

7. PROPAGAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Sub acest titlu mai general, prezentul capitol va trata câteva teme legate de câmpurile electromagnetice variabile în timp (t) și spațiu, descris de mărimile de stare de forma $\vec{E}(\vec{r}, t)$ sau $\vec{E}(P, t)$ și $H(\vec{r}, t)$ sau $\vec{H}(P, t)$ –unde \vec{r} este raza vektorială a unui punct P (oricare) din domeniul Ω de existență a câmpului electromagnetic– teme ca: ecuația undelor, unde electromagnetice, radiația oscilatoarelor, propagarea undelor plane în diferite medii, difracția undelor electromagnetice, ghiduri de unde, cavități rezonante, repartiția câmpului electromagnetic în conductoare masive, efectul pelicular, curenții turbionari, pierderile în fier, precum și câteva aplicații diverse.

7.1. Unde electromagnetice

La modul cel mai general, noțiunea de undă poate fi definită în felul următor: prin **undă** se înțelege un fenomen (o manifestare naturală) variabil în timp care se propagă din aproape în aproape într-o regiune dată a spațiului. Acest fapt –prin modelare– se poate defini și astfel: în domeniul Ω se propagă o undă a mărimii de stare u dacă o perturbare a lui u , existentă în punctul P în momentul t se regăsește în momentul $t+\Delta t$ în diverse puncte P' din vecinătatea lui P .

În legătură directă cu această definiție se introduc noțiunile: front de undă și viteza frontului.

Prin **frontul undei** se înțelege suprafața ce separă, la un moment dat, regiunea perturbată de cea neperturbată; ea evoluează atât în timp cât și în spațiu, ceea ce implică fenomenul de **propagare a undei** în domeniul Ω .

Viteza de propagare a frontului (ceea ce este tot una cu **viteza de propagare a undei**) se definește ca fiind limita dintre distanța $\overline{PP'}$ pe care o parcurge un punct P' al frontului de undă (față de punctul P din punctul de perturbație) în intervalul de timp Δt și acest interval de timp, atunci când Δt tinde către zero, adică:

$$\overline{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{PP'}}{\Delta t} = \frac{d\overline{l}}{dt}, \quad (7.1)$$

care este totdeauna finită. Aceasta corespunde faptului esențial că în concepția actuală a Fizicii nu există decât efecte care se propaga prin „acțiuni din aproape în aproape” (cunoscuta teorie a contiguității) și cu viteză finită. De fapt, această concepție (având totuși o origine mai veche: anul 1843, când M. Faraday a introdus termenii de câmp și de contiguitate) stă la baza teoriei macroscopice clasice a fenomenelor electromagnetice ale lui Maxwell. Teoria contiguității consideră că purtătorul acțiunilor electrice și magnetice dintre corpurile electrizate și magnetizate este câmpul electromagnetic care le transmite prin contiguitate (adică din aproape în aproape în spațiu și timp) cu o anumită viteză finită (dar foarte mare), astfel că ele au nevoie de un anumit timp spre a se propaga. Acțiunile prin contiguitate depind numai de *evoluția pe care stările fizice au avut-o într-un timp oricât de scurt (care tocmai a trecut!) la o distanță oricât de mică din jurul porțiunii de corp asupra căreia se exercită*, de aici rezultând imediat noțiunea de **unde electromagnetice**, în forma din definiția dată la început.

7.1.1 Clasificarea și reprezentarea undelor

Există diferite criterii de clasificare a undelor. Astfel, după natura fizică a mărimii de stare u considerată, se disting undele: *elastice*, pentru care u este o deplasare sau o tensiune mecanică, ori o presiune etc. (din această categorie fac parte, de exemplu, undele seismice, undele hidraulice, undele sonore ș.a.), gravifice, magnetohidrodinamice, electromagnetice (la care mărimile de stare sunt, în principal, intensitatea câmpului electric \vec{E} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H}) etc.

Iată două exemple de unde:

- undele superficiale care apar pe suprafața unui lac adânc când, această suprafață fiind perfect plană, într-un punct P al ei cade un obiect greu (o piatră). Acest eveniment duce la formarea pe suprafața apei a unor cercuri concentrice, care își măresc din ce în ce raza și care au

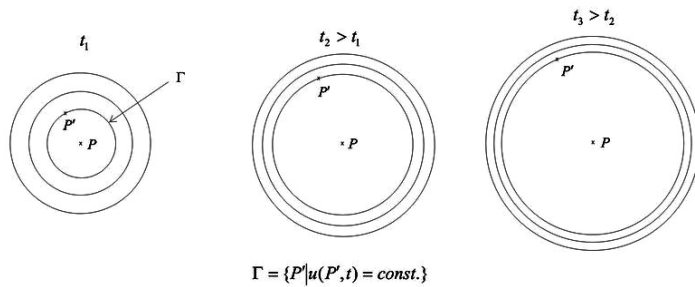


Fig. 7.1

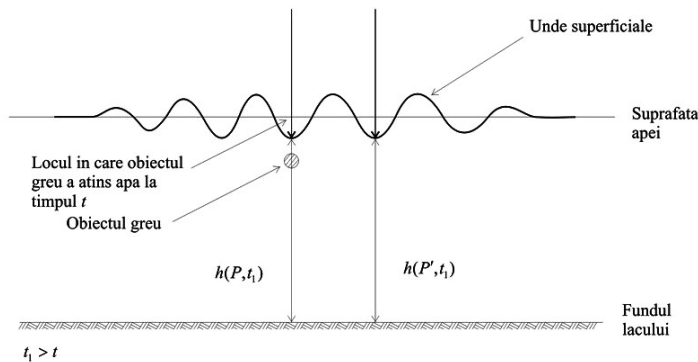


Fig. 7.2

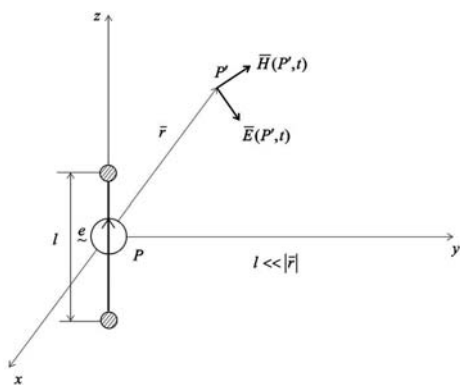


Fig. 7.3

centrul în punctul P în care a căzut obiectul greu. Dacă se reprezintă suprafața apei în câteva momente succesive din figura 7.1, realizate în momentele t_1 , $t_2 > t_1$ și $t_3 > t_2$, se vede că aceste „ondulații” superficiale se propagă sub forma cercurilor din figura 7.1, până când ajung la malul apei. În figura 7.2 este reprezentată o „secțiune” verticală prin apa lacului, la momentul t_1 din care rezultă că perturbația produsă de obiectul căzut în punctul P se transmite în punctul P' , prin modificarea nivelului $h(P, t)$ al apei, față de fundul lacului, datorită mișcărilor moleculelor apei, sub influența șocului dat de obiectul căzut, al energiei primite prin acest șoc de molecule și al frecării dintre moleculele de apă etc.;

- **undele electromagnetice**

pot fi produse așa ca în figura 7.3,

de o sursă de energie electrică cu t.e.m. e alternativă (un oscilator electric – v. cursul „Dispozitive și circuite electronice”) care încarcă și descarcă alternativ, cu sarcini electrice de nume contrar, două sfere metalice (v. fig. 7.3) situate la o distanță l foarte mică în raport cu un punct $P'(\vec{r}')$ unde se analizează câmpul electromagnetic produs de cele două sfere prin mărimile lui de stare \vec{E} și \vec{H} (v. § 7.1.6). În repartiția lor instantanee, sarcinile electrice determină un câmp electric care variază în timp: $\vec{E} = (\vec{P}', t)$. Conform legii circuitului magnetic (1.88), un câmp electric care variază în timp produce un câmp magnetic, care

–datorită faptului că $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon \cdot \partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ – va varia și el,

intensitatea lui fiind $\vec{H} = (\vec{P}', t)$. Deoarece și câmpul magnetic variază în timp, va produce – conform legii inducției electromagnetice (1.82), prin termenul $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ – un nou câmp electric variabil în timp și așa mai departe. Rezultatul este apariția unei succesiuni de fronturi ale câmpului electromagnetic (perturbat / întreținut de sursa alternativă cu t.e.m. e), care variază în timp și spațiu, deci formarea unei unde electromagnetice.

Un alt criteriu de clasificare a undelor ține seama de felul de exprimare matematică a mărimii de stare u , în funcție de care există unde: scalare, vectoriale și tensionale, reale sau complexe. Astfel, în cazul undelor elastice care se propagă în gaze, mărimea de stare a gazelor: presiunea p (care este un scalar) – constituie o undă scalară, iar viteza o undă vectorială (deoarece mărimea fizică viteză se evaluează printr-un vector \vec{w}). În exemplul din figurile 7.1 și 7.2 (al undelor superficiale de pe luciul apei), mărimea superficială de stare fiind deplasarea $\vec{h}(P, t)$ a nivelului suprafeței apei, deci un vector, undele au un caracter vectorial. În acest caz simplu, al transmiterii undelor elastice vectoriale de-a lungul unui corp (în exemplul considerat, suprafața apei), se disting două varietăți de unde vectoriale, după cum deplasarea este paralelă cu direcția de propagare sau perpendiculară pe ea. Primul caz, simplu de exemplificat prin ce se întâmplă cu un arc spiral (ca cel din figura 7.4) supus unei perturbări inițiale de-a lungul axei sale, constă în apariția unei unde longitudinale, situație în care perturbarea se transmite în lungul resortului, vectorul reprezentativ din acest caz, fiind forța $\vec{F}(P, t)$ care este paralel cu axa resortului (fig. 7.4).

În cazul perturbării suprafeței apei (v. figurile 7.1 și 7.2), mărimea care poate descrie acest fenomen este deplasarea $\vec{h}(P, t)$ un vector perpendicular pe direcția radială \vec{PP}' (v. fig. 7.1) de propagare a undelor superficiale, ceea ce înseamnă că aici este vorba de o undă transversală.

În ceea ce privește undele tensoriale, un exemplu din această categorie este acela al undelor de presiune din fluide vâscoase.

Undele mai pot fi clasificate și după criteriile geometrice, ca –de exemplu– numărul de dimensiuni care intervin în propagarea unei considerate. Tot un criteriu geometric de clasificare este acela care ține seama de forma suprafețelor pe care se află la un moment dat perturbațiile. După felul suprafețelor în ale căror puncte mărimea de stare are aceleași valori în momente succesive, există undele:

plane (fig. 7.5a), cilindrice (fig. 7.5b), sferice (fig. 7.5c) etc.. În exemplul dat în figura 7.1, al undelor superficiale de pe suprafața unui lac, din punctul de vedere geometric aceste unde sunt circulare, concentrice.

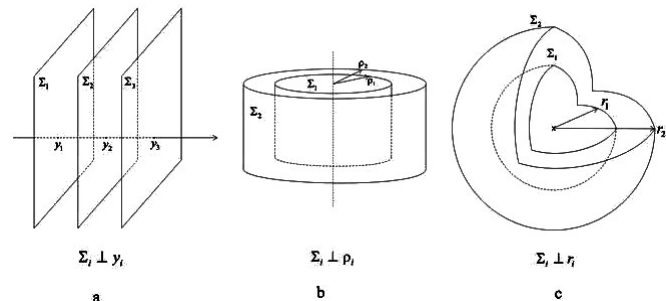


Fig. 7.5

După caz, se pot folosi numeroase tipuri geometrice de undă, dar cele mai importante sunt totuși undele plane și sferice; cele plane pentru faptul că pe o porțiune suficient de mică din spațiu, orice undă $\Delta \Sigma$ poate fi aproximată ca fiind plană (ceea ce simplifică studiul), iar undele sferice prezintă interes deoarece –conform principiului lui Huygens (v. §7.1.8)– orice punct de pe o suprafață de undă poate fi considerat ca o sursă a unei unde sferice.

Undele se mai pot clasifica și după felul cum variază în timp mărimea de stare u . După cum s-a mai arătat în general această mărime este o funcție de punct, P sau $\bar{r} \Rightarrow P(\bar{r})$, și de timp t : $u(P, t)$ sau $u(\bar{r}, t)$. În unele din exemplele date până în prezent (cele ilustrate în figurile 7.1, 7.2 și 7.4), undele se datorau faptului că perturbația era de forma unei funcții treaptă (de șoc), adică: la un moment dat, în punctul \bar{r} (sau P) apărea brusc o perturbație, care se propaga mai departe în punctele vecine, \bar{r}' (sau P'), fără a mai reveni (să zicem periodic). În astfel de cazuri, unda se numește *undă de șoc*.

Dar există și multe situații (ca aceea din figura 7.3, unde sursa de perturbații este o t.e.m. e alternativă), în care fenomenul perturbator revine periodic în timp și –în acest fel– produce o variație periodică a mărimii de stare, adică:

$$u(\bar{r}, t) = u(\bar{r}, t + T) \Rightarrow T \neq 0,$$

ceea ce înseamnă a spune că prin \bar{r}' trece o *undă periodică* în timp, de perioadă T . Revenindu-se la exemplul mai simplu de intuit și reprezentat, al undelor superficiale ce apar pe luciul unui lac atunci când într-un punct fix P obiectul greu lovește periodic apa, la intervale de timp T (perioada de repetiție), se va constata că aspectul suprafeței lacului (văzută de sus) este cel indicat în figura 7.6, adică niște grupuri de cercuri care se succed în timp cu perioada T și pe direcția razei cercurilor cu intervalul λ . Acest interval λ după care perturbațiile se reiau se numește *lungime de undă* (v. § 7.1.3) și ea reprezintă în fapt distanța la care se propagă unda (frontul undei) în timpul unei perioade T . Dacă propagarea undei se face cu viteza \bar{w} , atunci: $\lambda = \bar{w} T$. Deci, unei perturbații periodice în timp îi corespunde o undă periodică în timp și în spațiu. Acest caz este foarte utilizat în tehnica comunicațiilor prin unde electromagnetice; el a fost numai prezentat ca exemplu în figura 7.3, dar asupra lui se va reveni în toate paragrafele ce vor urma.

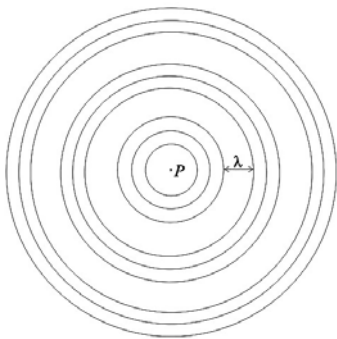


Fig. 7.6

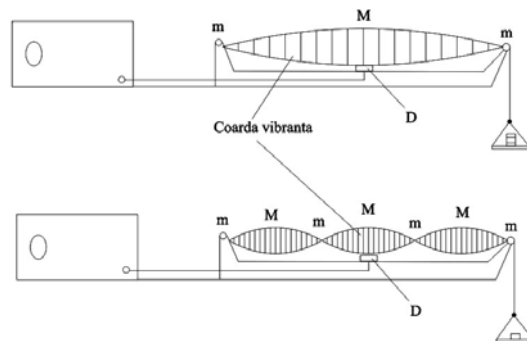


Fig. 7.7

Un alt caz este acela în care în modelul mărimii de stare u , variabilele \bar{r} și t apar separate, în forma:

$$u(\bar{r}, t) = \rho(\bar{r})\tau(t),$$

care reprezintă modelul tipic al coardei vibrante. Vibrațiile coardei sunt produse mecanic, de o doză D comandată periodic de un oscilator mecanic O , așa cum se arată în figura 7.7. În funcție de tensiunea mecanică prin care este „întinsă” coarda, apare un anumit număr de „maxime” (M) și de „minime” (m) care nu se deplasează în timp în lungul coardei; acest tip de undă se numește *undă staționară*. În opoziție cu acestea, undele la care se constată o propagare a perturbațiilor se numesc *unde progresive*.

Avându-se în vedere definiția undelor, deoarece în cazul undelor staționare nu se observă o deplasare a perturbațiilor, vibrațiile care apar nu pot fi incluse în categoria undelor. Ele prezintă totuși interes în teoria undelor deoarece analiza fenomenelor vibratorii arată că –în general– undele staționare pot fi considerate ca o suprapunere de unde progresive (v. §7.1.3).

Reprezentarea grafică a undelor

Reprezentarea grafică a proceselor ondulatorii trebuie să redea într-o formă cantitativă modul cum este repartizată pe Ω mărimea de stare $u(P,t)$ sau $u(\vec{r},t)$ –cu $P(\vec{r}) \in \Omega$ – astfel încât să rezulte esența proprietăților specifice undelor analizate. Folosindu-se performanțele de grafică interactivă, de reprezentare în 3D (simulând spațiul tridimensional) și facilitățile actuale ale tehnicilor de calcul automat, reprezentarea diverselor tipuri de unde devine foarte simplă, putând reda –prin animație– și evoluția în timp.

În principiu (chir și atunci când se utilizează reprezentarea prin animație), redarea grafică a propagării undelor se face în două moduri: 1^o se reprezintă starea domeniului în care se propagă unda (în nodurile unei rețele de discretizare care se aplică domeniului Ω , în 3D sau –dacă există simetrii– în 2D) la diverse intervale de timp Δt suficient de mici pentru a se sesiza influența timpului în mod fluent (până la redarea animată, firească); 2^o se reprezintă în mod continuu variația în timp a mărimii de stare $u(P,t) \leftarrow P$ același, în anumite puncte P ale domeniului Ω considerat etc.

În cazul 1^o de reprezentare, are importanță și alegerea sistemului de referință (de coordonate), care se adoptă în funcție de natura matematică a mărimilor de stare, de forma geometrică (posibilă) a undelor, de numărul de dimensiuni al domeniului Ω etc.

Influența mediului asupra propagării undelor

Natura mediului și cazurile de neuniformitate determină în mod hotărâtor fenomenul de propagare a undelor, atât în ceea ce privește amplitudinea undei și viteza de propagare, dar și apariția unor efecte care sunt provocate direct de către starea mediului.

Astfel discontinuitățile mediului, atinse de către o undă progresivă, produc apariția unor noi unde cu centrul în punctele de discontinuitate.

Dacă perturbațiile din mediu sunt de dimensiuni mici în comparație cu lungimea de undă (v. § 7.1.3) are loc un *fenomen de împrăștiere* a undelor (un astfel de fenomen intervine frecvent în propagarea undelor electromagnetice de radiofrecvență la distanțe foarte mari).

Atunci când mediul în care se propagă undele este format din mai multe zone, fiecare în parte uniforme dar cu mărimi de material diferite de la zonă la zonă (care sunt separate, deci, prin suprafețe de discontinuitate), se produc *efecte de refracție a undelor* (v. § 7.4.2), în cazul în care undele ce traversează suprafețele de discontinuitate au lungimea de undă mult mai mică decât una din dimensiunile suprafeței. Suprafețele de discontinuitate dintre două medii uniforme produc și fenomenul de *reflexie* (v. § 7.4.2 și § 7.4.3).

Un alt fenomen, provocat de discontinuitățile din mediu, este *difracția* (v. § 7.1.8). El se produce la trecerea undelor pe lângă suprafețele în lungul cărora proprietățile de material ale mediului variază discontinuu pe porțiuni de dimensiuni mari în comparație cu lungimea de undă, porțiuni pe care se află corpuri opace. Un exemplu clasic de mediu în care se produce difracția este mediul omogen în care se află plasat un ecran opac (din punctul de vedere al propagării undelor), semiinfinit sau perforat; în acest caz undele (ca exemplu, tipic cele luminoase) difractă la trecerea prin orificiul din ecran sau la marginea sa.

Mediile la care viteza de fază (v. § 7.4.5) este independentă de frecvență se numesc medii *nedispersive*, iar cele la care această viteză depinde de frecvență se numesc medii *dispersive*. Exemple tipice de medii dispersive sunt (pentru undele electromagnetice) ionosfera și ghidurile de undă (v. § 7.1.9).

Mediile în care undelor ce se propagă li se micșorează amplitudinea în funcție de distanța străbătută (v. § 7.2.1), adică mediile care *atenuează* undele ce se propagă prin ele, se numesc medii *disipative*. În caz contrar (în care undele ce se propagă nu sunt atenuate), mediile se numesc *nedispersive*. Acest efect, de atenuare a undelor propagate, are o cauză energetică. Prin propagare unda transmite mediului în care se află o anumită energie (preluată de la sursa ce a produs, ca

element perturbator, unda) care prin diverse fenomene –în funcție de natura fizică a sistemului (de exemplu prin frecare în cazul undelor elastice, prin efect Joule în cazul undelor electromagnetice din mediile conductoare – v. § 7.3.1)– transformă energia, primită de la undele ce se propagă, în căldură (fapt dovedit de creșterea temperaturii mediului).

Polarizarea undelor

În cazul undelor vectoriale care se propagă printr-un mediu oarecare se produce următorul fenomen: vectorului de stare a undei $\vec{u}(\vec{r}, t)$ descrie, în timpul deplasării frontului undei, o curbă plană. Acest fapt este denumit *polarizarea undelor* într-un plan; dacă –în particular– vectorul de stare \vec{u} descrie o dreaptă, se spune că unda \vec{u} este *polarizată liniar* (v.fig.7.8b).

În cazul particular al *undelor armonice* (adică al undelor în care vectorul \vec{u} variază sinusoidal în timp), unda vectorială este întotdeauna polarizată plan, vârful vectorului \vec{u} descriind o elipsă, spunându-se ca unda este *polarizată eliptic*. Aceasta este considerată situația generală deoarece –după caz– elipsa poate degenera într-o dreaptă sau într-un cerc.

În legătură cu acest fenomen, se enunță următoarea teoremă: „orice undă vectorială este polarizată eliptic”. Demonstrația acestei teoreme este relativ simplă. Fie u_x , u_y și u_z componentele vectorului de stare \vec{u} al undei, componente ce variază armonic în timp, astfel că vectorul:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

poate fi scris în forma:

$$(P1) \quad \vec{u} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t,$$

unde: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ sunt vectori ale căror componente sunt constante în timp. După cum se știe (v. Matematica) relația (P1) reprezintă ecuația vectorială a unei elipse și atunci ecuația dată de produsul vectorial mixt:

$$(P2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{u} = 0,$$

reprezintă ecuația planului elipsei, plan ce are normala $\vec{a} \times \vec{b}$ (deoarece $\vec{a} \vec{b} \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} \vec{u} = 0$).

Ecuția (P1) arată că orice undă vectorială poate fi considerată ca provenind din suprapunerea a două unde vectoriale polarizate liniar: $\vec{a} \cos \omega t$ și $\vec{b} \sin \omega t$, defazate în timp cu $\frac{T}{4} \triangleq \frac{\pi}{2}$, deoarece funcțiile trigonometrice $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$ sunt în cuadratură.

Cazurile tipice reprezentate de ecuația (P2), ce reprezintă curba descrisă de vârful vectorului \vec{u} în timp, sunt elipsa (cazul general), cercul și dreapta. Dar, în cazul polarizării eliptice și al celei circulare, sunt posibile două situații determinate de modul cum variază în timp vectorul \vec{u} : cu succesiune în sensul acelor de ceas (care reprezintă *polarizarea de dreapta*) sau în sensul trigonometric (aceasta fiind *polarizarea de stânga*), situații care se pot reprezenta grafic așa cum se arată în figura 7.8a.

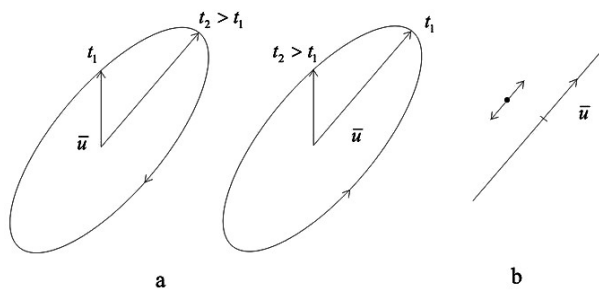


Fig. 7.8

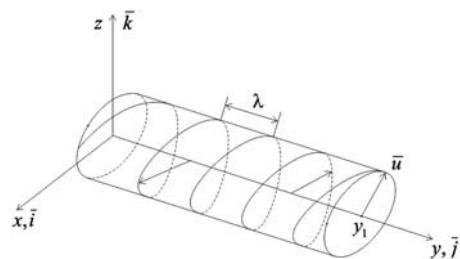


Fig. 7.9

O reprezentare care să indice polarizarea circulară de variație a vectorului $\vec{u}(P, t)$, atât în timp (după un cerc) cât și în spațiu (redând procesul de propagare) este arătată în figura 7.9.

7.1.2. Ecuația undelor electromagnetice

Pentru descrierea particularităților undelor electromagnetice se folosește un model care să determine relația existentă între mărimile de stare caracteristice câmpului electromagnetic, și anume: intensitatea câmpului electric –vectorul \vec{E} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H} (specifice celor două aspecte ale acestui câmp), precum și modul de propagare a câmpului electromagnetic prin unde, modelul indicând și dependența de punct și de timp ale acestor vectori de stare.

În acest scop se folosesc legile generale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic sub forma lor locală (de punct) exprimată de ecuațiile de bază ale lui Maxwell: (1.105M1)...(1.105M4) și ecuațiile de material (1.106M5)...(1.106M7), care se referă la electrodinamica macroscopică a mediilor continue, netede (în care funcțiile sunt continue și derivabile) și imobile, adică în cazul unor medii în repaus (cu viteza $\vec{w} = 0$), liniare, omogene și izotrope, fără polarizație electrică permanentă ($\vec{P}_p = 0$), fără magnetizație permanentă ($\vec{M}_p = 0$) și fără câmp imprimat ($\vec{E}_i = 0$). Deși un astfel de domeniu este un caz particular, cu multe restricții, a fost ales pentru că reprezintă situația cea mai răspândită în practica propagării undelor electromagnetice radio, în aer sau în vid (în „eter”), atât de utilizate în telecomunicații. Cazurile de discontinuitate, neuniformitate, anizotropie etc., care generează efecte secundare, sunt tratate aparte în condițiile date (reflexie, refracție, difracție, radiații –atunci când $\vec{p} \neq 0$ sau / și $\vec{m} \neq 0$, efectul Doppler-Fizeau atunci când există viteze relative între sursele de radiații, observator, mediu etc.– deci când $\vec{w} \neq 0$, atenuarea undelor în mediile disipative etc.).

Reamintindu-se ecuațiile de bază ale lui Maxwell (prezentate în § 1.4.1) și ecuațiile de material (din § 1.4.2), adică:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{M1})$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{M2})$$

$$\text{div}\vec{D} = q_v, \quad (\text{M3})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (\text{M4})$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad (\text{M5})$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (\text{M6})$$

$$\vec{J} = \gamma\vec{E}, \quad (\text{M7})$$

ale căror simboluri sunt binecunoscute, se poate determina ecuația undelor în felul următor:

i) introducându-se expresiile lui \vec{D} , \vec{B} și \vec{J} , din relațiile (M5), (M6) și respectiv (M7), în relațiile (M1)...(M4), în condițiile în care mediul este neîncărcat electric (adică $q_v [\text{C}/\text{m}^3]=0$), se obțin ecuațiile numai cu variabilele \vec{E} și \vec{H} ale mărimilor de stare ale undelor:

$$\text{div}\vec{E} = 0, \quad (\text{U1})$$

$$\text{div}\vec{H} = 0, \quad (\text{U2})$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad (\text{U3})$$

$$\text{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \quad (\text{U4})$$

ii) folosindu-se aceste noi expresii (U1)...(U4), se pot determina ecuațiile (cu derivate parțiale) pe care le satisfac, în orice punct al mediului de propagare, mărimile de stare \vec{E} și \vec{H} ale undelor electromagnetice, prin aplicarea operatorului rotor relației (U3):

$$(U5) \quad \text{rot rot} \bar{E} = \text{rot} \left(-\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{H},$$

din care, înlocuindu-se $\text{rot} \bar{H}$ cu expresia lui (U4), rezultă:

$$\text{rot rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right),$$

adică:

$$(U6) \quad \text{rot rot} \bar{E} = -\mu \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2};$$

iii) știindu-se că $\text{rot rot} \bar{E} = \text{grad div} \bar{E} - \Delta \bar{E}$ (v. § 9.1.2), conform relațiilor (9.39) și avându-se în vedere relația (U1), se obține din (U6):

$$\text{rot rot} \bar{E} = -\Delta \bar{E} = -\mu \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2},$$

și deci:

$$(7.2) \quad \Delta \bar{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0, \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega,$$

care arată că în cazul domeniului Ω , cu mediul precizat anterior, intensitatea câmpului electric \bar{E} satisface o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, în timp și în spațiu;

iu) aplicându-se și relației (U4) operatorul rotor se obține:

$$\text{rot rot} \bar{H} = \text{rot} \left(\gamma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = \gamma \text{rot} \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{E},$$

în care se înlocuiește $\text{rot} \bar{E}$ cu expresia lui (U3), rezultând:

$$(U7) \quad \text{rot rot} \bar{H} = -\gamma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2},$$

u) ținându-se seama de egalitatea (9.39), a aplicării repetate a rotorului, care arată că $\text{rot rot} \bar{H} = \text{grad div} \bar{H} - \Delta \bar{H}$, și avându-se în vedere că, în conformitate cu relația (U2), $\text{div} \bar{H} = 0$, atunci $\text{rot rot} \bar{H} = -\Delta \bar{H}$, astfel că expresia (U7) devine:

$$-\Delta \bar{H} = -\gamma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2},$$

de unde reiese expresia în \bar{H} :

$$(7.3) \quad \Delta \bar{H} - \gamma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega,$$

adică un model formal identic cu (7.2), care arată că în cazul domeniului Ω , cu mediul precizat inițial, intensitatea câmpului magnetic \bar{H} satisface tot o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, în timp și în spațiu, ca și \bar{E} ;

ui) pentru simplificarea scrierii, cele două ecuații (7.2) și (7.3), se pot formula matricial, devenind:

$$(7.4) \quad \Delta \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} - \gamma \mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega,$$

care reprezintă *ecuația undelor electromagnetice*.

După cum se constată, ecuația matriceală (7.4), este formată din ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi de *tip hiperbolic*, care descriu, prin mărimile de stare \bar{E} și \bar{H} , repartitia câmpului

electromagnetic în timp și în spațiu (ocupat de un mediu liniar, uniform, imobil, fără polarizație electrică permanentă, fără magnetizație permanentă și fără câmp imprimat, însă disipativ – datorită prezenței parametrului de material $\gamma=1/\rho$). De la Matematică se știe că, asociindu-se cu ecuația (7.4) condiții inițiale și la limită adecvate problemei studiate, se obține o soluție în $\vec{E}(P, t)$ și $\vec{H}(P, t)$ care –în general– este o soluție ondulatorie. Soluțiile obținute pentru ecuația (7.4) nu sunt independente, deoarece între vectorii \vec{E} și \vec{H} există întotdeauna relații de legătură (U3) și (U4), astfel încât se obțin o undă electrică și una magnetică strâns legate între ele și care se condiționează reciproc într-o undă unică (rezultantă): unda electromagnetică.

Ecuția undei electromagnetice în medii izolante

În cazul particular al mediilor izolante, pentru care practic conductivitatea electrică este $\gamma=0$, ecuația (7.4) ia forma specifică acestor medii și anume:

$$\Delta \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftarrow \gamma = 0, \forall P \in \Omega. \quad (7.5)$$

Deoarece conform relației (1.54), a lui Maxwell (v. § 1.4.5), $\epsilon\mu=1/c^2$ (unde c este viteza de propagare a undei în mediul izolant, caracterizat de parametrii ϵ și μ (v. § 7.4.1 și § 7.4.5), iar operatorul:

$$\Delta - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square,$$

reprezintă operatorul d'Alembert sau *d'alembertianul*, rezultă că forma ecuației undelor electromagnetice ce se propagă în medii izolante este:

$$\square \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = 0. \quad (7.5A)$$

Ecuția undei electromagnetice în medii conductoare

În mediile conductoare, care au $\gamma \geq 10^7$ S/m și o permitivitate absolută foarte mică, unde – deci – $\gamma \gg \epsilon$, ecuația (7.4), în care practic $\epsilon\mu \rightarrow 0$ în raport cu $\gamma\mu$, devine:

$$\Delta \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} - \gamma\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.6)$$

care este o ecuație de ordinul doi *parabolică*, ce descrie modul cum se propagă undele electromagnetice în mediile conductoare electrice.

Ecuțiile undelor electromagnetice în medii cu sarcini electrice

În cazul în care în mediul în care se propagă undele electromagnetice există puncte P unde densitatea de volum a sarcinii electrice q_v [C/m³] este diferită de zero, sau există corpuri punctiforme în domeniul ocupat de mediu care se deplasează cu viteza $\vec{w} \neq 0$ având $q_v \neq 0$ (adică $q_v \vec{w} = \vec{J} \neq 0$), precum și variația în timp a densității de volum a sarcinii electrice $dq_v/dt \neq 0$ (deci $\text{div} \vec{J} = -dq_v/dt \neq 0 \Rightarrow \vec{J} \neq 0$), prin urmare în cazul în care mediul are domenii Ω pentru care:

$$\exists P \in \Omega \Rightarrow q_v(P) \neq 0 \quad \nabla \cdot \vec{J}(P) \neq 0, \quad (\text{PE1})$$

distribuția q_v și \bar{J} pe Ω fiind cunoscută, ecuațiile (7.5) și (7.5A) nu pot duce la găsirea soluției \bar{E} și \bar{H} a câmpului electromagnetic (pentru că ele au fost determinate în condițiile $q_v = 0 \Rightarrow \text{div}\bar{E} = 0$ – v relația U1 și s-a considerat $\text{rot}\bar{E} = -\Delta\bar{E} \Rightarrow \text{grad}\text{div}\bar{E} = 0$, deci tot $\text{div}\bar{E} = 0$). De aceea, în cazurile indicate de expresia (PE1), calculul câmpului electromagnetic se poate realiza mai simplu prin introducerea **potențialelor electrodinamice** (v. § 7.1.4), ca potențiale (V și \bar{A}) ale undelor electromagnetice care permit și analiza fenomenelor de radiație electrică (v. § 7.1.6) și magnetică (v. § 7.1.7). Aceste mărimi se pot introduce în virtutea neunivocității potențialelor (v. § 7.1.4).

