Serie (matematică)

În matematică, o **serie** este un şir infinit între elementele căruia s-a scris semnul operaţiei de adunare:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Elementele seriei pot fi numere reale, numere complexe, vectori, funcţi având ca valori numere reale, complexe sau vectori, etc. Este necesar ca pentru mulţimea din care se iau elementele seriei să fie definite operaţia de adunare şi noţiunea de convergenţă.

Fără alte condiţii, o astfel de serie se mai numeşte *serie formală*, deoarece (încă) nu se execută adunarea termenilor. Pentru a defini suma (valoarea) seriei, se definesc mai întâi *sumele parţiale* ca fiind sumele unor numere finite de elemente de la începutul şirului:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

Se spune că seria este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $S_1, S_2, \dots$ este convergent. Pentru o serie convergentă, se defineşte *suma seriei* ca fiind limita şirului sumelor parţiale:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N$$

Exemple

Probabil cea mai simplă serie infinită convergentă este:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Se poate "vizualiza" convergenţa ei pe axa numerelor reale: ne putem imagina o linie de lungime 2, pe care se marchează succesiv segmente cu lungimile 1, ½, ¼, etc. Întotdeauna se va putea marca următorul segment, deoarece dimensiunea liniei rămasă nemarcată va fi întotdeauna aceeaşi cu cea a ultimului segment marcat: când a fost marcat segmentul ½, a mai rămas o bucată nemarcată de lungime ½, deci putem să marcăm următorul segment de ¼. Acest argument nu demonstrează că suma este *egală* cu 2 (deşi este), ci demonstrează că este *cel mult* 2 — in alte cuvinte, seria are o limită superioară.

Această serie este o serie geometrică iar matematicienii de obicei o scriu astfel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

unde termenii a_n sunt numere reale (sau complexe). Spunem că seria **converge la** S, sau că **suma ei este** S, dacă limita $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ există şi este egală cu S. Dacă nu există un astfel de număr atunci se spune că seria este *divergentă*.

Câteva tipuri de serii infinite

O serie geometrică este o serie în care fiecare termen succesiv este obţinut prin înmulţirea termenului anterior printr-o constantă (numită raţie). De exemplu:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

În general, seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge dacă şi numai dacă $|z| < 1$.

Seria armonică este seria:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge dacă $r > 1$ şi este divergentă dacă $r \le 1$, acest lucru poate fi arătat cu ajutorul criteriului integral.

O serie alternată este o serie în care termenii alternează semnele. Exemplu:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

O serie telescopică $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ converge dacă şirul b_n converge la o limită L când n tinde la infinit. Suma seriei este atunci $b_1 - L$.

Absolut convergenţa

M Se spune că o serie de numere reale sau complexe sau de vectori într-un spaţiu Banach $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolut* sau că este *absolut convergentă* dacă seria valorilor absolute ale termenilor, sau respectiv seria normelor lor, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.

O serie absolut convergentă este întotdeauna convergentă. Mai mult, prin permutarea termenilor unei serii absolut convergente, rezultă întotdeauna o serie convergentă a cărei sumă este egală cu suma seriei originale.

O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte *semiconvergentă*. Pentru o serie semiconvergentă de numere reale, se poate, prin permutarea adecvată a termenilor, să se obţină o serie ce converge la orice valoare se doreşte; de asemenea, prin permutarea termenilor unei serii semiconvergente se poate obţine o serie divergentă.

Criterii de convergenţă

Criteriile de comparaţie

În matematică, **criteriile de comparaţie** sunt criterii care stabilesc natura unei serii ai cărei termeni sunt numere reale sau complexe. Acesea determină natura seriei comparând termenii ei cu cei ai unei alte serii, căreia îi este cunoscută natura.

Primul criteriu al comparaţiei

Primul criteriu de comparaţie spune că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este o serie absolut convergentă şi există un număr real C independent de n astfel încât $|a_n| \le C|b_n|$ pentru un n oricât de mare, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă. În acest caz se spune ca b "domina" pe a. Dacă seria $\sum|b_n|$ este divergentă şi $|a_n| \ge |b_n|$ pentru un n oricât de mare, atunci seria $\sum a_n$ nu converge absolut.

Al doilea criteriu al comparaţiei

Al doilea criteriu de comparaţie spune că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este o serie absolut convergentă şi există un număr real C independent de n astel încât $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le C \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ pentru un n oricât de mare, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolut.

Dacă seria $\sum|b_n|$ este divergentă şi $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ pentru un n oricât de mare, atunci seria $\sum a_n$ nu converge absolut.

Acest lucru rezultă din : Criteriul raportului (D'Alembert)

Al treilea criteriu al comparaţiei

Al treilea criteriu al comparaţiei spune că dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt serii cu toţi termenii pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

Atunci:

Dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două serii sunt de aceeaşi natură.

Dacă $l = 0$ şi seria $\sum b_n$ este convergentă atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.

Dacă $l = +\infty$ şi seria $\sum b_n$ este divergentă atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.n

Criteriul radicalului (Cauchy)

În matematică, **criterul radicalului (Cauchy)** se aplică pentru determinarea naturii seriei infinte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Este foarte folositor atunci când se aplică seriilor exponenţiale. Acest criteriu a fost creat de Cauchy, de aceea mai este numit şi **criteriul Cauchy**. Criteriul radicalului foloseşte numărul

$$C = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

unde "lim sup" înseamnă limită superioară.

Criteriul radicalului spune că:

Dacă $C < 1$ atunci seria este absolut convergentă.

Dacă $C > 1$ atunci seria este divergentă.

Daca $C = 1$ atunci natura seriei este nederminată.

Criteriul raportului (D'Alembert)

În matematică, **criteriul raportului (D'Alembert)** se aplică pentru determinarea naturii seriei infinte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ai cărei termeni sunt numere reale cau complexe.

Testul a fost prima dată publicat de Jean le Rond d'Alembert, de aceea mai este numit şi

criteriul lui D'Alembert. Criteriul raportului folosește numărul

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Criteriul raportului spune că:

Dacă $L < 1$ atunci seria este absolut convergentă.

Dacă $L > 1$ atunci seria este divergentă.

Daca $L = 1$ sau L este nedeterminat atunci natura seriei este nederminată.

Criteriul Raabe-Duhamel

Dacă L = 1 criteriul raportului nu poate dermina natura seriei studiate. O extindere a criteriului raportului este **criteriul Raabe-Duhamel** care permite uneori determinarea naturii seriei pentru cazul L = 1.

Criteriul Raabe-Duhamel spune că dacă pentru o serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

și dacă există un număr pozitiv c astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - 1\right) = -1 - c$$

atunci seria este absolut convergentă.