...$,deci, seria este divergentă, iar pentru $z-z_0 = -1$ vom avea: $1-2+3-...$ seria este divergentă.

2° $1 + \frac{z-z_0}{1^2} + \frac{(z-z_0)^2}{2^2} + ... + \frac{(z-z_0)^n}{n^2} + ...$ are la fel $R = 1$, iar pentru $|z - z_0| = 1$ adică pentru $z - z_0 = cos\varphi + isin\varphi$ $\varphi \in \mathbb{R}$, seria se transformă în: $1 + \frac{\cos\varphi}{1^2} + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + ... + \frac{\cos n\varphi}{n^2} + ...+$ i$(\frac{\sin\varphi}{1^2} + \frac{\sin 2\varphi}{2^2} + ... + \frac{\sin n\varphi}{n^2} + ...)$ şi deci o serie convergentă (fiecare componentă a seriei este o serie reală convergentă jusrificata cu criteriu comparatiei ($|\frac{\cos n\varphi}{n^2}| < \frac{1}{n^2}, |\frac{\sin n\varphi}{n^2}| < \frac{1}{n^2}$).

În cazul seriilor reale (2.6) discul $|z - z_0| < R$ se înlocuieşte cu intervalul centrat $(x_0 - R, x_0 + R)$ putându-se adăuga de la caz la caz punctele $x_0 - R$,

$x_0 + R$.

3° Pentru seria: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x-1}{3\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^2}{5\cdot 2^3}+...+\frac{(x-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2^n}+...$ $\ell = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}} = \frac{1}{2}$. Prin urmare $R = 2$, deci în intervalul $|x-1| < 2$ seria este absolut convergentă adică pentru $-2 < x-1 < 2$ sau $-1 < x < 3$.

Pentru $x = -1$, vom avea seria numerică: $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2} + ...$, este convergentă(serie Leibnitz).

Pentru $x = 3$, vom avea seria numerică: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2}+...$, care este divergentă(serie ce poate fi comparabilă la limită cu seria $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...$)

Deşi teorema 4 rezolvă aproape definitiv problemele legate de mulţimea punctelor de convergenţă nu este prea comodă în aplicaţii, în determinarea efectivă a razei de convergenţă, deoarece găsirea limitei superioare este uneori dificilă. Uneori R poate fi determinat prin intermediul altor formule. Una dintre acestea se obţine aplicând criteriul raportului. Avem astfel:

Teorema 5:

Dacă $a_n \neq 0$, atunci:

$R = 0$, dacă şirul $(|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.

$R = \limsup |\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|$, dacă şirul $(|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita superioară $\neq 0$.

$R = \infty$, dacă şirul $(|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita superioară $= 0$.

$\lceil$ Justificarea acestei teoreme se face aplicând criteriul raportului de la serii considerând termenul general $u_n = a_n(z-z_0)^n \rfloor$.

Odată cu seriile de puteri pozitive pot fi considerate şi serile cu puteri negative ale lui $(z - z_0)$ adică serii de forma:

$$\frac{\beta_1}{z-z_0} + \frac{\beta_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{\beta_n}{(z-z_0)^n} + ... = \beta_1(z-z_0)^{-1} + ... + \beta_n(z-z_0)^{-n} + ... \tag{2.7}$$

în care $\beta_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ sunt fixate.

Dacă notăm cu $t = \frac{1}{z-z_0}$ seria (2.7) se transformă în: $\beta_1 t + \beta_2 t^2 + ... + \beta_n t^n + ...$ şi acestei serii îi aplicăm teorema 4 sau teorema 5 găsind un $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\beta_n|}} = \frac{1}{\limsup |\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}|}$ şi dacă:

$a°$ $\limsup \sqrt[n]{|\beta^n|} = \limsup |\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}| = \infty$ deci $R = 0$ seria (2.7) va converge doar pentru $t = 0$ ceeace antrenează convergenta seriei pentru orice $z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ $b°$ $\limsup \sqrt[n]{|\beta^n|} = \limsup |\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}| \in \mathbb{R}$ seria (2.7) este absolut convergentă pentru $|t| < R$ şi divergentă pentru $|t| > R$ şi deci seria (2.7) este convergenta pentru $|z - z_0| > \frac{1}{R}$ şi divergentă pentru $|z - z0| < \frac{1}{R}$ $c°$ $\limsup \sqrt[n]{|\beta^n|} = \limsup |\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}| = 0$, seria (2.7) este absolut convergentă pentru orice $t \in \mathbb{C}$ si seria(2.7) diverge pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Prin urmare, mulţimea punctelor de convergenţa a seriei (2.7) nu este interiorul unui cerc ci exteriorul unui cerc $(|z - z_0| = r)$, unde $r = \limsup \sqrt[n]{|\beta^n|} = \limsup |\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}|$ convenind să înţelegem prin exteriorul unui cerc de raza nulă cu centru în z_0 toate punctele(numerele) complexe exceptând $z = z_0$, iar exteriorul cercului de raza ∞ va fi $z = \infty$.

În acest mod poate fi studiată si mulţimea de convergenţă a seriilor de forma:

$$...+\beta_n(z-z_0)^{-n}+...+\beta_2(z-z_0)^{-2}+\beta_1(z-z_0)^{-1}+\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+...+\alpha_n(z-z0)^n..., \tag{2.8}$$

care poartă numele de serie Laurent.

Pentru aceasta se calculează $r = \limsup \sqrt[n]{|\beta^n|}, R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha^n|}}$ şi dacă $r < R$ mulţimea punctelor de convergenţă a seriei (2.8) va fi inelul circular $r < |z - z_0| < R$.

Dacă $r \geq R$ nu avem n planul complex puncte n care seria (2.8) să fie convergentă decât în cel mult unele puncte ale cercurilor $|z - z_0| = r = R$

2.6 Operatii cu serii de puteri.

Fie $s_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$, $s_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z - z_0)^n$, cu R_1, R_2 razele de convergenţă respective, atunci putem forma seriile:

$s_1(z) + s_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)(z - z_0)^n$ cu $R = min\{R1, R2\}$

$\lambda s_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda a_n)(z - z_0)^n$ cu $R = R_1$

$s_1(z)s_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z - z_0)^n$ cu $R = min\{R_1, R_2\}$,

unde $c_0 = a_0 \cdot b_0$, $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, ...$

$\frac{s_1(z)}{s_2(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n(z - z_0)^n$ cu $R = min\{R_1, R_2\}$, $d_0, d_1, d_2, ..., d_n, ...$ determinându-se cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi, astfel :

din $a_0 = b_0 \cdot d_0$ rezultă d_0

din $a_1 = b_0 \cdot d_1 + b_1 \cdot d_0$ rezultă d_1(pentru ca d_0 a fost determinat mai sus)

din $a_2 = b_0 \cdot d_2 + b_1 \cdot d_1 + b_2 \cdot d_0$ rezultă d_2(pentru că d_0 si d_1 au fost determinaţi anterior şi aşa mai departe.

Justificarea acestor relaţii bazându-se pe teoria seriilor numerice.

2.7 Seriile de puteri şi funcţiile elementare.

2.7.1 Funcţia exponenţială.

Notată prin exp este definită cu ajutorul seriei de puteri

$$exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \tag{2.9}$$

Deoarece $\alpha_n = \frac{1}{n!} \neq 0$ rezultă $|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}| = n + 1$ deci $R = \infty$. Asadar avem: $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Proprietatea de bază a funcţiei exp este exprimată prin egalitatea:

$$exp(z_1 + z_2) = exp(z_1)exp(z_2) \tag{2.10}$$

Înmulţind seria de puteri $exp(z_1)$ cu seria de puteri $exp(z_2)$ şi ordonând convenabil termenii (datorita convergentei absolute a seriilor în cauza, orice ordonare a termenilor produsului este posibilă), găsim: $exp(z_1)exp(z_2) = (1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + ... + \frac{z_1^n}{n!} + ...)(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + ... + \frac{z_2^n}{n!} + ...) = 1 + \frac{z_1+z_2}{1!} + \frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{2!} + \frac{z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3}{3!} + ... + \frac{z_1^n+z_2^n}{n!} + ... = exp(z_1 + z_2)$.

Din definitia (2.9) şi egalitatea (2.10) se pot deduce toate proprietatile funcţiei exponenţiale, cunoscute din liceu. Astfel:

$exp(0) = 1$, care rezultă din (2.9) pentru z=0.

$exp(z) \neq 0$.

$\lceil$ Din (2.9)si (2.10), presupunând că $(\exists)z_1 \in \mathbb{C}$ astfel încât $exp(z_1) = 0$, atunci fie $z_2 = z - z_1, exp(z_1 + z_2) = exp(z) = exp(z_1)exp(z - z_2) = 0$ deci rezultă că $exp(z) = 0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ absurd pentru că pentru $z = 0$ $exp(0) = 1$ deci nu există $z_1 \in \mathbb{C}$ astfel ca $exp(z_1) = 0\rfloor$.

$exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}, (\forall)z \in \mathbb{C}$, care rezultă din $exp(0) = exp(z - z) = exp(z) \cdot exp(-z) = 1$.

$exp(nz) = (exp(z))^n, (\forall)z \in \mathbb{C} n \in \mathbb{N}$ Se obţine din egalitatea $exp(z_1 + z_2 + ... + z_n) = exp(z_1) \cdot exp(z_2) \cdot ... \cdot exp(z_n)$.

$exp(\frac{n}{m}z) = \sqrt[m]{(expz)^n}$, $(\forall)$ $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} - \{1, 0\}$

Dacă se consideră $z = x \in \mathbb{R}$ atunci funcţia reala $exp(x)$ va fi definită în acelaşi mod.

$$exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \tag{2.11}$$

şi deoarece $R = \infty$ atunci $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proprietăţiile prezentate mai sus ramân valabile dar apar unele suplimentare, în cazul exponenţialei cu variabila reală, şi anume:

$exp(x) > 0, x \in \mathbb{R}$, într-adevăr dacă $x > 0$ avem $exp(x) = 1 + A$ cu $A = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ şi cum seria ce defineşte pe A are termeni pozitivi rezultă $expx > 1$. Dacă am avea $x_1 \in \mathbb{R}$ astfel ca $exp(x) < 0$ evident $x_1 < 0$ deci $-x_1 > 0$ iar $exp(-x_1) > 1$ şi deci $\frac{1}{expx_1} > 1$ ceea ce contrazice inegalitatea $exp(x_1) < 0$ şi totodată arată că $exp(x_1) < 1$ dacă $x_1 < 0$ avem deci: $0 < exp(x) < 1$, dacă $x < 0$ şi $exp(x) = 1$, dacă $x = 0$

$exp(x_1) < exp(x_2)$, dacă $x_1 < x_2$ într-adevăr din $x_2 - x_1 > 0$ rezultă $exp(x_2 - x_1) > 1$ şi deci $exp(x_2) = exp(x_2 - x_1 + x_1) = exp(x_2 - x_1)exp(x_1) > exp(x_1)$.

$exp(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ deoarece, din definitie $exp(1) = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+... = e$ şi se deduce apoi că $exp(x) = exp(1 \cdot x) = (exp(1))^x = e^x$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Se poate arăta că avem $exp(z) = e^z$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu ajutorul şirurilor.

2.7.2 Funcţiile trigonometrice.

Vom defini functiile cos şi sin în modul următor:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!}... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \tag{2.12}$$

$$\sin(z) = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \tag{2.13}$$

Cum ambele serii au raza de convergentă $R = \infty$, functiile cos şi sin sunt definite pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Proprietăţiile acestor funcţii se deduc cu uşurinţă din formulele care fac legatura dintre acestea şi funcţia exponenţială. Avem astfel:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}[\exp(iz) + \exp(-iz)] = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{2.14}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)] = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.15}$$

Aceasta se jusrifica usor deoarece:
$\exp(iz) = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...,$
$\exp(-iz) = 1 - i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...,$ O alta egalitate importanta n calcule este: Formula lui Euler

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \tag{2.16}$$

care se poate obţine şi direct din (2.9) si din definitiile (2.12 2.13). Din aceste rezultate se deduc uşor proprietăţi ale funcţiilor sin şi cos.

De exemplu din definiţiilefuncţiilor sin şi cos rezultă:
$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$,
iar din (2.14) si (2.15) se deduce: Formula fundamentală a trigonometriei

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, (\forall)z \in \mathbb{C} \tag{2.17}$$

precum şi identităţile:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \tag{2.18}$$

$$sin(z_1 + z_2) = sinz_1cosz_2 - cosz_1sinz_2 \tag{2.19}$$

care se justifică simplu pornind de la termenul din dreapta.

Cu ajutorul funcţiilor sin şi cos se pot defini şi celelalte funcţii trigonometrice

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{i[\exp(iz) + \exp(-iz)]} \tag{2.20}$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} \tag{2.21}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \tag{2.22}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} \tag{2.23}$$

din care se obţin toate proprietăţile cunoscute în real din şcoala.

Vom completa de asemeni proprietăţile funcţiei exponenţiale cu ncă unele obţinute prin intermediul funcţilor sin şi cos. Vom avea :

$|e^z| = |\exp(z)| = |e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x = exp(Rez)$

$\arg(e^z) = Im(z) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

deoarece din (2.16) rezultă: $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x[cos(y) + isin(y)]$ şi în plus folosind proprietatea de periodicitate cu perioada 2π a funcţiilor trigonometrice rezoltă periodicitatea funcţiei exp cu perioada $2\pi i$

$$\exp(z + 2\pi) = \exp(z) \tag{2.24}$$

deoarece $\exp(z + 2\pi) = \exp[x + i(y + 2\pi)] = e^x[\cos(y + 2\pi) + i\sin(y + 2\pi)] = e^x(\cos y + i\sin y) = \exp z$. Din această proprietate rezultă că funcţia $\exp(z)$ nu este injectiva în $\mathbb{C}$ ($\exp(z_1) = \exp(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$).

2.7.3 Funcţia logaritm natural.

Se defineşte ca aplicaţie inversă a funcţiei exponenţiale; Aşadar:

$$\exp z = w \Longrightarrow z = \ln w, z, w \in \mathbb{C} \tag{2.25}$$

Deoarece existenţa funcţiei inverse este obligatorie (în cadrul în care ne plasăm) bijectivitatea funcţiei directe, este evident că deoarece exp nu este injectivă definiţia funcţiei ln va comporta unele dificultăţi (ce vor fi eliminate n cadrul, cursului special de matematică, capitolul funcţii complexe).

Dacă ne situăm în $\mathbb{R}$ aceste dificultăţi dispar, deoarece $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$; $\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este bijectivă şi vom nota prin $\ln : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $ln = exp^{-1}$ şi $\exp = ln^{-1}$; cu alte cuvinte:

$$e^x = y \Rightarrow x = \ln y, y > 0, x \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

Proprietăţile funcţiei ln se cunosc din liceu si pot fi deduse din proprietăţile funcţiei exp.

2.7.4 Funcţiile a^x şi x^a.

Funcţiile a^x şi x^a se definesc cu ajutorul funcţiilor exp şi ln astfel:

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}, a > 0, a \neq 1 \tag{2.27}$$

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}, x > 0 \tag{2.28}$$

2.7.5 Funcţiile hiperbolice.

Functiile hiperbolice se mai notează sinh şi cosh se definesc cu ajutorul următoarelor serii de puteri:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} ... + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \tag{2.29}$$

$$\sinh z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} ... + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \tag{2.30}$$

pentru care avem $R = \infty$; aşadar $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi se verifică relaţiile

$$\cosh z + \sinh z = exp(z) = e^z \tag{2.31}$$

$$\cosh z - \sinh z = exp(-z) = e^{-z} \tag{2.32}$$

care conduc la:

$$\cosh z = \frac{1}{2}[\exp(z) + \exp(-z)] = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{2.33}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}[\exp(z) - \exp(-z)] = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{2.34}$$

Î nlocuind z prin iz şi ţinând cont de formula Euler rezultă: $\cosh(iz) = \cos(z)$ şi $\sinh(iz) = i \sin(z)$, $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, (\forall) z \in \mathbb{C} \tag{2.35}$$

numită formula fundamentală a funcţiilor hiperbolice.

2.8 Serii de puteri centrate în origine cu coeficienţi reali.

Acestea sunt de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.36}$$

Pentru seriile reale de puteri, mulţimea de convergenţă are o formă specială, este întotdeauna un interval. Pentru a justifica această afirmatie să considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ şi să studiem pentru ea convergenţa punctuală. Aplicând criteriul raportului avem:

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ de unde rezultă:

a) dacă $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ seria este convergentă.

b) dacă $|x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ seria este divergentă.

c) pentru $|x| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ seria poate fi convergentă sau divergentă.

Notnd $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ rezultă că pentru $x \in (-\rho, \rho)$ seria este absolut convergentă. ρ se numeşte raza de convergenţa. Rămâne să arătăm că în afara intervalului (-?, ?) seria este divergentă. Avem astfel:

Teorema 6 (Abel):

Pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, exista un numar $\rho \geq 0$ astfel încât:

a) pentru $|x| < \rho$ seria este absolut convergentă b) pentru $|x| > \rho$ seria este divergentă.

⌈ Observăm că: $x = 0$ este un punct în care seria este convergentă. Presupunem că există şi un alt punct $x_0 \neq 0$ în care seria este deasemenea convergentă. Vom arăta că pentru orice $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ seria este convergentă. Putem scrie:

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n \leq M|\frac{x}{x_0}|^n$

şi deoarece $|\frac{x}{x_0}| < 1$, seria cu termenul general $|\frac{x}{x_0}|^n$ este seria geometrică convergentă deci seria este convergentă pentru orice $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ din primul criteriu de comparatie.

Notăm $\rho = max|x|$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă iar ρ se numeşte raza de convergenţă şi s-a arătat mai sus modul de determinare, $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$.

Să arătăm că dacă $|x'| > \rho$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n$ este divergentă. În acest caz $x' > \rho$ sau $x' < -\rho$. Presupunem, ca $x' > \rho > 0$ şi raţionăm prin reducere la absurd.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n$ ar fi convergentă ar rezulta că ea este convergenta pentru orice $x \in (\rho, x')$ ceea ce nu este posibil deoarece ρ este de valoarea minimă a lui x, pentru care seria este convergenta$\rfloor$.

Exemple:

1°) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ are raza de convergenta data de $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} = 2$, deci seria este absolut convergentă în intervalul $(-2, 2)$ şi divergentă în $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Pentru $x = -2$ şi $x = 2$ studiem separat seriile $\lim_{n\to\infty} n^2$ şi $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ care sunt divergente.

2°) Seria $\lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)|}{n!}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ are raza de convergenţă $\rho = 1$.

Vom evidenţia proprietăţile seriilor de puteri reale centrate în origine.

<u>Proprietatea 1</u>: În orice interval $[a, b]?(-\rho, \rho)$ seria este uniform convergentă. (ρ este raza de convergenţă).

<u>Proprietatea 2</u>: Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are aceeaşi rază de convergenţă cu seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

<u>Proprietatea 3</u>: Dacă $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\rho, \rho)$, atunci $s(x)$ este o funcţie continuă şi:

$$\int_{x0}^{x} s(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^{n+1}}{n+1} \text{ pentru } [a, b] \sqsubseteq (-\rho, \rho)$$

<u>Proprietatea 4</u>: Daca $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\rho, \rho)$ atunci $s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$.

<u>Proprietatea 5</u>: Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $x \in (-\rho_1, \rho_1)$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, $x \in (-\rho_2, \rho_2)$ atunci:

a) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = f(x) \pm g(x)$, $x \in (-\rho, \rho)$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$

b) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$

c) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, unde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$, iar $x \in (-\rho, \rho)$, $\rho = min(\rho_1, \rho_2)$.

d) $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, unde coeficienţii $d_n, n \in \mathbb{N}$ se determină din condiţia: $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ este convergentă în intrvalul $(-r, r) \subset (-\rho, \rho) \cap \{x | g(x) \neq 0\}$.

Justificarea acestor proprietăţi se face cu ajutorul proprietăţilor seriilor de funcţii.

Vom aplica aceste proprietăţi pentru a obţine serii de puteri speciale precum şi sumele lor.

Astfel, de exemplu, seria de puteri cu proprietatea că suma ei coincide cu suma seriei derivate şi $s(0) = 1$.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ..., x \in (-\rho, \rho)$. Aplicăm proprietatea 4 şi obtinem :

$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^n + ..., \ x \in (-\rho, \rho)$. Identificnd cele doua serii care au sumele egale cu $s(x)$ obţinem: $n a_n = a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ înmulţind membru cu membru relaţiile de mai sus obţinem: $a_n = \frac{1}{n!}$. Prin urmare $s(x) = e^x$

Prin acelasi procedeu obtinem: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{+}\frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ..., x \in (-1, 1)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., x \in (-\infty, +\infty)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., x \in (-\infty, +\infty)$

Pentru functia $(1+x)^\lambda, x > -1, \lambda \in \mathbb{R}$, căutăm deasemenea o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a cărei suma este $(1+x)^\lambda$. Putem scrie: $(1+x)^\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi de asemenea $\lambda(1+x)^{\lambda-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ Egalând expresiile lui $(1+x)^\lambda$ obţinem:

$\lambda(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = (x+1)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1})$

de unde, prin identificare: $a_n = \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}$.

Se obţine astfel:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!} x^n) = (1+x)^\lambda$ pentru $x \in (-1, 1)$ (raza de convergenţă a seriei este $\rho = 1$ şi se obţine prin aplicarea formulei de calcul).

Alte exemple:

Seria de puteri a funcţiei $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ este dată de produsul seriilor:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi $(1+x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$

Obţinem:

$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{2(2n-2)!} + ... + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{2(2n-1)!} + ... \frac{1}{1!} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}) x^{2n+1}$

Un caz particular important de serii de puteri îl constituie seriile Taylor de forma: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, care vor fi expuse în capitolul ce tratează diferenţiabilitatea funcţiilor.

2.9 Convergenţa în medie.

Anterior au fost definite două tipuri de convergenţă pentru şirurile(seriile) de funcţii $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi anume convergenţa punctuală(simplă) care este foarte generală şi convergenţa uniformă care nsă este uneori prea restrictivă. Un alt tip de convergenţă pentru şirurile(seriile) de funcţii îl constituie convergenţa în medie care este intermediară faţă de cele două noţiuni de convergenţă amintite anterior (intermediară în sensul ca orice şir(serie) uniform convergent(ă) este în acelasi timp convergent(ă) în medie, reciproca nefiind adevarată. Mai precis, considernd mulţimea $\mathbb{R}([a,b])$ a funcţiilor integrabile Riemann pe $[a,b]$ cu $a < b, a, b \in \mathbb{R}$, şirul de funcţii $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}([a,b])$ va converge în medie către $f \in \mathbb{R}([a,b])$ dacă:

$(\forall)\varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n \geq N$ să avem: $\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < \varepsilon$.

Vom evidenţia două proprietăţi:

Proprietatea 1: Un şir sau o serie de funcţii din $\mathbb{R}([a,b])$ uniform convergent pe $[a,b]$ va fi convergent şi în medie pe $[a,b]$.

⌈ Într-adevăr aceasta rezultă din inegalitatea:

$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < \sup_{x\in[a,b]} (f_n(x) - f(x))^2 (b-a) \rfloor$.

Proprietatea 2: Orice şir(serie) convergent(ă) în medie pe [a, b] va putea fi integrat(ă) termen cu termen pe $[a,b]$(chiar după înmulţirea cu o funcţie din $\mathbb{R}([a,b])$.

⌈ Considernd inegalitatea Buniacovski-Schwartz:

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \tag{2.37}$$

pentru orice f, g din $\mathbb{R}([a,b])$, şi înlocuind f cu $f_n - f$ şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ din $R([a,b])$ converge n medie catre $f \in \mathbb{R}([a,b])$ rezulta imediat:

$(\int_a^b f_n(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \varepsilon^2 \int_a^b g^2(x)dx$, deci şirul $(\int_a^b f_n(x)g(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este convergent şi are limita $\int_a^b f(x)g(x)dx$ în $\mathbb{R}\rfloor$.

Acest rezultat este important pentru că, în ipoteza că seria de funcţii de forma:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{2.38}$$

este convergentă în medie către o funcţie $f \in \mathbb{R}([-\pi,\pi])$ atunci în mod obligatoriu coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt determinaţi cu ajutorul formulelorlui Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx. \tag{2.39}$$

Justificarea acestor afirmaţii se realizează usor integrând termen cu termen egalitatea: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$, după înmultire cu funcţia $\cos(mx)$ (pentru coeficienţii a_m) sau cu funcţia $\sin(mx)$ (pentru coeficienţii b_m) şi folosind egalităţile:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)cos(mx)dx = 0, \tag{2.40}$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$(ultima egalitate şi pentru $n = m$), şi

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(nx)dx = \pi \tag{2.41}$$

Toate acestea se obţin folosind identităţile din trigonometrie:

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$
$$2\sin(a)sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

Pentru o funcţie f, mărginită, periodică şi monotonă pe porţiuni vom numi serie Fourier o serie de funcţii de forma:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)). \tag{2.42}$$

Observăm că:

$$\cos(k\omega x) = \cos k(\omega x + 2\pi) = \cos k\omega(x + \frac{2\pi}{\omega})$$

$$\sin(k\omega x) = \sin k(\omega x + 2\pi) = \sin k\omega(x + \frac{2\pi}{\omega})$$

ceea ce arată că $\cos(k\omega x)$ şi $\sin(k\omega x)$ sunt funcţii periodice de perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Proprietăţi ale funcţiilor $\cos(k\omega x)$ şi $\sin(k\omega x)$:

$$\int_0^T \cos(k\omega x)\cos(\ell\omega x)dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă } k \neq \ell \\ \frac{T}{2}, \text{ dacă } k = \ell, \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega x)\sin(\ell\omega x)dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă } k \neq \ell \\ \frac{T}{2}, \text{ dacă } k = \ell, \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega x)\cos(\ell\omega x)dx = 0(\forall)k, \ell \in \mathbb{N}$$

Definiţie: Şirurile de functii $(\cos n\omega x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(\sin n\omega x)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile de mai sus reprezintă un sistem de funcţii ortogonale.

Din proprietatea de periodicitate a funcţiilor $\cos(k\omega x)$ şi $\sin(k\omega x)$ rezultă că dacă seria (2.42) este convergentă către funcţia f pe $[a, b]$, va fi convergentă la f pe $[a + T, b + T], ..., [a + nT, b + nT]$.

Presupunând că seria (2.42) este convergentă pe [0, T] determinăm coeficienţii ei astfel:

$$\int_0^T f(x)dx = Ta_0.$$

$$\int_0^T f(x)cos(\ell\omega x)dx = \frac{T}{2}a_\ell$$

şi

$$\int_0^T f(x)sin(\ell\omega x)dx = \frac{T}{2}b_\ell,$$

de unde rezultă, cu $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{1}{T}\int_{-T}^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{1}{T}\int_{-T}^T f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

Privind convergenţa unei serii Fourier enunţăm:

Teorema 7 (Dirichlet):

Dacă f este mărginită, monotonă pe porţiuni şi periodică atunci în orice punct în care funcţia este continuă, suma seriei este $f(x)$ iar în punctele de discontinuitate suma seriei este: $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, unde $f(x-0)$ este limita la stânga iar $f(x+0)$ este limita la dreapta.

Exemple:

1°) Fie

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [0,1] \\ 2 \text{ , dacă } x \in [1,2] \end{cases}$$

a) Să se dezvolte f în serie Fourier.
b) Să se dezvolte f, în serie de cosinuşi
c) Să se dezvolte f, în serie de sinuşi.
Rezolvare: $T = 2$

Pentru punctul a)

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{2}(\int_0^1 + \int_1^2 2dx) = \frac{3}{2}$$

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \int_0^1 \cos(k\pi x)dx + 2\int_1^2 \cos(k\pi x)dx =$
$= \frac{sink\pi}{k\pi} + 2\frac{sin2k\pi}{k\pi} - 2\frac{sink\pi}{k\pi} = 0$
$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \int_0^1 \sin(k\pi x)dx + 2\int_1^2 \sin(k\pi x)dx =$
$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} - 2\frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} + 2\frac{\cos k\pi}{k\pi} = \frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{1}{k\pi}$
deci seria Fourier este :

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2s+1}\sin(2s+1)\pi x = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \neq n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \text{ , dacă } x = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pentru punctul b) avem in general

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in [0,T] \\ f(-x) \text{ , dacă } x \in [-T,0], \end{cases}$$

cu $f(x+T) = f(x)$, atunci
$f_c(x+2T) = f_c(x)$, $x \in (-T,T)$ si $f_c(-x) = f_c(x)$ $x \in (-T,T)$
În acest caz seria Fourier asociata lui $f_c(x)$ este

$$a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^*\cos(nx) + b_n^*\sin(nx))$$

unde

$$a_0^* = \frac{1}{2T}\int_{-T}^T f(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_k^* = \frac{2}{2T}\int_{-T}^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

$$b_k^* = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = 0$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$

Deci seria asociată va fi o serie de cosinuşi, rezultat valabil întotdeauna când este vorba de o funcţie pară şi vom avea

$$a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^* \cos(nx)$$

Concret pentru cazul b) avem:

$$a_0^* = \frac{1}{2}(\int_0^1 dx + \int_1^2 dx) = \frac{3}{2}$$

$$a_k^* = \int_0^1 \cos(\frac{k\pi}{2}x)dx + \int_1^2 2\cos(\frac{k\pi}{2}x)dx = -\frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2})$$

şi vom avea

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2s+1}\cos(2s+1)\pi x = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \neq n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \text{ dacă } x = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pentru punctul c) avem in general

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in [0,T] \\ -f(-x), \text{ dacă } x \in [-T,0], \end{cases}$$

cu $f(x+T) = f(x)$, atunci
$f_s(x+2T) = f_c(x)$, $x \in (-T,T)$ si $f_s(-x) = -f_s(x)$ $x \in (-T,T)$
În acest caz seria Fourier asociata lui $f_c(x)$ este

$$a_0^{**} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^* \cos(nx) + b_n^* \sin(nx))$$

unde

$$a_0^{**} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = 0$$

$$a_k^{**} = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = 0$$

$$b_k^{**} = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$

Deci seria asociată va fi o serie de sinuşi, rezultat valabil întotdeauna când este vorba de o funcţie impară şi vom avea

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{**} \sin(nx)$$

Concret pentru cazul c) avem:

$$b_k^{**} = \int_0^1 \sin(\frac{k\pi}{2}x)dx + \int_1^2 2\cos(\frac{k\pi}{2}x)dx = \frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi}(-1)^k$$

Dupa calcule va rezulta dezvoltarea in serie de sinusi.

Capitolul 3

Funcţii vectoriale de varibilă vectorială.

3.1 Funcţii în $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$

Fie $\mathbb{A}_2$ o mulţime din $\mathbb{R}^2$ deschisă şi conexă(deci $\mathbb{A}_2$ este un domeniu). Reamintim că o mulţime este conexă dacă orice două puncte am lua, în mulţime, linia poligonală ce uneşte cele două puncte se află în întregime în mulţimea respectivă. Orice aplicaţie $u : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{R}$ va fi o funcţie cu două variabile reale independente. Valoarea acestei funcţii în punctul $(x, y) \in \mathbb{A}_2$ va fi $u(x, y)$ iar mulţimea acestor funcţii va fi notată prin $\mathbb{S}(\mathbb{A}_2)$ sau mai simplu prin $\mathbb{S}_2$. Aceasta notatie provine din fizică unde aceste funcţii se numesc câmpuri scalare plane. Odată cu câmpurile scalare definite pe domenii din $\mathbb{R}^2$ se pot defini şi câmpurile vectoriale pe $\mathbb{A}_2$ notate prin $\mathbb{V}(\mathbb{A}_2)$ sau mai simplu $\mathbb{V}_2$ astfel:

$\overrightarrow{f} \in \mathbb{V}_2$ dacă $f : \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, adică: $\overrightarrow{f}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ unde p, q sunt câmpuri scalare din $\mathbb{S}_2$, care constituie componentele câmpului vectorial menţionat. Înlocuind $\mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ cu $\mathbb{A}_3 \subseteq \mathbb{R}^3$, se pot defini câmpurile scalare S_3 şi câmpurile vectoriale $\mathbb{V}_3$. Astfel $u : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{R}$ care este o funcţie cu trei variabile reale independente atunci $u \in \mathbb{S}_3$, dacă $(\forall)(x, y, z) \in \mathbb{A}_3, u(x, y, z) \in \mathbb{R}$, iar $f \in \mathbb{V}_3$ dacă $f : \mathbb{A}_3 \in \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, adică: $f(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$ unde p, q, r sunt câmpuri scalare din $\mathbb{S}_3$, care constituie componentele câmpului vectorial menţionat.

Pentru astfel de câmpuri ne propunem să studiem câteva probleme legate de continuitate şi apoi în capitolele următoare de derivabilitate şi integrabilitate.

Dacă $z \in \mathbb{S}_2$ ($z : \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) atunci mulţimea punctelor notată cu $G_z \in \mathbb{R}^3$, adică: $G_z = \{(x, y, z) | z = z(x, y), (x, y) \in \mathbb{A}_2\}$ defineşte graficul câmpului z. Acest grafic poate fi interpretat ca o suprafaţă din $\mathbb{R}^3$, care este intersectată într-un singur punct de paralele la axa Oz duse prin punctele lui $\mathbb{A}_2$.

Similar, dacă $u \in \mathbb{S}_3$ ($u : A_3 \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) atunci mulţimea punctelor notată cu $G_u \subseteq \mathbb{R}^4$, adică: $G_u = \{(x, y, z, u)|u = u(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{A}_3\}$ defineşte graficul câmpului u. Acest grafic poate fi interpretat ca o suprafaţă din $\mathbb{R}^4$.

Pentru $z \in \mathbb{S}_2$ vom nota cu $C_z \subseteq \mathbb{R}$, mulţimea valorilor lui z dată de: $C_z = z \in \mathbb{R}|z = z(x, y), (x, y) \in \mathbb{A}_2$.

Daca $a \in C_z$, se numeşte linie de nivel sau curbă de nivel constant a, mulţimea punctelor $\gamma_a \subseteq \mathbb{A}_2$, $\gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{A}_2|z(x, y) = a\}$. Cu alte cuvinte, în toate punctele lui γ_a funcţia z are aceeaşi valoare a; ecuaţia $z(x, y) = a$ constituie ecuaţia carteziană a liniei de nivel considerată iar din punct de vedere geometric γ_a este o curba plană (deschisă sau închisă) sau un punct. Geometric γ_a se obţine proiectând ortogonal, în planul xOy punctele de pe graficul G_z, aflate în planul $z = a$(planul paralel cu planul xOy aflat la cota $z = a$).

O proprietate simplă a liniilor de nivel este aceea că ele sunt sau distincte sau coincid: $\gamma_a \cap \gamma_b = \emptyset$ dacă $a \neq b$. Într-adevăr, dacă $(x_0, y_0) \in \gamma_a \cap \gamma_b$ atunci $z(x_0, y_0) = a$ şi $z(x_0, y_0) = b$ şi deci $a = b$ iar dacă $a \neq b$ atunci $\gamma_a \cap \gamma_b = \emptyset$.

Similar, pentru $u \in \mathbb{S}_3$ vom nota cu $C_u \subseteq \mathbb{R}$, mulţimea valorilor lui u dată de: $C_u = \{u \in \mathbb{R}|z = z(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{A}_3\}$; şi dacă $a \in C_u$, se numeşte suprafaţă de nivel sau suprafaţă de nivel constant a, multimea punctelor $s_a \subseteq \mathbb{A}_3$, $s_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}_3|u(x, y, z) = a\}$. Cu alte cuvinte, în toate punctele lui s_a funcţia u are aceeaşi valoare a; ecuaţia $u(x, y, z) = a$ constituie ecuaţia carteziană a suprafeţei de nivel considerată iar din punct de vedere geometric s_a este o suprafaţă în spaţiu (deschisă sau închisă) o curbă sau un punct. O proprietate similară a suprafeţelor de nivel este aceea că ele sunt sau distincte sau coincid: $s_a \cap s_b = \emptyset$ dacă $a \neq b$. Cunoaşterea tuturor suprafeţelor de nivel, pentru un câmp scalar u dat, face posibilă vizualizarea acestui câmp.

3.2 Limite pentru funcţii de mai multe variabile.

Vom presupune că $u \in \mathbb{S}_2$ ($u : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{R}$), $\mathbb{A}_2$ domeniu. Presupunem iniţial că u este definită într-o vecinatate $\mathbb{B}_r$ a punctului (x_0, y_0), cu exceptia poate a punctului (x_0, y_0); $\mathbb{B}_r = \{(x, y) \in \mathbb{A}_2|\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

Definiţia Cauchy (sau definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei) Numărul real ℓ este limita funcţiei u în punctul (x_0, y_0), dacă: $(\forall)\varepsilon > 0(\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)(x, y) \in \mathbb{B}_\delta - \{(x_0, y_0)\}$, adică $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} < \delta$ să avem: $|u(x, y) - \ell| < \varepsilon$.

Se notează: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \ell$ szu $u(x, y) \to \ell$, pentru $(x, y) \to (x_0, y_0)$

Definiţia Heine(sau definiţia în limbaj de şiruri a limitei) Numărul real ℓ este limita funcţiei u în punctul (x_0, y_0), dacă şirul $(u(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita ℓ, pentru orice şir dublu $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $B_\delta - (x_0, y_0)$ convergent către (x_0, y_0).

Teorema 1: Cele două definiţii sunt echivalente.

$\lceil$Demonstraţia se face la fel ca în cazul funcţiilor de o variabilă$\rfloor$.

Trebuie reţinuta circumstanţa iniţială prin care se presupune că u este definită în întreaga vecinatate a punctului în care se calculează limita (exceptând eventual acest punct). Uneori apar situaţii în care funcţia nu este definita în întrega vecinatate B_r a punctului ci doar pe o mulţime $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{B}_r$ iar punctul în care se calculează limita este un punct limită al mulţimii $\mathbb{E}((x_0, y_0)$ este punct limită pentru mulţimea $\mathbb{E}$ dacă $(\forall)\mathbb{B}_\varepsilon$ a lui (x_0, y_0), $\mathbb{B}_\varepsilon \cap \mathbb{E} \neq \emptyset)$. În această situaţie trebuiesc considerate doar puncte ale mulţimii $\mathbb{E}$ iar definiţiile anterioare pentru limita funcţiei într-un punct conduc la noţiunea de limită în punctul considerat în raport cu mulţimea E. Pentru a marca diferenţa dintre cele două situaţii în calculul limitei unei funcţii într-un punct să considerăm următorul exemplu:

Funcţia $u(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{xy})$ este definită pe o mulţime $\mathbb{E}$ care coincide cu $\mathbb{R}^2$ fară axele de coordonate Ox, Oy.Limita obişnuită a acestei funcţii nu există deoarece dacă (x_n, y_n) se află pe una din axe u nu are sens. Pe mulţimea $\mathbb{E}$ avem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = 0$, în baza inegalităţii $|u(x, y)| < x^2 + y^2$ valabilă pentru orice $(x, y) \in \mathbb{E}$.

Utiliznd proprietăţile sirurilor convergente din R(deoarece $(u(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}$) se pot pune în evidenţă proprietăţi ale limitei unei funcţii cu două sau mai multe variabile independente. Astfel vom avea:

i) Limita unei funcţii într-un punct este unicţ.

ii) Daca există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y)$ şi există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y))$ atunci:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha u(x, y) + \beta v(x, y) = \alpha \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + \beta \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y)v(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{u(x, y)}{v(x, y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)}$.

iii) Limita funcţiei $u(x, y)$ va exista dacă şi numai dacă şirul $(u(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este un şir fundamental (pentru orice alegere a şirurilor $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^2$) care se mai poate scrie si astfel:

$(\forall)\varepsilon > 0(\exists)\delta = \delta(e) > 0$ astfel încât $(\forall)(x_m, y_m), (x_n, y_n) \in \mathbb{B}_\delta - \{(x0, y0)\}$, ce satisface relaţia: $\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2)} < \delta$ să avem: $|u(x_n, y_n) - u(x_m, y_m)| < \varepsilon$.

Pentru o funcţie de două variabile $u = u(x, y)$ definită în vecinatatea lui

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (cu excepţia eventual a punctului (x_0, y_0), prin limite iterate vom întelege limitele succesive ale lui u. Altfel spus, se consideră u funcţie de o variabilă, cealaltă variabilă fiind presupusă fixată. Prin urmare, apar următoarele limite: $\lim\limits_{y \to y_0} (\lim\limits_{x \to x_0} u(x, y))$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{y \to y_0} u(x, y))$
denumite limite iterate în punctul (x_0, y_0) ale funcţiei u. Evident limitele iterate se calculează mai simplu, utilizând cunoştiinţe din teoria limitelor pentru funcţii de o variabilă, dar aceste limite nu coincid întotdeauna cu limita funcţiei u în punctul (x_0, y_0). Pentru justificarea acestei afirmaţii este suficient să considerăm funcţia:

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \text{ , dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Această funcţie nu are limita în $(0, 0)$. Pentru $y \neq 0$ fixat $\lim\limits_{x \to 0} u(x, y) = -1$ şi deci: $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} u(x, y) = -1$. Pentru $x \neq 0$ fixat $\lim\limits_{y \to 0} u(x, y) = 1$ şi deci: $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} u(x, y) = 1$.

Acest exemplu arată clar diferenţa existentă între cele două tipuri de limite iterate şi diferenţa între noţiunile de limită şi cea de limite iterate în cazul funcţiilor de mai multe variabile. În orice caz, dacă se calculează initial limitele iterate ale unei funcţii într-un punct, dacă aceste limite există şi sunt diferite atunci în mod sigur nu va exista limita funcţiei în acel punct. Dacă însă limitele iterate coincid în acel punct mai trebuiesc continuate investigaţiile pentru a vedea dacă funcţia are limită în acel punct.

În cazul funcţiilor cu trei variabile sau mai multe variabile, limitele iterate se complica de exemplu, în cazul a trei variabile independente se pot calcula şase limite pentru funcţii cu o variabilă fixată. De asemenea trebuie reţinut faptul că din existenţa limitelor funcţiei $u(x, y)$ după toate direcţiile care trec prin punctul (x_0, y_0), chiar dacă toate aceste limite sunt egale, nu este obligatoriu existenţa limitei în $\mathbb{R}^2$ în acest punct. Ca de exemplu pentru:
$u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, dacă $x^2 + y^2 \neq 0$, dacă luăm dreptele ce trec prin origine $y = kx$, obţinem: $u(x, y) = \frac{k}{1 + k^2}$ şi $\lim\limits_{x \to 0} u(x, y) = \dfrac{k}{1 + k^2}$. Prin urmare limita în origine există pentru fiecare dreaptă ce trece prin origine, deci funcţia u nu are limită în $(0, 0)$.

3.3 Funcţii continue în $\mathbb{R}^2$ si $\mathbb{R}^3$.

Vom lua în considerare probleme legate de continuitatea câmpurilor scalare sau a celor vectoriale cu două sau trei variabile independente.

Functia $u = u(x, y)$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

C_1 : Functia u este definită în punctul (x_0, y_0)
C_2 : Exista limita functiei u în punctul (x_0, y_0)
C_3 : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$
Funcţia u este continuă pe mulţimea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ dacă u este continuă în fiecare punct al mulţimii $\mathbb{B}$. Vom nota aceasta cu $u \in \mathcal{C}(\mathbb{B})$.

Dacă cel putin una din conditiile C_1, C_2, C_3 nu este îndeplinită în punctul (x_0, y_0) atunci punctul (x_0, y_0) este un punct de discontinuitate pentru funcţia u. Punctele de discontinuitate ale unei funcţii u pot fi izolate, concentrate pe curbe din $\mathbb{R}^2$ sau pe alte mulţimi de puncte din $\mathbb{R}^2$.

Câmpul vectorial $\overrightarrow{f} \in \mathbb{V}_2$, $\overrightarrow{f} : \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, va fi continuu în (x_0, y_0) dacă ambele câmpuri scalare din $\mathbb{S}_2, p, q$ (componentele sale) sunt câmpuri continue în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Înlocuind (x_0, y_0) cu (x_0, y_0, z_0) se obţine definiţia continuităţii (discontinuităţii) pentru funcţii cu trei variabile şi pentru câmpuri vectoriale $\overrightarrow{f} \in \mathbb{V}_3$, cu $f : \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, adică: $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$ cu p, q, r câmpuri continue în punctul $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. De asemeni punctele de discontinuitate ale unei funcţii u din $\mathbb{S}_2$, pot fi izolate, concentrate pe curbe din $\mathbb{R}^3$ concentrate pe suprafeţe din $\mathbb{R}^3$ sau pe alte mulţimi de puncte din $\mathbb{R}^3$.

Cu ajutorul noţiunilor relative la limitele funcţiilor într-un punct, se pot da definiţii directe pentru continuitatea unei funcţii u în punctul (x_0, y_0).

Definiţia 1 (în limbaj $\varepsilon - \delta$): Funcţia $u = u(x, y) \in \mathbb{S}_2$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ ($\mathbb{A}_2$ deschisă) dacă:
$(\forall)\varepsilon > 0(\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)(x, y) \in \mathbb{A}_2$, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} < \delta$ să avem: $|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Definiţia 2 (în limbaj de şiruri): Funcţia $u = u(x, y) \in \mathbb{S}_2$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ ($\mathbb{A}_2$ deschisă) dacă:
Pentru orice şir dublu $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$din $\mathbb{A}_2$ convergent către (x_0, y_0) se verifică relaţia: $u(x_n, y_n) \to u(x_0, y_0)$ pentru $n \to \infty$, adică:

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n, y_n) = u(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) \tag{3.1}$$

Egalitatea (3.1) se numeşte relaţia de permutabilitate dintre operţia de trecere la limita şi funcţia u şi este caracteristică noţiunii de continuitate.

Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, din Definiţia 1 rezultă :
$(\forall)\varepsilon > 0(\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $u(\mathbb{B}_\delta(x_0, y_0)) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(u(x_0, y_0))$, unde:
$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{A}_2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ iar
$B_r(u_0) = \{u \in \mathbb{R} | u \in (u_0 - r, u_0 + r)\}, r > 0$.

Definiţia 3 (în limbaj de vecinătăţi). Functia $u = u(x, y) \in \mathbb{S}_2$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ ($\mathbb{A}_2$ deschisă) dacă:
Pentru orice vecinatate $\mathbb{V}$ a punctului $u_0 = u(x_0, y_0)$ există o vecinatate $\mathbb{U}$ a punctului (x_0, y_0) astfel încât $u(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$.

Pentru o funcţie $u(x,y)$ continuă în orice punct (x,y) din B, $u \in \mathcal{C}(\mathbb{B})$ definiţia 1, în acest caz, se scrie asfel:

$(\forall)\varepsilon > 0$ şi $(\forall)(x,y) \in \mathbb{B}(\exists)\delta = \delta(\varepsilon, x, y) > 0$ astfel încât $(\forall)(x', y') \in \mathbb{B}$ şi $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ să avem: $|u(x,y) - u(x',y')| < \varepsilon$.

Definiţia 4 (a continuităţii uniforme): Funcţia $u \in \mathcal{C}(\mathbb{B})$ este uniform continuă pe mulţimea $\mathbb{B}_u \subseteq \mathbb{B}$ dacă:
$(\forall)\varepsilon > 0(\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)\{(x', y'), (x'', y'')\} \in \mathbb{B}_u$ cu $\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} < \delta$ să avem: $|u(x',y') - u(x'',y'')| < \varepsilon$.

Comparnd definiţia 1 cu definiţia 4 rezultă diferenţa dintre continuitatea în fiecare punct al unei mulţimi(când δ se modifică dacă se trece de la un punct la altul) şi continuitatea uniformă pe o mulţime (când δ depinde doar de ε nu de pozitia punctelor $(x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{B}_u$).

Evident, dacă u este uniform continuă pe $\mathbb{B}_u$ atunci u va fi continuă în fiecare punct al mulţimii $\mathbb{B}_u$, reciproca nefiind în general adevarată.

Se pot găsi condiţii suficiente, verificate de funcţia u, pentru care continuitatea în fiecare punct al unei mulţimi este în acelasi timp şi continuitate uniformă pe mulţimea în cauză.

Vom mentiona:

Criteriul lui Cantor: Dacă $u \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ fiind un compact, din $\mathbb{R}^2$(sau din $\mathbb{R}^n$, $n > 2$) atunci u este uniform continuă pe $\mathbb{K}$.
$\lceil$ Justificarea se face prin absurd. Fie $u \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ şi presupunem că u nu este uniform continuă pe $\mathbb{K}$, adică: $(\exists)\varepsilon_0 > 0(\forall)\delta > 0$ astfel încât $(\exists)\{(x'_\delta, y'_\delta), (x''_\delta, y''_\delta)\} \in \mathbb{K}$ să avem: $|u(x''_\delta, y''_\delta) - u(x'_\delta, y'_\delta)| \geq \varepsilon_0$ cu toate că $\sqrt{(x'_d - x''_d)^2 + (y'_d - y''_d)^2} < \delta$. Cu $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, notând $x'_\delta = x'_n$, $y'_\delta = y'_n$, $x''_\delta = x''_n$, $y''_\delta = y''_n$, vom defini astfel două şiruri: $((x'_n, y'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ $((x''_n, y''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{K}$. Cum $\mathbb{K}$ este compact va exista un subşir $((x'_{n_k}, y'_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ al şirurului $((x'_n, y'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $(x_0, y_0) \in \mathbb{K}$. Vom arăta că şi subşirul $((x''_{n_k}, y''_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ al şirurului $((x''_n, y''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent tot la $(x_0, y_0) \in \mathbb{K}$. Aceasta rezultă imediat deoarece:
$|x''_{n_k} - x_0| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + \varepsilon$ şi
$|y''_{n_k} - y_0| \leq |y''_{n_k} - y'_{n_k}| + |y'_{n_k} - y_0| < \frac{1}{n_k} + \varepsilon$
cum $u((x'_{n_k}, y'_{n_k})) \to u(x_0, y_0)$ şi $u((x''_{n_k}, y''_{n_k})) \to u(x_0, y_0)$ pentru $k \to \infty$. Pentru k suficient de mare avem: $|u(x'_{n_k}, y'_{n_k}) - u(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ şi $|u(x''_{n_k}, y''_{n_k}) - u(x0, y0)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, de unde rezultă relaţia contradictorie:
$\varepsilon_0 \leq |u(x'_{n_k}, y'_{n_k}) - u(x''_{n_k}, y''_{n_k})| \leq |u(x''_{n_k}, y''_{n_k}) - u(x0, y0)| + |u(x'_{n_k}, y'_{n_k}) - u(x0, y0)| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} \leq \frac{\varepsilon_0}{2})\ \rfloor$.

Criteriul lui Lipschitz: Dacă u este Lipschitziană pe mulţimea $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^2$(sau $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^n, n > 2$) adică: $|u(x,y) - u(x',y')| \leq L\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2)}$, cu $L > 0, (\forall)\{(x,y), (x',y')\} \in \mathbb{B}$ atunci f este uniform continuă pe B.
$\lceil$ Justificarea este simplă, dacă $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ rezultă că $|u(x,y) - u(x',y')| \leq L\delta$ şi notând cu $\varepsilon = L\delta$, vom avea: $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ şi deci δ nu depinde decât de $\varepsilon\rfloor$.

3.3.1 Proprietăti ale functiilor continue ntr-un punct.

Vom evidenţia proprietăţile funcţiilor continue într-un punct prin următoarele teoreme:

Teorema 2:

a) Dacă $u, v \in \mathbb{S}_2$ sunt funcţii continuie în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, atunci combinaţia liniară $\alpha u + \beta v$ şi produsul uv sunt funcţi continuie în (x_0, y_0).
b) Dacă $u(x_0, y_0) \neq 0$ si $u \in \mathbb{S}_2$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, atunci functia $\frac{1}{u(x,y)}$ este continuă în acelaşi punct (x_0, y_0) şi va exista o vecinatate $\mathbb{V}_r$ a punctului (x_0, y_0) astfel încât $u(x, y) \neq 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{V}_r \subseteq \mathbb{A}_2$.
c) Compunerile de funcţii continuie conduc la funcţii continuie. Mai precis, în cazurile concrete de care suntem interesaţi, dacă $u \in \mathbb{S}_2$ este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, iar funcţiile $\varphi, \psi : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ fiind un interval, φ, ψ fiind continuie într-un punct $t_0 \in \mathbb{I}$, notând cu $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$ atunci funcţia compusă:
$u(\varphi(t), \psi(t)) : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este continuă în punctul $t_0 \in \mathbb{I}$
Apoi dacă $p : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este continuă în $p_0 = u(x_0, y_0)$, atunci funcţia compusa: $p \circ u : \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (p \circ u)(x, y) = p(u(x, y)$, este continuă în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$.

$\lceil$ a) Se jusifică în baza continuităţii lui $u, v \in \mathbb{S}_2$ în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, precum şi a inegalităţilor:
$|\alpha u(x, y)+\beta v(x, y)-\alpha u(x_0, y_0)-\beta v(x_0, y_0)| \leq |\alpha||u(x, y)-u(x_0, y_0)|+|\beta|v(x, y)-v(x_0, y_0)| < \varepsilon'$, ε' este combinaţia ce rezultă din termenii ce majorează diferenţele $|u(x, y) - u(x_0, y_0)|$ şi $|v(x, y) - v(x_0, y_0)|$.
Apoi $|u(x, y)v(x, y) - u(x_0, y_0)v(x_0, y_0)| = |u(x, y)v(x, y) - u(x, y)v(x_0, y_0) + u(x, y)v(x_0, y_0)+u(x_0, y_0)v(x_0, y_0)| \leq |u(x, y)||v(x, y)-v(x_0, y_0)|+|v(x_0, y_0)||u(x, y)-u(x_0, y_0)|$.
În baza continuităţii lui $u(x, y)$ avem:
$|u(x, y)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |u(x_0, y_0)| \leq \varepsilon + |u(x_0, y_0)|$. Luând $M = max\{|v(x_0, y_0)|, \varepsilon+|u(x_0, y_0)|\}$ va rezultă: $|u(x, y)v(x, y)-u(x_0, y_0)v(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$, dacă $|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ şi $|v(x, y) - v(x0, y0)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.
b) Cum $u(x_0, y_0) \neq 0$ şi $|u(x_0, y_0) \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |u(x, y)| \leq \varepsilon + |u(x, y)|$, putem alege $\varepsilon = \frac{1}{2}|u(x_0, y_0)| > 0$, şi $\frac{1}{2}|u(x_0, y_0)| \leq |u(x, y)|$ sau $\frac{1}{|u(x,y)|} < \frac{2}{|u(x0,y0)}$ şi vom avea deci
$|\frac{1}{u(x,y)} - \frac{1}{u(x_0,y_0)}| = \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)}{|u(x,y)||u(x_0,y_0)|} \leq \frac{2}{(u(x_0,y_0))^2}|u(x, y)-u(x_0, y_0)|$, iar din continuitatea lui u în (x_0, y_0) rezultă continuitatea lui $\frac{1}{u(x,y)}$ în acelaşi punct (x_0, y_0)
Pentru a doua afirmaţie a punctului b), vom presupune mai întâi că $u(x_0, y_0) > 0$, iar din continuitatea lui u în (x_0, y_0) rezultă:
$u(x_0, y_0) - \varepsilon < u(x, y) < u(x_0, y_0) + \varepsilon$.
Daca vom lua $\varepsilon = \frac{1}{2}|u(x0, y0)| > 0$ vom obţine:
$0 < (1/2)|u(x_0, y_0)| < u(x, y)$

şi deci $u(x,y) > 0$ într-o vecinatate a lui (x_0, y_0).
Daca vom presupune acum că $u(x_0, y_0) < 0$, iar din continuitatea lui u în (x_0, y_0) rezultă:
$u(x,y) < u(x_0, y_0) + \varepsilon$, dacă vom lua $\varepsilon = -\frac{1}{2}|u(x_0, y_0)| > 0$ vom obţine:
$u(x,y) < -\frac{1}{2}|u(x_0, y_0)| < 0$ şi deci $u(x,y) < 0$ într-o vecinătate a lui (x_0, y_0).
c) se justifică pe baza principiului de permutabilitate a limitei cu funcţia$\rfloor$.

În cadrul acestui subcapitol vom enunţa două teoreme deosebit de importante:

Teorema 3:(Prima teorema Weierstrass):
Dacă u este continuă pe un compact, atunci u este marginită pe acel compact. Altfel spus: $u \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}$ închisă şi mărginită atunci există $M > 0$ astfel încât: $|u(x,y)| \leq M$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{K}$, am considerat $n = 2$.

$\lceil$ Justificarea o vom face prin absurd. Dacă u este marginită pe K, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}$, cu $|u(x_n, y_n)| > n$ (am luat $M = n > 0$). Am construit astfel şirul $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$din $\mathbb{K}$ iar în baza compacităţii lui K, va exista un subşir $((x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ din K al şirului $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la un punct (x_0, y_0) din K. În baza continuităţii lui u, a principiului de permutabilitate, avem:
$u(x_{n_k}, y_{n_k}) \to u(x_0, y_0)$ când $k \to \infty$, ceeace este imposibil deoarece $|u(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k \to \infty$ cnd $k \to \infty\rfloor$.

Teorema 4:(A doua teorema Weierstrass):
Fie $u \in \mathcal{C}(\mathbb{K})(\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^2)$, $\mathbb{K}$ compact, atunci există $(\underline{x_0}, \underline{y_0}) \in \mathbb{K}$ astfel încât $u(\underline{x_0}, \underline{y_0}) = \underline{u} = \inf\{u(x,y)|(x,y) \in \mathbb{K}\}$ şi există $(\overline{x_0}, \overline{y_0}) \in \mathbb{K}$ astfel încât $u(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = \overline{u} = \sup\{u(x,y)|(x,y) \in \mathbb{K}\}$.

$\lceil$ În baza primei teoreme Weierstrass, notând cu $U = u(x,y)|(x,y) \in \mathbb{K}$, cum u este mărginită vom avea $U \subset [-M, M]$ şi în baza axiomei marginii superioare (şi a marginii inferioare) va exista $\overline{u}$ şi $\underline{u}$ unde $\overline{u} = \sup U$ iar $\underline{u} = infU$ şi atunci din definiţia marginii superioare pentru orice $n \in \mathbb{N}(\exists)(x_n, y_n) \in \mathbb{K}$ astfel încât $\overline{u} - \frac{1}{n} < u(x_n, y_n) \leq \overline{u}$. $\mathbb{K}$ fiind un compact va exista un subşir $((x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{K}$ al şirului $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la un punct (x_0, y_0) din $\mathbb{K}$ şi în baza continuităţii lui u, avem din inegalitatea:
$\overline{u} - \frac{1}{n_k} < u(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \overline{u}$, prin trecere la limită pentru $k \to \infty$ rezultă: $u(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = \overline{u}$.
Pentru cea dea doua relaţie procedăm la fel, din definiţia marginii inferioare pentru orice $n \in \mathbb{N}(\exists)(x_n, y_n) \in \mathbb{K}$ astfel încât $\underline{u} \leq u(x_n, y_n) < \underline{u}\frac{1}{n}$. $\mathbb{K}$ fiind un compact va exista un subşir $((x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{K}$ al şirului $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la un punct (x_0, y_0) din K şi n baza continuităţii lui u, avem din inegalitatea:
$\underline{u} \leq u(x_{n_k}, y_{n_k}) < \underline{u} + \frac{1}{n_k}$, prin trecere la limită pentru $k \to \infty$ rezultă: $u(\underline{x_0}, \underline{y_0}) = \underline{u}\rfloor$.

Se constată astfel că multe proprietăţi ale funcţiilor continuie de o variabilă reală se regăsesc şi la funcţiile continuie de mai multe variabile reale

independente.
Teorema analoagă teoremei valorilor intermediare de la funcţiile continuie cu o variabilă reală are următorul enunţ(în cazul funcţiilor de două variabile):

Teorema 5: Dacă $u \in \mathcal{C}(\mathbb{A}_2)$ $(A_2 \subset \mathbb{R}^2)$, $\mathbb{A}_2$ domeniu şi $u(x_1, y_1) < 0$, $u(x_2, y_2) > 0$ $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in \mathbb{A}_2$, atunci va există $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$, astfel încât $u(x_0, y_0) = 0$.

$\lceil$ Considerăm segmentul ce uneste punctele $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ luând $x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ cu $t \in [0, 1]$. Punctul (x, y) parcurge acest segment când $t \in [0, 1]$ şi se va afla în $\mathbb{A}_2$. Considerând $g(t) = u(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$, aceasta este continuă pe [0, 1] iar $g(0) = u(x_1, y_1) < 0$, $g(1) = u(x_2, y_2) > 0$. Aplicnd funcţiei g teorema valorilor intermediare, va exista un $\theta \in [0, 1]$ astfel încât $g(\theta) = 0$, adică $u(x_0, y_0) = 0$, iar $x_0 = x_1 + \theta(x_2 - x_1), y_0 = y_1 + \theta(y_2 - y_1)\rfloor$.

În calcule efective de găsire a punctelor de continuitate ale unei functii $u \in \mathbb{S}_2(u \in \mathbb{S}_n, n \geq 3)$, se utilizează rezultatele obţinute din teoria limitelor funcţiilor de mai multe variabile şi a teoremei privind proprietătile funcţiilor continuie de mai multe variabile şi de o variabilă. Uneori sunt utile funcţiile (operatorii) de proiectie $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_j(x_1, x_2, ..., x_n) = x_j$, $j = 1, ..., n$, care au proprietatea de bază continuitatea $(p_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$, deoarece: $|p_j(x_1, x_2, ..., x_n) - p_j(y_1, y_2, ..., y_n)| = |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} < \varepsilon$ dacă $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} < \delta$ şi $\delta = \varepsilon$.

3.3.2 Prelungirea prin continuitate.

Dacă $u \in \mathbb{S}_2(\mathbb{A}_2 - (x_0, y_0))$ şi există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ atunci funcţia:

$$u^*(x, y) = \begin{cases} u(x, y), \text{ dacă } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ u_0 \text{ , dacă } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

va fi continuă în (x_0, y_0) deoarece sunt îndeplinite condiţiile de continuitate într-un punct.
Acest procedeu se numeşte prelungire prin continuitate.
Functia $u \in \mathbb{S}_2(\mathbb{A}_2)$ va fi continuă pe portiuni în $\mathbb{A}_2$, dacă $\mathbb{A}_2$ se poate scrie ca o reuniune finita de submutimi $\mathbb{A}_2 = \mathbb{G}_1 \cup \mathbb{G}_2 \cup ... \cup \mathbb{G}_k$, $k \geq 2$ $\mathbb{G}_j \cap \mathbb{G}_k = \emptyset$ pentru $j \neq k$, u fiind continuă separat în fiecare componentă îcchisa $\mathbb{G}_j$(deci exista limita finită în toate punctele frontierei $Fr\mathbb{G}_j$ limita fiind calculată din interiorul multimii $\mathbb{G}_j$).

Vom nota cu $u \sqsubseteq \mathcal{C}^*(\mathbb{A}_2)$.

Evident $u \in \mathcal{C}^*(\mathbb{A}_2)$ dacă există functţile continui $u_1, u_2, ..., u_k \in \mathcal{C}(\mathbb{A}_2)$ şi $u(x, y) = u_j(x, y)$, dacă $(x, y) \in \mathbb{G}_j$ $j = 1, 2, ..., k$.

3.3.3 Discontinuităţile funcţiilor cu mai multe variabile.

În ceeace priveste discontinuităţile unei funcţii cu n variabile independente, vom utiliza următoarele conveţii:
I. Dacă se verifică C_1, C_2 şi nu se verifică C_3 din definiţia iniţială a continuitaţii unei funcţii în (x_0, y_0) atunci (x_0, y_0) este un punct de discontinuitate aparentă(sau eliminabilă) pentru funcţia u. Aceasta se justifică prin aceea că prin modificarea valorii lui u în punctul (x_0, y_0) prin $u(x_0, y_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y)$, u devine continuă în acest punct.
II. Dacă u are limită infinită în punctul (x_0, y_0) adică $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \pm\infty$ atunci (x_0, y_0) este discontinuitate de tip pol.
III. Dacă $\mathbb{A}_2 = \overline{\mathbb{G}_{\nVdash}} \cup \overline{\mathbb{G}_2}$, $\underline{\mathbb{G}_1} \cap \underline{\mathbb{G}_2} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{G}_1} \cap \overline{\mathbb{G}_2} = \gamma$ (γ o curba din $\mathbb{A}_2$, iar în cazul $\mathbb{A}_3\gamma$ va fi o suprafată s) şi există limitele lui $u \in \mathbb{S}_2(\mathbb{A}_2)$ pe γ atât din interiorul lui $\mathbb{G}_1$ cât şi din interiorul lui $\mathbb{G}_2$ γ va fi o curbă (respectiv o suprafată) de salt pentru u; acest tip de discontinuitate se va numi de speţa ntâi (sau de tipul unu).
IV. Discontinuităţile lui u care nu se încadrează în I, II, III se vor numi discontinue de tipul al doilea, sau de speţa a doua.

3.4 Derivate parţiale.

Fie $\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, adică $(\forall)(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2, (\exists)r > 0$ astfel încât intervalul bidimensional $\mathbb{I}_2 = (x_0 - r, x_0 + r)(y_0 - r, y_0 + r) \subset \mathbb{A}_2$, r poate să depindă de punctul (x_0, y_0). Deoarece într-un pătrat se poate înscrie întotdeauna un disc de rază r¿0 cu centru în centru patratului si invers, în orice disc se poate înscrie un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate, poate fi înlocuit de discul $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$. În particular $\mathbb{A}_2$ va contine punctul (x_0, y_0) ca şi punctele $(x_0, y), y \in (y_0 - r, y_0 + r)$, $(x, y_0), x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.
Fără micşorarea generalităţii, se poate presupune $\mathbb{A}_2 = \mathbb{I}_2(\mathbb{I}_2$ fiind definit mai sus).
Dacă $f \in S(\mathbb{A}_2) = \mathbb{S}_2$, presupunem, fixând pe y cu y_0, că $f_1(x) = f(x, y_0)$ este derivabila în x_0.
În acest caz avem derivata: $f_1'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$,
care se noteaza cu: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sau $f_x'(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0)$.
Similar daca $f \in S(\mathbb{A}_2) = \mathbb{S}_2$, presupunem, fixând pe x cu x_0, că $f_2(y) = f(x_0, y)$ este derivabilă în y_0, atunci avem derivata:

$$f_2'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

care se notează cu: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sau $f_y'(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0)$.

Numerele reale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ se numesc derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f în punctul (x_0, y_0).

Dacă $f \in S(\mathbb{A}_3) = \mathbb{S}_3$, $\mathbb{A}_3$ o multime deschisă din $\mathbb{R}^3$ în mod asemănător vom putea construi numerele reale:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$,
considerând funcţiile $f_1(x) = f(x, y_0, z_0), f_2(y) = f(x_0, y, z_0), f_3(z) = f(x_0, y_0, z)$ şi calculând derivatele lor respectiv în x_0, y_0, z_0 şi procedeul se extinde.
Regulile de calcul ale acestor derivate parţiale vor coincide cu regulile de calcul ale derivatelor funcţiilor cu o variabilă independentă.
De exemplu $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ se obţine calculând derivata în raport cu variabila x a funcţiei în care y este considerat fixat, egal cu y_0 şi în rezultatul obţinut se înlocuieşte x cu x_0.
La fel $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ se obţine calculând derivata în raport cu variabila y a funcţiei în care x este considerat fixat, egal cu x_0 şi în rezultatul obţinut se înlocuieste y cu y_0.
Exemplu: $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3x^2 + 2y_0|_{x=x0} = 3x_0^2 + 2y_0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0 + 2y|_{y=y_0} = 2x_0 + 2y_0$.
Dacă renuntăm la indicile "0" adică înlocuim (x_0, y_0) cu (x, y) vom obţine funcţiille derivate parţiale de ordinul întâi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, care sunt definite pe $\mathbb{A}_2$ cu valori reale. Pentru exemplul anterior dat avem:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x + 2y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y$.

Derivând parţial aceste doua funcţii în punctul (x_0, y_0) vom obţine derivatele parţiale ale derivatelor de ordin întâi, care se vor numi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale lui f sau derivatele parţiale secunde. Se utilizează următoarele notaţii:
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) = D_1^2 f(x_0, y_0) = D_x^2 f(x_0, y_0)$, numită derivata parţială, în raport cu x, a derivatei parţiale a lui f, în raport cu x.
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = D_2 D_1 f(x_0, y_0) = D_y D_x f(x_0, y_0)$, numită derivata parţială, în raport cu y, a derivatei parţiale a lui f, în raport cu x.
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) = D_1 D_2 f(x_0, y_0) = D_x D_y f(x_0, y_0)$, numită derivata parţială, în raport cu x, a derivatei parţiale a lui f, în raport cu y.
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0) = D_2^2 f(x_0, y_0) = D_y^2 f(x_0, y_0)$, numită derivata parţială, în raport cu y, a derivatei parţiale a lui f, în raport cu y.