După cum se știe, din legele circuitului magnetic (M1) și fluxului magnetic (M4) –indicatori folosiți în paragraful 7.1.2– rezultă că vectorul inducției magnetice reprezintă un câmp solenoidal (v.cap.5), astfel încât se poate scrie:

$$(PE2) \quad \bar{B} = \text{rot}^D \bar{A},$$

în care \bar{A} este –prin definiție– *potențialul electrodynamic vector* (în capitolul 5, referitor la câmpul magnetic cvasistaționar, \bar{A} a fost numit potențial magnetic vector). Înlocuindu-se \bar{B} din legea inducției electromagnetice (M2 în § 7.1.2) cu definiția anterioară (PE2) rezultă:

$$(PE3) \quad \text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\bar{A} \rightarrow \text{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Din ultima relație (PE3) rezultă că termenul $\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$ este irotațional (deoarece rotorul său este nul), astfel că el poate fi exprimat printr-un gradient al unei mărimi scalare (fie acesta V), adică:

$$\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = -\text{grad}V,$$

de unde rezultă că vectorul intensității câmpului electric poate fi scris în forma:

$$(PE4) \quad \bar{E} = -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \text{grad}V,$$

în care V este –prin definiție– *potențialul electrodynamic scalar*.

Prin utilizarea potențialelor electrodinamice, \bar{A} și V , calculul câmpului electromagnetic se simplifică prin faptul că în locul determinării mărimilor de stare vectoriale \bar{E} și \bar{H} (care se face prin 6 valori/componente scalare), trebuie determinate numai 4 valori/componente scalare: 3 pentru potențialul electrodynamic vector \bar{A} și una pentru potențialul electrodynamic scalar V .

Folosindu-se aceste potențiale electrodinamice, ecuațiile unei electromagnetice devin:

- se introduc relațiile (PE2) și (PE3) în forma locală a legii circuitului magnetic –(M1) din § 7.1.2– în care \bar{H} și \bar{D} se înlocuiesc prin explicitarea lor din legile (M6) și (M5) din § 7.1.2, rezultând:

$$(PE5) \quad \text{rot}\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{rot}\bar{B} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot}\bar{A} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \text{grad}V \right);$$

- deoarece $\text{rot} \text{rot}\bar{A} = \text{grad} \text{div}\bar{A} - \Delta\bar{A}$, conform relației (9.39), expresia (PE5) devine:

$$(PE6) \quad \text{grad} \text{div}\bar{A} - \Delta\bar{A} = \mu\bar{J} - \varepsilon\mu \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2},$$

adică:

$$(PE7) \quad \Delta\bar{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\bar{J} + \text{grad} \left(\text{div}\bar{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right);$$

- după cum s-a arătat în capitolul 5, un câmp vectorial \bar{A} poate fi definit în mod univoc numai dacă se precizează simultan atât rotorul cât și divergența sa (la care se mai adaugă –în funcție de problemă– condițiile inițiale și la limită). Aici, prin definiția (PE2) s-a indicat valoarea rotorului vectorului \bar{A} , divergența lui \bar{A} putând fi determinată prin etalonare (de exemplu, în capitolul 5 s-a considerat $\text{div} \bar{A} = 0$). În acest caz, cel mai potrivit –din punctul de vedere al modelării– este ca $\text{div} \bar{A}$ să se etaloneze prin *condiția lui Lorentz*, adică:

$$\text{div} \bar{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (7.7)$$

etalonare ce simplifică mult modelul (PE7);

- prin condiția de etalonare Lorentz (7.7) a potențialului electrodinamic vector \bar{A} , ecuația (PE7) devine:

$$\Delta \bar{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}, \quad (7.8)$$

adică:

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \bar{A} = -\mu \bar{J}, \quad (7.8')$$

sau:

$$\square \bar{A} = -\mu \bar{J}, \quad (7.8'')$$

care reprezintă o nouă formă a ecuației undelor electromagnetice în medii unde există puncte în care densitatea de curent este diferită de zero;

- se introduce, în continuare, relația (PE4) în legea fluxului electric –sub formă locală (M3) din § 7.1.2– rezultând:

$$\text{div} \bar{D} = q_v \rightarrow \varepsilon \cdot \text{div} \bar{E} = q_v \rightarrow \varepsilon \cdot \text{div} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} V \right) = q_v,$$

sau:

$$\text{div} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \frac{q_v}{\varepsilon} \rightarrow \text{div} \text{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} = \frac{q_v}{\varepsilon},$$

adică:

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} = \frac{q_v}{\varepsilon} \rightarrow -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} = \frac{q_v}{\varepsilon}; \quad (PE8)$$

-înlocuindu-se în ultima relație (PE8) $\text{div} \bar{A}$ prin condiția lui Lorentz (7.7) se va obține:

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \frac{q_v}{\varepsilon},$$

adică:

$$-\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{q_v}{\varepsilon}, \text{ sau } \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{q_v}{\varepsilon}; \quad (7.9)$$

- ultima ecuație (7.9) reprezintă o nouă formă a ecuației undelor electromagnetice în medii unde există puncte în care densitatea de volum a sarcinii electrice este diferită de zero. Deoarece ecuația (7.9) se mai poate scrie și sub forma:

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] V = -\frac{q_v}{\varepsilon}, \quad (7.9')$$

folosindu-se operatorul lui d'Alambert \square mai rezultă și exprimarea:

$$\square V = -\frac{q_v}{\varepsilon}. \quad (7.9'')$$

Prin urmare, potențialele electrodinamice V și \bar{A} , din ecuațiile (7.9'') și (7.8''), reprezintă soluțiile unor ecuații d'Alambert:

$$(7.10) \quad \begin{cases} V = -\frac{q_v}{\epsilon} \\ \bar{A} = -\mu \bar{J} \end{cases},$$

care au fost scrise sub forma unui sistem, deoarece în (7.10) –cele două soluții V și \bar{A} nu sunt independente pentru că ele sunt legate prin condiția lui Lorentz (7.7), iar termenii din membrul drept sunt legați între ei prin legea conservării sarcinii electrice (1.92)– pentru medii în repaus (cu $\bar{w} = 0$), adică:

$$(7.11) \quad -\frac{dq_v}{dt} = \text{div} \bar{J}.$$

Dacă mediul considerat: liniar, uniform, imobil, fără polarizație electrică permanentă, fără magnetizație permanentă și în care nu există sarcini electrice și curenți electrici ($q_v=0$ și $\bar{J}=0$), mediul fiind izolant ($\gamma \rightarrow 0$), descriem propagarea câmpului electromagnetic (în timp și spațiu) prin una din mărimile de stare ale mulțimii (7.12):

$$(7.12) \quad f = \{\bar{E}, \bar{H}, V, \bar{A}\},$$

atunci forma generală a ecuațiilor electromagnetice este:

$$(7.13) \quad \square f = 0,$$

știind că mărimile (\bar{E} și \bar{H}) $\in f$, pe de o parte, și (V și \bar{A}) $\in f$, pe de altă parte, sunt perechi legate prin relațiile (U3) și –respectiv– (7.11).

7.1.3. Unda electromagnetică plană

Prin definiție (v. fig. 7.3), unda plană este un caz particular al undelor electromagnetice pentru care mărimile de stare (\bar{E} și \bar{H}) depind de o singură coordonată spațială și de timp. În cazul exemplului ales în figura 7.3, dacă punctul P' (din spațiul în care se propagă undele electromagnetice) este extrem de îndepărtat de sursa de câmp (un oscilator electric dipolar de lungime l), adică distanța r de la punctul considerat la sursă este foarte mare (mai precis $r \gg \gg l$ – v. fig. 7.3) atunci unda electromagnetică devine practic undă plană, acesta fiind cazul cel mai frecvent în comunicațiile radio cu unde electromagnetice modulate (v. cursul Teoria transmiției informației).

Atunci, o undă electromagnetică plană într-un mediu dielectric cu $\gamma = 0$ (vid, aer etc.), presupunând axa y ca direcție de propagare, a unui sistem de referință cartezian O_{xyz} la care este raportat mediul, este determinată de mărimile de stare:

$$(7.14) \quad \begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}(y,t), \\ \bar{H} &= \bar{H}(y,t), \\ \{\bar{E}, \bar{H}\} &= f = f(y,t), \end{aligned}$$

unde –spre simplificarea scrierii– prin f se subînțelege o componentă oarecare a vectorilor de stare \bar{E} sau \bar{H} .

În aceste condiții, în cazul unei plane, ecuațiile câmpului electromagnetic (7.5) și (7.5A) pot fi scrise sub forma:

$$(7.15) \quad \partial^2 f / \partial t^2 - c^2 \cdot \partial^2 f / \partial y^2 = 0$$

care – pentru a fi rezolvată – se retranscrie sub altă formă și anume:

$$(UP.1) \quad (\partial / \partial t - c \cdot \partial / \partial y) \cdot (\partial / \partial t + c \cdot \partial / \partial y) f = 0.$$

Determinarea soluției

Pentru rezolvarea acestei ecuații cu derivate parțiale (UP.1) se introduc noi variabile, adică: $t-y/c = \xi$ și $t+y/c = \eta$ (UP.2), astfel încât: $t = (\eta + \xi)/2$ și $y = c(\eta - \xi)/2$. (UP.3). Atunci:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{(\partial/\partial t - c \cdot \partial/\partial y)}{2} \text{ și } \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{(\partial/\partial t + c \cdot \partial/\partial y)}{2} \quad (\text{UP.4})$$

astfel că ecuația (UP.1) pentru f capătă forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \cdot \partial \xi} = 0, \quad (\text{UP.5})$$

care –prin integrare după ξ – conduce la:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta), \quad (\text{UP.6})$$

unde $F(\eta)$ este o funcție arbitrară. Integrându-se încă odată, după η , ecuația (UP.6) se va găsi:

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (\text{UP.7})$$

unde f_1 și f_2 sunt funcții arbitrare. În acest fel, soluția ecuației (7.15) –rezultată din soluția (UP.7) în care s-au înlocuit ξ și η prin expresiile lor (UP.2)– este:

$$f = f(y, t) = f_1(t-y/c) + f_2(t+y/c), \quad (7.16)$$

în care funcțiile arbitrare f_1 și f_2 se determină prin condițiile inițiale și la limită (pe frontieră) ale problemei concrete date.

Soluția (7.16) arată că unda plană –soluție a ecuației (7.15)– rezultă din suprapunerea a două unde, una zisă *directă* f_1 (sau f_d) și alta *inversă* f_2 (sau f_i), care se propagă cu viteze egale (c) în sensuri opuse.

Într-adevăr, presupunându-se –de exemplu– că $f_2=0$, soluția (7.16) devine $f = f_1(t-y/c)$, care are următoarea semnificație: în fiecare plan $y = \text{const.}$ câmpul electromagnetic variază în timp, iar în fiecare moment t dat câmpul este diferit, pentru valorile lui y diferite. Însă este evident că acest câmp are aceeași valoare pentru coordonatele y și timpii t care satisfac relația $t-y/c = \text{const.}$, adică:

$$y = \text{const.} + c \cdot t \text{ sau } y - c \cdot t = \text{const.} \quad (\text{UP.8})$$

Aceasta înseamnă că dacă la un moment dat $t=0$, într-un anumit punct y al spațiului câmpului va avea o anumită valoare, după un anumit interval de timp T câmpul va avea aceeași valoare la distanța $\lambda = cT$ de-a lungul axei y de la locul inițial. Această distanță λ reprezintă *lungimea de undă* (v. § 7.4.5). Pentru a urmări o valoare constantă dată a undei directe $f_1(\xi) = f_1(t-y/c)$, un observator ar trebui să se deplaseze astfel încât segmentul ξ sau y să fie constant, conform relației (UP.8), adică cu viteza:

$$dy/dt = \frac{d}{dt} \text{const.} + \frac{d}{dt} ct \rightarrow dy/dt = 0 + c \rightarrow dy/dt = c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (7.17)$$

Viteza (7.17) fiind pozitivă rezultă că $f_1(\xi)$ se propagă în sensul crescător al axei y , fiind –prin urmare– *undă directă* f_d .

Astfel, se poate afirma că toate valorile câmpului electromagnetic se propagă în spațiu de-a lungul axei y cu viteza luminii în vid c (v. § 7.4.5).

În mod similar se poate arăta că unda $f_2(\eta) = f_2(t+y/c)$ este o undă care se propagă în sens opus lui $f_1 \equiv f_d$, adică în sensul descrescător (negativ) al axei y , fiind astfel o *undă inversă* f_i . Într-adevăr, $f_2(\eta) = \text{const.} \rightarrow f_2(t+y/c) = \text{const.} \rightarrow (t+y/c) = \text{const.}$, cu viteza de deplasare $dy/dt = d(\text{const.} - ct)/dt = -c$, deci cu viteza luminii c cu semnul minus, adică în sens invers undei directe.

În paragraful precedent s-a arătat că potențialele electrodinamice (V și \vec{A}) ale undei electromagnetice pot fi alese astfel încât dacă $V=0 \rightarrow \text{div } \vec{A} = 0$, conform condiției de etalonare a lui Lorenz (7.7). Se va considera –în continuare– această situație, adică potențialul electrodynamic scalar al undei electromagnetice plane este ales $V=0$, ceea ce implică –pentru potențialul electrodynamic vector A – etalonarea $\text{div } A = 0$.

Condiția $\text{div } \vec{A} = 0$ dă în acest caz:

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{UP.9})$$

deoarece în unda plană luată după direcția y , toate mărimile nu depind de x și z , rezultând relația (UP.9). Într-adevăr:

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \rightarrow (\bar{i} \partial/\partial x + \bar{j} \partial/\partial y + \bar{k} \partial/\partial z)(A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}) = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z = 0$$

și cum dacă mărimile nu depind de x și de z , înseamnă că $\partial A_x / \partial x = 0$ și $\partial A_z / \partial z = 0$, ceea ce înseamnă că $\operatorname{div} \bar{A} = 0$ conduce și la $\partial A_y / \partial y = 0$.

Atunci, conform cu (7.15), în care f devine A_y , va rezulta și relația:

$$(UP.10) \quad \partial^2 A_y / \partial t^2 = 0, \text{ adică } \partial A_y / \partial t = \text{const.}$$

Însă derivata $\partial A / \partial t$ determină câmpul electric \bar{E} –vezi relația (PE4) din paragraful 7.1.2– și atunci egalitatea (UP.10) arată că o componentă A_y diferită de zero ar însemna –în cazul considerat– prezența unui câmp electric longitudinal constant: $E_y = \text{const.}$ Deoarece un astfel de câmp nu aparține undei electromagnetice, se poate spune că $A_y = 0$. Așadar, *potențialul electrodinamic vector al unei unde plane poate fi ales totdeauna perpendicular pe axa y , adică pe direcția de propagare a acestei unde.*

Dacă se consideră o undă plană care se propagă în sensul pozitiv al axei y (unda directă), –atunci în această undă– toate mărimile f (în particular și \bar{A}) sunt funcții numai de $t-y/c$, conform soluției (7.16). Din formulele:

$$\bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad \text{și} \quad \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A},$$

care provin din relația (PE4) din paragraful 7.1.2 cu condiția $V=0$, se obține:

$$(7.18) \quad \bar{E} = \frac{1}{c} \bar{A}', \quad \bar{H} = \nabla \times \bar{A} = \nabla \times (t-y/c) \cdot \bar{A}' = \frac{1}{c} \bar{n} \times \bar{A}',$$

unde accentul înseamnă diferențierea după $t-y/c$, iar \bar{n} este versorul de-a lungul direcției de propagare a undei electromagnetice ($\bar{n} = \bar{k}$). Introduscându-se prima relație (7.18) în ultima se obține:

$$(7.19) \quad \bar{H} = \bar{n} \times \bar{E},$$

care arată că în cazul undei electromagnetice plane, câmpul electric \bar{E} și magnetic \bar{H} sunt orientate perpendicular pe direcția de propagare a undei (a lui y). Din acest motiv undele electromagnetice plane se numesc *transversale*. Din relația (7.19) rezultă, mai departe, că pentru unda plană, câmpurile electric și magnetic sunt perpendiculare între ele și egale în mărime absolută (de exemplu, E_z cu H_x și E_x cu H_z). Acest lucru se mai poate arăta și astfel:

i) în cazul (7.14) al undelor plane, rotorul și divergența funcției f sunt:

$$(UP.11) \quad \operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \bar{i} \partial f_z / \partial y - \bar{j} \partial f_x / \partial z + \bar{k} \partial f_y / \partial x - \bar{i} \partial f_y / \partial z - \bar{j} \partial f_z / \partial x - \bar{k} \partial f_x / \partial y \\ = \bar{i} \partial f_z / \partial y - \bar{k} \partial f_x / \partial y,$$

deoarece f depinde de o singură coordonată spațială y și deci:

$$f = f(y, t) \Rightarrow \left\{ \partial f_x / \partial z = 0, \quad \partial f_y / \partial x = 0, \quad \partial f_y / \partial z = 0, \quad \partial f_z / \partial x = 0 \right\},$$

iar:

$$(UP.12) \quad \operatorname{div} f = (\bar{i} \partial/\partial x + \bar{j} \partial/\partial y + \bar{k} \partial/\partial z) \cdot (f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}) = \\ = \partial f_x / \partial x + \partial f_y / \partial y + \partial f_z / \partial z = \partial f_y / \partial y,$$

deoarece: $f = f(y, t) \Rightarrow \left\{ \partial f_x / \partial x = 0, \quad \partial f_y / \partial y = 0 \right\}$.

Atunci, dacă $f = \bar{E}$ sau $f = \bar{H}$, relațiile (UP.11) și (UP.12) arată că:

$$(7.20) \quad \operatorname{rot} \bar{E} = \bar{i} \partial E_z / \partial y - \bar{k} \partial E_x / \partial y,$$

$$(7.20') \quad \operatorname{div} \bar{E} = \partial E_y / \partial y,$$

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{i}\partial H_z / \partial y - \bar{k}\partial H_x / \partial y, \quad (7.21)$$

$$\operatorname{div}\bar{H} = \partial H_y / \partial y; \quad (7.21')$$

ii) comparându-se, pe componente, relațiile (U3/§ 7.1.2) cu (7.20) și (U4/§ 7.1.2) cu (7.21) rezultă:

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\mu\partial\bar{H} / \partial t \Rightarrow \bar{i}\partial E_z / \partial y - \bar{k}\partial E_x / \partial y = -\mu\bar{i}\partial H_x / \partial t - \mu\bar{j}\partial H_y / \partial t - \mu\bar{k}\partial H_z / \partial t,$$

ceea ce înseamnă:

$$\partial E_z / \partial y = -\mu\partial H_x / \partial t, \quad 0 = \mu\partial H_y / \partial t \quad \text{și} \quad \partial E_x / \partial y = \mu\partial H_z / \partial t, \quad (UP.13)$$

precum și:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H} = \gamma\bar{E} + \varepsilon\partial\bar{E} / \partial t \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{i}\partial H_z / \partial y - \bar{k}\partial H_x / \partial y = \varepsilon\bar{i}\partial E_x / \partial t + \varepsilon\bar{j}\partial E_y / \partial t + \varepsilon\bar{k}\partial E_z / \partial t,$$

ceea ce înseamnă:

$$\partial H_z / \partial y = \varepsilon\partial E_x / \partial t, \quad 0 = \varepsilon \cdot \partial E_y / \partial t \quad \text{și} \quad -\partial H_x / \partial y = \varepsilon \cdot \partial E_z / \partial t; \quad (UP.14)$$

iii) comparându-se între ele ecuațiile (U1/§ 7.1.2) cu (7.20') și (U2/§ 7.1.2) cu (7.21') rezultă imediat:

$$\operatorname{div}\bar{E} = 0 \quad \text{cu} \quad \operatorname{div}\bar{E} = \partial E_y / \partial y \Rightarrow \partial E_y / \partial y = 0 \quad (UP.15)$$

și

$$\operatorname{div}\bar{H} = 0 \quad \text{cu} \quad \operatorname{div}\bar{H} = \partial H_y / \partial y \Rightarrow \partial H_y / \partial y = 0. \quad (UP.16)$$

Din aceste relații rezultă că undele electromagnetice plane, transversale pe axa y , au caracteristicile:

j) componentele E_y și H_y nu depind nici de y și nici de t , așa cum arată ecuațiile doi din expresiile (UP.13) și (UP.14), precum și ecuațiile (UP.15) și (UP.16), ceea ce înseamnă că *ele reprezintă o distribuție statică uniformă, nelegată causal de procesul de propagare*. Aceasta mai înseamnă că se pot lăsa de-o parte componentele E_y și H_y , rămânând numai componentele E_z cu H_x – legate prin prima ecuație din relațiile (UP.14), rezultând că vectorii \bar{E} și \bar{H} sunt perpendiculari pe direcția axei y , fapt arătat și de relația (7.19);

jj) legătura dintre componente: E_z cu H_x (așa ca în figura 7.10) și E_x cu H_z arată că în procesul de propagare al undelor electromagnetice plane apar două unde transversale independente, una directă și alta inversă, care pot fi analizate separat, fapt precizat și anterior prin soluțiile (7.16);

jjj) derivându-se prima ecuație din (UP.13) în raport cu y și ultima ecuație din (UP.14) în raport cu t , se poate elimina termenul $\partial^2 H_x / \partial t \partial y$ astfel:

$\partial^2 E_z / \partial y^2 = -\mu\partial^2 H_x / \partial t \partial y$ și $-\partial^2 H_x / \partial t \partial y = \varepsilon\partial^2 E_z / \partial t^2$,
care rezultă:

$$\frac{1}{\mu} \partial^2 E_z / \partial y^2 = \varepsilon\partial^2 E_z / \partial t^2 \quad \text{sau} \quad \partial^2 E_z / \partial y^2 = \mu \cdot \varepsilon \cdot \partial^2 E_z / \partial t^2,$$

obținându-se ecuația:

$$\partial^2 E_z / \partial y^2 = \frac{1}{c} \partial^2 E_z / \partial t^2, \quad (7.22E)$$

care este de forma (7.15), ecuație ce a fost rezolvată –relația (7.16)– având, în cazul componentei E_z , soluția:

$$E_z(y,t) = E_d(t-y/c) + E_i(t+y/c); \quad (7.23E)$$

iv) pentru determinarea componentei H_x se va proceda la fel, adică se va deriva prima ecuație din (UP.13) însă în raport cu t și ultima ecuație din (UP.14) în raport cu y :

$$\partial^2 E_z / \partial y \partial t = -\mu\partial^2 H_x / \partial t^2 \quad \text{și} \quad -\partial^2 H_x / \partial y^2 = \varepsilon\partial^2 E_z / \partial t \partial y,$$

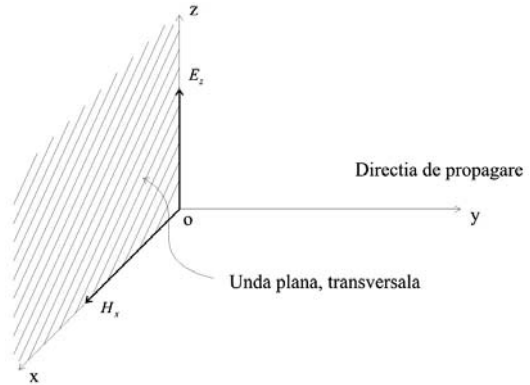


Fig. 7.10

dintre care, eliminându-se $\partial^2 E_z / \partial t \partial y$, rezultă ecuația:

$$(7.22H) \quad \partial^2 H_x / \partial y^2 = \frac{1}{c} \partial^2 H_x / \partial t^2,$$

care este de forma (7.15), ecuație ce a fost rezolvată anterior –v. relația (7.16)– având, în cazul componentei H_x , soluția:

$$(7.23H) \quad H_x(y,t) = H_d(t-y/c) + H_i(t+y/c).$$

Interpretarea soluției

Așa cum s-a mai arătat în repetate rânduri și cum o dovedesc aici relațiile (UP.13) și (UP.14), câmpul magnetic nu este independent de câmpul electric, astfel încât undele H_d și H_i din soluția (7.23H) pot fi exprimate prin E_d și E_i ale soluției (7.23E).

Astfel, din prima ecuație a relațiilor (UP.13) și ținându-se seama de schimbările de variabilă (UP.2) se va obține:

$$(UP.17) \quad \partial H_x / \partial t = \frac{1}{\mu} \partial E_z / \partial y = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_d}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dy} + \frac{dE_i}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} \right) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{c} \frac{dE_d}{d\xi} + \frac{1}{c} \frac{dE_i}{d\eta} \right)$$

de unde va rezulta, prin integrare, H_x . Astfel:

$$(UP.18) \quad H_x = -\frac{1}{\mu c} \int (dE_d/d\xi + dE_i/d\eta) dt + H_{x0}(y) = -\frac{1}{\mu c} \int [\partial E_d / \partial t \cdot (\partial \xi / \partial t)^{-1} + \partial E_i / \partial t \cdot (\partial \eta / \partial t)^{-1}] dt + H_{x0}(y) =$$

$$= -\frac{1}{\mu c} \int \{ \partial E_d / \partial t \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (t-y/c) \right]^{-1} + \partial E_i / \partial t \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (t+y/c) \right]^{-1} \} dt + H_{x0}(y),$$

în care variabilele ξ și η s-au înlocuit prin expresiile lor în funcție de t (UP.2). Va rezulta mai departe, prin introducerea lui -1 sub integrala (UP.18):

$$(7.24H) \quad H_x = -\frac{1}{\mu c} \int \{ \partial E_d / \partial t \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{c} - t \right) \right]^{-1} + \partial E_i / \partial t \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (-t-y/c) \right]^{-1} \} dt + H_{x0}(y) =$$

$$= \frac{1}{\mu c} [-E_d(-\xi) + E_i(-\eta)] + H_{x0}(y) \text{ sau } H_x = \frac{1}{\mu c} [E_d(\xi) - E_i(\eta)],$$

din care lipsește constanta de integrare $H_{x0}(y)$, deoarece nu aparține unei electromagnetice pentru că din ultima egalitate a relațiilor (UP.14), adică $-\partial H_x / \partial y = \varepsilon \partial^2 E_z / \partial t^2$, rezultă că $H_{x0}(y) = \text{const.}$ fiindcă la $t=0$, $dH_{x0}/dy=0$.

Termenul $1/\mu c$ din expresia (7.24H) poate fi scris și sub forma:

$$(7.25) \quad 1/\mu c = 1/\mu(1/\sqrt{\varepsilon\mu}) = \sqrt{\varepsilon\mu}/\mu^2 = \sqrt{\varepsilon/\mu} \text{ și } \mu c = \sqrt{\mu\varepsilon},$$

care are dimensiunea:

$$[\mu \cdot c] = [\mu/\varepsilon]^{1/2} = [[H] \cdot [m]^{-1}/[F] \cdot [m]^{-1}]^{1/2} = [H/F]^{1/2} =$$

$$= [[V] \cdot [s] \cdot [A]^{-1}/[A] \cdot [s] \cdot [V]^{-1}]^{1/2} = [[V]^2/[A]^2]^{1/2} = [V]/[A] = [\Omega],$$

adică de impedanță (v.cap.8).

De aceea, ultimul termen al expresiei (7.25) se definește ca fiind *impedanța de undă (intrinsecă)* a mediului în care se propagă unda; ea se notează cu ζ și este:

$$(7.26) \quad \zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{\mu_0 \mu_r / \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\mu_r / \varepsilon_r} = \zeta_0 \zeta_r,$$

în care: ζ_r este *impedanța de undă relativă a mediului*,

$$\zeta_0 = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} / 1 / 4\pi 9 \cdot 10^9} = 4\pi \cdot 3\sqrt{00} = 376,8\Omega$$

este *impedanța de undă a vidului*.

Atunci, soluțiile generale ale ecuațiilor (7.22E) și (7.22H) se pot exprima și în următoarea formă:

$$(7.27E) \quad E_z(y,t) = E_d(t-y/c) + E_i(t+y/c),$$

$$H_x(y,t) = \frac{1}{\zeta} [E_d(t-y/c) - E_i(t+y/c)], \quad (7.27H)$$

în care intervin numai două funcții arbitrare, E_d și E_i (ce se pot determina din condițiile inițiale și la limită ale problemei date). Soluțiile legate (7.27E) și (7.27H) pot fi reprezentate grafic, pentru un caz general oarecare, așa ca în figura 7.11 (7.11a reprezintă undele directe și 7.11b –undele inverse).

Transferul de energie

Undele electromagnetice plane transversale, realizează un transfer de energie prin suprafața plană a unei, care se poate determina prin densitatea de suprafață a PUTERII electromagnetice transferate (fluxul de putere), adică prin calcularea vectorului

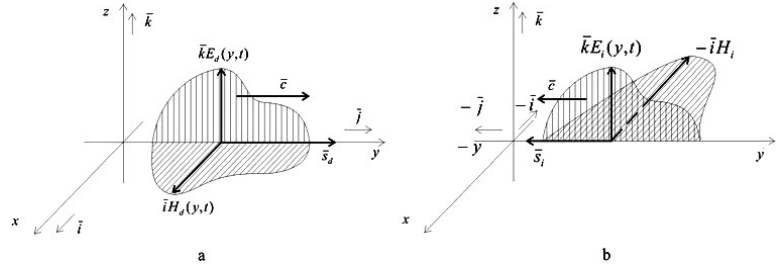


Fig. 7.11

Poyting (v. § 1.5.3, unde a fost definit prin $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$).

Astfel, pentru unda directă rezultă:

$$\vec{S}_d = \vec{k} E_d \times \vec{i} H_d = \vec{k} \times \vec{i} E_d H_d = \vec{j} E_d H_d = \vec{j} \cdot \frac{1}{\zeta} E_d^2, \quad (7.28)$$

iar pentru unda inversă:

$$\vec{S}_i = \vec{k} E_i \times (-\vec{i}) H_i = \vec{i} \times \vec{k} E_i \cdot H_i = -\vec{j} E_i \cdot H_i = -\vec{j} \frac{1}{\zeta} E_i^2, \quad (7.29)$$

ambele exprimate în $[W/m^2]$.

Din aceste expresii, (7.28) și (7.29), reiese că transportul de energie electromagnetică se face în lungul axei y (ce are versorul \vec{j}), unda directă în sensul pozitiv al axei y ($+\vec{j}$) iar cea inversă în sensul negativ al lui ($-\vec{j}$), ceea ce înseamnă că propagarea unei electromagnetice plane se face transversal pe o singură direcție (de exemplu y , așa cum s-a considerat inițial).

Ținându-se cont de relațiile (7.27H) și (7.26) înseamnă că se mai poate scrie (de exemplu pentru unda directă):

$$H_d = (1/\zeta) E_d = \sqrt{\epsilon/\mu} \cdot E_d \rightarrow \sqrt{\mu} \cdot H_d = \sqrt{\epsilon} \cdot E_d. \quad (7.30)$$

Densitatea de volum a energiei electromagnetice (v. § 1.5.3) fiind:

- pentru energia electrică $w_e = (\vec{E} \cdot \vec{D})/2 = (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E})/2 = \epsilon \cdot E^2/2$,

- pentru energie magnetică $w_m = (\vec{H} \cdot \vec{B})/2 = (\vec{H} \cdot \mu \vec{H})/2 = \mu \cdot H^2/2$,

ambele exprimabile în $[Ws/m^3]$, înseamnă că ridicându-se la pătrat ambii membri ai egalității (7.30), rezultă:

$$\mu \cdot H_d^2 = \epsilon \cdot E_d^2 \text{ sau } (1/2)\mu H_d^2 = (1/2)\epsilon E_d^2 \rightarrow w_{md} = w_{ed} \quad (7.31)$$

ceea ce exprimă egalitatea dintre densitatea de volum energiei electrice și energiei magnetice a unei directe.

Atunci, valoarea absolută S_d a vectorului Poyting, pentru unda directă, se poate exprima în funcție de densitățile de volum ale energiei electromagnetice determinate în mediul în care se propagă unda astfel:

$$\begin{aligned} S_d = E_d \cdot H_d &= \frac{1}{\zeta} E_d^2 = \zeta \cdot H_d^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon/\mu} \cdot E_d^2 + \sqrt{\mu/\epsilon} \cdot H_d^2) = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon/\mu} \cdot \sqrt{\epsilon/\epsilon} \cdot E_d^2 + \\ &+ \sqrt{\mu/\epsilon} \cdot \sqrt{\mu/\mu} \cdot H_d^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot E_d^2 + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} H_d^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (\epsilon E_d^2/2 + \mu H_d^2/2) = c(w_{ed} + w_{md}). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Relația (7.32) conduce la următoarea interpretare fizică: energia transportată de unda electromagnetică într-un interval mic de timp Δt , printr-o porțiune de suprafață cu aria ΔA normală pe direcția sa de propagare (deci pe direcția vitezei de propagare c) este egală cu energia electromagnetică totală din cilindrul cu ariile frontale ΔA și lungimea $\Delta l = c \cdot \Delta t$ (adică egală cu lungimea cu care s-a propagat suprafața ΔA în intervalul de timp Δt), așa cum se reprezintă schematic în figura 7.12.

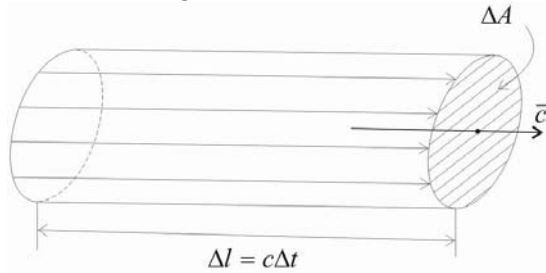


Fig. 7.12

În legătură cu această ultimă interpretare se propune următoarea problemă, devenită clasică.

Mai rezultă și următoarele interpretări:

- unda electromagnetică plană transportă cu ea o anumită putere, ceea ce înseamnă că prin propagarea ei, în timp și spațiu, unda electromagnetică propagă energie electromagnetică, cu densitatea de volum dată de relațiile (7.31);
- unda electromagnetică plană exercită o anumită forță asupra pereților ce o reflectă (nepermițând “trecerea” ei mai departe).

Problemă

Să se determine forța care acționează asupra unui perete ce reflectă (cu un coeficient de reflexie r) o undă electromagnetică plană, ce “cade” asupra peretelui.

Rezolvare. Forța \vec{f} , în $[\text{N}/\text{m}^2]$, care acționează asupra unității de suprafață a peretelui este dată de impulsul energiei electromagnetice al unității de volum, adică $S/c = w$, ce se exercită asupra peretelui pe unitatea de suprafață pe direcția de incidență (cu versorul \vec{n}):

$$\vec{f} = wn(\vec{N} \cdot \vec{n}) + w'\vec{n}'(\vec{N}' \cdot \vec{n}'), \text{ în } [\text{N}/\text{m}^2]$$

unde \vec{N} este versorul normalei la suprafața peretelui, w' este densitatea de volum a energiei undei reflectate de perete pe o direcție dată de versorul \vec{n}' care se determină cu relația $w' = r w$ (ce rezultă chiar din diferența coeficientului de reflexie r).

Introducându-se unghiul de incidență $\theta = \vec{n}, \vec{N}$ (care este egal și cu unghiul de reflexie \vec{n}', \vec{N}) se obțin:

- componenta normală a forței (cunoscută în Fizică sub numele de “presiune luminoasă”):

$$f_N = |\vec{f}| \cos \theta = (w \cos \theta + r w \cos \theta) \cos \theta = w(1 + r) \cos^2 \theta$$

- componenta tangențială a forței:

$$f_t = w(1 - r) \cos \theta \cdot \sin \theta.$$

7.1.4. Potențialele electrodinamice retardate

S-au definit, în paragraful 7.1.2, potențialele electrodinamice vector (\vec{A}) și scalar (V) necesar studiului undelor electromagnetice în medii în care există puncte unde $q_v \neq 0$ sau $J \neq 0$, q_v și J constituind așa-numitele *surse de câmp*. În regim dinamic, valoarea potențialelor dintr-un punct P' (de rază vector \vec{r}' față de o origine de referință O) și la un moment t este determinată de valoarea surselor de câmp (q_v și \vec{J}) dintr-un punct P al domeniului Ω (fig. 7.13), la un moment anterior $t = t' - R/c$ (unde R este valoarea absolută a razei vector $R = \vec{PP}'$ și c este viteza de propagare a undei electromagnetice), decalajul fiind egal cu timpul necesar undei electromagnetice să se propage din punctul P în punctul P' (v. fig. 7.13), ceea ce este în acord cu concepția acțiunii din aproape în aproape. Datorită acestei întârzieri a potențialelor electrodinamice față de sursele

câmpului electromagnetic, potențialul vector (\vec{A}) și cel scalar V poartă denumirea de *potențiale* (electrodinamice) *retardate*.

În continuare se va analiza acest proces al retardării potențialelor electrodinamice.

Mai întâi se vor soluționa ecuațiile undelor electromagnetice în medii cu sarcini de câmp (q_v și \vec{J}), adică ecuațiile (7.8") și (7.9") în condițiile unui mediu omogen și infinit extins folosindu-se notațiile din figura 7.13. Prin procedeele clasice ale Teoriei ecuațiilor fizicii matematice, se determină soluția ecuației (7.8") –adică $\square \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}$ – sub forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\Omega} [\vec{J}(\vec{r}', t - R/c) / R] dv, \quad (7.33)$$

în care $\vec{r} = \vec{OP}$ și v_Ω este volumul domeniului Ω în care sunt distribuite sursele de câmp electromagnetic: \vec{J} (densitatea de curent) și q_v (densitatea de volum a sarcinii electrice), ambele ca funcții de \vec{r} (de punct) și de timp t (v. fig. 7.13).

Soluția ecuației (7.9") –adică $\square V = -q_v/\epsilon$ – este de forma:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v_\Omega} [q_v(\vec{r}', t - R/c) / R] dv. \quad (7.34)$$

În expresiile precedente, (7.33) și (7.34), mărimile q_v și \vec{J} sunt *mărimi retardate*, fapt care –de obicei– se indică prin scrierea lor între paranteze drepte; astfel:

$$\vec{J}(\vec{r}, t - R/c) = [\vec{J}] \quad \text{și} \quad q_v(\vec{r}, t - R/c) = [q_v].$$

Este de remarcat (v. cap.5 și cap.2) că soluția (7.33) este similară expresiei determinată pentru potențialul magnetic vector \vec{A} definit pentru câmpul magnetic cvasistaționar (în capitolul 5 s-a arătat că $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\Omega} [\vec{J}(\vec{r}', t - R/c) / R] dv$, iar soluția (7.34) este identică cu expresia determinată în capitolul 2 pentru calculul potențialului electrostatic (și anume, numai în cazul mediilor cu distribuție de volum a sarcinii elastice: $V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v_\Omega} \frac{q_v}{R} dv$). De altfel, folosindu-se

aceste expresii ale lui \vec{A} și V , soluția (7.34) se stabilește prin aplicarea teoremei superpoziției (mediul fiind liniar) în condiții de simetrie a distribuției de volum a sarcinii electrice, în mediu omogen și izotrop. Soluția (7.33) se determină prin componentele lui \vec{A} (A_x, A_y, A_z), tot prin supoziție.

Potențialele retardate $\vec{A}(r, t)$ și $V(r, t)$, precum și mărimile retardate –ca de exemplu $[q_v]$ și $[\vec{J}]$ – intervin în studiul *radiației undelor* electromagnetice, produse de oscilatoare electrice și magnetice (așa cum se va arata în paragrafele 7.1.6 și 7.1.7).

7.1.5. Potențialul vector a lui Hertz

În unele cazuri, cum este acela al mediilor în care există polarizație electrică temporară variabilă în timp $\vec{P}(t)$ sau magnetizație temporară variabilă în timp $\vec{M}(t)$, în care aceste mărimi pot produce unde electromagnetice, mediile numindu-se *ereditare* (deoarece prezintă fenomene de memorie, în sensul că starea prezentă a mediului depinde de stările trecute), studiul radiației și propagării undelor electromagnetice se face mai simplu dacă se utilizează *metoda potențialului a*

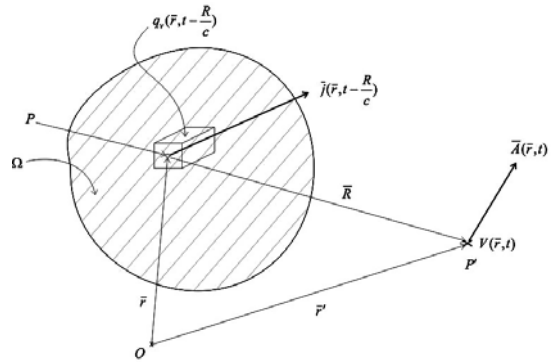


Fig. 7.13

lui Hertz, care constă în introducerea unui vector de tip potențial, numit *vectorul lui Hertz* (sau *potențialul lui Hertz*), ce se notează cu $\bar{\Pi}$.

Potențialele electrodinamice, \bar{A} și V , sunt –în bună măsură– arbitrare; dacă se utilizează condițiile de etalonare ale lui Lorentz (7.7), din care rezultă:

$$\nabla \bar{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{sau} \quad \nabla \bar{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

atunci se justifică imediat definirea potențialului vector a lui Hertz, $\bar{\Pi}$, din care derivă \bar{A} și V prin relațiile:

$$(7.36') \quad \bar{A} = \mu \epsilon \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \bar{A} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t}$$

și

$$(7.36'') \quad V = -\nabla \cdot \bar{\Pi} \quad \text{adică} \quad V = -\text{div} \bar{\Pi},$$

unde $\bar{\Pi}$ verifică ecuația neomogenă a undelor:

$$(7.37) \quad \square \bar{\Pi} = -\frac{\bar{P}}{\epsilon},$$

în care \bar{P} este vectorul polarizației temporare.

Într-adevăr, conform ecuației (7.8'') $\square \bar{A} = -\mu \bar{J}$ și atunci, înlocuindu-se \bar{A} prin definiți lui $\bar{\Pi}$ (7.36') rezultă:

$$(H1) \quad \square \mu \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} = -\mu \bar{J}$$

Dar, așa cum s-a arătat în subcapitolul 4.2, în cazul în care sursa de câmp q_v variază în timp rezultă :

$$(H2) \quad q_v(t) \Rightarrow \text{div} \bar{D} = q_v(t) \Rightarrow D = D(t) \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial t} \neq 0, \text{ deci } \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J}_D,$$

adică densitatea curentului de deplasare. Dar $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ și atunci:

$$(H3) \quad \bar{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \bar{J}_{D0} + \bar{J}_p \quad \text{în care } \bar{J}_p = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t},$$

unde \bar{J}_p este densitatea curentului de polarizație electrică. Dacă în mediul considerat există în mod permanent polarizație electrică temporară variabilă în timp (mediul ereditar), atunci componenta \bar{J}_p este predominantă și înlocuindu-se în relațiile (H1) pe \bar{J} prin $\bar{J} = \partial \bar{P} / \partial t$ rezultă:

$$\square \mu \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \rightarrow \square \bar{\Pi} = -\bar{P} / \epsilon,$$

adică ecuația neomogenă a undelor (7.37).

Alegându-se o soluție oarecare a ecuației vectoriale și neomogene a undelor (7.37) se poate construi de aici un câmp electromagnetic posibil (dată fiind neunicitatea soluțiilor ecuației lui d'Alembert) adică se identifică aceea soluție a vectorului $\bar{\Pi}$, determinându-se apoi \bar{H} (sau \bar{B}) și \bar{E} (sau \bar{D}). Câmpul astfel determinat este acceptabil dacă verifică și condiția pe frontieră sau la infinit.

Mai mult, se poate introduce și un așa-zis *antipotențial al lui Hertz*, notat cu $\bar{\Pi}'$, plecându-se de la forma locală a fluxului electric $\nabla \bar{D} = 0$ (valabilă numai în medii fără densitate

de volum a sarcini electrice , deci cu $q_v(P) = 0$ în $\forall P \in \Omega$). Scriindu-se $\bar{D} = -\nabla \times \bar{A}'$, ceea ce combinat cu forma locală a circuitului magnetic ($\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \partial \bar{D} / \partial t$) dă (presupunându-se că mediul este lipsit și de sursa de câmp densitate de curent , adică $\bar{J} = 0$):

$$\nabla \times \bar{H} = \partial \bar{D} / \partial t \text{ sau } \nabla \times \bar{H} = \partial(-\nabla \times \bar{A}') / \partial t, \text{ adică } \nabla \times \bar{H} = -\nabla \times \partial \bar{A}' / \partial t,$$

ceea ce conduce la:

$$\nabla \times (\bar{H} + \partial \bar{A}' / \partial t) = 0.$$

Deoarece, conform legii inducției electromagnetice, $\text{rot} \bar{E} = -\partial \bar{B} / \partial t$ și conform definiției potențialului vector ($\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$) se scrie și $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$, rezultă: $\nabla \times \bar{E} = -\partial(\nabla \times \bar{A}') / \partial t$, adică $\nabla \times (\bar{E} + \partial \bar{A}' / \partial t) = 0$. Câmpul $\bar{E} + \partial \bar{A}' / \partial t$ fiind irotațional, poate fi exprimat ca un câmp de gradient și –ca urmare– vectorul intensității câmpului electric \bar{E} poate fi scris în forma:

$$\bar{E} = -\nabla V' - \partial \bar{A}' / \partial t = \nabla(\nabla \cdot \bar{\Pi}') - \mu \epsilon \partial^2 \bar{\Pi}' / \partial t^2. \quad (\text{H4})$$

situație în care, în condiția de etalonare Lorentz pentru antipotențiale lui Hertz ($\bar{\Pi}'$) prin relațiile :

$$\bar{A}' = \mu \epsilon \partial \bar{\Pi}' / \partial t \text{ și } V' = -\nabla \bar{\Pi}', \quad (\text{H5})$$

de unde rezultă:

$$\bar{D} = -\mu \epsilon \nabla \times \partial \bar{\Pi}' / \partial t \text{ și } \bar{E} = \nabla \cdot \nabla \cdot \bar{\Pi}' - \mu \epsilon \partial^2 \bar{A}' / \partial t^2 = \Delta \bar{\Pi}' - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\Pi}' = -\square \bar{\Pi}'. \quad (7.38)$$

De aici reiese că $\bar{\Pi}'$ trebuie să verifice ecuația neomogenă a undelor:

$$\square \bar{\Pi}' = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}, \quad (7.39)$$

unde \bar{M} este magnetizația .

La relația (7.39) se ajunge în felul următor :

- deoarece în punctele lipsite de surse ($\bar{J} = 0$ și $q_v = 0$) dar și fără polarizație electrică ($\bar{P} = 0$), relația (7.37) devine:

$$\square \bar{\Pi} = 0 \text{ dar și } \square \bar{\Pi}' = 0 \Rightarrow \Delta \bar{\Pi}' - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\Pi}' = 0; \quad (\text{H6})$$

-atunci, din relația (H6) combinată cu (H5) reiese :

$$\bar{E} = \nabla(\nabla \times \bar{\Pi}') - \Delta \bar{\Pi}' = \nabla \times (\nabla \times \bar{\Pi}'), \quad (\text{H7})$$

căci $\bar{E} = -\text{grad} V' - \partial \bar{A}' / \partial t = \text{grad} \text{ div} \bar{\Pi}' - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\Pi}'$;

-dar $\text{rot} \bar{E} = -\partial \bar{B} / \partial t$ și $\bar{B} = \mu(\bar{H} + \bar{M})$ iar $\bar{E} = \text{erot} \bar{D}$ ceea ce înseamnă , din relația (H7) că se poate scrie :

$$\square \bar{\Pi}' = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t},$$

adică relația (7.39). Dimensional, se constată că atât relația (7.37) cât și relația (7.39) au aceleași dimensiuni și anume $[U][L]^{-1}$ sau $[V/m]$.

7.1.6. Radiația oscilatorului electric elementar

Dacă într-un domeniu Ω (fig.7.14), considerat liniar, uniform (omogen și izotrop) și infinit extins, într-un punct $o \in \Omega$ există un oscilator electric elementar sub forma unui dipol electric

$q_2 = -q \rightarrow q_1 = +q$, ce are momentul electric $\bar{p} = q\bar{l}$ (v.fig.7.14) care variază în timp, de exemplu alternativ : $\bar{p}(t) = \bar{p}(t + kT)$, atunci se formează un oscilator electric elementar (cu \bar{l} foarte mic) – de tipul celui din figura 7.3– care produce în Ω un câmp electromagnetic radiant ce se propagă în Ω sub forma unor unde sferice (v. § 7.1.1 și fig.7.5c). Problema care se pune este, evident, aceea a determinării acestui câmp electromagnetic radiat în Ω de \bar{p} , prin calcularea mărimilor de stare ale câmpului $\vec{E}(P)$ și $\vec{H}(P)$ într-un punct $P \in \Omega$ situat la o distanță r față de dipol, mult mai mare decât lungimea l a acestuia ($r \gg l$), ceea ce se face prin determinarea –mai întâi– a potențialelor electrodinamice.

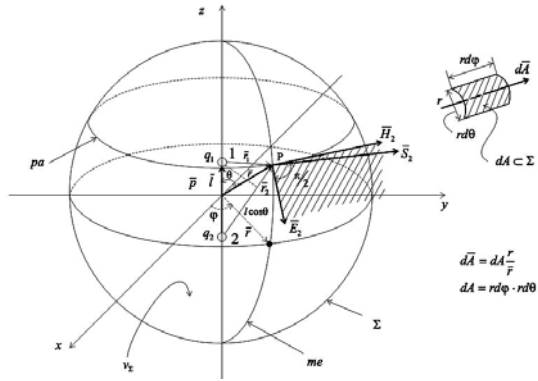


Fig. 7.14

Din cauza simetriei și uniformității, în toate punctele P situate pe o suprafață sferică $\Sigma \in \Omega$, aflate deci la aceeași distanță $r(P)$ de O (adică de p), conform schiței din figura 7.14, câmpul electromagnetic va avea intensitățile câmpului electric (pe de o parte) și a celui magnetic (pe de altă parte), de aceeași valoare absolută $|\vec{E}(P)| = \text{const.}$ și $|\vec{H}(P)| = \text{const.} \Rightarrow \forall P \in \Sigma \subset \Omega$.

Potențialele electrodinamice

Aplicându-se relația (7.34), prin care se determină potențialul electrodinamic scalar retardat V , se va obține pentru cazul din figura 7.14:

$$(ROE1) \quad V(P, t) \stackrel{D}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v_\Sigma} \frac{[q_v]}{R} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{[q_1]}{r_1} + \frac{[q_2]}{r_2} \right),$$

în care v_Σ este volumul închis de suprafața sferică $\Sigma \in \Omega$ (luate astfel încât să cuprindă întreg dipolul \bar{p}), iar $[q_v], [q_1]$ și $[q_2]$ sunt sarcinile retardate, scrise conform convenției de notație (7.35) introdusă în paragraful 7.1.4. Este precizat faptul că sarcinile q_1 și q_2 ale dipolului electric \bar{p} fiind pe corpuri punctiforme din Ω , atunci $[q_v]_{in1} = [q_1]$ și $[q_v]_{in2} = [q_2]$. Dezvoltând în serie Taylor în raport cu r și o variație $\Delta_r = |r_2 - r_1|$, ultimul termen al relației (ROE1), atunci –cu o aproximație de ordinul 1 (adică păstrând numai primii doi termeni al seriei)– se va obține, din forma generală $f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \dots$:

$$(ROE2) \quad \frac{[q_1]}{r_1} = \frac{q_1 \left(t - \frac{r_1}{c} \right)}{r_1} = \frac{q \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} + (r_1 - r) \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{q \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} + \dots$$

și:

$$(ROE3) \quad \frac{[q_2]}{r_2} = \frac{q_2 \left(t - \frac{r_2}{c} \right)}{r_2} = \frac{-q \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} + (r_2 - r) \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{-q \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} + \dots,$$

cu justificarea că \bar{l} fiind foarte mic $(r_1 \cap r_2) \rightarrow r$.

Din figura 7.14 rezultând:

$$\bar{r}_2 = \bar{l} + \bar{r}_1 \rightarrow \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{l} \text{ și } r_2 - r_1 = \bar{l} \cos \theta = \frac{\bar{l} \cdot \bar{r}}{r} \quad (\text{ROE4})$$

(pentru că $\bar{l} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = l \frac{r}{r} \cos \theta = l \cos \theta$) și introducându-se relația (ROE4) în (ROE3) și apoi rezultatul în (ROE1) se va obține :

$$V(t, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} (r_1 - r_2) \left[\frac{-q \left(t - \frac{r_2}{c} \right)}{r^2} - \frac{\dot{q} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{rc} \right] = \frac{- \left(l \cdot \frac{\bar{r}}{c} \right)}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-q \left(t - \frac{r_2}{c} \right)}{r^2} - \frac{\dot{q}' \left(t - \frac{r}{c} \right)}{rc} \right],$$

semnul ' reprezentând derivata după direcția razei, astfel că:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{[q] \bar{l} \cdot \bar{r}}{r^3} + \frac{[q] \bar{l} \cdot \bar{r}}{r^2 c} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{[\bar{q} \bar{l}] \cdot \bar{r}}{r^3} + \frac{[\dot{\bar{q}} \bar{l}] \cdot \bar{r}}{r^2 c} \right]$$

și, deoarece $[\bar{q} \bar{l}] = [\bar{p}]$ – momentul electric retardat, rezultă în definitiv :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{[\bar{p}] \cdot \bar{r}}{r^3} + \frac{1}{c} \cdot \frac{[\dot{\bar{p}}] \cdot \bar{r}}{r^2} \right], \quad (7.40)$$

unde semnificația punctului este cea a derivatei în raport cu timpul ($\dot{q} = dq/dt$ și $\dot{\bar{p}} = d\bar{p}/dt$), care se explica astfel:

-la un dipol electric de lungime dată, variația în timp a momentului electric $\bar{p} = q\bar{l}$, înseamnă –de fapt– variația sarcinilor electrice q_1 și q_2 în timp ;

-variația în timp a sarcinilor q_1 și q_2 se produce printr-un transfer de sarcini electrice de-a lungul dipolului, printr-un canal cilindric cu aria transversală mică ΔA , între cele două extremități punctiforme, 1 și 2, ale dipolului (fig.7.15);

-în acest fel, de-a lungul canalului asociat dipolului electric, apare un curent electric care (conform convenției de semne din figura 7.15) și legii conservării sarcinii electrice are intensitatea:

$$i = dq_1 / dt = \dot{q} \text{ și } i = \int_{\Delta A} \bar{J} \cdot d\bar{A}' = \int_{\Delta A} \bar{J} dA, \quad (\text{ROE5})$$

având densitatea de curent $\bar{J} \parallel \bar{l}$.

În ceea ce privește determinarea potențialului electrodynamic vector \bar{A} , se pleacă de la expresia (7.33) a potențialului retardat care, în cazul oscilatorului electric elementar din figura 7.14 și cu notațiile din figura 7.15, dă:

$$\bar{A}(P, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Delta v} \frac{[\bar{J}]}{R} dv = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Delta A} \frac{[\bar{J}]}{R} dA,$$

care, pentru punctul P din figura 7.14, pentru care $R=r$, devine :

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{[\dot{q}] \bar{l}}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{[\dot{\bar{p}}]}{r}. \quad (7.41)$$

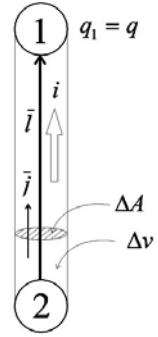


Fig. 7.15

Mărimile de stare ale unei electromagnetice radiate

Aceste mărimi sunt intensitatea câmpului electric \bar{E} și intensitatea câmpului magnetic \bar{H} , pe care le vom determina pentru punctele $P \in \Sigma \subset \Omega$, indicate în figura 7.14, prin intermediul potențialelor electrodinamice retardate (7.40) și (7.41), stabilite anterior.

Câmpul electric. Expresia intensității câmpului electric pentru cazul din figura 7.14 se obține utilizând relația (PE4)/§7.1.2, adică: $\bar{E} = -\partial \bar{A} / \partial t - \text{grad} V$, prin calcularea termenilor ei în condițiile date (oscilatorul electric elementar – v.fig.7.14):

j) primul termen (adică derivata potențialului electrodynamic vector retardat \bar{A} în raport cu timpul t) este derivata în raport cu timpul a relației (7.14):

$$(ROE7) \quad \partial \bar{A} / \partial t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{4\pi} \cdot \left[\dot{\bar{p}} \right] r \right) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \left[\ddot{\bar{p}} \right],$$

în care $\left[\ddot{\bar{p}} \right] = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2}$ (derivata a doua în raport cu timpul t a momentului electric \bar{p});

jj) la doilea termen este $\text{grad} V$, adică ∇V aplicat relației (7.40):

$$(ROE8) \quad \nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \left[\frac{[\bar{p}]r}{r^3} + \frac{1}{c} \cdot \frac{[\dot{\bar{p}}]r}{r^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{3r[\bar{p}]r}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot \nabla([\bar{p}]r) - \frac{2r[\dot{\bar{p}}]r}{cr^4} + \nabla \frac{1}{cr^2} \left([\dot{\bar{p}}]r \right) \right\},$$

în care $\nabla([\bar{p}]r)$ se poate calcula prin derivata după r , deci și numai după o singură axa x (v. fig.7.14) adică:

$$(ROE9) \quad \begin{aligned} \nabla([\bar{p}]r) &= \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{p} \left(r, t - \frac{r}{c} \right) \cdot \bar{r} \right] = \bar{i} \left([\bar{p}] \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \right) + \bar{i} \left(\frac{\partial [\bar{p}]}{\partial x} \right) \bar{r} = \bar{i} [\bar{p}]_x + \bar{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\bar{p}] \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \right) = \\ &= \bar{i} [\bar{p}]_x + \bar{i} \left(-\frac{1}{c} \left[\dot{\bar{p}} \right] \frac{x}{r} \right) \bar{r} = [\bar{p}] - \frac{r \left(\left[\dot{\bar{p}} \right] r \right)}{cr}. \end{aligned}$$

În mod asemănător :

$$(ROE10) \quad \nabla \left(\left[\dot{\bar{p}} \right] \cdot \bar{r} \right) = \left[\dot{\bar{p}} \right] - \frac{r \left(\left[\ddot{\bar{p}} \right] r \right)}{cr};$$

jjj) introducându-se expresiile (ROE9) și (ROE10) în (ROE8) se obține $\text{grad} V$:

$$(ROE11) \quad \text{grad} V = \nabla V = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{3r[\bar{p}]r}{r^5} - \frac{[\bar{p}]}{r^3} + \frac{3r \left(\left[\dot{\bar{p}} \right] r \right)}{cr^4} - \frac{[\dot{\bar{p}}]}{cr^2} + \frac{r \left(\left[\ddot{\bar{p}} \right] r \right)}{c^2 r^3} \right\};$$

jjv) revenindu-se (ROE7) cu (ROE11) se obține expresia intensității câmpului electric, adică:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\left[\ddot{\bar{p}} \right]}{r} - \text{grad} V = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \cdot \mu\epsilon \frac{\left[\ddot{\bar{p}} \right]}{r} - \text{grad} V = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\left[\ddot{\bar{p}} \right]}{c^2 r} - \text{grad} V = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{3\bar{r} \left(\left[\dot{\bar{p}} \right] \bar{r} \right) - r^2 \left[\dot{\bar{p}} \right]}{r^5} + \frac{3\bar{r} \left(\left[\ddot{\bar{p}} \right] \bar{r} \right) - r^2 \left[\ddot{\bar{p}} \right]}{cr^4} + \frac{\bar{r} \left(\left[\ddot{\bar{p}} \right] \bar{r} \right) - r \left[\ddot{\bar{p}} \right]}{c^2 r^3} \right\}.\end{aligned}\quad (7.42)$$

Se constată că dacă dipolul este constant, adică $\bar{p}(t) = \text{const.} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = d\bar{p}/dt = 0$ și $\ddot{\bar{p}} = d^2\bar{p}/dt^2 = 0$, atunci relațiile (7.40) și (7.42) reprezintă relațiile potențialului electrostatic și – respectiv – intensitatea câmpului electrostatic produs de un dipol electric – v. subcap. 3.6, aplicația 3.6.2, relațiile (3.64) și respectiv (3.66’).

Câmpul magnetic. Expresia intensității câmpului magnetic pentru cazul din figura 7.14 se obține utilizând relația (PE2) – § 7.1.2 de definiție a potențialului electrodinamic vector \bar{A} , adică $\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$, știindu-se că în cazul mediului considerat inițial $\bar{B} = \mu\bar{H}$ și ca urmare:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A}.\quad (\text{ROE12})$$

Dar \bar{A} are – în acest – caz expresia (7.41) și atunci (ROE12) devine – conform celor arătate în § 9.1.2, relația (9.31) –:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\mu}{4\pi} \frac{\left[\dot{\bar{p}} \right]}{r} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \frac{\left[\dot{\bar{p}} \right]}{r} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \frac{\left[\dot{\bar{p}} \right]}{r} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\left[\dot{\bar{p}} \right] \times \bar{r}}{r^3} - \frac{1}{r} \nabla \times \left[\dot{\bar{p}} \right] \right),\quad (\text{ROE13})$$

în care :

$$\nabla \times \left[\frac{\dot{\bar{p}}}{r} \right] = \text{rot} \left[\frac{\dot{\bar{p}}}{r} \right] = \nabla \times \dot{\bar{p}} \left(\bar{r}, t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\bar{r}}{r} \times \frac{\partial \left[\dot{\bar{p}} \right]}{\partial t} = \frac{\bar{r}}{r} \times \left[\ddot{\bar{p}} \right] \left(-\frac{1}{c} \right) = -\frac{\left[\ddot{\bar{p}} \right] \times \bar{r}}{cr},\quad (\text{ROE14})$$

astfel că va rezulta, introducând pe (ROE14) în (ROE13):

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\left[\dot{\bar{p}} \right] \times \bar{r}}{r^3} + \frac{\left[\ddot{\bar{p}} \right] \times \bar{r}}{cr^2} \right).\quad (7.43)$$

Impedanța de undă a mediului. Definită prin relația (7.26), acest parametru, notat cu ζ , poate fi calculat – așa cum arată expresia (7.27H) – și prin raportul dintre valorile intensităților câmpului electric și câmpului magnetic .

Determinarea valorilor acestor intensități prilejuiește constatarea că mărimile de stare, \bar{E} și \bar{H} , ale undelor electromagnetice radiate de oscilatorul electric elementar – determinat prin $\bar{p}(t)$ – au expresiile (7.42) și – respectiv – (7.43) formate din trei – respectiv – doi termeni aranjați după

ordinul derivatei în raport cu timpul a momentului electric retardat, adică după $\left[\frac{\dot{p}}{r} \right]$ și $\left[\frac{\ddot{p}}{r} \right]$. Dintre

aceștia, termenii ce conțin derivata de ordinul doi variază (scad) în spațiu (în raport cu distanța r de la dipolul electric la punctul $P \in \Omega$) mult mai lent. Din această cauză la distanțe r mari (atât de mari încât să ajungă în zona undelor din Ω), câmpul electromagnetic este determinat în mod semnificativ numai de termenii de ordinul doi (notați cu \overline{E}_2 și \overline{H}_2) adică de:

$$(7.42') \quad \overline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\overline{r} \times \left(\overline{r} \times \left[\frac{\ddot{p}}{r} \right] \right)}{c^2 r^3}$$

și

$$(7.43') \quad \overline{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\left[\frac{\ddot{p}}{r} \right] \times \overline{r}}{c r^2}.$$

Aceste relații arată (v.fig.7.14) că liniile de câmp electrice sunt meridianele $me \in \Sigma$ (adică cele pentru care unghiul $\varphi = \text{const.}$) și liniile de câmp magnetic sunt paralele $pa \in \Sigma$ (pentru care unghiul $\theta = \text{const.}$).

Valorile absolute ale intensităților câmpului electromagnetic rezultă din expresiile (7.42') și (7.43') fiind:

$$(7.42'') \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\left[\frac{\ddot{p}}{r} \right]}{c^2 r} \sin \theta$$

și:

$$(7.43'') \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\left[\frac{\ddot{p}}{r} \right]}{c r} \sin \theta.$$

Cu aceste valori se pot determina, imediat, impedanța de undă a mediului:

$$\zeta = \frac{E_2}{H_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\ddot{p}}{r} \right] \frac{\sin \theta}{c^2 r}}{\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\ddot{p}}{r} \right] \frac{\sin \theta}{c r}} = \frac{1}{\epsilon c} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}},$$

adică exact definiția (7.26).

Puterea radiată

La valori mari ale lui r (adică în zona undelor), radiația electromagnetică se face cu un transfer superficial de putere, în $[\text{W}/\text{m}^2]$, dat de vectorul Poyting (definit, după cum se știe, prin $\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$), care se calculează –în această zonă– prin produsul dintre vectorii \overline{E}_2 și \overline{H}_2 , dați relațiile (7.42') și (7.43') fiind:

$$(7.44') \quad \overline{S}_2 = \overline{E}_2 \times \overline{H}_2 = \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \cdot \frac{\overline{r} \left(\overline{r} \left[\frac{\ddot{p}}{r} \right] \right)^2}{c^3 r^5},$$

un vector cu valoare absolută :

$$S_2 = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \cdot \left(\frac{\ddot{p}}{r} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{c^3}, \quad (7.44'')$$

care fiind perpendicular pe planul format de \vec{E}_2 și \vec{H}_2 (ambii acești vectorii tangenți la sfera Σ din figura 7.14) este orientat deci pe direcția razei \vec{r} ($\vec{S}_2 = S_2 \frac{\vec{r}}{r}$). Aceasta înseamnă că transportul de energie electromagnetică se produce de la dipolul oscilator către exterior, sub unghiul $\widehat{\vec{p}, \vec{S}_2} = \widehat{\vec{l}, \vec{S}_2} = \theta$.

De aceea, puterea instantanee totală, în [W], radiată de dipolul oscilatorului elementar, p_r , se poate calcula ca fiind fluxul vectorului \vec{S}_2 prin suprafața sferică Σ (v. fig.7.14) ce înconjoară dipolul, adică (v. fig. 7.14):

$$p_r = \int_{\Sigma} \vec{S}_2 \cdot \vec{dA} = \int_{\Sigma} S_2 \cdot dA = \int_{\Sigma} S_2 r d\varphi d\theta = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon c^3} [\ddot{p}]^2 \int_{\Sigma} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} d\varphi d\theta = \frac{[\ddot{p}]^2}{16\pi^2 \epsilon c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta,$$

deoarece vectorii \vec{S}_2 și \vec{dA} au aceeași direcție (și anume aceea a razei sferei).