Daca $f \in S(\mathbb{A}_3) = \mathbb{S}_3$, $f = f(x, y, z)$ se pot defini nouă derivate parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f, pentru care se utilizează notaţii similare celor de la funcţii cu două variabile independente. Astfel vom avea:
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) = f_{xx}(x_0, y_0, z_0) = D_1^2 f(x_0, y_0, z_0) =$

$= D_x^2 f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_{yx}(x_0, y_0, z_0) = D_2 D_1 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_y D_x f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_{zx}(x_0, y_0, z_0) = D_3 D_1 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_z D_x f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) = f_{xy}(x_0, y_0, z_0) = D_1 D_2 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_x D_y f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) = f_{yy}(x_0, y_0, z_0) = D_2^2 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_y^2 f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_0, y_0, z_0) = f_{zy}(x_0, y_0, z_0) = D_3 D_2 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_z D_y f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial z})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) = f_{xz}(x_0, y_0, z_0) = D_1 D_3 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_x D_z f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial z})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) = f_{yz}(x_0, y_0, z_0) = D_2 D_3 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_y D_z f(x_0, y_0, z_0)$,
$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial z})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) = f_{zz}(x_0, y_0, z_0) = D_3^2 f(x_0, y_0, z_0) =$
$= D_z^2 f(x_0, y_0, z_0)$,

Derivatele partiale de ordin superor se definesc ntr-un mod similar astfel:

O derivată parţială de ordin $n+1$, pentru $f \in S(\mathbb{A}_2) = \mathbb{S}_2$, $f = f(x, y)$ este $D_x g = \frac{\partial g}{\partial x}$ sau $D_y g = \frac{\partial g}{\partial y}$ cu g o derivată parţială de ordin n a funcţiei $f \in \mathbb{S}_2$. Funcţia $f \in \mathbb{S}_2$, se spune cĂ este de clasĂ $\mathcal{C}^n(\mathbb{A}_2)$ şi se scrie $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{A}_2)$ dacă există toate derivatele parţiale de ordin mai mic sau egal cu $n \in \mathbb{N}$, aceste dereivate parţiale fiind toate continuie pe $\mathbb{A}_2$. Dacă $n = 0$ prin definiţie $\mathcal{C}^0(\mathbb{A}_2) = \mathcal{C}(\mathbb{A}_2)$ şi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{A}_2)$ înseamnă că f este continuă pe A_2. Dacă $n \in \mathbb{N}$, este arbitrar, vom spune că f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{A}_2$ sau $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{A}_2)$.

Derivatele parţiale de ordin $n \geq 2$ calculate în raport cu variabile diferite se numesc derivate partiale mixte. Vom arata ulterior ca dacă $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{A}_2)$, $n \geq 2$ derivatele parţiale mixte vor fi egale, în sensul următor: Dacă se deriveaza parţial f de k ori în raport cu x şi de m ori în raport cu y într-o ordine arbitrara, $k + m \leq n$, atunci se pot efectua aceste derivari în orice ordine, cu condiţia efectuării a k derivate parţiale în raport cu x şi m derivate parţiale în raport cu y. În particular dacă $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{A}_2)$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{A}_2$, iar daca $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{A}_3)$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$.

Derivatele parţiale vor fi utilizate în capitolul următor. În acest capitol le vom folosi pentru obţinerea unui criteriu de continuitate pentru funcţii de mai multe variabile independente.

<u>Teorema 6:</u> Dacă $f \in \mathbb{S}_n$, $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{R}^n$, este astfel încât admite derivate

parţiale de primul ordin marginite în $\mathbb{A}_n$, atunci f este uniform continuă pe $\mathbb{A}_n$.
$\lceil$ Vom arăta că f este functie Lipschitzană pe $\mathbb{A}_n$ şi deci în baza criteriului lui Lipschitz va fi uniform continuă pe $\mathbb{A}_n$. Vom lua, pentru uşurinţa demonstraţiei, cazul $n = 2$ şi deoarece avem:
$|f(x,y)-f(x',y)| = |\frac{\partial f}{\partial x}(x'',y)(x-x')| \leq M_1|x-x'| \leq M_1\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$
$|f(x',y)-f(x',y')| = |\frac{\partial f}{\partial y}(x',y'')(y-y')| \leq M_2|y-y'| \leq M_2\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$,
în baza teoremei creşterilor finite aplicată în primul caz, fixând pe y, iar în al doilea caz, fixând pe x', şi a mărginirii derivatelor de ordinul întâi, vom avea:
$|f(x,y)-f(x',y')| \leq |f(x,y)-f(x',y)| + |f(x',y)-f(x',y')| \leq$
$\leq 2M\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ adică:
$d(f(x,y), f(x',y')) \leq 2Md((x,y),(x',y'))$, adică f este funcţie Lipschitzană, iar $M = max M_1, M_2 \rfloor$.

3.5 Aplicaţii diferenţiale.

3.5.1 Scurtă prezentare.

Proprietăţile de trecere la limită şi de continuitate ale funcţiilor cu două sau mai multe variabile independente(reale) nu sunt suficiente pentru a determina proprietăţile acestora. Un instrument de bază în acest studiu îl constituie proprietatea de diferenţiabilitate (derivabilitate) a acestor funcţii, care joacă un rol esenţial în probleme de aproximare, de comportare, de determinare, a punctelor de optim sau de interpretări geometrice. Cadrul cel mai comod de prezentare unitară al acestei noţiuni (de diferenţiabilitate) îl constituie spaţiile vectoriale normate, $\mathbb{R}^n$ fiind un exemplu.
Punctul de plecare în teoria derivabilităţii(diferenţiabilităţii) îl constituie creşterea unei funcţii într-un punct, notată cu: $\Delta f(x_1,x_2,...,x_n;h_1,h_2,...,h_n) = f(x_1+h_1, x_2+h_2,...,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)$, presupunând că $f : \mathbb{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbb{A}_n$ deschisă iar $(h_1,h_2,...,h_n) \in \mathbb{R}^n$ se ia astfel încât $(x_1+h_1, x_2+h_2,...,x_n+h_n) \in \mathbb{A}_n$.

În cazul general al spatiilor vectoriale, se numeşte creşterea aplicatiei f n punctul $x \in \mathbb{A}$ relativa la elementul $h \in \mathbb{S}$ şi vom nota cu: $\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x)$ cu $h \in \mathbb{S}$ astfel încât $\{x, x+h\} \in \mathbb{A}$.

În cazul spatiilor vectoriale $\mathbb{R}^n$ vom nota cu $\ell_1, \ell_2, \ell_3, ...$ respectiv forme liniare, forme pătratice, forme cubice, etc., în $h_1, h_2, ..., h_n$ adică:
$\ell_1(h_1,h_2,...,h_n) = a_1h_1 + a_2h_2 + ... + a_nh_n = \sum_{j=1}^n a_jh_j$
$\ell_2(h_1,h_2,...,h_n) = a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + ... + a_{nn}h_n^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$ cu $a_{ij} = a_{ji}$.
$\ell_3(h_1,h_2,...,h_n) = a_{111}h_1^3 + 3a_{11}^2h_1^2h_2 + ... + a_{nnn}h_n^3 = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk}h_ih_jh_k$ cu $a_{iij} = a_{iji} = a_{jii}$.
....

Coeficienţii $a_i, a_{ij}, a_{ijk}, ...,$ nu depind de $(h_1, h_2, ..., h_n)$ dar pot depinde de $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Prsupunând că avem o descompunere de forma:
$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n; h_1, h_2, ..., h_n) = \ell_1(h_1, h_2, ..., h_n) + \ell_2(h_1, h_2, ..., h_n) + \ell_3(h_1, h_2, ..., h_n) + ...$, vom putea obtine informatii relative la câmpul f prin interpretarea formelor $\ell_1, \ell_2, \ell_3, ...$
Astfel, diferenţiala întâia a funcţiei f se va obţine cu ajutorul formei liniare ℓ_1, diferenţiala a doua a funcţiei f se va obţine cu ajutorul formei liniare ℓ_2, diferenţiala a treia a funcţiei f se va obţine cu ajutorul formei liniare ℓ_3,... etc. În particular, se pot obţine diverse posibilitaţi de aproximare pentru $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n)$, pastrnd doar primul termen, ℓ_1 sau primul şi al doilea $\ell_1 + \ell_2$, etc. Vom avea următoarele relaţii de aproximare:
Dacă $\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n; h_1, h_2, ..., h_n) \approx \ell_1(h_1, h_2, ..., h_n)$, atunci:
$f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) \approx f(x_1, x_2, ..., x_n)+\ell_1(h_1, h_2, ..., h_n)$. Vom spune că avem o aproximare de ordin întâi pentru $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n)$.
Dacă: $\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n; h_1, h_2, ..., h_n) \approx \ell_1(h_1, h_2, ..., h_n) + \ell_2(h_1, h_2, ..., h_n)$, atunci: $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) \approx f(x_1, x_2, ..., x_n) + \ell_1(h_1, h_2, ..., h_n) + \ell_2(h_1, h_2, ..., h_n)$. Vom spune ca avem o aproximare de ordinul al doilea pentru $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n)$.
Evident nu la orice functie f sunt aplicabile cele spuse mai sus. Vom arata ulterior ca în ipoteza $f \in \mathcal{C}^1$, avem posibilitatea determinarii formei liniare ℓ_1, dacă $f \in \mathcal{C}^2$, avem posibilitatea determinării formei liniare ℓ_1 cât şi posibilitatea determinarii formei liniare ℓ_2, etc.

3.5.2 Definiţia generală a diferenţiabilităţii.

Fie S_1, S_2 două spaţii vectoriale normate cu normele notate respectiv cu $\|\cdot\|_1$ si $\|\cdot\|_2$. Dacă $\mathbb{A} \subset \mathbb{S}_1$ este o mulţime deschisă iar $f : \mathbb{A} \to \mathbb{S}_2$ este o aplicaţie dată atunci vom spune că f este o aplicaţie diferenţiabilă în $x \in \mathbb{A}$ dacă pentru orice $h \in \mathbb{S}_1$ astfel ca $x + h \in \mathbb{A}$, are loc descompunerea:

$$f(x + h) - f(x) = D_x h + \alpha(x, h), \tag{3.2}$$

în care:

$$D_x : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2, \tag{3.3}$$

este o <u>aplicaţie liniară şi marginită</u> (adică $D_x(ah_1 + bh_2) = aD_xh_1 + bD_xh_2$ pentru orice $h_1, h_2 \in \mathbb{S}_1$ iar a, b constante ale corpului peste care este definit spatiul $\mathbb{S}_1$).

D_x este o aplicaţie marginită, se traduce prin:
$\|D_xh\|_2 \leq M\|h\|_1$ cu $M > 0$ şi $h \in \mathbb{S}_1$
$\alpha(x, h)$ este o funcţie de două variabile cu valori în S_2 cu proprietatea:

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_2}{\|h\|_1} = 0 \tag{3.4}$$

Observăm că (3.4) se mai poate pune şi sub forma :

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \|\beta(x,h)\|_2 = 0 \tag{3.5}$$

dacă se consideră $\alpha(x,h) = \|h\|_1 \beta(x,h)$.

Î n situaţia aceasta, diferenţiala lui f în punctul x este egală cu $D_x h$ şi se notează cu $(df)(x) = df(x)$ adică

$$D_x h = df(x) \tag{3.6}$$

iar aplicaţia liniară şi marginită D_x este derivata lui f în punctul x şi se notează prin $f'(x)$ sau:

$$D_x = f'(x) \tag{3.7}$$

Egalitatea (3.2) se va scrie sub forma:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) + a(x,)h, \tag{3.8}$$

iar (3.6) sub forma:

$$df(x) = f'(x)h. \tag{3.9}$$

În continuare vom da o interpretare practică a diferentialei, astfel: Creşterea aplicaţiei f poate fi aproximată prin diferenţiala lui f în punctul x sau:

$$\Delta f(x;h) \approx df(x) = f'(x)h. \tag{3.10}$$

Proprietăţile generale ale diferenţialei şi ale derivatei unei funcţii f vor fi punctate prin următoarele teoreme:

Teorema 7: Dacă f este diferenţiabilă în x atunci f este continua în $x \in \mathbb{A}$.
$\lceil$ Notând cu $y = x + h \in \mathbb{A}$ din (3.2) rezultă $\|f(y) - f(x)\|_2 = \|D_x h + a(x,h)\|_2 \leq \|D_x h\|_2 + \|a(x,h)\|_2 \leq M\|h\|_1 + \|\beta(x,h)\|_2 \|h\|_1 \leq (M+\varepsilon)\|h\|_1 \approx (M+e)\|x-y\|_1$. Penultimul termen este rezultatul faptului că $\|\beta(x,h)\|_2 \to 0$. Deci $\|\beta(x,h)\|_2 < \varepsilon \rfloor$.

Teorema 8: Dacă $f'(x) = D_x$ este derivata lui f, $f : \mathbb{A} \to \mathbb{S}_2$, diferenţiabilă în x, atunci $f'(x)$ este unic determinată.
$\lceil$ Presupunâ nd prin absurd că odată cu (3.2) avem şi $f(x+h) - f(x) = D_x^* h + \alpha^*(x,h)$, $D_x^* h$ şi α^* având aceleaşi proprietăţi ca $D_x h$ şi α va rezulta: $D_x h - D_x^* h = \alpha^*(x,h) - \alpha(x,h) (\forall) h \in \mathbb{S}_1$ astfel ca $x + h \in \mathbb{A}$. Ţinând cont de (3.4), care este verificata atât de α cât şi de α^* rezultă:
$0 \leq \frac{\|D_x h - D_x^* h\|_2}{\|h\|_1} = \frac{\|\alpha^*(x,h) - \alpha(x,h)\|_2}{\|h\|_1} \leq \frac{\|\alpha^*(x,h)\|_2}{\|h\|_1} + \frac{\|\alpha(x,h)\|_2}{\|h\|_1}$,

şi pentru $\|h\|_1 \to 0$ vom avea: $\lim\limits_{\|h\|_1 \to 0} \dfrac{\|D_x h - D_x^* h\|_2}{\|h\|_1} = 0$

Dacă presupunem un $h_0 \in \mathbb{S}_1$ cu $h_0 + x \in \mathbb{A}$ şi $\|h\|_1 > 0$ pentru care $D_x h_0 \neq D_x^* h_0$ şi $\frac{\|D_x h - D_x^* h\|_2}{\|h_0\|_1} = a > 0$, atunci pentru orice $t > 0$ vom avea :

$a = \frac{t\|D_x h - D_x^* h\|_2}{t\|h_0\|_1} = \frac{\|D_x(th) - D_x^*(th)\|_2}{\|th_0\|_1}$. Notnd cu $h = th_0$ evident $\|h\|_1 \to 0$, dacă $t \to 0$ în timp ce $\lim\limits_{\|h\|_1 \to 0} \dfrac{t\|D_x h - D_x^* h\|_2}{\|h\|_1} = a \neq 0$, ceea ce contrazice relatia de mai sus. Asadar nu exista h_0 astfel ca $D_x h_0 \neq D_x^* h_0$ şi deci $D_x h = D_x^* h$ pentru orice $h \in \mathbb{S}_1$ astfel ca $x + h \in \mathbb{A}$ şi deci $D_x^* = D_x = f'(x) \rfloor$.

Teorwma 9: Dacă $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{S}_2 \mathbb{A} \subset \mathbb{S}_1$, $\mathbb{A}$ deschisa, sunt diferenţiabile în $x \in \mathbb{A}$ atunci λf şi $f + g$ sunt diferenţiabile în x şi $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

$\lceil$ Deoarece $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ vom avea:
$(\lambda f)(x + h) - (\lambda f)(x) = \lambda f(x + h) - \lambda f(x) = \lambda[f(x + h) - f(x)] = \lambda[f'(x)h + \alpha(x, h)]$ şi cum $\lambda f'(x)$ este o aplicaţie liniară şi mărginită ca şi $f'(x)$ iar $\frac{\|\lambda\alpha\|_2}{\|h\|_1} = \frac{|\lambda|\|\alpha\|\|_2}{\|h\|_1} \to 0$ se deduce că λf este diferenţiabilă şi $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
Apoi :$(f + g)(x + h) - (f + g)(x) = f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x) = [f(x + h) - f(x)] + [g(x + h) - g(x)] = f'(x)h + \alpha_f(x, h) + g'(x)h + \alpha_g(x, h) = [f'(x) + g'(x)]h + \alpha_f(x, h) + \alpha_g(x, h)$ şi cum:
$0 \leq \frac{\|\alpha_f(x,h) + \alpha_g(x,h)\|_2}{\|h\|_1} \leq \frac{\|a_f(x,h)\|_2}{\|h\|_1} \frac{\|a_g(x,h)\|_2}{\|h\|_1} \to 0$ rezultă că:
$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \rfloor$.

Pentru o aplicaţie $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R} = \mathbb{S}_2$ vom defini punctele de extrem local din $\mathbb{A}$:
Punctul $x_0 \in \mathbb{A}$ se numeşte punct de maxim(minim) local dacă pentru orice punct $x \in \mathbb{A}$ din vecinătatea lui x_0 vom avea:
$f(x) - f(x_0) \leq 0(f(x) - f(x_0) \geq 0)$.

Teorema 10:Dacă $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{A}$ deschisă, are o valoare extremă în $x_0 \in \mathbb{A}$ (un maxim sau un minim) atunci dacă f este diferenţiabilă în x_0 în mod necesar $f'(x_0) = 0$.

$\lceil$ Presupunând prin absurd că ar exista un $h_0 \in \mathbb{S}_1$ astfel ca $x_0 + h_0 \in \mathbb{A}$ şi $f'(x_0)h_0 > 0$, atunci scriind $f(x_0 + th_0) - f(x_0) = tf'(x_0)h_0 + \alpha(x_0, th_0)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi dacă ţinem cont de interpretarea practică a diferenţialei avem: $f(x_0 + th_0) - f(x_0) \approx tf'(x_0)h_0$ vom deduce că $f(x_0 + th_0) - f(x_0) < 0$ dacă $t < 0$ şi $f(x_0 + th_0) - f(x_0) > 0$ dacă $t > 0$ ceea ce spune că x_0 nu este punct extrem. Dacă x_0 ar fi punct de maxim atunci $f(x_0 + th_0) - f(x_0) < 0$ şi deci $tf'(x_0)h_0 < 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ ori dacă $t > 0$ în ipoteza $f'(x_0)h_0 > 0$ vom avea $tf'(x_0)h_0 > 0$. Dacă vom presupune: $f'(x_0)h_0 < 0$ vom ajunge la fel la o contrazicere urmând aceeaşi logică. Deci neapărat trebuie ca $f'(x_0)h_0 = 0$ pentru orice $h \in \mathbb{S}_1$ cu $x_0 + h \in \mathbb{A}$, şi deci în mod necesar $f'(x_0) = 0\rfloor$.

Observatie: Vom vedea în cele ce urmează că se poate ca $f'(x_0) = 0$ fară ca x_0 să fie punct de extrem.

Teorema 11: Dacă se consideră $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_3$ trei spaţii normate şi mulţimile $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deschise din $\mathbb{S}_1$ şi respectiv $\mathbb{S}_2$ precum şi aplicaţiile $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $g : \mathbb{B} \to \mathbb{S}_3$, diferenţiabile în punctele $x_0 \in \mathbb{A}$ şi respectiv în $y_0 \in \mathbb{B}$ atunci aplicaţia compusă $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{S}_3$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ este diferenţiabilă în x_0 şi are loc

egalitatea:
$(g\circ f)'(x_0)h = g'(f(x_0))f'(x_0)h$.
$\lceil$ Prin ipoteză avem: $f(x_0+h_0)-f(x_0) = f'(x_0)h+\alpha(x_0,h), g(y_0+k)-g(y_0) = g'(y_0)k+\alpha_g(y_0,k)$. Calculând creşterea lui $g\circ f$ vom avea $(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0) = g[f(x_0+h)]-g[f(x_0)] = g[f(x_0)+f'(x_0)h+a_f(x_0,h)]-g[f(x_0)] = g(y_0+k)-g(y_0)$. Am notat $k = f'(x_0)h - a_f(x_0,h)$. Deoarece g este diferenţiabilă în y_0 avem: $g(y_0+k)-g(y_0) = g'(y_0)k+\alpha_g(y_0,k)$ şi deci $(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0) = g'(y_0)[f'(x_0)h+a_f(x_0,h)]+\alpha_g(y_0,k) = g'(y_0)f'(x_0)h+ g'(y_0)a_f(x_0,h)+a_g(y_0,k)$. Dacă notăm cu $y(x_0,h) = \alpha_{g\circ f}(x_0,h) = g'(y_0)\alpha_f(x_0,h)+ \alpha_g(y_0,k)$ şi vom arăta că $\frac{\|y\|_3}{\|h\|_1}\to 0$ dacă $\|h\|_1\to 0$ teorema va fi demonstrată.
Cum
$0\le \frac{\|y\|_3}{\|h\|_1} = \frac{\|g'(y_0)\alpha_f(x_0,h)+\alpha_g(y_0,k)\|_3}{\|h\|_1} \le \|g'(y0)\|_3\frac{\|\alpha_f(x0,h)\|_2}{\|h\|_1}+\frac{\|\alpha_g(y_0,k)\|_3}{\|k\|_2}\frac{\|f'(x_0)h+\alpha_f(x_0,h)\|_3}{\|h\|_1}\le$
$\|g'(y0)\|_3\frac{\|\alpha_f(x0,h)\|_2}{\|h\|_1}+(\|f'(x_0)\|_2+\frac{\|\alpha_f(x_0,h)\|_2}{\|h\|_1})\frac{\|\alpha_g(y_0,k)\|_3}{\|k\|_2}$
Ori în condiţiile diferenţiabilităţii lui f şi g termenul ultim tinde la zero$\rfloor$.

Putem considera şi relaţia:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0), \tag{3.11}$$

numită relaţia de derivare a funcţiilor compuse.

3.5.3 Diferenţiala şi derivata unor aplicaţii concrete.

I. Cazul $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}, \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}, \mathbb{A} = (a,b), a<b\ f:(a,b)\to\mathbb{R}$. În acest caz:
$f(x+h)-f(x) = D_xh+\alpha(x,h), h\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{A}, x+h\in\mathbb{A}$.
După cum se ştie, din şcoală singurele aplicaţii liniare şi mărginite, în acest caz, sunt cele de forma:
$\ell(x) = cx$ pentru $c\in\mathbb{R}, c\neq 0$, care îndeplinesc deci proprietatea:
$\ell(ah_1+bh_2) = a\ell(h_1)+b\ell(h_2)$

În cazul acesta $D_x = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(x,h)}{h}$ şi deci $D_x = f'(x)$.
$f'(x)$ este deci derivata lui f în x, cunoscută din liceu.

Diferenţiala lui f în punctul x este $(df)(x) = f'(x)h$ şi apare ca un produs între $f'(x)$ şi h.
Considerând funcţia "identitate" $f(x) = x$ avem:
$f(x+h)-f(x) = x+h-x = h = f'(x)h+\alpha(x,h) = h+\alpha(x,h)$
şi deci avem $\alpha(x,h) = 0$. Dacă vom lua creşterea funcţiei $f(x) = x$ vom avea: $\Delta x = h\approx dx$. Astfel se poate lua n loc de h simbolul dx (care de fapt îl înlocuieşte) şi pentru alte funcţii diferenţiabile şi se notează cu $(df)(x) = f'(x)dx$.

Apare astfel posibilitatea exprimării derivatei ca un cât:

$$f'(x) = \frac{(df)(x)}{dx}. \tag{3.12}$$

Pentru $x = x_0$ şi $x_0 + h = x$ vom avea:

$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x_0, x-x_0)$ ceea ce poate antrena existenţa unei funcţii $\beta(x_0, x-x_0) = \frac{\alpha(x_0,x-x_0)}{|x-x_0|}$, astfel ca $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x_0, x-x_0) = 0$.

II. Cazul $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}, \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^k, k > 1, k \in \mathbb{N}, A = (a, b), a < bf : (a, b) \to \mathbb{R}^k$.

În acest caz:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))^t = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x+h) \\ f_2(x+h) \\ \vdots \\ f_k(x+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x+h) - f_1(x) \\ f_2(x+h) - f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x+h) - f_k(x) \end{pmatrix}$$

Ţinând cont de **I**, pentru fiecare componentă, $f_j(x), j = 1, 2, ...k$ vom avea:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} D_{1x}h + \alpha_1(x, h) \\ D_{2x}h + \alpha_2(x, h) \\ \vdots \\ D_{kx}h + \alpha_k(x, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1x} \\ D_{2x} \\ \vdots \\ D_{kx} \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} \alpha_1(x, h) \\ \alpha_2(x, h) \\ \vdots \\ \alpha_k(x, h) \end{pmatrix} =$$

$= D_x h + \alpha(x, h)$.

Apare astfel derivata unei funcţii vector ca un vector cu componente derivatele acestora:

$$D_x = f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_k'(x) \end{pmatrix}$$

iar diferenţiala:

$$(df)(x) = \begin{pmatrix} (df_1)(x) \\ (df_2)(x) \\ \vdots \\ (df_k)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(x)dx \\ f_2'(x)dx \\ \vdots \\ f_k'(x)dx \end{pmatrix}$$

Funcţia $\alpha(x, h)$ este tot o funcţie vector de forma:

$$\alpha(x, h) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x, h) \\ \alpha_2(x, h) \\ \vdots \\ \alpha_k(x, h) \end{pmatrix}$$

cu proprietatea $\lim\limits_{\|h\|_1 \to 0} \dfrac{\|\alpha(x,h)\|_2}{\|h\|_1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a_1^2(x,h) + a_2^2(x,h) + ... + a_k^2(x,h)}}{|h|} = 0$. Tot prin tradiţie vom nota cu dx în loc de h şi vom avea: $(df)(x) = (f_1'(x), f_2'(x), ..., f_k'(x))^t dx$

Exemplu: $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (2+x, 3x^2, 1-x^4) = \begin{pmatrix} 2+x \\ 3x^2 \\ 1-x^4 \end{pmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6x \\ -4x^3 \end{pmatrix}$$

$$(df)(x) = \begin{pmatrix} dx \\ 6xdx \\ -4x^3dx \end{pmatrix}$$

Dacă vom lua $x = -1$ atunci:

$$f'(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(df)(-1) = \begin{pmatrix} dx \\ -6dx \\ 4dx \end{pmatrix}$$

Interpretarea geometrică a derivatei aplicaţiilor diferenţiale II

Pentru început vom considera $k = 2$. Fie astfel $f : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ de forma $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$(vom conveni, pentru uşurinta expuneri renuntarea la scrierea vectorului f sub forma de coloană) pentru orice $t \in (a,b)$. O astfel de aplicaţie se numeşte curbă plană, iar daca $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0(a,b)$ atunci se va numi curbă continuă iar iar dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(a,b)$ atunci se va numi curbă netedă (în practică f va fi o curba neteda pe portiuni cnd $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1_*(a,b)$, aceasta înseamnă că φ, ψ sunt de clasa $\mathcal{C}^1(a,b)$ exceptând un număr finit de puncte din (a,b) în care există limite laterale finite pentru φ şi ψ şi derivatele lor. Mulţimea punctelor din planul $\mathbb{R}^2$ de forma:
$H_f = \{(x,y) | x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a,b)\}$ se numeste suportul sau urma sau hodograful curbei f.

Derivata aplicaţiei f, notată cu $f'(t)$ se va defini prin:
$f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$,

dacă această limită există. Desigur aceasta se întmplă dacă funcţiile φ si ψ sunt derivabile în punctul $t \in (a, b)$, deoarece:
$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{(\varphi(t+h),\psi(t+h))^t-(\varphi(t),\psi(t))^t)}{h}$
iar trecerea la limita se realizeaza în R^2, după componente, deci:
$f'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))^t$

Din punct de vedere geometric, existenţa derivatei $f'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))^t$ într-un punct t_0 are drept consecinţă posibilitatea trasării tangentei la hodograful lui f într-un punct (x_0, y_0) dat de $f(t_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))^t$, notând deci $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$. Ecuaţia carteziană a tangentei în (x_0, y_0) va fi:

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t0)},$$

care se obţine prin trecerea la limită pentru $h \to 0$ în ecuaţia dreptei, din R^2, care trece prin punctele $f(t_0)$ şi $f(t_0 + h)$ adică în ecuaţia:

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0))} = \frac{y - \psi(t0)}{\psi(t0 + h) - \psi(t0))},$$

după împărţirea ambilor numitori la $h \neq 0$.

Se poate observa pe o figură că tangenta la hodograful curbei $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))^t$ într-un punct curent al acestuia este poziţia limită (dacă există) a unei secante care trece prin două puncte distincte ale lui H_f şi făcând ca unul din puncte prin deplasarea pe H_f să tindă către celalalt. Calculele anterioare arată că va exista tangenta la H_f în punctul $f(t_0)$ dacă există $f'(t_0)$.

În cazul spaţiului R^3 consideraţiile sun perfect similare celor din R^2:
Dacă $f : (a, b) \to R^3$ de forma $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))^t$ pentru orice $t \in (a, b)$, unde φ, ψ, χ sunt funcţii reale obişnuite de o variabilă reală. O astfel de aplicaţie se numeşte curbă spaţială, sau curbă strâmbă din R^3. La fel dacă $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{C}^0(a, b)$ atunci se va numi curbă continuă iar dacă $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{C}^1(a, b)$ atunci se va numi curbă netedă (în practică f va fi o curbă netedă pe porţiuni când $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{C}_0^1(a, b)$, deci φ, ψ, χ va fi de clasa $\mathcal{C}^1(a, b)$ exceptând un număr finit de puncte din (a, b) în care există limite laterale finite pentru φ, ψ, χ şi derivatele lor. Mulţimea punctelor din planul R^3 de forma:

$$H_f = \{(x, y, z)|x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in (a, b)\}$$

se numeşte suportul sau urma sau hodograful curbei f. Existenţa derivatei aplicaţiei f, notată cu $f'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))^t$ într-un punct t are drept consecinţă posibilitatea trăsarii tangentei la hodograful lui f într-un punct (x, y, z) dat de $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))^t$, notând deci $x = \varphi(t), y = \psi(t), z =$

$\chi(t)$. Ecuaţia carteziană a tangentei va fi atunci:

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z-\chi(t_0)}{\chi'(t0)}.$$

Noţiunea poate fi extinsă şi în cazul $k > 3$.

Interpretarea mecanică a derivatei aplicaţiilor diferenţiale II

Dacă vom considera $k = 2$ şi vom lua norma lui f, adică $\|f\| = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}$ atunci $\|f'\| = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ iar dacă H_f este traiectoria unui punct material (având masa egală cu unitatea) în R^2, atunci $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))^t$ va defini poziţia punctului pe traiectoria H_f iar $\|(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\|$ va fi viteza medie a punctului între punctele $f(t+h)$ şi $f(t)$ de pe traiectorie. $\|f'\| = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ este atunci viteza instantanee în punctul $f(t)$. Numărul real pozitiv $\|f'\|$ se numeşte viteza pe H_f în punctul $f(t)$.
În cazul spaţiului R^3 consideraţiile sunt perfect similare celor din R^2: Viteza pe H_f n punctul $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))^t$, este egală cu:

$$\|f'\| = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}$$

Noţiunea poate fi extinsă şi în cazul $k > 3$.
III. Cazul $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}^m, \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}, \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^m$ deschisă. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$.
În acest caz: $x \in \mathbb{A}$ este de forma $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, vector linie, din $\mathbb{R}^m, h \in \mathbb{R}^m$ este la fel ca $x, h = (h_1, h_2, ..., h_m)$. Aplicaţiile liniare şi mărginite $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sunt de forma $\ell(h) = \ell_1 h_1 + \ell_2 h_2 ... + \ell_m h_m$ unde $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_m$ sunt componentele unui vector constant iar $\ell(h) = (\ell, h) = \ell h$ reprezintă un produs scalar. Prin urmare:
$f(x+h) - f(x) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_m + h_m) - f(x1, x2, ..., x_m) =$
$D_x h + \alpha(x, h) = D_x^1 h_1 + D_x^2 h_2 + ... + D_x^m h_m + \alpha(x_1, x_2, ..., x_m; h_1, h_2, ..., h_m)$.
Vom căuta legătura între, $D_x^1, D_x^2, ..., D_x^m$ şi f. Cum h este arbitrar vom lua succesiv $h = (h_1, 0, ..., 0), h = (0, h_2, 0, ..., 0), ..., h = (0, ...0, h_m)$.
Astfel în primul caz avem:
$f(x_1 + h_1, x_2, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m) = D_x^1 h_1 + \alpha(x_1, x_2, ..., x_m; h_1, 0, ..., 0)$
Împărţind la $h_1 \neq 0$ şi făcând $h_1 \to 0$ vom avea:
$\lim\limits_{h_1 \to 0} \dfrac{f(x_1 + h_1, x_2, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)}{h_1} = D_x^1$

În cazul al doilea avem:
$f(x_1, x_2 + h_2, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m) = D_x^2 h_2 + \alpha(x_1, x_2, ..., x_m; 0, h_2, ..., 0)$
Împărţind la $h_2 \neq 0$ şi făcând $h_2 \to 0$ vom avea:
$\lim\limits_{h_2 \to 0} \dfrac{f(x_1, x_2 + h_2, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_m)}{h_2} = D_x^2$

Vom avea în cazul general:
$$\lim_{h_j\to 0}\frac{f(x_1,...,x_j+h_j,...,x_m)-f(x_1,...,x_j,...,x_m)}{h_j}=D_x^j$$
Astfel cantităţile obţinute prin trecere la limită sunt de fapt derivatele parţiale de ordinul întâi care se notează prin:
$D_x^2=\frac{\partial f}{\partial x_1}, D_x^2=\frac{\partial f}{\partial x_2},...,D_x^m=\frac{\partial f}{\partial x_m}$.

Am văzut, mai înainte, că exista şi alte notaţii pe care noi nu le vom folosi. Revenind la diferenţiabilitate în acest caz vom avea:

$f(x+h)-f(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}h_m+\alpha(x;h)$
şi atunci:
$(df)(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m$,
reprezintă diferenţiala funcţiei f în x şi pentru ca partea dreapta a ultimei relaţii reprezintă un produs scalar vom mai scrie:
$(df)(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x))^t(h_1,h_2,...,h_m)$.
Apare astfel derivata lui f sub forma unui vector si anume:
$f'(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_m})^t$
care se mai numeşte vectorul "gradient" al lui f sau mai simplu gradf şi se mai notează prin simbolul ∇(numit nabla) astfel:
$\nabla f(x)=gradf(x)=f'(x)$.
Dacă se consideră pe rând $f=x_1,f=x_2,...,f=x_m$, vom avea $dx_1=h_1,dx_2=h_2,...,dx_m=h_m$ şi din acest motiv se obişnuieste să se scrie $dx_1,dx_2,...,dx_m$ în loc de $h_1,h_2,...,h_m$ şi $\nabla f(x)$ în loc de $f'(x)$ şi atunci:
$(df)(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)dx_m$,
iar $\nabla f(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x))^t$, omiţând câteodata semnul transpus iar
$(df)(x)=\nabla f(x)dx$ unde $dx=(dx_1,dx_2,...,dx_m)$.
Se poate face următoarea observaţie utilă în aplicaţii: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ se obţine derivâ nd în raport cu variabila x_j ca şi când celelalte variabile sunt constante.
Exemple: 1°. $f(x_1,x_2)=x_1+x_1x_2-x_1^2x_2^3, x=(x_1,x_2)$.
$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1+x_2-2x_1x_2^3;\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1-3x_1^2x_2^2$
$\nabla f(x)=(1+x^2-2x_1x_2^3,x_1-3x_1^2x_2^2)^t;(df)(x)=(1+x^2-2x_1x_2^3)dx_1+(x_1-3x_1^2x_2^2)dx_2$
şi vom avea:
$(\nabla f(x))(1,-1)=(2,-2);((df))(1,-1)=2dx_1-2dx_2$.
2°. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2x_3,\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1x_3,\frac{\partial f}{\partial x_3}=x_1x_2;\nabla f(x)=(x_2x_3,x_1x_3,x_1x_2)^t$ şi $(df)(x)=x_2x_3dx_1+x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3$

Completare:

Dacă vom considera: $x_0=(x_0^1,x_0^2,...,x_0^m);h=(h_1,h_2,...,h_m)$ şi $x_0+h=(x_0^1+h_1,x_0^2+h_2,...,x_0^m+h_m)=x$ avem:
$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x_0,x-x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1-x_0^1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2-$

$x_0^2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)(x_m - x_0^m) + \alpha(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m; x_0^1 - x_1, x_0^2 - x_2, ..., x_0^m - x_m)$
şi atunci condiţia pentru α va fi:
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|\alpha|}{\|x - x_0\|} = \lim\limits_{\|x - x_0\| \to 0} \frac{|\alpha|}{\sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2 + ... + (x_m - x_0^m)^2}} = 0$
şi $\alpha(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m; x_0^1 - x_1, x_0^2 - x_2, ..., x_0^m - x_m) =$
$\sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2 + ... + (x_m - x_0^m)^2}\beta(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m; x_0^1 - x_1, x_0^2 - x_2, ..., x_0^m - x_m)$ şi $\beta \to 0$ pentru $x \to x_0$.
IV.Cazul $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}^m, \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^k, m, k > 1, m, k \in \mathbb{N}, \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{A}$ deschisă. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^k$.

În acest caz aplicaţiile f sunt de forma: $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^k$ unde $x \in \mathbb{A}$ este de forma $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, vector linie, din $\mathbb{R}^m$, iar $f(x) \in \mathbb{R}^k$ şi este de forma:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))^t = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

iar $f_j : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ pentru $j = 1, 2, ..., k$, deci toţi f_j sunt din categoria **III**, şi deci:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x+h) - f_1(x) \\ f_2(x+h) - f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x+h) - f_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m + \alpha_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f_2}{\partial x_m}dx_m + \alpha_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_m}dx_m + \alpha_k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} =$$

$(df)(x) + \alpha(x, h) = f'(x)dx + \alpha(x, h)$

Apare astfel derivata lui f, $f'(x)$, de forma unei matrice cu k linii şi m coloane.

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

numită matricea Jacobi sau jacobiana funcţiei f, având un număr de k linii, egal cu numărul de componente ale funcţiilor si un număr de m coloane, egal cu numărul de componente variabile ale funcţiei.

V.Cazul $\mathbb{S}_1 = \mathbb{C}, \mathbb{S}_2 = \mathbb{C}, \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$;$\mathbb{A}$ deschisă $z \in \mathbb{A}$.

În acest caz $z = x+iy, h \in \mathbb{C}, h = h_1+ih_2$ şi $z+h \in \mathbb{A}, f$ este diferenţiabilă în $z \in \mathbb{A}$ $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$. Prin urmare, vom avea:
$f(z+h) - f(z) = D_z h + \alpha(z,h)$
unde $D_z = D_1+iD_2, \alpha = \alpha_1+i\alpha_2$. Cum $f(z) \in \mathbb{C}$ rezultă că $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ cu $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $f(z+h) = f(x+h_1+i(y+h_2)) = u(x+h_1, y+h_2) + iv(x+h_1, y+h_2)$ şi $f(z+h) - f(z) = [u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y)] + i[v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y)] = (D_1+iD_2)(h_1+ih_2) + \alpha_1 + i\alpha_2$. Separând partea reală şi partea imaginară vom avea:

$$\begin{cases} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = D_1 h_1 - D_2 h_2 + \alpha_1 \\ v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = D_2 h_1 + D_1 h_2 + \alpha_2 \end{cases}$$

care arată că u si v sunt două funcţii de două variabile diferenţiabile. Pe de alta parte ţinând cont de punctul cazul**III**, cazul $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + \alpha_1 \\ v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + \alpha_2 \end{cases}$$

Comparând cele două rezultate vom avea:

$$D_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ D_2 = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.13}$$

numite relaţiile Cauchy-Riemann. Aceste relatii conduc la concluzia că pentru o funcţie $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ să fie diferenţiabilă într-un punct $z \in \mathbb{A}$ nu este suficient ca u şi v, componentele lui f, să fie diferenţiabile în A ci mai trebuie să fie indeplinite condiţiile Cauchy- Riemann, de mai sus.

Exemplu: $f(z) = z^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$.
$f(z+h) - f(z) = (z+h)^2 - z^2 = 2zh + h \Rightarrow D_z = 2z, \alpha = h^2$.

Dacă se iau două funcţii $u(x,y), v(x,y)$ reale diferenţiabile într-un punct (x,y), atunci considerăm $f = u + iv$ ca o aplicaţie de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$. Dacă nu vor fi indeplinite condiţiile de mai sus f nu va fi diferenţiabilă. Presupunând că sunt respectate condiţiile Cauchy-Riemann atunci f este derivabilă şi vom putea scrie:

$$f'(z) = D_1 + iD_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

iar dacă se va nota cu $dx = h_1, dy = h_2$ deci $dz = dx + idy = h$.

$$(df)(z) = f'(z)dz = (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})dz = (\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y})dz = (\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x})dz = (\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y})dz$$

3.5.4 Proprietăţi ale diferenţialei si derivatei aplicaţiilor concrete.

Ne vom situa mai întâi în cazul **I** al precedentului subcapitol.

Aproximarea funcţiilor cu ajutorul diferenţialei.

Ţinând cont de semnificaţia practică a diferenţialei în acest caz:

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

şi vom folosi această formulă pentru calculul aproximtiv al unor valori date de anumite funcţii.

Exemple:

1°. Să se calculeze, cu aproximaţie, $\sin(46°)$. Deoarece $\sin(x+h)-\sin(x) \approx \sin(x)h$ pentru $x = 45°, h = 1°$ sau $x = \frac{\pi}{4}$ radiani şi $h = \frac{\pi}{180}$ radiani atunci: $\sin(46°) \approx \sin(45°) + (cos(45°)1°= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} = 0,7194$ 2°. Să se calculeze $\sqrt[3]{24}$. Deoarece $24 = 27-3$ considerând $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 27, h = -3 \Rightarrow \sqrt[3]{24} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(-3) = 3 - \frac{1}{9} = 2,8888$

Teorema lui Rolle.

f continuă pe $[a,b], f$ derivabila pe (a,b) atunci dacă $f(a) = f(b)$ există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel ca $f'(c) = 0$.

$\lceil$ Deoarece f este continua într-un interval închis işi va atinge valorile extreme în puncte din $[a,b]$. Cum $f(a) = f(b)$, daca f nu este constantă f îşi va atinge valoarea maxima(dacă $f(x_0) > f(a)$) respectiv valoarea minima (dacă $f(x_0) < f(a)$) cel putin într-un punct $c \in (a,b)$ în baza teoremei de la continuitate iar în baza teoremei 4 de la proprietîţile generale ale diferenţialei vom avea $f'(c) = 0.\rfloor$

Teorema lui Cauchy.

f,g continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) iar $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in (a,b)$ atunci $g(b) - g(a) \neq 0$ şi există un număr $c \in (a,b)$ astfel ca:
$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
$\lceil$ Pentru demonstraţie vom defini funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin :

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x)\ g(x)\ 1 \\ f(a)\ g(a)\ 1 \\ f(b)\ g(b)\ 1 \end{vmatrix}$$

Este evident că F este continuă pentru $x \in [a, b]$ şi derivabilă pentru $x \in (a, b)$ iar $F(a) = F(b) = 0$. Teorema lui Rolle asigura existenta unui punct $c \in (a, b)$ astfel ca $F'(c) = 0$ cum

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x)\ g'(x)\ 0 \\ f(a)\ g(a)\ 1 \\ f(b)\ g(b)\ 1 \end{vmatrix}$$

va rezulta $F'(c) = 0$ sau $f'(c)(g(a) - g(b)) - g'(c)(f(a) - f(b)) = 0$, deci relatia din enunt.$\rfloor$

Teorema Lagrange:

f continuă pe $[a, b], f$ derivabila pe (a, b) atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ $\lceil$Justificarea se face cu teorema Cauchy lund g(x)=x.$\rfloor$

Derivata funcţiei inverse.

Dacă $f : [a, b] \to [c, d]$ este bijectivă, atunci dacă $f'(x) \neq 0$ pentru $x \in (a, b)$ funcţia inversă $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ este derivabilă şi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

$\lceil$ Deoarece f este bijectivă va exista $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ şi $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ sau $(f^{-1}(f(x)) = x$. Prin derivare vom avea: $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$. Notând $f(x) = y$ deci $x = f^{-1}(y)$ va rezulta $(f^{-1})'(y)f'(x) = 1$ sau:
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Exemplu: $f(x) = \sin x, f^{-1}(y) = \arcsin y$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Derivata şi diferenţiala de ordin superior.

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dacă f este diferentiabilă în orice punct din (a, b) atunci atât f' cât şi df pot fi considerate funcţii definite pe (a, b) cu valori reale şi de aceea acestea pot fi diferenţiabile. Iterând acest rationament, se pot defini atât derivatele cât şi diferenţialele de ordin 2, 3,... ale lui f. Vom utiliza notatiile $f^0 = f$, $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$, $k = 0, 1, 2, ...$ pentru derivatele de orice ordin ale lui f (dacă există) şi $d^0 f = f$, $d^{k+1} f = d(d^k f)$, $k = 0, 1, 2, ...$ pentru diferenţialele de orice ordin ale lui f (dacă există). Legătura între derivata de ordinul k+1, $f^{(k+1)}$ şi cea de ordin k , $f^{(k)}$ se obţine prin formula:

$$f^{(k+1)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(x + h) - f^{(k)}(x)}{h},$$

$k = 0, 1, 2, ...$ Vom pune în evidenţa legatura între diferenţiala de ordin k , $d^k f$, a lui f şi derivata de ordin $k, f^{(k)}$ a lui f.
Fie $k = 2$, deoarece $(df)(x) = f'(x)h$ iar $(d^2 f)(x) = d(df)(x)$, $(d^2 f)(x)$ va fi partea principală (adică partea liniară în raport cu $h = dx$) a creşterii $(\triangle df)(x, h)$ prin urmare:
$(\triangle df)(x, h) = (df)(x + h) - (df)(x) = (\triangle(f'(x)h))(x, h) = [(f')'(x)h + \alpha_{f'}]h = f''h + \alpha_{f''}$ cu $\alpha_{f''} = \alpha_{f'}h$, de unde se deduce egalitatea:
$(d^2 f)(x) = f''(x)h^2 = f''(x)(dx)^2; f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$
Procedând în mod asemănător vom avea, pentru $k = 3, 4, ...$
$(d^k f)(x) = f^{(k)}(x)h^k = f^{(k)}(x)(dx)^k; f^{(k)}(x) = \frac{(d^k f)(x)}{dx^k}$

Pentru o funcţie diferenţiabilă (derivabilă) de k ori pe un interval (a, b) vom spune că aparţine mulţimii de funcţii derivabile de k ori, notată cu $\mathcal{C}^k(a, b)$, adică $f \in \mathcal{C}^k(a, b)$, sau că este de clasa $\mathcal{C}^k$ pe intervalul (a, b).

O proprietate a funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^k(a, b)$.

Dacă $f, g \in \mathcal{C}^k(a, b)$ atunci:

$$(f(x)g(x))^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k-j)}(x)g^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x)$$

$\lceil$Justificarea se face prin metoda inducţiei complete.$\rfloor$

Polinomul lui Taylor. Dezvoltarea lui Taylor.

Dacă $f \in \mathcal{C}^{k+1}(a, b)$, atunci f se poate scrie sub forma:
$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$,
unde c este un punct intermediar între x şi x_0 iar $x, x_0 \in (a, b)$.

$\lceil$ Fie x_1 un punct arbitrar din (a, b) şi x_0 punctul din teorema şi fie funcţiile:
$g(x) = f(x) + \frac{x_1-x}{1!}f'(x) + \frac{(x_1-x)^2}{2!}f''(x) + ... + \frac{(x_1-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$
$h(x) = (x_1 - x)^{n+1}$
Derivând aceste funcţii vom avea:
$g'(x) = f'(x) + [\frac{x_1-x}{1!}f''(x) - f'(x)] + [\frac{(x_1-x)^2}{2!}f'''(x) - \frac{x_1-x}{1!}f''(x)] + ... + [\frac{(x_1-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) - \frac{(x_1-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)] = \frac{(x_1-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$
$h'(x) = (n + 1)(x_1 - x)^n$.
Aplicând teorema Cauchy pe intervalul determinat de x_0 şi x_1 funcţiilor g şi h obţinem: $\frac{g(x_1)-g(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$
unde c este un punct între x_0 şi x_1 şi deci:
$\frac{f(x_1)-f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_1-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+...+\frac{(x_1-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x0)}{-(x_1-x)^{n+1}} = \frac{\frac{(x_1-c)^n}{n!}}{-(n+1)(x_1-c)^n}$ sau
$f(x_1) = f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x_1-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x_1-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$
şi cum x_1 este arbitrar el poate fi notat cu x.

Forma obţinută pentru $f(x)$ se numeşte dezvoltarea Taylor de ordin n şi dacă notăm cu $x = x_0 + h$ vom avea:
$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.
Notând cu: $(T_{n,x_0}f)(x) = f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$ si cu: $(R_{n,x_0}f)(x,c) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ atunci: $(T_{n,x_0}f)(x)$ se numeşte polinomul Taylor de grad n pentru $f \in \mathcal{C}^{n+1}(a,b)$. $(R_{n,x_0}f)(x,c)$ se numeşte restul Taylor de ordin n pentru $f \in \mathcal{C}^{n+1}(a,b)$. $f(x) = (T_{n,x_0}f)(x)+(R_{n,x_0}f)(x,c)\rfloor$

Aplicaţie: Considerăm polinomul de grad n, $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = p_n(x), f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}), (\forall)k \in \mathbb{N}$ şi $f^{(n+1)}(x) = 0$. Deci $(R_{n,x_0}p_n)(x,c) = 0$ şi
$p_n(x) = p_n(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}p_n'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}p_n''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}p_n^{(n)}(x_0)$.
Dacă $f \in \mathcal{C}\infty(a,b)$ dezvoltarea Taylor poate fi scrisă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce face să se aducă în discuţie serii de forma: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ cu $x_0 \in (a,b)$, care de fapt sunt serii de puteri cu $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Daca seria de puteri are raza R atunci intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$ este domeniul sumei seriei şi vom arăta că aceasta coincide cu f(x). Deoarece $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ vom avea $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{n!}} < \frac{1}{R} + \varepsilon$ şi deci $\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{n!} < (\frac{1}{R} + \varepsilon)^n$ pentru $n \geq N$ deoarece $f \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$ vom avea:
$|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)| = |\frac{(x-x_0)^n}{n!}||f^{(n)}(c)| < [(x-x_0)(\frac{1}{R}+\varepsilon)]^n$.
Cum $|x - x_0| = r < R$ alegând $\varepsilon > 0$ astfel ca $r(\frac{1}{R} + \varepsilon) < 1$ rezultă că: $[(x-x_0)(\frac{1}{R}+\varepsilon)]^n \to 0$ ceea ce înseamnă că: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

Derivatele funcţiilor compuse, consecinţe.

În cazul funcţiilor de o variabilă se ştie că este valabilă următoatrea egalitate:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x), \tag{3.14}$$

unde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, şi dacă f este derivabilă în punctul $x \in (a,b), a < b, a, b$ finiţi iar g este derivabilă în punctul $y = f(x)$. Egalitatea (3.14) se numeşte formula de derivare a funcţiilor compuse şi aceasta se poate generaliza la un numar finit de factori:

$$(u_n \circ u_{n-1} \circ ... \circ u2 \circ u1)(x) = (u_n)'((u_{n-1} \circ ... \circ u2 \circ u1)(x))...(u1)'(x). \tag{3.15}$$

În cazul funcţiilor de mai multe variabile independente sunt mai importante trei generalizări ale formulei (3.14). Pentru uşurinţă se va trata mai întâi cazul a două variabile independente, cazul general putându-se trata prin analogie.

Prima generalizare se referă la cazul unei compuneri de forma:
$A \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, prin:

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = F(x, y),$$

unde $\mathbb{A}_2$ deschisă în $\mathbb{R}^2$ iar f diferentiabilă în $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ şi g diferentiabilă în $z_0 = f(x_0, y_0)$. În acest caz se poate justifica egalitatea:

$$dF(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0))(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy)$$

sau mai condensat cu (x, y) n loc de (x_0, y_0):
$dF(x, y) = g'(f(x, y))df(x, y)$, iar pentru derivata avem:
$F'(x, y) = g'(f(x, y))f'(x, y)$,
unde F' şi f' sunt vectorii gradienţi respectivi de funcţii de două variabile.
A doua generalizare se referă la cazul unei compuneri de forma:
$(a, b) \subset \mathbb{R} \overset{f=(\varphi,\psi)}{\rightarrow} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, prin: $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(\varphi(t), \psi(t)) = g(x, y) = F(t)$, cu $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, unde $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, reprezintă funcţia compusă, $\varphi, \psi : (a, b) \to \mathbb{R}$, fiind funcţii reale cu valori reale obişnuite, derivabile în $t_0 \in (a, b)$ iar g diferenţiabilă în $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)), F$ va fi derivabilă în t_0 fiind valabilă egalitatea:

$$dF(t_0) = (\frac{\partial g}{\partial x})(x_0, y_0)\varphi'(t)dt + (\frac{\partial g}{\partial y})(x_0, y_0)\psi'(t)dt$$

sau mai condensat(cu t în loc de t_0) sub forma:

$$dF(t) = [\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\varphi'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\psi'(t)]dt$$

iar pentru derivata:

$$F'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\varphi'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\psi'(t) = g'(x, y) \cdot f'(t)$$

utilizând notaţia produsul scalar obisnuit din R^2, $(a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2)$ al elementelor $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$. În cazul nostru $g'(x, y) = ((\frac{\partial g}{\partial x})(x, y), (\frac{\partial g}{\partial y})(x, y))$ iar $f'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$.
A treia generalizare se referă la cazul unei compuneri de forma:

$$\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R} \overset{f=(\varphi,\psi)}{\rightarrow} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R},$$

prin:

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(\varphi(t, \theta), \psi(t, \theta)) = F(t, \theta),$$

cu $x = \varphi(t,\theta), y = \psi(t,\theta)$, unde $F : \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (functia compusă) $\varphi, \psi : \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fiind funcţii reale cu două variabile reale obişnuite, derivabile în $(t_0,\theta_0) \in \mathbb{A}_2$ iar g diferenţiabilă în $(x_0,y_0) = (\varphi(t_0,\theta_0), \psi(t_0,\theta_0))$, fiind valabilă egalitatea: $dF(t_0,\theta_0) = (\frac{\partial g}{\partial x})(\varphi(t_0,\theta_0), \psi(t_0,\theta_0))\varphi'(t_0,\theta_0)(dt,d\theta) + (\frac{\partial g}{\partial y})(\varphi(t_0,\theta_0), \psi(t_0,\theta_0))\varphi'(t_0,\theta_0)(dt,d\theta)$
sau mai condensat(cu t în loc de t_0 şi cu θ în loc de θ_0 sub forma:
$dF(t,\theta) = (\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)), (\frac{\partial g}{\partial y})(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)))((\frac{\partial \varphi}{\partial t})dt + (\frac{\partial \varphi}{\partial \theta})d\theta, \frac{\partial \psi}{\partial t})dt + (\frac{\partial \psi}{\partial \theta})d\theta)$, iar pentru derivată:

$$F'(t,\theta) = (\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)), \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta))) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

sau:

$$gradF(t,\theta) = gradg(x,y)Jacobian(\varphi,\psi)(t,\theta),$$

sau încă:

$$\nabla F(t,\theta) = \nabla g(x,y)\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(t,\theta)},$$

termenul din partea dreaptă reprezintă produsul dintre vectorul gradient şi matricea lui Jacobi, corespunzatoare funcţiilor φ si ψ. Vom face justificarea numai celui de-al doilea caz, celelalte facându-se asemănător. $\lceil$ În baza ipotezelor sunt adevărate egalităţile:
$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \varphi'(t)h + \alpha_\varphi$
$\psi(t+h) - \psi(t) = \psi'(t)h + \alpha_\psi$
$g(x+p, y+q) - g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)p + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)q + \alpha_g$
cu $\frac{\alpha_\varphi}{h} \to 0$, $\frac{\alpha_\psi}{h} \to 0$ când $h \to 0$ iar $\frac{\alpha_g}{\sqrt{p^2+q^2}} \to 0$ când $\sqrt{p^2+q^2} \to 0$
sau echivalent ˆ in limbaj $\varepsilon - \delta$: $|\alpha_\varphi| < \varepsilon|h|, |\alpha_\psi| < \varepsilon|h|, |\alpha_g| < \varepsilon\sqrt{p^2+q^2}$ dacă $|h| < \delta(\varepsilon)$ şi $\sqrt{p^2+q^2} < \delta(\varepsilon)$. Utilizând funcţia F din (?) cu $x = \varphi(t), y = \psi(t), p = \varphi'(t)h + \alpha_\varphi, q = \psi'(t)h + \alpha_\psi$ din egalităţile de mai sus avem:
$F(t+h) - F(t) = g(\varphi(t+h), \psi(t+h)) - g(\varphi(t), \psi(t)) == g(\varphi(t) + \varphi'(t)h + \alpha_\varphi, \psi(t) + \psi'(t)h + \alpha_\psi) - g(\varphi(t), \psi(t)) == (\frac{\partial g}{\partial x})(\varphi(t), \psi(t))(\varphi'(t)h + \alpha_\varphi) + (\frac{\partial g}{\partial y})(\varphi(t), \psi(t))(\psi'(t)h + \alpha_\psi) + \alpha_g == [(\frac{\partial g}{\partial x})(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + (\frac{\partial g}{\partial y})(\varphi(t), \psi(t))(\psi'(t)]h + \alpha_g^*$, cu $\alpha_g^* = (\frac{\partial g}{\partial x})(\varphi(t), \psi(t))(\alpha_\varphi) + (\frac{\partial g}{\partial y})(\varphi(t), \psi(t))(\alpha_\psi) + \alpha_g$ şi din egalităţile anterioare rezultă uşor că: $|\alpha_g^*| < \varepsilon^*|h|$ şi deci F este diferenţiabilă în t.$\rfloor$

Calculând diferenţiala lui F în punctul t(adică produsul $F'(t)dt$) rezultă:
$dF(t) = d(g(\varphi(t), \psi(t))) = dg(x,y) = F'(t)dt = (\frac{\partial g}{\partial x})(x,y)dx + (\frac{\partial g}{\partial y})(x,y)dy$.
Am ţinut cont că $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

La fel în cazul al trilea:
$dF(t,\theta) = dg(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)) = F'(t,\theta) \cdot (dt, d\theta) = (\frac{\partial g}{\partial x})(x,y)dx + (\frac{\partial g)}{\partial y})(x,y)dy$
cu $x = \varphi(t,\theta), y = \psi(t,\theta)$.

Din acest şir de egalităţi se deduce o regulă mnemotehnică pentru calculul diferenţialei întâi şi anume:

Diferenţiala întâi are aceeaşi formă fie că x şi y sunt variabile independente fie că x şi y nu sunt variabile independente. Dacă x şi y nu sunt variabile independente, se efectuiază calcule pentru diferenţilele acestor funcţii care se înlocuiesc în forma clasică pentru dg.

De reţinut că în aceste înlocuiri $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ sunt notaţii pentru derivate parţiale şi aceşti x, y nu se înlocuiesc.

Faptul că diferenţiala întâi are aceeaşi formă fie că x şi y sunt variabile independente fie că x şi y nu sunt variabile independente este cunoscut sub numele de <u>invarianta diferentialei întâi</u>.

Din calculele anterioare rezultă şi modul de calcul al derivatelor parţiale ale unor funcţii compuse.

Asfel în condiţiile amintite mai sus pentru funcţia compusă $F(t,\theta) = g(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)) = g(x,y)$ avem:

$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial \theta}d\theta,$

iar: $dx = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}d\theta$, şi $dy = \frac{\partial \psi}{\partial t}dt + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta$ În acest caz putem justifica fiecare din egalităţile:

$\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta))\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\theta)$

$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t,\theta), \psi(t,\theta))\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(t,\theta)$

Trecând la cazul general putem enunţa următoarele reguli de derivare pentru: $(a,b) \in \mathbb{R} \overset{f=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)}{\to} \mathbb{R}^n \overset{g}{\to} \mathbb{R}$, prin:

$(g \circ f)(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)) = g((\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))) = F(t),$

unde: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fiind funcţia compusă care este derivabilă în punctul curent t iar derivata sa, în acest caz, este dată de formula:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\varphi_j'(t) = g'(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f'(t),$$

unde $x_j = \varphi_j(t) j = 1, 2, ..., n$

Putem extinde această formulă astfel: $\mathbb{A}_p \subset \mathbb{R}^p \overset{f=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)}{\to} \mathbb{R}^n \overset{g}{\to} \mathbb{R}$, prin: $(g \circ f)(\varphi_1(t_1,t_2,...,t_p), \varphi_2(t_1,t_2,...,t_p), ..., \varphi_n(t_1,t_2,...,t_p)) =$
$= g((\varphi_1(t_1,t_2,...,t_p), \varphi_2(t_1,t_2,...,t_p), ..., \varphi_n(t_1,t_2,...,t_p))) = F(t_1,t_2,...,t_p)$, unde: $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, fiind funcţia compusă care este derivabilă în punctul curent $(t_1, t_2, ..., t_p)$ iar derivatele parţiale în acest caz sunt date de formulele:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}, j = 1, 2, ..., p.$$

Identitatea lui Euler.

Functia $f \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_2)$ ($\mathbb{A}_2$ deschisă în $\mathbb{R}^n$) se numeşte pozitiv omogenă, pe scurt omogenă de grad $p \in \mathbb{N}$, dacă:

$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p f(x_1, x_2, ..., x_n)$
pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{A}_n$, unde $t^p = e^{p \ln t}$ (deci $t > 0$ obligatiriu).
Dacă derivăm în raport cu t identitatea de mai sus obţinem:
$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, tx_2, ..., tx_n) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx_1, tx_2, ..., tx_n) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = pt^{p-1} f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Pentru $t = 1$ obţinem:
$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = pf(x_1, x_2, ..., x_n)$,
numită identitatea lui Euler pentru funcţiile pozitiv omogene de grad p.

Identitatea lui Euler a fost folosită în mecanică la exprimarea energiei cinetice, care poate fi interpretată ca o funcţie omogenă de grad doi în componentele vitezei, dar este aplicabilă şi în alte situaţii. De exemplu, dacă g este diferenţiabilă, funcţia $f(x, y, z) = \frac{z^2}{xy} g(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{y^2})$ este iarăşi diferenţiabilă cu $x > 0, y > 0$ iar expresia: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ este mai greu de calculat direct. Observând că f este omogenă de grad zero vom avea: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ si deci $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -z\frac{\partial f}{\partial z} = -2f(x, y, z)$
Are loc şi o reciprocă a identităţii lui Euler, adică:
Orice funcţie $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{A}_n)$, care verifică identitatea lui Euler este o funcţie pozitiv omogenă de grad p.

$\lceil$ Pentru uşurinţă vom lua $n = 2$. Fie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, prin: $g(t) = f(tx, ty) - t^p f(x, y)$. Vom arăta că $g(t) = 0$ pentru orice $t \in (0, \infty)$. Functia g fiind diferenţiabilă pentru $t > 0$, în baza regulii de derivare a funcţiilor compuse, iar $g(1) = 0$. Calculnd $g'(t)$ vom avea:
$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - pt^{p-1} f(x, y)$
Înlocuind în identitatea lui Euler (x, y) cu (tx, ty) se va obţine: $g'(t) = \frac{p}{t} f(tx, ty) - pt^{p-1} f(x, y) = \frac{p}{t} g(t)$, pentru orice $t > 0$, de unde rezultă $tg'(t) - pg(t) = 0$ sau $\frac{d}{dt}(\frac{g(t)}{t^p}) = 0$ pentru orice $t > 0$, din care rezultă: $\frac{g(t)}{t^p} = constant$, pentru orice $t > 0$, şi cum $g(1) = 0$ va rezulta $g(t) = 0$ pentru orice $t \in (0, \infty)$.$\rfloor$

Extinderea formulei lui Lagrange.

Dacă $f \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_n)$, f diferenţiabilă pe $\mathbb{A}_n$, şi $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, două puncte din $\mathbb{A}_n$, atunci va exista $\theta \in (0, 1)$ astfel încât:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \frac{(\partial f}{\partial x_j}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \qquad (3.16)$$

cu $\xi_k = x_k + \theta(y_k - x_k), k = 1, ..., n$

$\lceil$ Vom face justificarea pentru cazul $n = 2$, pentru $n > 2$ justificarea se face în acelaşi mod. Luăm astfel funcţia compusă $g(t) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2))$ cu $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ două puncte din $\mathbb{A}_2 \in \mathbb{R}^2$. Deoarece în R are loc identitatea lui Lagrange:

$g(1) - g(0) = g'(\theta)$
cu $\theta \in (0,1)$ iar $g(1) = f(y_1, y_2), g(0) = f(x_1, x_2)$, vom avea:
$g'(t) = (y_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) + +(y2 - y1)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2))$, unde $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ reprezintă derivata în raport cu prima componentă iar $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ reprezintă derivata în raport cu cea de-a doua componentă. Înlocuind t cu $\theta \in (0,1)$ şi pentru a elimina orice confuzie, notăm $\xi_1 = x_1 + \theta(y_1 - x_1), \xi_2 = x_2 + \theta(y_2 - x_2)$ vom avea egalitatea lui Lagrange:
$f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) = (x_1 - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2) + (x_2 - y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1, \xi_2).\rfloor$

Exemple :
1°. $f(x, y) = x^2 + y^3$. Considerăm punctele $(0,0), (1,1)$. Vom avea:
$f(1,1) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \xi_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_1, \xi_2)$ cu $\xi_1 = \xi_2 = \theta$.
Rezultă: $f(1,1) - f(0,0) = 2\theta + 3\theta^2$, şi deci $2 = 2\theta + 3\theta^2$, de unde rezultă: $\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ şi convine numai $\theta = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$.
2°. Pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ şi punctele $(1,1,1), (0,0,0)$ obţinem: $3 = 6\theta$ şi deci $\theta = 0,5$.

Teorema de existenţă a diferenţiabilităţii unei funcţii de mai multe variabile.

Este important de semnalat că existenţa tuturor derivatelor parţiale ale lui f în punctul x nu asigură diferenţiabilitatea lui f în acel punct x după cum se poate arăta pe exemplul:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \text{ , dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

O conditie suficienta de diferentiabilitate este data de:
Teorema 12: Dacă $f : \mathbb{A}_m \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este dată astfel ca $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ există în vecinatatea unui punct $x_0 \in \mathbb{A}_m$ pentru $j = 1, 2, ..., m$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sunt continui în x_0 atunci f este diferenţiabilă în x_0.

$\lceil$Vom demonstra teorema pentru $m = 2$ şi vom scrie:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$. Apoi aplicăm teorema creşterilor finte fiecărei paranteze şi vom avea:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)k$, unde ξ este între x_0 şi $x_0 + h$ iar η între y_0 şi $y_0 + k$. În baza continuităţii derivatelor parţiale în (x_0, y_0) avem:
$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \gamma_x$.
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \gamma_y$.
unde $|\gamma_x| < \varepsilon$ şi $|\gamma_y| < \varepsilon$ dacă $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$, ceeace înseamnă:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x0, y0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \alpha$, unde $\alpha = \gamma_x h + \gamma_y k$

şi deoarece:
$0 < \frac{|\alpha|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\gamma_x}{\sqrt{h^2+k^2}}|h| + \frac{\gamma_y}{\sqrt{h^2+k^2}}|k| < \frac{\varepsilon(|h|+|k|)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ şi putem lua $\varepsilon = \sqrt{h^2+k^2}$ şi se deduce:
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\alpha|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\rfloor$.

Derivata unui câmp scalar în raport cu un o direcţie dată.

Pentru uşurinţa expunerii vom considera mai întâi cazul $n = 2$ şi fie (a, b) un element nenul fixat în $\mathbb{R}^2$ (deci $a^2+b^2 > 0$). Acest element nenul va fi denumit direcţie în $\mathbb{R}^2$. Pentru $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mulţimea din $\mathbb{R}^2$ definită prin:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, t \in \mathbb{R}\}$$

se va numi linie dreaptă care trece prin punctul (x_0, y_0) şi are direcţia (a, b).
Deoarece $a^2 + b^2 > 0$, se poate lua în consideraţie elementul din $\mathbb{R}^2$ având componentele $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$, care poartă numele de versor al direcţiei (a, b) în $\mathbb{R}^2$. Convenim să notăm acest versor prin: $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, cu $\ell_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\ell_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} = 1$. Dacă $f \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_2)$ este un câmp scalar în mulţimea deschisă $\mathbb{A}_2$, iar ℓ este versorul directiei (a, b) din $\mathbb{R}^2$, prin derivata în raport cu direcţia ℓ, în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ notată cu $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0)$, se înţelege numărul real $g'(0)$, unde $g(t) = f(x_0 + t\ell_1, y_0 + t\ell_2)$.
În baza formulei de dervare a funcţiilor compuse, avem:
$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ell_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ell_2 = f'(x_0, y_0) \cdot \ell$.