Va rezulta în final :

$$p_r = \frac{[\ddot{p}]^2}{16\pi^2 \epsilon c^3} \cdot 2,67\pi = \frac{[\ddot{p}]^2}{16\pi \epsilon c^3}. \quad (7.45)$$

Rezistența de radiație

Considerându-se dipolul $-q \xrightarrow{\vec{l}} q$ ca fiind o antenă ce radiază continuu unde electromagnetice cu densitate de suprafață a puterii radiate S_2 , va trebui să se considere că momentul electric $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ variază sinusoidal în timp :

$$p(t) = p(t + kT) = q_{\max} \sin \frac{2\pi}{T} t \cdot l, \quad (RA1)$$

unde s-a considerat că sarcinile electrice ale “capetelor” punctiforme ale dipolului (1 și 2 din figura 7.15) variază sinusoidal între valorile $+q_{\max}$ și $-q_{\max}$, prin transfer de sarcină electrică de-a lungul dipolului, cu o perioadă de repetiție T , ceea ce presupune existența unui curent alternativ sinusoidal i în lungul dipolului (v. fig.7.15) dat de :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} q_{\max} \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{T} q_{\max} \cos \frac{2\pi}{T} t = I_{\max} \cos \omega t = \sqrt{2} I \cos \omega t, \quad (RA2)$$

ce are valoarea maximă $I_{\max} = 2\pi q_{\max} / T$ și valoarea efectivă $I = I_{\max} / \sqrt{2}$ (v. cap.8).

Unei perioade de repetiție T îi corespunde, prin definiție, o frecvență de oscilație $f = 1/T$ și o pulsație (v. cap.8):

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f. \quad (RA3)$$

Deoarece, conform relației (ROE5), din primul subparagraf,

$$\dot{q} = dq / dt = i \text{ și deci } \dot{p} = \frac{d}{dt} (ql) = l \frac{dq}{dt} = li, \quad (RA4)$$

rezultă că se poate scrie:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = li = I_{\max} \cos \omega t = I \sqrt{2} \cos \omega t \quad (RA5)$$

și:

$$(RA6) \quad \ddot{p} = \frac{d\dot{p}}{dt} = \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d}{dt}(I_{\max} \cos \omega t) = -\omega I_{\max} \sin \omega t = -\omega I \sqrt{2} \sin \omega t .$$

Atunci expresia (7.45) a puterii instantanee, p_r , radiată de dipolul oscilant (o antenă de lungime l) este:

$$(RA7) \quad p_r = \frac{1}{6\pi\epsilon c^3} [\ddot{p}] = \frac{1}{6\pi\epsilon c^3} \omega^2 l^2 I^2 2 \sin^2 \omega t = \frac{\omega^2 l^2 I^2}{3\pi\epsilon c^2} \sin^2 \omega t .$$

În relațiile (RA5), (RA6) și (RA7) s-a înlocuit $[p]$ cu \dot{p} și $[p]$ cu \ddot{p} , adică nu s-a mai ținut seama de retardare, deoarece ea (retardarea) nu face altceva decât să introducă modulele de defazaj, în funcție de r (raza a sferei Σ), defazaj care însă nu influențează valoarea medie a puterii disipate (care se obține integrându-se p_r , astfel că valoarea integralei nu este influențată de acest defazaj dat de retardare).

Puterea medie radiată, P_r , se obține –conform definiției (v. cap.8)– prin integrare pe o perioadă de timp T a puterii instantanee radiată p_r , dată de expresia (RA7):

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_r d\omega t = \frac{\omega^2 l^2 I^2}{3\pi\epsilon c^3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d\omega t = \frac{\omega^2 l^2 I^2}{3\pi\epsilon c^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\pi^2 f^2 l^2 I^2}{6\pi\epsilon c^3}$$

și deoarece lungimea de undă λ este determinată de frecvența oscilațiilor dipolului, f , prin relația cunoscută : $\lambda = cT = c/f$, atunci :

$$(7.46) \quad P_r = \frac{2\pi \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 l^2 I^2}{3\epsilon c^3} = \frac{2\pi}{3\epsilon c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 .$$

Deoarece, în cazul unui curent electric cu valoarea efectivă I , un rezistor cu rezistența R disipă puterea (activă –v. cap.8): $P = RI^2$, rezultă faptul că un rezistor ce disipă puterea (activă) P , la un curent cu valoarea efectivă I are rezistența : $R = P/I^2$. Cunoscându-se această expresie, rezultă că rezistența de radiației a unui dipol oscilant, R_r , se determină cu expresia :

$$(7.47) \quad R_r = P_r / I^2 = \frac{2\pi}{3\epsilon c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 ,$$

care s-a obținut prin înlocuirea lui P_r cu expresia sa (7.46).

Așa cum se arată în manualul *Preda, M ș.a (1980)*, pentru oscilatorul dipolar elementar situat în vid (pentru care viteza de propagare este $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s și $\epsilon = \epsilon_0 = 1/4\pi 9 \cdot 10^9$ F/m) rezultă că rezistența de radiație este:

$$(7.47') \quad R_r \cong 790(l/\lambda)^2 \Omega .$$

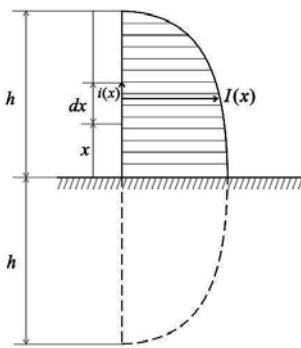


Fig. 7.16

Din această ultimă relație (7.47'), precum și din relația (7.46), rezultă că puterea radiată P_r și rezistența de radiație R_r a antenei (asimilată dipolului oscilant) au valori semnificative numai dacă $l \gg \lambda$, adică la frecvențe înalte : $f = c/\lambda$ (cu λ mic). Dar dacă l (lungimea antenei de emisie) este mare, atunci antena nu mai poate fi considerată un dipol (pentru că, prin definiție, $\bar{p} = q \cdot \bar{l} \Rightarrow l \rightarrow 0$ și $q \rightarrow \infty$). În *Preda, M ș.a (1980)* se dă următorul exemplu: de-a lungul unei antene liniare cu înălțime h , alimentată în curent sinusoidal de înaltă frecvență, valoare efectivă a curentului variază în lungul antenei, adică $I(x)$, așa ca în figura 7.16.

Antena din figura 7.16 poate fi descompusă într-un șir de

dipoli elementari cu lungimea dx și valoarea instantanee a curentului $i(x)$. Atunci, câmpul electromagnetic total, radiat de antenă, se obține prin suprapunerea câmpurilor elementare produse de fiecare dipol elementar component. Figura 7.16 mai arată că la antena reală trebuie să se țină seama și de imaginea ei față de suprafața pământului (partea desenată cu linie întreruptă în figura 7.16), care trebuie adăugată și ea.

7.1.7. Radiația oscilatorului magnetic elementar

Într-un domeniu Ω , liniar, uniform (onogen și izotrop), extins la infinit și lipsit de sarcini electrice (având deci $q_v = 0$, în C/m^3 , în orice punct $P \in \Omega$), se presupune că există o buclă de curent (v. § 1.1.2) sub forma unei spire conductoare filiforme Γ (figura 7.17), circulară (cu raza a relativ mică față de distanțele la zona undelor, unde se consideră un punct $P \in \Omega$), al cărui curent i este variabil în timp, eventual periodic: $i(t) = i(t + kT)$. După cum se știe (v. § 1.1.2) o buclă de curent este caracterizată de momentul său magnetic, un vector definit prin $\bar{m} = i \cdot \bar{A}$, unde \bar{A} este aria suprafeței închisă de spiră în planul ei și orientată perpendicular pe planul spirei, cu sensul asociat lui i după regula burghiului drept. Se consideră un sistem de referință cartezian $Oxyz$, ca originea axelor în centrul spirelor O (pentru simplificarea scrierii), așa ca în figura 7.17.

În acest caz, $A = \pi a^2$ și momentul magnetic are valoarea $m = \pi a^2 i$. Dacă $i = i(t)$, atunci $m = m(t)$, adică este variabil în timp, ceea ce face ca în Ω , în jurul spirei $\Gamma \subset \Omega$, să se producă un câmp electromagnetic, ce se propagă în Ω , spira fiind considerată un oscilator magnetic elementar (adică având $a \ll r$, unde r este distanța la punctul $P \in \Omega$, în care se determină câmpul electromagnetic produs de oscilator).

Pentru că s-a considerat cazul în care în $\forall P \in \Omega \Rightarrow q_v(P) = 0$, peste tot în Ω potențialul electrodinamic scalar este $V = 0$, așa cum rezultă din relația (7.34), iar potențialul magnetic al vectorului \bar{A} – definit prin relația (7.33) – va avea expresia :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega_r} \frac{[\bar{J}]}{R} dv_r = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{[\bar{J}]}{R} S_r \cdot d\bar{l} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{[\bar{J}] \cdot \bar{S}_r}{R} \cdot d\bar{l} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{[i]}{R} \cdot d\bar{l} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[i]}{R} a d\varphi \cdot \bar{t} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[i] \pi a \times \bar{t}}{R} \cdot \frac{a}{\pi a} d\varphi = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\bar{m}]}{R} \cdot \frac{1}{\pi a} d\varphi, \end{aligned}$$

care ține seama de faptul că sistemul ce produce câmp magnetic este o spiră Γ , un element de volum fiind $dv = \bar{S}_r \cdot d\bar{l}$, în care S_r este suprafața unei secțiuni prin spiră, iar $d\bar{l}$ un element de spiră orientat aparținând lui Γ . Produsul scalar $[\bar{J}] \cdot \bar{S}_r = [i]$, deoarece spira fiind filiformă secțiunea ei transversală este perpendiculară pe \bar{J} . În integrala precedentă, \bar{t} este versorul tangentei la spiră (Γ) și produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{t}$ este normal pe planul spirei având sensul lui \bar{m} (v. fig.7.17).

Pentru $a \ll R$, deoarece $\bar{a} + \bar{R} = \bar{r}$, se poate considera $r = R$ și integrala anterioară conduce la :

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{[\bar{m}] \times \bar{r}}{r^3} + \frac{[\dot{\bar{m}}] \times \bar{r}}{cr^2} \right),$$

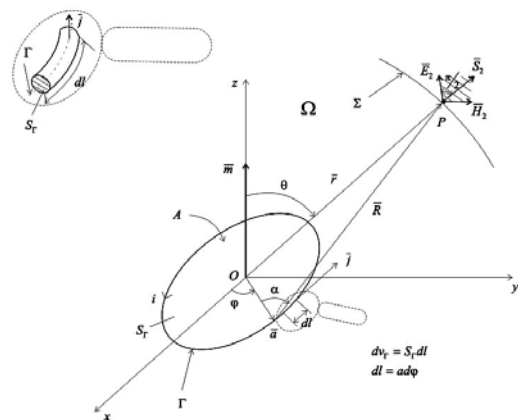


Fig. 7.17

știu că : $[i] = i\left(\bar{r}, t - \frac{r}{c}\right)$ și $[\bar{m}] = \bar{m}\left(\bar{r}, t - \frac{r}{c}\right)$ sunt mărimi retardate.

Deoarece $\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad}V$, conform relației (PE4) § 7.1.2, și în acest caz $\text{grad}V = 0 \Leftrightarrow V = 0$, atunci :

$$(7.48) \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\bar{r} \times [\dot{\bar{m}}]}{r^3} + \frac{\bar{r} \times [\ddot{\bar{m}}]}{cr^2} \right)$$

și

$$(7.49) \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{3\bar{r}([\bar{m}]\bar{r}) - r^2[\bar{m}]}{r^5} + \frac{3\bar{r}([\dot{\bar{m}}]\bar{r}) - r^2[\dot{\bar{m}}]}{cr^4} + \frac{\bar{r} \times (\bar{r} \times \ddot{\bar{m}})}{c^2 r^3} \right\}.$$

Luându-se, în zona undelor punctului P (fig. 7.17), numai componentele semnificative ale intensităților câmpului, adică $\bar{E}_2 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\bar{r} \times [\ddot{\bar{m}}]}{cr^2}$ și $\bar{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{r} \times (\bar{r} \times [\ddot{\bar{m}}])}{c^2 r^5}$, rezultă expresia densității de suprafață a puterii transportate în zona undelor (adică vectorul Poynting):

$$(7.50) \quad \bar{S}_2 = \bar{E}_2 \times \bar{H}_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\bar{r}(\bar{r} \times [\ddot{\bar{m}}])^2}{c^2 r^5}.$$

Puterea instantanee totală radiată printr-o suprafață sferică Σ (cu $P \in \Sigma$ din zona undelor, pentru care $r \gg a$) este:

$$(7.51) \quad p_r = \oint_{\Sigma} \bar{S}_2 \cdot d\bar{A} = \frac{\mu}{6\pi c^3} [\ddot{\bar{m}}]^2.$$

Dacă prin spiră curentul este sinusoidal, cu valoarea instantanee $i = \sqrt{2} \dot{I} \sin \omega t$, unde $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f$, atunci momentul magnetic al spirei este variabil în timp tot sinusoidal:

$$m = \pi a^2 i = \pi a^2 \sqrt{2} \dot{I} \sin \omega t,$$

puterea medie, P_r , radiată fiind:

$$(7.52) \quad P_r = \frac{8\pi\mu c}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \dot{I}^2,$$

deoarece $p_r = \frac{\mu}{6\pi c^3} \frac{d^2}{dt^2} (\pi a^2 \sqrt{2} \dot{I} \sin^2 \omega t)^2$, iar $P_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_r d\omega t$, iar rezistența de radiație a mediului (R_r) este:

$$(7.52) \quad R_r = \frac{P_r}{\dot{I}} = \frac{8\pi\mu c}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4,$$

care în vid (ce are $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) capătă expresia:

$$(7.52') \quad R_{r_0} \cong 3155,072 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \text{ în } \Omega.$$

7.1.8. Difrakția undelor electromagnetice

Difrakția reprezintă fenomenul de propagare a undelor (luminoase, acustice, de materie, electromagnetice etc.) și în spatele unor obstacole (a ecranelor), în care există orificii, fante, „marginii” etc.

Difracția undelor electromagnetice, ca și difracția luminii (v. Fizica), care este ea însăși de natură electromagnetică, se datorește stării oscilatorii a undelor ce se propagă în spațiu. Conform principiului lui Huygens (v. Fizica), vibrațiile care se propagă în exteriorul unei suprafețe închise ce conține o sursă oscilatorie de câmp sunt identice cu cele care se obțin suprimând sursa și înlocuind-o cu izvoare convenabil repartizate pe suprafață.

Astfel, dacă o undă provine dintr-o sursă radiantă punctiformă A (fig. 7.18), având o formă sferică –fie ca HI (v. fig. 7.18)– și dacă în calea ei se interpune un ecran HB și GI , în care există un orificiu BG , atunci zona de propagare a undelor va fi întotdeauna delimitată de razele (liniile) ABC și AGE , iar undele care se propagă dincolo de ecran (în zona $DCEF$) sunt datorate unor izvoare B, b, G, d, C, E etc. repartizate pe suprafețele sferei $BG, d'd'', DF$ etc., care produc undele de difracție KL (numite de către Huygens unde secundare).

Repartiția izvoarelor B, G, b, d, C, E etc. se bazează pe următorul postulat al lui Fresnel: „un punct al suprafeții poate fi considerat o sursă a cărei amplitudine și a cărei fază sunt aceleași cu cele ale unei vibrații produse în acel punct de sursa interiară”. Acest postulat al lui Fresnel este riguros valabil numai dacă se aplică într-un mediu extins la infinit dincolo de suprafața ce închide sursa punctiformă oscilatorie.

Din cauza acestei restricții, au apărut multe alte teorii privind difracția undelor, fiecare având ca punct de plecare un caz concret, cum ar fi difracția produsă de diverse fante existente în ecranul ce se opune propagării undelor.

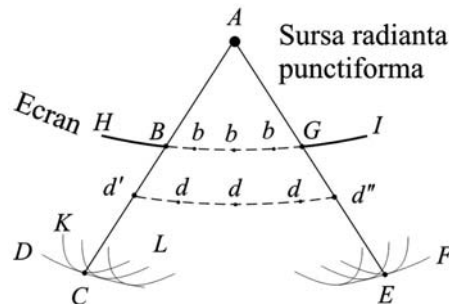


Fig. 7.18

Difracția produsă de o fantă dreptunghiulară

Se consideră un ecran opac în care există o fantă dreptunghiulară cu lungimea l_z și grosimea b_x . Folosindu-se notațiile din figura 7.19 și presupunându-se că sursa oscilantă de unde este la o distanță suficient de mare spre a se putea admite că un mic element din suprafața ecranului atins de undă este o porțiune dintr-o undă plană (ceea ce, în teoria lui Fresnel, corespunde unor dimensiuni ale fantei suficient de mici ca $1/r_1$ – unde r_1 este distanța de la ecran la sursa de unde – să nu aibă variații apreciabile în fantă și, de asemenea, ca $2\pi r_1/\lambda$ – unde λ este lungimea de undă – să aibă variații mici în comparație cu ceilalți termeni care dau faza undei) se poate scrie că elementul de arie al fantei este: $df = b_x dz$.

Unda totală care se obține la o distanță r față de elementul de fantă df este:

$$u = ab_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr + \pi/2) dz, \quad (D1)$$

în care a este valoarea maximă a undei pe lungimea l_z . Dacă se consideră unda totală la o distanță r foarte mare în comparație cu l_z , atunci se poate admite că $r^{-1} \approx r_0^{-1}$, unde r_0 este distanța de la centrul fantei la sursa oscilatoare generatoare de unde (v. fig. 7.19). În ceea ce privește faza undelor (corespunzătoare direcțiilor r și r_0) se poate admite cu o aproximație suficient de bună că:

$$r - r_0 = z \cos\theta, \quad (D2)$$

în care θ este unghiul dintre axa z a fantei și direcția lui r .

Introducându-se expresia (D2) în relația (D1), integrându-se și făcându-se transformările trigonometrice care se impun, se va obține intensitatea undei u astfel:

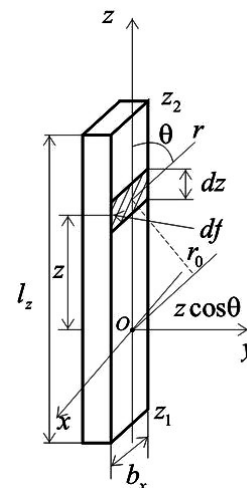


Fig. 7.19

$$u = (ab_x / r_0) \int_{z_1}^{z_2} \cos(\omega t - kr_0 + kz \cos \theta + \pi / 2) dz,$$

$$u = (ab_x / r_0 k \cos \theta) [\sin(\omega t - kr_0 + kz_2 \cos \theta + \pi / 2) - \sin(\omega t - kr_0 + kz_1 \cos \theta + \pi / 2)] =$$

$$= (b / \cos \theta) [\sin(k' l_y \cos \theta) \cos(\omega t - kr_0 + k'(z_1 - z_2) \cos \theta + \pi / 2)].$$

în care $b = \frac{ab_x}{r_0 k}$ și $k' = k/2$ sunt constante ale cazului analizat, din figura 7.19.

De aici rezultă că prin difracție se va produce o nouă undă a cărei intensitate U variază cu unghiul θ după modelul:

$$(7.53) \quad U = b \frac{\sin(k' l_y \cos \theta)}{\cos \theta}.$$

Expresia (7.53) reprezintă modelul așa numite *difracții Fraunhofer*.

Difracția undelor electromagnetice de radiofrecvență

La cursul Teoria transmisiei informației se va arată că majoritatea proceselor de transmitere la distanță a datelor se face prin intermediul așa-ziselor unde radioelectrice (unde radio), care sunt unde electromagnetice cu frecvență mare (radio frecvență, de la 50 kHz la 150 MHz sau și mai mult), sinusoidale sau dreptunghiulare, care formează semnalul purtător ce este modulat (prin numeroase metode) cu semnalul util ce trebuie transmis. Aceste unde radio sunt emise de antene în spațiul din jurul globului terestru (deci în atmosferă) de unde sunt captate de antenele celor ce realizează recepția și care se găsesc răspândite pe suprafața terestră.

În aceste cazuri, difracția undelor radio asigură propagarea acestora dincolo de orizontul optic și în spatele obstacolelor. Considerându-se Pământul perfect sferic, problema difracției undelor radio a fost rezolvată teoretic, calculele arătând că dincolo de orizont (deci în zona de difracție) intensitatea câmpului are o scădere exponențială cu atât mai rapidă cu cât frecvența este

mai înaltă sau lungimea de undă $\lambda = c/f$ este mai mică (așa cum se arată în figura 7.20, unde $a = u_{recuperat}/u_{emis}$ este atenuarea intensității câmpului electric la recepție, la emisie a fiind egal cu 1).

Dealurile, accidentele de teren, clădirile etc. au influență neglijabilă în domeniul undelor kilometrice și hectometrice (adică la frecvențe de sute și mii de kHz), dar reprezintă obstacole pentru undele metrice și submetrice (adică peste 100MHz). Când obstacolul are o muchie destul de ascuțită (obstacolul de tip „muchie de cuțit”) cu raza de curbura a obstacolului $R < 0,003\lambda \theta^{-3}$, unde θ este unghiul dintre direcția emițător – obstacol și direcția obstacol – receptor (fig. 7.21),

se poate aproxima câmpul în spatele obstacolului ca rezultanta câmpurilor provenite de la fiecare punct al suprafeții de undă liberă din planul obstacolului.

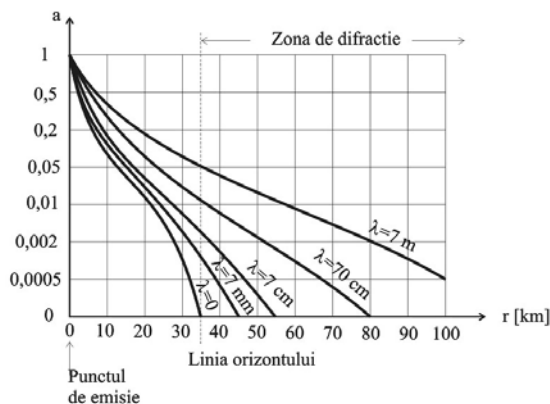


Fig. 7.20

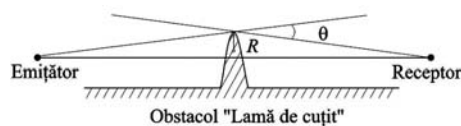


Fig. 7.21

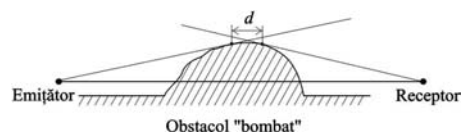


Fig. 7.22

Când obstacolul are o curbă cu raza de curbură mai mare, de tip obstacol „bombat” (fig. 7.22), se produce o difracție succesivă în fiecare punct al obstacolului, invizibil de la extremitățile traseului (porțiunea d pe figura 7.22), iar la frecvențe mai joase intervin și pierderile în sol. De asemenea, în aceste cazuri mai intervin și undele reflectate de ionosferă.

În cazul undelor metrice (sute de MHz), dealurile și munții introduc atenuări de difracție de ordinul zecilor de decibeli (v. cursul Măsurări electronice), atenuări uneori mai mici decât ar introduce difracția în jurul curburii Pământului la aceeași distanță.

La frecvențe mai înalte decât 3000MHz, atenuarea de difracție, chiar în spatele clădirilor, devine atât de mare încât recepția pe traseele de difracție nu mai este posibilă.

7.1.9. Ghiduri de undă

Prin ghiduri de undă –în sensul tehnic– se înțelege un mediu delimitat de pereții interiori reflectanți ai unui tub solid în care are loc propagarea unor unde electromagnetice. Undele sunt deci ghidate de către pereții tubului, care sunt considerați – în studiu – că sunt realizați dintr-un material perfect conductor.

Teorema de existență a lui Dario Graffi

În ghidurile de undă, câmpul electromagnetic se determină prin rezolvarea unei probleme interioară cu derivate parțiale. Pentru rezolvarea unor astfel de probleme este esențială teorema de existență a lui Dario Graffi care va fi prezentată pe scurt în continuare (după Nicolau, Edm., 1972).

Teoremă. *Un câmp electromagnetic armonic (adică de formă sinusoidală) este univac determinat într-un domeniu Ω (în care există un mediu slab conducător), limitat în parte de un conductor perfect (cazul ghidurilor de undă) iar în rest de suprafețe plane, separate între ele, cu conexiune simplă, pe care se dau componentele normale ale câmpului.*

Dacă una sau toate aceste suprafețe plane sunt cu conexiune multiplă, este necesar –pentru determinarea univocă a câmpului electromagnetic– să se dea circulația câmpului magnetic pe linia ce limitează, în interior, suprafețele în cauză. Este de menționat că suprafețele plane nu trebuie să fie neapărat perfect conductoare.

Demonstrație. Demonstrația teoremei de existență, enunțată anterior, a fost făcută de către Dario Graffi în anul 1951.

Se notează cu $\underline{\bar{E}}$ și $\underline{\bar{H}}$ exprimarea în planul complex a vectorilor intensității câmpului electric și magnetic ce determină câmpul electromagnetic în domeniul Ω și care variază sinusoidal în timp (v. § 9.13).

Pe suprafețele plane ce limitează pe Ω , notate generic cu Σ , ($\Sigma = \text{Fr } \Omega$) se dau componentele normale ale acestor vectori. Un alt câmp electromagnetic posibil în Ω ar fi: $\underline{\bar{E}} + \underline{\bar{E}}'$, $\underline{\bar{H}} + \underline{\bar{H}}'$ dacă ar avea aceleași componente normale pe Σ . În acest caz, în Ω ținându-se seama de liniaritatea ecuațiilor, se poate scrie (utilizându-se formele locale ale legilor circuitului magnetic și inducției electromagnetice):

$$\nabla \times \underline{\bar{H}}' = \underline{\bar{J}}' + \frac{\partial \underline{\bar{D}}'}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \underline{\bar{H}}' = \gamma \underline{\bar{E}}' + j\omega \varepsilon \underline{\bar{E}}', \quad (\text{G1})$$

$$\nabla \times \underline{\bar{E}}' = -\frac{\partial \underline{\bar{B}}'}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \underline{\bar{E}}' = -j\omega \mu \underline{\bar{H}}'. \quad (\text{G2})$$

Se mai poate scrie (pentru conjugatele expresiilor complexe) și:

$$\nabla \times \underline{\bar{H}}'^* = -j\omega \varepsilon \underline{\bar{E}}'^* + \gamma \underline{\bar{E}}'^*. \quad (\text{G3})$$

„Prelucrându-se” convenabil ecuațiile (G1), (G2), și (G3) –înmulțindu-se cu \overline{E}^* și cu \overline{H}^* , scăzându-se membru cu membru și integrându-se– se poate obține un analog al vectorului Poyting. Dar fluxul produsului $\overline{E}' \times \overline{H}'^*$ este nul pe suprafața Σ deoarece \overline{E}' este normal pe conductorul perfect; va rezulta:

$$(G4) \quad \int_{\Sigma} (\overline{E}' \times \overline{H}'^*) \cdot \overline{n} \cdot d\overline{A} + j\omega \int_{\Omega} (\mu \overline{H}' \cdot \overline{H}'^* - \varepsilon \overline{E}' \cdot \overline{E}'^*) dv + \gamma \int_{\Omega} \overline{E}' \cdot \overline{E}'^* dv = 0$$

unde \overline{n} , este versorul normalei la suprafața Σ .

Se poate arăta că primul termen al expresiei (G4) este nul. Pentru aceasta se notează cu G o suprafață plană oarecare și cu C conturul ce o limitează (adică $C = Fr G$). Pe acest contur C mediul este perfect conductor, deci componenta tangențială a lui \overline{E}' este nulă.

Dacă se ia un sistem de coordonate triortogonal ($0xyz$) astfel încât planul xy să cuprindă conturul C , atunci axa z este orientată după normala la Σ (deci $\overline{k} \equiv \overline{n}$). În aceste condiții, componentele E'_z și H'_z sunt nule prin ipoteză (adică pe suprafața Σ componentele normale ale câmpului sunt date, deci nu pot exista $\overline{n} \cdot \overline{E}'$ și $\overline{n} \cdot \overline{H}'$), astfel că:

$$\partial E'_{y'} / \partial x = \partial E'_{x'} / \partial y \text{ și } \partial H'_{y'} / \partial x = \partial H'_{x'} / \partial y.$$

Considerându-se suprafața G cu conexiune simplă, se poate scrie:

$$\overline{E}' = \nabla \varphi \text{ și } \overline{H}' = \nabla \psi,$$

unde $\varphi = \varphi(x, y)$ și $\psi = \psi(x, y)$. Notându-se cu \overline{m} versorul normal la C și cuprins în planul xy , va rezulta atunci versorul tangentei la C ca fiind $\overline{t} = \overline{k} \times \overline{m}$ (căci, așa cum sa mai precizat, versorii \overline{k} și \overline{n} coincid). Cu aceste precizări rezultă că primul termen al expresiei (G4) se mai poate scrie și în forma:

$$(G5) \quad \int_G (\overline{E}' \times \overline{H}'^*) \cdot \overline{n} \cdot d\overline{A} = \int_G (\nabla \varphi)(\nabla \psi^*) \cdot \overline{n} \cdot d\overline{A} = \int_G (\overline{k} \times \nabla \varphi) \nabla \psi^* \cdot d\overline{A} = \int_G [\nabla \times (\varphi \overline{k})] \nabla \psi^* \cdot d\overline{A} = \\ = \int_G \nabla [\psi^* \nabla \times (\varphi \overline{k})] \cdot d\overline{A} = \int_C (\psi^* \nabla \varphi)(\overline{k} \times \overline{m}) \cdot d\overline{l} = \int_C \psi^* \nabla \varphi \cdot d\overline{l}.$$

unde $d\overline{l}$ este elementul de curbă C orientat (adică $d\overline{l} = \overline{t} \cdot dl$).

Dar produsul $\overline{E}' \cdot \overline{t}$ (adică componenta tangențială la C) este nul și –ca urmare– expresia (G5) este egală cu zero, adică primul termen al ecuației (G4) este nul (așa cum s-a afirmat inițial).

Atunci ecuația (G4) rămâne în doi termeni, unul real și altul imaginar, care –fiecare în parte– trebuie să fie egal cu zero, așa cum arată ecuația (G4); rezultă:

$$\gamma \int_{\Omega} \overline{E}' \cdot \overline{E}'^* dv = 0$$

și cum $\gamma > 0$, înseamnă că $\overline{E}' = 0$ atunci și $\overline{H}' \equiv 0$, pentru că atât $\gamma > 0$ cât și $\mu > 0$. În acest fel rezultă că nu este posibil (așa cum s-a admis inițial) să mai existe, adițional, și un câmp \overline{E}' , \overline{H}' , în Ω ceea ce înseamnă că teorema de unicitate este demonstrată, pentru cazul secțiunilor $G \subset \Omega$ cu conexiune simplă.

În cazul în care G este cu conexiune multiplă, de exemplu dublă, înseamnă că suprafața G va fi limitată de două contururi C_i (în interior) și C_{ex} (în exterior). Raționamentul aplicat în cazul lui G simplu conex, va fi valabil și dacă G este dublu conex (sau multiplu conex), dacă se va putea arăta că funcțiile φ și ψ sunt monodrome (adică uniforme, în accepțiunea teoriei suprafețelor de

acoperire și în teoria funcțiilor analitice cu valori în spații Banach complexe). Funcția φ satisface această condiție, deoarece componenta tangențială a lui \bar{E}' fiind nulă pe C_i (adică $\bar{t}_i \cdot \bar{E}' = 0$), circulația ei pe acest contur este nulă. Dar și funcția ψ este monotonă, deoarece –conform legii circuitului magnetic– $\int_{C_i} \bar{H}' \cdot d\bar{l} = \left(\sum_i i + \partial \bar{D}' / \partial t \right)_G$ este nulă căci $\sum i|_G = 0$ și $\partial \bar{D}' / \partial t|_G = 0$ prin ipoteza teoremei.

Concluziile teoremei lui Dario Graffi. Din această teoremă de unicitate rezultă că într-un ghid de unde cu secțiune transversală simplu conexă există numai unde transversal-electrice (notate generic cu TE), caracterizate prin $E_z = 0$ și $H_z \neq 0$, sau unde transversal-magnetice (notate cu TM) caracterizate prin $H_z = 0$ și $E_z \neq 0$. În cazul secțiunilor multiplu conexe, cum este –de exemplu– un cablu coaxial (cu un conductor central izolat și înconjurat de o tresă cilindrică conductoare), pot exista și unde TEM (adică transversal-electromagnetice), caracterizate prin: $E_z = 0$ și $H_z = 0$. În toate cazurile, axa z coincide cu axa ghidului de unde.

Teorema lui Graffi mai arată că într-un ghid de undă cu dielectric cu pierderi, câmpul este determinat de componentele paralele cu versorul \bar{k} al axei z , în două plane normale pe axa ghidului.

În principiu, se pot da \underline{E}_z și \underline{H}_z , cazul general ($\underline{E}_z \neq 0$ și $\underline{H}_z \neq 0$) obținându-se din suprapunerea câmpurilor ce corespund modurilor TE și TM .

Propagarea undelor electromagnetice în ghiduri

Procesul de propagare al undelor electromagnetice în ghidurile de undă se face prin integrarea ecuației undelor, scrisă sub forma (7.5.A), considerându-se legile de material ca fiind liniare:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad \text{și} \quad \bar{J} = \gamma \bar{E} \Rightarrow \{\varepsilon, \mu, \gamma\} = \text{const.},$$

adică un mediu uniform și liniar, iar condițiile pe frontieră presupunându-se ghidul alcătuit dintr-un conductor perfect astfel că aceste condiții pe suprafața interioară Σ a ghidului capătă forma:

$$\bar{E} \times \bar{n} = 0 \quad \text{și} \quad \bar{H} \cdot \bar{n} = 0, \quad (G6)$$

unde \bar{n} este versorul normalei la Σ (condiții care înseamnă: $E_t = 0$ și $H_n = 0$, adică câmpul electromagnetic are componentele tangențială a intensității câmpului electric și normală a intensității câmpului magnetic nule).

Dacă dielectricul din interiorul ghidului de unde nu este perfect (adică are pierderi), se lucrează cu permitivitatea absolută complexă. Considerându-se, totuși, $\gamma = 0$ și noîndu-se componentele câmpului electromagnetic cu \underline{f} , adică:

$$\underline{f} = \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z\},$$

ecuația undelor (7.5.A) se scrie sub forma $\square \underline{f} = 0$, ceea ce înseamnă că fiecare componentă a fiecărui vector al câmpului electromagnetic satisface –în condițiile date– ecuația undelor (7.5.A).

În continuare se vor cerceta numai undele TM , ce sunt caracterizate prin aceea că pretutindeni în ghid $H_z = 0$, celelate unde (TE și TEM) studiindu-se în același mod.

Pentru a se putea stabili o proprietate esențială a ghidurilor de unde în mod TM (caz în care $E_z \neq 0$) este necesar să se pornească de la ecuația undelor referitoare la componenta E_z , adică de la:

$$\square \underline{E}_z = 0 \rightarrow \Delta_z \underline{E}_z - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E}_z = 0, \quad (G7)$$

unde w este viteza de propagare a undelor TM pe direcția axei ghidului, adică a axei z . În interiorul ghidului există un câmp ce variază sinusoidal în timp, cu pulsația ω , care propagându-se în ghid are soluția (în raport cu un sistem de referință cartezian $Oxyz$) de forma (v. și § 9.1.3):

$$(G8) \quad \underline{E}'_z = \text{Re} \left[\underline{E}'_z \exp j(\omega t - \alpha z) \right],$$

unde Re este operatorul ce exprimă partea reală a reprezentării în planul complex, \underline{E}'_z este fazorul componenteii după axa z a intensității câmpului magnetic din ghidul de unde (v. § 9.1.3), j – unitatea imaginară ($j^2 = -1$) și α este faza inițială (la $t=0$) a argumentului funcției sinusoidale prin care se poate exprima componenta E_z , cu înțeles de viteză de fază în lungul axei z (exprimabilă) în rad/m .

Raportându-se interiorul ghidului de unde la un sistem de coordonate cilindrice (Nicolau, Edm., 1972), ecuația (G7) devine:

$$(G9) \quad \Delta_2 \underline{E}'_z + \left(\frac{\omega^2}{w^2} - \alpha^2 \right) \underline{E}'_z = 0,$$

ce are condițiile pe frontieră:

$$(G9') \quad E'_z(x, y) = 0.$$

Notîndu-se cu $h^2 = \omega^2/w^2 - \alpha^2$, ecuația (G9) devine:

$$(G10) \quad \Delta_2 \underline{E}'_z + h^2 \underline{E}'_z = 0.$$

Integrarea ecuației (G10) este echivalentă cu problema rezolvării ecuației integrale:

$$(G10') \quad \underline{E}'_z(x, y) = h^2 \int_{\Sigma} G(x, y; \xi, \eta) \underline{E}'_z(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

în care G este funcția lui Green corespunzătoare problemei (G9) și (G9'), ξ și η sunt coordonatele cilindrice interioare, iar Σ – secțiunea transversală prin ghidul de unde.

În teoria ecuațiilor cu operatori (v. Ecuațiile fizicii matematice) se arată că $h^2 = k^2 - \alpha^2$ admite numai anumite valori proprii, rezultînd – în general – că $\alpha^2 = \omega^2/w^2 - h^2$. Atunci, fie h_m^2 valoarea minimă pe care o poate lua h^2 .

Pentru a exista un transport de energie în interiorul ghidului de unde este necesar ca α să fie real. Aceasta înseamnă că ghidul se comportă ca un filtru trece sus, neavînd loc la o transmitere de putere decât pentru $\omega > wh_m$. Concluzia este că *ghidurile de undă excitate în mod TM se comportă ca un filtru trece sus, indiferent de forma secțiunii*, pentru care frecvența:

$$(7.54) \quad f_{cr} = wh_m / (2\pi),$$

se numește *frecvența critică a ghidului* (la această frecvență $\alpha = 0$). În mod similar se arată că și ghidurile de undă excitate în modul TE se comportă ca filtre trece sus, indiferent de forma secțiunii.

Cunoscîndu-se \underline{E}_y , prin rezolvarea ecuației (G7), celelalte componente se calculează cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell – scrise pentru un sistem cartezian (ținînd seama de expresia fazorilor) – rezultînd:

$$(G11) \quad \partial \underline{E}_z / \partial y + j\alpha \underline{E}_y = -j\omega\mu \underline{H}_x$$

$$(G12) \quad -j\alpha \underline{E}_x - \partial \underline{E}_z / \partial x = -j\omega\mu \underline{H}_y,$$

$$(G13) \quad \partial \underline{E}_y / \partial x - \partial \underline{E}_x / \partial y = 0,$$

$$(G14) \quad -j\alpha \underline{H}_y = j\omega\varepsilon \underline{E}_x,$$

$$(G15) \quad j\alpha \underline{H}_x = j\omega\varepsilon \underline{E}_y,$$

$$(G16) \quad \partial \underline{H}_y / \partial x - \partial \underline{H}_x / \partial y = j\omega \underline{E}_z,$$

cu observația că unitatea imaginară j este, în planul complex, un operator de rotație cu $\pi/2$ (care face ca orice fazor pe care îl înmulțește să se rotească cu $\pi/2$ în sens trigonometric). Eliminîndu-se \underline{H} între relațiile (G12) și (G14) se obține:

$$\underline{E}_x = j p \partial \underline{E}_z / \partial x, \quad (7.55)$$

$$p = \alpha / (\alpha^2 + h^2) = \alpha / q.$$

Eliminându-se \underline{H}_x între relațiile (G11) și (G15) rezultă :

$$\underline{E}_y = -j(\alpha/q) \partial \underline{E}_z / \partial y. \quad (7.56)$$

Expresia componentei \underline{H}_x rezultă din relațiile (G15) în care se înlocuiește \underline{E}_y cu termenul drept al egalității (7.56), adică:

$$\underline{H}_x = \frac{\omega \epsilon}{\alpha} \underline{E}_y \text{ sau } \underline{H}_x = -j \left(\frac{\omega \epsilon}{q} \right) \partial \underline{E}_z / \partial y, \quad (7.57)$$

iar din relația (G14), în care se înlocuiește cu termenul drept al primei egalități (7.55), rezultă expresia lui \underline{H}_y și anume:

$$\underline{H}_y = -\frac{\omega \epsilon}{\alpha} \underline{E}_x \text{ sau } \underline{H}_y = -j \left(\frac{\omega \epsilon}{q} \right) \partial \underline{E}_z / \partial x. \quad (7.58)$$

Se constată, deci, că expresia lui \underline{E}_z –dată de relațiile (G8) și (G10'), împreună cu formulele (7.55)...(7.58)– permit să se determine toate componentele câmpului electromagnetic din ghidul de unde, cu precizarea că ele trebuie să verifice condițiile la limită (G6). Însă, din contextul studiului, nu rezultă nici o situație în care (7.55)...(7.58) satisfac condițiile (G6), mai ales se știe că nu în orice secțiune pot exista unde $TE_{m,n}$ sau $TM_{m,n}$, pentru orice versori $\bar{m} \epsilon(x,y)$ și \bar{n} (normalei la suprafețele plane Σ ce limitează domeniul ghidului de unde).

În tratatul Nicolau, Edm., 1972, se arată o condiție suficientă care conduce la soluții \bar{E} și \bar{H} (ce pot exista în ghidurile de undă), în secțiuni generale în care să fie posibilă existența unor unde de tip $TE_{m,n}$ sau $TM_{m,n}$. În acest scop se utilizează așa-numitele *potențiale ale lui Brognis* (v. Nicolau, Edm., 1972) cu ajutorul cărora se ajunge la următoarea condiție suficientă de compatibilitate cu condițiile pe frontieră (G6):

„într-un ghid de undă la care secțiunea transversală (normală pe axa z a ghidului) este limitată prin curbele C_j și C_k (la care versorii \bar{j} și \bar{k} sunt normali) o condiție suficientă pentru existența în ghid a modurilor de undă TM este ca funcția potențialelor lui Brognis să fie separabilă și pe frontieră trebuind ca potențialele Brognis să fie nule (pe curbele C_j și C_k)”.

Soluțiile (7.55)...(7.58) pentru undele TM , la un ghid de undă cu h dat, cu dimensiunea $[L]^{-1}$, viteza de fază α , cu dimensiunea $[\text{rad}/L]$, este nulă pentru frecvența critică:

$$f_{cr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h^2}{\epsilon \mu}} \Leftarrow \alpha = 0. \quad (7.59)$$

Aceleași soluții arată că pentru undele TM ghidul de undă cu secțiune transversală circulară (la o arie a secțiunii dată) conduce la o frecvență critică minimă.

7.1.10. Cavități rezonante

Prin *cavitate rezonantă* (numită și *endovibratoar*, *rezonator* sau –încă– *rumbatron*) se înțelege orice incintă ce închid un domeniu simplu sau multiplu convex, mărginită de un înveliș conductor, în care se pot întreține oscilații electromagnetice sub formă de unde spațiale staționare.

Caracteristici generale

Mediul din interiorul endovibratorului (în general aerul) fiind un foarte bun izolat, pierderile de energie ale undelor electromagnetice staționare se datoresc exclusiv conductivității

finite a pereților și sunt foarte mici. De aceea, cavitatea poate fi sediul unor oscilații întreținute suficient de intense numai pentru frecvențe foarte apropiate de anumite frecvențe de rezonanță, practic egale cu frecvențele proprii ale oscilațiilor libere (mecanice) ale incintei.

Într-o cavitate dată pot exista mai multe „configurații” ale câmpului electric și magnetic (mai multe „moduri” de oscilații – unde: 100 , 010 , 001 etc.) fiecareia corespunzându-i o anumită frecvență proprie. Mulțimea frecvențelor proprii alcătuiește un spectru discret, mărginit inferior de o frecvență limită f_0 (frecvența fundamentală), fără ca frecvențele ce alcătuiesc acest spectru să fie neapărat multiple întregi ale frecvenței fundamentale. Pentru forme simple ale cavității, frecvențele proprii (sau/și lungimea de undă, λ , corespunzătoare) se pot calcula cu mare precizie, presupunând însă pereții perfect conductori și căutând soluțiile armonice în timp ale ecuațiilor lui Maxwell care satisfac condițiile la limită pe fața interioară a pereților (adică anularea componentei tangențiale a intensității câmpului electric și a componentei normale a intensității câmpului magnetic).

Notarea modurilor de oscilații se face, de obicei, cu trei indici, fiecare dintre aceștia indicând numărul de semiunde staționare care există în lungul curbei de coordonate corespunzătoare. De exemplu, modul fundamental este 100 , 010 sau 001 .

Pentru întreținerea oscilațiilor cavității, aceasta se excită din exterior prin circuite electrice pulsatorii, linii sau ghiduri de unde, prin fluxuri de electroni etc.

Determinarea câmpurilor (electric și magnetic) din cavitățile rezonante

Se presupune că endovibratorul este delimitat de pereți conductori, iar spațiul interior este „umplut” cu un material de permitivitate absolută ϵ și permeabilitate absolută μ constante (care nu depind nici de punct și nici de timp). În plus, se mai consideră că mediul este izotrop, cu conductivitate electrică nulă ($\gamma = 0$), lipsit de viscozitate electrică și de proprietăți ereditare (se consideră că polarizația electrică și magnetizația temporare sunt liniare în raport cu intensitățile câmpului electric și –respectiv– magnetic). Oscilațiile („vibrațiile”) câmpului electromagnetic din cavitate sunt considerate pur sinusoidale (armonice).

În aceste condiții, fiecare componentă a intensității câmpului electric și a intensității câmpului magnetic (într-un sistem de coordonate trirectangulare), considerate ca elemente ale unei mulțimi f , satisface ecuația undelor (7.5A) și anume $\square f = 0$. Astfel, în coordonate trirectangulare (u_1, u_2, u_3), ecuațiile câmpului electromagnetic iau forma cunoscută din paragraful 1.4.3. – ecuațiile (1.105):

$$(CR 1) \quad \begin{aligned} & \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (h_k E_k) - \frac{\partial}{\partial u_k} (h_j E_j) \right] + \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0, \\ & \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (h_k H_k) - \frac{\partial}{\partial u_k} (h_j H_j) \right] - \frac{\partial D_i}{\partial t} = J_i, \\ & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} A_i \right) = h_1 h_2 h_3 a, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

în care h_1, h_2, h_3 sunt coeficienții lui Lamé (unități locale de lungime ce definesc distanța elementară dintre două puncte din câmp infinitezimal vecine), iar dacă $a \equiv \rho \Rightarrow A \equiv D$ și dacă $a \equiv 0 \Rightarrow A \equiv B$. Primele două ecuații din (CR 1) reprezintă, fiecare, câte trei ecuații ce se obțin prin permutarea ciclică a indicilor i, j, k (între valorile 1, 2 și 3), ele fiind așa-numitele ecuații de evoluție (v. § 1.4.3), în timp ce a treia ecuație din relațiile (CR 1) este o ecuație de stare.

Se vor considera câmpurile electromagnetice care pot exista într-o cavitate rezonantă caracterizată prin aceea că toți coeficienții lui Lamé ($h_i, i=1,2,3$) sunt independenți de coordonata u_1 , precum și componentele câmpului ($E_j, H_j, j=1,2,3$) sunt independente de u_1 . Atunci, se va

căuta un astfel de câmp în cavitatea rezonantă, *considerată cilindrică*, încât câmpul electric să aibă o singură componentă și anume \underline{E}_1 .

În aceste condiții, prima ecuație de evoluție din (CR1) conduce la rezultatul $\underline{H}_1=0$, celelalte două componente fiind:

$$\begin{aligned} \underline{H}_2 &= -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{h_3 h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \underline{E}_1), \\ \underline{H}_3 &= \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \underline{E}_1). \end{aligned} \quad (\text{CR2})$$

Relațiile (CR2) verifică prima ecuație de evoluție din (CR1), în care –dacă se introduc expresiile lui H_2 și H_3 – dă:

$$\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_3} (h_1 \underline{E}_1) - \frac{\partial^2}{\partial u_3 \partial u_2} (h_1 \underline{E}_1) = 0,$$

deoarece h_1 și \underline{E}_1 sunt suficient de regulați. A doua ecuație de evoluție din (CR1) este și ea verificată prin aceea că primul termen din membrul stâng este nul (deoarece nici h_1 , nici ε din $D=\varepsilon E$, și nici \underline{E}_1 nu depind de coordonata u_1), iar ceilalți doi termeni sunt nuli și ei (deoarece $\underline{E}_2=0$ și $\underline{E}_3=0$). A treia ecuație de evoluție din (CR1), în care se înlocuiesc \underline{H}_2 și \underline{H}_3 cu expresiile lor din (CR2), devine:

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \underline{E}_1) \right] + \frac{\partial}{\partial u_3} \left[\frac{h_3}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \underline{E}_1) \right] \right\} + k^2 \underline{E}_1 = 0, \quad (\text{CR3})$$

în care s-a utilizat notația $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$. Dacă –în particular– se consideră $h_1 = 1$ (ceea ce corespunde unui sistem de coordonate cilindric – v. § 1.4.3), atunci ecuația care să se exprime componenta \underline{E}_1 se reduce la forma:

$$(\Delta_2 + k^2) \underline{E}_1 = 0, \quad (7.60)$$

unde Δ_2 este laplaceanul bidimensional (pentru h_2 și h_3).

Din relația (7.60) rezultă că în cavitățile rezonante cilindrice (așa cum s-a considerat prin ipoteză) pot exista câmpuri electromagnetice ale căror componente electrice se reduc la una singură –și anume la \underline{E}_1 luată de-a lungul axului cilindrului– și ale căror componente magnetice se reduc la două: \underline{H}_2 și \underline{H}_3 ambele perpendiculare pe axul cilindrului și perpendiculare între ele.

Câmpul electric din cavitatea rezonantă cilindrică, $\underline{E} = \underline{E}_1$, satisface ecuația (7.60), cu condiția pe frontieră (la limită) $\underline{E}(P) = 0 \Leftrightarrow \forall P \in \Sigma$. Câmpul magnetic, $\underline{H} = \bar{i} \underline{H}_2 + \bar{j} \underline{H}_3$ (unde versorii \bar{i} și \bar{j} formează un plan perpendicular pe axa cilindrului rezonant), se deduce din \underline{E}_1 prin formulele (CR2) și condiția pe frontieră $\bar{H}(P) \cdot \bar{n} = 0$, adică $H_n(P) = 0 \Leftrightarrow \forall P \in \Sigma$, unde \bar{n} este versorul normalei la suprafața Σ și H_n este componenta normală a intensității câmpului magnetic în orice punct P al acestei suprafețe Σ . Prin urmare, pentru a determina câmpul electric și magnetic într-un caz (de cavitate rezonantă) dat, se izolează ecuația cu derivate parțiale (7.60), în care $\underline{E}_1 = E_1(u_2, u_3)$, cu condiția pe frontieră $E|_{\Sigma} = 0$ și apoi –prin ecuațiile (CR2)– se deduc \underline{H}_2 și \underline{H}_3 rămânând să se stabilească dacă, astfel dedus, câmpul magnetic satisface condițiile la limită pentru \underline{H} . În lucrarea Nicolau, Edm. 1972 se demonstrează că soluțiile date de ecuațiile (7.60) și (CR2) verifică întotdeauna condițiile la limită $E|_{\Sigma} = 0$ și $H_n|_{\Sigma} = 0$ dacă secțiunea transversală a cavității rezonante este cilindrică sau dreptunghiulară.

În continuare, se va considera o cavitate cilindrică cu volumul dat, adică $v = Ah$ (unde A este aria unei baze și h înălțimea cilindrului luată de-a lungul axei u_1). Deoarece soluția ecuației (7.60)

și apoi ale ecuațiilor (CR2) este independentă de valoarea lui h , atunci acesta se poate lua oricât de mic, rezultând –în consecință– o arie A oricât de mare. Dar creșterea lui A extrage după sine scăderea frecvenței critice, însă studiul problemei este simplificat de faptul că \underline{E}_1 satisface ecuația care descrie și vibrația membranelor; spre exemplu, în cazul unei membrane circulare se poate scrie:

$$(CR4) \quad E_1 = \sum_{n=1} \sum_{m=0} (A_m^n \cos m\varphi + B_m^n \sin m\varphi) J_m(\rho_m^n \frac{r}{r_0}),$$

în care m și n sunt întregi pozitivi, $J_m(x)$ este funcția Bessel de specia întâi, de ordinul m și de argument $x = \rho_m^n r / r_0$, în care r_0 este raza cercului de bază al cavității rezonante cilindrice circulare, iar ρ_m^n este nulul pozitiv de ordinul n al funcției Bessel de specia întâi și ordinul m .

Se poate demonstra că în acest caz (CR4), ecuația (7.60) este satisfăcută dacă:

$$(CR5) \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\rho_m^n}{r_0},$$

ceea ce înseamnă că dacă se ia o cavitate cilindrică circulară de volum dat, prin mișcarea înălțimii sale aria bazei crește oricât de mult și deci raza r_0 poate fi oricât de mare, obținându-se pulsații proprii ω_0 oricât de mici. Rezultă, astfel, că la cavitățile cilindrice de volum dat, se pot obține frecvențe proprii de rezonanță f_0 oricât de mici prin simpla aplatizare (oricât de mult) a cilindrului. În acest fel s-a ajuns la cavitățile rezonante acordabile (v. fig. 7.26).

Proprietăți de ortogonalitate ale câmpului electromagnetic din cavitățile rezonante

Câmpul magnetic din cavitățile rezonante prezintă proprietatea că între intensitățile câmpului electric \underline{E}_m și \underline{E}_n , pe de o parte, și intensitățile câmpurilor magnetice \underline{H}_m și \underline{H}_n (pe de altă parte), care corespund unor pulsații de rezonanță diferite ω_m și respectiv ω_n , există în orice punct al volumului Ω închis de cavitate, o relație de ortogonalitate care se poate exprima prin următoarele modele cu produse scalare:

$$(CR6) \quad \int_{\Omega} \underline{E}_m \cdot \underline{E}_n dv = 0 \Rightarrow m \neq n,$$

$$(CR7) \quad \int_{\Omega} \underline{H}_m \cdot \underline{H}_n dv = 0 \Rightarrow m \neq n$$

și –în anumite situații– există ortogonalitate și între cele două câmpuri, exprimabilă prin:

$$(CR8) \quad \int_{\Omega} \underline{E}_m \cdot \underline{H}_n dv = 0 \Rightarrow m \neq n,$$

indicii m și n arătând ce pulsații au câmpurile cu aceiași indici.

Pentru cavitățile la care forma lor este astfel încât să aibă o pulsație proprie de rezonanță ω_m , starea electrică și magnetică a mediului este descrisă de forma locală a legilor inducției electromagnetice și ale circuitului magnetic, scrie sub forma reprezentării în planul complex:

$$(CR9) \quad \nabla \times \underline{E}_m = -j\omega \mu \underline{H}_m,$$

$$(CR10) \quad \nabla \times \underline{H}_m = j\omega \gamma \underline{E}_m,$$

pentru situația în care mediul este izotrop și nedisipativ. Dacă mediul este și omogen, se poate separa câmpul electric de cel magnetic, rezultând:

$$(CR11) \quad \nabla \times \nabla \times \underline{E}_m = k_m^2 \underline{E}_m,$$

$$(CR12) \quad \nabla \times \nabla \times \underline{H}_m = k_m^2 \underline{H}_m,$$

în care s-a folosit notația : $k_m^2 = \omega_m^2 \epsilon \mu$.

Considerându-se că pereții (învelișul interior al cavității vibratoare) reprezintă un conductor perfect (la care, deci, $\gamma \rightarrow \infty$), condițiile pe frontieră sunt:

$$\overline{\underline{E}} \times \overline{\underline{n}} = 0 \quad \text{și} \quad \overline{\underline{H}} \cdot \overline{\underline{n}} = 0, \quad (\text{CR13})$$

unde $\overline{\underline{n}}$ este versorul normalei la suprafața $\Sigma = \text{Fr } \Omega$, ceea ce înseamnă că Σ delimitează spațiul Ω al cavității rezonante.

Presupunându-se că rezonatorul admite două frecvențe proprii de rezonanță, ω_m și ω_n , atunci din relația (CR9) rezultă (admițându-se $\gamma \rightarrow \infty$):

$$\int_{v_\Omega} \overline{\underline{H}}_m \cdot \overline{\underline{H}}_n \, dv = \frac{-1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \int_{v_\Omega} (\nabla \times \overline{\underline{E}}_m) \cdot (\nabla \times \overline{\underline{E}}_n) \, dv, \quad (\text{CR14})$$

unde v_Ω este volumul domeniului Ω închis de cavitatea rezonantă.

Cunoscându-se identitatea (v. § 9.1.2):

$$\int_{v_\Omega} (\nabla \times \overline{\underline{E}}_m) \cdot (\nabla \times \overline{\underline{E}}_n) \, dv \equiv \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m (\nabla \times \nabla \times \overline{\underline{E}}_n) \, dv + \int_{\Sigma} [\overline{\underline{E}}_m \times (\nabla \times \overline{\underline{E}}_n)] \cdot \overline{\underline{n}} \, dA,$$

care se bazează și pe aplicarea formulei lui Gauss-Ostrograski (9.20), relația (CR14) devine:

$$\int_{v_\Omega} \overline{\underline{H}}_m \cdot \overline{\underline{H}}_n \, dv = \frac{-1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \left\{ \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m (\nabla \times \nabla \times \overline{\underline{E}}_n) \, dv + \int_{\Sigma} [\overline{\underline{E}}_m \times (\nabla \times \overline{\underline{E}}_n)] \cdot \overline{\underline{n}} \, dA \right\}. \quad (\text{CR15})$$

Ultimul termen al relației (CR15), conținând un dublu produs vectorial, se poate scrie și în forma:

$$\int_{\Sigma} [\overline{\underline{E}}_m \times (\nabla \times \overline{\underline{E}}_n)] \cdot \overline{\underline{n}} \, dA = \int_{\Sigma} (\nabla \overline{\underline{E}}_n) \cdot (\overline{\underline{E}}_m \times \overline{\underline{n}}) \, dA = 0, \quad (\text{CR16})$$

deoarece –conform primei condiții la limită din (CR13)– produsul vectorial $\overline{\underline{E}}_m \times \overline{\underline{n}} = 0$. Ținându-se seama de relația (CR11) și de semnificația lui k_m^n , expresia (CR15), în condițiile date de (CR16), devine:

$$\begin{aligned} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{H}}_m \cdot \overline{\underline{H}}_n \, dv &= \frac{-1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m (\nabla \times \nabla \times \overline{\underline{E}}_n) \, dv = \frac{-1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m \cdot (k_n^2 \overline{\underline{E}}_n) \, dv = \\ &= -\frac{\omega_n^2 \epsilon \mu}{\omega_m \omega_n \mu^2} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m \cdot \overline{\underline{E}}_n \, dv = -\frac{\omega_n \epsilon}{\omega_m \mu} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m \cdot \overline{\underline{E}}_n \, dv. \end{aligned} \quad (\text{CR17})$$

Urmându-se același procedeu se obține:

$$\int_{v_\Omega} \overline{\underline{H}}_n \cdot \overline{\underline{H}}_m \, dv = -\frac{\omega_m \epsilon}{\omega_n \mu} \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_n \cdot \overline{\underline{E}}_m \, dv. \quad (\text{CR18})$$

Deoarece produsul scalar este comutativ și $\omega_m \neq \omega_n$ (prin ipoteză) din compararea relațiilor (CR17) și (CR18) rezultă imediat:

$$\int_{v_\Omega} \overline{\underline{H}}_m \cdot \overline{\underline{H}}_n \, dv = 0 \quad \text{și} \quad \int_{v_\Omega} \overline{\underline{E}}_m \cdot \overline{\underline{E}}_n \, dv = 0.$$

adică tocmai condițiile (CR6) și (CR7) de ortogonalitate între ele a câmpului electric la pulsații diferite (pe de o parte) și a celui magnetic ($\overline{\underline{H}}_m \perp \overline{\underline{H}}_n$ la pulsații proprii, de rezonanță, $\omega_m \neq \omega_n$), pe de altă parte.

În ceea ce privește condiția (CR8), de ortogonalitate între cele două câmpuri ($\overline{\underline{E}}_m \perp \overline{\underline{E}}_n$ la pulsații $\omega_m \neq \omega_n$), ea poate fi demonstrată în mod similar. Astfel:

$$(CR19) \quad \int_{v_\Omega} \overline{H}_m \cdot \overline{E}_n \, dv = \frac{1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \int_{v_\Omega} (\nabla \times \overline{E}_m) \cdot (\nabla \times \overline{E}_n) \, dv = \\ = \frac{1}{\omega_m \omega_n \mu^2} \left[\int_{v_\Omega} \overline{E}_m (\nabla \times \nabla \times \overline{H}_n) \, dv + \int_{\Sigma} \overline{E}_m (\nabla \times \overline{H}_n) \cdot \overline{n} \, dA \right].$$

Datorită condiției pe frontieră (CR13) – a doua relație, al doilea termen – ce conține produsul scalar $\overline{H}_n \cdot \overline{n}$ (care este egal cu zero) se anulează, astfel că, introducându-se în (CR19) expresia (CR12), va rezulta:

$$(CR20) \quad \int_{v_\Omega} \overline{H}_m \cdot \overline{E}_n \, dv = \frac{1}{\omega_m \omega_n \varepsilon \mu} \int_{v_\Omega} \overline{E}_m (\nabla \times \nabla \times \overline{H}_n) \, dv = \frac{1}{\omega_m \omega_n \varepsilon \mu} \int_{v_\Omega} \overline{E}_m \cdot (k_n^2 \overline{H}_n) \, dv = \\ = \frac{\omega_n^2 \varepsilon \mu}{\omega_m \omega_n \varepsilon \mu} \int_{v_\Omega} \overline{E}_m \cdot \overline{H}_n \, dv = \frac{\omega_n}{\omega_m} \int_{v_\Omega} \overline{E}_m \cdot \overline{H}_n \, dv.$$

Prin comutarea produsului scalar $\overline{H}_m \cdot \overline{E}_n = \overline{E}_n \cdot \overline{H}_m$ rezultă din (CR20) că (v. § 9.1.2):

$$(CR21) \quad \int_{v_\Omega} \overline{E}_n \cdot \overline{H}_m \, dv = \frac{\omega_m}{\omega_n} \int_{v_\Omega} \overline{H}_n \cdot \overline{E}_m \, dv - \frac{j}{\omega_n} \int_{\Sigma} (\overline{H}_n \times \overline{H}_m) \cdot \overline{n} \, dA.$$

Comparându-se între ele ultimele două relații, (CR20) și (CR21), reiese că dacă:

$$(CR22) \quad \int_{\Sigma} (\overline{H}_m \times \overline{H}_m) \cdot \overline{n} \, dA = 0,$$

atunci:

$$(CR23) \quad \int_{v_\Omega} \overline{E}_m \cdot \overline{H}_n \, dv = 0,$$

care arată în ce condiții – și anume (CR22) – este valabilă relația (CR23), identică cu (CR8), de ortogonalitate între ele a câmpului electric și a celui magnetic la pulsații proprii de rezonanță diferite ($\omega_m \neq \omega_n$).

Cavități rezonante tipice

În aplicațiile practice, cavitățile rezonante se folosesc ca circuite oscilante la frecvențe foarte înalte (mii de gigaherți – unde decimetrice sau mai scurte, la frecvențe mai joase dimensiunile minime ale cavității – corespunzătoare frecvenței fundamentale – fiind prea mari), unde prezintă avantaje față de alte circuite (de exemplu circuite oscilante R, L, C , cu bobine și condensatoare – v. § 8.8.2): construcție simplă, factor de calitate Q (v. § 8.7.2) mare, impedanță echivalentă (v. subcap. 8.5) mare etc. În practică se utilizează de obicei oscilațiile în mod fundamental ale cavității rezonante, deoarece la oscilații de ordin superior diferența față de frecvențele proprii este mică și pot apărea oscilații parazite (modurile de ordin superior se utilizează atunci când corespund unor pierderi mai mici, adică unui factor de calitate mai mare). Eliminarea oscilațiilor nedorite se poate obține prin măsuri speciale de precauție ca, de exemplu: prin introducerea unor elemente disipative, de amortizare, dispuse în interiorul cavității astfel încât să nu fie absorbită energia modului de oscilație utilizat.

Factorul de calitate (v. § 8.8.2). La cavitățile rezonante, factorul de calitate Q se definește, la frecvența proprie dată, prin raportul (multiplicat cu 2π) dintre energia câmpului electromagnetic al rezonatorului și energia disipată în cursul unei perioade, fiind practic egală (așa cum se va arăta în paragraful 8.8.2) cu raportul dintre frecvența de rezonanță și lărgimea benzii de frecvențe dată de scăderea amplitudinii la $1/\sqrt{2}$ din cea maximă de la rezonanță, adică la 3dB (v. supcap. 8.8). Factorul de calitate al cavităților rezonante este foarte mare în raport cu cel al altor circuite, fiind de ordinul a 10^4 sau chiar 10^6 (la o cavitate cu înveliș de plumb,

cufundată în heliu lichid) și este cu atât mai mare cu cât este mai mare raportul dintre volumul cavității (v_{Ω}) și aria incintei ($\Sigma = Fr \Omega$).

Rezistența echivalentă la rezonanță. Se notează cu R_0 și pentru o cavitate rezonantă dată „privită” între două puncte ale cavității (de alimentare) și o curbă care le unește (în general o linie de câmp electric), se calculează prin raportul dintre pătratul tensiunii electrice în lungul acelei curbe (între puncte date) și puterea pierdută în cavitate. Ea are valori foarte mari (de ordinul zecilor de megohmi), fiind cu atât mai mare cu cât factorul de calitate este mai mare.

Formele cavităților rezonante. În practică se folosesc numeroase tipuri de rezonatoare în ceea ce privește forma lor, dar care se pot grupa în două: *rezonatoare cu formă complexă* (cu suprafețe închise sub formăde: sferă, cilindru, elipsoid, prismă, tor ș.a.) și *rezonatoare cu adâncituri* (adică având una sau mai multe turtiri spre interior ale suprafeței), așa cum se arată în figura 7.23.

În această figură, pentru fiecare formă, se indică și limitele de câmp: electric – prin linii subțiri continue și magnetic – prin linii întrerupte, ambele corespunzătoare modulului de oscilație fundamental (ele fiind ortogonale, cu $E_{r\Omega}=0$ și $H_{n\Omega}=0$ (așa cum s-a arătat în subcapitolul precedent). Formale tipice sunt: *sferice* (fig. 7.23a, indicat prin secțiuni, deoarece sfera este un corp de rotație), *cilindrice* (fig. 7.23b, indicate tot prin secțiuni în lungul cilindrului: în una se

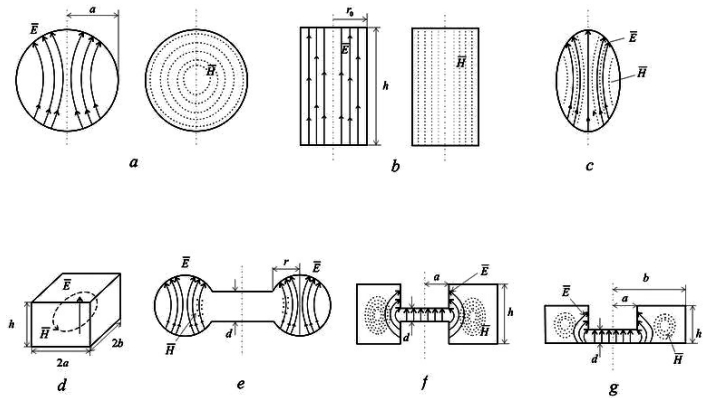


Fig. 7.23

reprezintă câmpul \vec{E} –prin linii, în a doua câmpul magnetic \vec{H} –prin urmele sale/puncte ale vârfului vectorului \vec{H}), *elipsoidale* (fig. 7.23c), *prismatice* (fig. 7.23d), *toroidale-sferice* (fig. 7.23e, care sunt rezonatoare cu două adâncituri), *toroidal- pătratică* (fig. 7.23f, un rezonator cu două adâncituri) și *toroidal-dreptunghiulară* (fig. 7.23g, un rezonator cu o singură adâncitură).