Putem justifica geometric definiţia derivatei în raport cu o direcţie dată $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0)$ scriind efectiv:
$g'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$

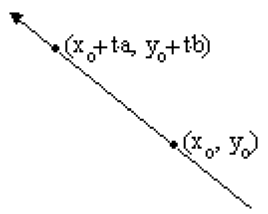

Fig. 3.1:

Dacă vom lua punctele $(x_0 + ta, y_0 + tb), (x_0, y_0)$ acestea se află pe dreapta ce trece prin (x_0, y_0) şi are direcţia (a, b). Cele două puncte sunt luate în sens crescator al parametrului t (mai precis pentru $t > 0$). Se constată că t este

exact distanţa dintre (x_0, y_0) şi $(x_0 + ta, y_0 + tb)$, resupunând $a^2 + b^2 = 1$ şi deci derivata unui câmp scalar în direcţia (a, b) într-un punct (x_0, y_0) este limita raportului dintre diferenţa valorilor acestui câmp în punctul considerat şi un punct vecin situat pe dreapta ce trece prin (x_0, y_0) şi are direcţia (a, b) şi distanţa t dintre aceste puncte.
De aici rezultă că dacă $t < 0$, punctul $(x_0 + ta, y_0 + tb)$ va fi luat în sens opus deplasarii normale pe dreapta şi atunci derivata $\frac{\partial f}{\partial \ell}$ va avea semnul minus deoarece la numitor distanţa va fi egala cu $-t$, distanţa fiind întotdeauna un număr pozitiv. În particular, derivata în raport cu direcţia Ox_j deci pentru $\ell = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, 1 este pe locul j şi: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x_1, x_2, ..., x_n)$
Derivata în raport cu o direcţie are toate proprietăţile derivatei obişnuite(astfel):
$\frac{\partial}{\partial \ell}(\alpha f + \beta g)(x_0, y_0) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0) + \beta\frac{\partial g}{\partial \ell}(x_0, y_0)\ (\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\frac{\partial}{\partial \ell}(fg)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0)g(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)\frac{\partial g}{\partial \ell}(x_0, y_0)$,
$\frac{\partial}{\partial \ell}(\frac{f}{g})(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0,y_0)g(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial \ell}(x_0,y_0)}{g^2(x_0,y_0)}$
la care se mai adaugă unele noi, cum ar fi:
$\frac{\partial f}{\partial(\alpha \ell)}(x_0, y_0) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0)\ (\forall)\alpha \in \mathbb{R}$,
$\frac{\partial f}{\partial(\ell_1+\ell_2)}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \ell_1}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial \ell_2}(x_0, y_0)$

Normala şi tangenta la curbe în planul $\mathbb{R}^2$.

Una din aplicaţiile imediate ale regulii de derivare a funcţiilor compuse se referă la interpretatrea geometrică a derivatelor parţiale pentru câmpuri scalare.
Fie $f \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_2)(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ şi curba de nivel constant $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ care trece prin punctul (x_0, y_0). Scriind curba de nivel sub forma $g(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ (posibilitatea acestei exprimări va fi justificată cu ocazia expunerii teoremei funcţiilor implicite) va rezulta egalitatea: $f(\varphi(t), \psi(t)) = f(x_0, y_0)$ pentru orice $t \in (a, b), a < b, a, b$ finiţi. În baza formulei de derivare a funcţiilor compuse vom avea:
$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) = 0$
care pentru $t_0 \in (a, b)$ ales astfel încât $\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$ se scrie:
$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0), \psi(t))\psi'(t) = 0$
În ipoteza $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{A}_2)$ există atât derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cât si derivatele φ', ψ'. Egalitatea ultimă poate fi interpretată ca o relaţie de ortogonalitate (perpendicularitate) între vectorii $f'(x_0, y_0)$ şi $g'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ deci $f'(x_0, y_0) \perp g'(t_0)$

Deoarece $g'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ constituie parametri diectori ai tangentei la curba de nivel în cauză, în punctul $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ componentele vectorului $f'(x_0, y_0)$ dacă $f'(x_0, y_0) \neq 0$ constituie parametrii directori ai normalei la curba de nivel în punctul (x_0, y_0). Ecuaţia carteziană a acestei normale este:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \tag{3.17}$$

şi în baza relaţiei de ortogonalitate a două drepte avem:

$$\varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ \psi'(t_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ecuaţia carteziană a tangentei în (x_0, y_0) la curba de nivel este:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} + \frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \text{ sau } \frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{y-y_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}} \tag{3.18}$$

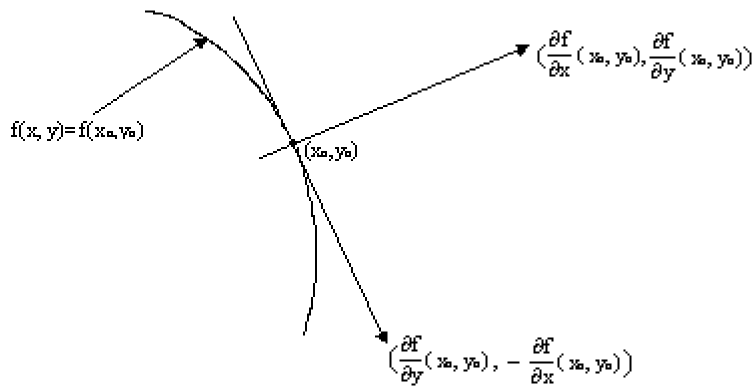

Fig. 3.2:

Exemplu. La câmpul scalar $f(x, y) = 2x^2+8y^2$ curbele de nivel vor fi elipse. În cazul punctului $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vom avea elipsa $2x^2 + 8y^2 = 8(\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^1} - 1 = 0)$ $f'(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (4\sqrt{2}, 8\sqrt{2})$ Ecuatia normalei la elipsa în $((\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}))$ este: $\frac{x-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}}$, sau după calcule: $4x - 2y - 3\sqrt{2} = 0$
Ecuatia tangentei în $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ este: $\frac{x-\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} + \frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} = 0$ sau dupa calcule: $x + 2y - 2\sqrt{2} = 0$.

Normala la o suprafetă şi planul tangent la o suprafată(din $\mathbb{R}^3$).

Dacă luăm $f \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_3), (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}_3 \subset \mathbb{R}^3$ şi dacă există f' şi $f'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ atunci componentele vectorului $f'(x_0, y_0, z_0)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt parametrii directori ai dreptei normale la suprafaţa de nivel $(\mathbb{S})$ a câmpului scalar f care trece prin punctul (x_0, y_0, z_0), a cărei ecuaţie carteziană este $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Justificarea este similară celei din $\mathbb{R}^2$, considerându-se pe suprafaţa de nivel $(\mathbb{S})$ curba dată de $g(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), t \in (a, b)$, al cărui hodograf trece prin (x_0, y_0, z_0), adică se verifică egalitatea: $f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = f(x_0, y_0, z_0), t \in (a, b)$. Prin derivarea acestei relaţii obţinem în t_0:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\chi'(t_0) = 0$,
care arată că vectorul $f'(x_0, y_0, z_0)$ din $\mathbb{R}^3$ este ortogonal pe vectorul $g'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$. Dacă considerăm ecuaţia normalei în punctul (x_0, y_0, z_0) la suprafaţa de nivel $\mathbb{S}$:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \tag{3.19}$$

ecuaţiile parametrice ale acestei drepte normale la $(\mathbb{S})$ sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

cu $t \in \mathbb{R}$.

Planul din $\mathbb{R}^3$ care trece prin (x_0, y_0, z_0) al suprafetei de nivel $\mathbb{S}(f = f_0)$ şi este ortogonal la normala scrisă mai sus se numeşte plan tangent la suprafaţa $(\mathbb{S})$ în punctul (x_0, y_0, z_0) şi va avea ecuaţia:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{3.20}$$

Exemplu. La câmpul scalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ suprafeţele de nivel vor fi paraboloizi eliptici. În cazul punctului $(1, 2, 5)$ obţinem:$x + y = z$ Deoarece $f' = (2, 4, -1)$ ecuaţia planului tangent în $(1, 2, 5)$ este: $2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$ sau: $2x + 4y - z - 5 = 0$, iar normala în punctul $(1, 2, 5)$ la suprafaţă este: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$

3.5.5 Derivate parţiale de ordin superior.

Dacă se consideră $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_m)$ care de fapt este o funcţie şi o vom deriva în raport cu x_k, vom obţine:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

şi o vom numi derivata parţiala de ordinul al doilea în raport cu x_k, x_j mixtă. Putem proceda la fel cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_m)$, pe care o vom deriva n raport cu x_j şi vom obţine:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

Este important, din punct de vedere practic, de a stabili condiţii suficiente în care derivatele parţiale mixte sunt egale. Mai precis în ce conditii:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

cu $j \neq k$, pentru că în general acestea nu sunt egale. Teorema care urmează stabileşte în ce condiţii derivatele parţiale mixte sunt egale.
Teorema 13 (Schwartz): Dacă $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}), k \geq 2$ atunci în orice $x_0 \in \mathbb{A}$ derivatele parţiale mixte sunt egale.
$\lceil$ Demonstrăm în cazul $m = 2$ şi vom lua funcţia:
$E(x, y, h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)$
care poate fi scrisă sub următoarele forme:
$E(x, y, h, k) = f_1(x + h) - f_1(x)$ şi $E(x, y, h, k) = f_2(y + k) - f_2(y)$
daca se notează cu:
$f_1(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$, presupunând x variabilă iar y, k parmetri,
$f_2(y) = f(x+h, y)-f(x, y)$, presupunñd y variabilă iar x, h parmetri. Aplicând teorema creşterilor finite, se deduce: $f_1(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})k$, $f_2(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)h$,
unde $\overline{x}$ este între x şi $x + h$, iar $\overline{y}$ este între y şi $y + k$ şi atunci:
$E(x, y, h, k) = [\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, \overline{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})]k = [\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)]k$.
Utilizând iarăşi teorema creşterilor finite se obţine:
$E(x, y, h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\overline{x}}, \overline{y})hk = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{\overline{y}})kh$
unde $\overline{\overline{x}}$ este între x şi $x + h$ iar $\overline{\overline{y}}$ este între y şi $y + k$. Simplificând prin hk se va obţine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\overline{x}}, \overline{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$$

Deoarece $(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$ şi $(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ sunt în vecinatatea lui (x, y) cu alte cuvinte $\lim\limits_{h\to 0} \overline{x} = \lim\limits_{h\to 0} \overline{\overline{x}} = x$ şi $\lim\limits_{k\to 0} \overline{y} = \lim\limits_{k\to 0} \overline{\overline{y}} = y$, în baza continuităţii lui $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi a lui $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în punctul (x, y) pentru $(h, k) \to (0, 0)$ se deduce: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\rfloor$.

Observaţie: Din analiza demonstratţei se observă că nu este obligatoriu ca $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A})$ pentru a avea egalitatea derivatelor mixte. Este suficient să existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinatate a lui (x, y) iar acestea să fie continui în punctul considerat.

Putem extinde noţiunea de derivată parţială considerând derivatele parţiale ale derivatelor parţiale de ordinul al doilea, obţinând derivatele parţiale de ordinul al treilea astfel:

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_\ell \partial x_k \partial x_j}$$

pentru $\ell \neq k, \ell \neq j, j \neq k$.

Pentru $\ell = k \neq j$ vom avea:$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_j}$.

Pentru $\ell = k = j$ vom avea: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}$. La fel vom defini derivatele parţiale de ordinul patru, cinci, etc.

3.5.6 Diferenţialele de ordin superior ale câmpurilor scalare.

Fie functia $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_2)$ ($\mathbb{A}_2$ deschisă în $\mathbb{R}^2$) Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ şi $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathbb{A}_2$ atunci funcţia compusă:

$$g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

este de clasa $\mathcal{C}^{(2)}$ pentru h, k suficienţi de mici astfel încât $(x_0+th, y_0+tk) \in \mathbb{A}_2$. Derivata lui g va fi:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)k.$$

Aplicând încă o dată regula de derivare a funcţiilor compuse vom avea:

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+th, y_0+tk)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th, y_0+tk)k^2,$$

dacă ţinem cont că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, conform cu Teorema lui Schwartz.

Pentru t=0 avem:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = df(x_0, y_0)$$

Prin definiţie

$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2,$$

se numeşte diferenţiala a doua a lui f în punctul (x_0, y_0) şi se notează cu: $d^2 f(x_0, y_0; h, k)$ sau numai prin $d^2 f(x_0, y_0)$.

Dacă se notează traditional cu $h = dx$, $k = dy$, avem:

$$d^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)dy^2$$

Punctul (x_0, y_0) fiind arbitrar în $\mathbb{A}_2$ putem scrie (x, y) n loc de (x_0, y_0) deci:

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2$$

Se poate verifica relaţia $d^2f(x,y) = d(df(x,y))$
Într-adevăr, cum $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$, atunci:

$$d(df(x,y)) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)dy]dx+[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy]dy$$

Se observă că relaţia de diferenţiere se poate rescrie utilizând regula de ridicare la pătrat a unui binom, sub forma:

$$d^2f(x,y) = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^{(2)}f(x,y),$$

înlocuind $(\frac{\partial}{\partial x})^2 f(x,y)$ cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $(\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x,y)$ cu $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ cu $2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$. Aceste consideraţii pot fi extinse la trei sau mai multe variabile independente.

Pentru trei variabile avem:

$$d^2f(x,y,z) = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})^{(2)}f(x,y,z),$$

sau dezvoltat: $d^2f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2+$ $2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)dzdx$

În cazul n-dimensional, cu $x = (x_1, x_2, ..., x_n), dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)$ avem:

$$d^2f(x;dx) = (dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n})^{(2)}f(x) = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(x)dx_k dx_j.$$

Apare astfel o formă pătratică în componentele lui dx ai cărei coeficienţi sunt toati derivate parţiale de ordin doi ale lui f.

Diferenţialele de ordin trei, patru, etc. ale unei funcţii de clasa $\mathcal{C}^{(3)}, \mathcal{C}^{(4)}, ...,$ într-o mulţime deschisă se vor defini similar. Astfel în $\mathbb{R}^2$ vom avea:

$$g'''(0) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(3)}f(x,y) = d^3f(x,y;h,k),$$

cu $g(t) = f(x+th, y+tk)$, iar operatorul simbolic se scrie: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)h^3 +$ $3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2 y}(x,y)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)(x,y)k^3$. Se vede analogia cu formula de ridicare a binomului lui Newton la puterea a treia.

În $\mathbb{R}^3$, dacă se presupune $f \in \mathcal{C}^{(3)}(\mathbb{A}_3)$ avem: $d^3f(x,y,z;h,k,\ell) = (h\frac{\partial}{\partial x} +$ $k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z})^{(3)}f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y,z)h^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,z)k^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,z)\ell^3 +$
$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y,z)h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,z)k^2\ell+3\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}(x,y,z)\ell^2h+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y,z)hk^2+$

$3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x,y,z)k\ell^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}(x,y,z)\ell h^2 + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}hkl$, analoagă cu formula algebrică: $(a+b+c)3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2+6abc$ La fel se va întâmpla şi în cazul diferenţialei de ordin $p > 3, p \in \mathbb{N}$. $g^{(p)}(0) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(p)} f(x,y) = d^p f(x,y;h,k)$. Evident pot fi utilizate şi notatiile tradiţionale $h = dx, k = dy$. Vom lua din nou $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}), k \geq 2, \mathbb{A}$ deschisă în $\mathbb{R}^m$, vom nota diferenţiala de ordinul al doilea, al treilea,...,de ordinul k a lui f punând: $d^2 f = d(df), d^3 f = d(d^2 f), ..., d^k f = d(d^{k-1} f)$. Astfel, deoarece: $df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}h_m$, vom avea: $(d^2 f)(x) = d(df)(x) = d(\frac{\partial f}{\partial x_1})h_1 + d(\frac{\partial f}{\partial x_2})h_2 + ... + d(\frac{\partial f}{\partial x_m})h_m = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}h_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}h_m)h_1 + +(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}h1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}h_m)h_2 + ... + +(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}h_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}h_m)h_m$, sau sub forma restrânsa şi în notaţia tradiţională $h_j = dx_j$:

$$(d^2 f)(x) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) dx_k dx_j,$$

care este o formă diferenţială de ordin doi, cunoscută în algebră sub denumirea de formă patratică de ordinul al doilea în $dx_1, dx_2, ..., dx_m$. Continuând acest procedeu vom obţine:

$$(d^p f)(x) = \sum_{k_1,k_2,...,k_p=1}^{m} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} ... \partial x_{k_p}} dx_{k_1} dx_{k_2} ... dx_{k_p},$$

cu $p \leq k, k$ cel ce desemneaza ordinul clasei lui f, adică $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A})$.

3.5.7 Dezvoltarea lui Taylor pentru funcţii reale de mai multe variabile.

Cu ajutorul funcţiei g utilizată în mod frecvent aici, vom deduce forma pe care o capată formula Taylor respectiv seria Taylor în cazul funcţiilor de mai multe variabile.

Astfel dacă $g \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathbb{A}_1)$, atunci:

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + ... + \frac{1}{p!}g^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}g^{(p+1)}(\tau),$$

cu $\tau \in (0,1)$.

Luând pentru o funcţie de n variabile $g(t) = f(x+th), x = (x_1, x_2, ..., x_n), h = (h_1, h_2, ..., h_n), t \in \mathbb{R}$, vom avea înlocuind $t = 1$ şi $t = 0$ în formula lui g dezvoltată, de mai sus, vom avea:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}df(x;h) + \frac{1}{2!}d^2 f(x;h) + ... + \frac{1}{p!}d^p f(x;h) + + \frac{1}{(p+1)!}d^{p+1} f(x+th;h),$$

Aceasta se numeşte formula lui Taylor pentru funcţii reale cu n variabile reale.

Termenul $T_p(x;h) = f(x) + \frac{1}{1!}df(x;h) + \frac{1}{2!}d^2f(x;h) + ... + \frac{1}{p!}d^pf(x;h)$ se numeşte polinomul lui Taylor de grad p, iar termenul $R_p(x;h) = \frac{1}{(p+1)!}d^{p+1}f(x+th;h)$, se numeşte restul de ordinul p a dezvoltării Taylor.

De asemeni se poate da seria lui Taylor adică:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0;h) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0;h) + ... + \frac{1}{p!}d^pf(x_0;h) + ...,$$

dacă f este indefinit derivabilă.

În cazul particular a două variabile dacă luăm (x_0, y_0) în loc de (x, y) avem:
$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k]+$
$+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2] + ...$

Daca vom nota cu $x = x_0 + h, y = y_0 + k$, atunci $h = x - x_0, k = y - y_0$, vom rescrie ultima formula: (x_0, y_0) în loc de (x, y) avem:
$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)]+$
$+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y-y_0)^2]+....$

Vom spune că pentru $f(x, y)$ avem o aproximaţie liniară sau de ordinul întâi în jurul punctului (x_0, y_0) dacă ne vom opri cu dezvoltarea Taylor la termenii liniari, adică:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)]$$

Vom spune că pentru $f(x, y)$ avem o aproximaţie pătratică sau de ordinul al doilea în jurul punctului (x_0, y_0) dacă ne vom opri cu dezvoltarea Taylor la termenii pătratici, adică:
$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)]+$
$+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y-y_0)^2]$,etc.
Exemple:

1°. Fie funcţia: $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. Vom aproxima aceasta liniar în jurul lui $(x_0, y_0) = (1, 2)$ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)]$
Luând $x = 1 + h, y = 2 + k$, rezultă $h = x - 1 = dx$, $k = y - 2 = dy$, şi atunci: $f(x, y) - f(1, 2) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$ şi în cazul concret avem: $f(1, 2) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -\frac{1}{4}$ şi deci aproximaţia liniară este: $\frac{1}{xy} \approx -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}$ 2°. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $(e + 0,1)^{\ln(1,2)}$

Ca în exemplul de mai sus vom considera funcţia: $f(x, y) = x^{ln(y)}$, $x = e + 0,1$, $y = 1,2$ $x_0 = e, y_0 = 1$, vom avea:

$\frac{(\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(y)x^{\ln(y)-1}$, $\frac{(\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x)x^{\ln(y)}$. $\frac{(\partial f}{\partial x}(e,1) = 0$, $\frac{(\partial f}{\partial y}(e,1) = 1$ şi deci: $(e+0,1)^{\ln(1,2)} \approx 1 + 0,2 = 1,2$.

În încheierea acestui subcapitol vom da formula dezvoltării lui Taylor pentru o fincţie reală cu mai multe variabile reale, exprimată cu derivate parţiale şi creşterile $h_1, h_2, ..., h_m$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)h_j + \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)h_j h_k + ...+$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{j_1,j_2,...j_k=1}^{m}\frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}...\partial x_{j_k}}h_{j_1}h_{j_2}...h_{j_k} + \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,j_2,...j_{k=1}=1}^{m}\frac{\partial^{k+1} f(\xi)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}...\partial x_{j_k}}h_{j_1}h_{j_2}...h_{j_{k+1}}$$

unde $x = x_0 + h, \xi = x_0 + \tau h$

3.5.8 Probleme de optim pentru funcţii de mai multe variabile.

Acestea constituie una din aplicaţiile importante ale calculului diferenţial. Se vor lua în consideraţie numai probleme de optim local, adică se va presupune că funcţiile studiate posedă valori extreme în puncte izolate din mulţimea de definiţie a acestora. Cu alte cuvinte nu se vor presupune situaţii ca în cazul funcţiei: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = (4x^2 + 9y^2 - 36)^2$ la care toate punctele elipsei sunt puncte de minim (functia ia numai valori pozitive, valoarea minima fiind egală cu zero). De asemeni probleme de optim pot fi analizate numai în cazul câmpurilor scalare, adică a funcţiilor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funcţii cu valori reale) deoarece numai $\mathbb{R}$, multimea valorilor funcţiilor de n variabile, este o mulţime total ordonată, putându-se astfel deduce care sunt valorile maxime sau valorile minime.

Vom analiza pentru început cazurile funcţiei cu două variabile independente şi apoi cu trei variabile, generalizarea la n variabile fiind mai uşor de lămurit.

Fie, pentru început $f : A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dacă există un punct $(a,b) \in \mathbb{A}_2$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in \mathbb{A}_2$ să avem $f(x,y) \leq f(a,b)$, atunci punctul (a,b) este un punct de <u>maxim absolut</u>.
Dacă schimbăm semnul inegalităţii vom obţine noţiunea de minim absolut, adică pentru orice $(x,y) \in \mathbb{A}_2$ să avem $f(x,y) \geq f(a,b)$.

Functia f posedă în punctul $(\overline{a}, \overline{b})$ un <u>punct de maxim local</u> dacă exista o vecinatate $B_r(a,b) \subset \mathbb{A}_2$ cu r suficient de de mic astfel încât: $f(x,y) \leq f(\overline{a}, \overline{b})$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{B}_r(\overline{a}, \overline{b})$

Un maxim local se va numi <u>strict local</u> dacă: $f(x,y) < f(\overline{a}, \overline{b})$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{B}_r(\overline{a}, \overline{b})$ cu $(x,y) \neq (\overline{a}, \overline{b})$

În mod analog, prin schimbarea semnului inegalităţii vom obţine noţiunea de minim local şi de minim local strict. Vom conveni să-l notăm cu $(\underline{a}, \underline{b})$.

Cu notaţiile $h = x - x_0, k = y - y_0$, creşterea cu (h,k) a funcţiei f în (x_0, y_0) va fi:

$\triangle f(x_0, y_0; h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$.

Într-un punct de maxim local $(\overline{a}, \overline{b})$ avem:
$\triangle f(\overline{a}, \overline{b}; h, k) \leq 0$, pentru orice $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ cu $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta, \delta > 0$

Într-un punct de minim local $(\underline{a}, \underline{b})$ avem: $\triangle f(\underline{a}, \underline{b}; h, k) \geq 0$, pentru orice $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ cu $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta, \delta > 0$

În legătură cu acestea avem următoarea teoremă:

Teorema 14:

i) (Conditia necesară, dar nu suficientă, de optim local):
Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ este un punct de optim local (punct de maxim sau punct de minim local) atunci:

$$f'(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\}$$

ii) (Condiţia suficientă de optim local strict)

Dacă $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_2)$ şi $d^2 f(x_0, y_0; h, k) < 0(d^2 f(x_0, y_0; h, k) > 0)$ unde $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ este astfel încât $f'(x_0, y_0) = 0$, atunci (x_0, y_0) este un punct de maxim (de minim) local strict pentru f.

iii) $d^2 f(x_0, y_0; h, k) < 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2 > 0\}$ sau
$d^2 f(x_0, y_0; h, k) < 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2 > 0\}$ şi
$d^2 f(x_0, y_0; h, k) > 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2 > 0\}$ sau
$d^2 f(x_0, y_0; h, k) > 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2 > 0\}$

$\lceil$i) Se consideră funcţia $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$, cu h, k arbitrari cu restricţia $(x_0 + th, y_0 + tk) \in \mathbb{A}_2$. Funcţia $g(t)$ are un extrem pentru $t = 0$, deoarece $g(0) = f(x_0, y_0) = 0$. Condiţia de extrem pentru o funcţie de o variabilă este $g'(0) = 0$, care este o condiţie necesară (nu suficientă) ori: $g'(0) = df(x_0, y_0; h, k)$, deci $df(x_0, y_0; h, k) = 0$, pentru orice h, k. Se observă că extremul lui g în origine nu depinde de h şi k, şi deci $df(x_0, y_0; h, k) = 0$ adică: $f'(x_0, y_0) = 0$ dacă şi numai dacă $\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\}$

ii) rezultă din faptul că $g''(0) < 0$ dacă $t = 0$ este punct de maxim pentru $g(t)$ şi $g''(0) > 0$ dacă $t = 0$ este punct de minim pentru $g(t)$, cumulat cu egalitatea:
$g''(0) = d^2 f(x_0, y_0; h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2$,
Reciproc, dacă de exemplu $f'(x_0, y_0) = 0$ şi $d^2 f(x_0, y_0; h, k) > 0$ utilizând dezvoltarea lui Taylor pentru f în punctul (x_0, y_0) cu restul exprimat de diferenţiala de ordin doi avem: $\triangle f(x_0, y_0; h, k) = \frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + th, y_0 + tk; h, k)$ cu $t \in (0, 1)$. Cum $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_2)$ rezultă $d^2 f \in \mathcal{C}(\mathbb{A}_2)$ şi deci $d^2 f(x_0 + th, y_0 +$

$tk; h, k)$ va avea acelaşi semn în vecinatatea lui (x_0, y_0) adică pozitiv. În mod analog dacă $f'(x_0, y_0) = 0$ şi $d^2f(x_0, y_0; h, k) < 0$ vom avea acelaşi semn în vecinătatea lui (x_0, y_0) adică negativ şi pentru $d^2f(x_0 + th, y_0 + tk; h, k)$.
iii) Deoarece $d^2f(x_0, y_0; h, k) = r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2$, (utilizând notaţiile lui Monge: $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, cu $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0))$, forma pătratica d^2f va putea fi transformată într-un trinom de gradul doi dând factor fie pe h^2 fie pe k^2: Astfel dacă vom da factor forţat pe k^2 avem:
$r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2 = k^2[(\sqrt{r_0}\tau + \frac{s_0}{\sqrt{r_0}})^2 + t_0 - \frac{s_0^2}{r_0}]$ cu $\tau = \frac{h}{k}$
Aşadar, dacă $r_0 > 0$ şi $r_0t_0 - s_0^2 > 0, d^2f(x_0, y_0; h, k)$ va fi pozitivă.
Dacă vom da factor forţat pe h^2 avem:
$r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2 = h^2[(\sqrt{t_0}\theta + \frac{s_0}{\sqrt{t_0}})^2 + r_0 - \frac{s_0^2}{t_0}]$ cu $\theta = \frac{k}{h}$ Şi la fel, dacă $t_0 > 0$ şi $r_0t_0 - s_0^2 > 0$, $d^2f(x_0, y_0; h, k)$ va fi pozitivă.
Pentru a avea expresie negativă vom da factor forţat pe $-k^2$ şi avem:
$r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2 = -k^2[(\sqrt{-r_0}\tau - \frac{s_0}{\sqrt{-r_0}})^2 - t_0 + \frac{s_0^2}{r_0}]$ cu $\tau = \frac{h}{k}$
Aşadar, dacă $r_0 < 0(-r_0 > 0)$ şi $r_0t_0 - s_0^2 > 0, d^2f(x_0, y_0; h, k)$ va fi negativă.
Dacă vom da factor forţat pe $-h^2$ avem:
$r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2 = -h^2[(\sqrt{-t_0}\theta - \frac{s_0}{\sqrt{-t_0}})^2 - r_0 + \frac{s_0^2}{t_0}]$ cu $\theta = \frac{k}{h}$ Şi la fel, dacă $-t_0 > 0$ şi $r_0t_0 - s_0^2 > 0$, $d^2f(x_0, y_0; h, k)$ va fi negaitivă.$\rfloor$
Din cele prezentate putem trage concluzia că într-un punct de optim strict derivatele parţiale nemixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au acelasi semn.
De asemeni cercetarea optimului unei funcţii de două variabile trebuie să înceapă cu expresia $r_0t_0 - s_0^2$; dacă semnul acesteia este pozitiv vom continua cercetarea; dacă semnul acesteia este negativ, atunci punctul (x_0, y_0) nu este punct de optim, se va spune ca este un punct şa.
Inegalităţile din iii), pot fi reţinute cu ajutorul minorilor principali, notati cu d_1, d_2, ai matricei:

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{pmatrix}$$

numită matricea lui Hess sau hessiana lui f în (x_0, y_0), iar $d_1 = r_0, d_2 = r_0t_0 - s_0^2$. Astfel:
dacă $d_1 > 0, d_2 > 0$ avem în (x_0, y_0) un <u>minim local strict</u>.
dacă $d_1 < 0, d_2 > 0$ avem în (x_0, y_0) un <u>maxim local strict</u>. Dacă $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{A}_2)$ punctele de optim local sunt în mod obligatoriu soluţii ale ecuaţiei vectoriale $f'(x, y) = 0$. Punctele interioare lui $\mathbb{A}_2$ în care se anulează $f'(x, y)$ se numesc puncte critice (sau puncte staţionare).
Deoarece condiţia $f'(x, y) = 0$ este doar o condiţie necesară de optim, nu toate punctele critice ale funcţiei f vor fi puncte de extrem. Ca exemplificare, fie

$f(x,y) = x^2 - y^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, care admite un singur punct critic $(0,0)(\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y)$ care nu este nici punct de minim, nici punct de maxim deoarece: $\triangle f(0,0;h,k) = f(h,k) - f(0,0) = h^2 - k^2$, iar acesta nu poate avea semn constant pentru orice $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Puncul critic $(0,0)$ a lui f nu este punct de optim. Fiind soluţie pentru $f'(x,y) = 0$ va fi punct şa a lui f.

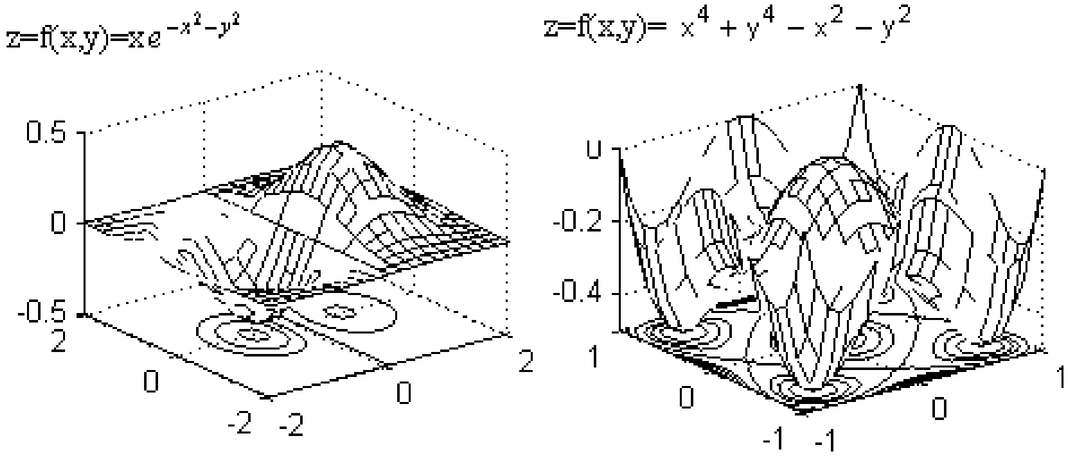

Fig. 3.3:

Vom face următoarea completare: Deoarece funcţiile f se presupun continue, cum acestea pot fi nederivabile, f mai poate avea puncte de optim acolo unde f nu este derivabilă.
De exemplu funcţiile: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}, g(x,y) = |x| + |y|, h(x,y) = |x| + y^2$ nu sunt derivabile în origine $(0,0)$, care însă este un punct de minim pentru toate aceste funcţii.
Dacă $d_2 = r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ sunt posibile două situaţii:
Prima situaţie este cea când $r_0 = 0, t_0 = 0, s_0 = 0$ în punctul (x_0, y_0), cum se întâmpla, de exemplu, în cazul funcţiilor $f(x,y) = x^3 + y^3$ şi $g(x,y) = 1 - x^4 - y^4$ care admit un singur punct critic şi acesta este $(0,0)$. În aceste cazuri trebuiesc analizate comportarea creşterii $\triangle f(x_0, y_0; h, k)$ prin utilizarea dezvoltării Taylor.
În cazul functiei f avem: $d^2 f(0,0;h,k) = d^4 f(0,0;h,k) = 0, df(0,0;h,k) = 6(h^3 + k^3)$ şi deci cresterea lui f î-şi va modifica semnul după cum h, k sunt pozitivi sau negativi şi deci $(0,0)$ va fi un punct şa pentru f. În cazul funcţiei g avem: $d^2 f(0,0;h,k) = d^3 f(0,0;h,k) = 0$ iar $d^4 f(0,0;h,k) = -24(h^4 + k^4) < 0$ pentru orice $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ şi deci $(0,0)$ este un punct de maxim pentru g.
În a doua situaţie avem $d_2 = r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ fară ca toate dervatele parţiale de ordinul doi să fie nule în punctul critic (x_0, y_0). Presupunând $s_0 \neq 0, r_0$ şi t_0 au acelaşi semn iar diferenţiala a doua va fi un patrat perfect al formei

liniare $r_0h^2 + 2s_0hk + t_0k^2$ şi aceasta are semnul plus dacă $r_0 > 0(t_0 > 0)$ şi are semnul minus dacă $r_0 < 0(t_0 < 0)$, conform cu cele arătate în teoremă, punctul iii). În această situaţie punctul critic (x_0, y_0) poate să fie un optim.
Exemplu: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ are trei puncte critice $(0, 0)$; $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. În $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), r_0t_0 - s_0^2 = 396$ iar $r_0 = 20$, la fel în $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), r_0t_0 - s_0^2 = 396$ iar $r_0 = 20$, deci aceste puncte sunt de minim. În $(0, 0), r_0 = t_0 = s_0 = -4, r_0t_0 - s_0^2 = 0$ şi creşterea $\triangle f(0, 0; h, k) = h^4 + k^4 - 2(h^2 + k^2 - 2hk)$ care nu are semn constant pentru orice $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
În cazu funcţiilor de trei variabile vom avea în mod asemănător:

Teorema 15: $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_3), \mathbb{A}_3 \in \mathbb{R}^3, \mathbb{A}_3$ deschsă.

i) (Conditia necesară, dar nu suficientă, de optim local):

Dacă $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A_3^*)$, atunci punctele de optim (adică punctele de maxim sau de minim local) se găsesc printre punctele critice sau staţionare ale funcţiei f, adică punctele din $\mathbb{A}_3^* \subset \mathbb{A}_3$ în care se anulează derivata $f'(x, y, z)$, deci punctele (x_0, y_0, z_0) pentru care: $f'(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow \{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0\}$ la care se adaugă (eventual) punctele din $\mathbb{A}_3$ în care f nu este derivabilă.

ii) (Condiţia suficientă de optim local strict)

Dacă $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A}_3^{**})\mathbb{A}_3^{**} \subset \mathbb{A}_3^*$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}_3^{**}$ este un punct critic, atunci acest punct critic este un punct de minim dacă $d^2f(x_0, y_0, z_0; h, k, \ell) = 0$ sau un punct de maxim dacă $d^2f(x_0, y_0, z_0; h, k, \ell) = 0$. În punctele critice în care f nu este de clasa $\mathcal{C}^{(2)}$ sau în punctele din $\mathbb{A}_3$ în care f nu este diferenţiabilă se analizează creşterea $\triangle f(x_0, y_0, z_0; h, k, \ell) = f(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell)-f(x_0, y_0, z_0)$ care cste pozitivă într-un punct de minim şi negativă într-un punct de maxim.

iii) Dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}_3^{**}$ este un punct critic al funcţiei f iar d_1, d_2, d_3 sunt minorii principali ai matricei lui Hess:

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

calculaţi în punctul critic (x_0, y_0, z_0).
Dacă $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0, (x_0, y_0, z_0)$ este punct de minim.
Dacă $d_1 < 0, d_2 > 0, d_3 < 0, (x_0, y_0, z_0)$ este punct de maxim.
⌈Justificarea se face în mod asemănător ca în teorema anterioară. Vom justifica numai punctul iii), celelalte puncte se justifica în mod analog cu teorema 14. Notând cu:
$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z), a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z), a_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z),$
$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = a_{21}$
$a_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = a_{31},$
vom avea: $d^2f = a_{11}h^2 + a_{22}k^2 + a_{33}\ell^2 + 2a_{12}hk + 2a_{23}k\ell + 2a_{13}\ell h$. Dând

factor comun fortat pe ℓ^2 şi notând cu $\theta = \frac{h}{\ell}, \tau = \frac{k}{\ell}$ vom avea:
$d^2f = \ell^2(a_{11}\theta^2 + a_{22}\tau^2 + a_{33} + 2a_{12}\theta\tau + 2a_{23}\tau + 2a_{13}\theta) =$
$\ell^2[(\sqrt{a_{11}}\theta + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\tau + \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}})^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\tau^2 + 2(a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}})\tau + (a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}})]$ Expresia din paranteza dreaptă va fi pozitivă pentru orice $\theta, \tau \in \mathbb{R}(\{h,k,\ell\} \in \mathbb{R})$ dacă trinomul de gradul doi în τ este pozitiv. Putem spune deci că paranteza dreaptă este pozitiva pentru orice $(\{h,k,\ell\} \in \mathbb{R}$ dacă sunt îndeplinite condiţiile:
$a_{11} > 0$, necesară pentru a forma primul pătrat,
$a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0$, necesar pentru a forma un patrat din trinomul care urmează,
$(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}) - (a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}})^2 > 0$, pentru ca trinomul în discuţie să aibă semnul constant, semnul coeficientului lui τ^2. Condiţiile acestea se vor putea scrie sub forma:

$$d_1 = \quad a_{11} > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

În această situaţie $d^2f(x_0, y_0, z_0; h, k, \ell) > 0$ şi punctul (x_0, y_0, z_0) este un punct de minim local.

Dacă dăm factor comun fortat pe $-\ell^2$ şi la fel, notând cu $\theta = \frac{h}{\ell}, \tau = \frac{k}{\ell}$ vom avea:
$d^2f = -\ell^2(-a_{11}\theta^2 - a_{22}\tau^2 - a_{33} - 2a_{12}\theta\tau + 2a_{23}\tau - 2a_{13}\theta) =$
$-\ell^2[(\sqrt{-a_{11}}\theta - \frac{a_{12}}{\sqrt{-a_{11}}}\tau - \frac{a_{13}}{\sqrt{-a_{11}}})^2 - (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\tau^2 - 2(a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}})\tau - (a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}})]$ Expresia din paranteza dreaptă va fi pozitivă pentru orice $\{\theta, \tau\} \in \mathbb{R}(\{h,k,\ell\} \in \mathbb{R})$ dacă trinomul de gradul doi în τ este pozitiv. Putem spune deci că paranteza dreaptă este pozitivă pentru orice $h, k, l \in \mathbb{R}$ dacă sunt îndeplinite condiţiile:
$-a_{11} > 0$, necesară pentru a forma primul pătrat,
$a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} < 0$, necesar pentru a forma un patrat din trinomul care urmează,
$(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}) - (a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}})^2 > 0$, pentru ca trinomul în discuţie să aibă semnul constant, semnul coeficientului lui τ^2. Condiţiile acestea se vor putea scrie sub forma:

$$d_1 = \quad a_{11} < 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$$

În această situaţie $d^2f(x_0, y_0, z_0; h, k, \ell) < 0$ şi punctul (x_0, y_0, z_0) este un punct de maxim local. $\rfloor$

Reluând problema, la modul general, pentru a fixa definitiv problema optimului, în cazul funcţiilor de m variabile. Pentru a obţine efectiv punctele posibile de extrem ale lui f , în ipoteza diferenţibilităţii lui f în $\mathbb{A}$ vom utiliza teorema generala 10. Conditia necesara de extrem este: $(df)(x_0) = 0$ sau $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0.$

Exemplu:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 20x_1$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 + 20 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -4x_2 + 2x_3 = 0.$

Sistemul format din anularea derivatelor partiale, în acest caz, are soluţia $x_0 = (-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5)$ deci punctul x_0 este un posibil punct de extrem.

Pentru a obţine condiţii suficiente de extrem se face ipoteza suplimentară $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A})$ şi se utilizează dezvoltarea Taylor în care x_0 este un punct staţionar al lui f; se deduce:

$$\triangle f(x_0, h) = \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\xi)h_jh_k = \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)h_jh_k + \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{m} \varepsilon_{jk}(\xi)h_jh_k,$$

unde: $\varepsilon_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$, iar $\varepsilon_{jk} \to 0$ când $||h|| \to 0$.

Luând în consideraţie forma pătratica $A(h) = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}h_jh_k$, unde $a_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0)$, dacă $A(h)$ este pozitiv definită se deduce ca $\triangle f(x0, h) \geq 0$ deoarece $\frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{m} \varepsilon_{jk}h_jh_k$ nu poate modifica semnul lui $\triangle f(x_0, h)$ pentru că poate fi făcut oricât de mic prin alegerea convenabilă a lui h şi în acest caz x_0 este un punct de minim pentru funcţia f.

Dacă $A(h)$ este negativ definită avem $\triangle f(x_0, h) \leq 0$, atunci x_0 este un punct de maxim.

Daca $A(h)$ este o formă pătratica nedefinită atunci x_0 nu este punct de extrem.

Deoarece pentru formele pătratice se cunosc din "algebra lineară" condiţii necesare şi suficiente pentru ca o forma patratică să fie pozitiv (negativ) definită acestea vor fi folosite drept condictii necesare şi suficiente pentru extreme stricte.

Astfel "Criteriul lui Sylvester" spune că forma patratică A(h) este pozitiv definită dacă şi numai dacă minorii principali ai matricei $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sunt pozitivi adică:

$$d_1 = \ a_{11} > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \\ a_{21} \ a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \ d_m = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ...a_{1m} \\ a_{21} \ a_{22} \ ...a_{2m} \\ .... \\ a_{m1} \ a_{m2} \ ...a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Dacă avem:

$$d_1 = \quad a_{11} < 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \\ a_{21} \, a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \; d_m = (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, ...a_{1m} \\ a_{21} \, a_{22} \, ...a_{2m} \\ .... \\ a_{m1} \, a_{m2} \, ...a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

forma este negativ definită.

În orice altă situaţie nu se poate preciza semnul lui $A(h)$.
Matricea formată cu termenii a_{ij} se numeşte matricea lui Hess sau hessiana formei pătratice.
În exemplul anterior:
$a_{11} = 2, a_{12} = -2, a_{13} = 0$,
$a_{22} = 2, a_{23} = -4$,
$a_{33} = 2$.

$$d_1 = \quad a_{11} = 2 > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \\ a_{21} \, a_{22} \end{vmatrix} = 0, \; d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \\ a_{21} \, a_{22} \, a_{23} \\ a_{31} \, a_{32} \, a_{33} \end{vmatrix} = -32 < 0$$

şi deci punctul $x_0 = (-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5)$ nu este punct de extrem.

În cazul exemplului:
$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 8x - 10y - 6z + 14$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + 2z - 8 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y + 2z - 10 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 2y + 2z - 6 = 0.$; $x_0 = (1, 1, 1)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0) = 2,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0) = 2,$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) = 2,$
Hessiana este:

$$H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 4 \; 2 \; 2 \\ 2 \; 6 \; 2 \\ 2 \; 2 \; 2 \end{pmatrix}$$

iar $d_1 = 4, d_2 = 20, d_3 = 16$
$f(1, 1, 1) = f_{min} = 2.$
Prin urmare pentru orice $(x, y, z) \in V(1, 1, 1)$, vom avea $f(x, y, z) \geq 2$.
În cazul exemplului:
$f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz - 2xz + 4x - 2y + 4z + 7$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 2y - 2z + 4 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y + 2z - 2 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -2x + 2y - 4z + 4 = 0.$; $x_0 = (1, 1, 1)$
Hessiana este:

$$H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -4 \; 2 \; -2 \\ 2 \; -2 \; 2 \\ -2 \; 2 \; -4 \end{pmatrix}$$

iar $d_1 = -4, d_2 = 4, d_3 = -8$; $f(1, 1, 1) = f_{max} = 10.$; Prin urmare pentru orice $(x, y, z) \in V(1, 1, 1)$, vom avea $f(x, y, z) \leq 10$.

Capitolul 4

Funcţii definite implicit.

4.1 Noţiunea de funcţie implicită.

Exprimarea unei funcţii $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ sub forma $y = f(x), x \in \mathbb{I}$ constituie ceea ce se numeşte exprimarea funcţiei f sub formă explicită. Dacă însă scriem această egalitate sub forma: $f(x) - y = 0$ (adevarată pentru orice $x \in \mathbb{I}$) deci a unei expresii de forma $F(x, y) = 0$, se pune în evidenţă funcţia reală F care apare în membrul stâng al acestei ecuaţii definită pe o mulţime $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, deci $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, şi care are proprietatea că $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathbb{I}$. Altfel spus, cunoscând funcţia $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, funcţia f apare ca soluţie $y = f(x) x \in \mathbb{I}$ a ecuaţiei $F(x, y) = 0$. De pildă, considerând funcţia: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) = x - y + 1$, atunci $y = x + 1$, este soluţie a ecuaţiei $F(x, y) = 0$. Considerând funcţia definită prin $f(x) = x + 1 x \in \mathbb{R}$ avem:$F(x, f(x)) = 0$
Apare în felul acesta şi problema că, dându-se apriori funcţia $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ există o funcţie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$,$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathbb{I}$. Iar în caz afirmativ, în ce masură diferitele proprietăţi (continuitate, diferenţiabilitate) ale funcţiei F se transmit şi asupra funcţiei f.
În ce priveşte răspunsul la prima parte a problemei este simplu de văzut că el nu este afirmativ pentru orice funcţie $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Aşa de pildă pentru funcţia: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) = x + y + 1$, nu există nici o funcţie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ astfel încât să avem: $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathbb{I}$. În cazurile în care cunoscând $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ există $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea menţionată spunem că funcţia f se defineşte implicit prin funcţia F.
Aparent rezolvarea problemei ar reveni la explicitarea funcţiei, adică la rezolvarea ecuaţiei $F(x, y) = 0$ pentru obţinerea soluţiei $y = f(x)$. Trebuie însă de la început să atragem atenţia că această rezolvare a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ nu este posibilă întotdeauna iar aceasta nu înseamnă că funcţia f nu există. Cu alte cuvinte existenţa funcţiei implicite f poate fi garantată de o seamă de proprietăţi ale funcţiei $F(x, y)$, existenţa pe care deci o putem afirma fară

a cunoaşte în mod efectiv (sub forma explicită) funcţia f, ci numai cunoscnd funcţia F. Rezolvarea acestei deosebit de importante probleme, atât în ceea ce priveşte existenţa funcţiei f, cât şi în ce priveşte diferitele sale proprietăţi este dată de teorema cunoscută sub numele de teorema funcţiilor implicite. Vom avea în vedere diferite situaţii, în raport de problema ce urmează a fi rezolvată.

4.2 Teorema funcţiilor implicite.

4.2.1 Cazul funcţiilor cu două variabile reale.

Fie $F : \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathbb{A}_2$ deschisă şi fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ şi intervalele: $\mathbb{I} = (x_0-\delta, x_0+\delta), \mathbb{J} = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ cu $\delta > 0, \varepsilon > 0$ astfel încât $\mathbb{I}\times\mathbb{J} \subset \mathbb{A}_2$ Vom avea în acest caz următoarea teoremă a funcţiilor implicite, notată prescurtat cu:

T.F.I.1: Fie $F \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_2), \mathbb{A}_2$ deschisă în $\mathbb{R}^2$ ce verifică ipotezele:

a) $F \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}_2), k \geq 1$

b) Există $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}_2$ astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

Atunci există intervalele $\mathbb{I} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ şi $\mathbb{J} = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ cu $\delta, \varepsilon > 0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I} \times \mathbb{J} \subset \mathbb{A}_2$ si o funcţie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{J}$, unică şi:

$\alpha) f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I})$,

$\beta) f(x_0) = y_0$,

$\gamma) F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{I}$, iar derivatele funcţiei f până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare a funcţiei compuse lui F şi anume:

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0$,

din care rezultă:

$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$,

Dacă $F \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{I}$, vom avea derivând încă o dată: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x))+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x))(f'(x))+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x))(f'(x))^2+\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f''(x) = 0$, din care rezultă:

$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2}{(\frac{\partial F}{\partial y})^3}$

⌈ Vom considera mulţimea funcţiilor $S = \{f|f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}), f : \mathbb{I} \to \mathbb{J}, f(x_0) = y_0\}, S$ este un spaţiu metric complet cu metrica $d(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in I} |f1(x)-f2(x)|$ şi vom nota cu $T(f(x)) = f(x) - \frac{F(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x_0, y_0)))$ aplicaţia $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ pentru orice $f \in \mathbb{S}$. Din exprimarea lui $T(f(x))$ se vede că dacă f este continuă pe $\mathbb{I}$, cum $F \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{I} \times \mathbb{J})$ rezultă că $T(f(x))$ este continuă pe $\mathbb{I}$ şi în plus $T(f(x_0)) =$

$f(x_0) - \frac{F(x_0,f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = y_0$. Vom arăta că $T(f(x)) \in \mathbb{J}$, dacă $x \in \mathbb{I}$. Luând $f(x) = y$ şi $f(x_0) = y_0$ scriind $T(y) = y_0 + [y - y_0 - \frac{F(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}] = y_0 + \varphi(x, y)$. Vom deduce proprietatile, functiei noi $\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$, anume:

- $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{I} \times \mathbb{J})$,
- $\varphi(x_0, y_0) = 0$,
- $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

şi vom putea scrie: $|T(f(x)) - y_0| = |\varphi(x, f(x))| \leq |\varphi(x, f(x)) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|$. Utilizând teorema creşterilor finite (Lagrange) funcţiei φ relativ la două variabile avem: $|\varphi(x, f(x)) - \varphi(x, y_0)| \leq |\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \eta)||f(x) - y_0| = \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{I}\times\mathbb{J}} |\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)|\varepsilon < q\varepsilon$ şi vom avea: $|T(f(x)) - y_0| = \varepsilon$, dacă se determină $\delta > 0$ si $\varepsilon > 0$ astfel ca: $|\varphi(x, y_0)| \leq \varepsilon - q\varepsilon$, ceeace este posibil deoarece $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Din ultima inegalitate şi în baza faptului că $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ se deduce că neapărat q este pozitiv şi subunitar $(0 < q < 1)$. Prin urmare, aplicaţia T este contracţie dacă se aleg $\delta > 0$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $0 < q < 1$, deoarece: $d(T(f_1(x)), T(f_2(x))) = \sup\limits_{x\in\mathbb{I}} |[y_0 + \varphi(x, f_1(x))] - [y_0 + \varphi(x, f_2(x))]| = \sup\limits_{x\in\mathbb{I}} |\varphi(x, f_1(x)) - \varphi(x, f_2(x))| \leq \max\limits_{(x,y^*)\in\mathbb{I}\times\mathbb{J}} |\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y^*)| \max\limits_{x\in\mathbb{I}} |f_1(x) - f_2(x)| \leq q d(f_1(x), f_2(x))$. Î n baza principiului contracţiei, aplicaţia T va avea un singur element, $f(x)$ adică $T(f(x)) = f(x)$ şi acest element este funcţia căutată. Într-adevăr, deoarece $f \in \mathbb{S}$ avem $f(x_0) = y_0$, iar din egalitatea dată de principiul contracţiei: $f(x) - \frac{F(x,y)}{\frac{\partial Y}{\partial y}(x_0,y_0)} = f(x)$, se deduce $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{I}$ şi în plus f este continuă pe $\mathbb{I}$. Să mai arătăm că $f'(x)$ există. Dacă $x + h \in \mathbb{I}$ rezultă că $F(x + h, f(x + h)) = 0$ şi cum f este continuă în x se poate scrie: $f(x + h) - f(x) = k$, iar $\lim\limits_{h\to 0} k = \lim\limits_{h\to 0}[f(x + h) - f(x)] = 0$. Astfel vom putea scrie: $0 = F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = F(x + h, f(x) + k) - F(x, f(x)) = F(x+h, f(x)+k) - F(x, f(x)+k) + F(x, f(x)+k) - F(x, f(x)) = [\frac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}, f(x) + k)]h + [\frac{\partial F}{\partial y}(x, \overline{f})]k$, unde: $\overline{x}$ este între x şi $x + h$, iar $\overline{f}$ este între $f(x)$ şi $f(x)+k$. Prin împărţirea ultimei relaţii la h şi apoi prin trecere la limită pentru $h \to 0$, obţinem: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}, f(x) + k) + \lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \overline{f})]\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ şi deci: $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0$, şi cum $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ rezultă $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pentru o vecinatate a lui (x_0, y_0), în baza continuităţii lui $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi deci: $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$, pentru $x \in \mathbb{I}$. $\rfloor$

Exemple:

1. Fie $F(x, y) = 4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Vom avea $F(x_0, y_0) = 0$, dacă (x_0, y_0) este un punct de pe hiperbola: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$, iar deoarece $\frac{\partial F}{\partial y} = -18y \neq 0$, pentru

că hiperbola nu trece prin $(0,0)$ rezultă, conform teoremei funcţiilor implicite ca va exista $f(x)=y$ astfel ca: $4x^2-9f^2(x)-36=0$ şi din aceasta rezultă că $f(x)=\pm\frac{1}{3}\sqrt{4x-36}$. Dacă $x_0=\frac{3\sqrt{5}}{2}, y_0=1$, vom avea $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{4x-36}$ Dacă $x_0=\frac{3\sqrt{5}}{2}, y_0=-1$, vom avea $f(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{4x-36}$
2. Fie $F(x,y)=x^3+y^3-2xy, F(1,1)=0, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=3y^2-2x, \frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1$. Aşadar va exista $\mathbb{I}=(1-\delta,1+\delta), \mathbb{J}=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ cu $\varepsilon,\delta>0$ alesi convenabil astfel ca $f:\mathbb{I}\to\mathbb{J}$ şi $x^3+f^3(x)-2xf(x)=0, x\in\mathbb{I}$ iar $f'(x)=-\frac{3x^2-2f(x)}{3f^2(x)-3x}, (\forall)x\in\mathbb{I}$. Determinarea lui $f(x)$ este dificilă. Aceasta fiind echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea $x3+y3-2xy=0$ în raport cu y, dar dacă sunt suficiente valori aproximative pentru f se pot utiliza aproximaţiile succesive ale punctului fix $f(x)$ astfel: $f_0(x)=1=y_0$, $f_1(x)=T(f_0(x))=f_0(x)-\frac{F(x,f_0(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}=1-\frac{x^3+1-2x}{1}=2x-x^3, f_2(x)=$ $T(f_1(x))=f_0(x)-\frac{F(x,f_1(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}=2x-4x^2-10x^3-2x^4+12x^5-6x^7+x^9$ etc. Cum $Tf=f-x^3-f^3+2xf$. Se poate lua $f\approx f_1(x)$.

Observaţii:

1. Dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ dar şi $F(x_0,y_0)\neq 0$ teorema functiilor implicite nu se poate aplica lui F dar este aplicabila functiei $G(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)$ deoarece $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ şi $G(x_0,y_0)=0$. În cazul exemplului anterior dacă se ia punctul $(1,-1)$ avem şi $F(1,-1)=2$ şi teorema functiilor implicite se aplica functiei $G(x,y)=x^3+y^3-2xy-2$.
2. Dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ dar $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ si $F(x_0,y_0)=0$ teorema se va aplica în raport cu x şi vom avea teorema funcţiilor implicite sub forma:
T. F. I. 1':
Fie $F\in\mathbb{S}(\mathbb{A}_2), \mathbb{A}_2$ deschisă în $\mathbb{R}^2$ ce verifică ipotezele:
a') $F\in\mathcal{C}^k(\mathbb{A}_2), k\geq 1$
b') Există $(x_0,y_0)\in\mathbb{A}_2$ astfel încât $F(x_0,y_0)=0$
c') $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$,
Atunci există intervalele $\mathbb{I}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ şi $\mathbb{J}=(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ cu $\delta,\varepsilon>0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I}\times\mathbb{J}\subset\mathbb{A}_2$ si o funcţie $g:\mathbb{J}\to\mathbb{I}$, unică şi:
$\alpha')g\in\mathcal{C}^k(\mathbb{I})$,
$\beta')g(y_0)=x_0$,
$\gamma')F(g(y)x,y)=0$, pentru orice $y\in\mathbb{J}$, iar derivatele funcţiei g până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare a funcţiei compuse lui F şi anume:
$\frac{\partial F}{\partial x}(g(y),y)g'(y)+\frac{\partial F}{\partial y}(g(y),y)=0$,
din care rezultă:
$g'(y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y),y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y),y)}$,

Dacă $F\in\mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{A}_2)$, pentru orice $y\in\mathbb{J}$, vom avea derivând încă o dată: $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(g(y),y)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(g(y),y)(g'(y))+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(g(y),y)(g'(y))^2+\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))g''(y)=$

0, din care rezultă:
$g''(y) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2}{(\frac{\partial F}{\partial x})^3}$
3. Dacă $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, punctul (x_0, y_0) este un punct singular csi în acest punct nu se poate aplica T. F. I.

4.2.2 Cazul funcţiilor cu trei variabile reale.

T. F. I.2 Fie $F \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_3), \mathbb{A}_3$ deschisă în $\mathbb{R}^3$ ce verifică ipotezele:
a) $F \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}_3), k \geq 1$
b) Există $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}_3$ astfel încât $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
c) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
Atunci există discul $\mathbb{I}_2 = \mathbb{B}_\delta(x_0, y_0)$ şi $\mathbb{J} = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ cu $\delta, \varepsilon > 0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I}_2 \times \mathbb{J} \subset \mathbb{A}_3$ si o funcţie $f : \mathbb{I}_2 \to \mathbb{J}$, unică şi:
$\alpha) f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}_2)$,
$\beta) f(x_0, y_0) = z_0$,
$\gamma) F(x, y, f(x, y)) = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{I}_2$, iar derivatele funcţiei f până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare a funcţiei compuse lui F şi anume:
$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
din care rezultă:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$
Dacă $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A}_3)$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{I}_2$, vom avea derivatele parţiale de ordinul al doilea, derivând încă o dată derivatele partiale de ordinul întâi, etc.

4.2.3 Cazul funcţiilor cu n+1 variabile (m=n+1).

Fie $F : \mathbb{A} \to \mathbb{R}, \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ş1 vom nota componenta $n + 1$, a lui x cu $y, x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, ..., x_n, y)$. În acest caz avem:
T. F. I.3
a) $F \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}), k \geq 1$
b) Există $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_0) \in \mathbb{A}$ astfel încât $F(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_0) = 0$
c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_0) \neq 0$. Atunci există sfera $\mathbb{I}_n = \mathbb{B}_\delta(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ şi intervalul centrat $\mathbb{J} = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ cu $\delta, \varepsilon > 0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I}_n \times \mathbb{J} \subset \mathbb{A}$ si o funcţie $f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{J}$, unică şi:
$\alpha) f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}_n)$,
$\beta) f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = y_0$,
$\gamma) F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$, pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{I}_n$, iar derivatele funcţiei f până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare a funcţiei compuse lui F şi anume:
$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) = 0$

$j = 1, 2, ..., n$ din care rezultă:
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n))}$, $j = 1, 2, ..., n$,
mai condensat, putem scrie:
$f'(x_1, x_2, ..., x_n) = grad\ f = \nabla f = -\frac{\nabla_x F}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n))$, unde:
$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})^t$, iar $\nabla_x F = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n})^t$
Demonstraţia se face la fel ca în cazul $n + 1 = 2$, luând: $T(f(x)) = f(x) - \frac{F(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x_0, y_0) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \frac{F(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_0)$.
Exemplu:
$F(x_1, x_2, x_3, y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 - e^y = 0$. Aceasta defineşte funcţia $y = f(x_1, x_2, x_3)$ dată implicit în vecinatatea punctelor unde $2y - e^y \neq 0$.
$\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,x_3,y)} = -\frac{2x_1}{2y-e^y}$,
$\frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,x_3,y)} = -\frac{2x_2}{2y-e^y}$
$\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,x_3,y)} = -\frac{2x_3}{2y-e^y}$

4.3 Sisteme de funcţii implicite.

Vom considera, pentru început, spre exemplificare:

4.3.1 Cazul a două funcţii cu cinci variabile

T. F. I. 4: Fie $F, G \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_5), \mathbb{A}_5$ deschisă în $\mathbb{R}^5, F = F(x, y, z, u, v), G = G(x, y, z, u, v)$, ce verifică ipotezele:
a) $\{F, G\} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}_5), k \geq 1$
b) Exictă $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{A}_5$ astfel încât:
$F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, şi $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$
c) det $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \neq 0$.

Atunci există sfera $\mathbb{I}_3 = \mathbb{B}_\delta(x_0, y_0, z_0)$ şi intervalele centrate $\mathbb{J}_1 = (u_0 - \varepsilon_1, u_0 + \varepsilon_1)$ şi $\mathbb{J}_2 = (u_0 - \varepsilon_2, u_0 + \varepsilon_2)$ cu $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I}_3 \times \mathbb{J}_1 \times \mathbb{J}_2 \subset \mathbb{A}_5$ şi două funcţii $f : \mathbb{I}_3 \to \mathbb{J}_1$, $g : \mathbb{I}_3 \to \mathbb{J}_2$,unice şi:
α) $\{f, g\} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}_3)$,
β) $f(x_0, y_0, z_0) = u_0, g(x_0, y_0, z_0) = v_0$,
γ) $F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0, G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0$, pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{I}_3$, iar derivatele parţiale ale funcţiilor f , g până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare a funcţiilor compuse F, G

şi anume:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

din care rezultă:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z).$
Dacă $\{F,G\} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A}_5)$, pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{I}_3$,vom avea derivatele parţiale de ordinul al doilea, derivând încă o dată derivatele partiale de ordinul întâi, etc. Generalizarea este imediată. Obţinem asfel:

4.3.2 Cazul sistemelor de m funcţii cu m+n variabile.

T. F. I. 5: Fie $F_1, F_2, ..., F_m \in \mathbb{S}(\mathbb{A}_{m+n}), \mathbb{A}_{m+n}$ deschisă în $\mathbb{R}^{m+n}$,
$F_1 = F_1(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ...y_m)$
$F_2 = F_2(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ...y_m)$
....
$F_m = F_m(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ...y_m)$,
ce verifică ipotezele:
a) $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{A}_{n+m}), k \geq 1$
b) Exictă $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, .., y_m^0) \in \mathbb{A}_{n+m}$ astfel încât:
$F_1(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, .., y_m^0) = 0,$
$F_2(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, .., y_m^0) = 0,$
....
$F_m(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, .., y_m^0) = 0.$
c) $\det \frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_m)}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; y_1^0, y_2^0, .., y_m^0) \neq 0.$

Atunci există sfera $\mathbb{I}_n = \mathbb{B}_\delta(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ şi intervalele centrate $\mathbb{J}_j = (y_j^0 - \varepsilon_j, y_j^0 + \varepsilon_j), j = 1, 2, ..., m$ cu $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m > 0$ convenabil aleşi astfel ca $\mathbb{I}_n \times \mathbb{J}_1 \times \mathbb{J}_2 \times ... \times \mathbb{J}_m \subset \mathbb{A}_{n+m}$ şi m funcţii $f_j : \mathbb{I}_n \to \mathbb{J}_j j = 1, 2, ..., m$, unice şi:
α) $\{f_1, f_2, ..., f_m\} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I}_n)$,
β) $f_j(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = y_j^0, j = 1, 2, ..., m$,
γ) $F_j(x_1, x_2, ..., x_n; f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0, j = 1, 2, ..., m$ pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{I}_n$, iar derivatele parţiale ale funcţiilor f_j până la ordinul k inclusiv se obţin prin aplicarea regulii de derivare

a funcţiilor compuse F_j şi prin aplicarea regulei lui Cramer sistemelor:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_j} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

$j = 1, 2, ..., m$

Exemplu:

$F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1 + x_2x_3 - y_1y_2 - y_1^2 = 0$
$F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1 - x_2 + y_1^3 - y_2^3 = 0$
$F_1(1, 1, 1, 1, 1) = 0, F_2(1, 1, 1, 1, 1) = 0$

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_2 - 2y_1 & -y_1 \\ 3y_1^2 & -3y_2^2 \end{vmatrix} = 3y_2^2 + 6y_1y_2^2 + 3y_1^3$$

şi $\det \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)}(1, 1, 1, 1, 1) = 12 \neq 0$. Va exista în vecinătatea punctului $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, funcţiile $f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)$ astfel încât $f_1(1, 1, 1) = 1, f_2(1, 1, 1) = 1$ şi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3 - f_1f_2 - f_1^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + f_1^3 - f_2^3 = 0 \end{cases}$$

iar derivatele: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}; \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$ în punctul $(1, 1, 1)$ se obţin din sistemele algebrice:

$$\begin{cases} 1 - (y_2 + 2y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \\ 1 + 3y_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 3y_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

pentru determinarea derivatelor parţiale $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

$$\begin{cases} x_3 - (y_2 + 2y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - y_1\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \\ -1 + 3y_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - 3y_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

pentru determinarea derivatelor parţiale $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$.

$$\begin{cases} x_2 - (y_2 + 2y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - y_1\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 \\ 3y_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - 3y_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

pentru determinarea derivatelor parţiale $\frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$.

Calculând în $(1, 1, 1)$ obţinem:

$$\begin{cases} 1 - 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \\ 1 + 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 3\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{1}{6}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} 1 - 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \\ -1 + 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 3\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$.

$$\begin{cases} 1 - 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \\ 3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 3\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă: $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{1}{4}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{1}{4}$.

4.4 Extreme cu legături.

Prin problemă de extrem cu legături vom înţelege determinarea valorilor extreme ale unei funcţii $F = F(x_1, x_2, ..., x_m)$, ştiind că în punctele de extrem (dacă există) se verifică egalităţile: $G_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, G_2(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, ..., G_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$, cu $k = 1$, funcţiile $G_j, j = 1, 2, ..., k$, fiind numite restricţii sau legături, iar $F, G_1, G_1, ..., G_k$ fiind funcţii definite pe $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^m$. Pentru o problemă de extrem cu legături trebuie ca,în mod necesar, $m > k$ iar $m > 1$. În ipoteza existenţei punctelor $(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m) \in \mathbb{A}$ în care se realizeaza extremul funcţiei F în condiţiile suplimentare $G_j(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m) = 0 (j = 1, 2, ..., k)$ este valabil următorul rezultat cunoscut sub numele:

4.4.1 Teorema lui Lagrange.

Teorema 6 :Dacă $F, G_1, G_2, ..., G_k : \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, m > 1, m > k$ sunt de clasă $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{A})$ atunci dacă $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m)$ este un punct de extrem pentru F şi $G_j(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m) = 0 (j = 1, 2, ..., k)$ atunci acest punct este punct de extrem liber pentru funcţia: $L(x_1, x_2, ..., x_m; \ell_1, \ell_2, ..., \ell_k) = F + \ell_1 G_1 + \ell_2 G_2 + ... + \ell_k G_k$, considerată ca o funcţie de $m + k$ variabile ($L : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$) Funcţia L se numeşte funcţia lui Lagrange, pentru problema de extremum cu legături iar $\ell_1, \ell_2, ..., l_k$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange.
⌈ Vom demonstra următoarele cazuri:
I. $F = F(x, y)$ cu legatura $G = G(x, y) = 0 (m = 2, k = 1, x = x_1, y = x_2)$.
II. $F = F(x, y, z)$ cu o singură legătură $G = G(x, y, z) = 0 (m = 3, k = 1, x = x_1, y = x_2, z = x_3)$.
III. $F = F(x, y, z)$ cu două legături $G_1 = G_1(x, y, z) = 0, G_2 = G_2(x, y, z) = 0, (m = 3, k = 2, x = x_1, y = x_2, z = x_3)$.
Pentru cazul I. Presupunem că în punctul (x_0, y_0) se realizează un maxim sau un minim pentru F şi $G(x_0, y_0) = 0$. Presupunem de asemeni că în

vecinatatea lui (x_0, y_0) se poate aplica teorema funcţiilor implicite, lui G, adică: există $y = f(x)$ astfel încât $y_0 = f(x_0)$ şi $G(x, f(x)) = 0$. Funcţia $g(x) = F(x, f(x))$ are în x_0 un extrem local, deci derivata sa în x_0 este nulă. Putem scrie astfel: $g'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)f'(x_0) = 0$ Pe de altă parte f a rezultat din teorema funcţiilor implicite aplicată lui G, şi deci: $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)f'(x_0) = 0$ Din cele două relaţii, eliminând pe $f'(x_0)$ va rezulta:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \det \frac{\partial(F,G}{\partial(x,y)}(x_0, y_0) \quad = 0$$

prin urmare determinantul Jacobianului este 0 în (x_0, y_0) şi deci liniile determinantului sunt proporţionale şi avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \ell \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \ell \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Aşadar (x_0, y_0) este o soluţie a sistemului format de derivatele parţiale ale funcţiei: $L(x, y, \ell) = F(x, y) + \ell G(x, y)$ Am arătat că dacă (x_0, y_0) este un punct de extrem pentru $F(x, y)$ şi verifică condiţia $G(x, y) = 0$ atunci o condiţie necesară este ca să existe $\ell \in \mathbb{R}$ astfel încât derivatele parţiale ale lui $L(x, y, \ell) = F(x, y) + \ell G(x, y)$ în raport cu x, y, ℓ să se anuleze în (x_0, y_0, ℓ). Practic se determină punctele printre care se găsesc puncte de extrem anulnd derivatele parţiale ale lui L în raport cu x, y, ℓ, adică:$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \ell} = 0$, urmând a se verifica dacă (x_0, y_0) este un punct de extrem pentru $F(x, y)$.

Exemplu: Să se înscrie într-o elipsă un dreptunghi de arie mximă. Considerăm elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Aria dreptunghiului căutat este: $S = 2x2y = 4xy, x \in (0, a), y \in (0, b)$. $L(x, y, \ell) = 4xy + \ell(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4y + \frac{2\ell x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4x + \frac{2\ell y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \ell} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Eliminnd x, y, din primele două ecuaţii obţinem: $\ell = \pm 2ab$. Înlocuind ℓ cu semnul plus în una din primele două obţinem ecuaţia: $bx + ay = 0$, care împrună cu ultima ecuaţie din sistem (restricţia) ne dau soluţiile: $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, (\frac{b}{\sqrt{2}})$; $(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$. Înlocuind ℓ cu semnul minus în una din primele două obţinem ecuaţia: $bx - ay = 0$, care împrună cu ultima ecuaţie din sistem (restricţia) ne dau soluţiile: $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$; $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$. Acestea din urma sunt punctele pentru care $S = S_{max} = 2ab$.

Pentru cazul II. Presupunem că în punctul (x_0, y_0, z_0) se realizează un maxim sau un minim pentru F şi $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Presupunem de asemeni

că în vecinatatea lui (x_0, y_0, z_0) se poate aplica teorema funcţiilor implicite, lui G, în ipoteza: $\frac{\partial G}{\partial x})(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ atunci există $z = f(x, y)$, soluţie a ecuaţiei $G(x, y, f(x, y)) = 0$, iar $F(x, y, f(x, y))$ are în (x_0, y_0) un punct de extrem local şi derivatele sale parţiale se vor anula în (x_0, y_0), adică:
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
Pe de altă parte din terema funcţiilor implicite avem şi relaţiile:
$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$
$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
Altfel spus $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ satisfac respectiv sistemele:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Rezultă că prin eliminarea simultană a lui $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ că:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \lambda\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \lambda\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \mu\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \mu\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

Comparnd relaţiile din linia a doua, a celor două relaţii, vom deduce că $\lambda = \mu = \ell$ şi deci:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \ell\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \ell\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \ell\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

Cu alte cuvinte în (x_0, y_0, z_0) se anulează derivatele parţiale ale funcţiei: $L(x, y, z, \ell) = F(x, y, z) + \ell G(x, y, z)$ şi deci şi în cazul unei funcţii de trei variabile cu o singură condiţie de legătură procedeul este acelaşi ca în cazul funcţiilor de două variabile cu o singură condiţie (legatură).

Exemple:

1. Să se găsească maximul expresiei xyz cu condiţia $x + y + z = c$ $(c > 0)$

Răspuns. Aplicând procedeul de mai sus funcţiei $L(x, y, z, \ell) = xyz + \ell(x + y + z - c)$ obţinem: $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{c}{3}$

2. Considerăm forma biliniară simetrică: $F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz$ Acesteia i se poate ataşa matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

simetrică $(a_{12} = a_{21}; a_{32} = a_{23}; a_{13} = a_{31})$. Putem lega matricea A de funcţia F numită formă patratică prin scrierea matriceală:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vom căuta valorile extreme notate cu (u, v, w) ale lui F în condiţia: $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Cu alte cuvinte vom determina vectorii unitari (u, v, w) care dă valoarea extremă lui F. Avem deci o problemă de extrem condiţionat, care se reduce la extremarea funcţiei lui Lagrange de forma: $L(x, y, z, \ell) = F(x, y, z) - \ell(x + y + z - 1)$ Valorile extreme sunt date de:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z - 2\ell x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z - 2\ell y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2a_{31}x + 2a_{32}y + 2a_{33}z - 2\ell z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \ell} = -x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Primele trei ecuaţii le putem scrie mariceal :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \ell & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \ell & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Condiţia ca sistemul să admită soluţii nebanale este :

$$P_3(\ell) = \begin{vmatrix} a_{11} - \ell & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \ell & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \ell \end{vmatrix} = 0$$

Dacă ℓ e o solutie a polinomului,$P_3(\ell)$, numit polinomul caracteristic al matricei A, atunci soluţia $(x, y, z) = (u, v, w)$ numită soluţie proprie va verifica sistemul anterior şi deci:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

iar:

$$F(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \\ a_{21} \, a_{22} \, a_{23} \\ a_{31} \, a_{32} \, a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \ell(u \ v \ w) \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \ell$$

Soluţiile (u_j, v_j, w_j) corespunzătoare valorilor $\ell_j, j = 1,2,3$, numindu-se vectori propri corespunzători. Se poate arăta că vectorii proprii sunt ortogonali între ei. Într-adevăr, pentru $\ell_1 \neq \ell_2$ avem:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}v_1 + a_{13}w_1 - \ell_1 u_1 = 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}v_1 + a_{23}w_1 - \ell_1 v_1 = 0 \\ a_{31}u_1 + a_{32}v_1 + a_{33}w_1 - \ell_1 w_1 = 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} a_{11}u_2 + a_{12}v_2 + a_{13}w_2 - \ell_2 u_2 = 0 \\ a_{21}u_2 + a_{22}v_2 + a_{23}w_2 - \ell_2 v_2 = 0 \\ a_{31}u_2 + a_{32}v_2 + a_{33}w_2 - \ell_2 w_2 = 0 \end{cases}$$

din care obtinem: $(\ell_1 - \ell_2)(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2) = 0$, cum $(\ell_1 - \ell_2) \neq 0$,rezultă: $u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0$ adică: $(u_1, v_1, w_1) \perp (u_2, v_2, w_2)$ În mod asemănător se poate arăta ortogonalitatea: $(u_2, v_2, w_2) \perp (u_3, v_3, w_3)$ şi $(u_3, v_3, w_3) \perp (u_1, v_1, w_1)$.

Exemplu: $F(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$ Acesteia i se poate ataşa matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 7 - 2 & 0 \\ -2 & 6 - 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

A simetrica $(a_{12} = a_{21} = -2; a_{32} = a_{23} = -2; a_{13} = a_{31} = 0)$. Putem lega matricea A de forma F prin scrierea matriceală:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 - 2 & 0 \\ -2 & 6 - 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vom căuta valorile extreme (u,v,w) ale lui F în condiţia: $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ Cu alte cuvinte vom determina vectorii unitari (u,v,w) care dă valoarea extremă lui F. Avem deci o problema de extrem condiţionat, care se reduce la extremarea funcţiei lui Lagrange de forma: $L(x,y,z,\ell) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - \ell(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ Valorile extreme sunt date de:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 14x - 4y - 2\ell x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4x + 12y - 4z - 2\ell y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -4y + 10z - 2\ell z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \ell} = -x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul format de primele trei ecuaţii în necunoscutele x, y, z suntem conduşi la condiţia Cramer de existenţă a soluţiilor nebanale: $\det(A - \ell I_3) = 0$ sau:

$$\begin{vmatrix} 7-\ell & -2 & 0 \\ -2 & 6-\ell & -2 \\ 0 & -2 & 5-\ell \end{vmatrix} = 0$$

care conduce la: $(\ell - 3)(\ell - 6)(\ell - 9) = 0$
Pentru $\ell_1 = 3$ obţinem: $(u_1, v_1, w_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
Pentru $\ell_2 = 6$ obţinem: $(u_2, v_2, w_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
Pentru $\ell_3 = 9$ obţinem: $(u_3, v_3, w_3) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ Se observă că:
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \perp (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}); (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \perp (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \perp (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
$F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3; F(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = 6; F(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = 9$.

Pentru cazul III, presupunem că în punctul (x_0, y_0, z_0) se realizeaza un maxim sau un minim pentru F şi $G_1(x_0, y_0, z_0) = 0, G_2(x_0, y_0, z_0) = 0$. Conform cu teorema funcţiilor implicite, aplicată unui sistem în vecinatatea lui (x_0, y_0, z_0) va exista $y = y(x), z = g(x)$ cu proprietăţile: $G_1(x, f(x), g(x)) = 0, G_2(x, f(x), g(x)) = 0$, iar $F(x, f(x), g(x))$ are în x_0 o valoare extremă. Prin urmare:
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)f'(x_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)g'(x0) = 0$
Din teorema funcţiilor implicite avem şi:
$\frac{\partial G_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)f'(x_0) + \frac{\partial G_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)g'(x0) = 0$
$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial G_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)f'(x_0) + \frac{\partial G_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)g'(x0) = 0$
Astfel se poate considera că $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$ reprezintă soluţiile celor trei ecuaţii cu două necunoscute, şi prin eliminarea lor între aceste relaţii se va obţine relaţia: $\det \frac{\partial(F, G_1, G_2)}{\partial(x, y, z)}(x_0, y_0, z_0) = 0$, şi prin urmare liniile determinantului, de exemplu, sunt proporţionale, ceace se traduce prin existenţa a două variabile ℓ_1 şi ℓ_2 de proporţionalitate astfel ca să avem:
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \ell_1 \frac{\partial G_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \ell_2 \frac{\partial G_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \ell_1 \frac{\partial G_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \ell_2 \frac{\partial G_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$
$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \ell_1 \frac{\partial G_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \ell_2 \frac{\partial G_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$
Deci în (x_0, y_0, z_0) se anulează derivatele parţiale ale funcţiei: $L(x, y, z, \ell_1, \ell_2) = F(x, y, z) + \ell_1 G_1(x, y, z) + \ell_2 G_2(x, y, z)$, şi deci şi în cazul unei funcţii de trei variabile cu două legături procedeul este acelaşi ca în cazurile anterior tratate.

Exemplu: Să se găseasca extremele funcţiei $F(x, y, z) = xyz$, cu condiţiile: $x + y + z = 5$ şi $xy + yz + zx = 8$.
Rezolvare: Considerăm $L(x, y, z, \ell_1, \ell_2) = xyz + \ell_1(x + y + z - 5) + \ell_2(xy + yz + zx - 8)$.
Derivatele parţiale ale lui L în raport cu x, y, z, ℓ_1, ℓ_2, sunt:
$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \ell_1 + \ell_2(y + z) = 0$,
$\frac{\partial F}{\partial y} = zx + \ell_1 + \ell_2(x + z) = 0$,

$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \ell_1 + \ell_2(x + y) = 0,$
$\frac{\partial F}{\partial \ell_1} = x + y + z - 5 = 0,$
$\frac{\partial F}{\partial \ell_2} = xy + yz + zx - 8 = 0.$
Prin adunarea primelor trei ecuaţii se obţine:
$xy + yz + zx + 3\ell_1 + 2\ell_2(x + y + z) = 0,$
şi dacă ţinem cont de ultimile două ecuaţii vom avea: $8 + 3\ell_1 + 10\ell_2 = 0$.
Prin scăderea primelor două ecuaţii vom avea: $z(x - y) + l2(y - x) = 0$, de unde rezultă: $y = x$ sau $z = -\ell_2$. În cazul $y = x$ avem:
$zx + \ell_1 + \ell_2(z + x) = 0,$
$x^2 + \ell_1 + 2\ell_2 x = 0,$
$2x + z - 5 = 0,$
$x2 + 2xz - 8 = 0.$
Scoţând din prima pe $\ell_1 = -xz - \ell_2(x + z)$ vom obţine:
$x^2 - xz + \ell_2(x - z) = 0,$
$2x + z - 5 = 0,$
$x2 + 2xz - 8 = 0.$
Din prima ecuaţie a ultimului sistem rezultă: $x = z$ sau $x = -\ell_2$. $x = z$ conduce la o imposibilitate, ramâne numai $x = -\ell_2$, şi deci:
$-2\ell_2 + z - 5 = 0,$
$\ell_2^2 - 2\ell_2 z - 8 = 0,$
care conduce, prin eliminarea lui z la ecuaţia de gradul doi în $\ell_2 : 3\ell_2^2 + 10\ell_2 + 8 = 0$, cu soluţiile: $\ell_2 = -2, \ell_2 = -\frac{4}{3}$, care conduc la: $x_1 = y_1 = 2, z_1 = 1$, adică tripletul $(2, 2, 1)$, pentru $\ell_2 = -2$, şi $x_2 = y_2 = \frac{4}{3}, z_2 = \frac{7}{3}$, adică tripletul $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, pentru $\ell_2 = -\frac{4}{3}$,

Pentru a stabili natura punctelor găsite (maxim sau minim), vom ţine cont de semnul lui d^2L adică de semnul lui: $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}dzdx$
Calculând derivatele parţiale de ordin doi ale lui L obţinem: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = z - 2$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x - 2$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = y - 2$, şi deci vom avea: $d^2L = 2(-1)dxdy$ Diferenţiind ultimile relatii, obţinem:
$dx + dy + dz = 0$
$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0.$
În punctul $(2, 2, 1)$ ultimile relaţii devin:
$dx + dy + dz = 0, 3dx + 3dy + 4dz = 0,$
din care va rezulta $dz = 0$ şi $dy = -dx$, şi deci: $d^2L = 2dx^2 > 0$ deci punctul $(2, 2, 1)$ este punct de minim. La fel se arată că $(2, 1, 2), (1, 2, 2)$, sunt de asemeni puncte de minim.

Pentru $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, procedând asemănător vom avea: $d^2L(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}) = 2\frac{1}{3}dxdy - 2\frac{2}{3}dydz - 2\frac{2}{3}dzdx$ şi cum din diferenţiierea ultimile relaţii, obţinem:
$dx + dy + dz = 0(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0.$

În punctul $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ ultimile relaţii devin:
$dx+dy+dz = 0\frac{11}{3}dx+\frac{11}{3}dy+\frac{8}{3}dz = 0$, din care va rezulta $dz = 0$ şi $dy = -dx$, şi deci: $d^2L(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}) = -\frac{2}{3}dx^2 < 0$ Avem deci un maxim. La fel se arată că $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, sunt de asemeni puncte de maxim.

4.5 Problema funcţiilor inverse.

4.5.1 Cazul funcţiilor reale cu o variabilă reală.

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{(1)}(a, b)$ şi considerăm $F : (a, b)\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $F(x, y) = f(x)-y$, atunci: $F(x, y) = 0, (\forall)(x, y) \in G_f$ (graficul lui f) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) \neq 0, (\forall)(x, y) \in G_f$ Teorema funcţiilor implicite se poate aplica lui F în raport cu variabila x: adică va exista $x = g(y)$ astfel ca: $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ astfel ca: $F(g(y), y) = 0(\forall)y \in (c, d)$ şi $g'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y),y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y),y)} = \frac{1}{f'(g(y))}(\forall)y \in (c, d)$, sau $f'(x)g'(y) = 1$ şi deci $g = f^{-1}$ (g este funcţia inversă a lui f).

4.5.2 Cazul funcţiilor cu două componente şi două variabile.

Vom extindre rezultatul anterior la cazul funcţiilor cu două componente şi două variabile: Fie $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ şi $f = (f_1, f_2)^t : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^2$ adică:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2) = y_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

şi vom considera vectorii $(x_1, x_2) = x,\ (y_1, y_2) = y$ Când $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ parcurge mulţimea $\mathbb{A}$, $y = (y_1, y_2)$ parcurge mulţimea $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$. Dacă $f = (f_1, f_2)^t$ este continuă într-un punct $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ punând $y_0 = f(x_0)$ când $x \in \mathbb{V}(x_0)$ atunci $y = f(x) \in \mathbb{V}(y_0)$ şi conform cu teorema funcţiilor implicite pentru sisteme vom putea inversa relaţiile (4.1) adică le vom putea inversa obtinând:

$$\begin{cases} g_1(y_1, y_2) = x_1 \\ g_2(y_1, y_2) = x_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Cu alte cuvinte vom putea scrie relaţiile:

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = g_1(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \\ x_2 = g_2(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \\ y_2 = f_2(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \end{cases}$$

Pentru a justifica aceste afirmaţii, vom face ipoteza că jacobianul (determinantul matricei lui Jacobi) a funcţiei f este diferit de 0 în x_0 adică:

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$$

În baza continuităţii lui $J(x)$ în x_0 (a se vedea teorema de la continuitate) va exista o vecinatate a lui x_0, $\mathbb{V}(x_0)$ pentru care $J(x) \neq 0$, daca $J(x_0) \neq 0$. Vom introduce funcţiile auxiliare:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_1(x_1, x_2) - y_1 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_2(x_1, x_2) - y_2 = 0 \end{cases}$$

cu $(x_1, x_2; y_1, y_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Evident F_1, F_2 sunt de clasa $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{A} \times \mathbb{B})$ şi vor verifica toate condiţiile funcţiilor implicite pentru sisteme: $F(x_0, y_0) = 0$ şi cum $\det \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ si deci $\det \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}(x_0, y_0) = J(x_0) \neq 0$ va exista într-o vecinatate a lui x_0 funcţiile g_1, g_2 de mai sus si vom avea echivalenta locala a relaţiilor (A) şi (B). Vom deduce câteva egalităţi utile în practică derivând relaţiile (A) în raport cu x_1 şi cu x_2 (la fel ca în teorema funcţiilor implicite pentru sisteme). Derivăm în raport cu x_1 şi apoi în raport cu x_2 vom obtine sistemul:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 0 = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

Derivăm a doua relaţie (A) în raport cu x_1 şi apoi în raport cu x_2 vom obţine sistemul:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 1 = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

Din primul sistem vom scoate $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}, \frac{\partial g_1}{\partial y_2}$ şi vom obţine:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}}{\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}$$

Din al doilea sistem vom scoate $\frac{\partial g_2}{\partial y_1}, \frac{\partial g_2}{\partial y_2}$ şi vom obţine:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}$$

Se poate constata uşor că:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

adică: $g'(y)f'(x) = I_2$.
Derivăm prima relaţie (B) în raport cu y_1 şi apoi în raport cu y_2 vom obţine sistemul:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{cases}$$

Derivăm a doua relaţie (B) în raport cu y_1 şi apoi în raport cu y_2 vom obţine sistemul:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ 1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{cases}$$

Din primul sistem vom scoate $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ şi vom obţine:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ 0 & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial g_2}{\partial y_2}}{\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial g_1}{\partial y_2}}{\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}}$$

Din al doilea sistem vom scoate $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ şi vom obţine:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ 1 & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial g_2}{\partial y_1}}{\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial g_1}{\partial y_1}}{\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}}$$

Se poate constata uşor că:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

adică: $f'(x)g'(y) = I_2$.
Calculând determinanţii matricelor Jacobi şi în virtutea faptului că determinantul unui produs de matrice pătratice este egal cu produsul determinanţilor matricelor componente, vom deduce egalităţile:
$\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)} \det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = 1$ şi $\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} \det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)} = 1$
sau
$\det \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)} \det \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = 1$ şi $\det \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} \det \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)} = 1$
din care rezultă: $\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \frac{1}{\det \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}}$ care conduce la formula:

$$|g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|}, \tag{4.3}$$

similară cu cea din cazul funcţiilor cu o singură variabilă
Exemplu: Schimbarea coordonatelor carteziene (x, y) cu coordonate polare

(ρ, θ) în $\mathbb{R}^2$. Relaţiile de legătură între cele două tipuri de coordonate sunt date de:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

Transformarea inversă, pentru $\rho \neq 0$ este:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \tag{4.5}$$

Problema se extinde şi în cazul a $n > 2$ funcţii cu tot atâtea variabile. Pentru $n = 3$ vom da două exemple des folosite în aplicaţii:
Schimbarea coordonatelor carteziene (x, y, z) cu coordonate cilindrice (r, φ, z) în $\mathbb{R}^3$. Relaţiile de legătură între cele doua tipuri de coordonate este:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Transformarea inversă, pentru $r \neq 0$ este:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{4.7}$$

Schimbarea coordonatelor carteziene (x, y, z) cu coordonate sferice (ρ, θ, φ) în $\mathbb{R}^3$. Relaţiile de legătură între cele doua tipuri de coordonate este:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\varrho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta \neq 0$$

Transformarea inversă, pentru $\rho^2 \sin \theta \neq 0$ este:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \tag{4.9}$$

Capitolul 5

Integrala Riemann pe dreaptă

5.1 Integrala Riemann pe dreaptă(Recapitulare pe scurt).

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,$[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$ a, b finiţi iar f este mărginită($(\exists) M_f > 0$ astfel încât $|f(x)| < M_f, (\forall) x \in [a, b]$)

Considerăm, de asemeni, o partiţie(o diviziune) $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ a intervalului $[a, b]$ cu $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ şi vom nota cu $|P| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$, măsura sau norma lui P. Vom lua punctele intermediare $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, ..., n$ ce vor fi componentele vectorului $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Cu acestea, vom forma suma:

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \tag{5.1}$$

numită suma Riemann corespunzătoare funcţiei f diviziunii P si punctelor intermediare $\xi_j, j = 1, 2, ..., n$ Alături de suma integrala (1.5) putem considera sumele:

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \tag{5.2}$$

şi

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \tag{5.3}$$

numite respectiv suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară, unde $m_j = \inf\{f(x)|x_{j-1} \le x \le x_j\}$, $M_j = \sup\{f(x)|x_{j-1} \le x \le x_j\}$

Din definiţiile sumelor putem deduce inegalităţile:

$$s(f, P) \le \sigma(f, P, \xi) \le S(f, P) \tag{5.4}$$

Definim integrala lui Riemann a lui f pe $[a,b]$ prin:

$$\lim_{|P|\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \int_{[a,b]} f \tag{5.5}$$

Această limită poate fi interpretată în limbaj $\varepsilon - \delta$ astfel:
$\forall \varepsilon > 0 (\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0, (\forall)P, \xi$ cu $|P| < \delta$ atunci $|\sigma(f,P,\xi) - \int_{[a,b]} f| < \varepsilon$

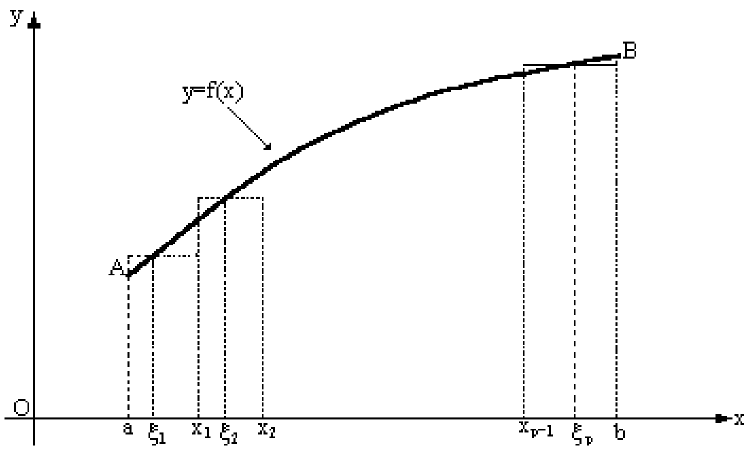

Fig. 5.1:

Observaţie:
Produsele $f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), m_j(x_j - x_{j-1}), M_j(x_j - x_{j-1})$ reprezintă mărimea ariilor unor dreptunghiuri cu baza de mărime $x_j - x_{j-1}$ şi cu înălţimile date respectiv de $f(\xi_j), m_j, M_j$. Din aceasta rezultă inegalităţile (5.4)

Vom spune că $F : \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă

$$F'(x) = f(x). \tag{5.6}$$

Integrala nedefinită a funcţiei f pe $\mathbb{A}$ este:

$$\int f(x)dx = \{F(x) | F'(x) = f(x)\} \tag{5.7}$$

Observaţie:
Deoarece dacă două primitive ale lui f sunt $F_1(x)$ ş $F_2(x)$ atunci $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$,prin urmare $F_2(x) = F_1(x) + C$. Din acest motiv integrala nedefinită alui f se mai notează cu:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f.
Integrala definită a lui f este numărul real:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{not}{=} F(x)|_a^b, \tag{5.8}$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f.

Dacă $(\exists) \displaystyle\int_{[a,b]} f \quad \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$=mulţimea funcţiilor integrabile Riemann.

5.1.1 Proprietăţt ale lui $\mathcal{R}([a,b])$.

i) $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow f$ mărginită pe $[a,b]$ şi f continuă pe $[a,b]$ exceptând o mulţime $\mathbb{B} \subset [a,b]$ cu măsura nulă($\mathbb{B}$ are masura nula daca $B \subset \bigcup_j [a_j, b_j], [a_j, b_j] \subset [a,b]$ şi $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \varepsilon$)

ii) $\displaystyle\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$

iii) $\displaystyle|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq M_f(b-a)$

iv) $\displaystyle\int_{[a,c]\cup[c,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \quad (\forall)c \in (a,b))$

v) Dacă f este continuă pe $[a,b]$ sau dacă f admite primitive pe $[a,b]$ atunci

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{5.9}$$

numită formula LEIBNIZ-NEWTON

vi) $f \in \mathcal{R}([a,b])$ continuă atunci $\displaystyle\int_{[a,x]} f$ este o funcţie de variabila x

$$\int_{[a,x]} f = \int_a^x f(t)dt \overset{not}{=} F(x)$$

şi

$$\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f = f(x)$$

vii) $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $f(x) = g(x) \quad (\forall)x \in [a,b] - \mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ de măsură nulă, atunci $g \in \mathcal{R}([a,b])$. Cu alte cuvinte dacă unei funcţii integrabile Riemann i se modifică valorile pe o mulţime de măsură nulă, valoarea integralei nu va fi modificată.

Complectare Vom da câteva exemplede cum se calculează integrala Riemann, folosind definiţia:

1) $f(x) = c$ =constant $(\forall)x$

$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ Vom lua punctele intermediare $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, ..., n$ ce vor fi componentele vectorului $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

$$\sigma(c, P, \xi) = \sum_{j=1}^{n} c(x_j - x_{j-1}) = c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + ... + c(x_n - x_{n-1}) = cb - ca$$

$$\int_{[a,b]} c = cb - ca$$

$\displaystyle\int_{[a,x]} c = cx - ca$ prin urmare $f(x) = c \Rightarrow F(x) = cx$

2) $f(x) = x$ $(\forall)x$

$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ Vom lua punctele intermediare $\xi_j = \frac{x_{j-1}+x_j}{2} \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, ..., n$ ce vor fi componentele vectorului $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

$$\sigma(x, P, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - x_{j-1}}{2}(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} = \frac{(x_1^2 - x_0^2)}{2} + \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2} + ... + \frac{(x_n^2 - x_{n-1}^2)}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_{[a,b]} x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$\displaystyle\int_{[a,x]} x = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ prin urmare $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$

3) $f(x) = x^k$ $(\forall)x$

$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ Vom lua punctele lui P de forma $x_j = aq^j$, $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $x_j - x_{j-1} = a(q^j - q^{j-1}) = aq^{j-1}(q-1)$,atunci $|P| \to 0 \Leftrightarrow q \to 1 \Leftrightarrow n \to \infty$ $\sigma(x^k, P, \xi) = \sum_{j=1}^{n}(aq^j)^k aq^{j-1}(q-1) = a^{k+1}(q-1)\sum_{j=1}^{n} q^{jk+j-1} = a^{k+1}(q-1)\frac{1 - q^{(k+1)n}}{1 - q^{k+1}} = a^{k+1}[1-(\frac{b}{a})^{k+1}]\frac{q-1}{1-q^{k+1}} = (b^{k+1} - a^{k+1})\frac{q-1}{q^{k+1}-1}$. Cum $\lim\limits_{q\to 1} \frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{1}{k+1}$ rezultă:

$$\int_{[a,b]} x^k = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

$\displaystyle\int_{[a,x]} x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$ prin urmare $f(x) = x^k \Rightarrow F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Pentru $k = -2, -3, ...$ calculele sunt asemănătoare, numai că trbuiesc luaţi a, b astfel ca:$a < b < 0$ sau $0 < a < b$ deoarece x^k $k = -2, -3, ...$ nu este continuă în 0

4) Pentru $k = -1$ dacă $0 < a < b$ vom avea:
$\sigma(\frac{1}{x}, P, \xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{aq^j} aq^{j-1}(q-1) = \sum\limits_{j=1}^{n}(1-\dfrac{1}{q}) = n(1-\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}) = \dfrac{1-(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}$. Cum
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\dfrac{1}{x}, P, \xi) = -\ln\dfrac{a}{b} = \ln b - \ln a$ rezultă
$\displaystyle\int_{[a,b]} \frac{1}{x} = \ln b - \ln a$
$\displaystyle\int_{[a,x]} \frac{1}{x} = \ln x - \ln a$ prin urmare $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x$
5) $f(x) = e^{cx} \quad (\forall)x \neq 0$
$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ Vom lua punctele de diviziune de forma: $x_j = a + j\frac{b-a}{n}, j = 1, 2, ..., n$ şi punctele intermediare $\xi_j = x_{j-1}, j = 1, 2, ..., n$ ce vor fi componentele vectorului $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Cum $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} = \alpha_n$ $\sigma(e^{cx}, P, \xi) = \frac{b-a}{n}[e^{ca} + e^{ca+c\alpha_n} + ... + e^{ca+c\alpha_n(n-1)}] = \alpha_n e^{ca}[1 + e^{c\alpha_n} + ... + e^{(n-1)c\alpha_n}]$. Calculând suma progresiei geometrice, pentru $\alpha_n \to 0$, găsim:

$$\int_{[a,b]} e^{cx} = e^{ca}[1 - e^{c(b-a)}] \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{1 - e^{c\alpha_n}} = \frac{1}{c}(e^{cb} - e^{ca})$$

$\displaystyle\int_{[a,x]} e^{cx} = \frac{e^{cx}}{c} - \frac{e^{ca}}{c}$ prin urmare $f(x) = e^{cx} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{cx}}{c}$

5.2 Integrale cu parametrii.

Din teoria integralelor cu parametru ne interesează în special rezultatele:
I. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$ (f e integrabilă Riemann pe [a, b]) iar $\{x, x_0\} \in [a,b]$ atunci funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \tag{5.10}$$

este continuă pe intervalul $[a,b]$
II. Dacă $f \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b])$, atunci funcţia F, de la I, este de clasa $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ şi $F'(x) = f(x), x \in (a,b)$ şi de aceea $f \in \mathcal{C}^{k}([a,b])$, atunci $F \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b]), k \in \mathbb{N}$.
III. Dacă $f \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b][c,d])$, atunci funcţiile:

$$g(x) = \int_{c}^{d} f(x,\tau)d\tau, \quad h(y) = \int_{a}^{b} f(\theta, y)d\theta \tag{5.11}$$

sunt funcţii continuie pe intervalul $[a,b]$, respectiv $[c,d]$.
IV. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b][c,d])$, atunci funcţia g, de la III, are derivata continuă

pe intervalul $[a,b]$ şi este valabilă regula lui Leibniz de derivare sub semnul integral:

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)d\theta, x \in (a,b) \tag{5.12}$$

Simetric, dacă $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b][c,d])$, atunci funcţia h de la III. are derivata continuă pe intervalul $[c,d]$ şi este valabilă regula lui Leibniz de derivare sub semnul integral:

$$h'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,y)d\theta, y \in (c,d) \tag{5.13}$$

V. Dacă $\alpha : [a,b] \to [c,d], \beta : [a,b] \to [c,d]$, sunt funcţii derivabile pe intervalul (a,b), atunci integrala cu parametru:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,\tau)d\tau, \tag{5.14}$$

este derivabilă pe intervalul (a,b) dacă $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b][c,d])$ şi este valabilă regula generală Leibniz de derivare:

$$G'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\tau)d\tau + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x), \tag{5.15}$$

dacă $x \in (a,b)$. Va fi valabilă o formulă asemănătoare în cazul integralelor în care parametrul este variabila y, adică pentru: $\gamma : [c,d] \to [a,b], \delta : [c,d] \to [a,b]$, vom lua

$$H(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(\theta,y)d\theta, \tag{5.16}$$

care este derivabilă pe intervalul (c,d) dacă $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b][c,d])$ şi este valabilă regula generală Leibniz de derivare:

$$H'(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,y)d\theta + f(\delta(y),y)\delta'(y) - f(\gamma(y),y)\gamma'(y), \tag{5.17}$$

dacă $y \in (c,d)$.

$\lceil$ I. În baza proprietăţii de mărginire a integralei Riemann, avem: $|\int_a^b f(t)dt| \leq M_f(b-a)$, cu $|f(x)| = M_f, x \in [a,b]$, rezultă cu $\{x_0,x_1,x_2\} \in [a,b]$

$$|F(x_1)-F(x_2)| = |\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt| = |\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \leq M_f(x_1-x_2),$$

şi deci F este lipschitziană în intervalul $[a,b]$, deci F este continuă pe $[a,b]$.
II. Cum $F'(x) = f(x)$ şi $f \in \mathcal{C}^{(0)}([a,b])$, rezultă $F \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$.
III. Fie $x_0 \in (a,b)$ şi $\mathbb{I}_2 = [x_0-\rho, x_0+\rho][c,d], \rho > 0 \mathbb{I}_2$ este deci un compact, f va fi uniform continuă pe compactul $\mathbb{I}_2$ de aceea vom avea că pentru

orice $\varepsilon > 0$ va exista $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât din inegalitatea $|h| < d$ să rezulte: $|f(x_0 + h, \tau) - f(x_0, \tau)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ pentru orice $\tau?[c, d]$ (se presupune evident $(x_0 + h, \tau) \in \mathbb{I}_2$) Va rezulta:$|g(x_0 + h) - g(x_0)| = |\int_c^d (f(x_0 + h, \tau) - f(x_0, \tau))d\tau| = \int_c^d |f(x_0 + h, \tau) - f(x_0, \tau)|d\tau < \varepsilon$ şi g este continuă în punctul x_0. Cum acest punct este ales arbitrar în intervalul (a, b), g va fi continuă în acest interval.

IV. Cum $g(x) = \int_c^d f(x, \tau)d\tau$ este continuă în (a, b) vom arăta că are loc egalitatea: $g(x + h) - g(x) = g'(x)h + \alpha(x, h)$, cu $\frac{\alpha(x,h)}{h} \to 0$, pentru $h \to 0$. Pentru $\mathbb{I}_2$ de la III avem continuitatea uniformă a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial f}$ pe $\mathbb{I}_2$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $h \in \mathbb{R}, |h| < \delta$ să avem: $|\frac{\partial f}{\partial x}(x + h, \tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$, pentru orice $t \in [c, d]$. Cu ajutorul formulei lui Lagrange, pentru $|h| < \delta$ se obţine inegalitatea: $|f(x + h, \tau) - f(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)h| = |\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)||h| < \frac{\varepsilon}{d-c}|h|$, cu $\xi = x + h\theta, 0 < \theta < 1$. Rezulta: $|g(x + h) - g(x) - g'(x)h| = |\int_c^d (f(x + h, \tau) - f(x, \tau) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)h)dt| \leq \dfrac{\partial f}{\partial x}{}_c^d |f(x + h, \tau) - f(x, \tau) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)h|dt < \varepsilon|h|$ V. Notăm cu $G(x) = g(x, \alpha(x), \beta(x))$, iar g este funcţia definită prin următoarea integrală cu paremetrii: $g(x, z, u) = \int_z^u f(x, \tau)d\tau$ Deoarece: $G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, \alpha(x), \beta(x)) + \frac{\partial g}{\partial u}(x, \alpha(x), \beta(x))\alpha'(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, \alpha(x), \beta(x))\beta'(x)$, iar $\frac{\partial g}{\partial x} = \int_z^u \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)d\tau$ conform cu IV, $\frac{\partial g}{\partial u} = f(x, u)$, conform cu II şi $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\int_z^u f(x, t)dt) = -\frac{\partial}{\partial z}(\int_u^z f(x, \tau)d\tau) = -f(x, z)$ şi deci: $G'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \tau)d\tau + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x)$. $\rfloor$

Aplicaţie:

Cu ajutorul formulei de la V se poate justifica usor proprietatea de egalitate a derivatelor parţiale mixte. Mai precis, este valabil următorul rezultat:

Teoremă : Dacă $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{I}_2), \mathbb{I}_2 = [a, b][c, d]$, interval bidimensional, atunci derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt egale.

$\lceil$ Fie $\{x, x_0\} \in [a, b]$, prin derivare n raport cu variabila x, se verifică egalitatea: $f(x, y) = f(x_0, y) + \int_{x_0}^x \dfrac{\partial f}{\partial x}(\theta, y)d\theta$, (utilizând II adaptat la acest caz). Prin derivare în raport cu y(în baza lui II) rezultă: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) + \int_{x_0}^x \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta, y)d\theta$, iar o ultimă derivare în raport cu x(tot în baza lui II) con-

duce la : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{I}_2 \rfloor$. Acest rezultat poate fi extins la orice derivate mixte. De exemplu dacă $f \in \mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{I}_2)$ şi într-o ordine oarecare f se derivează de n_1 ori n raport cu x, de n_2 ori în raport cu y, iar $n_1 + n_2 = n$, atunci vom avea egalitatea: $\frac{\partial^n f}{\partial x_{n_1} \partial y_{n_2}} = \frac{\partial^n f}{\partial y_{n_2} \partial x_{n_1}}$
Exemple:
1. Pentru $F(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$, $F'(0,0) = (0, 2f(0))$ deoarece: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x+y) - f(x-y)$; $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$, iar dacă $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ atunci: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f'(x+y) - f'(x-y)$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $F(x,y,z) = \int_{x+y+z}^{xyz} e^{t^2} dt$, atunci: $F'(0,0,0) = (-1,-1,-1)$ deoarece: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = yze^{x^2y^2z^2} - e^{(x+y+z)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = xze^{x^2y^2z^2} - e^{(x+y+z)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = xye^{x^2y^2z^2} - e^{(x+y+z)^2}$.
3. $\int_a^b t^x (\ln t)^k dt = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{b^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}, x \neq -1, 0 < a < b, k \in \mathbb{N}$. $\lceil$ Deoarece, $\int_a^b t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1}|_a^b = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$ iar în baza regulii lui Leibniz: $\frac{d}{dx}\int_a^b t^x dt) = \int_a^b t^x \ln t dt$, $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^b t^x dt) = \int_a^b t^x (\ln t)^2 dt$, etc.$\rfloor$

5.2.1 Integrarea unei integrale cu parametrii.

Un rezultat important din teoria funcţiilor continuie, care poate fi demonstrat cu ajutorul formulei de la V, se referă la posibilitatea inversarii ordinii de integrare. Mai precis dacă $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{I}_2), \mathbb{I}_2$ fiind un interval bidimensional, adică $\mathbb{I}_2 = [a,b][c,d]$, atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b h(y)dy = \int_c^d g(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dx)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dy)dx \tag{5.18}$$

$\lceil$ Justificarea se face simplu cu ajutorul funcţiilor: $F_1(x,y) = \int_a^x (\int_c^y f(s,t)dt)ds$, $F_2(x,y) = \int_c^y (\int_a^x f(s,t)ds)dt$, unde $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, care sunt diferenţiabile în $\mathbb{I}_2$ (fiind integrale de funcţii continuie) şi pentru care: $F_1'(x,y) = F_2'(x,y)$ oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{I}_2$, deoarece: $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt$ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \int_a^x f(s,y)ds$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = \int_a^x f(s,y)ds$ Ori funcţiile diferenţiabile în $\mathbb{R}^2$ care au aceeasi derivată în $\mathbb{R}^2$ sunt egale abstracţie de o constată aditivă, adică: $F_1(x,y) = F_2(x,y) + \mathcal{C}$, oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{I}_2, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

Cum $F_1(a,c) = 0, F_2(a,c) = 0$ rezultă $\mathcal{C} = 0$ în $\mathbb{I}_2$. În particular $F_1(a,d) = F_2(b,d)$]

Ca aplicaţie fie $0 < a < b, 0 < c < d$ şi $A = \int_c^d \frac{t^b - t^a}{\ln t} dt$,

Cu observaţia că , integrala dată se mai poate scrie ca o integrală iterată a funcţiei continuie $t^s = e^{s \ln t}$ si deci: $A = \int_c^d (\int_a^b t^s ds)dt = \int_a^b (\int_c^d t^s dt)ds = \int_a^b \frac{d^{s+1} - c^{s+1}}{s+1} ds$. Deoarece $\lim_{t \to 0} \frac{t^b - t^a}{\ln t} = 0$, funcţia poate fi prelungită prin continuitate la un interval de forma $[0, d]$ cu valoarea 0 pentru $t = 0$, iar pentru $d = 1$ se obţine: $\int_c^d \frac{t^b - t^a}{\ln t} dt = \int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\ln t} dt = \int_a^b \frac{ds}{s+1} = \ln(\frac{1+b}{1+a})$.

Capitolul 6

Integrale improprii.

6.1 Integrale pe intervale nemărginite.

În teoria expusă până acum, care se datorează lui Riemann(1826-1866) şi Darboux(1842-1917) s-a presupus în mod esenţial că:
1°. limitele a şi b sunt finite
2°. funcţia f este mărginită pe $[a, b]$.
Ne vom elibera succesiv de aceste ipoteze. Presupunem întâi că f ramâne mărginită, fiind definită pe $[a, +\infty)$ sau pe $(-\infty, b]$ sau pe $(-\infty, +\infty)$. Vom avea deci de definit integralele:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Considerăm pentru prima integrală următoarea
Definiţie: Dacă:
1° f este definită pe $[a, +\infty)$
2° f este integrabilă pe orice interval $[a, \ell]$, cu $\ell > a$.
3° există şi este finită $\lim\limits_{\ell\to\infty} \int_a^{\ell} f(x)dx$, vom spune că integrala există sau are sens, sau este convergentă şi vom scrie prin definiţie:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty} \int_a^{\ell} f(x)dx \tag{6.1}$$

Dacă limita din membrul al doilea nu există sau este infinită, vom spune că integrala din membru întâi nu exixtă, sau nu are sens, sau este divergentă.
Exemplu. Fie $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, cu $\alpha > 0$. Avem: $I(\ell) = \int_a^{\ell} x^{-\alpha}dx = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}|_a^{\ell}$, dacă $\alpha \neq 1$; $J(\ell) = \int_a^{\ell} \dfrac{dx}{x} = \ln(\dfrac{\ell}{a})$, dacă $\alpha = 1$ Deci dacă , $\alpha > 1$ $\lim\limits_{\ell\to\infty} I(\ell) =$

$\frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$ şi integrala este convergentă.
Criteriul de convergenţă al lui Cauchy: Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ să fie convergentă este ca $\varepsilon > 0$ fiind dat arbitrar, să-i corespundă un $\eta(e) > 0$ astfel ca să avem: $|\int_x^{x'} f(x)dx| \leq \varepsilon$ pentru orice $x, x' > \eta(\varepsilon)$. $\lceil$ Aceasta se justifică la fel ca în cazul funcţiilor, adică din teorema Cauchy de unicitate şi existenţă a limitei unei funcţii, luând $F(x) = \int_a^x f(t)dt.\rfloor$

Corolar: Dacă $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ este convergentă atunci $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.
$\lceil$ Într-adevăr:

$$|\int_x^{x'} f(x)dx| = \int_x^{x'} |f(x)|dx,$$

presupunând $x < x'\rfloor$. Reciproca acesteia nu este adevarată.Vom da un exemplu ,mai jos.

Corolare:

1) Să presupunem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există. Pentru ca integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ sa fie convergenta este necesar ca $\lim\limits_{x\to\infty} f_x = 0$.
$\lceil$ Luăm $x' = x + 1$. Din (Criteriul de convergenţă al lui Cauchy) şi din formula mediei rezultă condiţia: $|\lim\limits_{x}^{x'} f(x)dx| = |f(\xi)|(x' - x) = |f(\xi)| < \varepsilon$ cu $\xi \in (x, x')$. Deci $|f(\xi)| < \varepsilon$ pentru $\eta(\varepsilon) < \xi$, adică $\lim\limits_{x\to\infty} f_x = 0\rfloor$.

2) Dacă $0 < g(x) \leq f(x)$ pe $[a, +\infty)$ şi dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge atunci şi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge. Dacă $0 < f(x) \leq g(x)$ pe $[a, +\infty)$ şi dacă integrala întâi diverge, atunci şi integrala a doua diverge.

Teorema 1. Fie $f(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}$, iar m, M astfel încât $m \leq g(x) \leq M$

Integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ există pentru $\alpha > 1$; ea nu exista pentru $\alpha \geq 1$, dacă numerele m, M sunt de acelasi semn.

$\lceil$ Într-adevăr dacă $x < x'$ atunci: $m_x^{x'} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_x^{x'} f(t)dt = M \int_x^{x'} \frac{dt}{t^\alpha}$, deci $\int_x^{x'} f(t)dt = \int_x^{x'} \frac{dt}{t^\alpha}$, unde $m \leq \ \leq M$. Dacă $\alpha > 1$, condiţia din (Criteriul de convergenţă al lui Cauchy) este satisfăcută pentru $x, x' > \eta(\varepsilon)$. Dacă $\alpha \geq 1$ şi dacă m şi M sunt de acelaşi semn, deci $\neq 0$, ea nu poate avea loc $\rfloor$.

Criteriu practic de convergenţă. Dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} x_{\alpha} f(x) = L$, şi dacă $\alpha > 1$, integrala $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă; ea este divergentă dacă $L \neq 0$ si $\alpha \leq 1$.

Exemple:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} x_2 f(x) = 1$, deci integrala este convergentă. În cazul acesta putem face un calcul direct. Avem: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\ell\to\infty} \int_a^{\ell} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\ell\to\infty} \arctan x|_a^{\ell} = \frac{\pi}{2} - \arctan a$.

2. Integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ este convergentă. Aici $\lim\limits_{x\to\infty} x_2 f(x) = 1$. Calculul integralei se face mai greu.

3. Itegrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+5x}}$ este divergentă pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} x_{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \neq 0$, şi $\alpha = \frac{1}{2}$.

Teorema 2(Cauchy) Fie funcţia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, astfel că ea este pozitivă descrescatoare şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Seria:

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + ... + f(a+n) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) \tag{6.2}$$

este convergentă sau divergentă după cum $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă sau divergentă şi reciproc.

$\lceil$ Avem $f(a+n) = f(x) = f(x+n-1)$, dacă $n \in \mathbb{N}$ şi $a+n-1 \leq x \leq a+n$. Prin urmare, integrând între $a+n-1$ şi $a+n$ avem:

$$f(a+n) = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)dx = f(a+n-1)$$

Scriind aceste inegalităţi pentru $n = 1, 2, ..., n$, rezultă prin adunare:

$$f(a+1) + ... + f(a+n) \leq \int_a^{a+n} f(x)dx \leq f(a) + ... + f(a+n-1) \tag{6.3}$$

Dacă $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci suma cu termeni pozitivi este convergentă; dacă $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci suma cu termeni pozitivi este divergentă . Reciproc, fie $a+n \leq \ell \leq a+n+1$. Avem:

$$\int_a^{\ell} f(x)dx = \int_a^{a+n} f(x)dx + \int_{a+n}^{\ell} f(x)dx$$

Daca seria $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă atunci din (6.3) rezultă că şirul $(\int_a^{a+n} f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior, şirul fiind crescător, deci este convergent. Apoi avem:

$$0 < \int_{a+n}^{\ell} f(x)dx < \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx < f(a+n),$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a+n) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{a+n}^{\ell} f(x)dx = 0$ Prin urmare $\lim\limits_{\ell\to\infty} \int_a^{\ell} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f(x)dx$ Dacă seria (6.2) este divergentă, atunci din (6.3) rezultă că şi integrala este divergenta$\rfloor$.

Exemple:

1) $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad a = 1$. Seria $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ şi integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ sunt convergente sau divergente simultan.

2) $f(x) = (1/(x(lnx)^a))\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad a > 1$. Avem: $I(\ell) = \int_a^{\ell} \frac{dx}{x(lnx)^{\alpha}}$, cu $x = e^t$, $I(\ell) = \int_{\ln a}^{\ln \ell} \frac{dt}{t^{\alpha}}$;(deci funcţia f este descrescătoare) Seria $\sum u_n$, cu $u_n = \frac{1}{(a+n)[ln(a+n)]^{\alpha})}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Cazul functiilor care-si schimba semnul de o infinitate de ori pe $[a, +\infty)$

Dacă funcţia f îşi schimbă semnul de un număr finit de ori pe $[a, +\infty)$, ne reducem la cazul studiat scriind:

$$\int_a^{\ell} f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_p}^{\ell} f(x)dx,$$

unde $a_1, a_2, ..., a_p$ sunt punctele în care are loc schimbarea de semn; aici $a_1 < a_2 < ... < a_p$ şi pentru $x > a_p$, funcţia are un semn constant.

În cazul funcţiilor care îşi schimbă semnul de o infinitate de ori, de exemplu $f(x) = g(x)sinx, x \in [a, +\infty)$, principalul rezultat menţionat este:

Teorema 3. Dacă $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ este convergentă, atunci şi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă; ea se numeşte absolut convergentă.

Exemplu. Integrala $\int_0^{\infty} e^{-x}cos(mx)dx \quad (m \in \mathbb{R})$ este convergentă, deoarece este absolut convergentă.

Într-adevar, $|e^{-x}cos(mx)| \leq e^{-x}$ şi integrala $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ este convergentă deci

$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(mx)dx$ este convergentă. Atunci $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(mx)dx$ este absolut convergentă.

Se poate calcula pornind de la definiţie. Vom considera alături de $I = \int_0^{\infty} e^{-x}\cos(mx)dx$ integrala $J = \int_0^{\infty} e^{-x}\sin(mx)dx$. Folosind relaţia lui Euler avem integrala complexă $I + iJ = \int_0^{\infty} e^{-x}e^{imx}dx = \int_0^{\infty} e^{(-1+im)x}dx$ $I + iJ = \lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\ell} e^{(-1+im)x}dx = \lim_{\ell\to\infty}\frac{e^{(-1+im)x}}{-1+im}|_0^{\ell} = \lim_{\ell\to\infty}\frac{e^{(-1+im)\ell}}{-1+im} = \frac{1}{1-im} = \frac{1+im}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2} + i\frac{m}{1+m^2}$ Astfel se găseşte $I = \frac{1}{1+m^2}$, $J = \frac{m}{1+m^2}$

Teorema 4. Fie $f(x) = \varphi(x)sinx$, unde $\varphi : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ este o funcţie:

1° pozitivă

2° descrescătoare

3° astfel ca , $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$, atunci:

$\int_0^{\infty}\varphi(x)sin(mx)dx$ este convergentă. $\lceil$ Fie intervalul $[(j-1)\pi, j\pi]$, $j \in \mathbb{N}$ în care f are un semn constant. Avem $x = (j-1)\pi + x'$ cu $x' \in [0, \pi]$ şi $\int_{(j-1)\pi}^{j\pi}\varphi(x)sin(mx)dx = (-1)^{j-1}\int_0^{\pi}\varphi[(n-1)\pi + x']\sin x'dx' = (-1)^{j-1}a_j$, unde $a_j > 0$ Prin urmare dacă $n\pi < \ell < (n+1)\pi$, $\int_0^{\infty}\varphi(x)sinxdx = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + \int_{np}^{\ell}\varphi(x)sinxdx$ Avem $|\int_{n\pi}^{\ell}\varphi(x)sinxdx| < \int_{n\pi}^{\ell}\varphi(n\pi)dx = (\ell - n\pi)\varphi(n\pi)$, şi seria alternată este convergentă căci $a_{n+1} < a_n$ şi $0 < a_n = \int_0^{\pi}\varphi[(n-1)p + x']sinx'dx' < \varphi[(n-1)\pi]\int_0^{\pi}\sin x'dx' = 2\pi\varphi[(n-1)\pi]$, şi deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Rezultă că:

$\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin xdx = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$ $\rfloor$

Exemple

1) Fie $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Integrala $\int_0^{\infty}\frac{\sin}{x}dx$ este convergentă. ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin}{x} = 1$). Dar ea nu este absolut convergentă, deoarece procedând în mod analog pentru $|\frac{\sin}{x}|$ se obţine : $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, şi în acest caz $a_n = \int_0^{\pi}\frac{sinx'}{(n-1)\pi + x'}dx' > \frac{2}{\pi n}$ Deci seria $\sum a_n$ este divergentă.

2) Fie $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in [1, +\infty)$. Pentru x suficient de mare $f'(x) < 0$ (de exemplu pentru $x > e$); apoi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Avem:

$\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}|_1^t + \int_1^t \frac{dx}{x^2}$, deci $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = 1$. Rezultă de asemeni că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

3) Integralele lui Frenssel. Acestea sunt: $I_1 = \int_0^\infty \sin(x^2)dx, I_2 = \int_0^\infty cos(x^2)dx$ Notăm cu $x^2 = u$, $x = \sqrt{u}$, deci $2xdx = du$ şi integralele devin: $I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du$, $I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}du$, Ele au sens. Este de observat că funcţiile $sin(x^2)$ şi $\cos(x^2)$ nu tind către nici o limită pentru $t \to +\infty$. În schimb, de exemplu distanţa dintre punctele succesive în care se anulează $\sin(x^2)$ devine tot mai mică şi tinde la zero pentru $n \to \infty$.

Cazul integralelor relative la $(-\infty, b)$ sau $(-\infty, +\infty)$

Prin definitie:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty} \int_{-\ell}^{b} f(x)dx \tag{6.4}$$

dacă limita din membrul doi există. Ne putem reduce la cazul (6.1) facând schimbarea de variabilă $x = -x'$

Prin definitie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\ell'\to\infty} \int_{-\ell'}^{a} f(x)dx + \lim_{\ell\to\infty} \int_{a}^{\ell} f(x)dx \tag{6.5}$$

dacă ℓ' si ℓ tind către infinit independent unul de celălalt. Dacă limitele din membrul al doilea există, se arată uşor cş membrul al doilea nu depinde de alegerea lui $a \in \mathbb{R}$. În ambele cazuri, ne putem reduce la studiul făcut anterior.

6.2 Integrale definite pentru funcţii nemărginite.

Presupunem că pentru un punct $c \in (a, b)$ funcţia f are limite laterale infinite, deci $\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$, ea fiind marginită pe orice interval $[a, c - \varepsilon], [c + \varepsilon', b]$ cu $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$, care să fie fiecare incluse în $[a, b]$.
Vom considera integralele:

$$\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx; \quad \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx \tag{6.6}$$

si suma lor:

$$\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx \tag{6.7}$$

Se notează, dacă există limitele cu:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \tag{6.8}$$

şi

$$\lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon'>0}} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx = \int_c^b f(x)dx, \tag{6.9}$$

când vom scrie prin definiţie

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6.10}$$

şi vom spune că aceste integrale există, sau că sunt convergente sau că au sens. Este suficient să ne ocupăm de cazul:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\substack{x\to c\\ x-c<0}} \int_a^x f(t)dt \tag{6.11}$$

<u>Teorema</u> 5 (Cauchy) Condiţia necesară şi suficientă ca integrala $\int_a^c f(x)dx$(6.11) să existe este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să corespundă un $\eta > 0$ aşa ca pentru $|x-c| < \eta, |x'-c| < \eta$ să avem:

$$|\int_x^{x'} f(t)dt| < \varepsilon$$

$\lceil$ Aceasta se justifică la fel ca în cazul funcţiilor, adică din teorema Cauchy de unicitate şi existenţă a limitei unei funcţii, luând $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $\rfloor$.

<u>Teorema</u> 6 Dacă $\int_a^c |f(x)|dx$ este convergentă atunci si $\int_a^c f(x)dx$ este convergentă. Ea se numeşte absolut convergentă.
Exemplu: Fie $f(x) = \frac{1}{(c-x)^\alpha}$, $0 < \alpha,\ \alpha \neq 1$.
Se poate constata uşor că: $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \frac{(c-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}|_a^{c-\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(c-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$.
Prin urmare $\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $0 < \alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha > 1$. Dacă $\alpha = 1$ se vede direct că integrala este divergentă.

Un criteriu practic de convergenţă.

Dacă $f(x) = \frac{\psi(x)}{(c-x)^\alpha}$ şi dacă $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x-c<0}} \psi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to c\\ x-c<0}} [(c-x)^\alpha f(x)] = L \quad (L \in \mathbb{R})$, atunci integrala $(\int_a^c f(x)dx)$ este convergentă pentru $\alpha < 1$; dacă $\alpha \geq 1$ si

$L \neq 0$ atunci ea este divergentă.
Exemple
1) Fie de calculat: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. În acest caz $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{\ell\to 1\\ \ell<1}} \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\ell\to 1} \arcsin \ell = \frac{\pi}{2}$
2) $\int_0^1 \ln x dx$ este convergentă, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0$. Avem dealtfel: $\int_0^1 lnxdx =$
$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \ln x dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x \ln x - x)|_\varepsilon^1 = -1.$

Transformarea în serie numerică

Să reluăm integrala

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,$$

şi să considerăm şirul infinit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n > 0$, luând de exemplu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.
Putem scrie: $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{c-\frac{1}{n}} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} [\int_a^{c-\frac{1)}{p}} f(x)dx + \int_{c-\frac{1)}{p}}^{c-\frac{1)}{p+1}} f(x)dx +$
$... + \int_{c-\frac{1)}{n-1}}^{c-\frac{1)}{n}} f(x)dx]$, dacă $c - \frac{1}{p} \in [a, c]$. Notând: $u_n = \int_{c-\frac{1}{n-1}}^{c-\frac{1}{n}} f(x)dx \quad n \in$
$\mathbb{N}, n = p+1$, putem considera seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, a cărei convergenţă sau divergenţă este legată de aceea a integralei în cazul când funcţia f posedă o proprietate de monotonie şi $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = +\infty$.
Teorema7. Dacă $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru $x \in [a, c)$ şi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ şi dacă $\int_a^c g(x)dx$ este convergentă atunci integrala $\int_a^c f(x)dx$ este convergentă. Dacă $0 \leq g(x) \leq f(x)$ pentru $x \in [a, c)$ şi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, dacă $\int_a^c g(x)dx$ este divergentă atunci şi integrala $\int_a^c f(x)dx$ este divergentă.
Exemplu : $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$ este convergentă, deoarece $\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ pe $[0, 1)$.

6.3 Valoarea principală a integralelor divergente.

În cazul integralelor improprii de forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, divergente, există posibilitatea, în anumite situaţii, să li se ataşeze un număr unic determinat care să poată fi considerat drept valoare a acestei integrale improprii; evident aceasta implică o modificare a definiţiei.

Astfel, dacă $\lim\limits_{\substack{\ell'\to\infty \\ \ell\to\infty}} \int_{-\ell'}^{\ell} f(x)dx$, nu există, dacă $\ell \neq \ell', \ell, \ell' > 0$, în schimb există, dacă $\ell = \ell'$, adică există $\lim\limits_{\ell\to\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$, vom spune că această limită este valoarea principală a integralei improprii divergente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ şi se va scrie:

$$Vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx, \quad \ell > 0. \tag{6.12}$$

Evident dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă atunci $Vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (deoarece dacă există $\lim\limits_{\substack{\ell'\to\infty \\ \ell\to\infty}} \int_{-\ell'}^{\ell} f(x)dx$, cu $\ell \neq \ell', \ell, \ell' > 0$, cu atât mai mult va exista pentru $\ell = \ell'$)

Exemplu: $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim\limits_{\substack{\ell\to\infty \\ \ell'\to\infty}} \int_{-\ell'}^{\ell} xdx = \lim\limits_{\substack{\ell\to\infty \\ \ell'\to\infty}} [\frac{x^2}{2}|_{-\ell'}^{\ell}]$nu există. Dacă $\ell = \ell'$ atunci $Vp \int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$

Considerăm acum cazul integralei improprii $\int_a^b f(x)dx$, unde f este nemărginită în vecinătatea punctului $c \in (a, b)$. Dacă $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon'\to 0}} [\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx]$ nu există, în cazul $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ arbitrari dar există în cazul $\varepsilon = \varepsilon'$, adică dacă există $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx]$ vom spune că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă în sensul valorii principale şi vom scrie:

$$Vp \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}}[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx] \tag{6.13}$$

Este iarăşi evidentă diferenţa dintre noţiunea de integrală improprie convergentă şi cea de integrală convergentă în sensul valorii principale. În primul caz se consideră intervalul $[c - \varepsilon, c + \varepsilon']$ cu $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ arbitrari(evident $c - \varepsilon >$

$a, c+\varepsilon' < b)$, care se extrage din $[a, b]$. În al doilea caz se extrage un interval simetric de forma $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ cu $\varepsilon > 0$ arbitrar. Rezultă că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă avem egalitatea:

$$Vp\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Observatie: Putem lua $\varphi(x)$ o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi integrala: $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$, unde $c \in (a, b)$, $a < b$, care este sigur divergenta dacă $\varphi(c) \neq 0$. În baza celor prezentate mai sus putem totusi să-i dăm un sens excluzând din intervalul de integrare intervalul $(c-\varepsilon, c+\varepsilon), \varepsilon > 0$, simetric, cu centru în c şi facând apoi $\varepsilon \to 0$. Daca exista $\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-c}dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx] = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$, aceasta limita pentru care se utilizează notaţia din membrul al doilea va fi numită integrala în valoarea principală în sensul lui Cauchy. Notiunea de integrala improprie a fost introdusa de catre Cauchy;

În continuare vom presupune că toate integralele improprii(de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ sau $\int_a^b f(x)dx$ cu f nemărginită în (a, b)), dacă sunt convergente, ele sunt convergente în sensul valorii principale.

Exemple:

1) Fie $f(x) = \frac{1}{x}$, $\int_a^b \frac{dx}{x}$, $a < 0 < b$. Deoarece $\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = ln(-e) - ln(-a)$, iar $\int_{\varepsilon'}^b \frac{dx}{x} = lnb - lne'$, rezultă $\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = ln((b/(-a)))$.

2) Fie $f(x) = \frac{1}{x-c}$. Avem $\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to 0}\{\ln|x-c||_a^{c-\varepsilon} + \ln|x-c||_{c+\varepsilon}^b\} = ln((b-c)/(c-a))$.

3) Să se arate că:

$$Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-c} = \begin{cases} i\pi, \text{ dacă } c = \alpha + i\beta,\ \beta > 0 \\ -i\pi, \text{ dacă } c = \alpha + i\beta,\ \beta < 0 \\ 0\ , \text{ dacă } c = \alpha + i\beta,\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\lceil$ Într-adevăr, $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{dx}{x-c} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + i\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(\varepsilon-\alpha)^2+\beta^2}{(\varepsilon+\alpha)^2+\beta^2} + i(\arctan\frac{\varepsilon-\alpha}{\beta} + \arctan\frac{\varepsilon+\alpha}{\beta})$ şi deoarece se pot calcula limitele când $\varepsilon \to \infty$, vom obţine cele trei rezultate.$\rfloor$

6.4 Funcţia lui Euler $\gamma(x)$ (funcţia "gama").

Ca exemplu de funcţie cu parametru, generalizată vom considera funcţia lui Euler $\gamma(x)$ prin $\gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, pentru care stabilim teoremele:
Teorema 8 Pentru $x > 0$ $\gamma(x)$ este convergentă.
$\lceil$ Avem $\gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Deoarece $\lim_{t\to 0} t^\alpha t^{x-1}e^{-t} = \lim_{t\to 0} t^{\alpha+x-1} = 0$, dacă $\alpha+x-1 > 0$, deci $x > 1-\alpha > 0$. Deoarece $\alpha < 1$ si deci $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ este convergentă. Din $e^t > \frac{t^n}{n!}$ oricare ar fi $t > 0$ rezultă $e^{-t} < \frac{n!}{t^n}$ şi $t^{x-1}e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$. Termenul din dreapta este convergent dacă $n+1-x > 1$ deci pentru $n > x$. În total, $\gamma(x)$ este convergentă pentru orice $x > 0$ $\rfloor$.
Teorema 8 $\gamma(x+1) = x\gamma(x)$.
$\lceil$ Aplicăm formula de integrare prin părţi integralei $\gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}[\int_0^b t^x(-e^{-t})'dt] = \lim_{b\to\infty}[-t^x e^{-t}|_0^b + x\int_0^b t^{x-1}e^{-t}dt] = x\gamma(x)\rfloor$.
Consecinţe.
Dacă $x = 1, \gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}(\int_0^b e^{-t}dt) = \lim_{b\to\infty}[-e^{-b} + e^0] = 1$. $\gamma(2) = 1\gamma(1) = 1, \gamma(3) = 2\gamma(2) = 2!, ..., \gamma(n+1) = n\gamma(n) = n!$. Putem spune deci că funcţia $\gamma(x)$ generalizează factorialul.

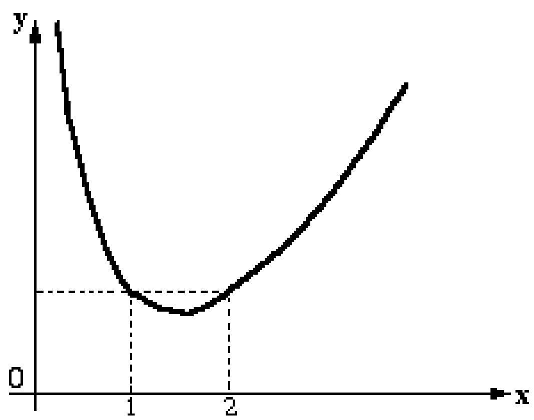

Fig. 6.1:

Pentru reprezentarea grafică a lui $\gamma(x)$ să calculăm primele două derivate.

$\gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ $\gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2 dt$, deci $\gamma(x)$ este convexă. Deoarece $\gamma(1) = \gamma(2) = 1$. Teorema lui Rolle spune că există $c \in (1,2)$ astfel încât $\gamma'(c) = 0$. Funcţia fiind convexă admite un singur minim.
$\lim_{x\to 0} \gamma(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\gamma(x+1)}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \gamma(x) = \infty$
Funcţia $\gamma(x)$ nu admite asimptote oblice.
Funcţia $\gamma(x)$ poate fi extinsă şi pentru numere negative folosind relaţia din teorema 9:
Fie $x \in (-1,0)$, atunci $x+1 \in (0,1)$ şi vom defini:
$\gamma(x) = \frac{\gamma(x+1)}{x}$,
în mod similar dacă $x \in (-2,-1)$, atunci $x+2 \in (0,1)$ şi vom defini:
$\gamma(x) = \frac{\gamma(x+2)}{x(x+1)}$, etc.

6.5 Funcţia $\beta(p,q)$ (funcţia "beta").

Un alt exemplu de funcţie cu doi parametri, generalizată vom considera funcţia beta, prin $\beta(x) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, pentru care stabilim teoremele:
Teorema 10 Pentru $p > 0$, $q > 0$, $\beta(p,q)$ este convergentă.
$\lceil$ Calculăm $\lim_{x\to 0} x^\alpha x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha+p-1} = 0$, dacă $\alpha+p-1 > 0$ atunci $p > 1-\alpha > 0$, deoarece $\alpha < 1$ pentru convergenţă; $\lim_{x\to 1}(1-x)^\alpha x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \lim_{x\to 1}(1-x)^{\alpha+q-1} = 0$ dacă $\alpha+q-1 > 0$ atunci $q > 1-\alpha > 0$, deoarece pentru $\alpha < 1$ avem convergenţă$\rfloor$.
Teorema 11.
a) $\beta(p,q) = \beta(q,p)$
b) $\beta(p,q) = \frac{\gamma(p)\gamma(q)}{\gamma(p+q)}$
c) $\beta(p,1-p) = \gamma(p)\gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$
$\lceil$ a) se justifica cu schimbarea de variabilă, în formula lui $(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, a lui x cu $1-t$. b) se va face odată cu integralele duble improprii. Prima egalitate a lui c) rezulta din b), iar a doua se face cu ajutorul integraleor improprii în valoare principală$\rfloor$.
Exemple:
1) $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \beta(\frac{1}{2},1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$. De aici rezultă $\gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \overset{x^2=t}{=} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \dfrac{1}{2}\gamma(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Euler Poisson).

3) $\beta(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$

$\lceil$ Într-adevăr: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \overset{x=\frac{t}{1-t}}{=} \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1-t)^{p-1}} (1-t)^{p+q} \frac{1}{(1-t)^2} dt =$
$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \beta(p,q) \rfloor$.

Aplicaţie

$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^2} dx = \beta(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = \frac{\gamma(\frac{3}{4})\gamma(\frac{5}{4})}{\gamma(2)} = \frac{\gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\gamma(\frac{1}{4})}{\gamma(2)} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

4) $\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\alpha \cos^{2q-1}\alpha d\alpha$

Se ajunge la aceasta su substitutia $x = sin^2\alpha$.

Capitolul 7

Integrale curbilinii

7.1 Integrale curbilinii în raport cu coordonatele.

Fie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, vectorii unitari ai axelor de coordonate. Să considerăm o funcţie vectorială, de variabilele x, y, z definită prin:

$$(x, y, z) \to \overrightarrow{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k},$$

unde $P, Q, R : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continuie pe domeniul $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$. Fie curba $(c) \subset \mathbb{D}$ definită ca mulţimea punctelor pentru care $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$, unde $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continuie şi derivabile cu derivate continuie, adică $f, g, h \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b])$.