Foarte răspândit în aplicațiile practice, mai ales la frecvențe mai puțin înalte, sunt cavitățile toroidale cu adâncituri (figurile 7.23 e,f,g), la care câmpul electric este concentrat în special în zona adânciturilor, iar cea mai mare parte a câmpului magnetic este repartizată în restul rezonatorului (înconjurând adânciturile). Datorită concentrării energiei electrice și –separat– a celei magnetice în porțiuni diferite ale cavității, rezonatorul toroidal se apropie cel mai mult de circuitele oscilante cu parametri concentrați (R,L,C) dar având un factor de calitate, Q , mult mai mare (peste 5000), care este totuși mai mic decât al altor forme de cavități rezonante.

În tabelul 7.1 sunt indicate caracteristicile câtorva forme de cavități rezonante, în care ρ este rezistivitatea stratului interior al învelișului (de multe ori din argint), $\omega=2\pi f$ este pulsația (respectiv frecvența) oscilațiilor la rezonanță și $\delta = \sqrt{2\rho/\omega}$.

Tabelul 7.1

Caracteristicile unor cavități rezonante uzuale

Forma cavității	Lungime de undă Fundamentală $\lambda_0=c/f_0$	Factorul de calitate Q	Rezistența echivalentă $R_0[\Omega]$
Sferă cu raza a [cm] (fig. 7.23a)	$0,0228 a$	$1,024 a/\delta$	$81,6 a/\delta$
Cilindru circular cu: - raza r_0 [cm] - înălțimea h [cm] (fig. 7.23 b)	$0,0261 r_0$	$1,414 \frac{r_0}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_0}{h}}$	$102 \frac{h}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_0}{h}}$

Forma cavității	Lungime de undă Fundamentală $\lambda_0=c/f_0$	Factorul de calitate Q	Rezistența echivalentă $R_0[\Omega]$
Prismă pătrată cu: - latura a [cm] - înălțimea h [cm] (fig. 7.23 d)	0,0283 a	$1,41 \frac{a}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{h}}$	$91,05 \frac{h}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{h}}$

Cuplajul electric cu exteriorul (adică introducerea într-un montaj a rezonatorului) se realizează în diverse moduri:

- prin trecerea unui fascicul de electroni prin interiorul cavității (fig. 7.24, în care s-a utilizat notația: 1 – grile, 2 – fascicul de electroni), care este folosit în special la cuplajul cavităților

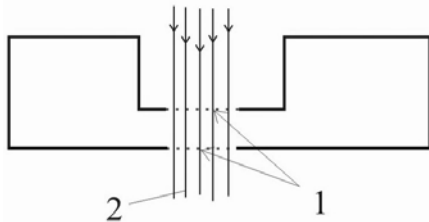


Fig. 7.24

toroidale cu adâncituri deoarece în acest mod de cuplaj trebuie ca timpul de trecere al electronilor prin rezonator să fie scurt în comparație cu perioada oscilațiilor (un astfel de cuplaj este folosit în vechile tuburi electronice numite cliston – v. cursul Microunde);

- cuplajul magnetic (inductiv) care poate fi realizat prin introducerea în cutia rezonantă a unei bucle orientată astfel încât să fie parcursă de liniile de câmp magnetic (fig. 7.25a);

-cuplajul capacitiv care poate fi realizat cu ajutorul unei sonde (un electrod) indus în cavitate astfel încât componenta electrică a câmpului propriu al sondei să fie pe direcția liniilor de câmp din cavitate (fig. 7.25b).

Ultimele două moduri de cuplaj trebuie folosite întotdeauna simultan (împreună), cuplajul

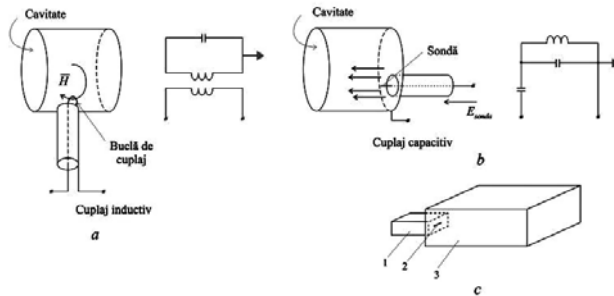


Fig. 7.25

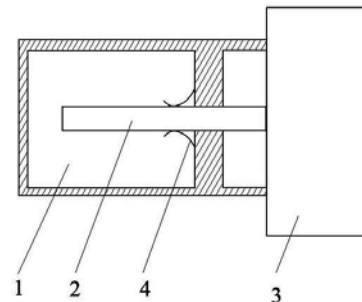


Fig. 7.26

putând fi variat prin rotirea buclei sau modificarea pătrunderii sondei.

La frecvențe mai mari se utilizează cuplajul cu un ghid de unde (prin difracție – v. § 7.18), care se realizează cu ajutorul unei fante 1 prin care ghidul 2 comunică cu interiorul rezonantului 3 (fig. 7.25c).

În practică sunt frecvent utilizate *cavitățile rezonante acordabile*, care sunt în special de formă cilindrică (fig. 7.26).

Cavitățile rezonante acordabile sunt acele rezonatoare a căror frecvență fundamentală poate fi variată de către un operator. În acest scop se modifică dimensiunile geometrice ale cavității sau se introduce un disc metalic mobil în incinta rezonatorului. Pentru variații mici ale frecvenței este necesară o modificare mică a dimensiunilor rezonatorului, ceea ce se poate obține ușor prin executarea unuia din pereții cavității sub forma unei membrane care, datorită flexibilității, poate fi deplasată fin cu ajutorul unui surub. Pentru a se obține variații mai mari ale dimensiunii cavității se folosesc pistoane sau piese care, prin înșurubare mai profundă, micșorează volumul rezonatorului, așa cum se arată în figura 7.26 unde este redată schematic o secțiune printr-un rezonator cilindric cu acord prin piston de contact (în această figură: 1 este incinta rezonatorului

cilindric, 2 – un piston de tip plonjor, 3 – șurub micrometric, uneori etalonat, și 4 – niște resoarte de contact).

7.2. Câmpul electromagnetic în conductori masivi

În cadrul acestui subcapitol se va analiza modul în care se repartizează un câmp electromagnetic produs de surse de câmp variabile în timp (de exemplu o bobină aflată în regim electrocinetic netaționar, determinat de un curent electric cu valoarea instantanee a intensității exprimabilă printr-o funcție sinusoidală) într-un mediu conductor masiv (tridimensional) caracterizat de parametrii de material: ϵ mic, γ relativ mare și $\mu \neq 0$, astfel încât $\gamma \gg \epsilon$, ceea ce înseamnă că $\epsilon \cdot \mu \ll \gamma \cdot \mu$ și că ecuația (7.4), care descrie repartiția câmpului electromagnetic în timp și spațiu într-un domeniu oarecare, ia forma (7.6) specifică mediilor conductoare, adică:

$$\Delta \begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} - \gamma \mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{CEC } 1)$$

care va fi deci aplicată în cazurile tratate în acest sub capitol.

Considerându-se un sistem fizic de forma celui luat ca exemplu în figura 7.27, adică format din corpuri conductoare masive imobile unul față de altul și din câmp electromagnetic variabil în timp, acesta va fi caracterizat de:

- viteze (relative la același sistem de referință) nule ($\overline{w} = 0$);
- intensitatea câmpului electric variabilă în timp și spațiu, de forma $\overline{E}(P, t) = \overline{E}(\overline{r}, t) = \overline{E}(x, y, z, t)$ și
- intensitatea câmpului magnetic variabilă în timp și spațiu, de forma $\overline{H}(P, t) = \overline{H}(\overline{r}, t) = \overline{H}(x, y, z, t)$.

În plus, se consideră conductorii ca fiind liniari, izotropi și omogeni din punctele de vedere fizic și chimic (ceea ce implică faptul că în orice punct P nu există câmp imprimat, deci $E_i = 0$), iar dielectricii existenți în sistem sunt și ei liniari, uniformi, fără polarizație electrică permanentă ($P_p = 0$, în orice punct) și neîncărcați cu sarcină electrică (adică în orice punct din sistemul fizic considerat, densitatea de volum a sarcinii electrice este nulă, $q_v = 0$ în C/m^3).

Se mai consideră, încă un câmp electromagnetic în regim armonic permanent, adică având o variație în timp a câmpului electric și magnetic sinusoidală (caz care prezintă cel mai mare interes în aplicațiile practice).

Astfel, considerându-se exemplul din figura 7.27, dacă se admite curentul electric din bobină ca fiind alternativ-sinusoidal (v. subcap. 8.5), intensitatea va fi exprimată prin valoarea instantanee dată de:

$$i = I_{\max} \sin((2\pi / T)t + \alpha) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi),$$

unde I_{\max} este valoare maximă pe care o poate avea intensitatea curentului electric, I – valoarea lui efectivă (eficace v. subcap. 8.5), T – perioada de repetiție, $\omega = 2\pi/T$ – pulsația și ψ – faza inițială (la $t=0$).

Conform celor arătate în paragraful 9.1.3, orice funcție armonică (sinusoidală) de variabilă reală t , dintr-un sistem liniar (care admite principiul superpoziției), poate fi reprezentată în planul complex ($01j$) prin funcția:

$$I(\omega t) = I_{\max} \cdot \exp j(\omega t + \psi) = \sqrt{2}I \cdot \exp j(\omega t + \psi) = \sqrt{2}I e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = I(j\omega t) \cdot e^{j\psi} = \underline{I} \hat{=} i(t),$$

existând corespondența biunivocă:

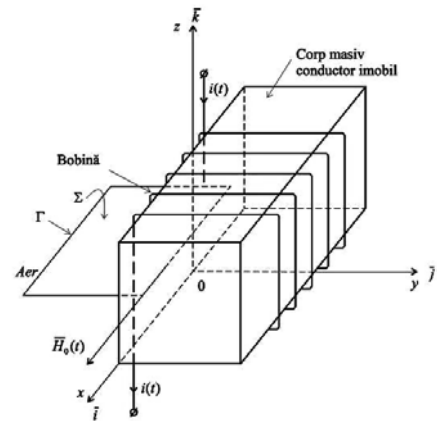


Fig. 7.27

$$(CEC 2) \quad \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{I} = \sqrt{2}I e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi}.$$

În această situație, în interiorul bobinei din figura 7.27 imediat pe suprafața corpului masiv conducător (în aer /vid) se va produce un câmp magnetic având vectorul intensității $\vec{H}_0(t)$, variabil în timp și orientat după direcția axei x : $\vec{H}_0(t) = \vec{i}H_0(t)$, determinat prin legea circuitului magnetic aplicată unui contur poligonal Γ (ales așa cum se arată în figura 7.27), adică de:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}_0 \cdot d\vec{l} = \sum i|_{\Gamma} + d\Psi|_{\Sigma} / dt = Ni \Rightarrow d\Psi|_{\Sigma} / dt = 0,$$

unde N este numărul de spire al bobinei.

În condițiile din figura 7.27, în care $\oint_{\Gamma} \vec{H}_0 \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{i}H_0 \cdot d\vec{l} = H_0 \cdot l$ unde l este lungimea bobinei, rezultă:

$$H_0(t) = Ni/l = \frac{N}{l} \cdot \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}H_0 \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

ceea ce înseamnă că intensitatea câmpului magnetic imediat pe suprafața conductorului variază în timp sinusoidal (câmpul magnetic este armonic), având așa-numita valoare efectivă: $H_0 = NI/l$, iar vectorul de câmp $\vec{H}_0 = \vec{i}\sqrt{2}H_0 \sin(\omega t + \alpha)$, care fiind și o funcție armonică sinusoidală de timp se va putea reprezenta în planul complex prin:

$$(CEC 3) \quad \underline{H}_0 = \vec{i}\sqrt{2}H_0 e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi}.$$

Trebuie reținută semnificația notației prin care simbolul mărimii este încadrat deasupra și dedesubt, de două bare (linițe): *bara trasată deasupra* simbolului indică faptul că mărimea reprezentată de simbol este un vector, iar cea *plasată dedesubt* indică faptul că mărimea este reprezentată în planul complex (se reamintește că acest mod de reprezentare a mai fost folosit anterior, în paragrafele 7.1.9 și 7.1.10).

Revenindu-se la figura 7.27, câmpul magnetic sinusoidal în timp produce –conform legii inducției electro-magnetice– un câmp electric având intensitatea un vector care variază și el în timp, tot sinusoidal, deoarece la ($\vec{w} = 0$):

$$\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad \text{și} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H},$$

arată că dacă intensitatea câmpului magnetic este de forma (CEC 3), vector reprezentat în planul complex, atunci se poate scrie:

$$(CEC 4) \quad \underline{\vec{B}} = \mu \cdot \underline{\vec{H}},$$

deoarece μ este un parametru real invariabil în timp, și:

$$\text{rot} \underline{\vec{E}} = -\mu \cdot \partial \underline{\vec{H}} / \partial t = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \sqrt{2} \underline{H} e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = -\mu j\omega \cdot \underline{H} e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = -\mu j\omega \cdot \underline{\vec{H}},$$

rezultând prin urmare:

$$(CEC 5) \quad \text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega \mu \underline{\vec{H}} \quad \text{sau} \quad \text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

De aici și din faptul că $\underline{\vec{D}} = \varepsilon \cdot \underline{\vec{E}}$ (legea polarizației electrice temporare), în care ε este un parametru real invariabil în timp (prin ipoteza admisă inițial), rezultă că și inducția electrică este –în acest caz– un vector variabil în timp sub formă sinusoidală (armonică), putând fi reprezentat în planul complex și putându-se scrie:

$$(CEC 6) \quad \underline{\vec{D}} = \varepsilon \cdot \underline{\vec{E}}.$$

Deoarece, prin definiție, intensitatea curentului electric este fluxul vectorului densitate de curent, \vec{J} , adică $\vec{i} = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A}$, atunci dacă i este de formă armonică reprezentabilă în planul complex prin

(CEC 2); $i \hat{=} \underline{I}$ înseamnă că se poate scrie:

$$(CEC 7) \quad i = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \underline{I} = \int_{\Sigma} \underline{\vec{J}} \cdot d\vec{A}$$

Folosindu-se, pentru vectorul densității de curent variabil armonic în timp, reprezentarea în complex, $\underline{\bar{J}}$, rezultă că:

- forma locală legii conducției electrice ($\underline{\bar{J}} = \gamma \cdot \underline{\bar{E}}$) se poate scrie în acest caz:

$$(CEC 8) \quad \underline{\bar{J}} = \gamma \cdot \underline{\bar{E}}$$

- forma locală legii circuitului magnetic ($\text{rot} \underline{\bar{H}} = \underline{\bar{J}} + \partial \underline{\bar{D}} / \partial t$) devine:

$$\text{rot} \underline{\bar{H}} = \underline{\bar{J}} + \partial \underline{\bar{D}} / \partial t = \underline{\bar{J}} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{2} \underline{\bar{D}} e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha} = \underline{\bar{J}} + j \cdot \omega \underline{\bar{D}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha}$$

adică:

$$\text{rot} \underline{\bar{H}} = \underline{\bar{J}} + j\omega \underline{\bar{D}}, \quad (CEC 9)$$

unde $j\omega \underline{\bar{D}} = \underline{\bar{J}}_D$ reprezintă densitatea curentului de deplasare $\underline{\bar{J}}_D$. Problemele de câmp electromagnetic în regim armonic permanent, în conductoare masive (pentru care $\varepsilon \cong \varepsilon_0 = 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9$ F/m și $\gamma > 10^5$ S/m, astfel că:

$$(\omega D) / j = \omega \varepsilon E / \gamma E = \omega \varepsilon_0 / \gamma = 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^6 \omega = 10^{-15} \omega / 36),$$

se pot studia neglijându-se densitatea curentului de deplasare ωD , dacă frecvența de variație a câmpului este $f < \omega/2\pi < 10^{15}$ Hz $< 10^6$ GHz, condiție îndeplinită cu o foarte bună aproximație în toate aplicațiile practice (mai puțin cele realizate în domeniul microundelor, unde frecvențele pot depăși –uneori– valoarea de 10^{14} Hz). Atunci practic, legea (CEC 9) se poate scrie -în cazurile precizate la început- sub forma:

$$\text{rot} \underline{\bar{H}} = \underline{\bar{J}}. \quad (CEC 9')$$

Aplicându-se acestei ultime relații rotorul în ambii membri, și ținându-se seama de (CEC 5) rezultă:

$$\text{rot rot} \underline{\bar{H}} = \text{rot} \underline{\bar{J}} \rightarrow \text{rot rot} \underline{\bar{H}} = \text{rot} \gamma \underline{\bar{E}} \quad (CEC 10)$$

care prin dezvoltare (conform relațiilor din § 9.1.2) și prin utilizarea expresiei (CEC 4) conduce la: grad $\text{div} \underline{\bar{H}} - \Delta \underline{\bar{H}} = -j\omega \gamma \mu \underline{\bar{H}}$, care, deoarece $\text{div} \underline{\bar{B}} = 0$ și deci și $\text{div} \underline{\bar{H}} = 0$ devine:

$$\Delta \underline{\bar{H}} = -j\omega \gamma \mu \underline{\bar{H}} = 0 \quad (7.61)$$

sau, folosindu-se notația:

$$\underline{\sigma}^2 = j\omega \gamma \mu \text{ avem } \Delta \underline{\bar{H}} - \underline{\sigma}^2 \cdot \underline{\bar{H}} = 0 \quad (7.61')$$

adică o ecuație de tip Helmholtz.

În același mod se arată, pentru intensitatea câmpului electric $\underline{\bar{E}}$ (în regim armonic permanent), că:

$$\Delta \underline{\bar{E}} = -j\omega \gamma \mu \cdot \underline{\bar{E}} = 0 \quad (7.62)$$

sau (dacă $\underline{\sigma}^2 = j\omega \gamma \mu$):

$$\Delta \underline{\bar{E}} - \underline{\sigma}^2 \cdot \underline{\bar{E}} = 0. \quad (7.62')$$

Cunoscându-se aceste ecuații de tip Helmholtz, ecuația inițială (CEC 1) –care descrie repartiția câmpului electro-magnetic în medii conductoare liniare și uniforme– devine în cazul presupus în acest subcapitol (conductori masivi liniari și omogeni situați în câmp electro-magnetic în regim armonic permanent):

$$\Delta \begin{bmatrix} \underline{\bar{E}} \\ \underline{\bar{H}} \end{bmatrix} - j\omega \gamma \mu \begin{bmatrix} \underline{\bar{E}} \\ \underline{\bar{H}} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.63)$$

sau (dacă $\underline{\sigma}^2 = j\omega \gamma \mu$):

$$(7.63') \quad \Delta \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} - \sigma^2 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} = 0,$$

care –pe suprafețele de discontinuitate le mediului– respectă teoremele de conservare ale componentelor câmpului electromagnetic, adică:

$$(7.64) \quad E_{t_1} = E_{t_2} \text{ și } H_{t_1} = H_{t_2},$$

pentru componentele tangențiale, și:

$$(7.64') \quad D_{n_1} = D_{n_2} \text{ și } B_{n_1} = B_{n_2},$$

pentru cele normale.

7.2.1. Propagarea câmpului electromagnetic în conductori

Plecându-se de la exemplul particular din figura 7.27 se poate trece la analiza generală a modului cum ‘‘pătrunde’’ un câmp electromagnetic existent ‘‘în afară’’ (într-un mediu nedisipativ izolat – de exemplu vid sau aer) prin suprafața de discontinuitate ce-l separă de un mediu conductor (disipativ), în conductorul masiv și cum se propagă, spațial și temporar, în interiorul conductorului. În acest scop, corpul masiv conductor din figura 7.27 se poate considera că se ‘‘dilată’’ umplând tot semispațiul drept, dincolo de planul (xOz), în lungul axei y (spre infinit), fiind

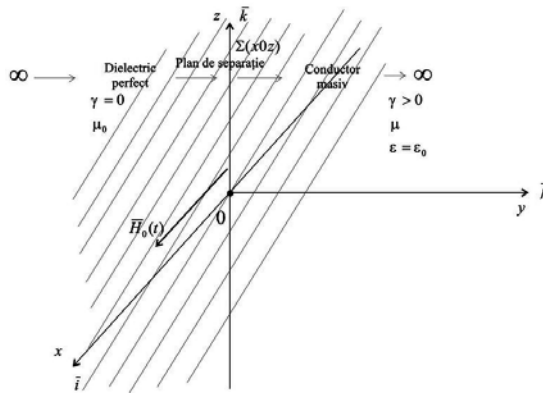


Fig. 7.28

limitat la stânga de o suprafață plană (xOz), extinsă teoretic la infinit, dincolo de care există un mediu dielectric ideal în care a fost stabilit un câmp magnetic uniform, orientat tangențial la planul de separație dielectric-conductor (planul xOz), orientat în lungul axei x și având o variație armonică în timp, adică $H_0(t) = \sqrt{2}H_0 \sin(\omega t + \psi)$, așa cum s-a considerat inițial în exemplul din figura 7.27.

Această generalizare a cazului din figura 7.27 se poate reprezenta așa ca în figura 7.28.

Sistemul din figura 7.28 are o simetrie (față de planul de separație dielectric-conductor, $\Sigma = xOz$) astfel că intensitatea câmpului magnetic \bar{H} variază numai în lungul axei y fiind:

- o sinusoidă: $H_0(t) = \sqrt{2}H_0 \sin(\omega t + \psi)$, cu $H_0(y < 0) = \text{const.}$ (prin ipoteza cazului analizat) în semispațiul dielectric;

- o sinusoidă, a cărei valoare instantanee pe direcția axei x depinde de y și t : $\bar{H}_x(y, t) = \bar{i} H_x(y) \cdot \sin(\omega t + \beta)$, în semispațiul conductor, unde are următoarea reprezentare complexă:

$$(PPC 1) \quad \bar{H} = \bar{i} \cdot \underline{H}_x(y)$$

astfel încât ecuația (7.61'), al cărui laplacean se reduce aici (unde variază doar după y) numai la aplicarea lui după direcția y (adică: $\Delta = \partial^2 / \partial y^2$, deoarece $\partial^2 \bar{H} / \partial x^2 = 0$ și $\partial^2 \bar{H} / \partial z^2 = 0$), are în cazul din figura 7.28 forma:

$$(PPC 2) \quad (d^2 \underline{H}_x / dy^2) - \Gamma^2 \underline{H}_x = 0.$$

Pătrunderea câmpului magnetic

Expresia (PCC 2) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul doi și gradul unu, liniară, omogenă și cu coeficienți constanți astfel încât ecuația ei caracteristică $r^2 - \underline{\sigma}^2 = 0$ are rădăcinile: $r_{1,2} = \pm \underline{\sigma}$.

Atunci soluția ecuației (PCC 2) este:

$$\underline{H}_x(y) = \underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\sigma}y} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\underline{\sigma}y} \quad (\text{PCC3})$$

unde \underline{A}_1 și \underline{A}_2 sunt constante de integrare, ce se determină din condițiile la limită.

Sub forma (PCC 3), soluția arată că propagarea câmpului magnetic se face în mediul conductor masiv prin două unde: una directă (primul termen) și alta inversă. Dar, pentru a avea câmp magnetic mărginit la infinit trebuie ca unda inversă să fie nulă și deci constanta de integrare $\underline{A}_2 = 0$. Din condiția de frontieră (pe suprafața de separație $\Sigma = xOz$), unde câmpul magnetic are valoarea H_0 dată, rezultă:

$$\underline{H}_x(0) = \underline{H}_0 \text{ și deci } \underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\sigma} \cdot 0} = \underline{H}_0, \text{ adică } \underline{A}_1 = \underline{H}_0,$$

astfel încât soluția ecuației (PCC 2) este, în definitiv:

$$\underline{H}_x(y) = \underline{H}_0 \cdot e^{-\underline{\sigma}y} \quad (7.65)$$

Pătrunderea câmpului electric

Pentru determinarea componentei electrice (a intensității câmpului electric \underline{E} din semispațiul conductor) se utilizează, în reprezentare complexă, relațiile (CEC 8) și (CEC 9') –de la începutul acestui subcapitol– rezultând:

$$\underline{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \text{rot} \underline{H} \quad (\text{PCC 4})$$

în care înlocuindu-se \underline{H} prin soluția sa (7.65) și știindu-se că deoarece \underline{H} are numai componenta H_x ce variază după y , $\text{rot} \underline{H} = \nabla \times \underline{H}$ devine (în cazul analizat) $\text{rot} \underline{H}_x(y) = \bar{k} \partial \underline{H}_x / \partial y = \bar{k} d \underline{H}_x / dy$, se obține pentru (PCC 4):

$$\underline{E} = -\bar{k} \frac{1}{\gamma} d \underline{H}_x / dy \text{ adică } \underline{E} = \bar{k} \underline{E}_z(y),$$

ceea ce înseamnă:

$$\underline{E}_z(y) = \frac{\underline{\sigma}}{\gamma} \cdot \underline{H}_0 \cdot e^{-\underline{\sigma}y} = \underline{\zeta} \cdot \underline{H}_x(y), \quad (7.66)$$

în care:

$$\underline{\zeta} = \frac{\underline{\sigma}}{\gamma} = \sqrt{j\omega\gamma\mu} / \gamma = \sqrt{j(\omega\mu) / \gamma},$$

unde (se reamintește) j este unitatea imaginară $j^2 = -1$.

Soluțiile (7.65) și (7.66) arată că pătrunderea câmpului magnetic variabil în timp, în regim armonic permanent, într-un mediu conductor masiv duce la crearea, în conductor, a unui câmp electromagnetic cu variație în timp de asemenea armonică, descris de două componente, în câmp electric E_z și câmp magnetic H_x , ortonormale între ele.

Pentru detalierea modelelor acestor soluții, termenul complex $\underline{\sigma}$ –denumit *constantă de propagare*– se poate scrie precum urmează:

$$\underline{\sigma} = \sqrt{j\omega\gamma\mu} = \sqrt{e^{j\pi/2} \omega\gamma\mu} = \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu} \cdot e^{j\pi/4} = (\sqrt{\omega\gamma\mu} / \sqrt{2}) \cdot (1 + j) = \alpha \cdot (1 + j), \quad (\text{PCC 5})$$

în care termenul α , definit –așa cum rezultă din expresia (PCC 5)– prin:

$$\alpha = \sqrt{(\omega\gamma\mu)/2}, \quad (7.67)$$

poartă denumirea de *factor de amortizare* (la pulsația ω a câmpului armonic dintr-un mediu conductor caracterizat de constantele de material: conductivitate γ și permeabilitate absolută μ).

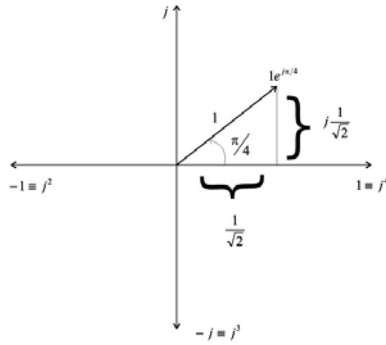


Fig. 7.29

Forma finală a expresiei (PCC 5) se explică prin aceea că unitatea imaginară j , definită prin $j^2 = -1$, reprezentând și un operator de rotație în planul complex ($10j$) cu $\pi/2$ în sens trigonometric, permite scrierea $j = 1 \cdot e^{j\pi/2}$, iar $\sqrt{j} = (j)^{1/2}$ duce la o rotire cu $\pi/4$ și atunci $j = 1 \cdot e^{j\pi/4}$ care, în planul complex reprezintă un fazor unitar ce are componentele:

$$R_e(1 \cdot e^{j\pi/2}) = 1 \cdot \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$I_m(1 \cdot e^{j\pi/4}) = j \cdot 1 \cdot \cos(\pi/4) = \frac{j}{\sqrt{2}}$$

astfel că fazorul $(1 \cdot e^{j\pi/4}) = (1+j)/\sqrt{2}$ (fig.7.29).

Dar, așa cum s-a considerat inițial

$$H_0(0, t) = \sqrt{2}H_0 \sin(\omega t + \psi),$$

ceea ce înseamnă

$$\underline{H}_0 = H_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi}$$

și deci inițial (la $y=0$ și $t=0$)

$$\underline{H}_0 = H_0 \cdot e^{j\psi};$$

atunci:

$$(7.68) \quad H_x(y, t) \hat{=} \underline{H}_x \text{ cu } \underline{H}_x = H_0 e^{j\psi} \cdot e^{-\sigma y} = H_0 e^{j\psi} \cdot e^{-\alpha(1+j)y},$$

care în planul timpului dă valoarea instantanee a intensității câmpului magnetic care se propagă în conductorul masiv după axa y prin expresia:

$$(7.69) \quad H_x(y, t) = \sqrt{2}H_0 e^{-\alpha y} \cdot \sin(\omega t - \alpha y + \psi).$$

Soluția (7.69) arată că, într-un mediu conductor disipativ (cu $\gamma \neq \infty$), câmpul magnetic se propagă sub forma unei unde directe, atenuată (cu atenuarea $\alpha = \sqrt{(\omega\gamma\mu)/2}$), cu viteza de propagare:

$$(7.70) \quad c = \omega/\alpha = \sqrt{2\omega/\gamma\mu},$$

expresie ce rezultă din condiția: $H_x(y, t) = \text{const.} \Leftrightarrow \sin(\omega t - \alpha y + \psi) = 1 \Leftrightarrow (\omega t - \alpha y + \psi) = 0$, care implică deplasarea în lungul axei y a unui observator cu viteza $dy/dt = d(\omega t / \alpha + \psi/\alpha)/dt = \omega/\alpha$, căreia îi corespunde o lungime de undă:

$$(7.71) \quad \lambda = c/f = \omega/f\alpha = 2\pi/\alpha, \text{ adică } \lambda = 2\pi \cdot \sqrt{2}/\sqrt{\omega\gamma\mu}.$$

Soluția (7.66) arată că valoarea instantanee a intensității câmpului electric ce se produce în mediul conductor masiv (extins teoretic la infinit) este:

$$E_z(y, t) = \zeta H_x(y, t) = \zeta \sqrt{2} \cdot H_0 e^{-\alpha y} \sin(\omega t - \alpha y + \psi + \gamma)$$

sau, deoarece $\zeta H_0 = E(y=0, t=0) = E_0$, în care:

$$\zeta = \underline{E}_z / \underline{H}_x = \underline{\sigma} / \gamma = \sqrt{(\omega \cdot \mu)} / \gamma \cdot e^{j\pi/4}$$

(prin urmare cu $\gamma = \pi/4$):

$$(7.72) \quad E_z(y, t) = \sqrt{2}E_0 e^{-\alpha y} \sin(\omega t - \alpha y + \psi + \pi/4),$$

în care valoarea efectivă a câmpului electric este:

$$E_0 = \zeta H_0 = \sqrt{(\omega\mu)/\gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} H_0.$$

Prin urmare și câmpul electric produs și propagat în masivul conductor disipant este o undă directă (cu variație în timp sinusoidală), atenuată și normală pe unda câmpului magnetic. Reprezentarea în sistemul $(0xyz)$ a valorilor instantanee ale câmpului magnetic (7.69) și a celui electric (7.72) la o scară oarecare ar arăta așa ca în figura 7.30.

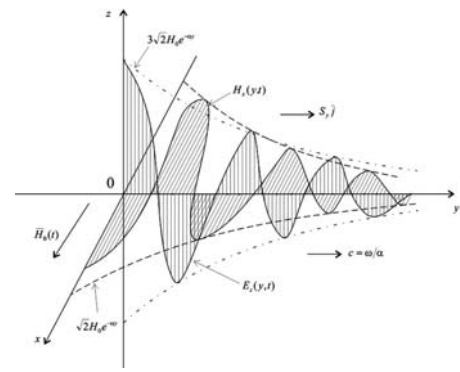


Fig. 7.30

Transferul de energie

În ceea ce privește energia electromagnetică pătrunsă în conductor și propagată apoi în interiorul lui, ea se poate determina prin densitatea de suprafață a puterii, în W/m^2 , care –după cum se știe– este dată de vectorul Poynting \vec{S} (definit prin $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$). În acest fel, energia electromagnetică transmisă mediului conductor din afara sa (din semispațiul din stânga suprafeței Σ – vezi figura 7.28) reprezintă fluxul vectorului \vec{S} , care –decîtrebuie determinat în condițiile prezentate inițial, ale unui câmp electromagnetic în regim armonic permanent.

Deoarece, în acest caz, câmpul electromagnetic a fost determinat prin reprezentările în complex, adică prin \underline{E} și \underline{H} , trebuie –mai întîi– să se reprezinte vectorul Poynting în complex (cu notația \underline{S}) care –ținându-se seama de definiția sa– este:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \bar{k} \underline{E}_z \times \bar{i} \underline{H}_x^* = (\bar{k} \times \bar{i}) \underline{E}_z \underline{H}_x^* = \bar{j} \underline{S}_y \quad (\text{PCC } 6)$$

unde \underline{H}^* este conjugatul reprezentării în complex a vectorului intensității, variind sinusoidal în timp, a câmpului magnetic. După cum se constată el are numai componenta \underline{S}_y , pe direcția axei y , având expresia:

$$\underline{S}_y = \underline{E}_z \cdot \underline{H}_x^* = \zeta \underline{H}_0 \cdot e^{-\sigma \cdot y} \underline{H}_0^* \cdot e^{-\sigma \cdot y} = (1 + j) \frac{\alpha}{\gamma} H_0^2 \cdot e^{-2\sigma \cdot y} \quad (7.73)$$

Această expresie arată că materialul conductor fiind un mediu disipativ (cu densitatea de volum a puterii disipate $p = \rho \cdot \vec{J}^2 = \vec{J}^2 / \gamma$ în W/m^3), vectorul Poynting (adică densitatea de suprafață a puterii care se transmite prin mediul conductor), scade exponențial cu deplasarea pe direcția y , depinzând de atenuarea α a materialului conductor (la frecvența dată de propagare), modelul (7.73) arătând că la $y \rightarrow \infty$, $S_y \rightarrow 0$. Practic, într-un punct situat la distanța $y = \lambda / 2 = \alpha / \pi$ de suprafața de pătrundere Σ a undei în conductor, rezultă: $S(y=\lambda/2)/(S(y=0))=e^{-2\pi}=0,0185$, fapt care arată că energia electromagnetică transmisă de câmpul magnetic exterior conductorului este imediat absorbită după trecerea suprafeței Σ ce delimitează conductorul (la $y = \lambda/2$, densitatea de suprafață a puterii electromagnetice pătrunse în conductor scade exponențial, cu subtangenta 2α , la mai puțin de 2% din densitatea puterii electromagnetice care pătrunde în conductor).