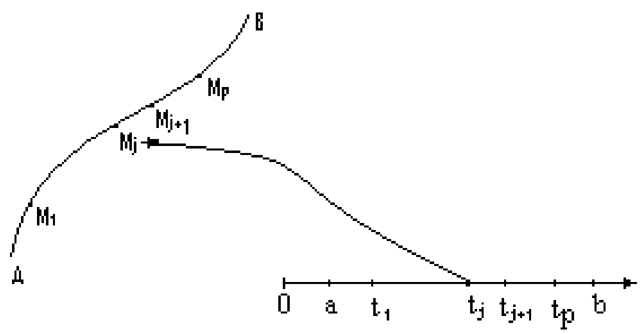

Fig. 7.1:

Atunci când t descrie intervalul $[a, b], a < b$, punctul M de coordonate $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ descrie un arc de curbă $\widehat{AB}$; punctele A si B au coordonatele obţinute pentru $t = a$ si $t = b$. Se spune că avem o reprezentare parametrică a curbei (c).

Fie diviziunea(partiţia) $d : (a = t_0, t_1, ..., t_j, ..., t_{p-1}, t_p = b)$ a intervalului $[a, b]$ şi $M_0 = A, M_1, ..., M_j, ..., M_{p-1}, M_p = B$, punctele de pe curba (c), care corespund acestor valori ale parametrului t. Fie $\ell(d)$ norma acestei diviziuni. Norma vectorului $\overrightarrow{M_{j-1}M_j}$ este :

$$\|\overrightarrow{M_{j-1}M_j}\| = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_j - z_{j-1})^2} \tag{7.1}$$

sau

$$\|\overrightarrow{M_{j-1}M_j}\| = (t_j - t_{j-1})\sqrt{f'^2(\xi_j) + g'^2(\eta_j) + h'^2(\zeta_j)} \tag{7.2}$$

unde $\xi_j, \eta_j, \zeta_j \in [t_{j-1}, t_j]$, iar $x_j = f(t_j), y_j = g(t_j), z_j = h(t_j), j = 1, ..., p$. Relaţia (7.2) rezultă din relaţia (7.1) conform cu formula lui Lagrange, unde avem:

$$\begin{aligned} f(t_j) - f(t_{j-1}) &= (t_j - t_{j-1})f'(\xi_j), \\ g(t_j) - g(t_{j-1}) &= (t_j - t_{j-1})g'(\eta_j), \\ h(t_j) - h(t_{j-1}) &= (t_j - t_{j-1})h'(\zeta_j), \end{aligned}$$

Din (7.2), ca urmare a ipotezelor făcute, avem :

$$\|\overrightarrow{M_{j-1}M_j}\| < L\ell(d),$$

unde L este un număr pozitiv fixat, care majorează radicalul din relatia (7.2), atunci cnd ξ_j, η_j, ζ_j parcurg intervalul $[t_{j-1}, t_j] \subset [a, b], j = 1, 2, ..., p$. De exemplu dacă $f'(t) \leq p_0, g'(t) \leq q_0, h'(t) \leq r_0$, pentru $t \in [a, b]$ putem lua $L = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$. Deci, cu cât norma diviziunii d este mai mică cu atât distanţele dintre punctele succesive ale liniei poligonale $A, M_1, ..., M_{p-1}, B$ înscrise în curba (c) sunt mai mici.

Fie S_j punctul de pe curba (c), care corespunde valorii $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ a parametrului t. Notăm pentru prescurtare $P(S_j) = P(f(t_j), g(t_j), h(t_j))$. Se consideră suma integrala:

$$\Sigma_1(d) = \sum_{j=1}^{p} P(S_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{p} P(S_j)f'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \tag{7.3}$$

Fie T_j, punctul de pe curba (c), care corespunde valorii $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ a parametrului t. Notăm pentru prescurtare: $P(T_j) = P(f(\xi_j), g(\xi_j), h(\xi_j))$. Se consideră suma integrală:

$$\sigma_1(d) = \sum_{j=1}^{p} P(T_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{p} P(T_j)f'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \tag{7.4}$$

Să considerăm funcţia compusă $U : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita prin:

$$U(t) = P(f(t), g(t), h(t))f'(t), \tag{7.5}$$

care este continuă pe $[a, b]$. Este evident că $P(T_j)f'(\xi_j) = U(\xi_j)$, deci $s_1(d)$ este o sumă integrală Riemann a funcţiei $U(t)$, relativă la diviziunea d a lui $[a, b]$. Rezultă că dacă se consideră un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de norme $\ell(d_n)$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1(d_n) = \int_a^b U(t)dt = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))f'(t)dt \tag{7.6}$$

Această limită se mai notează prin simbolul $\int_{AB}$ astfel:

$$I_1 = \int_{AB} P(x, y, z)dx \tag{7.7}$$

care reaminteşte modul de formare a sumelor integrale şi se numeste "integrala curbilinie din P(x, y, z)dx luata n lungul arcului AB".
Se arată uşor că I_1 este şi limita şirului $(\Sigma_1(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$, unde $\Sigma_1(d)$ este definit de (7.3). Într-adevăr, funcţia $u(t) = P(f(t), g(t), h(t)) = P(M)$ este continuă pe $[a, b]$, deci uniform continua pe $[a, b]$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, avem $|P(S_j) - P(T_j)| < e$, dacă $|t_j - \xi_{j-1}| < |t_j - t_{j-1}| < \eta$; acest lucru are loc dacă $\ell(d) < \eta(\varepsilon)$. Dar atunci $|\Sigma_1(d) - \sigma_1(d)| = p_0(b - a)\varepsilon$. Pentru şirul de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, considerat cu $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, avem: $|\Sigma_1(d_n) - I_1| = |\Sigma_1(d_n) - \sigma_1(d_n)| + |\sigma_1(d_n) - I_1| < p_0(b - a)\varepsilon + \varepsilon$, dacă $n > n_0(\varepsilon)$, deoarece $|\sigma_1(d_n) - I_1| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$ şi $\ell(d_n) < \eta(\varepsilon)$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$. Deci:

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_1(d_n) = \int_{AB} P(x, y, z)dx. \tag{7.8}$$

În mod analog se consideră sumele integrale:

$$\Sigma_2(d) = \sum_{j=1}^{p} Q(S_j)(y_j - y_{j-1}) \tag{7.9}$$

şi

$$\Sigma_3(d) = \sum_{j=1}^{p} R(S_j)(z_j - z_{j-1}), \tag{7.10}$$

unde S_j este cel folosit la (7.3) şi avem, procedând analog:

$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \Sigma_2(d_n) = \sum_a^b Q(f(t), g(t), h(t))g'(t)dt = \int_{AB} Q(x, y, z)dy \tag{7.11}$$

$$I_3 = \lim_{n\to\infty} \Sigma_3(d_n) = \sum_a^b R(f(t), g(t), h(t))h'(t)dt = \int_{AB} R(x, y, z)dz \tag{7.12}$$

Integrala $I = I_1 + I_2 + I_3$ reprezintă deci o limită a sumelor integrale $\Sigma_1(d_n) + \Sigma_2(d_n) + \Sigma_3(d_n)$, când $n \to \infty$. Avem:

$$I = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{7.13}$$

Exemple:
1. Fie arcul de curbă (c), definit de: $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 < t < 1$. Avem pentru $P(x,y,z) = x^2 + y, Q(x,y,z) = zx + y^2, R(x,y,z) = x$:
$I = \int_{AB} (x^2 + y)dx + (zx + y^2)dy + xdz = \int_0^1 (2t^2 + 4t^5 + 3t^3)dt = \frac{25}{12}$.
2. Pe arcul de curbă plană (c) definit prin $y = f(x)$ $a \leq x \leq b$. Să luăm $P(x,y) = y, Q(x,y) = 0$. Adoptăm reprezentarea parametrică $x = t, y = f(t)$. Avem:

$$I = \int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} ydx = \int_a^b f(t)dt$$

Deci integrala definită apare ca un caz particular de integrală curbilinie.

7.1.1 Proprietăţi ale integralelor curbilinii în raport cu coordonatele

Aceste proprietăţi rezultă din faptul că integrala curbilinie se exprimă printr-o integrală definită. Notând cu $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ vectorul de poziţie a unui punct curent M de pe curba (c) şi atunci avem $d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}$ astfel că integrala (7.13) se poate exprima mai simplu:

$$I = \int_{AB} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = \int_a^b (Pf' + Qg' + Rh')dt = \int_a^b \Phi(t)dt \tag{7.14}$$

unde $\overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}$ este un produs scalar iar semnificaţia lui $\Phi(t)$ este evidentă. Avem proprietăţile:
Proprietatea 1: $\int_{AB} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = -\int_{BA} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}$
Proprietatea 2: $\int_{AB} vdr = \int_{AQ} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} + \int_{QB} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}$, unde Q este un punct de pe arcul AB, sau mai general:
Dacă (c) este justapunerea curbelor (c_1) şi (c_2), adică:
$(c_1) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_1(t), t \in [a,c], a < c$
$(c_2) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_2(t), t \in [c,b], c < b$,
atunci:

$$\int_{(c)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = \int_{(c_1)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}_1 + \int_{(c_2)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}_2.$$

Proprietatea 3: Dacă $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ şi dacă λ este un număr, atunci:

$$\int_{AB} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{AB} \overrightarrow{v}_1 d\overrightarrow{r} + \int_{AB} \overrightarrow{v}_2 d\overrightarrow{r},\ \int_{AB} \lambda \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \lambda \int_{AB} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$$

Proprietatea 4: Valoarea integralei $\int_{AB} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$ nu depinde decât de funcţia vectorială$\overrightarrow{v}$ şi de arcul de curbă AB, nu de reprezentarea parametrică a arcului. Într-adevăr, punând $t = \varphi(u), \alpha \leq u \leq \beta$, avem: $I = \int_a^b (Px'_t + Qy'_t + Rz'_t)dt = \int_a^b \Phi(t)dt$, $I' = \int_\alpha^\beta (Px'_u + Qy'_u + Rz'_u)du$, unde I' ar fi noua valoare a integralei (7.14). Dar $x'_u = x'_t\varphi'(u), y'_u = y'_t\varphi'(u), z'_u = z'_t\varphi'(u)$, deci $I' = \int_\alpha^\beta \Phi(\varphi(u))\varphi'(u)du$. Atunci $I' = I$ conform cu formula de schimbare de variabila în integrala definita.

Proprietatea 5: Integrala curbilinie pe un contur închis nu depinde de alegerea punctului de plecare. Dacă curba este nchisa (Fig. 7.2), avem: $x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta), z(\alpha) = z(\beta)$.

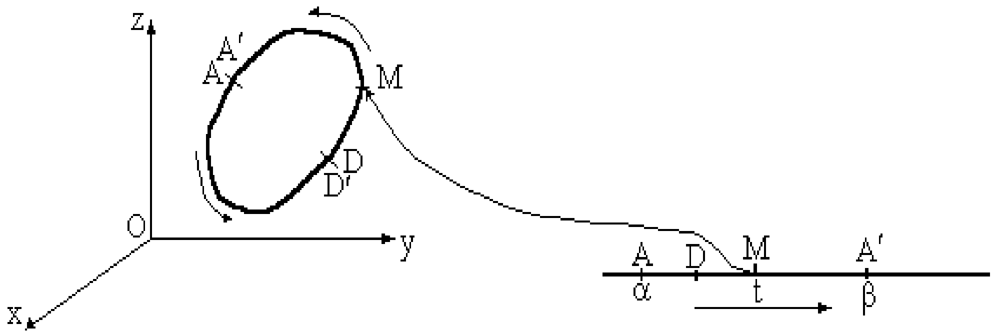

Fig. 7.2:

Integrala pe un comtur închis se mai notează:

$$I = \oint_{(c)} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_\alpha^\beta F(t)dt \tag{7.15}$$

În cazul conturului închis punctul B coincide cu punctul $A'(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ care geometric este identic cu $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ (Fig. 7.2).

Să considerăm şi punctul de plecare D şi punctul de sosire D', care coincide geometric cu D pe curba (c) Avem:

$$I = \int_{(c)} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{AM} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} + \int_{MA} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{AD} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} + \int_{DM} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} + \int_{MA'} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$$

Dacă plecăm din D şi revenim în D', am avea:
$J = \int_{(c)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = \int_{DM} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} + \int_{MD'} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = \int_{DM} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} + \int_{MA'} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} + \int_{A'D'} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}$
şi cum $\int_{A'D'} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = \int_{AD} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}$, rezultă $I = J$.

7.1.2 Curbă orientată. Câmp conservativ.

Fie $M(x(t), y(t), z(t))$ un punct de pe curba (c) corespunzător lui $t \in [\alpha, \beta]$. Când t parcurge continuu pe $[\alpha, \beta]$ de la α la β, punctul M parcurge curba (c) într-un sens pe care l vom numi sens direct. Când t parcurge continuu pe $[\alpha, \beta]$ de la β la α, punctul M parcurge curba (c) în celalalt sens pe care îl vom numi sens invers.
Definiţie: O curbă (c) împreună cu unul din sensurile de parcurs se numeşte curbă orientată. Curba (c) împruna cu sensul direct de parcurs a lui (c) se notează cu (c_+). În mod analog curba (c) împrună cu sensul invers de parcurs a lui (c) se notează cu (c_-). Daca vom tine cont de acestea Proprietatea 1 se

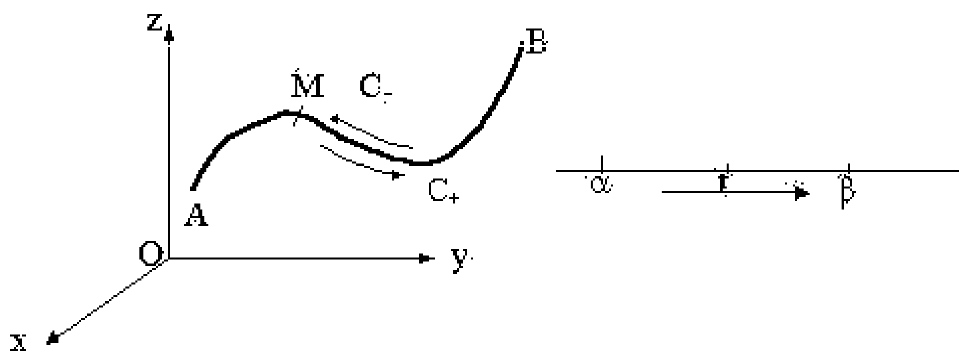

Fig. 7.3:

va rescrie:

$$\int_{(c_+)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r} = -\int_{(c_-)} \overrightarrow{v}d\overrightarrow{r}.$$

Consideram în continuare câmpul vectorial $(\overrightarrow{v}, \mathbb{D})$ adică funcţia vectorială $\overrightarrow{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$, împreună cu domeniul sau de definiţie. De asemeni vom considera două curbe (c_1) şi (c_2) din domeniul câmpului $\overrightarrow{v}$, cu alte cuvinte (c_1) şi (c_2) sunt incluse în $\mathbb{D}$, care pornesc din A şi ajung în B (Fig.7.4).

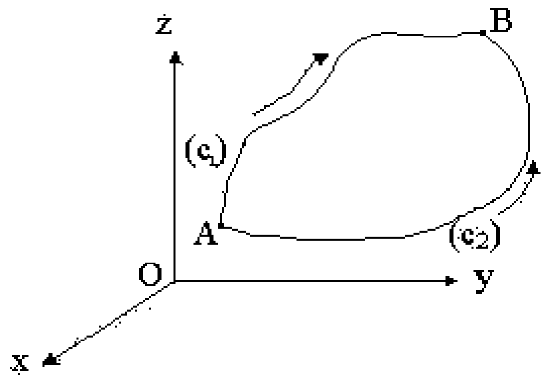

Fig. 7.4:

<u>Definiţie</u>: Câmpul vectorial $\overrightarrow{v}$ se numeste conservativ dacă:

$$\int_{c_1} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{c_2} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} \tag{7.16}$$

Datorită proprietăţilor 1 şi 2 vom putea scrie condiţia de conservativitate:

$$\oint_{c} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = 0 \tag{7.17}$$

unde $(c) = (c_2)_+ \cup (c_1)_-$ iar semnul $\oint_{(c)}$ reprezintă faptul că integrala curbilinie s-a luat pe (c) în sensul, care lasă domeniul limitat de curbele (c_1) si (c_2) pe stânga; se mai spune în sens direct, sau în sensul acelor de ceasornic, sau încă în sens trigonometric.

$\lceil \int_{c_2} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} - \int_{c_1} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{(c_2)_+} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} + \int_{(c_1)_-} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \oint_{c} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = 0.\rfloor$

În legătură cu noţiunea de conservativitate a câmpurilor vom da următoarele teoreme:

<u>Teorema</u> 1. Câmpul vectorial $\overrightarrow{v}$ este conservativ dacă şi numai dacă există o funcţie scalară $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă cu derivatele parţiale continuie astfel ca:

$$\overrightarrow{v} = gradf \tag{7.18}$$

$\lceil$ Fie $(c) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t),\ t \in [a, b]$ şi $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{OA}, A(x(a), y(a), z(a)), \overrightarrow{r}(b) = \overrightarrow{OB}, B(x(b), y(b), z(b))$. Notăm cu $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Avem $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + (\frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = (gradf)\overrightarrow{r}'(t)$.

Demonstrăm mai întâi că dacă există o funcţie scalară $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă cu derivatele parţiale continuie astfel ca $\overrightarrow{v} = gradf$, atunci $\overrightarrow{v}$ este conservativ. Într-adevăr, presupunând că există o funcţie f astfel ca $\overrightarrow{v} = gradf$ şi fie (c_1) şi (c_2) două curbe care unesc A cu B. Obţinem:

$$\int_{c_1} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{c_1} gradf\, d\overrightarrow{r} = \int_a^b \varphi_1'(t)dt = \varphi_1(b) - \varphi_1(a),$$
$$\int_{c_2} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{c_2} gradf\, d\overrightarrow{r} = \int_a^b \varphi_2'(t)dt = \varphi_2(b) - \varphi_2(a),$$

Cum $\varphi_1(a) = f(x_1(a), y_1(a), z_1(a)) = f(x_2(a), y_2(a), z_2(a)) = \varphi_2(a)$ $\varphi_1(b) = f(x_1(b), y_1(b), z_1(b)) = f(x_2(b), y_2(b), z_2(b)) = \varphi_2(b))$, deoarece cele două curbe au puntele A, B comune; de aici rezultă $\int_{c_1} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{c_2} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$ adică $\overrightarrow{v}$ este conservativ.

Să demonstrăm că dacă câmpul vectorial $\overrightarrow{v}$ este conservativ atunci există o funcţie scalară $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă cu derivatele parţiale continuie astfel ca $\overrightarrow{v} = gradf$. Alegem un punct fix $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe (c) şi un alt punct mobil $M(x, y, z)$ pe (c). Deoarece $\overrightarrow{v}$ este conservativ, oricare ar fi curba (c), care uneşte M_0 cu M integrala $\int_{M0M} vdr$ nu depinde de curba(respectiv de arcul M0M) ci numai de capetele acestuia, adica de M0 si de M . Daca M0 este fixat rezulta ca integrala depinde de M deci de x, y, z. Fie $f(x, y, z) = \int_{\widehat{M_0M}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$ şi fie punctul $M'(x + h, y, z)$ deci M' este pe o paralela la Ox ce trece prin M. Avem $f(x+h, y, z) = \int_{\widehat{M_0M'}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\widehat{M_0M}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} + \int_{\overline{MM'}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r}$, adică: $f(x + h, y, z) = f(x, y, z) + \int_x^{x+h_1} P(t, y, z)dt$, deoarece pe segmentul $\overline{MM'} : dx = dt, dy = dz = 0$. Aplicând integralei teorema de medie, vom obţine: $f(x + h_1, y, z) - f(x, y, z) = P(t, y, z)h_1$, cu t între x şi $x + h_1$ şi trecând la limită pentru $h_1 \to 0$, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z).$$

Asemănător, ducând paralele la axele Oy şi Oz, din punctul P se obţin respectiv:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$$

si deci $gradf = \overrightarrow{v}\rfloor$.

Funcţia f, care apare în teorema 1, de mai sus, poartă numele de potenţialul scalar al câmpului vectorial $\overrightarrow{v}$. Expresia

$$\overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{r} = Pdx + Qdy + Rdz$$

se numeşte diferenţială totală exactă dacă există o funcţie scalară f astfel încât:

$$df = Pdx + Qdy + Rdz \tag{7.19}$$

Teorema 2. Câmpul $\overrightarrow{v}$ este conservativ dacă şi numai dacă:

$$rot\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \tag{7.20}$$

$\lceil$Dacă $\overrightarrow{v}$ este conservativ, conform cu teorema precedentă există f astfel încât

$$v = gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k},$$

$$rot\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial y}))\overrightarrow{i} + (\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial z}))\overrightarrow{j} +$$

$(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}))\overrightarrow{k} = 0$

Reciproc, dacă rot$\overrightarrow{v}$=0, rezultă:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.21}$$

care reprezintă de fapt condiţia (7.20). Introducem funcţia:

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt, \tag{7.22}$$

dată prin integrale cu parametrii; avem:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y_0, z_0) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t)dt,$

Daca tinem cont de (7.21) vom avea:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y_0, z_0) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial t}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial t}(x, y, t)dt =$

$P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = P(x, y, z).$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z_0) + \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, t)dt = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial t}(x, y, t)dt =$

$Q(x, y, z_0) + Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = Q(x, y, z)$. Am ţinut cont din nou de (7.21). $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$, şi deci avem $gradf = \overrightarrow{v}$.$\rfloor$

Observaţii:

1. În cazul integralelor curbilinii independente de drum (care nu depinde de

curba ce uneste punctul A cu B ci numai de aceste puncte) se mai foloseşte şi notaţia:

$$\int_{A(x_A,y_A,z_A)}^{B(x_B,y_B,z_B)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

2. Referitor la cazul bidimensional expresia:
$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ce figurează în integrala curbilinie se zice că este totală exactă dacă există o funcţie scalară f, astfel încât:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, sau

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{7.23}$$

şi conform cu teorema 2 vom avea:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \tag{7.24}$$

sau

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt \tag{7.25}$$

3. Putem da o interpretare geometrică formulei de reprezentare a potenţialului f, al câmpului vectorial.

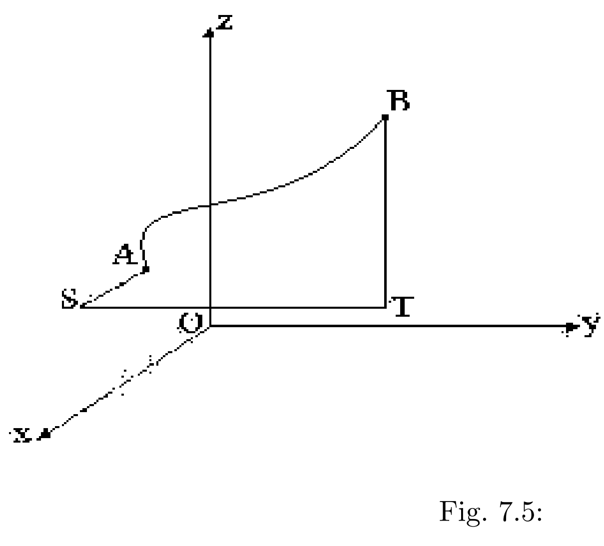

Fig. 7.5:

Cum $I = \int_{M_0M} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ nu depinde decât de capetele unei curbe (c) adică de punctele M_0 şi M nu de curba (c), vom lua curba (c) formată din linii paralele cu axele de coordonate, de exemplu

$M_0S+ST+TB$, M_0S parelelă cu axa Ox, ST parelelă cu axa Oy, TM parelelă cu axa Oz (Fig. 17) . Coordonatele punctelor sunt:
$M_0(x_0, y_0, z_0), S(x, y_0, z_0), T(x, y, z_0)M(x, y, z)$.
Exemple:
1 Dacă $\overrightarrow{v} = (x^2 + y^2)\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j}$, un potenţial vector este: $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2$
2 Dacă $\overrightarrow{v} = \frac{yz}{x^2}\overrightarrow{i} - \frac{z}{x}\overrightarrow{j} - \frac{y}{x}\overrightarrow{k}, x \neq 0$, un potenţial vector este: $f(x, y, z) = -\frac{yz}{x}$.

7.1.3 Calculul ariilor figurilor plane.

În cazul particular n=2, putem exprima aria unui domeniu plan cu ajutorul integralei curbilinii.

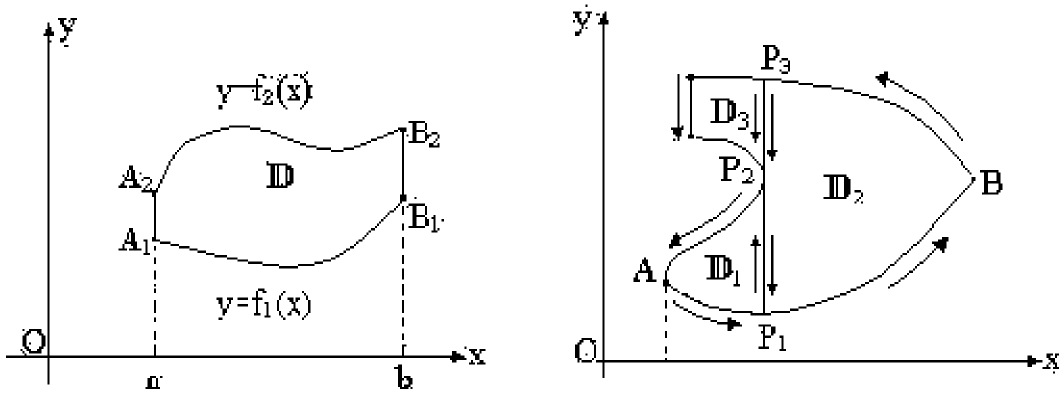

Fig. 7.6:

Fie $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, mărginit de curbele de ecuaţii $y = f_1(x), y = f_2(x), a \leq x \leq b$, şi de paralelele $x = a$, sau $x = b$, la axa Ox. Aria Ω a domeniului $\mathbb{D}$ (Fig. 7.6 stânga) este evident: $\Omega = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_{A_2B_2} ydx - \int_{A_1B_1} ydx$, conform cu definitia integralelor curbilinii, adoptnd ca parametru t chiar pe x. Pe de altă parte $\int_{B_1B_2} ydx = 0$, $\int_{A_2A_1} ydx = 0$ deoarece pe B_1B_2 si pe A_2A_1 x =constant şi atunci $dx = 0$, putem deci scrie:

$$\Omega = -\int_{B_2A_2} ydx - \int_{A_2A_1} ydx - \int_{A_1B_1} ydx - \int_{B_1B_2} ydx = -\oint_{(c)} ydx \quad (7.26)$$

unde:$(c) = Fr(D) = arcB_2A_2 + segmentA_2A_1 + arcA_1B_1 + segmentB_1B_2$ (Fig. 7.6 stânga). Formula (7.26) poate fi stabilită şi pentru un domeniu, a carei frontieră este tăiată, pentru unele valori ale lui x, în mai mult de două puncte de o paralelă la axa Oy cum este acela din figura (Fig. 7.6 dreapta). Acest domeniu poate fi împărţit în domeniile $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$, care îndeplinesc condiţiile de aplicatibilitate a formulei (7.26). Porţiunile de integrale relative la contururile parcurse n sensuri opuse, P_1P_2 sau P_2P_3 sunt evident nule. Adunând ariile domeniilor $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$, se va regasi (7.26). Această formulă este deci valabilă cu condiţia ca frontiera domeniului să fie formată dintr-un număr finit de arce, pe care $y = f_j(x), (j = 1, ..., q)$ şi de porţiuni paralele la axa Oy: funcţiile sunt presupuse integrabile pe intervalele de definiţie corespunzătoare. Putem da şi o altă expresie ariei Ω, observând că:

$$\oint_{(c)} d(\frac{xy}{2}) = \frac{1}{2}\oint_{(c)} xdy + \frac{1}{2}\oint_{(c)} ydx = 0,$$

deoarece curba (c) este închisă iar expresia de integrat este o diferenţială totală exactă. Rezultă:

$$-\frac{1}{2}\oint_{(c)} ydx = \frac{1}{2}\oint_{(c)} xdy,$$

şi se obţine formula:

$$\Omega = \frac{1}{2}\oint_{(c)} xdy - \frac{1}{2}\oint_{(c)} ydx \tag{7.27}$$

în care x şi y joaca un rol simetric. Sensul de parcurgere pe (c) este cel direct faţă de interior. În rezumat putem exprima aria lui $\mathbb{D}$ în trei moduri, astfel:

$$\Omega = aria(\mathbb{D}) = \begin{cases} -\oint_{(c)} ydx \\ \oint_{(c)} xdy \\ \frac{1}{2}\oint_{(c)} xdy - ydx \end{cases} \tag{7.28}$$

Aplicaţie: Aria în plan în coordonate polare . Fie $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. Pe curba (c) avem reprezentarea polară $\rho = \rho(\theta)$, unghiul θ fiind ales ca perametru. Calculând pe dx şi dy din (7.27) rezultă :

$$\Omega = Aria(\mathbb{D}) = \frac{1}{2}\oint_{(c)} \rho^2 d\theta \tag{7.29}$$

În cazul cercului dat sub forma parametrică:

$$(c) : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

r=raza cercului vom avea:
Aria($\mathbb{D}$)=$\frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} r^2 d\theta = \pi r^2$, unde $\mathbb{D}$ este domeniul disc limitat de cercul de rază r.

7.2 Integrale curbilinii în raport cu lungimea arcului

7.2.1 Rectificarea curbelor. Calculul lungimii arcelor.

Plecând de la (7.1) şi (7.2) vom avea că lungimea liniei poligonale $A, M_1, ..., M_{p-1}, B$ este:

$$L(d) = \sum_{j=1}^{p} \|M_{j-1}M_j\| = \sum_{j=1}^{p}(t_j - t_{j-1})\sqrt{f'^2(\xi_j) + g'^2(\eta_j) + h'^2(\zeta_j)} \quad (7.30)$$

Fie vectorii:

$$\overrightarrow{a}_j = f'(\xi_j)\,\overrightarrow{i} + g'(\xi_j)\,\overrightarrow{j} + h'(\xi_j)\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{b}_j = f'(\xi_j)\,\overrightarrow{i} + g'(\eta_j)\,\overrightarrow{j} + h'(\zeta_j)\,\overrightarrow{k}$$

Scriind $\overrightarrow{b}_j = (\overrightarrow{b}_j - \overrightarrow{a}_j) + \overrightarrow{a}_j$, inegalitatea triunghiului ne dă:

$$\|b_j\| \leq \|b_j - a_j\| + \|a_j\|$$

Dar $\overrightarrow{b}_j - \overrightarrow{a}_j = (g'(\eta_j) - g'(\xi_j))\,\overrightarrow{j} + (h'(\zeta_j) - h'(\xi_j))\,\overrightarrow{k}$, funcţiile g' şi h' fiind continuie pe $[a, b]$, avem: $|g'(\eta_j) - g'(\xi_j)| < \varepsilon$, $|h'(\zeta_j) - h'(\xi_j)| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este dat la alegerea noastră. Se considera acum un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale lui $[a, b]$, aşa ca $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ şi fie $L(d_n)$ lungimea liniei poligonale pentru diviziunea (d_n). Dacă există $\lim_{n\to\infty} L(d_n)$, prin definiţie ea este lungimea arcului de curbă AB.

Teorema 3. Dacă funcţiile f', g' şi h' sunt continuie pe $[a, b]$, lungimea arcului AB există şi ea este dată de:

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt \quad (7.31)$$

⌈ Să considerăm suma integrală:

$$\sigma(d) = \sum_{j=1}^{p}(t_j - t_{j-1})\|a_j\| \quad (7.32)$$

relativă la funcţia $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}, t \in [a, b]$ şi să o comparăm cu (7.30), care se mai scrie:

$$L(d) = \sum_{j=1}^{p}(t_j - t_{j-1})\|b_j\| \quad (7.33)$$

Avem pentru diviziunea $d_n, L(d_n) - L_{AB} = L(d_n) - \sigma(d_n) + \sigma(d_n) - L_{AB}$, deci:

$$|L(d_n) - L_{AB}| \leq |L(d_n) - \sigma(d_n)| + |\sigma(d_n) - L_{AB}| < 2\varepsilon \tag{7.34}$$

dacă $n > n_0(\varepsilon)$. Într-adevăr $|\sigma(d_n) - L_{AB}| < \varepsilon$, pentru $n > n_1(e)$, funcţia fiind integrabilă; apoi: $|L(d) - \sigma(d)| < \sum_{j=1}^{p}(t_j - t_{j-1})\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon(b-a)$, dacă $\ell(d) < \eta(\varepsilon)$, deci $|L(d_n) - \sigma(d_n)| < \sqrt{2}\varepsilon(b-a)$, dacă $\ell(d_n) < \eta(\varepsilon)$, deci daca $n > n_2(\varepsilon)$. Luând $n_0(\varepsilon)$ egal cu cel mai mare dintre $n_1(\varepsilon)$ si $n_2(\varepsilon)$, inegalitatea (7.34) este stabilită, de unde rezultă (7.31).
Ca aplicaţie să calculăm lungimea unui cerc de rază r. Consideram astfel cercul (c) situat într-un plan paralel cu planul $xOy : z = z_0$, atunci ecuaţia parametrică a cercului este:

$$(c) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = z_0, \end{cases}$$

r=raza cercului, $t \in [0, 2\pi]$, vom avea: $L_{cerc} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} rdt = 2\pi r.$

7.2.2 Abscisa curbilinie pe o curbă.

Fie un punct M oarecare pe arcul de curbă AB. Lungimea arcului de curba AM este:

$$s = \int_a^t \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}dt, \tag{7.35}$$

dacă M corespunde valorii t a parametrului. Se defineste astfel pe curbă o funcţie $s : [a, b] \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct al ei un numar real $s = s(t)$, care se numeşte abscisa curbilinie. Punctul A este originea arcelor; pentru el $s = s(a) = 0$. Avem:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} \geq 0 \tag{7.36}$$

deci s variază în acelasi sens cu t. Se mai deduce de aici relaţia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.37}$$

care a fost data de Clairaut. Ea exprimă diferenţiala ds cu ajutorul diferenţialelor: $dx = f'dt,\ dy = g'dt,\ dz = h'dt.$

7.2.3 Integrala curbilinie în raport cu abscisa curbilinie

Putem să adoptăm ca parametru pe curba AB chiar abscisa curbilinie s. Atunci coordonatele unui punct oarecare M se exprimă ca funcţii de aceasta abscisa, deci $x = x(s)y = y(s), z = z(s), s_A \leq s \leq s_B$, alegând ca origine a absciselor un punct oarecare al acestui arc. În aplicaţii intervin frecvent integralele curbilinii de forma:

$$\int_{AB} F(x,y,z)ds = \int_{s_A}^{s_B} F(x(s),y(s),z(s))ds \tag{7.38}$$

a căror semnificaţie este evidentă, ca limită de sume integrale de tipul: $\sigma(d) = \sum_{j=1}^{p} F(M_j)(s_j - s_{j-1})$, unde $d = s_A, s_1, ..., s_{p-1}, s_B$ este o diviziune a intervalului $[s_A, s_B]$ în care variaza s, atunci când se consideră un şir de de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$.

7.2.4 Aria unei suprafeţe de rotaţie

Se consideră un arc de curbă plană, situat în planul Oxy şi care se află deasupra axei Ox (Fig. 7.7).

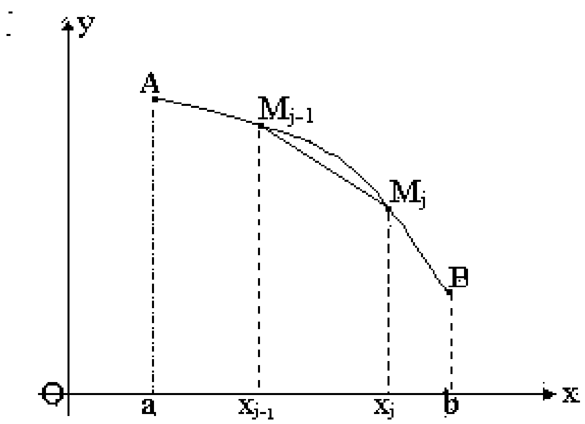

Fig. 7.7:

Fie $y = f(x)$ ecuaţia acestui arc. Aici $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu derivata primă continuă. Cu ajutorul diviziunii $d = a, x_1, ..., x_{p-1}, b$ a intervalului $[a,b]$, înscriem pe arcul de curbă o linie poligonală $AM_1...M_{p-1}B$. Aria laterală a trunchiului de con generat de dreapta $M_{j-1}M_j$ prin rotaţia completa în jurul axei Ox este egală cu:

$$\frac{2\pi f(x_{j-1}) + 2\pi f(x_j)}{2}\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + [f(x_j) - f(x_{j-1})]^2}$$

Suma ariilor laterale ale suprafeţei generate prin rotaţia liniei poligonale este deci:

$$\sigma(d) = \pi\sum_{j=1}^{p} f(x_{j-1})\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}(x_j - x_{j-1}) + \pi\sum_{j=1}^{p} f(x_j)\sqrt{1+f'^2(\xi_j)}(x_j - x_{j-1}) \tag{7.39}$$

unde $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, deoarece $f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$. Considerăm un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$ şi procedând la fel ca la rectificarea curbelor avem că:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sigma(d_n) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{7.40}$$

defineşte aria solidului de rotaţie generat prin rotirea completă a arcului AB n jurul axei Ox. Într-adevăr, ambele sume integrale din (7.39) au aceeasi limită. Dacă se observă că pe curba AB avem reprezentarea parametrică $x = t, y = f(t), z = 0$, rezultă că: $ds^2 = [1 + f'^2(t)]dt^2$, deci integrala (7.40) ce exprimă aria S se mai exprimă prin integrala curbilinie:

$$S = 2\pi\int_{AB} y ds \tag{7.41}$$

7.2.5 Centre de greutate

Fie un arc de curbă AB care reprezintă un corp material filiform, adică de dimensiuni transversale foarte mici faţă de lungimea $s_B - s_A$ a arcului AB. Fie o funcţie $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ dată de $\rho = \rho(s)$, numită densitate sau masă specifică, unde $\mathbb{E} = [s_A, s_B]$, care are proprietatea că masa unui element de arc de lungime $ds > 0$ este $dm = \rho ds$. Se arată în mecanică că centrul de greutate G al corpului unidimensional reprezentat de arcul AB are coordonatele:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{AB} x\rho(s)ds}{\displaystyle\int_{AB}\rho(s)ds}, y_G = \frac{\displaystyle\int_{AB} y\rho(s)ds}{\displaystyle\int_{AB}\rho(s)ds}, z_G = \frac{\displaystyle\int_{AB} z\rho(s)ds}{\displaystyle\int_{AB}\rho(s)ds},$$

Aici apar integralele curbilinii în raport cu abscisa curbilinie; în aceste integrale limitele sunt luate astfel încât ds este pozitiv dacă $s_A < s_B$.

7.2.6 Interpretarea geometrică

Vom da, în continuare, interpretarea geometrică a integralei curbilinii în raport cu arcul, în cazul plan. Am văzut ca integrala definita $\int_a^b f(x)dx$ a unei funcţii reale şi pozitive poate fi interpretată geometric ca fiind aria unui trapez curbiliniu, hasurat ca în (Fig. 7.8 stânga). Similar, integrala curbilinie

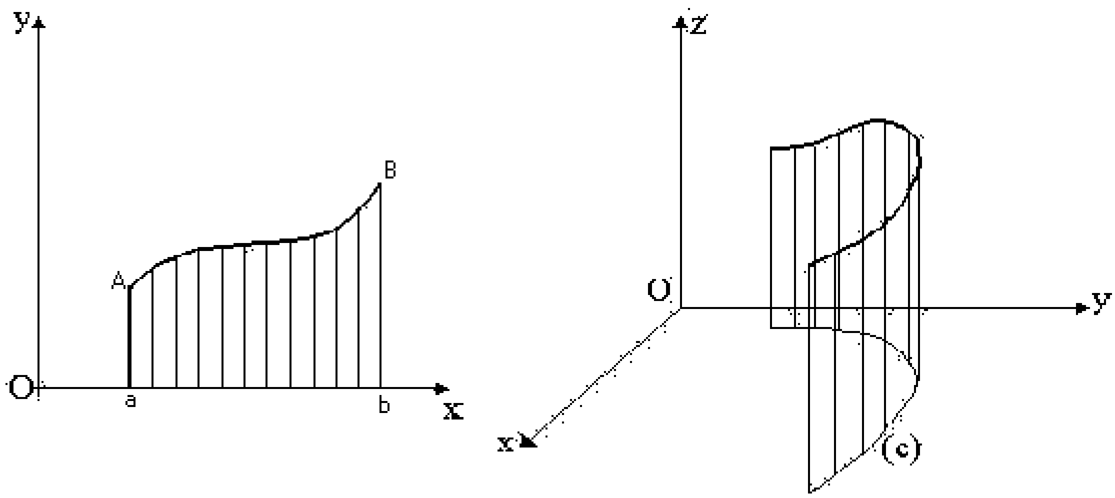

Fig. 7.8:

de primul tip (adică în raport cu arcul s) $\int_{AB} F(x,y)ds$ a unei funcţii reale F cu $F(x,y) > 0$, pentru orice $(x,y) \in (c)$ poate fi interpretată ca fiind egală cu aria unei porţiuni dintr-o suprafaţă cilindrică hasurată ca în (Fig. 7.8 dreapta).

Capitolul 8

Integrala dublă

8.1 Scurtă inroducere în subiect.

Noţiunea de integrală, care a fost definită pentru funcţii de o variabila, poate fi usor extinsa pentru funcţii de mai multe variabile, funcţii definite în $D \subset \mathbb{R}^n$.

Vom considera întâi cazul $n = 2$. Fie deci o funcţie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu din planul xOy, care este limitat de o curbă (c), formată dintr-un număr finit de arce cu tangentă determinată şi care variază continuu pe fiecare arc. Astfel de arce se mai numesc arce netede; curba (c) se mai numeşte netedă pe porţiuni (Fig.8.1). Se formează astfel domeniile de subdiviziune

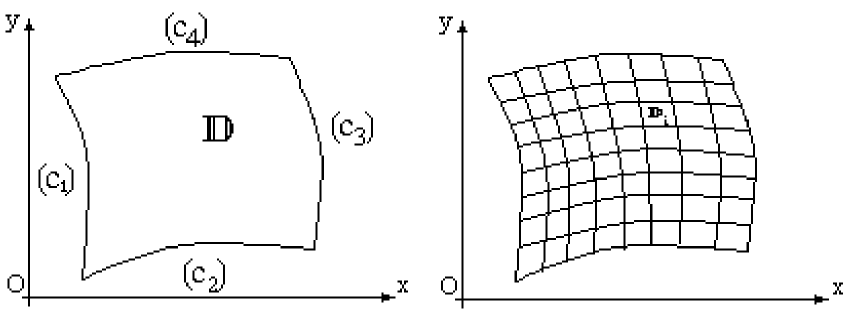

Fig. 8.1:

$\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, ..., \mathbb{D}_p$ de arii $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_p$ şi avem evident $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + ... + \Omega_p$. Fie o diviziune (d) a lui $\mathbb{D}$. Fiecare domeniu de subdiviziune $\mathbb{D}_i$ are punctele la distanţă finită şi mulţimea distanţelor dintre două puncte oarecare ale lui $\mathbb{D}_i$ admite o margine superioară ℓ_i. Deci se poate spune că D_i este inclus ntr-un cerc de diametru ℓ_i. Fie $\ell(d)$ maximul diametrelor $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p$ ale diametrilor diviziunii (d). Vom numi norma a diviziunii (d) numărul pozitiv $\ell(d)$. Aşa cum problema ariei unui trapez curbiliniu ne-a condus la noţiunea de integrală definită simplă, problema similara a unei bare cilindrice ne va conduce la o nouă noţiune aceea de integrală (definită) dublă. Astfel se consideră un corp (V), care la partea de sus este mărginit de suprafaţa:

$$z = f(x, y) \tag{8.1}$$

lateral - de o suprafaţă cilindrică, cu generatoarele paralele cu axa Oz şi în

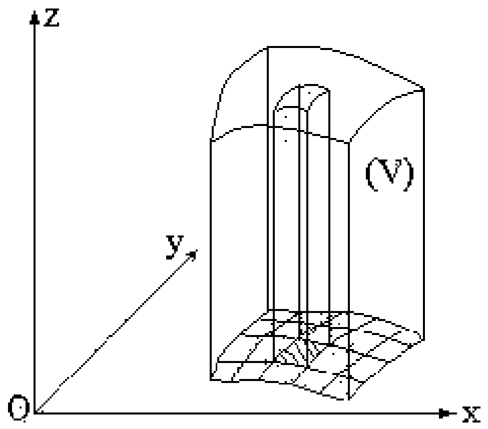

Fig. 8.2:

sfârsit, la partea de jos - de o figură plană $(\mathbb{D})$ situată în planul xOy (Fig. 8.2). Se cere să se găsească volumul V al corpului. Pentru rezolvarea acestei probleme, vom recurge la metodă obişnuită în calculul integral, constând în descompunerea mărimii căutate în părţi elementare, aproximarea fiecarei părţi, însumarea lor şi după aceea trecerea la limită. În acest scop vom descompune domeniul $\mathbb{D}$ printr-o retea de curbe, în părţile $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, ..., \mathbb{D}_p$ şi vom considera suma coloanelor cilindrice care au ca bază aceste domenii parţiale şi care în ansamblul lor formează corpul dat. Pentru calculul volumelor diferitelor coloane, să luăm în mod arbitrar în fiecare figură $\mathbb{D}_i$ câte un punct (ξ_i, η_i). Dacă se consideră cu aproximaţie fiecare coloană ca un adevarat cilindru cu înălţimea egală cu valoarea $f(\xi_i, \eta_i)$, volumul fiecarei coloane este egal aproximativ cu $f(\xi_i, \eta_i)\Omega_i$, în care Ω_i înseamnă aria figurii $(\mathbb{D}_i)$. În acest caz, expresia aproximativă a volumului întrgului corp va fi:

$$V \approx \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i)\Omega_i, \tag{8.2}$$

Pentru a mării exactitatea acestei relaţii(a lui V) vom micşora domeniile ariilor $\mathbb{D}_i$, mărind numărul lor. La limită, când cele mai mari dintre diametrele tuturor domeniilor $\mathbb{D}_i$ tinde către zero, această relaţie devine exactă, aşa că:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}\Omega_i^{(n)} \tag{8.3}$$

iar problema este rezolvată. O limită de acest gen este tocmai integrala dublă a funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul $\mathbb{D}$; ea se notează cu simbolul: $\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)d\Omega$, deci formula (8.3) a volumului se reprezinta n forma:

$$V = \iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)d\Omega, \tag{8.4}$$

Aşadar, integrala dublă este o generalizare a noţiunii de integrală definită simplă la cazul funcţiilor de două variabile. Ea joaca un rol important şi în determinarea diferitelor mărimi geometrice şi fizice.

8.2 Definiţia sumelor integrale ale lui Darboux.

Vom presupune că f este marginită pe $\mathbb{D}\cup(c)$, adică există numerele reale P, Q astfel ca $P \le f(x,y) \le Q$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{D}\cup(c)$. Fie atunci M_i marginea superioară şi m_i marginea inferioară ale lui $f(x,y)$ pe $D_i \cup (c_i)$, unde (c_i) este frontiera lui D_i. Vom defini sumele lui Darboux prin analogie cu definitia de la integrala simpla luând:

$$s(d) = \sum_{j=1}^{p} m_j\Omega_i, \quad S(d) = \sum_{j=1}^{p} M_j\Omega_i. \tag{8.5}$$

8.2.1 Proprietati ale sumelor lui Darboux.

Proprietatea 1. Avem $s(d) \le S(d)$, pentru orice diviziune (d).
Proprietatea 2. Dacă se consideră o diviziune (d') a lui $\mathbb{D}$, care este mai fina decât diviziunea (d), adică o diviziune care poate conserva unele domenii D_i şi provine din diviziunea celorlalte prin curbe de împărţire, sau scriind $d \subset d'$, atunci avem:

$$s(d) \le s(d'); S(d') \le S(d)$$

Proprietatea 3. Fiind date două diviziuni oarecari d şi d' ale aceluiaşi domeniu vom avea:

$$s(d') \le S(d) sis(d) \le S(d'),$$

deci orice sumă Darboux superioară este mai mare decât orice suma Darboux inferioară.
Proprietatea 4. Mulţimea sumelor $s(d)$ relative la toate diviziunile lui $\mathbb{D}$

este marginită inferior, deci admite o margine inferioară **i**, deoarece $s(d) \leq Q\sum_{j=1}^{p}\Omega_j = Q\Omega$. Multimea sumelor $S(d)$ relative la toate diviziunile lui $\mathbb{D}$ este marginită superior, deci admite o margine superioara **I**, deoarece $P\Omega \leq P\sum_{j=1}^{p}\Omega_j = S(d)$.

Proprietatea 5. Avem $\mathbf{i} \leq \mathbf{I}$.

Proprietatea 6. Dacă M este marginea superioară a lui f în $\mathbb{D} \cup (c)$, şi m este marginea inferioară a lui f n $\mathbb{D} \cup (c)$, avem:

$$m\Omega \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{I} \leq M\Omega$$

Se demonstrează la fel ca la integrala simplă:

Teorema 1. Fie $\varepsilon > 0$; lui îi corespunde un $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru toate diviziunile (d) pentru care $\ell(d) < \eta(\varepsilon)$, să avem:

$$0 < S - \mathbf{I} < \varepsilon, 0 < \mathbf{i} - s < \varepsilon$$

Corolar. Fie un sir infinit de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale lui $\mathbb{D}$ astfel ca pentru diviziunea d_n să avem domeniile partiale $D_1^{(n)}, D_2^{(n)}, ..., D_p^{(n)}$ şi fie $(\ell(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ şirul normelor corespunzătoare. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} s(d_n) = \mathbf{i}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S(d_n) = \mathbf{I}$.

8.3 Definiţia integralei duble.

Funcţia f(x, y) este integrabilă pe $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup (c)$ dacă avem $\mathbf{i} = \mathbf{I}$.
Daca acest lucru are loc, atunci valoarea comună se notează prin:

$$\iint_{(\overline{\mathbb{D}})} f(x,y)d\Omega, sau \iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)d\Omega,$$

şi se numeşte integrala dublă a lui f relativă la domeniul $\overline{\mathbb{D}}$ (sau la domeniul $\mathbb{D}$). Simbolul $d\Omega$ are semnificaţia unui element de arie şi însăşi notaţia propusă reaminteşte formarea sumelor integrale. Aceasta notaţie este justificată în special de teorema următoare:

Teorema 2. Fie punctele $P_j^{(n)} \in \mathbb{D}_j^{(n)}$. Dacă funcţia f este integrabilă pe $\mathbb{D}$, atunci limita sumei integrale a lui Riemann:

$$\sigma(d_n) = \sum_{j=1}^{p_n} f(P_j^{(n)})\Omega_i^{(n)}$$

(în care $\Omega_i^{(n)}$ este aria lui $\mathbb{D}_i^{(n)}$) atunci când $n \to \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, este egală cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(d_n) = \mathbf{i} = \mathbf{I} = \iint_{(D)} f(x,y)d\Omega,$$

<u>Observaţie</u>. Uneori integrala dublă se notează tot cu un singur semn $\int$ pentru simplificarea scrisului. Deci se poate scrie:

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} = \int_{(D)} f(x,y)d\Omega,$$

La fel ca pentru integrala simplă putem da următorul criteriu de integrabilitate:
Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia f să fie integrabilă pe $\mathbb{D}$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să se găsească o diviziune d a lui $\mathbb{D}$ astfel ca $S(d) - s(d) < \varepsilon$. $\lceil$Într-adevăr, avem $0 \leq \mathbf{I} - \mathbf{i} \leq S(d) - s(d) < \varepsilon$. Cum ε este arbitrar de mic rezulta $\mathbf{I} = \mathbf{i}\rfloor$.
Consecinţă. Ştiind că o funcţie f continuă pe $\mathbb{D}$ (compact) este uniform continuă adică pentru orice $\varepsilon > 0$, corespunde un $\eta(\varepsilon)$ astfel încât $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$ dacă $\|P - P'\| < \eta(\varepsilon)$. Am notat prin P punctul de coordonate (x, y) si prn P' punctul de coordonate (x', y'). Utilizând acest rezultat se demonstrează:
<u>Teorema</u> 3. Orice funcţie continuă pe $\mathbb{D}$ este integrabilă pe acest domeniu.
$\lceil$Într-adevăr, fie diviziunea (d_n) şi fie punctele $P_i^{(n)}$ şi $P_i^{'(n)} \in \mathbb{D}_i^{(n)}$, pentru care avem $M_i(n) = f(P_i(n)), m_i(n) = f(P_i^{'(n)})$, adică pentru care funcţia îşi atinge maximul sau minimul în $\mathbb{D}_i^{(n)}$. Avem:

$$S(d_n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(P_i^{(n)})\Omega_i^{(n)}, s(d_n) = \sum_{i=1}^{p_n} f(P_i^{'(n)})\Omega_i^{(n)},$$

deci $S(d_n) - s(d_n) = \sum\limits_{i=1}^{p_n} [f(P_i^{(n)}) - f(P_i^{'(n)})]\Omega_i^{(n)}$ şi $S(d_n) - s(d_n) < \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{p_n} \Omega_i^{(n)} = \varepsilon\Omega$ dacă $\ell(d_n) < \eta(\varepsilon)$. Rezultă că funcţia f este integrabilă $\rfloor$

8.4 Un mod particular de împărţire a domeniului.

Fiind dat domeniul $\mathbb{D}$, putem face împărţirea sa în domeniile $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, ..., \mathbb{D}_p$ prin paralele la axele de coordonate. Fie $x = x_j (j = 1, ..., q)$ si $y = y_k (k = 1, ..., r)$ ecuaţiile acestor paralele. Să presupunem că frontiera (c) este tăiata numai în două puncte de o paralelă la axa Ox şi la fel de o paralelă la axa Oy. Fie $[\alpha, \beta]$ intervalul de variaţie al abscisei unui punct $P(x, y)$ al frontierei şi $[\gamma, \delta]$ acela al variaţiei ordonatei sale când $P(x, y)$ parcurge frontiera (Fig.8.3)

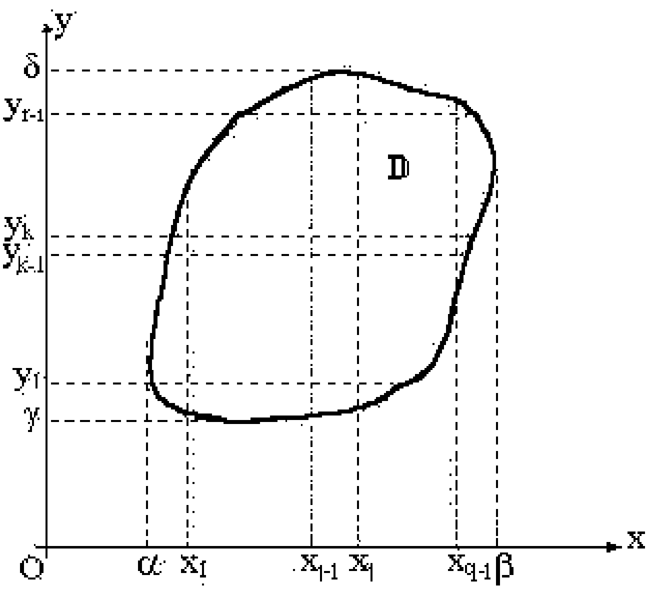

Fig. 8.3:

Dacă un dreptunghi definit de inegalităţile: $x_{j-1} < x < x_j$, $y_{k-1} < y < y_k$ este complet interior lui $\mathbb{D}$, aria sa este egală cu $(x_{j-1}-x_j)(y_{k-1}-y_k)$ şi în suma $s(d)$ a lui Riemann el figurează prin termenul: $f(P_{jk})(x_{j-1}-x_j)(y_{k-1}-y_k)$, unde P_{jk} este un punct arbitrar luat în acest dreptunghi. Există însă şi dreptunghiuri tăiate de frontieră. Contribuţia lor în suma integrală $s(d)$ poate fi uşor majorată. Avem $|f(P_{jk})| \leq M$, unde M este marginea superioară a lui $|f(x,y)|$ pe $\mathbb{D} \cup (c)$, iar suma ariilor acestor dreptunghiuri este mai mică decât: $2[(\beta-\alpha)\ell(d) + (\delta-\gamma)\ell(d)]$. Într-adevăr aici $\ell(d)$ este maximul diagonalelor dreptunghiurilor diviziunii, atât a celor complet interioare cât şi a celor tăiate de frontiera. Deci $\ell(d)$ este mai mare ca cea mai mare latură a dreptunghiurilor, deci cu cea mai mare înălţime, fie că socotim bazele paralele cu Ox sau cu Oy. Astfel contribuţia dreptunghiurilor tăiate de frontieră în suma integrală $s(d)$ este majorata n modul de $2M[(\beta-\alpha)+(\delta-\gamma)]\ell(d)$ şi ea tinde la zero pentru şirul de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$. Prin urmare în suma integrala $\sigma(d_n)$ putem să includem sau nu aceste dreptunghiuri. Dacă funcţia f este integrabilă, avem deci:

$$\iint_{(D)} f(x,y)d\Omega = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{q_n} \sum_{k=1}^{r_n} f(P_{jk}^{(n)})(x_{j-1}^{(n)} - x_j^{(n)})(y_{k-1}^{(n)} - y_k^{(n)}),$$

unde $x_j^{(n)}, y_k^{(n)}$ sunt puncte de diviziune ale intervalelor $[\alpha,\beta]$ si $[\gamma,\delta]$ în diviziunea d_n, iar $P_{jk}^{(n)}$ un punct al dreptunghiului determinat de $[x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$ şi $[y_{k-1}^{(n)}, y_k^{(n)}]$, care apartin în acelaşi timp lui $\mathbb{D} \cup (c)$ (pentru ca frontiera să fie definită în acest punct), cu condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(z_n) = 0$.

8.5 Noua definiţie şi notaţie a integralei duble.

Ca urmare a relaţiei precedente se obişnuieste a se reprezenta integrala dubla şi prin relaţia simbolică:

$$I = \iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy. \tag{8.6}$$

Pericolul acestei notaţii, sugestive, este acela că punând $d\Omega = dxdy$ pentru a reprezenta aria unui dreptunghi cu laturile reprezentate de vectorii $(dx, 0)$, $(0, dy)$, paraleli respectiv cu Ox şi cu Oy, se face uneori confuzia de a crede că avem de-a face cu produsul diferenţialelor lui x şi y în lungul aceleiaşi curbe; atunci când în realitate este vorba de două deplasări, în două direcţii perpendiculare, una $y = const.$, iar cealaltă $x = const.$ Mai corect ar fi de a scrie: $d\Omega = d_1xd_2y$, dar ar complica în mod inutil notaţia.

8.6 Proprietăţile integralelor duble.

Proprietatea 1. Dacă $f(x, y)$ şi $g(x, y)$ sunt integrabile pe $\mathbb{D}$, atunci şi $f(x, y) \pm g(x, y)$ sunt integrabile pe $\mathbb{D}$ şi avem:

$$\iint_{(\mathbb{D})} [f(x, y) \pm g(x, y)]dxdy = \iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy \pm \iint_{(\mathbb{D})} g(x, y)dxdy \tag{8.7}$$

Proprietatea 2. Dacă λ este o constantă, avem:

$$\iint_{(\mathbb{D})} \lambda f(x, y)dxdy = \lambda \iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy \tag{8.8}$$

Proprietatea 3. Dacă domeniul $\mathbb{D}$ este împărţit în două domenii $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$, printr-un arc de curbă c_0 format dintr-un număr finit de arce netede, atunci(Fig. 8.9):

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy = \iint_{(\mathbb{D}_1)} f(x, y)dxdy + \iint_{(\mathbb{D}_2)} f(x, y)dxdy \tag{8.9}$$

Proprietatea 4. (Formula mediei). Dacă M si m sunt respectiv marginea superioară şi marginea inferioară a lui f pe $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup (c)$, atunci:

$$m\Omega \le \iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy \le M\Omega \tag{8.10}$$

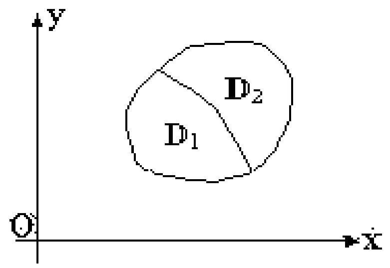

Fig. 8.4:

Prin urmare:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \mu\Omega, \tag{8.11}$$

unde $m \le \mu \le M$. În particular dacă $f(x,y)$ este continuă pe $\mathbb{D}$, atunci exista un punct $(\xi,\eta) \in \mathbb{D}$ pentru care $f(\xi,\eta) = \mu$. În acest caz avem:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\Omega, \tag{8.12}$$

Aceasta este formula mediei.
Observaţie: Dacă $f(x,y) = 1$ pe $\mathbb{D}$, atunci:

$$\iint_{(\mathbb{D})} dxdy = \Omega, \tag{8.13}$$

Proprietatea 5. (O formulă de majorare). Dacă $f(x,y)$ este integrabilă pe $\mathbb{D}$, atunci şi $|f(x,y)|$ este integrabilă pe $\mathbb{D}$ şi avem:

$$|\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy| \le \iint_{(D)} |f(x,y)|dxdy \tag{8.14}$$

8.7 Calculul integralelor duble.

Cazul $\mathbb{D}$ interval bidimensional.

Vom considera mai întâi $\mathbb{D} = \{(x,y)|\alpha \le x \le \beta,\ \delta \le y \le \gamma\}$ care este un interval bidimensional(un dreptunghi)(Fig.8.5). Fie diviziunea (d) realizata prin împărţirea intervalelor $[\alpha,\beta]$ si $[\gamma,\delta]$ cu ajutorul punctelor $\{\alpha = x_0, x_1, ..., x_{j-1}, x_j, ..., x_{q-1}, x_q = \beta\}$ şi $\{\gamma = y_0, y_1, ..., y_{k-1}, y_k, ..., y_{r-1}, y_r = \delta\}$.
$\alpha = x_0 \le x_1 \le ... \le x_{j-1} \le x_j \le ... \le x_{q-1} \le x_q = \beta$
$\gamma = y_0 \le\le y_1 \le ... \le y_{k-1} \le y_k \le ... \le y_{r-1} \le y_r = \delta.$

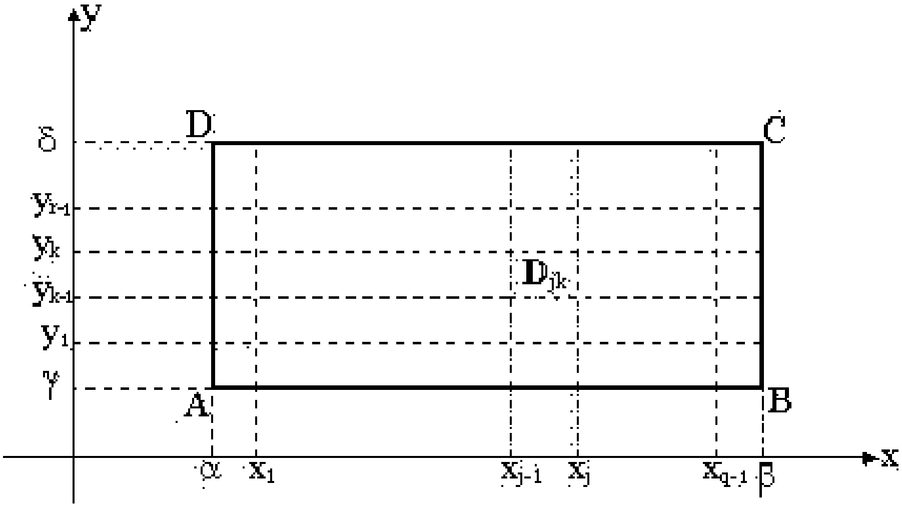

Fig. 8.5:

Formăm sumele $S(d)$ şi $s(d)$. Vom nota prin M_{jk} şi m_{jk} marginea superioară şi marginea inferioară a lui $f(x,y)$ în dreptunghiul $\mathbb{D}_{jk}$ definit prin: $x_{j-1} \le x \le x_j$, $y_{k-1} \le y \le y_k$.
Avem:
$s(d) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} m_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1});$
$S(d) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$
Integrând între y_{k-1} şi y_k în inegalitatea $m_{jk} \le f(x,y) \le M_{jk}$, obţinem: $m_{jk}(y_k - y_{k-1}) = \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x,y)dy \le M_{jk}(y_k - y_{k-1})$, pentru orice $x \in [x_{j-1}, x_j]$.
Scriind relaţiile de mai sus pentru $k = 1, 2, ..., r$ şi adunându-le deducem: $\sum_{k=1}^{r} m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \le (\int_{\gamma}^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + ... + \int_{y_{r-1}}^{\delta})f(x,y)dy \le \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(y_k - y_{k-1})$.
Prin urmare:
$\sum_{k=1}^{r} m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \le \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy \le \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(y_k - y_{k-1}),$
pentru orice $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Dacă funcţia F de variabilă x reprezentată de integrala cu parametru x: $F(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy$, este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, atunci avem:

$\sum_{k=1}^{r} m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \leq F(x) \leq \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(y_k - y_{k-1}),$
pentru orice $j = 1, ..., q$. Deci conform cu formulele de majorare de la integralele simple:
$(x_j - x_{j-1}) \sum_{k=1}^{r} m_{jk}(y_k - y_{k-1}) \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x)dx \leq (x_j - x_{j-1}) \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(y_k - y_{k-1})$
Dând lui j valorile $1, 2, ..., q$ şi adunând se deduce:

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} m_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx \leq \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} M_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

La limita, vom avea:
$\mathbf{i} = \lim_{n\to\infty} s(d_n) \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy)dx = \lim_{n\to\infty} S(d_n) = \mathbf{I},$
adică:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} [\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy]dx \tag{8.15}$$

care se mai notează cu:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy \tag{8.16}$$

Pe figura 8.6 rezultatul se reţine uşor considerând un x fixat şi o creştere dx dată. Se formeaza o fâsie pe care se integrează faţă de y. Înmulţind rezultatul cu dx se obţine: $dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy$. Se însumează apoi contribuţia tuturor fâsiilor pentru α şi β. Dăm şi o interpretare geometrică sugestivă:

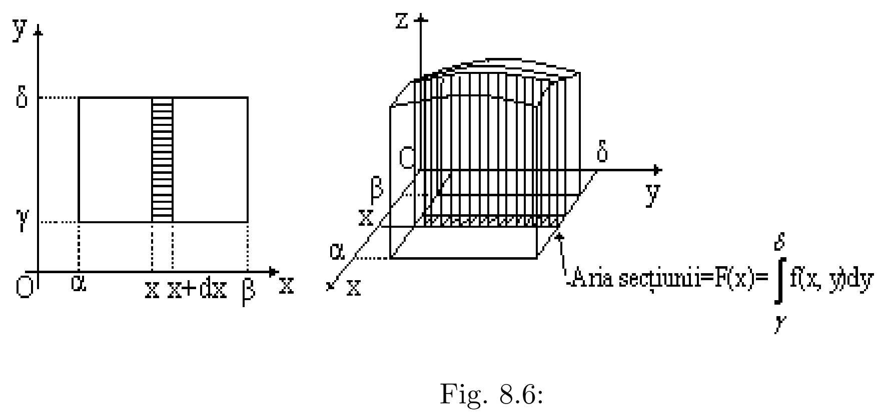

Fig. 8.6:

Observaţie importantă. Axele Ox şi Oy jucând un rol simetric putem scrie la fel:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} [\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx]dy \tag{8.17}$$

ceeace revine la considerarea unei fâşii paralele cu Ox pe care se integreaza în raport cu x. Înmulţind rezultatul cu dy, se integrează apoi toate fâşiile obţinute făcând pe y să varieze ntre γ şi δ. Avem deci egalitatea:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx \tag{8.18}$$

care de fapt reprezintă o altă notaţie. Prin urmare integrala dublă se mai

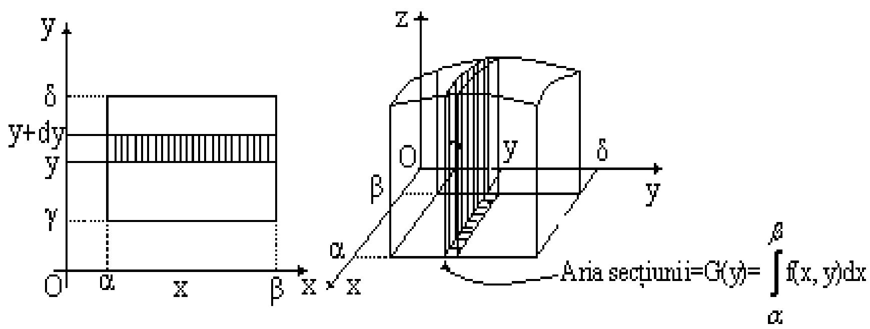

Fig. 8.7:

poate obţine calculând mai întâi integrala în raport cu x, $G(y) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx$, iar apoi rezultatul în raport cu y.
Exemplu:
Fie $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbb{D} = [0,1] \times [0,2]$, adică $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$. Avem:
$\mathbf{I} = \displaystyle\iint_{(\mathbb{D})} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y^2)dy = \int_0^1 (2x^2 + \frac{8}{3})dx = \frac{10}{3}$ şi
$\mathbf{I} = \displaystyle\iint_{(\mathbb{D})} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+y^2)dx = \int_0^2 (\frac{1}{3} + y^2)dy = \frac{10}{3}.$

Cazul general.