Câmpul electrocinetic

Câmpul electric cu variație sinusoidală în timp, \underline{E}_z , pătruns în mediul conductor, produce în acesta un câmp electrocinetic în regim armonic permanent, caracterizat de o densitate de curent (potrivit formei locale a legii conductanței electrice $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$), care în cazul analizat (v. fig. 7.28 și fig.7.30) are expresia în complex: $\underline{J} = \gamma \cdot \underline{E}_z = \bar{k} \gamma \underline{E}_z(y)$ rezultând, conform soluției (7.66), o densitate de curent e direcția axei z dată de relația:

$$(7.74) \quad \bar{J}_z(y) = \gamma \bar{E}_z(y) = \gamma \cdot (\sigma / \gamma) \cdot \underline{H}_0 \cdot e^{-\sigma \cdot y} = \sigma \underline{H}_0 \cdot e^{-\sigma \cdot y},$$

a cărei valoare eficace este:

$$(7.74') \quad \bar{J}_z = \sigma H_0 \cdot e^{-\sigma \cdot y} = \alpha \sqrt{2} \cdot H_0 e^{-\sigma \cdot y},$$

ce variază exponențial după y , cu atenuarea α , așa cum arată în figura 7.31.

Adâncimea de pătrundere. **În această situație, redată în figura 7.31, se pune problema determinării intensității curentului de conducție printr-o suprafață Σ_i aparținând planului xOy în ale cărei puncte vectorul densității de curent are expresia dată de relația (7.74).**

Pentru aceasta se consideră că suprafețele $\Sigma_i \in (xOy)$ are lățimea l aparținând axei $0x$ și după axa y se întinde teoretic la infinit. Atunci, un element de \bar{dA} aparținând suprafeței oarecare Σ_i , $dA \in \Sigma_i$, are expresia $\bar{dA} = \bar{k} l dy$, care –introdusă în expresia ce definește intensitatea curentului de conducție ca flux al vectorului densitate de curent adică $i = \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{dA}$ – conduce la următoarea expresie a valorii complexe a curentului din conductorul masiv:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \int_{\Sigma_i} \bar{J}_z(y) \cdot \bar{dA} = \int_{\Sigma_i} \underline{\sigma} H_0 e^{-\sigma \cdot y} \cdot \bar{dA} = \underline{\sigma} H_0 \int_0^{\infty} e^{-\sigma \cdot y} l dy = \underline{\sigma} \cdot H_0 l \int_0^{\infty} e^{-\sigma \cdot y} dy = \\ &= \frac{\underline{\sigma}}{-\underline{\sigma}} H_0 l \left| e^{-\sigma \cdot y} \right|_0^{\infty} = -\underline{H}_0 l (0 - 1) = \underline{H}_0 l, \end{aligned}$$

deoarece pentru $y \rightarrow \infty$, $e^{-\sigma \cdot y} = 1 / e^{\sigma \cdot \infty} = 0$; deci:

$$(PCC 7) \quad \underline{I}|_{\Sigma_i} = \underline{H}_0 l \leftarrow \Sigma_i \subset (xOy), \text{ cu } l \subset 0x \text{ oarecare.}$$

Folosindu-se această expresie a curentului se poate calcula **adâncimea de pătrundere** a câmpului electromagnetic, definită ca acea grosime p (măsurată pe direcția axei $0y$), ca distanță de la suprafața Σ de separație celor două semispații (v.fig.7.28), pe care dacă intensitatea curentului electric total (PCC 7) ar fi repartizată uniform (fie această valoare efectivă I) s-ar produce aceeași putere electrică disipată (putere activă – vezi. subcapitolul 8.5).

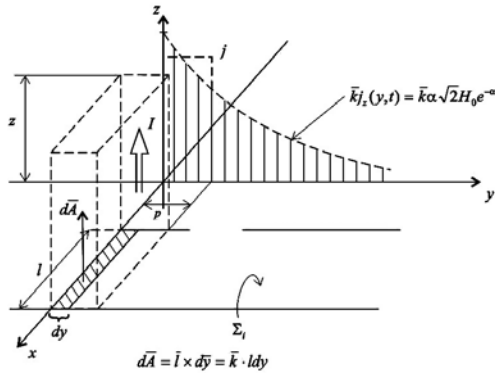


Fig. 7.31

subcapitolul 8.5, puterea activă disipată în aceasta porțiune de conductor va fi:

- datorită curentului presupus uniform repartizat I :

$$(PCC 8) \quad P = RI^2 = (\rho z / pl)(H_0 \cdot l)^2 = \frac{1}{\gamma p l} H_0^2 l^2 = (z / p \gamma) \cdot H_0^2 \cdot l,$$

unde ρ este rezistivitatea conductorului ($\rho = 1/\gamma$).

- datorită puterii primite de conductor prin suprafața $zl \in \Sigma$, conform formulei (7.33):

$$(PCC 9) \quad P = \text{Re} \underline{S}_{y=0} \cdot zl = \frac{\alpha}{\gamma} H_0^2 \cdot e^{-2\alpha 0} \cdot zl = \frac{\alpha}{\gamma} H_0^2 zl.$$

Egalându-se ceste două expresii ale lui P (pe baza principiului conservării energiei și a legii transformării de energie în conductori, potrivit căreia energia primită de conductor prin câmpul

electromagnetic se disipă integral și ireversibil în căldură degajată în mediul exterior) se obține expresia ce determină adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic în conductori, p :

$$\frac{z}{p\gamma} H_0^2 l = \frac{\alpha}{\gamma} H_0^2 z l \quad \therefore \quad p = 1/\alpha \quad (\text{PCC 10})$$

și deoarece –prin definiția (7.67)– $\alpha = \sqrt{\omega\gamma\mu/2} \Rightarrow$:

$$p = \sqrt{2/\omega\mu\gamma} \quad (7.75)$$

și deoarece $\omega = 2\pi f$, se mai poate scrie:

$$p = 1/\sqrt{\pi f\mu\gamma} \quad (7.76)$$

care arată că adâncimea de pătrundere este o caracteristică a materialului (prin parametrii γ și μ), a cărei valoare este invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței f .

Deoarece $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r$ [H/m] și determinându-se valoarea adâncimii de pătrundere p în metri, din expresia (7.76) mi rezultă și următoarea formulă (utilizată adesea în practică):

$$p = 50,33/\sqrt{f \cdot \mu_r \cdot \gamma} = 50,33 \cdot \sqrt{\rho/f\mu_r} \quad (7.77)$$

în care f se introduce în [Hz], conductivitatea γ în [S/m] sau rezistivitatea ρ în [$\Omega \cdot m$].

În tabelul 7.2 se dau câteva valori ale adâncimii de pătrundere în diverse materiale și la câteva frecvențe.

Tabelul 7.2

Adâncimi de pătrundere

Materialul	Rezistivitatea ρ [$\mu\Omega\text{cm}$] sau $\rho \times 10^{-8}$ în [Ωm]	H [A/cm]	μ_r	Pătrunderea p [mm]			
				$f=50$ Hz	$f=10$ kHz	$f=100$ kHz	$f=1$ MHz
Oțel cald (sub 780°C)	40	40	500	-	0,14	0,044	0,014
		400	40		0,50	0,16	0,050
		4000	5		1,4	0,44	0,14
Oțel cald (peste 780°C)	120	-	1	-	5,5	1,74	0,55
Cupru	1,7	-	1	9,5	0,6	0,21	0,056
Alamă	7	-	1	-	1,3	0,42	0,03
Grafit	800	-	1	-	14,23	4,5	1,4
Fier	9,8	-	200	1,59	0,18	0,035	0,011
Apă	2000	-	1	-	22,5	7	2,2

7.2.2. Efectul pelicular

Fenomenul prin care densitatea de curent în regim armonic (sinusoidal) nu este uniformă, în punctele unei secțiuni transversale printr-un conductor, poartă numele generic de *efect pelicular*. În ultimă instanță, efectul pelicular se poate caracteriza prin mărimea de pătrundere p , ce se va calcula – pentru un material dat și la o frecvență anume – , cu una din expresiile (7.76), (7.77).

Astfel, pentru un conductor cilindric drept având aria secțiunii transversale A , dacă adâncimea de pătrundere p :

- satisface relația $p \ll \sqrt{A}$, efectul pelicular se spune că este un *efect pelicular net*;
- îndeplinește condiția $p \gg \sqrt{A}$, efectul pelicular se caracterizează ca fiind un *efect pelicular slab*;

- corespunde condiției $p \approx \sqrt{A}$, efectul pelicular se zice că este un *efect pelicular mediu*.

În cazul **efectului pelicular net** dintr-un conductor cilindric drept și uniform (ceea ce înseamnă că secțiunea transversală prin conductor are un contur circular cu raza r aceeași în orice secțiune), adâncimea de pătrundere se poate calcula direct cu expresia generală (7.76), iar rezistența conductorului (care în curent continuu este $R_{cc} = \rho l_c / A = \rho l / \pi r^2$) în curent alternativ (sinusoidal) are expresia:

$$(7.78) \quad R_{ca} = P / I^2 = \frac{\alpha}{\gamma} H_0^2 l_c 2\pi r / (H_0 2\pi r)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha l_c}{\gamma r} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p\gamma} \frac{l_c}{r},$$

în care l_c este lungimea conductorului cilindric, r – raza secțiunii sale transversale (care fiind circulară are aria $A = \pi r^2$) și $p = 1/\alpha$ este adâncimea de pătrundere (cu $r \gg p$). Formula (7.78) s-a obținut înlocuindu-se puterea activă disipată P cu expresia sa (PCC 9)/§ 7.2.1 (în care, în condițiile de aici, $z = l_c$ iar $l = 2\pi r^2$ –adică circumferința conturului circular al secțiunii transversale a conductorului) și valoarea efectivă a curentului electric I cu expresia ei (PCC 7)/§ 7.2.1 (în care, evident, $l = 2\pi r$).

Rezultă că în curent alternativ rezistența conductorului crește, în cazul particular analizat (conductor cilindric) ea fiind mai mare decât rezistența în curent continuu cu un factor dat de:

$$(7.79) \quad k_{Ra} = R_{ca} / R_{cc} = (1 / 2\pi) \cdot (1 / p\gamma) \cdot (l_c / r) / (l_c / \gamma) \cdot (1 / \pi r^2) = r / 2p,$$

sau dacă se înlocuiește adâncimea de pătrundere p cu expresia sa (7.75), mai rezultă:

$$(7.79') \quad k_{Ra} = \frac{r}{2} \sqrt{\pi f \gamma \mu}.$$

Astfel, în cazul unui conductor din cupru, la 50 Hz (vezi tabela 7.2), rezultă: $k_{Cu50Hz} = (r / 19) \cdot 10^3 = r[\text{mm}] / 19$, cu condiția ca $r > 200$ mm.

În manualul Preda, M., Cristea, P., Spinei, F., 1980 (vol.I) se demonstrează –tot pentru conductorul cilindric drept– că în cazul **efectului pelicular slab** (când $r \ll p$) factorul R_{ca} / R_{cc} este: $k_{Ra} = 1 + r^4 / 48p^4$, iar în cazul **efectului pelicular mediu** (când $r \approx p$): $k_{Ra} \approx 1 + r^4 / 48p^4$, adică aproximativ același cu cel al efectului slab.

În aceste cazuri $k_{Cu50Hz} = 1 + r^4 / 390963$ și dacă $r = 2$ mm, $k_{Cu50Hz} = 1,000.04$, deci efectul este nesemnificativ la o frecvență de 50Hz. La 1MHz și $r = 2$ mm : $k_{Cu1MHz} > 6500$.

7.2.3. Curenții turbionari

Curenții turbionari, numiți și *curenți Foucault*, sunt *curenții electrici de conducție care se produc prin fenomenul inducției electromagnetice, în masa unui conductor* (în principiul masiv) *atunci când el se află într-un câmp magnetic variabil în timp* (de exemplu sinusoidal – armonic).

Curenții turbionari (ca fenomen electromagnetic combinat cu efectele sale termice și mecanice) au numeroase aplicații practice, mai ales în tehnică, cum ar fi:

- încălzirea prin inducție (în joasă și înaltă frecvență), care este o tehnică des utilizată în tehnologia fabricației din numeroase domenii industriale. Astfel în metalurgie și în construcția utilajelor tehnologice, așa-numita încălzire prin inducție este întâlnită la cuptorul de înaltă frecvență pentru topirea metalelor, la încălzirea pieselor în vederea realizării unor tratamente termice, la încălzirea uniformă (în toată masa) a materialului metalic în vederea operațiilor de forjare, trefilare, matrițare la cald etc.;

- încălzirea superficială a pieselor (organe de mașini) –prin combinarea curenților turbionari cu efectul pelicular– în vederea călirii superficiale (pe adâncimi foarte mici și bine controlabile) în câmpuri magnetice de înaltă frecvență. Este vorba de procedura denumită “cif”, o siglă a numelui complet: “călirea prin curenți de înaltă frecvență”;

- frânarea în regim dinamic, prin frâne electromagnetice de inducție (un disc conductor, plasat pe arborele mecanismului ce trebuie frânat, este introdus în întrefierul unui electromagnet excitat în curent alternativ; prin rotirea sa, în disc se introduc curenți turbionari care –aflași și în

câmpul magnetic al bobinei– fac ca asupra discului –și deci a întregului mecanism– să se exercite un cuplu mecanic rezistent, de forțe de tip Laplace (v. § 5.6.4), ce crește odată cu viteza de rotație a discului, frânându-l sau reglându-i viteza). Un exemplu, mai la îndemână îl constituie discurile de amortizare magnetică al unor aparate analogice mai vechi de măsurat (printre care și contorul de inducție pentru măsurarea energiei electrice).

Curenții turbionari apar, în mod nedorit (deoarece produc așa-numitele pierderi în fier prin curenți Foucault – v. § 7.3.1), în miezul feromagnetic al mașinilor electrice (un exemplu tipic îl constituie pierderile în miezul transformatoarelor electrice - aparate de adaptare foarte răspândite).

Toate aceste exemple arată importanța analizării și determinării curenților turbionari în atât de diversele cazuri practice (fiecare cu particularități importante). Aceasta cu atât mai mult cu cât curenții turbionari mai au și efectul de a produce un câmp magnetic propriu care modifică distribuția câmpului magnetic global din conductor. În principiu, procedeele de determinare a curenților turbionari –în cazuri concrete date– constau în rezolvarea unor probleme cu condiții la limită în care intervin ecuații cu derivate parțiale de tip Helmholtz, așa cum sunt ecuațiile (7.61)/(7.61') și (7.62)/(7.62') – v. § 7.3.1.

În paragraful 7.3.1, ce va urma, se va prezenta o procedură de calcul a pierderilor de putere activă prin curenții turbionari din tolele feromagnetice.

7.3. Pierderi în fier

Sub această denumire, în prezentul subcapitol se va analiza un fenomen important pentru proiectarea și exploatarea circuitelor magnetice (formate din materiale feromagnetice) al aparatelor și mașinilor electrice, care funcționează în câmpuri magnetice variabile alternativ în timp. Este vorba de pierderile de energie electrică activă (v. subcap. 8.5) în circuitele feromagnetice, numite –la modul generic– “pierderi în fier” și care se datoresc unor fenomene complet diferite:

- pierderile prin curenți Foucault (turbionari),
- pierderile prin histerezis.

Încadrându-se în subiectul capitolului de față, era firesc ca pierderile prin curenți turbionari să fie tratate aici, dar cu acest prilej –deși au o cauză complet în afara tematicii acestui capitol– s-a considerat util să se analizeze sumar și pierderile prin histerezis, deoarece ele apar simultan cu pierderile prin curenți Foucault și au același sediu.

7.3.1. Pierderile prin curenți Foucault

Circuitele magnetice (confectionate din material feromagnetic ce are o anumită conductivitate electrică, nu prea mică, de ordinul a 10,20 MS/m, sau o rezistivitate de ordinul 0,098 $\mu\Omega\text{m}$) al mașinilor și aparatelor electrice care funcționează cu fluxuri magnetice variabile alternativ în timp, cu o perioadă de repetiție T (sau frecvență $f=1/T$) sunt sediul unor curenți turbionari (Foucault), așa ca în figura 7.32. Aici s-a reprezentat un miez feromagnetic circular, secționat în lungul său, în interiorul căruia există un câmp magnetic în regim armonic permanent produs, de exemplu, de bobine de excitație ce înconjoară miezul magnetic (care nu au mai fost desenate în figura 7.32) aflată în regim electrocinetic caracterizat de un curent de excitație sinusoidal de forma $i_e = \sqrt{2}I \sin \omega t$

Câmpul magnetic din interiorul miezului este caracterizat de mărimile de stare magnetică $\vec{H}, \vec{B}, \varphi$ (fluxul magnetic), variabile alternativ în timp:

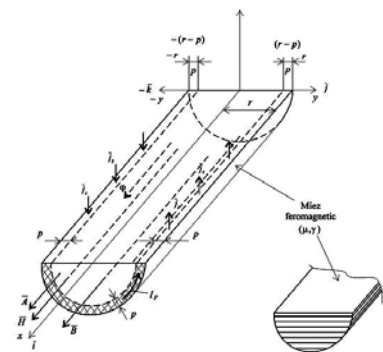


Fig. 7.32

$$\bar{H}(t) = \bar{H}(t+T), \quad \bar{B}(t) = \bar{B}(t+T), \quad \varphi(t) = \varphi(t+T),$$

perioada de repetiție fiind determinată de pulsația curentului de excitație $i_e(T = 2\pi/\omega)$, iar în condițiile în care permeabilitatea miezului magnetic μ este mult mai mare decât aceea a mediului dielectric înconjurător – aer sau ulei de transformator ($\mu_r > 10^2$)– câmpul magnetic este “concentrat” în interiorul miezului pe direcția axei lui (să o considerăm axa x – vezi fig.7.32) și normal pe secțiunile transversale prin miez, A ; deci $\bar{H} \parallel \bar{B} \parallel \bar{A} \parallel \bar{i}$. De aceea, câmpul magnetic din miez este un vector dat de:

$$\bar{H} = \bar{i}H_x \quad \text{și} \quad \bar{B} = \bar{i}B_x$$

În aceste condiții, prin fenomenul inducției electromagnetice, în miezul magnetic se induce un câmp electrocinetic caracterizat de mărimile lui de stare, i și \bar{J} –care reprezintă tocmai curenții turbionari și –respectiv– densitatea de curent turbionar. Conform relațiilor cunoscute (7.66) și (7.74') pentru cazul din figura 7.32 rezultă:

$$\begin{aligned} \bar{J} = \gamma \bar{E} \quad \text{și} \quad \bar{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot} \bar{H} &\Rightarrow \bar{E} = -\bar{k} \frac{1}{\gamma} dH_x / dy \quad \text{sau} \quad \bar{E} = \bar{k} E_z(y) \\ \bar{J} = \gamma \bar{k} E_z(y) \quad \text{sau} \quad \bar{J} = \bar{k} J_z(y), \end{aligned}$$

adică o densitate de curent normală pe vectorul intensității câmpului magnetic ($\bar{J} \perp \bar{H}$) și dacă $\bar{H} = \bar{i}H_x$ atunci $\bar{J} = \bar{k} \alpha \sqrt{2} H_x(y=-r) \cdot e^{-\alpha y}$.

De aici rezultă:

- curenții turbionari (Foucault) sunt curenți electrici circulari situați în plane perpendiculare pe axa lungimii circuitului magnetic, care variază alternativ (sinusoidal) în timp, ca și câmpul magnetic $H_x(t+T)$ care i-a produs;

- densitatea de suprafață a curenților turbionari este un vector perpendicular pe câmpul magnetic \bar{H} (situat deci pe direcția axei Oz –v. fig.7.32), cu variație armonică în timp;

- datorită regimului armonic permanent al câmpului magnetic și –ca urmare– a curenților turbionari, se produce un efect pelicular (v. § 7.2.1 și § 7.2.2), astfel că densitatea de suprafață a curenților turbionari, care au –în complex– expresia (7.74'), în cazul din figura 7.32 ia forma:

$\underline{J}_z(y) = \underline{\sigma} \cdot \underline{H}_x(y=-r) \cdot e^{-\sigma y}$ cu valoarea eficace $J_z = \alpha \cdot \sqrt{2} H_x(y=-r) \cdot e^{-\sigma y}$, cu o adâncime de pătrundere (definită ca în § 7.2.1) $p=1/\alpha$, astfel încât curenții turbionari sunt și niște curenți superficiali, aflați la periferia circuitului magnetic, printr-un “inel” situat la marginea conturului secțiunilor perpendiculare ale circuitului magnetic, cu o “lățime” p ;

- datorită efectului Joule, în fiecare punct din masa circuitului magnetic (cu rezistivitatea finită $\rho \neq 0$), în care $\bar{J}_z \neq 0$, în principiu pe porțiunea adâncimii de pătrundere: $2(r-p)$ – v. fig. 7.32, se disipă energie termică cu densitatea de volum a puterii disipate $p_F = \rho \cdot \bar{J}_z^2$, în $[W/m^3]$, care fiind datorată curenților Foucault se notează cu indicele F și se numește “pierderi” prin curenți Foucault deoarece pentru aplicația pe care o are circuitul magnetic, această transformare de putere în masa circuitului magnetic nu este un efect util, micșorând randamentul global al aparatului și determinând o creștere de temperatură, de cele mai multe ori inadmisibilă pentru materialele din sistemul aplicației realizate.

De aceea s-au căutat diverse procedee de limitare a curenților Foucault, prin micșorarea rezistivității materialului magnetic, dar –mai eficient, pentru că depinde de pătratul mărimii– prin micșorarea valorii efective a curentului Foucault, ca efect pelicular, prin micșorarea traseului l a inelului pelicular efectiv I_F , pe baza relației (PCC7)/ § 7.2.1, conform căreia $I_F = H_x(y=r)l$. Astfel, dacă circuitul magnetic se realizează din “foi” (numite în practică tole) de grosime δ cât mai mică posibil (fracțiuni dintr-un milimetru), izolate electric între ele (prin foite de hârtie, prin lăcuire sau –mai bine– prin oxidarea superficială a tolei) și “împachetate” în forma pe care trebuie să o aibă

miezul, atunci –datorită efectului pelicular– valoarea curentului Foucault efectiv ar fi principal $I_F = H_x(y=r) \delta$.

De aceea, în continuare se va arăta cum se determină pierderile prin curenți Foucault în tolele feromagnetice.

Pentru aceasta se consideră o tolă feromagnetică de forma unei lamele, așa ca în figura 7.33, având o grosime δ foarte mică în raport cu celelalte două dimensiuni (l și a , care pentru exemplul din figura 7.32 este $a=2r(z)$, având în vedere forma circulară a conturului miezului): $\delta \ll l \cap \delta \ll a$.

În principiu, grosimea tolei δ se ia cât mai mică posibil în raport cu adâncimea de pătrundere p . Astfel, pentru un miez magnetic confecționat din tole de fier cu siliciu (în proporție mică, de 0,4...4,4 % Si), care au $\mu_r \approx 200$ și $p=1,59$ mm –la frecvența sistemului electroenergetic de 50 Hz (vezi tabelul 7.2)–, se folosesc patru tipuri de tole pentru transformatoare cu grosimile: $\delta = \{0,35; 0,5; 0,75; 1; 1,5\}$ mm. În acest fel condiția unui efect pelicular slab (și anume $\delta \ll p$) este destul de bine îndeplinită încât să se poată neglija influența câmpului magnetic produs de curenții turbionari și să se poată lua în considerare numai câmpul magnetic cu variație armonică în timp produs în tolă de bobinele de excitație ale circuitului magnetic.

Pentru soluționarea problemei puse, trebuie determinată –mai întâi– intensitatea câmpului magnetic în regim armonic permanent, adică vectorul reprezentat în complex \underline{H} , ceea ce se poate face numai prin rezolvarea ecuației de tip Helmholtz (7.61)/(7.61'), completată cu condițiile la limită impuse de cazul tolei din

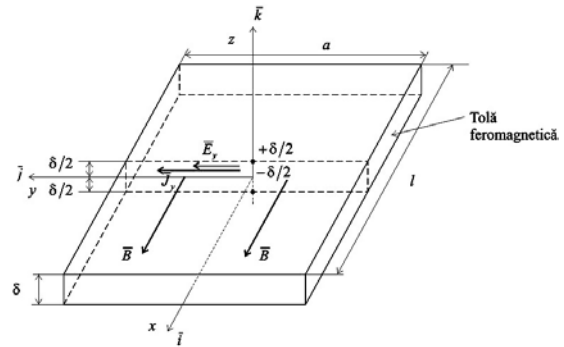


Fig. 7.33

figura 7.33 și știindu-se că \underline{H} este orientat după axa Ox (v. fig. 7.33), fiind –prin urmare– o funcție numai de z și de t . În acest caz, ecuația Helmholtz (7.61) devine:

$$d^2 H_x / dz^2 - j\omega\mu H_x = 0$$

sau –deoarece se utilizează notația $j\omega\mu = \underline{\sigma}$ – se mai poate scrie:

$$d^2 H_x / dz^2 - \underline{\sigma}^2 \cdot H_x = 0, \quad (PF 1)$$

iar în condițiile pe frontieră ale tolei din figura 7.33 sunt:

$$\underline{H}_x(z = -\delta/2) = \underline{H}_x(z = +\delta/2) = H_0. \quad (PF 2)$$

Atunci, soluția ecuației (PF 1) fiind:

$$\underline{H}_x = \underline{A}_1 \cdot e^{\underline{\sigma}z} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\underline{\sigma}z}$$

ale cărei constante de integrare rezultă din condițiile la limită (PF 2) și anume:

$$z = -\delta/2 \Rightarrow \underline{H}_x(-\delta/2) = \underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\sigma}\delta/2} + \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\sigma}\delta/2} = H_0 \quad (PF 2')$$

$$z = +\delta/2 \Rightarrow \underline{H}_x(+\delta/2) = \underline{A}_1 \cdot e^{\underline{\sigma}\delta/2} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\underline{\sigma}\delta/2} = H_0$$

și având în vedere că funcția hiperbolică $\text{ch}\underline{\sigma} \cdot \delta/2 = 1/2(e^{\underline{\sigma}\delta/2} + e^{-\underline{\sigma}\delta/2})$ rezultă:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{H}_0 / 2\text{ch}\underline{\sigma} \cdot \delta/2$$

deoarece, din motive de simetrie, $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{A}$ și atunci condițiile la limită (PF 2') dau:

$$\underline{A}(e^{-\underline{\sigma}\delta/2} + e^{\underline{\sigma}\delta/2}) = H_0 \therefore \underline{A} = H_0 / (e^{-\underline{\sigma}\delta/2} + e^{\underline{\sigma}\delta/2}) = H_0 / 2\text{ch}\underline{\sigma} \cdot \delta/2$$

Atunci soluția problemei (PF 1) cu (PF 2) –relativă la tola din figura 7.33– este:

$$\underline{H}_x = [H_0 / (2 \cdot \text{ch}\underline{\sigma} \cdot \delta/2)] \underbrace{(e^{-\underline{\sigma}z} + e^{\underline{\sigma}z})}_{2 \cdot \text{ch}\underline{\sigma} \cdot z} \text{ adică:}$$

$$\underline{H}_x(z) = H_0 \frac{\text{ch}\underline{\sigma}z}{\text{ch}\underline{\sigma}\delta/2} \quad (PF 3)$$

Mai departe, negliându-se efectul magnetic al curenților turbionari (din motivele arătate anterior, adică $\delta \ll l$ și $\sigma \ll a$) se poate considera că tola se află într-un câmp magnetic uniform (v. fig. 7.33) cu inducția exprimată în complex:

$$(PF\ 4) \quad \underline{\bar{B}} = \bar{i} \cdot \underline{B}$$

și din aceleași considerente (tolă foarte subțire) se poate considera că intensitatea câmpului electric din tolă ("responsabilă" cu producerea curenților turbionari) este, în exprimare complexă:

$$(PF\ 5) \quad \underline{\bar{E}} = \bar{J} \cdot \underline{E}_y(z)$$

și deci:

$$(PF\ 6) \quad \bar{J} = \gamma \cdot \underline{\bar{E}} = \gamma \bar{j} \underline{E}_y(z) = \bar{j} \gamma \underline{E}_y(z) = \bar{j} \bar{J}_y(z) ,$$

Atunci, aplicându-se relația (CEC 5)/subcap.7.2, adică:

$$\text{rot} \underline{\bar{E}} = -j\omega \underline{\bar{B}}$$

sau (pentru cazul tolei din figura 7.33): $\partial \underline{E}_y(z) / \partial z = -j\omega \underline{\bar{B}}$ se obține prin integrare:

$$(PF\ 7) \quad \underline{E}_y(z) = -j\omega \underline{\bar{B}}_x \cdot z + \underline{C}$$

a cărei constantă de integrare \underline{C} rezultă din condiția $-E_y(z) = E_y(-z)$, adică $\underline{C} = 0$.

Ca urmare, densitatea curentului Foucault este, conform uneia din relațiile (PF 6) și soluției (PF 7) cu $\underline{C} = 0$:

$$(PF\ 8) \quad \underline{J}_y(z) = \gamma \cdot \underline{E}_y(z) = -\gamma j\omega \underline{\bar{B}}_x \cdot z .$$

Acum se poate calcula densitatea de volum a puterii pierdute prin efect Joule ($\rho \cdot \bar{J}^2$) în tolă, în punctele de-a lungul axei z (notându-se, ca în figura 7.33, $B_x \equiv B$):

$$(PF\ 9) \quad p(z) = \rho \cdot \bar{J}_y^2(z) = \omega^2 \gamma B^2 \cdot z^2, \text{ în } [N/m^3]$$

Dacă se ține seama de soluția (PF 3), în care \bar{H} se înlocuiește în ambii membri cu \bar{B} , deoarece într-un material omogen, ca cel al tolei, în orice punct $\bar{B} = \mu \bar{H}$, rezultă:

$$p(z) = \omega^2 \gamma B^2 \cdot z^2 = \omega^2 \gamma B_0^2 |(\text{ch} \underline{\sigma} \cdot \delta z) / (\text{ch} \underline{\sigma} \cdot \delta / 2)|^2 \cdot z^2 = \\ = \omega^2 \gamma B_0^2 (\text{ch} 2mz + \cos 2nz) / (\text{ch} m\delta + \cos n\delta) \cdot z^2 ,$$

în care $|(\text{ch} \underline{\sigma} \delta z) / (\text{ch} \underline{\sigma} \delta / 2)|$ este modulul expresiei complexe $(\text{ch} \underline{\sigma} \delta z) / (\text{ch} \underline{\sigma} \delta / 2)$, la calcularea căreia s-a ținut seama de identitatea $\text{ch} jx = \cos x$, iar m și n sunt niște constante specifice cazului tolei din figura 7.33.

Atunci, pentru volumul întregii tole rezultă pierderea de putere activă (în W/tolă):

$$(7.80) \quad P = \int_{\text{tola}} p(z) dv = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} p(z) l dz = \frac{\omega^2 \gamma B_0^2 h l}{\text{ch} m\delta + \cos n\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\text{ch} 2mz + \cos 2nz) dz = \frac{\omega^2 \gamma B_0^2 h l}{\text{ch} m\delta + \cos n\delta} \cdot \\ \cdot [\text{sh} m\delta (\delta^2 / 4m + 1 / 2m^3) - (\delta / 2m^2) \text{ch} m\delta + (\delta / 2n^2) \cos n\delta + \sin n\delta (\delta^2 / 4n - 1 / 2n^3)] .$$

Se poate proceda și în alt mod, calculându-se integrala de volum extinsă la întreg volumul tolei, aplicată directă a expresiei (PF 9), fără a-l mai înlocui pe B ; va rezulta puterea totală disipată în tola întregă:

$$(7.81) \quad P = \int_{\text{tola}} p(z) dv = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \omega^2 \gamma B^2 z^2 l dz = \omega^2 \gamma B^2 l \cdot a \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz = \omega^2 \gamma B^2 l a \delta^3 / 12 .$$

Dacă în această ultimă expresie (7.81) a lui P (în W/tolă) se fac înlocuirile: $\omega = 2\pi f$, $B = B_{\max} / \sqrt{2}$ (B fiind valoarea efectivă a inducției magnetice, uniformă în tolă) și $v_{\text{tola}} = l a \delta / 2$ va rezulta formula practică:

$$(7.81') \quad P = \pi^2 \gamma \cdot \delta^2 f^2 B_{\max}^2 \cdot v_{\text{tola}} / 6, \text{ în } [W]$$

sau pierderile în fier, din tolele feromagnetice, prin curenții Foucault, sub forma densității de volum a puterii disipate prin efect Joule de curenții turbionari sunt:

$$p_F = \pi^2 \gamma \delta^2 f^2 B_{\max}^2 / 6 \text{ în } [\text{W}/\text{m}^3]. \quad (7.82)$$

După cum se poate vedea din relația (7.82), densitatea de volum a pierderilor prin curenți Foucault (p_F) sunt proporționale cu grosimea tolei la pătrat, cu pătratul frecvenței și cu amplitudinea inducției la pătrat, exprimate în tesla (B_{\max}), în herți (f) și în metri (δ). Rezultă că la grosimile uzuale ale tolelor ($\delta=0,35\dots 1,5$ mm), se introduce în expresia (7.82) a pierderilor o valoare $\delta^2=(0,1225\dots 2,25)\cdot 10^{-6}$ m², ceea ce duce la o micșorare substanțială a lui p_F .