Presupunem că domeniul $\mathbb{D}$ este limitat de un număr finit de arce care limitează domeniul şi constituie conturul (c), astfel ca o paralelă la axa Oy să taie frontiera numai în două puncte cu excepţia unor porţiuni de frontieră, segmente de dreaptă paralele cu Oy(Fig.8.8). Fie $y = \varphi_1$, ecuaţia ce desemnează arcele $AE + EB$ si $y = \varphi_2$, ecuaţia ce desemnează arcele $AF + FDC$, cu $\alpha \leq x \leq \beta$. Am notat prin α şi β valorile extreme luate de x atunci cnd se parcurge frontiera. Fie la fel γ şi δ valorile extreme luate de y atunci cnd se parcurge aceeaşi frontieră. Domeniul este inclus în intervalul bidimensional: $\mathbb{I}_2 = \{(x, y) | \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\}$.

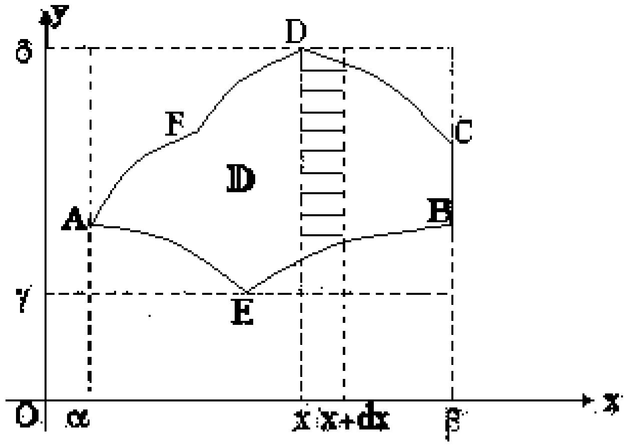

Fig. 8.8:

<u>Teorema</u> 4. Dacă funcţia $f(x, y)$ este mărginită şi integrabilă pe $\mathbb{D}$, dacă există integrala, cu parametru x:

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

pentru orice $x \in [a, b]$ şi dacă $F(x)$ este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, atunci avem relaţia:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy] dx \tag{8.19}$$

care se mai mai notează cu:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \tag{8.20}$$

Prin urmare integrala dublă se obţine calculând întâi integrala simplă: $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, pentru x fixat, $x \in [\alpha, \beta]$ şi apoi integrând pe $F(x)$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$

$\lceil$ Fie $g : \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ dacă } (x, y) \in \mathbb{D} \cup \underline{(c)} = \overline{\overline{\mathbb{D}}} \\ 0 \text{ , dacă } (x, y) \in \mathbb{I}_2 - \overline{\overline{\mathbb{D}}} \end{cases}$$

Funcţia $g(x,y)$ este integrabilă pe $\mathbb{I}_2$ căci ea este integrabilă pe $\mathbb{D}$ şi de asemenea, fiind nulă, este integrabilă pe $\mathbb{I}_2 - \overline{\mathbb{D}}$. Avem deci: $J = \iint_{(\mathbb{I}_2)} g(x,y)dxdy =$ $\iint_{(\mathbb{D})} g(x,y)dxdy + \iint_{(\mathbb{I}_2-\mathbb{D})} g(x,y)dxdy = \iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy$. Dar pentru un $x \in [\alpha,\beta]$ dat, avem:

$$\int_{\gamma}^{\delta} g(x,y)dy = \int_{\gamma}^{\varphi_1(x)} g(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{\delta} g(x,y)dy$$

si conform definiţiei lui g, această funcţie este nulă pe $\mathbb{I}_2 - \mathbb{D}$, deci: $\int_{\gamma}^{\delta} g(x,y)dy =$ $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, de unde rezulta formula (8.19) sau (8.20)$\rfloor$.

Observaţii:

1. Dacă $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{D}$, atunci toate condiţiille din enunţ sunt realizate. În stabilirea limitelor, se fixează x şi se descrie fâşia de bază dx cuprinsă între ordonatele $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$. Apoi se consideră toate fâşiile paralele, pentru care x ia valori între α şi β. Se mătură astfel întreg domeniu $\mathbb{D}$. Putem da şi o interpretare geometrică sugestivă ca aceea din Fig. 8.6.

2. Consideraţii analoage se aplică dacă domeniul $\mathbb{D}$ are o frontiera (c) for-

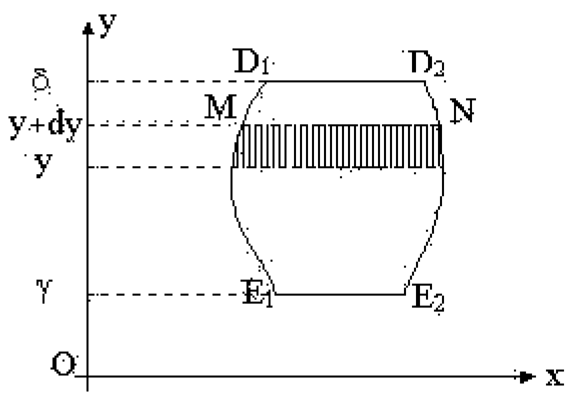

Fig. 8.9:

mată din arce astfel ca o paralelă la axa Ox să o taie numai în două puncte, cu excepţia unor porţiuni de frontieră formate din segmente de dreaptă paralele cu Oy (Fig.36). Dacă $x = \psi_1(y)$ este ecuaţia arcului E_1MD_1, $x = \psi_2(y)$ ecuaţia arcului E_2MD_2,cu $\gamma \le y \le \delta$; Aici γ si δ sunt valorile extreme luate de y atunci când se parcurge frontiera din figura (8.9). Axele jucnd un rol similar putem enunţa teorema următoare:

Teorema 5. Dacă funcţia $f(x,y)$ este marginită şi integrabilă pe $\mathbb{D}$, dacă există integrala:

$$G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

pentru orice $x \in [\gamma, \delta]$ şi dacă $G(y)$ este integrabilă pe $[\gamma, \delta]$, atunci avem relaţia:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} [\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx]dy, \tag{8.21}$$

care se mai notează cu:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{8.22}$$

Prin urmare integrala dublă se obţine calculând întâi integrala simplă: $G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, pentru y fixat, $y \in [\gamma, \delta]$ şi apoi integrând pe $G(y)$ pe intervalul $[\gamma, \delta]$. În stabilirea limitelor, se fixează y şi se descrie fâşia de bază dy cuprinsă între abscisele $\psi_1(y)$ şi $\psi_2(y)$. Apoi se consideră toate fâşiile paralele, pentru care y ia valori între γ şi δ. Se mătură astfel întreg domeniu $\mathbb{D}$. Putem de asemeni da şi o interpretare geometrică sugestivă ca aceea din Fig. 8.7.

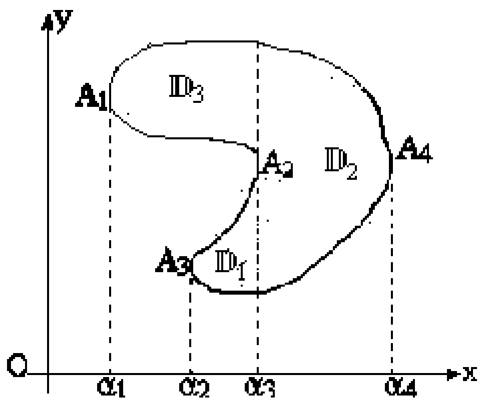

Fig. 8.10:

Dacă domeniile nu au frontieră (c) care să îndeplinească condiţiile menţionate anterior, aşa cum avem de exemplu în figura (8.10). Domeniul se descompune în trei subdomenii $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$,care îdeplinesc condiţiile ca paralele duse la axa Oy să le taie respectivele frontiere numai în două puncte (cu excepţia segmentelor frontieră de forma unor segmente paralele cu axa Oy). Deci:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \iint_{(\mathbb{D}_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(\mathbb{D}_2)} f(x,y)dxdy + \iint_{(\mathbb{D}_3)} f(x,y)dxdy$$

şi pentru ficare integrală din membrul al doilea se va putea aplica o formula analoagă cu (8.19), ţinând seama de arcele: $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$.

8.8 Formula lui Green.

Ca aplicaţie ăa reluăm domeniul $\mathbb{D}$, astfel ca frontiera sa să îndeplinească condiţia de a nu fi tăiată de o paralelă la axa Oy decât în două puncte, cu excepţia segmentelor paralele cu Oy, ca de exemplu BC (Fig. 8.8). Fie $y = \varphi_1(x)$ ecuaţia arcului AEB şi $y = \varphi_2(x)$ ecuaţia arcului $AFDC$ cu $\alpha \leq x \leq \beta$. Vom considera o funcţie P:D ?R continua si cu derivatele partiale continuie n D, cu valori reale, P(x, y) pentru (x, y)?D , si vom alege functia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ca definită prin: $f(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}$. Aplicând formula (8.19) obţinem:

$$I_1 = \iint_{(\mathbb{D})} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dy$$

Prin urmare:

$$I_1 = \int_\alpha^\beta [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))]dx$$

Dar,

$$\int_\alpha^\beta P(x, \varphi_2(x))dx = \int_{AFDC} P(x, y)dx = -\int_{CDFA} P(x, y)dx,$$

$$\int_\alpha^\beta P(x, \varphi_1(x))dx = \int_{AEB} P(x, y)dx.$$

Observând că pe segmentul BC avem $x = constant$, deci $dx = 0$, rezultă formula:

$$\iint_{(\mathbb{D})} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = -\oint_{(c)} P(x, y)dx, \tag{8.23}$$

unde în membrul al doilea figurează interala curbilinie luată pe conturul închis (c), frontiera lui $\mathbb{D}$, parcursă în sensul direct, sensul care lasă domeniul D la stânga. Formula se aplică evident la fel pentru un domeniu $\mathbb{D}$ care poate fi împărţit în mai multe domenii înndeplinind condiţiile precedente, ca de exemplu cel din figura 8.9. În mod analog, în cazul domeniilor pentru care este valabila formula (8.21), adică a căror frontieră este tăiată numai în câte două puncte de o paralelă la axa Ox (Fig. 8.9), astfel ca frontiera sa fie formata din arcele E_1MD_1 si E_2ND_2 de ecuaţii $x = \psi_1(y)$ si $x = \psi_2(y)$ şi de segmentele E_1E_2 şi D_1D_2 să considerăm funcţia: $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continuă şi cu derivatele parţiale de ordinul unu continuie în $\mathbb{D}$, cu valori reale, $Q(x, y)$, pentru $(x, y) \in \mathbb{D}$, şi vom alege functia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Aplicâ nd formula (8.17) obţinem:

$$I_2 = \iint_{(\mathbb{D})} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dx$$

Prin urmare:

$$I_2 = \int_{\gamma}^{\delta} [Q(\psi_2(y), y)) - Q(\psi_1(y), y))]dy$$

Dar,

$$\int_{\gamma}^{\delta} Q(\psi_2(y), y))dy = \int_{E_2ND_2} Q(x, y)dy$$

$$\int_{\gamma}^{\delta} Q(\psi_1(y), y))dy = \int_{D_1ME_1} Q(x, y)dy = -\int_{E_1MD_1} Q(x, y)dy.$$

Observând că pe segmentele D_1D_2, E_1E_2 avem $y = constant$, deci $dy = 0$, rezultă formula:

$$\iint_{(\mathbb{D})} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy = \oint_{(c)} Q(x, y)dx, \tag{8.24}$$

în care integrala curbilinie este luata în sensul direct. Formula (8.24) este valabilă pentru orice domeniu $\mathbb{D}$ a cărui frontieră poate fi descompusă în subdomenii care îndeplinesc condiţii asemănătoare cu cele îndeplinite de $\mathbb{D}$ din cazul tratat. Prin scădere termen cu termen formulele (8.24) şi (8.23) obţinem formula lui Green:

$$\iint_{(\mathbb{D})} [\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)]dxdy = \oint_{(c)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{8.25}$$

valabilă pentru orice domeniu $\mathbb{D}$ a carui frontiera este formată din arce netede pe porţiuni. În formula lui Green (8.25) integrala curbilinie este luată în sens direct faţă de $\mathbb{D}$.

Aplicaţie: Să luăm $P(x, y) = -\frac{y}{2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{2}$, formula lui Green (8.25) ne conduce la:

$$\frac{1}{2} \oint_{(c)} xdy - ydx = \iint_{(\mathbb{D})} dxdy = \Omega.$$

Regăsim expresia ariei domeniului $\mathbb{D}$, cu ajutorul integralei curbilinii.

8.9 Schimbarea de variabile în integrala dublă.

Relaţiile dintre arii.

Să efectuăm schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{8.26}$$

care să realizeze transformarea punctuală a unui domeniu $\mathbb{D}'$ din planul (u,v) într-un domeniu $\mathbb{D}$ din planul (x,y) iar frontierei (c') a lui $\mathbb{D}'$(presupusă formată dintr-un număr finit de arce netede pe porţiuni) să-i corespundă frontiera (c) (de asemenea netedă pe porţiuni). Funcţiile $x(u,v)$ şi $y(u,v)$ sunt presupuse continuie şi cu derivatele de primul ordin continuie în $\mathbb{D}'$. Vom presupune că transformarea (8.26) este bijectivă, adică şi reciproc unui punct $(x,y) \in \mathbb{D}$ îi corespunde un singur punct $(u,v) \in \mathbb{D}'$. Pentru aceasta ştiim că este necesar

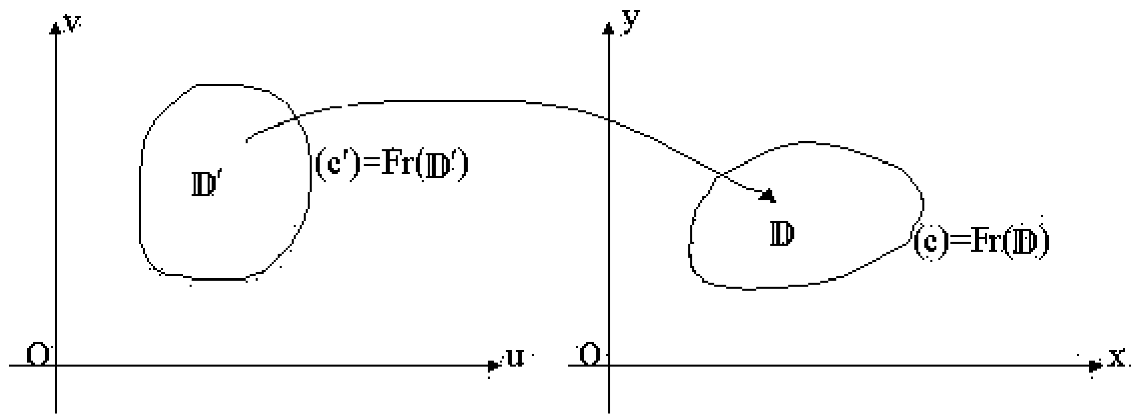

Fig. 8.11:

să avem:

$$J = det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

în $\mathbb{D}'$. Fie o diviziune (d') a domeniului $\mathbb{D}'$ în subdomeniile $\mathbb{D}'_1, \mathbb{D}'_2, ..., \mathbb{D}'_p$;ei îi corespunde prin (8.26) o diviziune (d) a domeniului $\mathbb{D}$ în subdomeniile $D_1, D_2, ..., D_p$. Aria unui domeniu $\mathbb{D}_i$, care este limitat de frontiera sa $(c_i)i = 1, ..., p$ este dată de:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\oint_{(c_i)} xdy - ydx$$

Dar avem:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

şi

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

şi atunci când (x, y) descrie curba (c_i) în sens direct, punctul (u, v) va descrie curba (c_i'), frontiera domeniului imagine. Prin urmare presupunând ca ecuaţiile parametrice ale lui (c_i') sunt: $u = u(t), v = v(t), \alpha \leq t \leq \beta$, vom avea: $x = x[u(t), v(t)],\ y = y[u(t), v(t)]$ pentru punctul corespunzător pe (c_i) şi înlocuind în expresia lui Ω_i rezultă:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\oint_{(c_i')}(x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u})du + (x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v}dv)dv,$$

sensul parcurs pe (c_i') fiind acela care corespunde sensului direct de parcurs pe (c_i), care este impus de formula ariei. Prin urmare, cu formula lui Green rezultă:

$$\Omega_i = \varepsilon\iint_{(\mathbb{D}_i')} det\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv,$$

unde $\varepsilon = +1$, dacă sensul de parcurs pe (c_i') este cel direct sau $\varepsilon = -1$, dacă sensul de parcurs pe (c_i') este opus sensului direct. Aplicâ nd teorema mediei

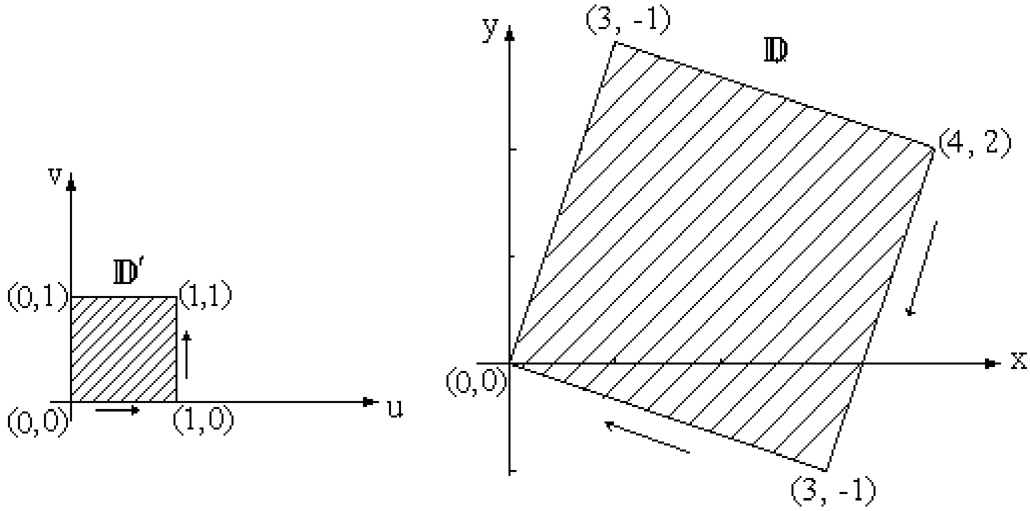

Fig. 8.12:

avem:

$$\Omega_i = \varepsilon\{\det\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\}|_{(u_i, v_i)}\Omega_i',$$

$(\varepsilon = \pm 1)$ unde $(u_i, v_i) \in \mathbb{D}_i'$. Dar ariile fiind pozitive, $\Omega_i > 0,\ \Omega_i' > 0$; rezultă că trebuie să avem $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$ după cum $J = det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ este mai mare ca zero sau mai mic ca zero. În orice caz deci:

$$\Omega_i = det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{(u_i,v_i)}\Omega_i', \tag{8.27}$$

Se deduce astfel relatia dintre arii. În acelaşi timp din consideraţiile de mai sus rezultă că: dacă $J > 0$ atunci sensul pozitiv de parcurs din planul (u,v) pe o curbă (c_i') va avea corespondent sensul pozitiv de parcurs pe imaginea ei (c_i); dacă $J < 0$, atunci sensurile de parcurs pe (c_i') şi (c_i) sunt opuse.
Exemplu: Funcţiile $x = u + 3v, y = 3u - v$, definite pe intervalul $[0,1] \times [0,1]$, transforma invers acest interval bidimensional $\mathbb{D}$ (Fig. 8.12), $u = \frac{1}{10}(x+3y)v = \frac{1}{10}(3x-y)$, cu $x \in [0,4],\ y \in [-1,3]$. Determinantul transformarii este $-\frac{1}{10}$, care este negativ.

Schimbarea de variabile.

Să considerăm suma integrală:

$$s(d) = \sum_{i=1}^{p} f(M_i)\Omega_i = \sum_{i=1}^{p} f(x_i,y_i)\Omega_i,$$

relativă la funcţia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Cu ajutorl transformarii (8.26) şi a formulei (8.27) putem scrie:

$$\sigma(d) = \sum_{i=1}^{p} f[x(u_i,v_i), y(u_i,v_i)]|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{(u_i,v_i)}\Omega_i',$$

unde $(u_i,v_i) \in \mathbb{D}_i'$. Dar în membrul al doilea avem o sumă integrală relativă la diviziunea d' a domeniului $\mathbb{D}'$ şi la funcţia $f[x(u,v),y(u,v)]|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|$ Rezultă de aici formula de schimbare de variabile în integrala dublă:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \iint_{(\mathbb{D}')} f[x(u,v),y(u,v)]|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv, \tag{8.28}$$

În aplicaţii, pentru a calcula integrala dubla din membrul al doilea al formulei (8.28) nu este nevoie să construim conturul (c') care limitează domeniul $\mathbb{D}'$ în planul Ouv. Este uneori mai simplu de a construi pe u şi v ca un sistem de coordonate curbiliniu în planul Oxy, trasând curbele $u = constant$, şi curbele $v = constant$, care împart domeniul $\mathbb{D}$ în regiuni (Fig.8.13, stânga). Dacă $u = \alpha$ şi $u = \beta$ sunt valorile extreme date lui u pentru ca $u = constant$ să taie pe (c) şi dacă ea nu taie în general pe (c) decât în două puncte, atunci conturul (c) va putea fi separat în două porţiuni APB şi AQB pe care $v = \varphi_1(u)$ sau $v = \varphi_2(u)$, presupunând $\varphi_1(u) \le \varphi_2(u)$, pentru $\alpha \le u \le \beta$. Vom avea:

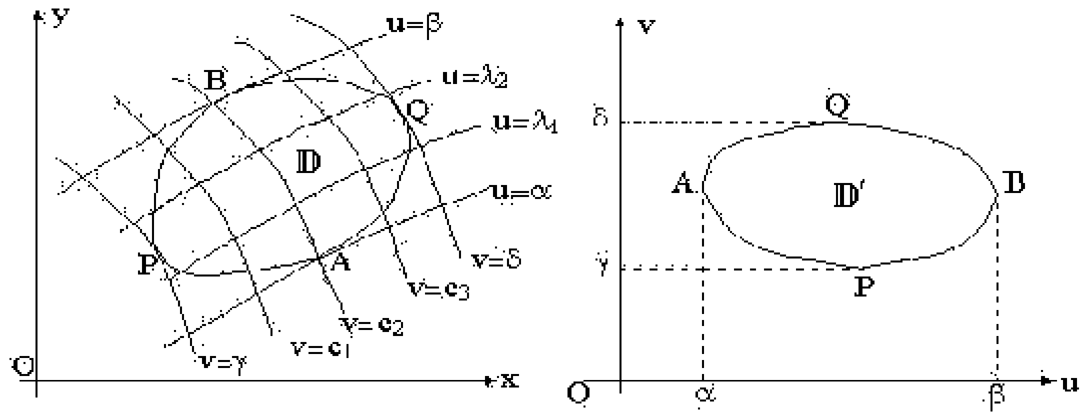

Fig. 8.13:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} du \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} f[x(u,v),y(u,v)]|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dv$$

În planul Ouv, pe care nu este nevoie să-l desenăm (construim), am avea Fig.8.13, dreapta.

8.9.1 Integrala dublă în coordonate polare.

În multe cazuri calculul integralei duble este simplificat prin schimbarea coordonatelor (x,y) ale punctului M în coordonate polare (ρ,θ), folosind relaţiile:

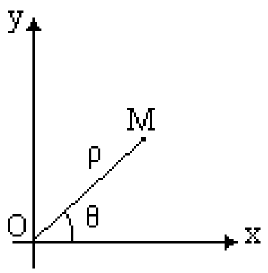

Fig. 8.14:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \theta \in [0,2\pi), \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho, dxdy = \rho d\rho d\theta \qquad (8.29)$$

Formula de trecere de la integrala în variabile (x, y) la variabilele polare (ρ, θ) devine:

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{D}'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta \tag{8.30}$$

În calculul integralei duble în coordonate polare apar două cazuri:

Punctul O se află în domeniul $\mathbb{D}$.

În acest caz orice linie de coordonate, $\theta = const.$, intersectează frontiera lui $\mathbb{D}$ numai într-un punct sau în lungul unui segment(Fig 8.15 stânga). Fie $\rho = \varrho(\theta)$ ecuaţia frontierei în coordonate polare. Atunci:

$$\iint_{\mathbb{D}} f^*(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f^*(\rho,\theta)\rho d\rho \tag{8.31}$$

cu $f^*(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

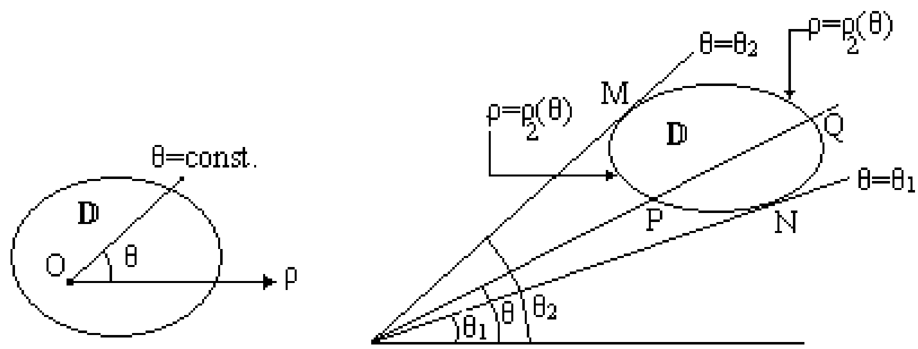

Fig. 8.15:

Punctul O se află în afara domeniului $\mathbb{D}$.

Se consideră $\mathbb{D}$ cuprins între liniile de coordonate $\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2$ şi orice linie $\theta = const. \in (\theta_1, \theta_2)$, intersectează frontiera (c) a lui $\mathbb{D}$ în cel mult două puncte de-a lungul unui segment. Punctele, de tangenţă M şi N împart (c) în două părţi:
$(MPN):\ \rho = \rho_1(\theta)$
$(MQN):\ \rho = \rho_2(\theta)$
unde $\rho_1,\ \rho_2$ sunt funcţii continuie, injective, care satisfac condiţia $\rho_1 \leq \rho_2$, pentru orice $\theta \in (\theta_1,\ \theta_2)$. Trecând la integrale iterate:

$$\iint_{\mathbb{D}} f^*(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f^*(\rho,\theta)\rho d\rho \tag{8.32}$$

Aria lui $\mathbb{D}$ se obţine pentru $f^*(\rho, \theta) = 1$, deci:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)]$$

8.10 Integrale duble improprii.

Am definit integrala dublă $\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy$ a unei funcţii reale f, definită şi mărginită pe un domeniu compact (mulţime închisă şi marginită) $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Vom extinde această definiţie mai întâi pentru cazul în care $\mathbb{D}$ nu mai este mărginit. Amintim că un domeniu plan se numeşte nemărginit dacă de exemplu el conţine puncte exterioare oricărui cerc cu centru în originea axelor de coordonate.

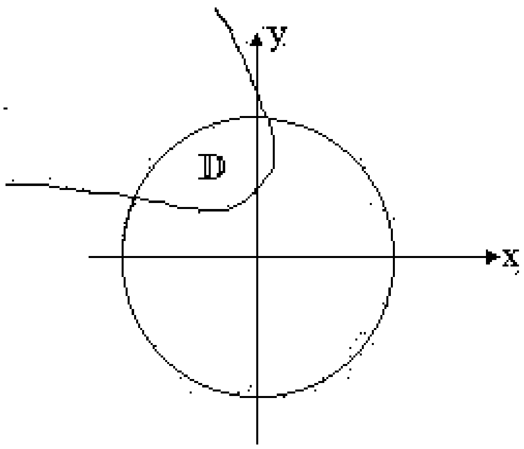

Fig. 8.16:

Dăm următoarea:
Definiţie: Fie o mulţime nemărginită $\mathbb{D}$ în plan. Spunem că $\mathbb{D}$ admite o exhaustiune dacă există un şir $(\mathbb{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mulţimi plane, compacte care au arie şi îndeplinesc condiţiile:
1) Şirul este ascendent faţă de operaţia de incluziune, adică:

$$(\mathbb{D}_n) \subset (\mathbb{D}_{n+1}), \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_n = \mathbb{D}.$$

2) Orice mulţime compactă din $\mathbb{D}$ este conţinută într-un $\mathbb{D}_n$. Dacă $\mathbb{D}$ este un domeniu plan nemărginit atunci putem realiza o exhaustiune a lui $\mathbb{D}$ în felul

următor: Considerăm un şir numeric $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ şi fie şirul de mulţimi:

$$\mathbb{K}_n = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq r_n^2\}$$

Dacă luăm $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}\cap\mathbb{K}_n$ realizăm o exhaustiune a lui $\mathbb{D}$. Avem reprezentarea grafică(Fig. 8.17 stânga):

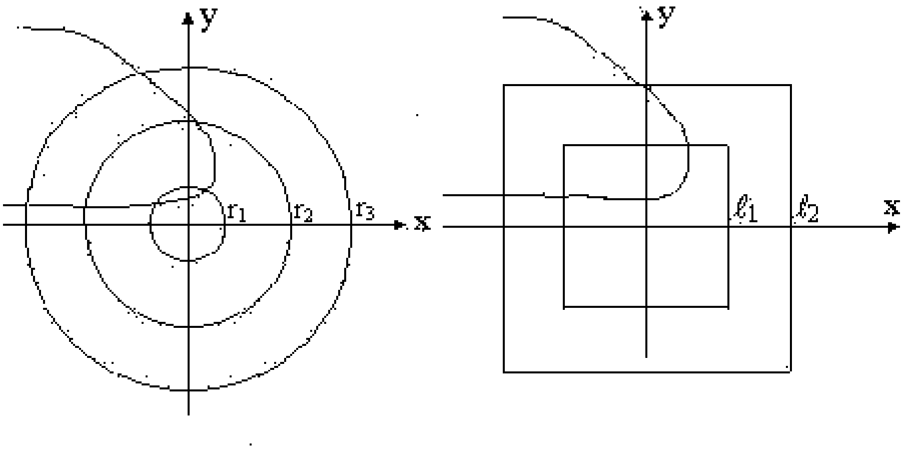

Fig. 8.17:

Putem de asemeni să luăm pătrate cu centru în origine şi cu latura egală cu $2\ell_n$ cu $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şir strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ şi fie şirul de mulţimi:

$$\mathbb{P}_n = \{(x,y)|max|x|,|y| \leq \ell_n\}$$

Dacă luăm $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}\cap\mathbb{P}_n$ realizăm o exhaustiune a lui $\mathbb{D}$. Vom avea reprezentarea grafică(Fig. 8.17 dreapta):
Definiţie: Fie f o funcţie reală definită pe un domeniu nemărginit $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^2$ şi integrabilă pe orice subdomeniu compact, care are arie, a lui $\mathbb{D}$. Spunem că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{D}$, dacă există un număr I, astfel încât pentru orice exhaustiune $(\mathbb{D}_n)$ a lui $\mathbb{D}$ să avem:

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy = I$$

şi vom scrie:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy \tag{8.33}$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este convergentă pe $\mathbb{D}$.
Exemplu: Fie $f(x,y) = xy$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, deci $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ şi să luăm: $\mathbb{D}_n =$

$\{(x,y)|x^2+y^2 \le n^2\}$, atunci: $\iint_{(\mathbb{D}_n)} xydxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$, si deci: $\lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}_n)} xydxdy = 0$. Pe de altă parte dacă luăm: $D'_n = \{(x,y)| - n \le x \le 2n, -n \le y \le 2n\}$, atunci: $\iint_{(\mathbb{D}'_n)} xydxdy = \int_{-n}^{2n} xdx \int_{-n}^{2n} ydy = (\frac{3n^2}{2})^2$, şi cum $\lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}'_n)} xydxdy = +\infty$ rezultă că f nu este integrabilă impropriu. În legătură cu integrabilitatea funcţiilor pozitive pe un domeniu nelimitat are loc:

Teorema 6. Dacă $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ f \ge 0$ iar $\mathbb{D}$ este nemărginit şi f este integrabilă pe orice subdomeniu compact, care are arie atunci f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{D}$ dacă şi numai dacă există o exhaustiune $(\mathbb{D}_n)$ a lui $\mathbb{D}$ astfel încât limita:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy = I$$

există şi este finită. În plus are loc egalitatea:

$$I = \iint_{(\mathbb{D})} f(x,y)dxdy.$$

⌈Necesitatea este evidentă. Pentru a demonstra suficienţa vom considera exhaustiunea $(\mathbb{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pentru care $\lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy = I$. Fie o altă exhaustiune $(\mathbb{D}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi va rezulta că există un indice $k = k(n)$ astfel ca $\mathbb{D}'_n \subset \mathbb{D}_{k(n)}$. Pentru că f este pozitivă pe $\mathbb{D}$ rezultă:

$$\iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy \le \iint_{(\mathbb{D}_{k(n)})} f(x,y)dxdy \le I$$

Din faptul că $f \ge 0$ rezultă că şirul $(\iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător şi mărginit, prin urmare are limită şi aceasta este:
$I' = \lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}'_n)} f(x,y)dxdy$. Între cele două limite are loc inegalitatea: $I' \le I$. Daca schimbăm rolul celor două exhaustiuni obţinem $I \le I'$ şi deci $I' = I$.⌋

Exemplu . Fie $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, deci $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Vom arăta că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{D}$. Deoarece $f \ge 0$ pe $\mathbb{D}$ este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui $\mathbb{D}$. Luam $\mathbb{D}_n = \{(x,y)|x^2+y^2 \le n^2 x \ge 0, y \ge 0\}$ şi atunci:

$$I = \iint_{(R^2_+)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}_n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

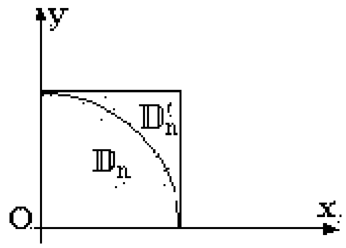

Fig. 8.18:

Dacă facem schimbarea de variabile şi anume cea în coordonate polare obţinem:

$$\iint_{(\mathbb{D}_n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}|_0^n) = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{e^{-n^2}}{2}) \to \frac{\pi}{4}$$

Dacă considerăm exhaustiunea $D_n' = \{(x,y)|0 \le x \le n, 0 \le y \le n\}$, atunci:

$$\iint_{(\mathbb{D}_n')} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^n dx \int_0^n e^{-(x^2+y^2)}dy = (\int_0^n e^{-x^2}dx)(\int_0^n e^{-y^2}dy) =$$

$(\int_0^n e^{-x^2}dx)^2$. Dacă ţinem seama de teorema dată avem:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Acest exemplu şi totodată procedeul de calcul aparţine lui Poisson.
Alt exemplu: Să se calculeze integrala improprie:

$$\iint_{(R_+^2)} e^{-\alpha(x^2+y^2)}cos(x^2+y^2)dxdy$$

cu $\alpha > 0$
Cu exhaustiunea $\mathbb{D}_n = \{(x,y)|x^2+y^2 \le n^2, n \in \mathbb{N}\}$ avem:
$\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}_n)} e^{-\alpha(x^2+y^2)}cos(x^2+y^2)dxdy = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-\alpha\rho^2}cos(\rho^2)\rho d\rho =$
$\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi \int_0^n e^{-\alpha\rho^2}cos(\rho^2)\rho d\rho = \pi \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos t dt = \frac{2\pi\alpha}{1+\alpha^2}$ Vom da unele rezultate în legatură cu integralele duble improprii fară demonstraţii.
Teorema 7. Necesar şi suficient ca f să fie integrabilă pe un domeniu $\mathbb{D}$ nemărginit este ca funcţia $|f|$ să fie integrabilţ impropriu pe $\mathbb{D}$.
Teorema 8. Fie f şi g două funcţii reale definite pe un acelaşi domeniu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ nemărginit integrabilă pe orice subdomeniu compact, cu arie, a lui $\mathbb{D}$. Dacă:
1) g este integrabilă impropriu pe $\mathbb{D}$

2) $|f(x,y)| \leq |g(x,y)|$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{D}$, atunci f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{D}$.

Aplicaţie: În condiţiile teoremei 7, dacă $f(x,y) \leq g(x,y) = \frac{M}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$, $\alpha > 1$, $M > 0$ atunci $f(x,y)$ este integrabilă.

Pentru $K_n = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq n^2\}, n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbb{D}_n = \mathbb{K}_n \cap \mathbb{D}$ $\iint_{(\mathbb{D}_n)} f(x,y)dxdy \leq$
$\iint_{(\mathbb{K}_n)} g(x,y)dxdy$, iar $\iint_{(\mathbb{K}_n)} g(x,y)dxdy = M\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{\varrho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{\alpha-1}} =$
$\frac{M\pi}{1-\alpha}\frac{1}{(\rho^2+a^2)^{\alpha-1}}|_0^n = \frac{M\pi}{1-\alpha}[\frac{1}{a^{2\alpha-2}} - \frac{1}{(n^2+a^2)^{\alpha-1}}] \leq \frac{M\pi}{(1-\alpha)a^{2\alpha-2}}$, pentru $\alpha > 1$.

Teorema 9. Presupunem că $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt absolut integrabile pe $(-\infty,+\infty)$ atunci produsul $f(x)g(y)$, definit prin $(x,y) \to f(x)g(y)$ este integrabil şi are loc egalitatea:

$$\iint_{(\mathbb{R}^2)} f(x)g(x)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy$$

Folosind această teoremă putem stabili formula lui Jacobi, care dă legatura între funcţiile lui Euler β şi γ astfel:

Se consideră $\gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-y}dy$ şi $\gamma(q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{q-1}e^{-x}dx$, cu $p,q > 0$ rezultă că:

$$\gamma(p)\gamma(q) = \iint_{(\mathbb{R}^2_+)} e^{-(x+y)}x^{q-1}y^{p-1}dxdy$$

Dacă facem schimbarea de variabile:

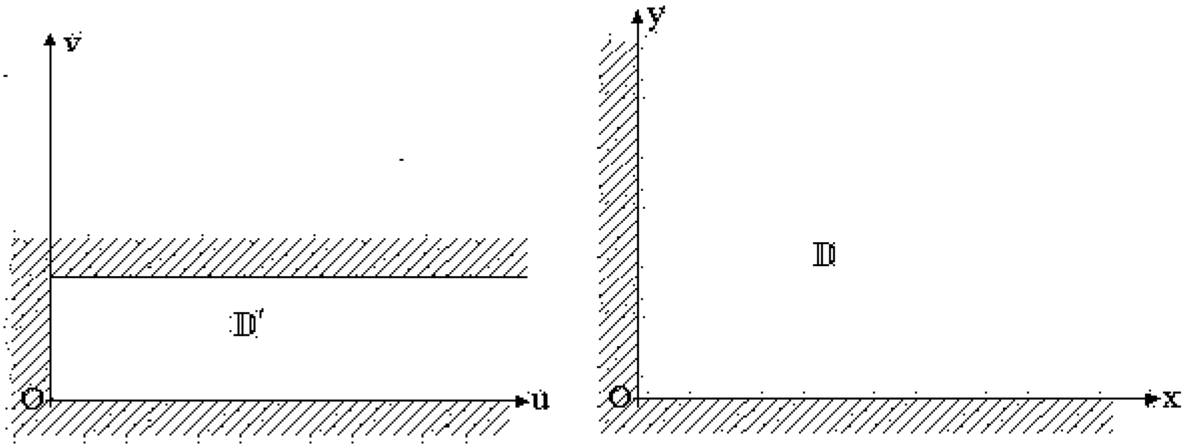

Fig. 8.19:

$$\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{y}{x+y} \end{cases}$$

Această transformare duce $\mathbb{D}' = [0, \infty) \times [0, 1]$ în $D = [0, \infty)[0, \infty)$ Determinantul matricei lui Jacobi este:

$$J = \begin{vmatrix} 1 - vv \\ -uu \end{vmatrix} = u - uv + uv = u$$

şi deci vom avea: $\gamma(p)\gamma(q) = \displaystyle\int_0^1 dv \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q+1} e^{-u} du$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv = \gamma(p+q)\beta(p,q)$, şi cu aceasta am arătat formula lui Jacobi. Vom considera acum cazul în care funcţia reală $f(x, y)$ este definită într-un domeniu $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^2$ cu exceptia unui punct $M_0(x_0, y_0)$ din $\mathbb{D}$ şi în orice vecinatate $\mathbb{V}$ a lui M_0, f este nemarginită (deci $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \pm\infty$). Vom presupune de asemeni că $\mathbb{D}$ şi $\mathbb{V}$ au arie(cu alte cuvinte sunt măsurabile) şi că f este integrabilă pe $\mathbb{D} - \mathbb{V}$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ poate fi şi pe frontiera lui $\mathbb{D}$. Vom avea deci figurile: Portiunile

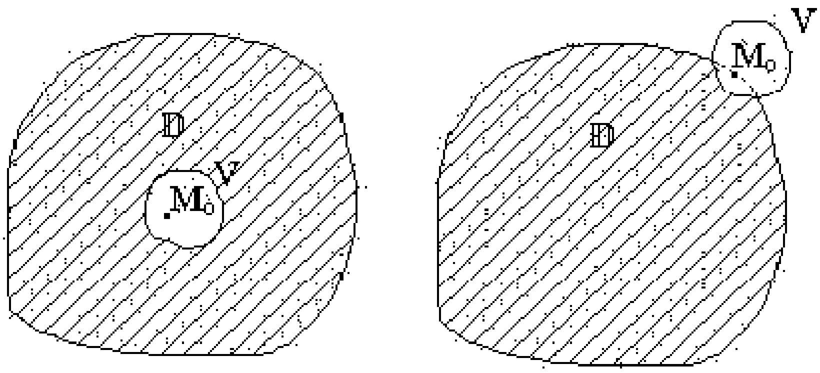

Fig. 8.20:

hasurate ilustrează pe $\mathbb{D} - \mathbb{V}$. Considerăm un şir de vecinătăţi descendente ale lui M_0, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică $\mathbb{V}_{n+1} \subset \mathbb{V}_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = (x_0, y_0)$, deci şirul este descrescător şi punctul limită este M_0. În aceste condţii putem da următoarea: <u>Definiţie</u>: Spunem că f este integrabilă pe $\mathbb{D}$ dacă există un număr I, astfel încât pentru orice şir de vecinătăţi $(\mathbb{V}_n)$ ale lui M_0 de forma celor prezentate, să avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}-\mathbb{V}_n)} f(x, y)dxdy = I$ şi vom scrie:

$$\iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}-\mathbb{V}_n)} f(x, y)dxdy$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este convergentă pe $\mathbb{D}$. Rezultate asemănătoare celor de la interala simplă pe domenii nemărginite pot fi stabilite şi în acest caz, al integralelor duble. Ne rezumăm doar la un exemplu: Să se afle valorile valorile lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care integrala:

$$\iint_{(\mathbb{D})} \frac{dxdy}{(x-x)^2+(y-y)^2]^\alpha},$$

unde $\mathbb{D} = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq r^2\}$, este convergentă. În acest caz $\mathbb{V}_n = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \frac{1}{n^2}\}$, şi atunci:

$$\iint_{(\mathbb{D}-\mathbb{V}_n)} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{n}}^{r} \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}} = 2\pi \frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}|_{\frac{1}{n}}^{r} = \frac{\pi}{1-\alpha}[r^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}]$$

Deci, pentru $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{(\mathbb{D}-\mathbb{V}_n)} f(x,y)dxdy$ există dacă şi numai dacă$\alpha < 1$. Pentru $\alpha \leq 0$ integrala în cauză nu mai este improprie.

Capitolul 9

Integrale de suprafaţă

9.1 Noţiuni din teoria suprafeţelor.

Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ cu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, o funcţie cu două variabile reale continuă şi derivabilă.
Definiţie: Se numeşte suprafaţă mulţimea punctelor $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{D}\}$$

Suprafaţa $\mathbb{S}$ este graficul funcţiei f(fig.9.1). Oricarui punct $P(x, y) \in \mathbb{D}$ i

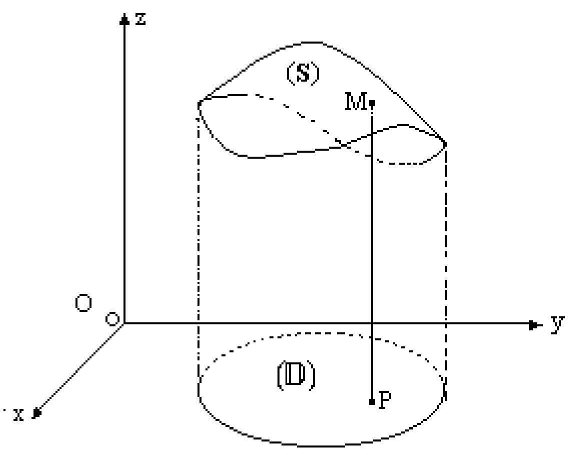

Fig. 9.1:

se asociaza un punct M de coordonate $(x, y, z = f(x, y))$ care se obţine intersectnd suprafaţa prin paralela la Oz dusă prin punctul P. Mai general, funcţia sau funcţiile implicite definite prin ecuaţia: $F(x, y, z) = 0$ unde: $F : \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, admit ca grafic o suprafaţă care poate fi tăiată într-unul

sau multe puncte de o paralelă la axa Oz. Aici $\mathbb{D}$ va fi domeniul în care este definită acea funcţie implicită.
Exemplu. Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ defineşte o sferă cu centru în origine, de rază r. Emisfera superioară este dată de:

$$z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)},$$

iar cea inferioară este dată de:

$$z = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Aici $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$, $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq r^2\}$

9.2 Reprezentarea parametrică a unei suprafeţe.

Să plecăm de la ecuaţia:

$$z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{D}, \tag{9.1}$$

a unei suprafeţe S. Sa efectuă m transformarea punctuală:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \tag{9.2}$$

cu $x, y : \Delta \to \mathbb{R}$, derivabile. Relaţiile (9.2) transformă domeniul $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ în domeniul $\mathbb{D}$. Vom avea atunci pentru coordonatele unui punct oarecare M al suprafetei $\mathbb{S}$:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{9.3}$$

unde z(u, v)=f(x(u, v), y(u, v)). Astfel oricărui punct din Δ îi corespunde un punct $M(x, y, z)$ din $\mathbb{S}$.

Reciproc, unui punct $M(x, y, z) \in \mathbb{S}$ îi corespunde punctul $P(x, y, 0)$ şi daca transformarea (9.2) este bijectivă atunci lui P îi va corespunde un singur punct $(u, v) \in \Delta$. Pentru aceasta este necesar ca în Δ să avem $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Deci orice suprafata (9.1) admite o reprezentare parametrică de forma (9.3) şi reciproc, dacă funcţiile $x, y, z : \Delta \to \mathbb{R}$, derivabile astfel că cel puţin unul din determinanţii funcţionali:
$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $,\det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$.
sa fie diferiţi de zero în Δ, atunci punctul de coordonate dat de (9.3) cu $(u, v) \in \Delta$, descrie o suprafaţă $\mathbb{S}$. Într-adevăr, dacă de exemplu $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, atunci în vecinatatea valorilor $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$, cu $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$,

se vor scoate din primele două ecuaţii $u = u(x,y), v = v(x,y)$, cu $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$, şi atunci din a treia ecuaţie rezultă:$z = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$. Prin urmare punctul $M(x,y,f(x,y))$ descrie o suprafaţă, iar vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$, al unui punct $M \in \mathbb{S}$, se exprimă prin:

$$\overrightarrow{r} = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}, \tag{9.4}$$

unde $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, sunt versorii axelor de coordonate. Astfel, $\overrightarrow{r}$ este o funcţie vectorială care aplică punctelor din Δ unui vector de coordonate $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, sau:$\overrightarrow{r} : \Delta \to \mathbb{V}_3$, unde $\mathbb{V}_3$ reprezintă mulţimea vectorilor din $\mathbb{R}^3$. Exemplu: Reprezentarea parametrică a sferei: Fie M un punct al sferei(Fig 9.2) cu cen-

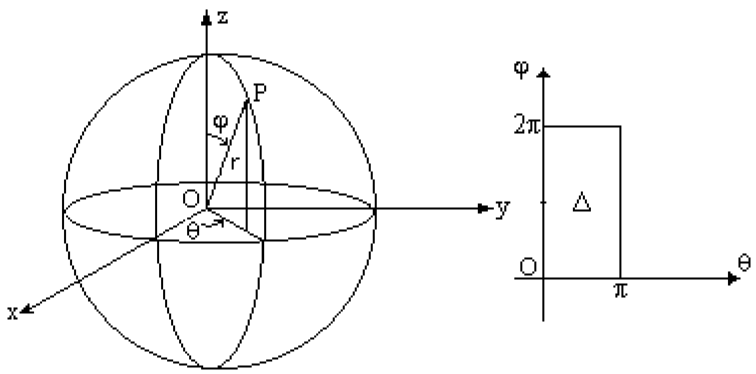

Fig. 9.2:

trul în O şi de rază r. Meridianul determinat de punctul M şi de axa Oz face cu planul Oxz unghiul φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Unghiul φ se numeşte longitudinea lui M. Unghiul θ determinat de directia Oz cu direcţia OM se numeşte colatitudinea lui $M(0 \leq \theta \leq \pi)$. Avem:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

şi se verifică imediat că: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Aici domeniul Δ este definit prin: $u = \theta$, $v = \varphi$, $\Delta = \{(\theta,\varphi)|0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

9.3 Coordonate curbilinii pe suprafaţă.

Vom spune în general că (u,v) constituie un sistem de coordonate curbilinii pe suprafaţa S. Punctul M care corespunde lui (u,v) are coordonatele curbilinii u şi v. Dacă dăm lui v o valoare v_0 şi considerăm toate valorile lui u aşa ca $(u, v_0) \in \Delta$, punctul M de coordonate $x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$, descrie o curbă situată pe suprafaţă. Este curba de ecuaţie: $v = v_0$ în coordonate curbilinii. La fel dacă dăm lui u o valoare u_0 şi considerăm toate valorile lui v aşa ca $(u_0, v) \in \Delta$, punctul M de coordonate $x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$, descrie o curbă situată pe suprafată. Este curba de ecuatie: $u = u_0$ în coordonate curbilinii. Mai general, dacă stabilim o relaţie de forma: $u = u(t), v = v(t) u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, atunci $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t))$, descrie o curbă (c) situată pe suprafaţa $\mathbb{S}$. Tot aşa stabilind o relaţie de forma $F(u, v) = 0$ între coordonatele curbilinii u şi v ale lui M, se obţine o curbă pe suprafaţă. Putem lua în particular drept coordonate curbilinii pe suprafaţă abscisa x şi ordonata y. În acest caz: $x = u, y = v, z = f(u, v)$.

9.4 Planul tangent şi normala într-un punct pe suprafaţă.

Fie mai general $F(x, y, z) = 0$, ecuaţia suprafeţei $\mathbb{S}$ şi fie (c) o curbă de ecuaţii parametrice:$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b]$, situată pe $\mathbb{S}$ şi care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Avem $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0), t_0 \in [a, b]$. Derivând faţă de t relaţia: $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, găsim pentru $t = t_0$, după înmulţire cu dt: $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) x'(t_0) dt + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) y'(t_0) dt + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) z'(t_0) dt = 0$ Dar $dx = x'(t_0) dt, dy = y'(t_0) dt, dz = z'(t_0) dt$, reprezintă componentele unui vector $d\overrightarrow{r}$, tangent la curba (c) în punctul M_0. Relaţia precedentă apare ca o relaţie de ortogonalitate $\overrightarrow{N}_0 d\overrightarrow{r} = 0$, între vectorul $d\overrightarrow{r}$ şi vectorul $\overrightarrow{N}_0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$. Dar acest vector nu depinde de alegerea curbei (c) pe suprafaţă ci numai de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. El defineşte în punctul M_0 o dircţie normală la toate curbele suprafeţei care trece prin M_0. Aceasta este direcţia normalei la suprafaţă în punctul M_0. Planul tangent la suprafaţă în punctul M_0 este planul ce trece prin M_0 şi este normal pe $\overrightarrow{N}_0$. Dacă punctul $Q(x, y, z)$ apartine acestui plan avem:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{9.5}$$

Aceasta este ecuaţia planului tangent la suprafaţa $\mathbb{S}$.Într-un punct oarecare $M(x, y, z)$ al suprafeţei $\mathbb{S}$, vectorul $\overrightarrow{N} = gradF(x, y, z)$ este normal la suprafaţă.

Dacă suprafaţa este reprezentată prin ecuaţia $z = f(x, y)$ putem lua $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Deci $\overrightarrow{N} = gradF(x, y, z) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y},\ 1)$.

Dacă suprafata este reprezentata prin (9.4), pe o curba (c) trcând prin M_0 avem $u = u(t), v = v(t)$ cu $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$. Avem diferenţiind faţă de t:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

unde derivatele parţiale se calculează pentru $u = u_0, v = v_0$. Aceste formule se condensează în relaţia vectorială:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} u'(t_0) + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} v'(t_0), \tag{9.6}$$

în care vectorii:

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overrightarrow{k}, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overrightarrow{k},$$

calculaţi pentru $u = u_0, v = v_0$, sunt tangenţi la curbele de coordonate de ecuaţii diferite respectiv $v = v_0$, sau $u = u_0$, care se află pe suprafaţă şi trec prin M_0. Deci tangenta la curba (c) în punctul M_0 se află în planul definit de aceşti doi vectori. Scriind relaţiile de ortogonalitate dintre $\overrightarrow{N}_0$ şi aceşti vectori, adică $\overrightarrow{N}_0 \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = 0$, $\overrightarrow{N}_0 \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = 0$ se deduce că putem lua:

$$\overrightarrow{N}_0 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\overrightarrow{i} + \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\overrightarrow{j} + \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\overrightarrow{k} \tag{9.7}$$

sau

$$\overrightarrow{N}_0 = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k},$$

am notat cu A determinantul matricei $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, etc., derivatele fiind calculate pentru $u = u_0, v = v_0$. Se deduce de aici imediat şi ecuaţia planului tangent la suprafaţă în M_0. De remarcat că cel puţin unul dintre determinanţii A, B, C este diferit de zero.

9.5 Elementul liniar(metrica) al suprafeţei.

Să calculăm lungimea arcului de curbă (c). Din (9.6), după înmulţire cu dt avem:

$$ds^2 = \|d\overrightarrow{r}\|^2 = d\overrightarrow{r}^2 = (\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} dv)^2. \tag{9.8}$$

Prin urmare, efectuând calcule, obţinem formula lui Gauss(1777-1855):

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{9.9}$$

unde:

$$E(u,v) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}, F(u,v) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}, G(u,v) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}$$

Prin urmare lungimea arcului de curbă (c) între punctele M_1 şi M_2 care corespund valorilor t_1, t_2 ale punctului t este:

$$L_{M_1M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t)}dt \tag{9.10}$$

Din relaiatia (9.7) avem că:
$\overrightarrow{N}_0^2 = (\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v})^2 = |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}|^2 |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}|^2 \sin^2(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}) = |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}|^2 |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}|^2 (1 - \cos^2(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}))$
$= (\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u})^2 (\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v})^2 = EG - F^2$, adică identitatea lui Lagrange:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2, \tag{9.11}$$

deci forma pătratică (9.9) este pozitiv definită.
Exemplu: În cazul sferei cu reprezentarea parametrică dată mai sus, avem:

$$\overrightarrow{N} = r^2 sin\theta \overrightarrow{r}, ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

unde $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Interpretarea geometrică este imediată $\underline{rd\theta}$ reprezintă elementul de arc pe meridianul lui M, iar $\underline{r \sin \theta d\varphi}$ reprezintă paralelul corespunzător de pe sferă, fig 9.2.

9.6 Elementul de arie pe suprafaţă.

Fie porţiunea de suprafaţă determinată de liniile de coordonate $u = u_0, u = u_0 + du, v = v_0, v = v_0 + dv$. Se formează astfel pe suprafaţă un paralelogram curbiliniu $M_0M_1M_3M_2$ a cărui arie poate fi aproximată prin aria paralelogramului definit de vectorii $M0M_1$ si $M0M_2$. Avem însă:

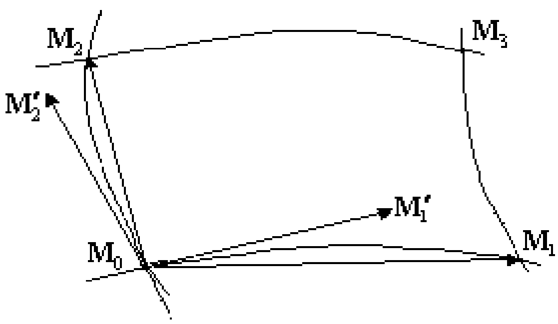

Fig. 9.3:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r}(u_0 + du, v_0) - \overrightarrow{r}(u_0, v_0) \approx \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}(u_0, v_0)du$$

$$\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r}(u_0, v_0 + dv) - \overrightarrow{r}(u_0, v_0) \approx \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}(u_0, v_0)dv$$

Aceste aproximări sunt cu atât mai bune cu cât creşterile pozitive du respectiv dv, sunt suficienţi de mici. Vectorii $\overrightarrow{M_0M_1'}, \overrightarrow{M_0M_2'}$ sunt vectorii tangenţi în M_0 la curbele de coordonate $v = v_0, u = u_0$. Unghiul θ al acestor vectori este prin definiţie unghiul curbelor de coordonate ce trec prin M_0. Avem evident $\|\overrightarrow{M_0M_1'}\| = \sqrt{E}du, \|\overrightarrow{M_0M_2'}\| = \sqrt{G}dv$. Presupunând $du > 0, dv > 0$, prin urmare: $\overrightarrow{M_0M_1'}\overrightarrow{M_0M_2'} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}dudv = Fdudv = \sqrt{EG}dudv\cos\theta$ şi deci:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \tag{9.12}$$

Aria $d\sigma$ este dată de : $d\sigma = \|\overrightarrow{M_0M_1'}\|\|\overrightarrow{M_0M_2'}\|\sin\theta$.
Astfel:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv, \tag{9.13}$$

unde este important de semnalat că, cresterile, du şi dv au loc respectiv pe curbele de coordonate $v = v_0$ sau $u = u_0$.

9.7 Aria unei porţiuni de suprafaţă.

Fie curbele de coordonate $u = u_1, u = u_2, ..., u_{p-1}, u_p$; $v = v_1, v_2, ..., v_{q-1}, v_q$ prin care împărţim porţiunea $\mathbb{S}$, pentru început de forma unui paralelogram curbiliniu în paralelograme curbilinii elementare $s_1, s_2, ..., s_{p-1}, s_p$ (Fig. 9.4). În planul Ouv se defineşte prin aceleaşi relaţii o diviziune (d') în dreptunghiuri

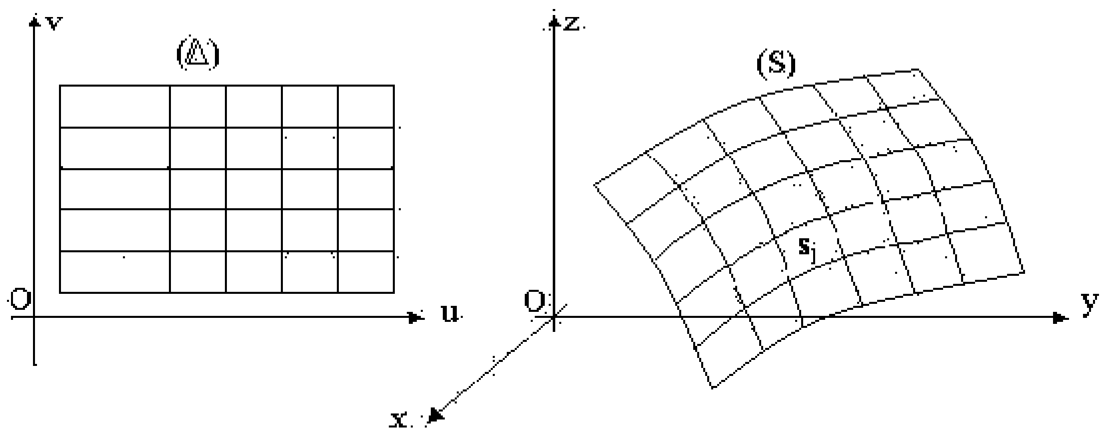

Fig. 9.4:

elementare a domeniului ? descris de punctul (u, v) în reprezentarea parametrică a suprafeţei. Se presupune $u_1 < u_2 < ... < u_p$; $v_1 < v_2 < ... < v_q$. Numim norma $\ell(d)$ a diviziunii $d = (s_1, s_2, ..., s_p)$ maximul diametrelor sferelor care conţin aceste suprafeţe. Suma ariilor suprafeţelor $s_1, s_2, ..., s_p$ este aproximată prin:

$$\mathcal{A}(d) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \sqrt{EG - F^2}(u'_{ij}, v'_{ij})(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Se formează astfel o sumă integrală relativă la functia $\sqrt{EG - F^2}(u, v)$ şi la domeniul Δ din planul Ouv. Dacă această funcţie este integrabilă, atunci pentru un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, avem:

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(d_n) = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2}dudv \tag{9.14}$$

Aceeaşi relaţie va defini aria şi dacă domeniul Δ din planul Ouv nu este un dreptunghi ci un domeniu oarecare. Consideraţiile de făcut sunt similare cu acelea de la integrale duble, cazul II.
Exemplu. Aria unei sferei.
Avem cu reprezentarea n coordonate sferice: $E = r^2, G = r^2 \sin^2\theta, F = 0$, deci:

$$\mathcal{A} = \iint_{(\Delta)} \sin\theta d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi r^2.$$

9.8 Integrala de suprafaţă.Definiţie.

Noţiunea de integrală de suprafaţă este o extindere a noţiunii de interală dublă, care se introduce în mod analog cu aceea de integrală curbilinie, ca extindere a integralei simple. Fie $\Phi : X \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, o funcţie $\Phi(x, y, z)$ definită pe domeniul $\mathbb{X}$, ce conţine suprafaţa $\mathbb{S}$. Fie $d = (s_1, s_2, ..., s_p)$ o diviziune arbitrară a lui $\mathbb{S}$ şi $a_1, a_2, ..., a_p$ ariille suprafeţelor $s_1, s_2, ..., s_p$, calculate prin formula (9.14). Folosind formula ariei putem scrie:

$$a_k = \iint_{(\Delta_k)} \sqrt{EG - F^2}dudv = \sqrt{EG - F^2}(u_{ij}, v_{ij})(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}). \tag{9.15}$$

conform cu formula de medie, dacă suprafaţa s_k este cea care corespunde domeniului $\Delta_k = \{(u, v)|u_{i-1} \leq u \leq u_i, v_{j-1} \leq v \leq v_j\}$ din planul Ouv. Aici $(u_{ij}, v_{ij}) \in \Delta_k$. Să formăm suma integrală:

$$\Sigma(d) = \sum_{k=1}^{p} \Phi(x_k, y_k, z_k)a_k,$$

în care (x_k, y_k, z_k) reprezintă coordonatele punctului $M_{ij} \in s_k$, care corespunde lui $(u_{ij}, v_{ij}) \in \Delta_k$. Dacă considerăm un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu norma $\ell(d_n)$

astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, rezultă de aici în virtutea lui (9.15):

$$I = \lim_{n\to\infty} \Sigma(d_n) = \iint_{(\Delta)} \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

în ipoteza că funcţia care intervine în membrul al doilea este integrabilă.

Această limită se numeşte integrala de suprafaţă a funcţiei Φ pe porţiunea de suprafaţă $\mathbb{S}$ care corespunde lui Δ şi se notează:

$$\iint_{(\mathbb{S})} \Phi(x,y,z)d\sigma = \iint_{(\Delta)} \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv. \quad (9.16)$$

Observaţii:
1) Integrala de suprafaţă se reduce prin (9.16) la o integrală dublă pe domeniul Δ.
2)Dacă $\Phi = 1$ se regăseşte expresia $\mathcal{A} = \iint_{(\mathbb{S})} d\sigma$ a ariei lui $\mathbb{S}$.
3) Nu este necesar ca Φ să fie o funcţie definită pe un domeniu $\mathbb{X}$ tridimensional, care să includă pe $\mathbb{S}$. În aplicaţii intervin deseori funcţii $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, care sunt definite numai pe suprafaţa $\mathbb{S}$. Prin reprezentare parametrică avem deci: $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$.

9.8.1 Reprezentare particulară a unei integrale de suprafaţă.

Dacă ecuaţia suprafeţei este $z = f(x,y)$, atunci avem:

$$x = u, y = v, z = f(u,v),$$

deci:

$$E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2,$$

unde $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Din (9.13) rezultă:

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}dudv.$$

Aria proiecţiei lui $\mathbb{S}$, notată cu $pr_{xOy}\mathbb{S} = \mathbb{D}$, a suprafeţei $\mathbb{S}$ pe planul Oxy (Fig.9.1) se obţine aplicând considerentele precedente. Vom avea:

$$\iint_{(\mathbb{S})} \Phi(x,y,z)d\sigma = \iint_{\mathbb{D}} \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy. \quad (9.17)$$

Revenind la proiecţia lui S, fie $D = (x,y)|x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in \Delta$ această proiecţie. Pe $\mathbb{D}$ avem $z = 0$, suprafaţa fiind în planul Oxy. Deci elementul de arie notat acum cu $d\omega_z = dxdy$ este dat de:

$$d\omega_z = dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv = |C|dudv$$

atât în virtutea lui (8.27) de la integrale duble cât şi a formulei (9.13) aplicată suprafeţei D, deoarece pentru această suprafaţă plană $A = 0, B = 0, C = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|$. Comparând cu formula (9.13) aplicată lui S, rezultă:

$$d\omega_z = dxdy = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} d\sigma = \gamma d\sigma \tag{9.18}$$

unde γ este modulul cosinusului unghiului format de vectorul $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ al normalei la suprafaţă cu axa Oz.
Într-adevăr $\|\overrightarrow{N}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
Avem la fel formulele:

$$d\omega_x = dydz = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} d\sigma = \alpha d\sigma, \tag{9.19}$$

$$d\omega_y = dzdx = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} d\sigma = \beta d\sigma \tag{9.20}$$

(α, β, γ) fiind modulele proiecţiilor vectorului unitate $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|N\|}$. Rezultă de aici:

$$d\sigma^2 = d\omega_x^2 + d\omega_y^2 + d\omega_z^2 \tag{9.21}$$

numită relaţia lui Piagora aplicată elementului de suprafaţă $d\sigma$ şi a proiecţiilor sale pe planele de coordonate.

9.9 Calculcului volumelor cu integrale de suprafaţă.

Am văzut că pentru o funcţie $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ integrala $\iint_{(\mathbb{D})} f(x, y)dxdy$ reprezintă volumul limitat de suprafaţa $S = (x, y, z)|z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{D}$, de domeniul $\mathbb{D}$ şi de suprafaţa laterală obtinută prin deplasarea unei drepte ce se sprijină pe frontiera lui $\mathbb{D}$ şi este paralelă cu Oz. Dacă vom generaliza, considerând suprafeţele $\mathbb{S}_1$ şi $\mathbb{S}_2$, de ecuaţii $z = f_1(x, y)$, respectiv $z = f_2(x, y)$, cu $(x, y) \in \mathbb{D}$ şi $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, atunci cilindru limitat de aceste două suprafeţe şi având generatoarele paralele cu Oz:

$$V = \iint_{(\mathbb{D})} [f_2(x, y) - f_1(x, y)]dxdy$$

Fie $\overrightarrow{n}_2$ versorul normalei lui $\mathbb{S}_2$ într-un punct P_2 cu sensul spre exteriorul corpului cilindreic. Avem $\gamma_2 \geq 0$. Într-adevăr fie M un punct pe această normală. Avem $\overrightarrow{P_2M} = \rho\overrightarrow{n}_2$, cu $\rho = \|\overrightarrow{P_2M}\| > 0$ dacă $\overrightarrow{P_2M}$ are sensul lui $\overrightarrow{n_2}$. Dacă M este exterior corpului, atunci $z_M > z_{P_2}$; dar $z_M - z_{P2} = \rho\gamma_2$ deci $\gamma_2 > 0$ căci $\rho > 0$. Se arată la fel că dacă $\overrightarrow{n_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ este versorul normalei

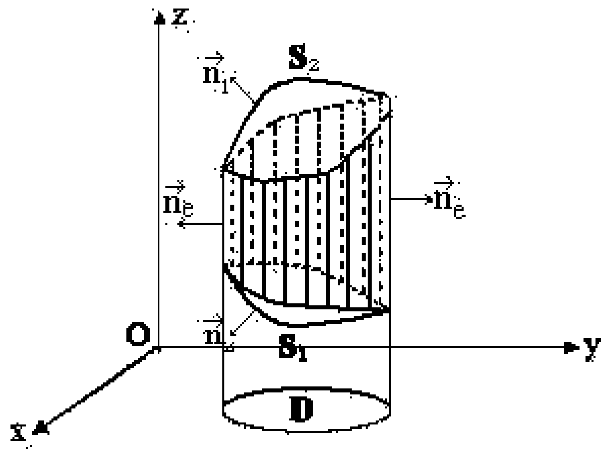

Fig. 9.5:

la suprafaţa $\mathbb{S}_1$ în punctul P_1 şi dacă normala este dirijata spre exteriorul corpului, atunci $\gamma_1 < 0$. Rezulta deci că elementele de arie din P_1 şi P_2, proiectate pe planul Oxy ne dau relaţiile $dxdy = \gamma_2 d\sigma_2$ şi $dxdy = -\gamma_1 d\sigma_1$. Putem deci exprima volumul $\mathbb{V}$ sub forma unei integrale de suprafaţă:

$$V = \iint_{(\mathbb{S})} z\gamma d\sigma = \iint_{(\Sigma)} z\gamma d\sigma \tag{9.22}$$

unde $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$ iar $\gamma = \gamma 2$ pe $\mathbb{S}_2, \gamma = \gamma_1$ pe $\mathbb{S}_1$. Prin Σ sa notat suprafaţa totală a cilindrului adică, $\Sigma = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup \mathbb{S}_0$ cu $\mathbb{S}_0$ suprafaţa sa laterala. Pe aceasta este evident că $\gamma = 0$.
Observatii. Formula (9.22) a fost stabilită pentru corpuri geometrice limitate de suprafete pentru care avem reprezentarea de forma $z = f(x, y)$. În cazul general formula rămâne valabilă. Este suficient să descompunem corpul prin suprafeţe $\mathbb{S}$ convenabil alese în mai multe domenii care să îndeplinească condiţia ca o paralelă la axa Oz să le taie frontiera în cel mult două puncte, ca de exemplu în figura (Fig.55): Se aplică formula pentru fiecare domeniu. Contribuţia lui $\mathbb{S}$ dispare deoarece pentru $\mathbb{X}_1$ si $\mathbb{X}_2$ normala pe $\mathbb{S}$ se ia în sensuri diferite.

În mod analog se stabilesc formulele:

$$V = \iint_{(S)} x\alpha d\sigma; \tag{9.23}$$

$$V = \iint_{(S)} y\beta d\sigma. \tag{9.24}$$

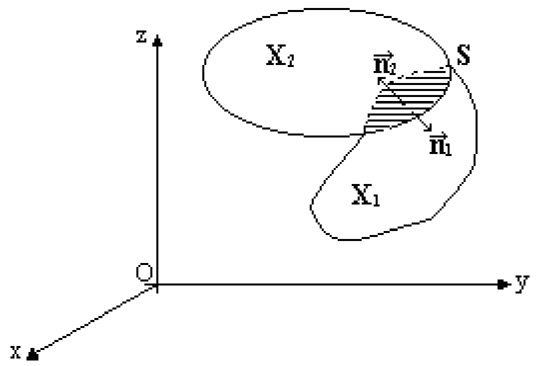

Fig. 9.6:

9.10 Integrale de suprafaţă în raport cu coordonatele.

Fie câmpul vectorial $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y, z)$ $\overrightarrow{v} : (\mathbb{S}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prin $\overrightarrow{v} = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$, atunci:

$$\iint_{(\mathbb{S})} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(\mathbb{S})} (P\alpha + Q\beta + R\gamma)d\sigma = \iint_{(\mathbb{S})} \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{n}\,d\sigma \tag{9.25}$$

iar integrala

$$\iint_{(\mathbb{S})} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

se numeşte integrala curbilinie în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de tipul II.

Pentru $\mathbb{S}$ reprezentată de $z = f(x, y)$, vom avea:

$$\iint_{(\mathbb{S})} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(\mathbb{D})} (-pP - qQ + R)dxdy \tag{9.26}$$

unde în integrala din partea dreaptă $\mathbb{D} = Pr_{xOy}(\mathbb{S})$, $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$ iar $z = f(x, y)$

9.11 Formula lui Stokes.

Să construim o suprafaţă S de ecuaţie $z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{D}$, unde f admite derivate parţiale de ordin întâi continuie pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Pe această suprafată luăm o curba închisă (c), care este presupusă reductibilă la un punct prin deformaţie

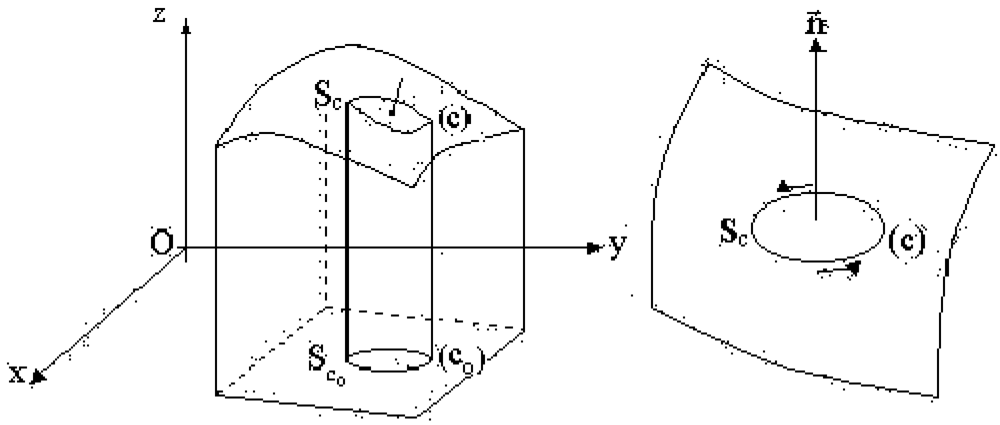

Fig. 9.7:

continuă fară a ieşi de pe suprafată. Această curbă se obţine stabilind o legătură între x şi y de exemplu prin reprezentarea parametrică $x = x(t), y = y(t)$, de unde $z = f(x(t), y(t))$, cu $\alpha \leq t \leq \beta$. Curba fiind închisă, aceasta revine la a presupune că $x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta), z(\alpha) = z(\beta)$. Fie o funcţie $P : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{X}$ este un domeniu aşa ca $(c) \subset (\mathbb{S}) \subset \mathbb{X}$. Presupunem că P admite derivate prime continuie. Fie integrala curbilinie în raport cu variabila x:

$$I = \oint_{(c)} P(x, y, z)dx,$$

luată pe (c) în sensul direct, acela care lasă la stânga porţiunea $\mathbb{S}_c$ din $\mathbb{S}$, limitată de curba (c). Fie (c_0) proiectia lui (c) pe planul Oxy si D_{c0} portiunea din domeniul D pe care o limiteaza. Pe suprafata S_c avem $P(x, y, z) = P(x, y, f(x, y))$, cu $(x, y)?D_{c0}$. Putem aplica deci formula lui Green. Avem:

$$\oint_{(c)} P(x, y, z)dx = \oint_{(c_0)} P(x, y, f(x, y))dx = -\iint_{(\mathbb{D}_{c_0})} (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} q)dxdy,$$

unde $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Dar $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ fiind vectorul normalei la suprafaţa $\mathbb{S}_c$ în sensul creşterii lui z (z crescător), deci în sensul normalei orientate astfel încât sensul de parcurs pe (c) să apară ca sens trigonometric. De asemeni ştiim că $\gamma d\sigma = dxdy$. În acelaşi timp avem:

$$\frac{\alpha}{-p} = \frac{\beta}{-q} = \frac{\gamma}{1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

Prin urmare avem si:

$$\oint_{(c)} P(x, y, z)dx = \iint_{\mathbb{S}_c} (\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y})d\sigma \qquad (9.27)$$

În mod analog se stabilesc formulele:

$$\oint_{(c)} Q(x,y,z)dy = \iint_{\mathbb{S}_c} (\gamma\frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha\frac{\partial Q}{\partial z})d\sigma \tag{9.28}$$

$$\oint_{(c)} R(x,y,z)dz = \iint_{\mathbb{S}_c} (\alpha\frac{\partial R}{\partial y} - \beta\frac{\partial R}{\partial x})d\sigma \tag{9.29}$$

unde funcţiile $Q, R : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ îndeplinesc condiţii similare. Să construim funcţia vectorială sau câmpul de vectori:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

Fie de asemeni funcţia vectorială sau câmpul "rot de $\overrightarrow{F}$ " notat prin $rot\overrightarrow{F}$; care este definit prin:

$$rot\overrightarrow{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k},$$

sau în mod simbolic prin scrierea:

$$rotF = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

unde determinantul se dezvoltă dupa linia întâi. Prin adunare, din formulele (9.27,9.28,9.29) se deduce formula lui Stokes:

$$\oint_{(c)} F(x,y,z)d\overrightarrow{r} = \iint_{\mathbb{S}_c} (rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{n})d\sigma, \tag{9.30}$$

în care $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ este versorul normalei la suprafaţa $\mathbb{S}_c$,orientată în sensul de avansare al surubului drept, atunci când l rotim în sensul ales pe (c).Schematic avem figura (Fig.9) dreapta.

Observaţii: 1) Produsul scalar dintre $rot\overrightarrow{F}$ şi $\overrightarrow{n}$ reprezintă "fluxul elementar" al câmpului $rot\overrightarrow{F}$ prin elementul de suprafaţă $d\sigma$. Integrala din membrul al doilea reprezintă "fluxul total" al lui $rot\overrightarrow{F}$ prin $\mathbb{S}_c$. Integrala din membrul întâi se numeşte "circulaţia" câmpului $\overrightarrow{F}$ în lungul curbei închise (c).

2)Deoarece membrul întâi nu depinde decât de funcţiile P, Q, R şi de curba (c) rezultă că suprafaţa $\mathbb{S}_c$ se poate înlocui cu orice altă suprafată care îndeplineste condiţii analoage, care se află în domeniul $\mathbb{X}$ şi trece prin (c).

Capitolul 10

Integrala triplă

10.1 Scurtă introducere în subiect.

Definiţia integralei triple sau a unei integrale multiple, pe un domeniu $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, cu $n = 3$ se face în mod cu totul analog. Ne vom limita la cazul $n = 3$. Fie deci o funcţie $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu spaţial tridimensional, care este inclus într-un interval tridimensional $\mathbb{J} = \{(x, y, z)|a \leq x \leq b, a' \leq x \leq b', a'' \leq x \leq b''\}$. Deci $\mathbb{J} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3$. Presupunem c ă f este marginită şi că frontiera $\mathbb{S}$ a lui $\mathbb{X}$ este formată dintr-un număr finit de suprafeţe avnd plane tangente care variaza în mod continuu de la punct la punct, adică funcţiile A, B, C proiectii ale vectorului normalei variază în mod continuu pe suprafaţă. Vom spune în acest caz mai pe scurt că avem porţiuni de suprafatţ netede. Vom împărţi domeniul X cu ajutorul unor suprafeţe netede auxiliare în subdomeniile $X_1, X_2, ..., X_p$ formând astfel o diviziune (d) şi vom nota această diviziune prin $(d) = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p)$. Fie un punct P_j din subdomeniul $\mathbb{X}_j$; Fie atunci M_j marginea superioară şi m_j marginea inferioară ale lui $f(x, y, z)$ pe $\mathbb{X}_j \cup (Fr\mathbb{X}_j)$. Fie v_j volumul lui $\mathbb{X}_j$. În legătură cu diviziunea (d) se formează sumele lui Darboux prin analogie cu definiţia de la integrala dublă luând:

$$s(d) = \sum_{j=1}^{p} m_j v_j, \quad S(d) = \sum_{j=1}^{p} M_j v_j,$$

La fel ca la integralele duble, vom avea proprietăţile:
Proprietatea 1. $s(d) \leq S(d)$, pentru orice diviziune (d).
Proprietatea 2. Dacă se consideră o diviziune (d') a lui $\mathbb{X}$, care este mai fină decât diviziunea (d), adică o diviziune care poate conserva unele domenii X_i şi provine din diviziunea celorlalte prin suprafeţe suplimentare de împărţire, sau scriind $d \subset d'$, atunci avem:

$$s(d) \leq s(d'); \; S(d') \leq S(d)$$

Proprietatea 3. Fiind date dou ă diviziuni oarecari d şi d' ale aceluiaşi domeniu $\mathbb{X}$ vom avea:

$$s(d') \leq S(d);\ s(d) \leq S(d'),$$

deci orice sumă Darboux superioară este mai mare decât orice suma Darboux inferioară.
Proprietatea 4. Mulţimea sumelor $s(d)$ relative la toate diviziunile lui $\mathbb{X}$ este marginită superior, deci admite o margine inferioară $\mathbf{i}$, deoarece $s(d) \leq Q\sum_{j=1}^{p} v_j \leq QV$. Multimea sumelor $S(d)$ relative la toate diviziunile lui $\mathbb{X}$ este marginită superior, deci admite o margine superioară $\mathbf{I}$, deoarece $PV \leq P\sum_{j=1}^{p} v_j \leq S(d)$. Am notat cu $V = \sum_{j=1}^{p} v_j$, adica volumul lui X.
Proprietatea 5. Avem $\mathbf{i} \leq \mathbf{I}$.
Proprietatea 6. Dacă M este marginea superioară a lui f în $\mathbb{X} \cup (\mathbb{S})$, şi m este marginea inferioară a lui f în $\mathbb{X} \cup (\mathbb{S}), (\mathbb{S}) = Fr\mathbb{X}$, avem:

$$mV \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{I} \leq MV$$

Norma diviziunii (d) o vom introduce astfel: Pentru un subdomeniu $\mathbb{X}_j$ din diviziunea (d) mulţimea distanţelor dintre două puncte oarecari ale lui $\mathbb{X}_j$ este marginită superior căci $\mathbb{X}_j \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{J}$ ea admite o margine superioară d_j. Putem spune deci că X_j se află într-o sferă de rază d_j. Fie $\ell(d)$ maximul diametrlor $d_1, d_2, ..., d_p$ ale diviziunii. Acest număr se numeşte norma diviziunii. Se demonstrează la fel ca la integrala simplă şi la cea dublă teorema următoare:
<u>Teorema</u> 1. Fie $\varepsilon > 0$; lui îi corespunde un $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru toate diviziunile (d) pentru care $\ell(d) < \eta(\varepsilon)$, să avem:

$$0 < S - \mathbf{I} < \varepsilon, 0 < \mathbf{i} - s < \varepsilon$$

precum şi următorul:
<u>Corolar</u>. Fie un şir infinit de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale lui $\mathbb{X}$ astfel ca pentru diviziunea d_n să avem subdomeniile parţiale $\mathbb{X}_1^{(n)}, \mathbb{X}_2^{(n)}, ..., \mathbb{X}_p^{(n)}$ şi fie $(\ell(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ şirul normelor corespunzătoare. Dacă $\lim_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, atunci:
$\lim_{n\to\infty} s(d_n) = \mathbf{i}$ şi $\lim_{n\to\infty} S(d_n) = \mathbf{I}$.

10.2 Definitia integralei triple.

Funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup (\mathbb{S})$ dacă avem $\mathbf{i} = \mathbf{I}$.
Dacă acest lucru are loc, atunci valoarea comună se notează prin:
$\iiint_{\overline{\mathbb{X}}} f(x, y, z)dv$, sau $\iiint_{\mathbb{X}} f(x, y, z)dv$, şi se numeşte integrala triplă a lui f

relativă la domeniul $\overline{\mathbb{X}}$ (sau la domeniul $\mathbb{X}$). Simbolul dv are semnificaţia unui element de volum şi însăşi notaţia propusă reaminteşte formarea sumelor integrale. Această notaţie este justificată în special de teorema următoare:
Teorema 2: Fie punctele $P_j^{(n)} \subset \mathbb{X}_j^{(n)}$. Dacă funcţia f este integrabilă pe $\mathbb{X}$, atunci limita sumei integrale a lui Riemann:

$$\sigma(d_n) = \sum_{j=1}^{p_n} f(P_j^{(n)}) v_j^{(n)}, \tag{10.1}$$

în care $v_j^{(n)}$ este volumul lui $X_j^{(n)}$ atunci când $n \to \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$, este egală cu:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(d_n) = \mathbf{i} = \mathbf{I} = \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dv,$$

Observaţie. Uneori integrala triplă se notează tot cu un singur semn $\int$" pentru simplificarea scrisului. Deci se poate scrie:

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} = \int_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dv$$

La fel ca pentru integrala dublă putem da următorul criteriu de integrabilitate:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia f să fie integrabilă pe $\mathbb{X}$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să se găsească o diviziune d a lui $\mathbb{X}$ astfel ca $S(d) - s(d) < \varepsilon$. Într-adevăr, avem $0 \le \mathbf{I} - \mathbf{i} \le S(d) - s(d) < \varepsilon$. Cum ε este arbitrar de mic rezultă $\mathbf{I} = \mathbf{i}$.
Consecinţă. Ştiim că o funcţie f continuă pe $\mathbb{X}$ (compact) este uniform continuă pe X adică pentru orice $\varepsilon > 0$, corespunde un $\eta(e) > 0$ astfel încât $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$ dacă $\|P - P'\| < \eta(\varepsilon)$. Am notat prin P punctul (x,y,z) şi prin P' punctul (x',y',z'). Utilizând acest rezultat se demonstrează:
Teorema 3 Orice funcţie continuă pe X este integrabilă pe acest domeniu. Într-adevăr, fie diviziunea (d_n) şi fie punctele $P_j^{(n)}$ şi $P_j^{'(n)} \in \mathbb{X}_j^{(n)}$, pentru care avem $M_j^{(n)} = f(P_j^{(n)})$, $m_j^{(n)} = f(P_j^{'(n)})$, adică pentru care funcţia îşi atinge maximul sau minimul în $X_j^{(n)}$. Avem:
$S(d_n) = \sum\limits_{j=1}^{p_n} f(P_j^{(n)}) v_j^{(n)}$, $s(d_n) = \sum\limits_{j=1}^{p_n} f(P_j^{'(n)}) v_j^{(n)}$,
deci $S(d_n) - s(d_n) = \sum\limits_{j=1}^{p_n} [f(P_j^{(n)}) - f(P_j^{'(n)})] v_j^{(n)}$ şi $S(d_n) - s(d_n) < \varepsilon \sum\limits_{j=1}^{p_n} v_j^{(n)} = \varepsilon V$ dacă $\ell(d_n) < \eta(\varepsilon)$. Rezultă că funcţia f este integrabilă.

10.3 Împărţirea particulară a domeniului $\mathbb{X}$.

Fiind dat domeniul tridimensional $\mathbb{X}$, putem face împărţirea sa în subdomeniile $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p$ prin paralele la planele de coordonate. Fie $x = x_j(j = 1, ..., q), y = y_k(k = 1, ..., r)$ şi $z = z_l(l = 1, 2, ..., s)$ ecuaţiile acestor plane. Un punct $P \in \mathbb{X}$ are coordonatele x, y, z. Să presupunem că atunci când parcurgem pe $\mathbb{X}$, abscisa sa variază în intervalul finit $[a, b]$, ordonata sa y variază în intervalul finit $[a', b']$, iar cota z variază în intervalul finit $[a'', b'']$. Avem deci: $a < x_1 < ... < x_{q-1} < b$; $a' < y_1 < ... < y_{r-1} < b'$; $a'' < z_1 < ... < z_{l-1} < b''$, deci la diviziunea (d) a lui $\mathbb{X}$ corespund diviziunile $(d^x), (d^y), (d^z)$ ale intervalelor $[a, b], [a', b'], [a'', b'']$. Domeniile subdiviziunilor sunt acum paralelipipede cu muchiile paralele cu axele de coordonate. Volumul unui astfel de

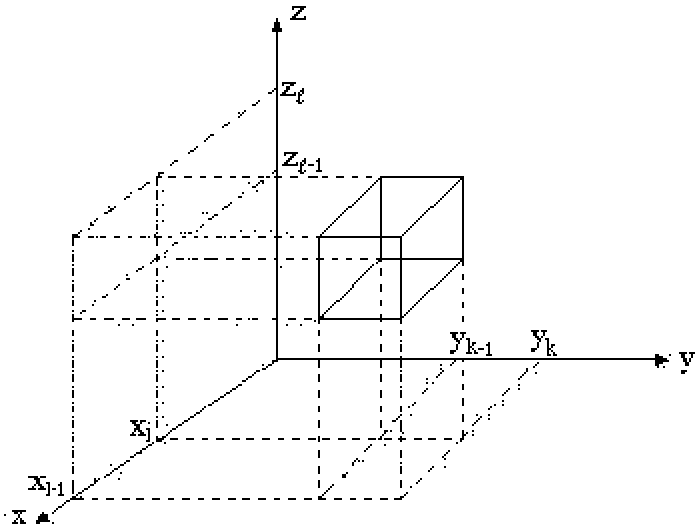

Fig. 10.1:

subdomeniu complet interior lui $\mathbb{X}$ este:

$$(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})(z_\ell - z_{\ell-1})$$

Există însă şi domenii ale diviziunii care sunt intersectate de frontiera lui $\mathbb{X}$. Dacă norma diviziunii este $\ell(d)$, ea reprezintă în acest caz maximul lungimilor diagonalelor paralelogramelor interioare complet lui $\mathbb{X}$. Prin urmare normele diviziunilor $(d^x), (d^y), (d^z)$, adică $\ell(d^x), \ell(d^y), \ell(d^z)$, care reprezintă maximele muchiilor, sunt mai mici decât $\ell(d)$. Rezultă că în suma integrală $s(d)$ contribuţia paralelipipedelor care intersectează frontiera poate fi majorată la fel ca la integrala dublă. Dacă frontiera $\mathbb{S} = Fr\mathbb{X}$ este taiata numai în două puncte de o paralela la axa Ox, este tăiată numai în două puncte de o paralelă la axa

Oy şi este tăiata numai în două puncte de o paralelă la axa Oz, dacă M este marginea superioară a lui $|f(x,y,z)|$ pe $\mathbb{X}$, atunci contribuţia în suma integrală $s(d)$ este mai mică decât: $2M[(b-a)+(b'-a')+(b''-a'')]\ell(d)$, şi aceasta tinde la zero pentru şirurile de diviziuni $(d_n)_{n?N}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\ell(d_n)=0$. Dacă funcţia este integrabilă, avem deci:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dv = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{s} f(P_{jk\ell}^{(n)})(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)})(y_k^{(n)}-y_{k-1}^{(n)})(z_\ell^{(n)}-z_{\ell-1}^{(n)}) \tag{10.2}$$

unde $x_j^{(n)}, y_k^{(n)}, z_l^{(n)}$ sunt puncte de diviziune ale intervalelor $[a,b],[a',b']$ şi $[a'',b'']$ în diviziunea d_n, iar $P_{jkl}^{(n)}$ un punct al paralelogramului determinat de $[x_{j-1}^{(n)},x_j^{(n)}]$, $[y_{k-1}^{(n)},y_k^{(n)}]$, şi $[z_{l-1}^{(n)},z_l^{(n)}]$ care aparţin în acelaşi timp lui $\mathbb{X}\cup\mathbb{S}$ (pentru ca frontiera să fie definită în acest punct), cu condiţia $\lim\limits_{n\to\infty}\ell(d_n)=0$.

10.4 Noua definiţie şi notaţie a integralei triple.

Ca urmare a relaţiei precedente se obisnuieşte a se reprezenta integrala triplă şi prin relatia simbolică:

$$\mathbf{I} = \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz. \tag{10.3}$$

Notaţia prezintă acelaşi pericolul de confuzie ca la integrala dublă. Aici dx, dy, dz se raportă la deplasările $(dx,0,0),(0,dy,0),(0,0,dz)$ pe laturile unui paralelipiped şi nu la creşterile dx, dy, dz pe o aceeaşi curbă. Mai corect ar fi de a scrie: $dv = d_1xd_2yd_3z$, dar ar complica în mod inutil scrierea.

10.5 Proprietăţile integralei triple

Aceste proprietăţi sunt aceleaşi ca la integrla dublă şi se stabilesc la fel:
Proprietatea 1. Dacă $f(x,y,z)$ şi $g(x,y,z)$ sunt integrabile pe $\mathbb{X}$, atunci şi $f(x,y,z)\pm g(x,y,z)$ sunt integrabile pe $\mathbb{X}$ şi avem:

$$\iiint_{\mathbb{X}}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dxdydz == \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint_{\mathbb{X}} g(x,y,z)dxdydz$$

Proprietatea 2. Dacă λ este o constantă, avem:

$$\iiint_X \lambda f(x,y,z)dxdydz = \lambda\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz$$

Proprietatea 3. Daca domeniul $\mathbb{X}$ este împărţit în două domenii $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$,printr-o suprafaţă $\mathbb{S}_0$ formată dintr-un număr finit de suprafeţe netede, atunci:

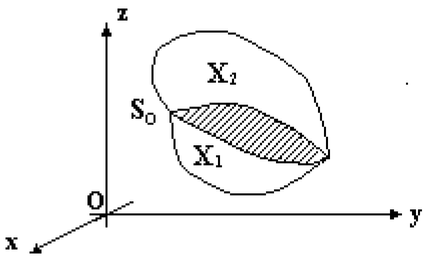

Fig. 10.2:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathbb{X}_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\mathbb{X}_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Proprietatea 4. Formula mediei. Dacă M şi m sunt respectiv marginea superioară şi marginea inferioară a lui f pe $\underline{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup (\mathbb{S})$, atunci:

$$mV \leq \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz \leq MV$$

deci:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \mu V,$$

unde $m \leq \mu \leq M$. În particular dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe X, atunci există un punct $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{X}$ pentru care $f(\xi,\eta,\zeta) = \mu$. În acest caz avem:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)V,$$

Aceasta este de fapt formula mediei.
Observatie: Dacă $f(x,y,z) = 1$ pe $\mathbb{X}$, atunci:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = V,$$

Proprietatea 5. O formulă de majorare. Dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe $\mathbb{X}$, atunci şi $|f(x,y,z)|$ este integrabilă pe $\mathbb{X}$ şi avem:

$$|\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz| \leq \iiint_{\mathbb{X}} |f(x,y,z)|dxdydz,$$

10.6 Calculul integralelor triple.

Cazul paralelipipedului.

Vom considera întâi la fel ca la integrala dublă, cazul în care $\mathbb{X}$ este un interval tridimensional adică: $\mathbb{X} = \{(x,y,z)|a \leq x \leq b, a' \leq x \leq b', a'' \leq x \leq b''\}$ Fie

o diviziune (d) realizată prin împărţirea intervalelor $[a,b],[a',b'],[a'',b'']$ cu ajutorul punctelor:
$(d^x): a, x_1, ..., x_{j-1}, x_j, ..., x_{q-1}, b$
$(d^y): a', y_1, ..., y_{k-1}, y_k, ..., y_{r-1}, b'$
$(d^y): a'', z_1, ..., z_{l-1}, z_l, ..., z_{s-1}, b''$
Notăm prin $M_{jk\ell}$ si $m_{jk\ell}$ marginea superioară şi marginea inferioară a lui $f(x,y,z)$ în paralelipipedul $X_{jk\ell}$ definit prin:
$x_{j-1} \le x \le x_j$, $y_{k-1} \le y \le y_k$, $z_{\ell-1} \le z \le z_\ell$. Avem:
$s(d) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{s} m_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})(z_\ell - z_{\ell-1})$
$S(d) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{s} M_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})(z_\ell - z_{\ell-1})$ Conform proprietăţii integralei simple avem pentru funcţia $f(x,y,z)$, considerată pentru x şi y fixati şi integrând între $z_{\ell-1}$ şi z_ℓ în inegalitatea $m_{jk\ell} \le f(x,y,z) \le M_{jk\ell}$, obţinem:
$m_{jkl}(z_l - z_{l-1}) \le \int_{z_{l-1}}^{z_l} f(x,y,z)dz \le M_{jkl}(z_l - z_{l-1})$,
dacă $x \in [x_{j-1}, x_j]$ şi $y \in [y_{k-1}, y_k]$. Scriind relaţiile de mai sus pentru $\ell = 1, 2, ..., s$ si adunându-le deducem:
$\sum_{\ell=1}^{s} m_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1}) = \int_{a''}^{b''} f(x,y,z)dz = \sum_{\ell=1}^{s} M_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1})$,
pentru orice $x \in [x_{j-1}, x_j]$ şi $y \in [y_{k-1}, y_k]$.
Fie functia de doua variabile:

$$F(x,y) = \int_{a''}^{b''} f(x,y,z)dz,$$

care este definită pentru orice $x \in [a,b]$ şi $y \in [a',b']$. Dacă ea este integrabilă pe acest interval bidimensional(ceeace are loc dacă f este continuă), atunci avem, din definiţia lui $F(x,y)$ şi a inegalităţii precedente:

$$\sum_{\ell=1}^{s} m_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1}) \le F(x,y) \le \sum_{\ell=1}^{s} M_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1})$$

Dar conform cu formulele de majorare de la integralele duble, rezultă de aici că integrând pe intervalul bidimensional: $D_{jk} = \{(x,y)|x_{j-1} \le x \le x_j, y_{k-1} \le y \le y_k\}$, avem:$(x_{j-1}-x_j)(y_{k-1}-y_k)\sum_{\ell=1}^{s} m_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1}) \le \iint_{\mathbb{D}_{jk}} F(x,y)dxdy \le (x_{j-1}-x_j)(y_{k-1}-y_k)\sum_{\ell=1}^{s} M_{jk\ell}(z_\ell - z_{\ell-1})$ Dând lui j şi lui k toate valorile $j = 1, 2, ..., q; k = 1, 2, ..., r$ şi adunând obţinem chiar sumele $s(d)$ şi $S(d)$ scrise la început, în timp ce:

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\iint_{\mathbb{D}_{jk}} F(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{D}} F(x,y)dxdy,$$

unde $\mathbb{D}$ este intervalul bidimensional(dreptunghiul) $[a,b]\times[a',b']$. Prin urmare:

$$s(d) \leq \iint_{\mathbb{D}} dxdy \int_{a''}^{b''} f(x,y,z)dz \leq S(d), \tag{10.4}$$

Daca considerăm un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale intervalului tridimensional X şi dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe $\mathbb{X}$, atunci pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$ avem:

$$\mathbf{I} = \lim_{n\to\infty} s(d_n) = \lim_{n\to\infty} S(d_n) = \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz,$$

Rezultă că numărul fix (independent de n) încadrat de $s(d_n)$ şi de $S(d_n)$ în (10.4) este egal cu această limită, adică:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{D}} dxdy \int_{a''}^{b''} f(x,y,z)dz, \tag{10.5}$$

Prin urmare integrala triplă se obţine calculând întâi integrala simplă, $F(x,y)$, pentru x şi y fixati şi apoi integrând pe $F(x,y)$ pe domeniul bidimensional $\mathbb{D}$, care este domeniul descris de punctul $P(x,y,0)$ de proiecţie a punctului $M(x,y,z)$ care descrie domeniul tridimensional $\mathbb{X}$.
Observaţie: Axele Ox, Oy, Oz având un rol simetric, se mai pot scrie încă două formule analoage, înlocuind proiecţii pe planele Oyz sau Ozx.

Cazul general.

Presupunem domeniul $\mathbb{X}$ astfel încât frontiera sa să fie formată din două suprafeţe netede $\mathbb{S}_1$ şi $\mathbb{S}_2$ tăiate fiecare numai în câte un punct de o paralelă la axa Oz şi eventual de o a treia suprafaţă cilindrică $\mathbb{S}_3$(suprafaţa generată de o dreaptă ce se deplasează paralel cu axa Oz) Fie $z = \varphi_1(x,y)$, cu $(x,y) \in \mathbb{D}$, ecuaţia suprafeţei $\mathbb{S}_1$ şi $z = \varphi_2(x,y)$, cu $(x,y) \in \mathbb{D}$, ecuaţia suprafeţei $\mathbb{S}_2$. Avem $\varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y)$, cu $(x,y) \in \mathbb{D}$. Aici prin $\mathbb{D}$ s-a notat domeniul bidimensional descris de (x,y) când $z = \varphi_1(x,y)$, sau $z = \varphi_2(x,y)$, descrris respectiv de $\mathbb{S}_1$ şi $\mathbb{S}_2$. Acest domeniu notat cu $\mathbb{X}$ este inclus într-un interval tridimensional : $\mathbb{X}_0 = \{(x,y,z)|a \leq x \leq b, a' \leq x \leq b', a'' \leq x \leq b''\}$, ales convenabil. Vom avea urmatoarea teorema:

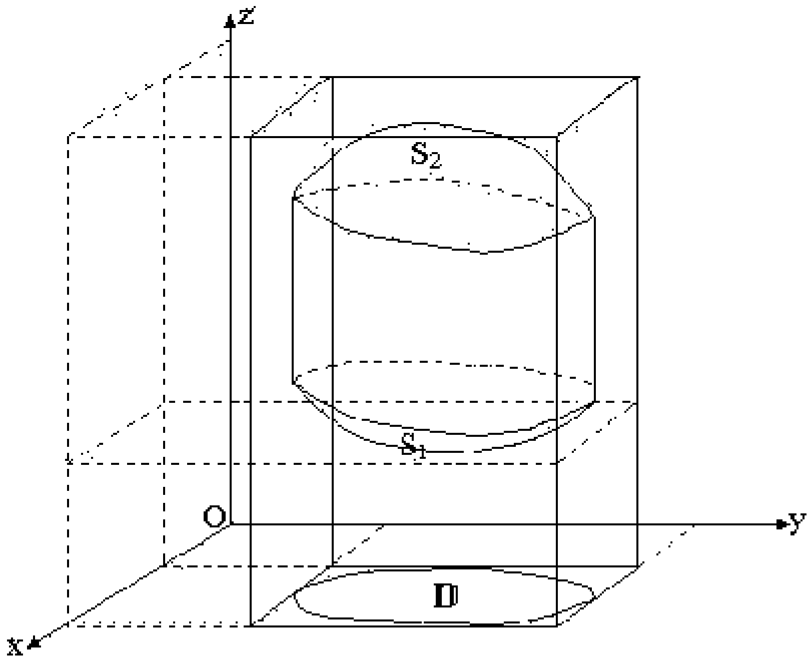

Fig. 10.3:

Teorema 3.
a) Dacă funcţia $f(x, y, z)$ este mărginită şi integrabilă pe $\mathbb{X}$,
b) dacă există integrala:

$$F(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz, \tag{10.6}$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{D}$
c) dacă $F(x, y)$ este integrabilă pe D, atunci avem relaţia:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{\mathbb{D}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{10.7}$$

Prin urmare integrala triplă se obţine calculând întâi integrala simplă:

$$F(x, y) = \int \_\varphi_1(x, y)^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

pentru (x, y) fixat, în $\mathbb{D}$ şi apoi integrând pe $F(x, y)$ pe domeniul $\mathbb{D}$.
Ideea demonstraţiei este absolut analoagă cu cea de la integrala dublă. Ea se bazează pe considerarea funcţiei auxiliare, definită prin:

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), \text{ dacă } (x, y, z) \in \mathbb{X} \cup (\mathbb{S}) = \overline{\mathbb{X}} \\ 0 \text{ , dacă } (x, y, z) \in \mathbb{X}_0 - \overline{\mathbb{X}} \end{cases}$$

unde $\mathbb{X}_0$ este paralelipipedul cu feţele paralele cu planele de coordonate şi conţine pe $\mathbb{X}$. Funcţia $g(x,y,z)$ este integrabilă pe $\mathbb{X}_0$ căci ea este integrabilă pe X şi de asemenea, fiind nulă, este integrabilă pe $\mathbb{X}_0 - \overline{\mathbb{X}}$. Avem deci: $J = \iiint_{\mathbb{X}_0} g(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathbb{X}} g(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\mathbb{X}_0-\overline{\mathbb{X}}} g(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\mathbb{X}} g(x,y,z)dxdydz.$

Apoi:$J = \iiint_{\mathbb{X}_0} g(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{D}_0} dxdy \int_{a''}^{b''} g(x,y,z)dz$, unde $\mathbb{D}_0 = \{(x,y)|a \leq x \leq b, a' \leq x \leq b'\}$. Avem: $\int_{a''}^{b''} g(x,y,z)dz = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} g(x,y,z)dz$, dacă $(x,y) \in \mathbb{D}$, căci g este nulă pe $[a'', \varphi_1)$ si pe $(\varphi_2, b'']$. Daca $(x,y) \in \mathbb{D}_0 - \mathbb{D}$, avem: $\int_{a''}^{b''} g(x,y,z)dz = 0$, căci $g = 0$ Deci cum $\iiint_{\mathbb{D}_0} = \iiint_{\mathbb{D}} + \iiint_{\mathbb{D}_0-\mathbb{D}}$ rezulta formula (10.7).

Observaţii.

1 Dacă f este continuă pe X, toate condiţiile din enunţ sunt satisfăcute.

2 Dacă domeniul X nu îndeplineşte condiţia ca în afară de porţiunea cilindrică $\mathbb{S}_3$ cu generatoarele paralele cu Oz, să fie limitat de suprafeţele $\mathbb{S}_1$ şi $\mathbb{S}_2$, tăiate în câte un singur punct de o paralelă la Oz, el se va împărţi în domenii care să îndeplinească condiţia şi se va calcula integralele triple pentru acele domenii, adunându-se apoi rezultatele, conform proprietătii 4.

Aplicaţie. Să considerăm domeniul X ca în figura 10.4 stânga: X este limitat

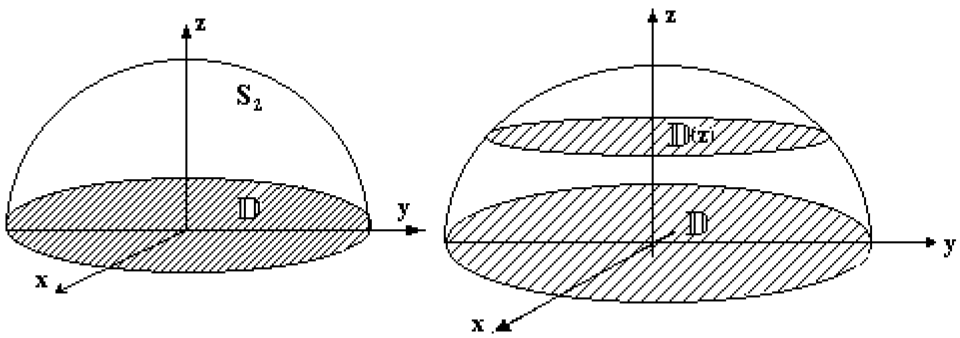

Fig. 10.4:

de emisfera superioară şi de discul din planul Oxy, proiectia emisferei dată de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, pentru care $z \geq 0$. Aici $\mathbb{S}_1 = \mathbb{D}$ are ecuaţia $z = 0$, $\mathbb{D}$ este domeniul plan limitat de cercul: $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ iar ecuaţia suprafeţei

$\mathbb{S}_2$ este: $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ În cazul actual:

$$I = \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{D}} dxdy \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$$

10.7 O altă formulă pentru calculul integralelor triple.

Cazul paralelipipedului.

Conform proprietăţii integralei duble avem pentru funcţia $f(x,y,z)$, considerată pentru z fixat, integrând pe domeniul D_{jk} şi ţinând cont de inegalitatea $m_{jkl} \leq f(x,y,z) \leq M_{jkl}$, obţinem:

$$m_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) = \iint_{\mathbb{D}_{jk}} f(x,y,z)dxdy \leq M_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

dacă $z \in [z_{\ell-1}, z_\ell]$. Scriind relaţiile de mai sus pentru $j = 1, 2, ..., q; k = 1, 2, ..., r$ şi adunându-le deducem:

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} m_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \leq \iint_{\mathbb{D}_z} f(x,y,z)dxdy \leq \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} M_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

pentru orice $z \in [z_{\ell-1}, z_\ell]$. $\mathbb{D}_z$ este suma domeniilor $\mathbb{D}_{jk}$. Fie funcţia de o variabilă:

$$G(z) = \iint_{\mathbb{D}_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Dacă este integrabilă pentru $z \in [a'', b'']$ atunci:

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} m_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \leq G(z) \leq \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} M_{jk\ell}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

Integrând între $z_{\ell-1}$ şi z_ℓ şi adunând obţinem:

$$s(d) \leq \int_{a''}^{b''} G(z)dz \leq S(d)$$

Prin urmare:

$$s(d) \leq \int_{a''}^{b''} dz \iint_{\mathbb{D}_z} f(x,y,z)dxdy \leq S(d).$$

Dacă considerăm un şir de diviziuni $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale intervalului tridimensional $\mathbb{X}$ şi dacă $f(x,y,z)$ este integrabilă pe X, atunci pentru $\lim_{n\to\infty} \ell(d_n) = 0$ avem:

$$\mathbf{I} = \lim_{n\to\infty} s(d_n) = \lim_{n\to\infty} S(d_n) = \iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz. \tag{10.8}$$

Rezultă că numărul fix (independent de n) încadrat de $s(d_n)$ şi de $S(d_n)$ în relaţia de mai sus este egal cu această limită, adică:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a''}^{b''} dz \iint_{\mathbb{D}_z} f(x,y,z)dxdydz. \tag{10.9}$$

Prin urmare integrala triplă se obţine calculând întâi integrala dublă, pentru z fixat şi apoi integrând pe $G(z)$ pe domeniul unidimensional $[a'', b'']$, care este domeniul descris de punctul $P(0,0,z)$ de proiectie a punctului $M(x,y,z)$ pe axa Oz, care descrie domeniul tridimensional $\mathbb{X}$.
Observaţie: Axele Ox, Oy, Oz având un rol simetric, se mai pot scrie încă două formule analoage, înlocuind proiecţii pe planele Oyz sau Ozx.

Cazul general.

Presupunem domeniul $\mathbb{X}$ astfel încât pentru un z fixat planele $z = constant$ să intersecteze $\mathbb{X}$ în domenii simple în raport cu una sau cu alta din variabilele sale în domenii notate cu $\mathbb{D}(z)$ sau cu $\mathbb{D}_z$. Vom avea urmatoarea teorema:

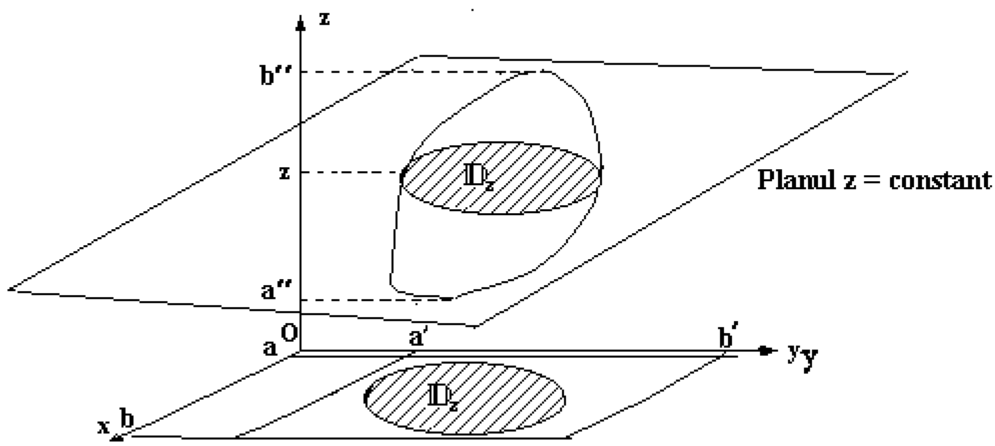

Fig. 10.5:

Teorema 4.
a) Dacă funcţia $f(x,y,z)$ este marginită şi integrabilă pe $\mathbb{X}$,
b) dacă există integrala dublă:

$$G(z) = \iint_{D(x)} f(x,y,z)dxdy, \tag{10.10}$$

pentru orice $z \in [a'', b'']$
c) dacă $G(z)$ este integrabilă pe $[a'', b'']$, atunci avem relaţia:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a''}^{b''} dz \iint_{\mathbb{D}(z)} f(x,y,z)dxdy. \tag{10.11}$$

Prin urmare integrala triplă se obţine calculând întâi integrala dublă:

$$G(z) = \iint_{\mathbb{D}(z)} f(x,y,z)dz,$$

pentru z fixat, în $[a'', b'']$ şi apoi integrând pe $G(z)$ pe domeniul $[a'', b'']$. $\lceil$ Ideea demonstraţiei este absolut analoagă cu cea de la integrala dublă. Ea se bazează pe considerarea funcţiei auxiliare, definită prin:

$$g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), \text{ dacă } (x,y,z) \in \mathbb{X} \cup \mathbb{S} = \overline{\mathbb{X}} \\ 0 \text{ , dacă } (x,y,z) \in \mathbb{X}_0 - \overline{\mathbb{X}} \end{cases}$$

unde $\mathbb{X}_0$ este paralelipipedul cu feţele paralele cu planele de coordonate şi contine pe $\mathbb{X}$. Funcţia $g(x,y,z)$ este integrabilă pe $\mathbb{X}_0$ căci ea este integrabilă pe X şi de asemenea, fiind nulă, este integrabilă pe $\mathbb{X}_0 - \overline{\mathbb{X}}$. Avem deci:

$$J = \iiint_{\mathbb{X}_0} g(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\overline{\mathbb{X}}} g(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\mathbb{X}_0 - \overline{\mathbb{X}}} g(x,y,z)dxdydz$$

$= \iiint_{\overline{\mathbb{X}}} f(x,y,z)dxdydz$. Apoi:

$$J = \iiint_{\mathbb{X}_0} g(x,y,z)dxdydz = \int_{a''}^{b''} dz \iint_{\mathbb{D}_0} g(x,y,z)dxdy,$$

unde $\mathbb{D}_0 = \{(x,y) | a \le x \le b, a' \le x \le b'\}$. Avem, pentru un z fixat:

$$\iint_{\mathbb{D}_0} g(x,y,z)dxdy = \iint_{\mathbb{D}(z)} f(x,y,z)dxdy$$

unde $\mathbb{D}(z)$ s-a obţinut prin secţionarea lui $\mathbb{X}$ cu planul $z = constant \rfloor$.

Reluând exemplu dat cu metoda cealaltă, fig.10.4, dreapta, vom avea:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^r dz \iint_{\mathbb{D}(z)} f(x,y,z)dxdy,$$

cu :

$$\mathbb{D}(z) = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le r^2 - z^2\}.$$

10.8 Formula lui Gauss şi Ostrogradski.

Fie funcţiile $P, Q, R : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ continuie şi cu derivatele prime continuie. Să considerăm integrala: $I = \iiint_{\mathbb{X}} \dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz$. În ipoteza că frontiera

$\mathbb{S}$ a domeniului $\mathbb{X}$ este de forma deja considerată la stabilirea de exemplu a formulei (10.7) pentru calculul integralei triple putem scrie:

$$I = \iint_{\mathbb{D}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dz.$$

Astfel că vom avea:

$$I = \iint_{\mathbb{D}} R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy - \iint_{\mathbb{D}} R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy.$$

Notând prin $\overrightarrow{n} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$ versorul normalei exterioare pe suprafaţa S, avem pe porţiunea $\mathbb{S}_2$ a lui $\mathbb{S}$: $\gamma d\sigma = dxdy$ iar pe porţiunea $\mathbb{S}_1$ a lui $S : \gamma d\sigma = -dxdy$. Pe porţiunea $\mathbb{S}_3$ a lui $\mathbb{S}$(dacă există) avem $\gamma = 0$, deci:

$$\iiint_{\mathbb{X}} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{S}_2} R(x,y,z)\gamma d\sigma + \iint_{\mathbb{S}_1} R(x,y,z)\gamma d\sigma + \iint_{\mathbb{S}_3} P3(x,y,z)\gamma d\sigma$$

sau în mod condensat:

$$\iiint_{X} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} R(x,y,z)\gamma d\sigma. \tag{10.12}$$

unde integrala de suprafaţă pe $\mathbb{S} = Fr\mathbb{X}$ este o integrală pe o suprafaţă închisă. Această formulă este valabilă pentru orice domeniu $\mathbb{X}$ care poate fi împărţit într-un număr finit de domenii, care îndeplinesc condiţii impuse frontierei prin suprafeţe auxiliare. Adunând termen cu termen formulele scrise pentru aceste domenii, se regăseşte formula (10.12) deoarece suprafeţele auxiliare intervin în aceste formule odată cu normala orientată într-un sens şi apoi în sensul celălalt. În mod analog, se stabilesc formulele:

$$\iiint_{X} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} Q(x,y,z)\beta d\sigma. \tag{10.13}$$

şi

$$\iiint_{X} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} P(x,y,z)\alpha d\sigma. \tag{10.14}$$

din cauza simetriei rolului axelor.

Adunnd termen cu termen, formulele (10.12), (10.13), (10.14), vom fi conduşi la formula lui Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_{\mathbb{X}} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} (P\alpha + Q\beta + R\gamma)d\sigma. \tag{10.15}$$

<u>Definiţie</u>: Fiind dat câ mpul vectorial:

$$\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k},$$

se numeşte "divergenţa" a câmpului $\overrightarrow{F}$ şi se notaeză cu $div\overrightarrow{F}$ sau $\nabla\overrightarrow{F}$ funcţia scalară:

$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{10.16}$$

În membrul al doilea al formulei Gauss-Ostrogradsky (10.15) figureaza integrala:

$$\iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n_{ext.}} d\sigma,$$

unde $\overrightarrow{n_{ext.}}$ reprezintă versorul normalei exterioare pe suprafaţa $\mathbb{S}$ notat prin $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$. Aceasta este fluxul câmpului F prin suprafaţa închisă $\mathbb{S}$. Formula (10.15) se mai scrie:

$$\iiint_{\mathbb{X}} div\overrightarrow{F} dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n_{ext.}} ds. \tag{10.17}$$

şi ea mai poartă numele de "formula flux-divergenţă".

10.9 Schimbarea de variabilă în integrala triplă.

Formula de schimbare de variabilă în integrala triplă este similară cu aceea de la integrala dublă. Ea revine la a stabili relaţia dintre volumele v_i şi v_i' ale domeniilor elementare care se corespund în diviziunile (d) şi (d') ale domeniului de integrare $\mathbb{X}$ şi ale imaginii sale $\mathbb{X}'$. Fie $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z =$

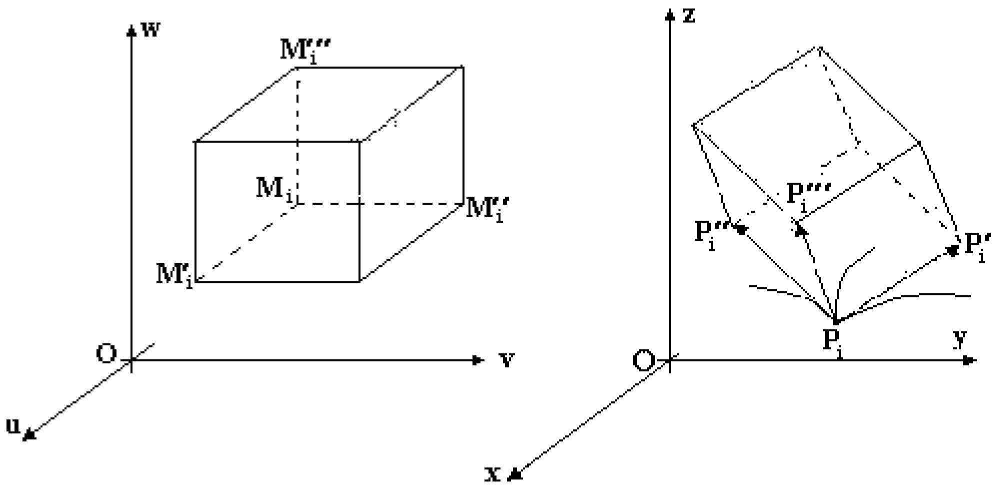

Fig. 10.6:

$z(u, v, w)$, schimbarea de variabile, care transformă domeniul $\mathbb{X}' \subset \mathbb{R}^3$ descris de punctul (u, v, w) în domeniul $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3$ descris de punctul (x, y, z). Funcţiile

$x, y, z : \mathbb{X}' \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt continuie şi cu derivatele prime continuie pe X. Să considerăm o împărţire a domeniului $\mathbb{X}'$ prin planele $u = constant$ sau $v = constant$ sau $w = constant$ si fie $\mathbb{X}'$ un paralelipiped elementar pentru care un vrf M_i are coordonatele (u_i, v_i, w_i) iar celelalte situate pe paralele la axele Ou, Ov, Ow, cu coordonatele $M_i'(u_i + d_1u_i, v_i, w_i)$, M_i'' cu coordonatele $(u_i, v_i + d_2v_i, w_i)$, M_i''' cu coordonatele $(u_i, v_i, w_i + d_3w_i)$, unde d_1u_i, d_2v_i, d_3w_i, reprezintă creşteri independente suficient de mici în modul, pe care le dăm respectiv lui u_i, v_i, w_i. Volumul paralelipipedului din Fig. 10.6 este $v_i' = d_1u_id_2v_id_3w_i$. Scriind transformarea sub formă vectorială $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v, w)$, punctului M_i îi corespunde punctul P_i de vector de poziţie $\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{r}_i(u_i, v_i, w_i)$. Când u_i creşte cu d_1u_i, v_i, w_i, rămânând fixaţi, punctul P_i ajunge în P_i'; la fel când v_i creşte cu d_2v_i, u_i, w_i, rămânând fixaţi, punctul P_i ajunge în P_i''; iar când w_i creşte cu d_3w_i, u_i, v_i, rămânând fixaţi, punctul P_i ajunge în P_i'''. Avem evident: $d_1\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_iP_i'} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}d_1u_i$, $d_2\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_iP_i''} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}d_2v_i$, $d_3\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_iP_i'''} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}d_2w_i$ unde derivatele sunt calculate în punctul (u_i, v_i, w_i). Volumul v_i al paralelipipedului elementar definit de aceşti vectori este dat de produsul mixt:

$$(d_1\overrightarrow{r}, d_2\overrightarrow{r}, d_3\overrightarrow{r}) = d_1\overrightarrow{r} \cdot (d_2\overrightarrow{r} \times d_3\overrightarrow{r}),$$

care trebuie luat în valoare absolută. Se găseşte astfel formula:

$$dv_i = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| v_i', \tag{10.18}$$

în care derivatele parţiale $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}; \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial a}$ se calculează în punctul (u_i, v_i, w_i). Formând sumele integrale relative la diviziunea (d') şi la diviziunea corespunzătoare (d) se ajunge apoi la formula:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{\mathbb{X}'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw, \tag{10.19}$$

unde reamintim că notaţiile $dudvdw$ şi $dxdydz$ pentru elementele de volum sunt simbolice creşterile lui u, v, w şi de asemeni ale lui x, y, z fiind luate în câte trei direcţii. Pentru calculul integralei din membrul drept nu este întotdeauna nevoie de a construi pe $\mathbb{X}'$. Va fi suficient de a examina suprafeţele $u = constant$ sau $v = constant$ sau $w = constant$ în spaţiul $Oxyz$, procedând ca la integrala dublă.

Observaţie: Aşa cum am demonstrat în cazul schimbarii de variabille la integrala dubla folosind formula lui Green, tot aşa şi în cazul schimbării de variabile la integrala triplă se poate folosi formula Gauss-Ostrogradski. De exemplu dacă vom lua în (10.15) $P = 0, Q = 0, R = z$ atunci formula devine:

$$\iiint_{\mathbb{X}} dxdydz = \iint_{\mathbb{S}} z\gamma d\sigma = \iint_{\mathbb{S}} zdxdy. \tag{10.20}$$

Dacă considerăm transformarea:

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), cu(u, v, w) \in \mathbb{X}'.$$

Presupunem suprafaţa $\mathbb{S}'$ ce mărgineşte pe X' şi suprafaţa S ce mărgineşte pe X şi reprezentarea parametrică a lui $\mathbb{S}'$:

$$u = u(\alpha, \beta), v = v(\alpha, \beta), w = w(\alpha, \beta),$$

atunci x, y, z, depind prin intermediul lui u, v, w de α, β, unde $(\alpha, \beta) \in \Delta$ rezultă:

$$\iint_{\mathbb{S}} zdxdy = \iint_{\Delta} z\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}d\alpha d\beta.$$

Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse se poate verifica prin calcul că:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}\frac{\partial(v, w)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}\frac{\partial(w, u)}{\partial(\alpha, \beta)}$$

şi deci:

$$\iint_{\mathbb{S}} zdxdy = \iint_{\Delta} z[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}+\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}\frac{\partial(v, w)}{\partial(\alpha, \beta)}+\frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}\frac{\partial(w, u)}{\partial(\alpha, \beta)}]d\alpha d\beta$$

$= \iint_{\mathbb{S}'} z[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv + \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}dvdw + \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}dwdu]$ Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski obţinem:

$$\iiint_{\mathbb{X}} dxdydz = \iiint_{\mathbb{X}'} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}dudvdw. \tag{10.21}$$

Dacă vom lua un subdomeniu $\mathbb{X}_i$ de volum v_i acesta are corespondent subdomeniul $\mathbb{X}'_i$ de volum v'_i şi cu formula de medie aplicată în (10.21) rezulta formula (10.18), care stă la baza formulei de schimbare de variabile, în integrala triplă.

10.10 Restabilirea ariei unei suprafeţe.

Ca aplicaţie vom restabili formula ariei unei suprafeţe ($\mathbb{S}$) din spaţiu într-un alt mod. Astfel imaginându-ne suprafaţa ($\mathbb{S}$) ca pe o "coaja" ($\mathbb{S}_\varepsilon$) de grosime 2ε (luată pe direcţia versorului normalei în cele două sensuri ale sale). Acastă "coajă" va avea un volum $V(S_\varepsilon)$. Prin definiţie, aria suprafeţei ($\mathbb{S}$) va fi:

$$\sigma(\mathbb{S}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\mathbb{S}_\varepsilon)}{2\varepsilon}. \tag{10.22}$$

Aplicaţie. Să se calculeze suprafaţa sferei cu centru în origine şi de rază

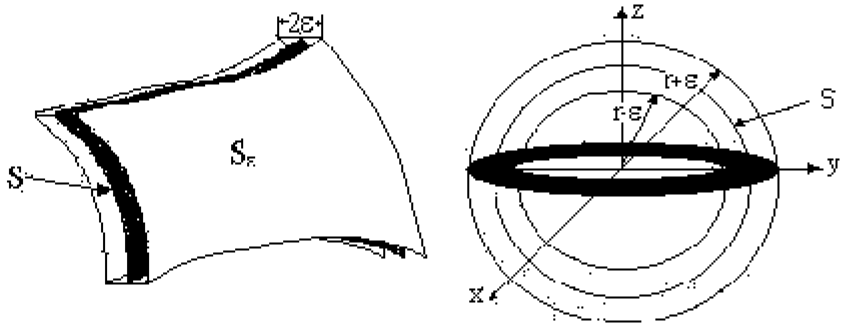

Fig. 10.7:

$r > 0(x^2 + y^2 + z^2 = r^2)$.
Avem în acest caz:

$$\mathbb{S}_\varepsilon = \{(x, y, z) | (r - \varepsilon)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq (r + \varepsilon)^2\}$$

$$V(\mathbb{S}_\varepsilon) = \frac{4\pi(r+\varepsilon)^2}{3} - \frac{4\pi(r-\varepsilon)^2}{3} = \frac{4\pi}{3}(6r^2\varepsilon - 2\varepsilon^3) = 8\pi r^2 \varepsilon - \frac{8\pi}{3}\varepsilon^3.$$

Vom avea deci conform definiţiei (10.22)

$$\sigma(\mathbb{S}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{8\pi r^2 \varepsilon - \frac{8\pi}{3}\varepsilon^3}{2\varepsilon} = 4\pi r^2. \tag{10.23}$$

Revenind la cazul general, considerând suprafaţa $(\mathbb{S})$ dată parametric prin:$x =$

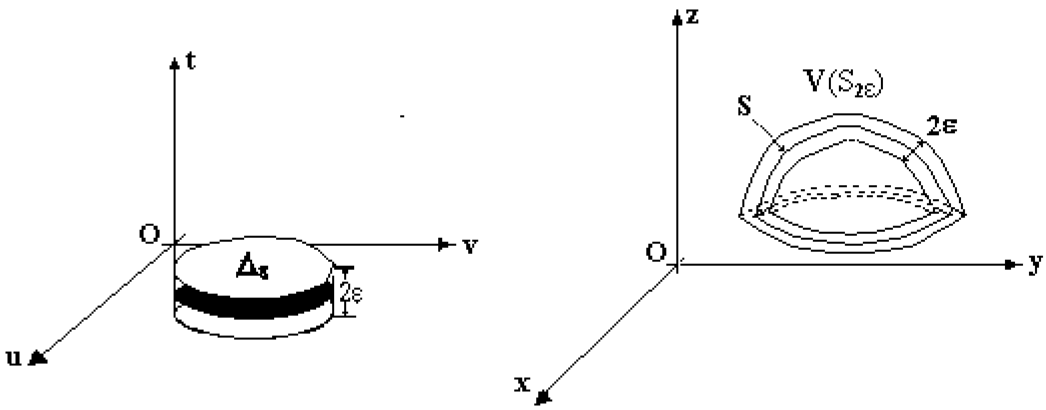

Fig. 10.8:

$x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, sau vectorial: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$, cu $(u, v) \in \Delta$, vom arăta că avem:

$$\sigma(\mathbb{S}) = \iint_\Delta |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}| dudv$$

Pentru justificare, vom considera un domeniu sratificat,(Fig.10.7 stânga), obţinut din Δ de grosime 2ε, notat cu Δ_ε, $\Delta_\varepsilon = \Delta \times [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0$. În corespondenţă cu Δ_ε vom pune coaja $(\mathbb{S}_\varepsilon)$ dată de:

$$\overrightarrow{r}_t = \overrightarrow{r}(u,v) + t\overrightarrow{n} = (x(u,v) + t\alpha)\overrightarrow{i} + (y(u,v) + t\beta)\overrightarrow{j} + (z(u,v) + t\gamma)\overrightarrow{k},$$

unde

$$\overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}|},$$

iar $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Volumul "coajei" $(\mathbb{S}_\varepsilon)$ este dat de:

$$V(\mathbb{S}_\varepsilon) = \iiint_{\mathbb{S}_\varepsilon} dxdydz = \iiint_{\mathbb{S}\times[-\varepsilon,\varepsilon]} \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} dxdydz.$$

Dar:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + t\frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} + t\frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} + t\frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} + t\frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} + t\frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} + t\frac{\partial \gamma}{\partial v} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + tW(u,v) =$$

$(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}) \cdot \overrightarrow{n} + tW(u,v) = |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}| + tW(u,v)$. Rezultă:

$$V(\mathbb{S}_\varepsilon) = \iiint_{\mathbb{S}[-\varepsilon,\varepsilon]} [|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}| + tW(u,v)] dudvdt = 2\varepsilon \iint_\Delta |\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}| dudv + \varepsilon^2 W^*(u,v).$$

Prin împărţire la 2ε şi trecere la limită $(\varepsilon \to 0)$ obţinem rezultztul urmărit.

10.11 Integrale triple generalizate, exemple.

Coordonate sferice.

Fie coordonatele sferice ρ, θ, φ. Avem:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho \cos\theta$$

cu $0 < \rho, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. În acest caz avem:

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin\theta.$$

Exemplu: Fie de calculat integrala triplă:

$$\iiint_{\mathbb{X}} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha},$$

unde $\alpha > 0, \alpha \neq \frac{3}{2}$, iar $\mathbb{X}$ este sfera $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$. În acest exemplu, funcţia de integrat nu este continuă în origine; avem: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \infty$. Deci nu putem vorbi de integrala proprie deoarece în teoria integralelor s-a presupus funcţia în cauza a fi mărginită. La fel ca la integrala simplă şi dublă vom exclude din domeniul $\mathbb{X}$ domeniul sferic definit de $\mathbb{X}_\varepsilon = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq \varepsilon^2\}$ şi vom calcula integrala pe $\mathbb{X} - \mathbb{X}_\varepsilon$. Dacă integrala tinde către o limită pentru $\varepsilon \to 0$, vom obţine astfel o integrală generalizată(improprie).

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint_{\mathbb{X}-\mathbb{X}_\varepsilon} f(x,y,z)dxdydz \tag{10.24}$$

În cazul actual, trecând în coordonate sferice, găsim:

$$J_\varepsilon = \iiint_{\mathbb{X}-\mathbb{X}_\varepsilon} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} = \iiint_{\mathbb{X}-\mathbb{X}_\varepsilon} \rho^{2-2\alpha} \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3-2\alpha}(r^{3-2\alpha} - \rho^{3-2\alpha}).$$

Avem $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}\rho^{3-2\alpha}$, dacă $3 - 2\alpha > 0$. Dacă $3 - 2\alpha \geq 0$ integrala este divergentă. Procedeul indicat aici poate fi extins în toate cazurile în care funcţia de integrat f devine infinită într-un punct izolat. Se poate deduce astfel:

Teorema 5. Dacă funcţia f devine infinită într-un punct Q, iar produsul $f(M)\|\overrightarrow{MQ}\|^\beta$ este mărginit, atunci integrala triplă pe domeniul $\mathbb{X}$, care conţine punctul Q are sens dacă $0 < \beta < 3$; ea nu are sens sau vom spune ca este divergentă dacă $\beta \geq 3$. În exemplul considerat avem $\beta = 2\alpha$.

Coordonate cilindrice.

Fie coordonatele numite cilindrice r, θ, z. Avem:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

cu $0 < r, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$. În acest caz avem:

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Exemplu: Fie de calculat integrala triplă:

$$\iiint_{\mathbb{X}} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2)^\beta},$$

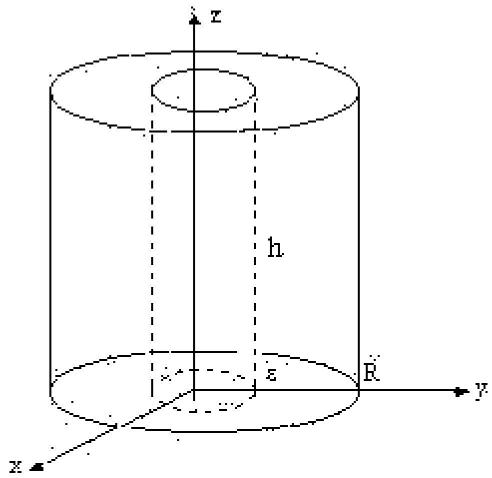

Fig. 10.9:

unde $\beta > 0, \beta \neq 1$, iar X este cilindrul circular cu axa Oz axa de simetrie şi cu baza situată în planul Oxy un disc de rază R, adică:$\mathbb{X} = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}, h > 0$. În acest exemplu, funcţia de integrat devine infinită în toate punctele segmentului $\{(x, y, z)|x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq h\}$. Pentru a rezolva integrala în acest caz vom izola segmentul menţionat, în care funcţia devine infinită cu un cilindru având ca bază un cerc de rază $\varepsilon > 0$. Fie $\mathbb{X}_\varepsilon = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2, 0 \leq z \leq h\}, h > 0$.Vom considera integrala:

$$J_\varepsilon = \iiint_{\mathbb{X}-\mathbb{X}_\varepsilon} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2)^\beta} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^R r^{1-2\beta} dr = \frac{2\pi h}{2-2\beta}(R^{2-2\beta} - \varepsilon^{2-2\beta}).$$

Dacă $2 - 2\beta > 0$ avem $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon = \dfrac{2\pi h}{2-2\beta} R^{2-2\beta}$, şi integrala este convergentă, iar dacă $2 - 2\beta \geq 0$ integrala este divergentă. Acest procedeu va fi aplicat în toate cazurile când funcţia devine infinită pe un arc de curba (c) din domeniul $\mathbb{X}$. Se va izola acest arc cu un domeniu $\mathbb{X}_\varepsilon$, ales convenabil care să-l includă şi se va efectua o trecere la limită, astfel ca marginea superioară a distanţelor de la punctele lui $\mathbb{X}_\varepsilon$ la (c) să tindă la zero când $\varepsilon \to 0$.

Exemplu de integrare în cazul domeniului de integrare infinit.

Fie de exemlu integrala:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x, y, z) dxdydz$$

în care $\mathbb{X}$ este domeniul limitat de planele de coordonate şi de suprafaţa sferei $x^2+y^2+z^2 = r^2$ şi este exterior acesteia. Deci $X = \{(x, y, z)|x \geq 0, y \geq 0, z \geq$

$0, x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2\}$ În acest caz, care scapă definiţiei integralei triple, căci în

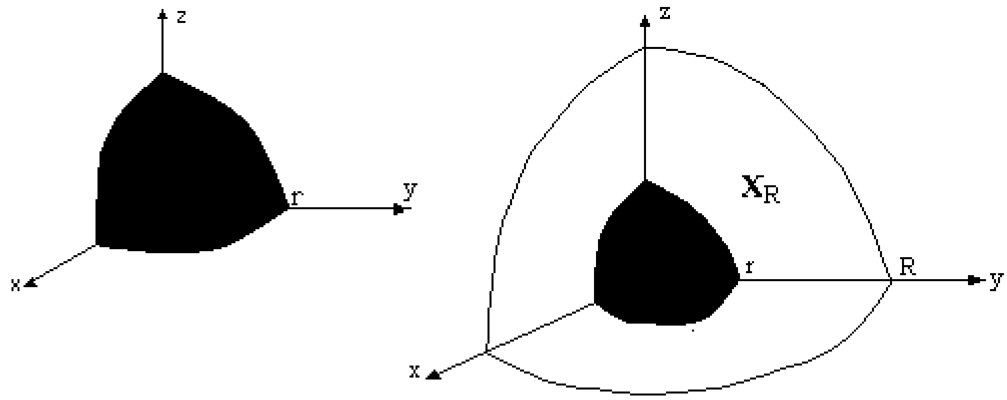

Fig. 10.10:

definiţie s-a presupus domeniul mărginit, se va considera domeniul $\mathbb{X}_R$ cuprins între aceleaşi plane şi sferele de raze r şi R. deci: $\mathbb{X}_R = \{(x, y, z)|x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ şi se va calcula limita integralei propuse, dacă ea există şi prin definiţie:

$$\iiint_{\mathbb{X}} f(x, y, z)dxdydz = \lim_{R\to\infty} \iiint_{\mathbb{X}_R} f(x, y, z)dxdydz$$

De exemplu dacă f este funcţia considerată la primul caz, avem luând în coordonate sferice:

$$J_R = \iiint_{\mathbb{X}_R} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \iiint_{\mathbb{X}'_R} \rho^{2-2\alpha} \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

unde $X'_R = \{(\rho, \theta, \varphi)|0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r \leq \rho \leq R\}$ Se găseşte:

$$J_R = \frac{R^{3-2\alpha} - r^{3-2\alpha}}{3 - 2\alpha} \frac{\pi}{2},$$

dacă $3 - 2\alpha \neq 0$

$$J_R = \frac{\pi}{2} \ln \frac{R}{r},$$

dacă $3 - 2\alpha = 0$. Prin urmare integrala este convergentă sau există dacă $3-2\alpha < 0$; ea este divergenta sau nu are sens sau încă nu există dacă $3-2\alpha \geq 0$. Se poate deduce de aici o teoremă:

Teorema 6. Dacă domeniul $\mathbb{X}$ este infinit, dacă funcţia $f(M)$ este integrabilă pe orice porţiune finită a lui $\mathbb{X}$ şi dacă pentru orice $M \in \mathbb{X}$ avem: $f(M)\|\overrightarrow{MQ}\|^\beta < L$, unde $\beta, L \in \mathbb{R}_+$, iar Q este un punct dat din X la distanţă finită, atunci integrala triplă relativă la X are sens pentru $\beta > 3$. Dacă $f(M)\|\overrightarrow{MQ}\|^\beta > L > 0$ pentru un punct $M \in \mathbb{X}$ şi $\beta \leq 3$, integrala diverge. În exemplul dat $\beta = 2\alpha$.

Capitolul 11

Ecuaţii diferenţiale.

11.1 Noţiuni generale

Rezolvarea unor probleme de analiză, de geometrie de fizică sau tehnică se reduc la rezolvarea unor ecuaţii, numite ecuaţii diferenţiale ordinare sau mai simplu ecuaţii diferenţiale, care leagă între ele o variabilă independentă x, o funcţie necunoscută dependentă de x, pe care o vom nota frecvent cu y şi derivatele ei succesive $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, până la un anumit ordin n. Prin urmare o ecuaţie diferenţială are forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{11.1}$$

unde funcţia reala F, de argumente $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$, este definită şi continuă într-un domeniu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Se poate ca în expresia lui F unele din argumente să lipsească, chiar x , y şi chiar ambele. Dacă derivata de ordinul cel mai mare $y^{(n)}$ intră efectiv în ecuaţia diferenţială, zicem că ecuaţia este de ordinul n. Dacă ecuaţia (11.1) de ordinul n se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$ avem:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{11.2}$$

unde funcţia f, de argumente $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$, este definită şi continuă într-un domeniu $\mathbb{D}' \subset \mathbb{R}^{n-1}$. În cazul $n = 1$, ecuaţia diferenţială de ordinul întâi se scrie sub forma:

$$y' = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{D}' \subset \mathbb{R}^2 \tag{11.3}$$

Aceasta forma, adica cea data de (11.2) sau în particular de (11.3) se numeşte forma normală.
Definiţie. Spunem că funcţia $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ este un interval, este soluţie a ecuaţiei (11.1) dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:
a° funcţia φ este derivabilă de n ori pe $\mathbb{I}$.

b° $\{(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x))|x \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
c° $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$, pentru orice $x \in \mathbb{I}$.
În unele cazuri în locul soluţiei, $y = \varphi(x)$ se găseste o relaţie de forma:

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{11.4}$$

cu alte cuvinte soluţia poate fi dată şi sub formă implicitţ.
Graficul unei soluţii este o curbă plană, numită curbă integrală. În multe probleme de fizică sau tehnică, ce conduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi trebuie să se dea o atenţie deosebită următoarei probleme, numită problema lui Cauchy, care se formulează în general în modul următor:
Fiind dată ecuaţia diferenţiala de ordinul întâi (11.3) să se determine soluţia ei, care satisface condiţia:

$$y(x_0) = y_0, \tag{11.5}$$

numită condiţie iniţială sau condiţia lui Cauchy.
Din punct de vedere geometric, problema lui Cauchy constă în a determina curba integrală a ecuaţiei diferenţiale (11.3) care să treacă prin punctul de coordonate (x_0, y_0).Problema lui Cauchy, pentru ecuaţia diferenţială de ordin doi, $F(x, y, y', y'') = 0$ sau $y'' = f(x, y, y')$, constă în determinarea soluţiei ei y ce satisface condiţiile:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \tag{11.6}$$

cu y_0, y_0' constante reale date. Vom da două exemple:
1. Fie $R(t)$ cantitatea de radiu existentă la un moment t într-un recipient. Vrem să găsim legea matematică după care radiul se dezintegrează, adică să găsim formula care ne dă cantitatea de radiu la momentul $t > t_0$, dacă la momentul t_0 era o cantitate egală cu R_0. Viteza de dezintegrare a radiului este proporţională cu cantitatea de radiu existentă la momentul t şi egală cu $R(t)$. Prin urmare $R(t)$ verifică ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$$R'(t) = -kR(t),$$

unde k este un factor de proporţionalitate. Se verifică imediat că orice funcţie de forma:

$$R(t) = Ce^{-k(t-t_0)},$$

unde C este o constantă arbitrară iar $R(t)$, este soluţie a ecuaţiei date. Ecuaţia admite o familie de soluţii de forma dată depinzând de parametrul C. Se pune în mod natural problema de a alege din această familie, soluţia ce satisface condiţia(condiţia lui Cauchy):

$$R(t_0) = R_0,$$

Se constată fară greutate că $C = R(t_0)$ şi soluţia problemei este:

$$R(t) = R(t_0)e^{-k(t-t_0)},$$

2. Să studiem mişcarea unui punct material M pe o dreaptă verticală sub acţiunea atracţiei pamântului. Pentru a cunoaşte poziţia punctului M la orice moment t după începerea mişcării (corespunzător lui $t = 0$) trebuie să cunoaştem valoarea ordonatei y în funcţie de t. La momentul $t = 0$ (momentul iniţial) presupunem cunoscută poziţia y_0 (poziţia iniţială). Din interpretarea mecanică a derivatei de ordinul al doilea, rezultă că acceleraţia este egală cu $y''(t)$. Pe de altă parte ştiim că acceleraţia forţei gravitaţionale într-o vecinatate a suprafeţei pamântului este constantă şi este egală (aproximativ) şi notată cu : $g = 9,81\frac{m}{sec^2}$. Avem deci:

$$y'' = -g.$$

Se verifică imediat că orice funcţie de forma:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2,$$

unde C_1 si C_2 sunt constante arbitrare, este soluţie a ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi scrisă mai sus. Ecuaţia admite astfel o familie de soluţii depinzând de doi parametrii C_1 si C_2. Se pune problema de a alege din această familie, soluţia care satisface condiţiile:

$$y(0) = y0, y'(0) = v0,$$

numite condiţii iniţiale. Se verifică imediat că funcţia:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0,$$

este soluţia căutată.

În general, integrala sau soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, depinde de o constantă arbitrară de integrare, a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi de două constante arbitrare şi aşa mai departe. În multe alte probleme de fizică sau tehnică, ce conduc la o ecuaţie diferenţiala de ordin n, se pune, asupra ecuaţiei diferenţiale, o problemă analoaga cu cea pusă în aceste exemple. Astfel trebuie acordată o atenţie deosebită următoarei probleme numită problema lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţiala de ordin n:

Fiind dată ecuaţia diferenţială de ordin n, dată de exemplu sub forma (11.2) să se determine soluţia care satisface condiţiile:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_o^{(n-1)}, \tag{11.7}$$

numite condiţii iniţiale sau condiţiile lui Cauchy. În conditiile (11.7), $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, sunt numere date.

În tot ce urmează mai departe ne vom ocupa de două probleme:
Una din ele este determinarea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale date şi vom spune în acest caz că se face integrarea ecuaţiei diferenţiale.
A doua problema este problema lui Cauchy, de care am vorbit.
Se va vedea că între cele două probleme există o strânsă legătură. În continuare vom considera câteva ecuaţii diferenţiale de forma (11.1) sau (11.2) pentru care vom da metode de integrare. Vom arăta că integrarea lor se reduce la calculul unor integrale, adică la efectuarea unor cuadraturi. Din această cauză ecuaţiile de care ne vom ocupa se vor numi ecuatii diferenţiale de ordinul întâi integrabile prin cuadraturi. În unele cazuri metoda de integrare ne va conduce la soluţiile ecuaţiei diferenţiale considerate sub forma:

$$y(x) = g(x, \mathcal{C}), \tag{11.8}$$

unde $\mathcal{C}$ este o constantă arbitrară. Funcţia $g(x, \mathcal{C})$ se numeşte soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale; cu ajutorul ei obţinem toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale, afară poate de unele soluţii, numite soluţii singulare. O definiţie precisă a noţiunii de soluţie generală o vom da după teorema de existenţă şi unicitate a ecuaţiilor diferenţiale. În alte cazuri, metoda de integrare ne va conduce la o ecuaţie de forma:

$$\Phi(x, y, \mathcal{C}) = 0, \tag{11.9}$$

unde $\mathcal{C}$ este o constantă arbitrară, care explicitată în raport cu y ne dă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale.

Formarea unei ecuaţii diferenţiale corespunzătoare unei familii de curbe plane.

Să presupunem că se dă o funcţie de variabilă x, cu parametrii $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$:

$$y = g(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n), \tag{11.10}$$

deci putem spune că y depinde şi de cele n constante $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$, şi ne întrbăm dacă există o ecuaţie diferenţială, care admite această funcţie ca integrală generală. Dacă derivăm succesiv, obţinem:

$$\begin{cases} y' = g'_x(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) \\ y'' = g''_{x^2}(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) \\ -------------- \\ y^{(n)} = g^{(n)}_{x^n}(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) \end{cases} \tag{11.11}$$

Relaţiile (11.10) şi (11.11) constituie n+1 relaţii cu n parametrii $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$. Prin eliminarea acestora se obţine o relaţie de forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$,

adică ecuaţia (11.1), care este o ecuaţie diferenţială de ordinul n. Ea este verificată de funcţia $y = g(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n)$, oricare ar fi valorile parametrilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$, prin însăşi modul în care a fost formată. În consecinţă $y = g(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n)$ este integrala generală a ecuaţiei $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.
Exemple:
1. Fie ecuaţia generală a cercurilor din plan cu centrul în origine şi de rază $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - \mathcal{C}^2 = 0$. Dacă explicităm pe y, vom avea: $y = \pm\sqrt{(C^2 - x^2)}$ şi $y' = \pm\frac{-x}{\sqrt{\mathcal{C}^2 - x^2}}$. Prin eliminarea lui $\mathcal{C}$ între ultimile două relaţii obţinem: $y' = -\frac{x}{y}$, care este ecuaţia diferenţiala a familiei de cercuri cu centru în origine. Se poate observa simplu că dacă derivăm în raport cu x în ecuaţia dată implicit $x^2 + y^2 - \mathcal{C}^2 = 0$, avem: $2x + 2yy' = 0$, de unde rezultă, în acest caz, aceeaşi ecuaţie: $y' = -\frac{x}{y}$.
2. Pentru familia de drepte date de ecuatia $y = \mathcal{C}_1 x + \mathcal{C}_2$, vom avea derivând de două ori $y'' = 0$.

Problema bilocală.

Această problemă, care apare des în aplicaţii, constă în a determina soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n y = f(x), a_0 \neq 0 \qquad (11.12)$$

ştiind că în două puncte $x = a; x = b (a < b)$ aparţinând domeniului de definiţie a soluţiei sunt satisfăcute condiţiile:

$$\begin{cases} \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + ... + \alpha_{1n}y^{(n-1)}(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) + ... + \beta_{1n}y^{(n-1)}(b) = 0 \\ \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + ... + \alpha_{2n}y^{(n-1)}(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) + ... + \beta_{2n}y^{(n-1)}(b) = 0 \\ - \\ \alpha_{n1}y(a) + \alpha_{n2}y'(a) + ... + \alpha_{nn}y^{(n-1)}(a) + \beta_{n1}y(b) + \beta_{n2}y'(b) + ... + \beta_{nn}y^{(n-1)}(b) = 0 \end{cases} \qquad (11.13)$$

coeficienţii α_{jk}, β_{jk} fiind constante date. Condiţiile (11.13) se numesc condiţii la limită sau condiţii bilocale. Spre deosebire de problema Cauchy, pentru ecuaţiile diferenţiale liniare, care admit întotdeauna o soluţie unică, problema bilocală nu se bucură de o asemenea proprietate. Determinarea condiţiilor în care problema bilocală admite soluţie unică necesită cunoştinţe de teoria ecuaţiilor integrale liniare de tip Fredholm. În probleme curente conditiile (11.13) au o forma mult simplificată. De exemplu săgeţile unei grinzi simplu rezemate la capete, pentru care sunt cunoscute momentele încovoitoare, sunt date de o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea. Condiţiile de rezemare în punctele de abscisă a, respectiv b, se scriu:

$$y(a) = 0, y(b) = 0.$$

Dacă însă se exprimă sageţile în funcţie de încărcarea exterioară, acestea sunt date de o ecuaţie diferenţială de ordinul al patrulea. Condiţiile la limită se scriu în acest caz:

$$y(a) = 0, y''(a) = 0; y(b) = 0, y''(b) = 0.$$

11.2 Metode elementare de integrare.

Cea mai simplă ecuaţie diferenţială de ordinul întâi.

Este de forma:

$$y'(x) = f(x), \tag{11.14}$$

unde $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă.
Rezolvarea acestei ecuaţii presupune găsirea primitivelor funcţiei f. Dar aceste primitive sunt date de formula:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0, \tag{11.15}$$

unde $y_0 = y(x_0), x_0 \in (a, b)$.

Vom face remarca cum că pentru orice pereche de numere reale $(x_0, y_0), x_0 \in (a, b), y_0 \in \mathbb{R}$, există o soluţie unică a ecuaţiei (11.14), care să satisfacă condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$.
Interpretare geometrică:
Prin orice punct $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ trece o curbă integrală(graficul soluţiei particulare corespunzătoare) a ecuaţiei date şi numai una.
Exemple.
1). Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$y' = \sin x$$

Funcţia $f(x) = \sin x$ este definită şi continuă pe toată dreapta reală. Soluţia generală a ecuaţ date este:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sin t dt + y_0 = -\cos x + \cos x_0 + y_0$$

Soluţia particulară care va lua valoarea 1 în punctul $\frac{\pi}{2}$ o vom obţine înlocuind în releţia anterioară pe $x_0 = \frac{\pi}{2}$ si $y_0 = 1$. Se obţine:

$$y(x) = 1 - \cos x$$

2). Să se găsească soluţia ecuaţiei:

$$y' = |x|$$

care verifică condiţia iniţială: $y(0) = 1$
Întrucât

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x \leq 0 \\ x \text{ , dacă } x > 0 \end{cases}$$

rezultă că:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}_1, \text{ dacă } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}_2 \text{ , dacă } x > 0 \end{cases}$$

Dar funcţia $y(x)$ trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Rezultă condiţia: $\lim\limits_{x \to 0-0} y(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} y(x) \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$. Aşadar soluţia va fi:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}, \text{ dacă } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} + \mathcal{C} \text{ , dacă } x > 0 \end{cases}$$

cu $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Ţinem cont că $y(0) = 1$ şi rezultă $\mathcal{C} = 1$. Deci putem scrie:

$$y(x) = \frac{1}{2}x|x| + 1, x \in \mathbb{R}.$$

11.2.1 Ecuaţii cu variabile separate.

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi de forma:

$$y'(x) = P(x)Q(y), x \in \mathbb{I}, \tag{11.16}$$

unde $P : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ şi $Q : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$, sunt date şi $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, derivabilă este funcţia necunoscută se numesc ecuaţii cu variabile separate.
Teorema 1: Fie $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ două intervale deschise în $\mathbb{R}$ şi $P : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, două funcţii continui astfel încât $Q(y) \neq 0$ $(\forall) y \in \mathbb{J}$, iar $-\infty < a < b < +\infty$ cu $(a, b \subset \mathbb{J}$. O funcţie $y : \mathbb{I} \to (a, b)$ este soluţie a ecuaţiei $y'(x) = P(x)Q(y), x \in \mathbb{I}$, dacă şi numai dacă are forma:

$$y(x) = G^{-1}(\int P(x)dx + \mathcal{C}), \tag{11.17}$$

unde $G(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{Q(y)}, y \in (a, b)$ pentru $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{I}$, astfel încât:
$\lim\limits_{y \to a+0} G(y) < \displaystyle\int P(x)dx + \mathcal{C} < \lim\limits_{y \to b-0} G(y)$, dacă $Q(y) > 0, y \in (a, b)$, respectiv
$\lim\limits_{y \to b-0} G(y) < \displaystyle\int P(x)dx + \mathcal{C} < \lim\limits_{y \to a+0} G(y)$, dacă $Q(y) < 0, y \in (a, b)$.
$\lceil$ Dacă $Q(y)$ este continuă şi nenulă pe (a, b) rezultă că $Q(y) > 0$ sau $Q(y) < 0$, $y \in (a, b)$. Vom presupune $Q(y) > 0, y \in (a, b)$, celalalt caz tratându-se analog. Funcţia $G(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{Q(y)}$ este derivabilă şi $G'(y) = \frac{1}{Q(y)} > 0$.

Rezultă că funcţia G este crescătoare, deci ea admite inversă pe (a, b) şi că $G : (a, b) \to (\lim\limits_{y \to a+0} G(y), \lim\limits_{y \to b-0} G(y))$. Dacă funcţia $y(x)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, avem:

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = G'(y(x))y'(x) = \frac{1}{Q(y(x))}y'(x) = \frac{1}{Q(y(x))}P(x)Q(y(x)) = P(x).$$

De unde rezultă că:

$$G(y(x)) = \int P(x)dx + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R},$$

de unde: $y(x) = G^{-1}(\int P(x)dx + \mathcal{C})$, pentru $x \in \mathbb{I}$ cu $\lim\limits_{y \to a+0} G(y) < \displaystyle\int P(x)dx + \mathcal{C} < \lim\limits_{y \to b-0} G(y)$. Reciproc, dacă $y(x) = G^{-1}(\int P(x)dx + \mathcal{C})$, pentru $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{I}$, cu $\lim\limits_{y \to a+0} G(y) < \displaystyle\int P(x)dx + \mathcal{C} < \lim\limits_{y \to b-0} G(y)$, avem $G(y(x)) = \int P(x)dx + \mathcal{C}$. Derivând se obţine: $G'(y(x))y'(x) = P(x)$ sau $\frac{1}{Q(y(x))}y'(x) = P(x)$, deci: $y'(x) = P(x)Q(y(x))$, ceeace arată că $y(x)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale.$\rfloor$

Observaţii:

1) Dacă pentru $y_0 \in (a, b)$ avem $Q(y_0) = 0$, atunci functia $y(x) = y_0, x \in \mathbb{I}$(funcţia constanta) este soluţia ecuaţiei diferenţiale (11.16), numită soluţie singulară.

2) Un mod echivalent de prezentare a rezolvării ecuaţiei cu variabile separabile este cel diferenţial, care constă în punerea ecuaţiei (11.16) sub forma:

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx, \tag{11.18}$$

numită formă separată şi integrarea sa, obtinându-se soluţia implicită:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx, \tag{11.19}$$

Exemplu: $\frac{dy}{dx} = e^{-y}\cos x$, $e^y dy = \cos x dx$ şi avem $e^y = sinx + \mathcal{C}$.

3) Ecuaţiile diferentiale de ordinul întâi pot fi date şi sub forma diferenţială:

$$U(x, y)dx + V(x, y)dy(x) = 0, \tag{11.20}$$

unde $U, V : \mathbb{I} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, funcţii date. În acest caz, ecuaţiile cu variabile separabile au forma:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy(x) = 0, \tag{11.21}$$

cu $P_1, P_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $Q_1, Q_2 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$. Dacă $Q_1(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$ si $Q_2(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$ şi funcţiile P_1, P_2, Q_1, Q_2 sunt integrabile, atunci ecuaţia are soluţiile date, sub forma implicită, de relaţia:

$$\int \frac{P_1(x)dx}{P_2(x)} + \int \frac{Q_2(y)dy}{Q_1(y)} = \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

4) Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi de forma:

$$y' = f(ax + by(x) + c), \tag{11.22}$$

$x \in \mathbb{I} f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fiind o funcţie dată $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt numere date iar $b \neq 0$, se reduce prin schimbarea de funcţie necunoscută $z(x) = ax + by(x) + c$ la ecuaţia diferenţială cu variabile separabile:

$$z'(x) = bf(z(x)) + a.$$

Exemplu:

$$y' = \sin^2(x - y)$$

Cu $x - y = z$ vom deduce:

$$1 - \sin^2 z = z', \cos^2 z = z'$$

de unde rezulta

$$\tan z = x + \mathcal{C}, \tan(x - y) = x + \mathcal{C}$$

11.2.2 Ecuaţii omogene.

Acestea sunt de forma:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}), \tag{11.23}$$

cu f depinzând doar de $\frac{y}{x} = u$. Dacă $u \in \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ atunci $f : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, şi presupunem că pe $J, f(u) - u \neq 0$ şi $f \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{J})$. Avem din relaţia de substituţie: $dy = xdu + udx$ şi $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Obtinem atunci:

$$f(u) - u = x\frac{du}{dx}$$

şi deci avem:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

care este o ecuaţie cu variabile separate şi se va integra la fel ca mai sus.
Dacă $f(u) = u$, atunci avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.
Exemplu: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$. Ecuatia se mai scrie sub forma: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x})$ şi avem deci: $\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$, şi prin integrare obţinem: $-\ln|1-u| + \ln\mathcal{C} = \ln|x|$, sau: $x(1-u^2) = C$, sau încă: $x^2 - y^2 = \mathcal{C}x$.

11.2.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin I.

Se numesc ecuaţii liniare diferenţiale de ordinul întâi neomogene cu coeficienţi variabili, ecuaţiile diferenţiale de forma:

$$a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = b(x), x \in \mathbb{I}, \tag{11.24}$$

unde $a_0, a_1, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $\mathbb{I}$ interval, sunt funcţii cunoscute. Dacă $b(x) = 0, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte omogenă. Dacă $a_0(x) = 1, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte normală. În cazul în care $a_0(x) \neq 0, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se aduce la forma normală prin împărţirea sa cu $a_0(x)$. Vom nota în acest caz cu: $P(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ şi $Q(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$, şi vom studia ecuaţia normală:

$$y'(x) = P(x)y(x) + Q(x), x \in \mathbb{I}, \tag{11.25}$$

unde $P, Q : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $\mathbb{I}$ interval, sunt funcţii continuie, cunoscute.

O primă metodă de integrare a unei ecuaţii diferenţiale liniară de ordin I,

Pentru a integra ecuaţia se face înlocuirea $y(x) = u(x)v(x)$, $u(x)$ şi $v(x)$ fiind funcţii de x care se vor determina. Deoarece $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, înlocuind în ecuaţia normală (11.25) vom găsi:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = P(x)u(x)v(x) + Q(x), x \in \mathbb{I},$$

sau

$$[u'(x) - P(x)u(x)]v(x) + u(x)v'(x) - Q(x) = 0, x \in \mathbb{I}, \tag{11.26}$$

Dacă alegem funcţia $u(x)$ aşa încât paranteza dreaptă din relaăia (11.26)să fie nulă adică să verifice ecuaţia:

$$u'(x) - P(x)u(x) = 0, \tag{11.27}$$

ceeace atrage ca:

$$\frac{du}{u} = P(x)dx$$

şi vom obţine, prin integrare:

$$\ln|u(x)| = \int P(x)dx$$

şi deci: $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, iar din ecuaţia (11.26), mai rămâne: $u(x)v'(x) - Q(x) = 0, x \in \mathbb{I}$, de unde rezultă după înlocuirea lui $u(x)$: $v'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$, şi deci

$$v(x) = \mathcal{C} + \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx.$$

Astfel soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi este:

$$y(x) = e^{\int P(x)dx}(\mathcal{C} + \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx), \tag{11.28}$$

şi aceasta se găseşte prin două cuadraturi. În plus constanta $\mathcal{C}$ intră în soluţia generală sub formă liniară, adică putem să o reprezentăm sub forma:

$$y = y(x, \mathcal{C}) = A(x)\mathcal{C} + B(x).$$

Exemple:
1) Fie ecuaţia: $x^2y' = (2x-1)y + x^2, x \in (0, +\infty)$, să determinăm soluţia care trece prin $(1, 1)$ pentru $x \in (0, +\infty)$.
Ecuaţia se poate scrie sub forma normală:

$$y'(x) = \frac{2x-1}{x^2}y(x) + 1, P(x) = \frac{2x-1}{x^2}, Q(x) = 1.$$

Căutând soluţii de forma $y(x) = u(x)v(x)$, $u(x)$ şi $v(x)$ fiind funcţii de x care se vor determina rezultă:

$$(u'(x) + \frac{1-2x}{x^2}u(x))v(x) + u(x)v'(x) - 1 = 0, x \in \mathbb{I},$$

Dacă alegem funcţia $u(x)$ aşa încât să verifice ecuaţia:

$$u'(x) + \frac{1-2x}{x^2}u(x) = 0,$$

ceeace atrage ca:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1-2x}{x^2}dx,$$

şi după integrare avem:

$$\ln|u(x)| = 2\ln|x| + \frac{1}{x},$$

şi deci:

$$u(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}, v'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}},$$

şi $v(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \mathcal{C}$, iar soluţia generală este:

$$y(x) = x^2 + x^2e^{\frac{1}{x}}\mathcal{C}.$$

Punând condiţia dată va rezulta: $1 = 1 + e\mathcal{C}$, adică $\mathcal{C} = 0$ şi deci soluţia căutată este: $y(x) = x^2$.
2) Problema oscilatorului electric:. Să presupunem legate în serie o sursă de curent a cărei tensiune variază după legea $E(t) = V \sin \omega t, t \in \mathbb{R}$, o rezistenţă R şi un condensator de capacitate C. Se presupune că la momentul $t = 0$, când circuitul este închis, intensitatea curentului este nuulă. Se cere să se determine intensitatea curentului $I(t)$ în circuit la momentul t. Rezistenţa R şi capacitatea C le considerăm constante în timp.
Soluţie. Dacă notăm cu $q(t)$ sarcina electrică a condensatorului la momentul t, atunci avem $I(t) = q'(t)$, iar evoluţia curentuluiin circuit urmeaza legea a doua a lui Kirchhoff:

$$RI(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

Prin derivarea egalităţii de mai sus obţinem:

$$RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t) = V\omega \cos \omega t$$

Cu metoda de mai sus luând $I(t) = u(t)v(t)$ vom avea:

$$(u' + \frac{1}{RC}u)v + uv' = \frac{V\omega}{R} \cos \omega t$$

Rezolvand $u' + \frac{1}{RC}u = 0$ obţinem $u = e^{-\frac{t}{RC}}$ iar din relaţia demai sus $v' = \frac{V\omega}{R}e^{\frac{t}{RC}} \cos \omega t$ iar $v(t) = \frac{V\omega}{R} \int_0^t e^{\frac{s}{RC}} \cos \omega s ds$Prin urmare solutia problemei date este:

$$I(t) = \frac{V\omega}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{s}{RC}} \cos \omega s ds, t \in \mathbb{R}$$

Metoda variaţiei constantelor.

Metoda de integrare descrisă mai sus, (cu $y = uv$), se încadrează într-un procedeu mai general cunoscut sub denumirea de metoda variaţiilor constantelor arbitrare. Ea se întâlneşte la integrarea ecuaţiilor diferenţiale liniare de un ordin oarecare. Iată în ce constă această metodă: Se integrează mai întâi ecuaţia omogenă:

$$y'(x) = P(x)y(x), x \in \mathbb{I},$$

care este cu variabile separabile:

$$\frac{dy}{y} = P(x)dx,$$

din care rezultă:

$$\ln |y| = \int_{x_0}^{x} P(t)dt + ln\mathcal{B}.$$

Socotim că am integrat de la (x_0, y_0) la (x, y) pe paralele la axele de coordonate şi $y_0, y \in (0, +\infty)$, sau $y_0, y \in (-\infty, 0)$. Pentru $y = 0$ se verifică direct soluţia. Deci soluţia este:

$$y(x) = \mathcal{B}e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt},$$

cu $\mathcal{B} \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{I}$.

Observaţie: Mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene formează un spaţiu vectorial de dimensiune unu (suma a doua soluţii înmulţirea cu un factor sunt soluţii şi orice soluşie se obşine dintr-una fixată prin înmulţirea cu o constantă, deci dimensiunea spaţiului este 1, căci baza este formată dintr-un singur element, în acest caz, $e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$.

Pentru a obţine soluţia ecuaţiei neliniare vom aplica metoda variaţiei constantei, care constă în presupunerea că soluţia ecuaţiei neomogene este de forma:

$$y(x) = \mathcal{B}(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt},$$

cu $\mathcal{B}(x)$ funcţie de x definită pe $\mathbb{I}$ cu valori reale, necunoscută. Se va căuta să se determine $\mathcal{B}(x)$ de clasa $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{I})$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă, vom obţine:

$$\mathcal{B}'(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + \mathcal{B}(x)P(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} - \mathcal{B}(x)P(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} = Q(x),$$

şi deci:

$$\mathcal{B}'(x) = Q(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt},$$

Integrând de la x_0 la x vom obţine $\mathcal{C}(x)$ şi deci o soluţie particulară poate fi:

$$y_p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(\theta)d\theta}dt.$$

Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 2: Toate soluţiile ecuaţiei neomogene sunt date de soluţia ecuaţiei omogene, la care se adaugă soluţia particulară $y_p(x)$. $\lceil$ Într-adevăr, dacă y e soluţie a ecuaţiei date neomogene, atunci $y - y_p$ satisface ecuaţia omogenă, şi deci $y - y_p = y_o$. Deci, solutia generala a ecuatiei neomogene este dată de:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}[\mathcal{C} + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(\theta)d\theta}dt]$$

Dacă se cere rezolvarea problemei lui Cauchy: Determinarea soluţiei care pentru $x = x_0$ să corespundă la $y = y_0$, în acest caz avem că $\mathcal{C} = y_0$ şi soluţia în acest caz este:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(\theta)d\theta}dt]$$

sau

$$y(x) = y_0e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{t}^{x} P(\theta)d\theta}dt$$

11.2.4 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin II.

Se numesc ecuaţii liniare diferenţiale de ordinul doi neomogene cu coeficienţi variabili, ecuaţiile diferenţiale de forma:

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2y = b(x), x \in \mathbb{I}, \tag{11.29}$$

unde $a_0, a_1, a_2, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $\mathbb{I}$ interval, sunt funcţii cunoscute. Dacă $a_0(x) = 1, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte normală. Dacă $b(x) = 0, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte omogenă. În cazul în care $a_0(x) \neq 0, x \in \mathbb{I}$, ecuaţia se aduce la forma normală prin împărţirea sa cu $a_0(x)$. Vom nota în acest caz cu: $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ şi $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, şi vom studia ecuaţia normală omogenă:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = 0, x \in \mathbb{I}, \tag{11.30}$$

unde $p, q : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $\mathbb{I}$ interval, sunt funcţii continuie, cunoscute.

Să presupunem că y_1 este o soluţir a ecuaţiei (11.30). Făcând schimbarea $y = y_1 z$, suntem conduş la ecuaţia

$$y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' = 0.$$

Cum $y_1 \neq 0$ vom putea scrie:

$$z'' + (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))z' = 0.$$

Punând $z' = u$, obţinem:

$$\frac{du}{u} + 2\frac{dy_1}{y_1} + p(x)dx = 0,$$

şi integrând se deduce

$$u = \frac{\mathcal{C}_2}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds},$$

unde $\mathcal{C}_2$ este o constantă oarecare. Revenind la ecuaţia $z' = u$ şi apoi la $y = y_1 z$, deducem soluţia generală a ecuaţiei (11.30)

$$y = \mathcal{C}_1 y_1 + \mathcal{C}_2 y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}}{y_1^2(t)} dt,$$

Exemplu:
Ecuaţia diferenţială $xy'' - (x+3)y' + y = 0$ are soluţiile $y_1 = x + 3$ şi $y_2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$ şi formează un sistem fundamental de soluţi pe orice interval care nu conţine originea.

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin II cu coeficienţi constanţi.

În general, ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili nu au soluţii exprimabile ca o combinaţie finită de funcţii elementare. Vom vedea că ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin II cu coeficienţi constanţi au soluţii exprimate prin combinaţii liniare de funcţii elementare.

I. Cazul ecuaţiei omogene.

Fie a şi b două numere reale. Să considerăm o ecuaţie diferenţială omogenă de ordin doi:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{11.31}$$

Asociem ecuaţiei de mai sus ecuaţia algebrică

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{11.32}$$

pe care o vom numi **ecuaţie caracteristică**. În raport cu natura rădăcinilor ecuaţiei (11.32) vom căuta soluţii de o anumită formă pentru ecuaţia diferenţială (11.31).

Următoarea teoremă se demonstrează prin verificare directă:

Teorema 3

Pentru a, b numerele reale, date în (11.31) şi (11.32) şi $\Delta = a^2 - 4b$, vom nota cu r_1, r_2 rădăcinile ecuaţiei caracteristice (11.32). Distingem următoarele cazuri:

Cazul 1. Dacă $\Delta > 0$, atunci funcţiile de tipul

$$y(t) = \mathcal{C}_1 e^{r_1 t} + \mathcal{C}_2 e^{r_2 t}, t \in \mathbb{R}$$

cu$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ constante reale, sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (11.31).

Cazul 2. Dacă $\Delta = 0$ şi $r_1 = r_2 = r = -\frac{a}{2}$, atunci funcţiile de tipul:

$$y(t) = (\mathcal{C}_1 t + \mathcal{C}_2) e^{rt}, t \in \mathbb{R}$$

cu$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ constante reale, sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (11.31).

Cazul 3. Dacă $\Delta < 0$ şi $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcţiile de tipul:

$$y(t) = e^{\alpha t}(\mathcal{C}_1 \cos \beta t + \mathcal{C}_2 \sin \beta t), t \in \mathbb{R}$$

cu$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ constante reale, sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (11.31).

Demonstraţia teoremei se bazează pe faptul că soluţiile de forma $y(t) = e^{rt}$ înlocuite în ecuaţia (11.31) ne vor conduce la:

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

şi cum $e^{rt} \neq 0$ rezultă că neapărat $r^2 + ar + b = 0$. În cazul $r = \alpha + i\beta$ vom avea $e^{rt} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ iar pentru $r = \alpha - i\beta$ vom avea $e^{rt} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$. O combinaţie liniară a acestor soluţii conduce la:

$$\mathcal{K}_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + K_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

sau

$$(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)e^{\alpha t}\cos\beta t + i(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Notând $\mathcal{C}_1 = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ şi $\mathcal{C}_2 = i(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)$ obţinem justificarea cazului 3.
Exemple:

Să se afle soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale:

$$a) y'' + 2y' - 3y = 0;\ b) y'' - 6y' + y = 0;\ c) y'' - 6y' + 13y = 0$$

Dacă luăm în consideraţie problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (11.31) atunci în fiecare dintre cele trei cazuri de mai sus pot fi determinate în mod unic constantele C_1 şi C_2.

Următoarea teoremă se demonstrează prin verificare directă:

Teorema 4

Să considerăm valabile notaţiile din teorema anterioară. Fie $t_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ şi să considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia (11.31)

$$y'' + ay' + by = 0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \tag{11.33}$$

Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:

Cazul 1. Dacă $\Delta > 0$, atunci unica soluţie a problemei (11.33) este:

$$y(t) = \frac{1}{r_2 - r_1}[(r_2 y_0 - y_1)e^{r_1(t-t_0)} + (y_1 - r_1 y_0)e^{r_2(t-t_0)}], t \in \mathbb{R}$$

Cazul 2. Dacă $\Delta = 0$, atunci unica soluţie a problemei (11.33) este:

$$y(t) = [(t - t_0)(y_1 - ry_0) + y_0]e^{r(t-t_0)}, t \in \mathbb{R}$$

Cazul 3. Dacă $\Delta < 0$, atunci unica soluţie a problemei (11.33) este:
$y(t) = e^{\alpha t}\frac{1}{\beta}[(\alpha y_0 \sin\beta t_0 + \beta y_0 \cos\beta t_0 - y_1 \sin\beta t_0)\cos\beta t + (y_1 \cos\beta t_0 - y_0 \cos\beta t_0 + \beta y_0 \sin\beta t_0)\sin\beta t], t \in \mathbb{R}$

II. Cazul ecuaţiei neomogene.

Fie, din nou, a şi b două numere reale. Să considerăm o ecuaţie diferenţială neomogenă de ordin doi:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11.34}$$

unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă.

Teorema 5 Soluţia generală a ecuaţiei (11.34) este dată de formula:

$$y(t) = y_o + y_p, \tag{11.35}$$

unde y_o este soluţia generală a ecuaţiei omogene, iar y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei (11.34).

Problema care se pune acum este de a găsi o soluţie particulară a ecuaţiei (11.34).

Aflarea unei soluţii particulare pentru ecuaţia neomogenă. O soluţie particulară $y_o(t)$ a ecuaţiri neomogene (11.34) poate fi găsită mai uşor, prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, în următoarele situaţii simple:
1) Dacă $f(t) = e^{\alpha t} P_n(t), t \in \mathbb{R}$, unde P_n este o funcţie polinomială de gradul n, şi dacă α nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (11.32), atuci căutăm o soluţie particulară de forma:

$$x_o(t) = e^{\alpha t} Q_n(t), \;\; t \in \mathbb{R} \tag{11.36}$$

unde $Q_n(t)$ este o funcţie polinomială de gradul n, ai cărui coeficienţi urmează a fi determinaţi.

Dacă α este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (11.32), atunci vom căuta soluţii de forma:

$$x_o(t) = t^r e^{\alpha t} Q_n(t), \;\; t \in \mathbb{R} \tag{11.37}$$

unde $r \in \{1, 2\}$ este ordinul rădăcinii α.
2) Dacă $f(t) = e^{\alpha t}[P_n(t) \cos \beta t + Q_n(t) \sin \beta t], t \in \mathbb{R}$, şi dacă $\alpha \pm i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (11.32), atuci căutăm o soluţie particulară de forma:

$$x_o(t) = e^{\alpha t}[R_q(t) \cos \beta t + S_q(t) \sin \beta t], \;\; t \in \mathbb{R} \tag{11.38}$$

unde R_q, S_q sunt polinoame de grad q=max(m, n) ai căror coeficienţi urmează a fi determinaţi.

Dacă $\alpha \pm i\beta$ sunt rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (11.32), atunci vom căuta soluţii de forma:

$$x_o(t) = te^{\alpha t}[R_q(t) \cos \beta t + S_q(t) \sin \beta t], \;\; t \in \mathbb{R} \tag{11.39}$$

2) Pentru cazuri mai generale se poate utiliza metoda variaţiei constantelor.

11.2.5 Metoda lui Frobenius.

Metoda constă în a căuta, pentru o ecuaţie liniară, soluţia generală sau o anumită soluţie(în cazul când este dată şi o problemă Cauchy) sub forma unei serii de puteri.

Dacă aceasta este:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \tag{11.40}$$

atunci diferitele sale derivate vor fi:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

ş.a.m.d.

Coeficienţii $c_n, n \in \mathbb{N}$ se determină din condiţia ca $y, y', y'', ...$ să verifice ecuaţia dată.

Exemple:

1) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei:

$$y' - 2xy = 0$$

Conform celor menţionate avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

sau

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Dar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)c_{n+2}x^{n+1}$$

şi atunci egalitatea precedentă devine:

$$c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)c_{n+2} - 2c_n]x^n = 0$$

de unde rezultă:

$$c_1 = 0;\ (n+2)c_{n+2} - 2c_n = 0\ \ n = 0, 1, 2, ...$$

ultima egalitate este:

$$(n+2)c_{n+2} = 2c_n \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{11.41}$$

şi cum ea exprimă relaţia dintre coeficienţii c_n din doi în doi, aceasta impune să tratăm distinct cazurile:

n=impar; n=par.

a) $n = 2m - 1 \quad m = 1, 2, ...$

Condiţiile (11.41) devin:

$$(2m+1)c_{2m+1} = 2c_{2m-1} \quad m = 1, 2, ...$$

şi pentru $m = 1$ obţinem:

$$3c_3 = 2c_1 \quad \text{deci} \quad c_3 = 0$$

rezultă prin recurenţă că:

$$c_{2m+1} = 0 \quad \text{decă} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

b) $n = 2m \quad m = 1, 2, ...$

Condiţiile (11.41) devin:

$$(2m+2)c_{2m+2} = 2c_{2m} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

sau

$$(m+1)c_{2m+2} = c_{2m} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Dând valorile consecutive lui m obţinem:

$$1 \cdot c_2 = c_0$$

$$2 \cdot c_4 = c_2$$

$$3 \cdot c_6 = c_4$$

$$.........$$

$$m \cdot c_{2m} = c_{2(m-1)}$$

şi înmulţind aceste egalităţi în ambii membrii obţinem:

$$m!c_{2m} = c_0 \quad \text{deci} \quad c_{2m} = \frac{c_0}{m!}; \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Ţinând seama de rezultatele obţinute în cazurile a) şi b) soluţia căutată va fi:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}x^{2m} = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!}$$

deci este de forma:

$$y = \mathcal{C}e^{x^2}; \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

2) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

Conform celor menţionate avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

adică

$$2\cdot 1\cdot c_2 - 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2c_n]x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^{n+1} = 0$$

iar această egalitate se mai scrie sub forma:

$$2(c_2 - c_0) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)c_{n+3} - 2c_{n+1} - (n+1)c_{n+1}]x^{n+1} = 0$$

adică

$$2(c_2 - c_0) + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)[(n+2)c_{n+3} - c_{n+1}]x^{n+1} = 0$$

De aici rezultă:

$$c_2 - c_0 = 0; \quad (n+2)c_{n+3} - c_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Vor tebui tratate, din nou, distinct cazurile:

n=par ; n=impar

Obţinem respectiv:

a) $2(m+1)c_{2m+3} = c_{2m+1} \qquad m = 0, 1, 2, ...$

b) $(2m+1)c_{2m+2} = c_{2m} \qquad m = 0, 1, 2, ...$

Atunci:
1) căutând soluţia y_1 pentru care:

$$c_0 = y_1(0) = 0 \quad ; \quad c_1 = y_1'(0) = 1$$

din b) rezultă $c_{2m} = 0$; $m = 0, 1, 2, ...$; iar din a) procedând ca la cazul b) de la exemplul precedent obţinem:

$$c_{2m+1} = \frac{1}{2^m m!} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

şi deci

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2^m m!} = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

2) căutând soluţia y_2 pentru care:

$$c_0 = y_2(0) = 1 \quad ; \quad c_1 = y_2'(0) = 0$$

obţinem din a) $c_{2m+1} = 0 \quad ; \quad m = 0, 1, 2, ...$; iar din b)

$$c_{2m} = \frac{1}{(2m-1)!!} \qquad m = 1, 2, ...$$

şi deci

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m-1)!!}$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este o combinaţie liniară a soluţiilor particulare y_1 şi y_2 deci:

$$y = \mathcal{C}_1 y_1 + \mathcal{C}_2 y_2, \quad \mathcal{C}_1, \ \ \mathcal{C}_2 \in \mathbb{R}$$

11.2.6 Metoda seriilor Taylor.

Pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale de forma:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

cu condiţiile:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

soluţiile se obţin sub forma dezvoltării sale în serie Taylor:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Metoda o vom pune în evidenţă prin următoarele exemple:
1) Să se integreze ecuaţia

$$y'' + y = 0$$

cu condiţiile iniţiale:

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$$

Soluţia cerută o vom obţine sub forma seriei McLaurin:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

unde $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$.
Din ecuaţia dată avem $y'' = -y$ şi prin derivări succesive rezultă:

$$y^{(n+2)}(x) = -y^{(n)}(x) \qquad n \in \mathbb{N}$$

iar de aici:

$$y''(0) = -y(0) = -1\,; y'''(0) = -y'(0) = 0\,; y^{IV}(0) = -y''(0) = 1\,; y^{v}(0) = -y'''(0) = 0$$

şi în general

$$y^{(2n)}(0) = (-1)^n \;\; ; y^{(2n+1)}(0) = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

rezultate care se verifică uşor prin inducţie completă.

Soluţia cerută este:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x)^{2n} = \cos x$$

2) Să se integreze ecuaţia

$$y'' = xy + y'^2$$

cu condiţiile iniţiale:

$$y(0) = 4; \quad y'(0) = 2$$

Din ecuaţia dată şi condiţii avem: $y''(0) = 4$. Prin derivarea ecuaţiei vom avea:

$$y''' = y + xy' + 2y'y'' \quad \text{şi} \;\; y'''(0) = 20$$

Derivând încă odată obţinem:

$$y^{IV} = 2y' + xy'' + 2y''^2 + 2y'y''' \quad \text{şi} \;\; y^{IV}(0) = 116$$

Soluţia cerută este:

$$y = 4 + 2x + 2x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{29}{6}x^4 + ...$$

11.2.7 Metoda polinoamelor diferenţiale.

Această metodă se foloseşte pentru determinarea soluţiilor particulare ale ecuaţiilor diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi.

Vom nota cu:

$$D = \frac{d}{dx},\; D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

Ecuaţia diferenţială:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x),$$

se mai poate scrie si sub forma:

$$F(D)y = b(x),$$

unde:

$$F(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n,$$

care este un operator diferenţial liniar de ordinul n. $F(D)y$ fiind un polinom diferenţial de ordinul n. Se poate arăta uşor următoarele proprietăţi:

$$F(D)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}F(\alpha) \tag{11.42}$$

$$F(D^2)\sin(\beta x) = \sin(\beta x)F(-\beta^2) \tag{11.43}$$

$$F(D^2)\cos(\beta x) = \cos(\beta x)F(-\beta^2) \tag{11.44}$$

$$F(D)e^{\alpha x}y(x) = e^{\alpha x}F(D+\alpha)y \tag{11.45}$$

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\frac{1}{F(\alpha)} \tag{11.46}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(\beta x) = \sin(\beta x)\frac{1}{F(-\beta^2)},\ \text{dacă}\ F(-\beta^2) \neq 0 \tag{11.47}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(\beta x) = \cos(\beta x)\frac{1}{F(-\beta^2)},\ \text{dacă}\ F(-\beta^2) \neq 0 \tag{11.48}$$

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}y(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}y \tag{11.49}$$

şi în cazul că $\frac{1}{F(t)}$ se dezvoltă în serie Taylor în jurul lui $t = 0$ adică: $\frac{1}{F(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{F(t)})^{(n)}(0)}{n!}t^n$ vom considera:

$$\frac{1}{F(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{F(t)})^{(n)}(0)}{n!}D^n = T_m(D) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{F(t)})^{(n)}(0)}{n!}D^n.$$

Dacă operatorul $\frac{1}{F(D)}$ se aplică unui polinom de grad m, P_m, atunci vom obţine relaţia operţională:

$$\frac{1}{F(D)}P_m(x) = T_m(D)P_m(x), \tag{11.50}$$

şi putem calcula imediat soluţii particulare $y_p(x) = T_m(D)P_m(x)$, pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, pe care le întâlnim în practică.

Operatorul $\frac{1}{D}$ indică o integrare obişnuită, $\frac{1}{D^2}$, o dublă integrare etc.

Exemple: Folosind metoda polinoamelor diferenţiale să se afle soluţii particulare pentru ecuaţiile:

1. $y'' + y' - 2y = 3e^{3x}$.
$\mathcal{R}$. Având în vedere că: $P(D)y_p = 3e^{3x}$, cu $P(D) = D^2 + D - 2$, deducem:

$$y_p = \frac{1}{P(D)} 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{P(3)} = \frac{3}{10} e^{3x}.$$

2. $y'' + 3y' + 4y = xe^{-x}$.
$\mathcal{R}$. Având în vedere că: $P(D)y_p = xe^{-x}$, deducem:

$$y_p(x) = \frac{1}{P(D)} xe^{-x} = e^{-x} \frac{1}{(D-1)^2 + 3(D-1) + 4} x = e^{-x} \frac{1}{D^2 + D + 2} x.$$

Cum: $\frac{1}{D^2+D+2} = \frac{1}{2} - \frac{D}{4} + ...$; vom avea:

$$y_p(x) = e^{-x}(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}).$$

3. $y^V + y''' = xe^x$.
$\mathcal{R}$. Procedând la fel găsim $F(D)y_p = x^2 e^x$, deducem:

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)} x^2 e^x = e^x \frac{1}{F(D+1)} x^2 = e^x \frac{1}{(D+1)^3[1 + (D+1)^2]} x^2.$$

Facând împărţirea $1 : F(D+1)$, obţinem:

$$T2(D) = (\frac{1}{2} - 2\frac{d}{dx} + \frac{19}{4}\frac{d^2}{dx^2})(x^2).$$

Acum $y_p(x)$ se scrie:

$$y_p(x) = e^x(\frac{1}{2} - 2\frac{d}{dx} + \frac{19}{4}\frac{d^2}{dx^2})(x^2)$$

sau

$$y_p(x) = e^x(\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{19}{2})$$

4. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.
$\mathcal{R}$. Acum $y_p(x)$ se scrie:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 3e^{2x} = 3e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 4} \cdot 1 = 3e^{2x} \frac{1}{D^2} \cdot 1 =$$

$$3e^{2x} \int (\int 1 dx) dx = 3e^{2x} \frac{x^2}{2},$$

deci:

$$y_p(x) = \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$$

5. $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$.
$\mathcal{R}$. $y_p(x) = \frac{1}{D^2+3D+2}xe^{-x} = e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+3(D-1)+2}x = e^{-x}\frac{1}{D^2+D}x = e^{-x}\frac{1}{D+1}\frac{x^2}{2} =$
$(1 - D + D^2)x^2 = \frac{e^{-x}}{2}(1 - \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2})x^2 = \frac{e^{-x}}{2}(x^2 - 2x + 2)$. şi deci:

$$y_p(x) = \frac{e^{-x}}{2}(x^2 - 2x + 2).$$

6. $y'' - 4y' + 4y = \frac{x-1}{x^2}e^{2x}$.
$\mathcal{R}$. $y_p(x) = \frac{1}{D^2-4D+4}\frac{x-1}{x^2}e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-4(D+2)+4}\frac{x-1}{x^2} = e^{2x}\frac{1}{D^2}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) =$
$e^{2x}\int(\int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx)dx = e^{2x}\int(\ln|x| + \frac{1}{x})dx = e^{2x}(x\ln|x| + \ln|x| - x)$. şi deci:

$$y_p(x) = e^{2x}(x\ln|x| + \ln|x| - x).$$

7. $y''' - 3y'' + 3y' - y = xe^x$.
$\mathcal{R}$. $y_p(x) = \frac{1}{D^3-3D^2+3D-4}xe^x = e^x\frac{1}{D^3}x = e^xD^{-3}(x) = e^xD^{-2}(\frac{x^2}{2}) = e^xD^{-1}(\frac{x^3}{6}) =$
$\frac{x^4}{24}e^x$. Avem deci:

$$y_p(x) = \frac{1}{24}x^4e^x.$$

8. $y'' - 5y' + 6y = 6x - 10x + 2$.
$\mathcal{R}$. Vom avea: $y_p(x) = T_2(D)(6x^2 - 10x + 2)$. $T_2(D)$ obtinându-se din dezvoltarea Taylor. Se obţine:

$$T2(D) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36}D + \frac{19}{216}D^2$$

şi deci

$$y_p(x) = (\frac{1}{6} + \frac{5}{36}D + \frac{19}{216}D^2)(6x^2 - 10x + 2) =$$
$$x^2 - \frac{10}{6}x + \frac{2}{6} + \frac{5}{36}(12x - 10) + \frac{19}{216}12$$

Avem deci: $y_p(x) = x^2$.
9. $y'' - y = 2sinx - 4cosx$. $\mathcal{R}$. În baza proprietăţilor exprimate la începutul acestei secţiuni avem:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 - 1}(2\sin x - 4\cos x) = (2\sin x)\frac{1}{-1-1} - (4\cos x)\frac{1}{-1-1}$$

Soluţia particulară a ecuaţiei date este:

$$y_p(x) = -\sin x + 2\cos x.$$

10. $y'' + 4y' + 3y = 10\sin x$.
$\mathcal{R}$. La fel ca în precedentul exerciţiu vom avea:
$y_p(x) = \frac{1}{D^2+4D+3}10\sin x = 10\frac{D-4D+3}{(D^2+3)^2-16D^2}\sin x = 10(D^2-4D+3)\frac{1}{(D^2+3)^2-16D^2}\sin x =$

$10(D^2-4D+3)(\frac{1}{(-1+3)^2-16(-1)})\sin x = \frac{10}{20}(\frac{d^2}{dx^2}-4\frac{d}{dx}+3)\sin x = \frac{1}{2}(-\sin x - 4\cos x + 3\sin x)$ Soluţia particulară a ecuaţiei date este:

$$y_p(x) = \sin x - 2\cos x.$$

11. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
$\mathcal{R}$. Procedând la fel, avem:
$y_p(x) = \frac{1}{D^2-7D+6}\sin x = \frac{D^2+7D+6}{(D^2+6)^2-49D^2}\sin x = (D^2+7D+6)\frac{1}{(D^2+6)^2-49D^2}\sin x = (D^2+7D+6)\sin x(\frac{1}{(-1+6)^2-49(-1)} = \frac{1}{74}(\frac{d^2}{dx^2}+7\frac{d}{dx}+6)\sin x = \frac{1}{74}(-\sin x + 7\cos x + 6\sin x)$.
Soluţia particulară este:

$$y_p(x) = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x.$$

Observaţie:
În loc să luăm termenul liber $f(x) = \sin x$,vom lua $f(x) = e^{ix}$. Soluţia $\widetilde{y}$ are partea imaginară soluţia ecuaţiei data. Astfel vom avea: $\widetilde{y}_p(x) = \frac{1}{D^2-7D+6}e^{ix} = e^{ix}\frac{1}{i^2-7i+6} = e^{ix}\frac{1}{5-7i} = e^{ix}\frac{5+7i}{25+49} = \frac{(\cos x+i\sin x)(5+7i)}{74}$ şi soluţia ecuaţiei date va fi:

$$y_p(x) = Im(\widetilde{y}_p(x)) = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x.$$

12. $y'' - y = xe^x\cos x$. $\mathcal{R}$. Vom lua în loc de termenul liber $xe^x\cos x, f(x) = xe^{ix+x} = xe^{(i+1)x}$. Soluţia $\widetilde{y}$ are partea reală soluţia ecuaţiei date. Astfel, vom avea: $\widetilde{y}_p(x) = \frac{1}{D^2-1}xe^{ix+x} = e^{ix+x}\frac{1}{(D+i+1)^2-1}x = e^{ix+x}\frac{1}{D^2-2(i+1)D+2i-1}x$
Împărţind pe 1 la $F(D) = D^2-2(i+1)D+2i-1$, din dezvoltarea Taylor obţinem :
$T_1(D) = \frac{1}{2i-1} - \frac{2(1+i)}{(2i-1)^2}D$, Deci: $y_p(x) = e^{ix+x}(\frac{1}{2i-1} - \frac{2(1+i)}{(2i-1)^2}D)x = e^xe^{ix}(\frac{x}{2i-1} - \frac{2(1+i)}{(2i-1)^2}) = e^xe^{ix}(\frac{x(2i+1)}{-5} + \frac{2(1+i)}{3+4i}) = e^xe^{ix}(\frac{x(2i+1)}{-5} + \frac{2(7-i)}{25}) = \frac{e^xx}{-5}(\cos x + i\sin x)(1+2i) + \frac{2e^x}{25}(\cos x + i\sin x)(7-i)$.
Vom avea, soluţia particulară a ecuaţiei date:

$$y_p(x) = Re(\widetilde{y}_p(x)) = e^x[(-\frac{x}{5}+\frac{14}{25})\cos x + (\frac{2x}{5}+\frac{2}{25})\sin x].$$

Capitolul 12

Sisteme de ecuaţii diferenţiale.

12.1 Sisteme liniare cu coeficienţi constanţi.

În acest paragraf von studia ecuaţiile:

$$\frac{dY}{dx} = F(Y), \tag{12.1}$$

unde

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

este de forma:

$$F(Y) = AY + B$$

unde

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad B = B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{pmatrix},$$

a_{ij}, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$, constante reale.

Explicit vom avea:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{12.2}$$

Este vorba deci, de sisteme liniare cu coeficienţi constanţi.

Sistemul (12.1) sau (12.2) se numeşte sistem liniar omogen dacă $B = 0$ sau $b_1(x) = b_2(x) = \dots b_n(x) = 0$. În cazul când există cel puţin un indice $j = 1, 2, \dots, n$ pentru care $b_j \neq 0$ vom spune că istemul este liniar neomogen.

Problema Cauchy ataşată sistemului liniar cere determinarea soluţiei unice care verifică condiţia:

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = Y_0 \tag{12.3}$$

12.1.1 Determinarea soluţiilor sinstemului liniar omogen.

Fie sistemul liniar şi omogen:

$$\frac{dY}{dx} = AY, \tag{12.4}$$

sau explicit:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{12.5}$$

Vom căuta soluţii de forma:

$$Y(x) = e^{\lambda x}C,$$

unde C este un vector coloană cu n componente constante, fie acestea $c_1, c_2, \dots c_n$, iar λ un parametru . Cum $\frac{dY}{dx} = \lambda e^{\lambda x}C$, înlocuind în (12.4), vom avea:

$$(A - \lambda I_n)Ce^{\lambda x} = 0, \tag{12.6}$$

cu I_n matricea unitate de ordin n. Prin urmare vom avea sistemul:

$$(A - \lambda I_n)C = 0$$

adică

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2 + \dots + a_{2n}c_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)c_n = 0 \end{cases} \tag{12.7}$$

Sistemul admite soluţia nulă($c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$), soluţia banală, pentru orice λ. Cum aceasta nu este interesantă, vom căuta soluţii diferite de cea banală. Condiţia de existenţă a soluţiilor nebanale este:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \tag{12.8}$$

care, prin dezvoltare conduce la polinomul de grad n:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots \alpha_n = 0 \tag{12.9}$$

numit polinomul caracteristic al sistemului. Pentru o rădăcină λ_j a polinomului caracteristic vom obţine o soluţie C_j din sistemul (12.7). Soluţiile λ_j se numesc valori proprii iar vectorii corespunzători C_j vectori proprii.

Prin urmare soluţia Y_j formată cu valoarea proprie λ_j şi vectorului propriu C_j este

$$Y_j = C_j e^{\lambda_j x},$$

care se mai numeşte soluţie fundamentală. Prin determinarea a n soluţii $Y_j \;\; j = 1, 2, \ldots, n$ vom spune că soluţia generală a ecuaţiei (12.4) sau (12.5) este o combinaţie lineară de soluţii fundamentale Y_j

$$Y(x) = \mathcal{C}_1 Y_1(x) + \mathcal{C}_2 Y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_n Y_n(x), \tag{12.10}$$

unde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ sunt n constante reale.
Exemplu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Valorile proprii asociate matricei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

sunt $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 3$
Vectorii proprii corespunzători sunt:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

obţinem soluţiile particulare ale sistemului dat:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y_2 = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului considerat este:

$$Y_o(x) = \mathcal{C}_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sau explicit:

$$\begin{cases} y_1 = \mathcal{C}_1 e^{2x} + \mathcal{C}_2 e^{3x} \\ y_2 = \mathcal{C}_1 e^{2x} + 2\mathcal{C}_2 e^{3x} \end{cases}$$

12.1.2 Determinarea soluţiilor sinstemului liniar neomogen.

Metoda variaţiei constantelor.

Fie, din nou, sistemul liniar neomogen:

$$\frac{dY}{dx} = AY + B \tag{12.11}$$

şi fie sistemul liniar omogen asociat:

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{12.12}$$

Teorema 1. Dacă Y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei (12.11), atunci orice soluţie Y a ei este de forma $Y = Y_p + Y_o$, unde Y_o este soluţie a ecuaţiei (12.12) $\lceil$ Dacă înlocuim în (12.11) pe $Y = Y_p + Y_o$, obţinem: $Y' = Y_p' + Y_o' = A(x)(Y_p + Y_o) + B(x)$, cum $Y_p' = A(x)Y_p + B(x)$, rezultă $Y_o' = A(x)Y_o$. Invers dacă $Y_o' = A(x)Y_o$, atunci $Y = Y_p + Y_o$, cu Y_p soluţie particulară, soluţie a ecuaţiei (12.11)$\rfloor$.

Teorema 2. Dacă $\{Y_1^0, Y_2^0, \ldots, Y_n^0\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (12.12), deci soluţia generală a acestui sistem este:

$$Y_o = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j Y_j^o,$$

există funcţiile $\mathcal{C}_1(x), \mathcal{C}_2(x), \ldots, \mathcal{C}_n(x)$ astfel încât:

$$Y_p = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j(x) Y_j^o(x)$$

este soluţie particulară a sistemului neomogen (12.11)
$\lceil$ Punând condiţia ca Y_p să verifice ecuaţia (12.11), obţinem:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j'(x) Y_j^o(x) + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j(x) \frac{dY_j^o(x)}{dx} = A \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j(x) Y_j^o(x) + B(x)$$

deci:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j'(x) Y_j^o(x) + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j(x) [\frac{dY_j^o(x)}{dx} - AY_j^o] = B(x)$$

de unde, dacă folosim faptul că Y_j^o sunt soluţii ale sistemului omogen (12.12), deci:

$$\frac{dY_j^o(x)}{dx} - AY_j^o = 0 \quad (\forall)j = 1, 2, \ldots, n$$

obţinem:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j'(x)Y_j^o(x) = B(x),$$

cu

$$Y_j^o = \begin{pmatrix} y_{j1}^o \\ y_{j2}^o \\ \vdots \\ y_{jn}^o \end{pmatrix}$$

În mod explicit avem sistemul liniar şi neomogen:

$$\begin{cases} C_1'y_{11}^o + C_2'y_{21}^o + \ldots + C_n'y_{n1}^o = b_1 \\ C_1'y_{12}^o + C_2'y_{22}^o + \ldots + C_n'y_{n2}^o = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ C_1'y_{1n}^o + C_2'y_{2n}^o + \ldots + C_n'y_{nn}^o = b_n, \end{cases}$$

al cărui determinant:

$$\begin{vmatrix} y_{11}^o & y_{21}^o & \cdots & y_{n1}^o \\ y_{12}^o & y_{22}^o & \cdots & y_{n2}^o \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}^o & y_{2n}^o & \cdots & y_{nn}^o \end{vmatrix}$$

este $\neq 0$ deoarece $\{Y_1^o, Y_2^o, \ldots, Y_n^o\}$ este un sistem fundamental de soluţii al sistemului omogen.

Exemplu:

Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^{-x} \\ y_2' = y_1 + y_2 + 2e^{-x} \end{cases}$$

Sistemului omogen asociat:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

îi corespunde matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce are drept polinom caracteristic

$$P_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$$

Pentru $\lambda = 0$ vom avea vectorii proprii de forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$, iar pentru $\lambda = 2$ vom avea vectorii proprii de forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ obţinem sistemul fundamental de soluţii pentru sistemul omogen corespunzător

$$\{Y_1^o = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ Y_2^o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}\}$$

deci soluţia generală a sistemului omogen este:

$$Y_o = \mathcal{C}_1 Y_1^o + \mathcal{C}_2 Y_2^o = \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

Căutând soluţie particulară de forma:

$$Y_p = \mathcal{C}_1(x) Y_1^o + \mathcal{C}_2(x) Y_2^o$$

obţinem:

$$\mathcal{C}_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1'(x) + \mathcal{C}_2'(x) e^{2x} = e^{-x} \\ -\mathcal{C}_1'(x) + \mathcal{C}_2'(x) e^{2x} = 2e^{-x} \end{cases}$$

Soluţiile acestui din urmă sistem sunt:

$$\mathcal{C}_1'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \ \text{şi} \ \mathcal{C}_2'(x) = \frac{3}{2} e^{-3x},$$

deci

$$\mathcal{C}_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \ \text{şi} \ \mathcal{C}_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-3x},$$

şi atunci:

$$Y_p = \frac{1}{2} e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului dat este:

$$Y = Y_o + Y_p + \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pe componente vom avea:

$$\begin{cases} y_1 = \ \ \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 e^{2x} \\ y_2 = -\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 e^{2x} - e^{-x} \end{cases}$$

cu $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ constante reale.

12.1.3 Sisteme şi ecuaţii liniare.

Vom considera ecuaţia diferenţială de ordin n scrisă sub forma normală:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{12.13}$$

Propoziţia 1:
Ecuaţia $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ este echivalentă cu sistemul de n ecuaţii de ordinul întâi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{12.14}$$

unde $y_1 = y$ în sensul următor: dacă $y = y_1$ este soluţie a ecuaţiei (12.13) atunci

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

este soluţie a sistemului (12.14) şi reciproc.
Observaţie:
Această echivalenţă se păstrează şi în cazul problemei Cauchy:
Condiţiile iniţiale:

$$y(x_0) = y_{00}, y'(x_0) = y_{10}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10}$$

sunt îndeplinite dacă şi numai dacă:

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

Vom studia în continuare cazul particular al ecuaţiilor (12.13) de forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \dots - a_n y + f(x) \tag{12.15}$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ iar $f(x)$ o funcţie continuă, deci a ecuaţiilor de forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{12.16}$$

Dacă $f(x) = 0$ ecuaţia se numeşte omogenă, dacă $f(x) \neq 0$ ecuaţia se numeşte neomogenă.

vom folosi uneori operatorul diferenţial L definit prin:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y \qquad (12.17)$$

şi atunci ecuaţia considerată poate fi pusă sub forma:

$$L(y) = f(x)$$

Propoziţia 2:
Ecuaţia $Ly = 0$ este echivalentă cu sistemul de n ecuaţii de ordinul întâi

$$\begin{cases} y_1' = & -y_2 \\ y_2' = & \quad -y_3 \\ \vdots & \\ y_{n-1}' = & \qquad -y_n \\ y_n' = -a_1 y_1 - a_2 y_2 - a_3 y_3 \ldots - a_n y_n \end{cases} \qquad (12.18)$$

Prin urmare matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Propoziţia 3:
Fie ecuaţia liniară şi omogenă

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

şi fie sistemul echivalent:

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

atunci polinomul caracteristic asociat matricei A coincide cu polinomul caracteristic al ecuaţiei liniare $Ly = 0$
Întradevăr dezvoltând $\det(A - \lambda I_n) = 0$ după ultima linie obţinem:

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Propoziţia 3:
Un sistem liniar de n ecuaţii de ordinul unu neomogen:

$$\frac{dY}{dx} = AY + B, \quad A \in \mathcal{M}n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{R}) \qquad (12.19)$$

este echivalent cu o ecuaţie liniară de ordinul n:

$$L(y) = f(x), \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \tag{12.20}$$

Demonstraţie: Să notăm cu D matricea asociată operatorului de derivare:

$$DY = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Egalitatea (12.19)devine atunci:

$$(D - A)Y = B \quad (\forall)Y$$

Rezolvând formal acest sistem obţinem relaţiile:

$$\det(D - A)y_i = \det C_i,$$

unde C_i este matricea ce se obţine înlocuind în matricea $D - A$ coloana i cu vectorul coloană B. Rezultatul va fi o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n în y_i.

Exemple:

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & -y_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D - A = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -1 \\ 1 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & -1 \\ 1 & \frac{d}{dx} \end{vmatrix} y_1 = 0 \text{ adică } y_1'' + y_1 = 0$$

Soluţiile sistemului sunt:

$$\begin{cases} y_1 = & \mathcal{C}_1 \cos x + \mathcal{C}_2 \sin x \\ y_2 = & -\mathcal{C}_1 \sin x + \mathcal{C}_2 \cos x \end{cases}$$

2) Pentru sistemul

$$\begin{cases} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 + 16x \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D - A = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} - 1 & -1 \\ -1 & \frac{d}{dx} - 1 \end{pmatrix}$$

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}-1 & -1 \\ -1 & \frac{d}{dx}-1 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 16x & \frac{d}{dx}-1 \end{vmatrix} \text{ adică } y_1'' - 2y_1' = 16x$$

sau cu:

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}-1 & -1 \\ -1 & \frac{d}{dx}-1 \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}-1 & 0 \\ -1 & 16x \end{vmatrix} \text{ adică } y_2'' - 2y_2' = 16 - 16x$$

Observaţie: Se poate ajunge la aceleaşi rezultate dacă vom folosi metoda substituţiei care constă în eliminarea pe rând a necunoscutelor, ajungând în cele din urmă la o ecuaţie diferenţială de ordin n.
Astfel din exemplul 2) din prima ecuaţie avem

$$y_2 = y_1' - y_1 \quad \text{iar} \quad y_2' = y_1'' - y_1'$$

Înlocuind y_2 şi y_2' în a doua ecuaţie ne va da:

$$y_1'' - y_1' = y_1 + y_1' - y_1 + 16x \text{ sau } \quad y_1'' - 2y_1' = 16x$$

La fel scoţând din a doua ecuaţie pe y_1 avem

$$y_1 = y_2' - y_2 - 16x \quad \text{iar} \quad y_1' = y_2'' - y_2' - 16$$

Înlocuind y_1 şi y_1' în prima ecuaţie ne va da:

$$y_2'' - y_2' - 16 = y_2 + y_2' - y_2 - 16x \text{ sau } \quad y_2'' - 2y_2' = 16 - 16x$$

Prin urmare rezultate identice.