Comparându-se cele două expresii ale puterii active disipate într-o toală de curenții Foucault, (7.80) –o relație considerată "generală", cu (7.81)– valabilă în cazul când adâncimea de pătrundere p este mult mai mare decât grosimea tolei δ , se constată că dacă în expresia (7.80) se ia $p \gg \delta$ ea dă o valoare care tinde către valoarea ce se obține cu formula (7.81).

7.3.2. Pierderile prin histerezis

În miezul feromagnetic al circuitelor magnetice din aparatele și mașinile electrice, în care câmpul magnetic se află în regim armonic permanent (cu frecvența f), se mai produc și pierderi de putere activă datorate fenomenului de histerezis al relației $B=f(H)$ –vezi cap.6– specific materialelor feromagnetice.

După cum se știe (v. subcap. 6.2), dacă în mediul (materialul) unui sistem electromagnetic, a cărei inducție magnetică are –la un moment dat– valoarea B , se produce o creștere elementară a intensității câmpului magnetic (cu dH), atunci energia câmpului magnetic rezidentă în material, va avea o variație elementară, în fiecare punct (deci ca densitate de volum a energiei) dw_m dată de:

$$dw_m = B \cdot dH, \text{ în } [\text{Ws}/\text{m}^3] \quad (\text{PH 1})$$

care dimensional se verifică prin: $[B] \cdot [H] = [\varphi]/[L]^2 \cdot [I]/[L] = ([U] \cdot [t] \cdot [I])/[L]^3 = [W]/[L]^3$ și în care B este o funcție de H : $B=B(H)$.

În regim armonic permanent, câmpul magnetic din miezul feroelectric este supus unei magnetizări repetate, cu frecvența f , intensitatea câmpului magnetic variind între două valori extreme $-H_{\max}$ și $+H_{\max}$, conform ciclului de histerezis al materialului (v. subcapitolul 6.2). În acest fel, pentru un singur ciclu, densitatea de volum a energiei magnetice "puse în joc" este:

- la creșterea lui H , de la $-H_{\max}$ la $+H_{\max}$ sursele de câmp (de exemplu, bobinele de excitație ale circuitului magnetic alimentate de la surse electrice cu t.e.m. alternativă), deci pe porțiunea ascendentă a ciclului de histerezis (fig.7.34 a), cedează circuitului magnetic energia cu densitatea de volum:

$$w_{ma} = \int_{-H_{\max}}^{+H_{\max}} B(H) dH = \int_{-H_{\max}}^0 B(H) dH + \int_0^{+H_{\max}} B(H) dH = k_B k_H (S_a^- + S_a^+), \quad (\text{PH 2})$$

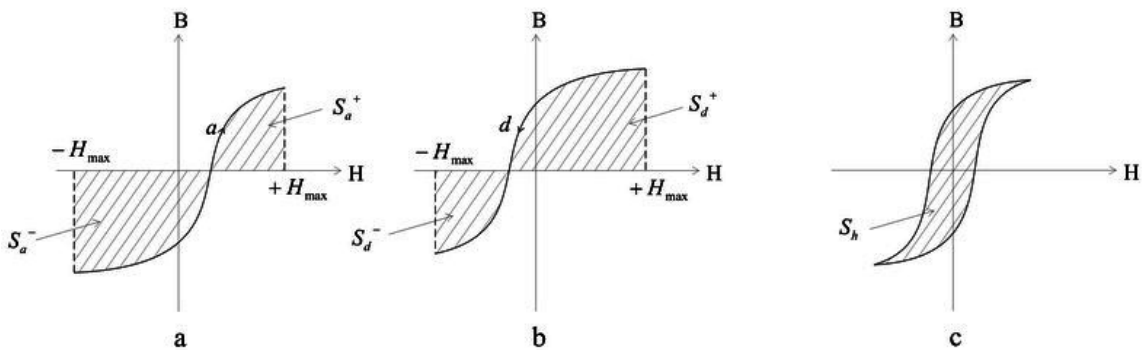


Fig. 7.34

care se obțin prin integrarea expresiei (PH 1) și în care: S_a^- și S_a^+ sunt suprafețele determinate de curba ascendentă a ciclului de histerezis cu axa abscisei, H , între limitele de integrare, $-H_{max}$ la 0 pentru S_a^- , și 0 la H_{max} pentru S_a^+ (aceasta conform semnificației geometrice a integralei), iar k_B și k_H sunt coeficienți de scară ai graficului ciclului de histerezis. Astfel, dacă k_B se exprimă în T/cm, k_H în A/mcm, iar S_a^- și S_a^+ în cm², integrala (PH 2) și deci w_{md} rezultă în [T·A/m], adică în [Ws/m³]. Această energie este înmagazinată în materialul magnetic;

- imediat după aceasta, urmează scăderea lui H de la $+H_{max}$ la $-H_{max}$, după *curba descendentă a ciclului de histerezis* (fig.7.34 b), când –în intervalul unei jumătăți de perioadă (T/2)– materialul feromagnetic cedează energia magnetică având densitatea de volum:

$$(PH 3) \quad w_{md} = \int_{+H_{max}}^{-H_{max}} B(H)dH = \int_{+H_{max}}^0 B(H)dH + \int_0^{-H_{max}} B(H)dH = k_B k_H (S_a^+ + S_a^-),$$

așa cum se specifică în figura 7.34 b.

Din cauza fenomenului de histerezis, caracteristic materialelor feromagnetice, cele două porțiuni ale ciclului de histerezis (ascendent și descendent) nu coincid și de aceea $w_{md} \neq w_{ma}$, fiind mai mare. Diferența dintre ele, adică:

$$(PH 4) \quad w_{ma} - w_{md} = k_B k_H S_h = w_h, \text{ în Ws/m}^3$$

este energia cedată de miezul feromagnetic care nu se mai restituie sursei de energie electrică ce alimentează bobinele de excitație ale circuitului magnetic, ci se transformă în căldură, constituind astfel pierderile de energie în fier prin fenomenul de histerezis w_h , care –la scara de reprezentare grafică ($k = k_B k_H$)– sunt proporționale cu suprafața delimitat pe grafic (S_h) de ciclul de histerezis (fig.7.34 c):

$$(7.83) \quad w_h = k \cdot S_h,$$

în care dimensiunile pot fi: k în [T(A/m)/cm²], S_h în [cm²] și w_h în [Ws/m³ și ciclu de histerezis].

Integralele (PH 2) și (PH 3) nu pot fi calculate deoarece, în cazul materialelor feromagnetice legea de material $B=B(H)$ nu poate fi exprimată printr-o funcție analitică suficient de precisă. De aceea densitatea de volum a energiei pierdută prin efectul de histerezis se determină prin planimetrarea suprafeței închisă de ciclul de histerezis al materialului feromagnetic analizat. În acest scop există chiar aparate de măsurat specializate (așa cum este aparatul numit ferotester, care este dotat cu un osciloscop cu cadranul calibrat în unități de suprafață –în mm²– printr-o rețea reticulară dreptunghiulară foarte fină) sau se utilizează sisteme de calcul care preiau –printr-o placă de achiziție a datelor– măsurile B și H aferente unei epruvete realizată din materialul studiat (introdu-se într-o bobină de excitație) și care determină prin calcul numeric incremental (cu ΔH foarte mic) integralele (PH 2) și (PH 3).

Dacă se cunoaște w_h , definit prin (7.83) sau măsurat, atunci pierderile în fier prin histerezis, exprimate ca densitatea de volum (sau masică) a puterii pierdute, p_h în W/m³ (sau W/kg) se determină din expresia:

$$(7.84) \quad p_h = d w_h / dt = w_h / T = f w_h = k f S_h,$$

care sunt deci proporționale cu frecvența f a regimului electromagnetic armonic permanent, deoarece –evident– într-o unitate de timp (secundă) se produc f cicluri de histerezis.

În practică, pentru unitatea de greutate, pierderile p_h se calculează cu formula empirică:

$$(7.85) \quad p_h = k_h f B_{max}^\alpha$$

unde k_h este un coeficient de proporționalitate (care depinde de materialul magnetic), iar α are valori cuprinse între 1,6 și 2 (în funcție de amplitudinea B_{max} a inducției magnetice).

Expresia (7.84) a pierderilor prin histerezis justifică faptul că aparatele și mașinile electrice de curent alternativ folosesc materiale feromagnetice de tip "moale" (vezi subcapitolul 6.2), cu ciclul de histerezis îngust (cu $B_r \leq 0,6$ T și $H_c \leq 40$ A/m).

Din aceste două paragrafe (7.3.1 și 7.3.2), rezultă că în circuitele feromagnetice care funcționează în regim armonic permanent (cu o frecvență $f > 0$), se produc pierderile de putere p_{Fe} ("în fier"), care exprimate în W/m³ (sau W/kg) sunt date de suma:

$$p_{Fe} = p_F + p_h \quad (7.86)$$

a pierderilor prin curenți Foucault și prin histerezis. Aceste pierderi, la o frecvență de lucru dată (de pildă, $f = 50$ Hz) și pentru o anumită valoare a inducției maxime (B_{max}), depind de natura materialului feromagnetic și de grosimea tolelor utilizate la confecționarea circuitelor magnetice. Ca exemplu, în tabelul 7.3 sunt indicate pierderile în fier ale unor tole utilizate în construcția transformatoarelor electrice industriale, la frecvența $f = 50$ Hz și la inducția maximă dată în tabel.

Tabelul 7.3

Pierderile în tolele de transformator, la 50 Hz

Calitatea tolei	Grosimea δ [mm]	Inducția B_{max} [T]	Pierderile în fier p_{Fe} [W/kg]
E-I (tole cu 0,4%-0,8% Si)	0,5	1,98	3,6
	0,75	1,98	-
	1	1,98	8
	1,5	1,98	-
E-II (tole cu 0,6%-1,2% Si)	0,5	1,95	3
E-III (tole cu 1,8%-2,3% Si)	0,5	1,93	2,4
E-IV (tole cu 3,6%-4,4% Si)	0,35	1,85	1,3
	0,5	1,85	1,7

Tolele sunt utilizate pentru executarea circuitelor magnetice folosite la joasă frecvență (până la cel mult 15kHz); la frecvențe mai ridicate, circuitele magnetice se confecționează din pulberi magnetice incluse într-o masă-liant izolantă (cazul miezurilor denumite ferocarturi) sau din pulberi magnetice sinterizate (ferite).

7.4. Aplicații

Sub acest titlu, în cadrul prezentului subcapitol se vor analiza câteva cazuri particulare referitoare la propagarea undelor electromagnetice.

7.4.1. Propagarea undelor electromagnetice în diferite medii

În cazul propagării undelor electromagnetice plane (v. § 7.1.3), așa cum rezultă și din figurile 7.10; 7.11 și 7.12, mărimile de stare electromagnetică, \vec{E} și \vec{H} , depind numai de o singură coordonată spațială (care, în figurile citate, este y) și de timp: $\vec{E}(y,t)$ și $\vec{H}(y,t)$.

Aplicația 7.1. Să se determine viteza de propagare a fazei, în cazul unei unde electromagnetice plane în regim armonic, cu pulsația ω .

Din expresiile câmpurilor $\vec{E}(y,t)$ și $\vec{H}(y,t)$ – v. § 7.1.3 – se poate deduce viteza de propagare a fazei, care în cazul unei variații armonice are expresia $(\omega t - \beta y)$, conform relației:

$$\omega t - \beta y = \text{const.} \quad \therefore y = \frac{1}{\beta} \omega t - \frac{1}{\beta} \text{const.} \Rightarrow v_f = dy/dt = \omega/\beta,$$

unde v_f este viteza de propagare a fazei, ω – pulsația câmpului electromagnetic și β un termen ce măsoară defazajul datorat propagării. În lucrarea Nicolau, Edm., 1972, se arată că β are expresia:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}}.$$

Atunci, știindu-se că $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$ (viteza de propagare în vid a luminii), viteza de propagare $v_f = \omega/\beta$ capătă expresia:

$$(7.87) \quad v_f = c \left(\frac{\epsilon_r \mu_r}{2} A \right)^{-1/2} \text{ în care } A^2 = 1 + a^2 \text{ și } a^2 = 1 + (\gamma/\epsilon\omega)^2.$$

Se observă că în vid, pentru care $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ și $\gamma = 0$), defazajul $\beta_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ și viteza de propagare a fazei $v_f = c$ (adică este egală cu viteza luminii).

Aplicația 7.2. Să se determine lungimea de undă într-un mediu dat prin parametrii de material ϵ , μ și γ .

Lungimea de undă λ într-un mediu dat se definește ca fiind parcursul după care faza se schimbă cu 2π , ceea ce duce la expresia $\beta\lambda = 1$, rezultând:

$$(7.88) \quad \lambda = 1/\beta.$$

Deoarece β într-un material diferă de β_0 (în vid), rezultă că și λ în material va avea o valoare diferită de λ_0 din vid.

Aplicația 7.3. Să se determine adâncimea de pătrundere a undelor electromagnetice plane în medii slab conductoare.

În paragraful 7.2.1 s-a determinat expresia adâncimii de pătrundere (notată cu p) în medii conductoare masive, caracterizate de $\epsilon_r = 1$ și un γ relativ mare (deci în medii puternic disipative). În cadrul acestei aplicații, se va determina adâncimea de pătrundere în mediile ambientale de la suprafața solului (aer, sol uscat, apă de mare etc.) a undelor radio. În acest caz, în care $\epsilon_r \gg 1$ și γ este relativ mică, efectul de disipație a energiei electromagnetice este mai mic, adâncimea de pătrundere este mult mai mare decât la conductorii masivi (metri, zeci și sute de metri, față de p cu valori de ordinul milimetrilor sau fracțiunilor de mm). De aceea, în acest caz, adâncimea de pătrundere se notează cu d și se exprimă în [m].

După cum se știe, disipația face ca energia undei să scadă pe parcursul propagării, la fel ca și intensității câmpului (E și H) care sunt atenuate cu un factor α (definit în § 7.2.1).

Legat de acest fenomen, pentru propagarea undelor electromagnetice plane în mediile ambientale uzuale se definește adâncimea de pătrundere d (sau pe scurt *pătrunderea* d) ca fiind parcursul pe direcția propagării undei plane după care intensitatea câmpului electric scade într-o proporție dată. În cazul propagării undelor radio această proporție se ia de 10^6 (un milion de ori).

În acest caz se poate scrie:

$$E(y_0) = E_0 e^{-\alpha y_0} \text{ și } E(y_0 + d) = E_0 e^{-\alpha(y_0 + d)}$$

și atunci:

$$(7.89) \quad \frac{E(y_0 + d)}{E(y_0)} = 10^{-6} \Rightarrow \alpha d \lg e = 6 \Rightarrow d = 13,81 / \alpha.$$

În cazul general, atenuarea unui mediu α , are –conform Nicolau, Edm., 1972– expresia:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon\mu} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}}.$$

Spre exemplificare, în tabelul 7.4 sunt indicate câteva date privind propagarea undelor electromagnetice radio (cu diferite lungimi de undă) în două medii caracteristice pentru radiotehnică (după Nicolau, Edm., 1972).

Tabelul 7.4
Propagare undelor radio

Mediul	E_r	Γ [s/m]	λ [m]	α [1/m]	d [m]	V_f [m/s]
Sol uscat	4	10^{-6}	20.000	$7,66 \cdot 10^{-3}$	1.800	$1,22 \cdot 10^7$
			2.000	$2,42 \cdot 10^{-2}$	570	$3,86 \cdot 10^8$
			200	$6,54 \cdot 10^{-2}$	210	$1,04 \cdot 10^8$
			20	$9,40 \cdot 10^{-2}$	147	$1,34 \cdot 10^8$
			2	$9,41 \cdot 10^{-2}$	147	$1,5 \cdot 10^8$

Mediul	ϵ_r	Γ [s/m]	λ [m]	α [1/m]	d [m]	V_f [m/s]
Apă de mare	80	4	20.000	0,486	28,4	$1,93 \cdot 10^5$
			2.000	1,54	8,96	$6,13 \cdot 10^5$
			200	4,86	2,84	$1,93 \cdot 10^6$
			20	15,4	0,896	$6,13 \cdot 10^6$
			2	45	0,307	$1,75 \cdot 10^7$

Se constată, din tabelul 7.4, că în solul uscat și în apa de mare undele electromagnetice nu pătrund prea mult în mediu (sau foarte puțin) atunci când frecvența crește (lungimea de undă λ scade – se reamintește că există relațiile: $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ sau $f = c/\lambda$ și $\omega = 2\pi c/\lambda$). Undele electromagnetice lungi pătrund relativ mult în soluri (1.800 m), dar foarte puțin (30 cm) în apa mării. De aceea, undele lungi se pot utiliza (se utilizează chiar) la prospecțiunile geofizice și nu se poate realiza un radar electromagnetic submarin.

7.4.2. Reflexia și refracția undelor electromagnetice

Modelarea fenomenelor de reflexie și refracție a undelor electromagnetice se poate realiza simplu în cazul undelor plane, ele fiind similare cu modelele utilizate pentru descrierea reflexiei și refracției luminii (care este de natură electromagnetică).

Un prim model este acela al lui Snellius.

Aplicația 7.4. Deducerea ecuațiilor lui Snellius

Se consideră o undă electromagnetică plană, în regim armonic, care se propagă prin două medii diferite, 1 și 2, separate printr-o suprafață plană teoretic infinită (fig. 7.35).

În figura 7.35 s-a reprezentat o secțiune (perpendiculară pe plan) prin mediile diferite 1 și 2, în desen planul (teoretic infinit) fiind reprezentat de dreapta PP' , ce reprezintă planul în secțiune.

O undă electromagnetică care s-a format în mediul 1 și se îndreaptă către mediul 2, numită *undă incidentă* și având direcția de propagare dată de versorul \vec{n}_0 (ce face cu versorul \vec{n} , normalei la planul de separație, unghiul θ_0 – numit *unghi de incidență*), ajungând la planul PP' se poate reîntoarce înapoi în mediul 1, această undă numindu-se *undă reflectată*, după o direcție având versorul \vec{n}_1 , ca face cu \vec{n} unghiul θ_1 , numit *unghi de reflexie*; acest fenomen poartă numele de *reflexia undei*. Dacă undă incidentă se propagă și în mediul 2, penetrând planul de separație, atunci (mediul 2 fiind diferit de mediul 1, prin proprietățile de material) undă incidentă își schimbă direcția după care se propagă în mediul 2, fiind după un versor \vec{n}_2 , care face cu \vec{n} unghiul θ_2 numit *unghi de refracție*, acest fenomen – de schimbare a direcției de propagare a undei dintr-un mediu în altul – numindu-se *refracția undei*.

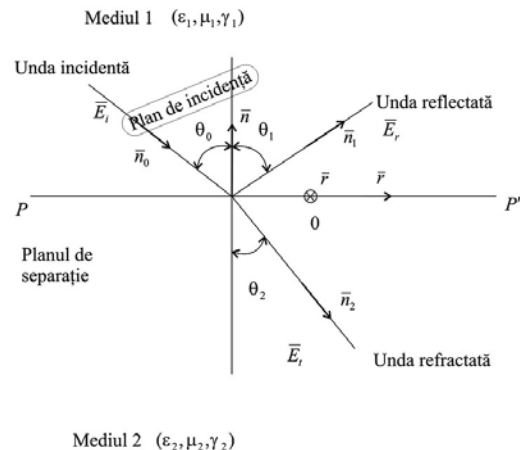


Fig. 7.35

Dacă se ia originea O în planul PP' , atunci ecuația acestui plan de separație este: $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$, unde \vec{r} este orice rază vectorială cuprinsă în acest plan și pornind din originea O (v. fig. 7.35). În acest caz, vectorul câmpului electric incident de intensitate \vec{E}_i , exprimat în complex este:

$$(7.4-1) \quad \bar{E}_i = \text{Re} \left\{ \bar{E}_0 e^{j(\omega t + k_1 \bar{n} \cdot \bar{r})} \right\},$$

unde k_1 este *constanta de propagare* în mediul 1, definită prin $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1$.

Se numește *plan de incidență*, planul determinat de versorii \bar{n} și \bar{n}_0 (v. fig. 7.35). Dacă se notează cu \bar{E}_t câmpul care trece în mediul 2 și cu \bar{E}_r câmpul care se reflectă înapoi în mediul 1 (v. fig. 7.35), expresiile lor sunt (dacă admitem că undele refractată și reflectată sunt tot unde plane):

$$(7.4-2) \quad \bar{E}_t = \text{Re} \left\{ \bar{E}_2 e^{j(\omega t - k_2 \bar{n} \cdot \bar{r})} \right\},$$

$$(7.4-3) \quad \bar{E}_r = \text{Re} \left\{ \bar{E}_1 e^{j(\omega t - k_1 \bar{n}_1 \cdot \bar{r})} \right\},$$

în care $k_2 = (\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2)^{1/2}$ este constanta de propagare în mediul 2.

Legat de modelele (7.4-1), (7.4-2) și (7.4-3), se pun –în continuare– următoarele două probleme:

- ce raporturi geometrice există între versorii $\bar{n}, \bar{n}_0, \bar{n}_1$ și \bar{n}_2 ?
- ce raporturi există între vectorii exprimați în complex $\bar{E}_j, j = 0, 1, 2$?

La prima problemă, soluția se determină cu formulele lui Snellius (care au fost stabilite pentru Optică), ce vor fi determinate în continuare – relațiile (7.90) și (7.91). Răspunsul la problema a doua îl dă ecuațiile lui Fresnel, care vor fi determinate în paragraful următor (§ 7.4.3), în cadrul aplicației 7.5.

Se observă că vectorii complecși \bar{E}_j sunt independenți de raza vectorie \bar{r} din planul PP' . De aceea, pentru ca să fie valabile teoremele de conservare ale componentelor tangențiale ale câmpului electromagnetic la planul PP' , este necesar ca argumentele exponențiale să coincidă în planul $\bar{n} \cdot \bar{r} = 0$, ceea ce se exprimă prin:

$$(7.90) \quad k_1 \bar{n}_0 \cdot \bar{r} = k_1 \bar{n}_1 \cdot \bar{r} = k_2 \bar{n}_2 \cdot \bar{r},$$

aceste relații fiind valabile pentru orice $\bar{r} \subset (PP')$.

Introducându-se expresia produselor scalare în (7.90) se va obține:

$$(7.4-4) \quad k_1 n_0 r \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) = k_1 n_1 r \cos(\bar{n}_1, \bar{r}) = k_2 n_2 r \cos(\bar{n}_2, \bar{r}).$$

Deoarece vectorul razei de poziție \bar{r} este situat în planul PP' (v. fig. 7.35), fiind unul oarecare, rezultă că unghiurile din expresia precedentă sunt:

$$(\bar{n}_0, \bar{r}) = \pi/2 - \theta_0, \quad (\bar{n}_1, \bar{r}) = \pi/2 - \theta_1 \quad \text{și} \quad (\bar{n}_2, \bar{r}) = \pi/2 - \theta_2,$$

astfel că egalitățile (7.4-4) devin:

$$(7.4-5) \quad k_1 n_0 r \cos(\pi/2 - \theta_0) = k_1 n_1 r \cos(\pi/2 - \theta_1) = k_2 n_2 r \cos(\pi/2 - \theta_2)$$

sau, deoarece $\cos(\pi/2 - \theta_j) = \sin \theta_j$ ($j = 0, 1, 2$) și simplificându-se cu r egalitățile (7.4-5) iau forma:

$$(7.4-6) \quad k_1 n_0 \sin \theta_0 = k_1 n_1 \sin \theta_1 = k_2 n_2 \sin \theta_2.$$

Dar $n_0 = n_1 = n_2 = 1$, deoarece sunt modulele (unitare) ale versorilor \bar{n}_0, \bar{n}_1 și \bar{n}_2 și atunci egalitățile (7.4-6) devin:

$$(7.91) \quad k_1 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2,$$

o altă formă a relațiilor lui Snellius, care arată că în procesele de reflexie și de refracție electromagnetice plane versorii $\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2$ și \bar{n} sunt coplanari, ceea ce înseamnă că direcțiile de propagare ale undelor de incidență, reflectată și refractată sunt în același plan cu normala la suprafața de discontinuitate dintre două medii diferite.

Considerându-se prima egalitate (7.91) rezultă:

$$(7.92) \quad k_1 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 \quad \rightarrow \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_0 \quad \text{sau} \quad \theta_1 = \theta_0,$$

adică în procesul de reflexie a undelor electromagnetice plane, unghiul de reflexie este egal întotdeauna cu unghiul de incidență (sau versorii undelor incidentă și reflectată sunt ortogonali: $\vec{n}_0 \perp \vec{n}_1$).

Dacă se ia ultima egalitate (7.91), în care constantele de propagare se înlocuiesc cu: $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ și $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ va rezulta:

$$\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin \theta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \sin \theta_2,$$

de unde se va obține:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}}, \quad (7.93)$$

adică o relație între unghiurile de reflexie și refracție.

Mai interesantă este egalitatea dintre primul membru și ultimul membru (7.91), adică $k_1 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2$ din care rezultă raportul $\sin \theta_2 / \sin \theta_0$, ce se notează cu n_{12} și se numește *indicele de refracție relativ*, corespunzător celor două medii, și anume:

$$n_{12} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (7.94)$$

în care v_1 și v_2 sunt vitezele de propagare a undelor în cele două medii (considerate cu $\gamma = 0$). Dacă, așa cum se întâmplă în practica radiotehnicii, cele două medii au același μ , atunci indicele

de refracție este $n_{12} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{1/2}$.

7.4.3. Formulele lui Fresnel

Aceste formule se referă tot la procesele de reflexie și refracție ale undelor electromagnetice plane (inițial la undele luminoase) pentru care se stabilesc modele pe baza –mai generală– a teoriei sistemelor.

Astfel, în planul de discontinuitate (ce separă două medii diferite), unda incidentă –„care vine”– constituie mărimea de intrare, iar unda reflectată și unda refractată sunt mărimile de ieșire. Sistemul fizic fiind liniar, mărimile de ieșire sunt proporționale –ca intensitate– cu cea de intrare. Formulele lui Fresnel sunt modele ce redau funcțiile de transfer ale sistemului fizic în care se produc fenomenele de reflexie și refracție, prin determinarea raporturilor dintre intensitatea câmpului electromagnetic, exprimate ca vectori în complex (\vec{E} și \vec{H}), de la ieșiri și intrare, sub forma așa – numiților coeficienți ai lui Fresnel.

Aplicația 7.5. Să se determine *coeficienții lui Fresnel*, pe baza noțiunilor cunoscute din paragraful 7.4.2.

Metodologia determinării coeficienților lui Fresnel constă în:

- aplicarea teoremei conservării componentelor tangențiale ale câmpului electromagnetic (\vec{E}_{tg} și \vec{H}_{tg}), exprimată în acest caz prin egalitățile (7.90), la trecerea prin planul de discontinuitate ce separă cele două medii;

- exprimarea intensității câmpului magnetic \vec{H} , în funcție de cea electrică \vec{E} , datorită faptului că toate undele în discuție (incidentă, reflectată și refractată) sunt unde electromagnetice plane;

- în această situație, rezultă numai două relații în care apar trei necunoscute: \vec{E}_0 (intensitatea câmpului electric al unde incidente, considerată ca referință), \vec{E}_1 (câmpul reflectat)

și $\underline{\bar{E}}_2$ (câmpul refractat), ceea ce înseamnă că trebuie determinate funcțiile de transfer numai prin raporturile: $\underline{\bar{E}}_1 / \underline{\bar{E}}_0$ și $\underline{\bar{E}}_2 / \underline{\bar{E}}_0$.

Ca și în cazul aplicației precedente, 7.4 (v. fig. 7.35), și aici se va numi *plan de incidență* planul format de versorii \bar{n} (al normalei la planul de separare PP') și \bar{n}_0 (al direcției de propagare al undei incidente), așa ca în figura 7.36.

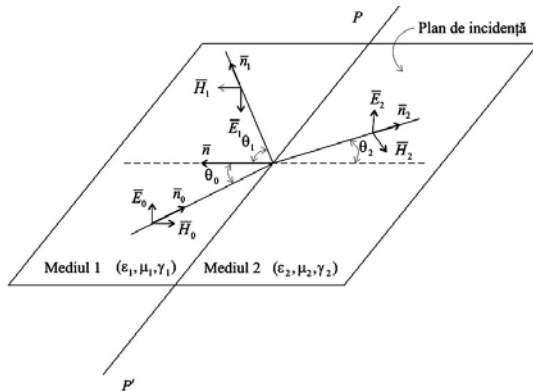


Fig. 7.36

În continuare se vor considera două cazuri distincte rezultate din importanța lor practică (din domeniul radiotelecomunicațiilor):

1^o cazul în care vectorul complex $\underline{\bar{E}}_0$ este paralel cu planul de separare PP' , fiind deci perpendicular pe planul de incidență (așa cum se arată în figura 7.36);

2^o cazul în care $\underline{\bar{E}}_0$ este cuprins în planul de incidență (v. fig. 7.37).

Primul caz corespunde, în radiotehnică, polarizației electrice orizontale, $\underline{\bar{E}}$ fiind orizontal atunci când planul PP' este suprafața solului terestru (considerat plan). În cel de al doilea caz

se are în vedere ceea ce în radiotehnică se numește polarizația verticală.

1^o În cazul așa-numitei **polarizații orizontale**, vectorii $\underline{\bar{E}}$ și $\underline{\bar{H}}$ se prezintă (pentru toate undele: incidentă, reflectată sau refractată) așa ca în figura 7.36. Sensurile lor sunt în așa fel alese încât densitatea de suprafață a puterii, $\underline{\bar{S}}$ (vectorul Poynting: $\underline{\bar{S}} = \underline{\bar{E}} \times \underline{\bar{H}}$, în W/m²), să fie pe direcția de proagare a celor trei unde, adică a versorilor \bar{n}_0 , \bar{n}_1 și \bar{n}_2 . Atunci rezultă:

$$(7.5-1) \quad \underline{\bar{E}}_0 + \underline{\bar{E}}_1 = \underline{\bar{E}}_2$$

și, ținându-se seama și de expresia (7.91), se mai poate scrie:

$$(7.5-2) \quad \underline{\bar{E}}_0 \cos \theta_0 - \underline{\bar{E}}_1 \cos \theta_1 = (\mu_1 k_2 / \mu_2 k_1) \underline{\bar{E}}_2 \cos \theta_2.$$

Avându-se în vedere relațiile lui Snellius – aceleași egalități (7.91) – expresia precedentă (7.5-2) devine:

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_0, \quad k_2 \cos \theta_2 = (k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2},$$

de unde rezultă următorii coeficienți ai lui Fresnel în cazul polarizației orizontale:

$$(7.95^\circ) \quad \underline{\bar{E}}_1 / \underline{\bar{E}}_0 = (a_o - b_o)(a_o + b_o) \quad \text{și} \quad \underline{\bar{E}}_2 / \underline{\bar{E}}_0 = 2a_o / (a_o + b_o),$$

unde termenii a_o și b_o au expresiile:

$$a_o = \mu_2 k_1 \cos \theta_0 \quad \text{și} \quad b_o = \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}.$$

2^o În cazul în care $\underline{\bar{E}}_0$ este cuprins în planul de incidență, așa cum se arată în figura 7.37, adică în cazul **polarizației verticale**, condiția de conservare a componentelor tangențiale se aplică pentru câmpul $\underline{\bar{H}}$, rezultând:

$$(7.5-3) \quad \underline{\bar{H}}_0 + \underline{\bar{H}}_1 = \underline{\bar{H}}_2,$$

adică (v. fig. 7.37):

$$(7.5-4) \quad \underline{\bar{H}}_0 \cos \theta_0 = \underline{\bar{H}}_1 \cos \theta_1 = (\mu_2 k_1 / \mu_1 k_2) \underline{\bar{H}}_2 \cos \theta_2.$$

Din identitatea formală a relațiilor (7.5-4) și (7.5-2), făcându-se înlocuirile: $\underline{\bar{H}}_i \leftrightarrow \underline{\bar{E}}_i$ ($i = 0, 1, 2$), $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ și $k_1 \leftrightarrow k_2$, rezultă că în cazul polarizației verticale coeficienții lui Fresnel sunt dați de relația (7.95^o) sub forma rezultată după înlocuirile precizate și anume:

$$(7.95^\circ) \quad \underline{\bar{H}}_1 / \underline{\bar{H}}_0 = (a_v - b_v)(a_v + b_v) \quad \text{și} \quad \underline{\bar{H}}_2 / \underline{\bar{H}}_0 = 2a_v / (a_v + b_v),$$

în care termenii a_v și b_v au expresiile:

$$a_v = \mu_1 k_2 \cos \theta_0 \text{ și } b_v = \mu_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0} .$$

În radiocomunicații prezintă importanță raportul $\underline{E}_1 / \underline{E}_0$ (notat cu \underline{R}) pentru undele (radiațiile) care vin aproape paralel cu planul de separare PP' , deci la care $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$. În acest caz, așa cum rezultă din (7.95°), $\underline{R} \rightarrow -1$ ceea ce înseamnă $|R|=1$ și $\theta_1 = 180^\circ$, deoarece $\underline{R} \rightarrow -1$ înseamnă în complex $\underline{R} = -j\underline{R} = |R|e^{j180^\circ}$. Această concluzie este valabilă pentru ambele tipuri de polarizări; astfel, pentru $\theta_0 = 0^\circ$, $\underline{R} \rightarrow 1$ (deci cu $|R|=1$ și $\theta_1 = 0$), adică atunci când undele radio „cad” perpendicular pe suprafața solului, reflexia se face fără atenuare și fără schimbarea fazei.

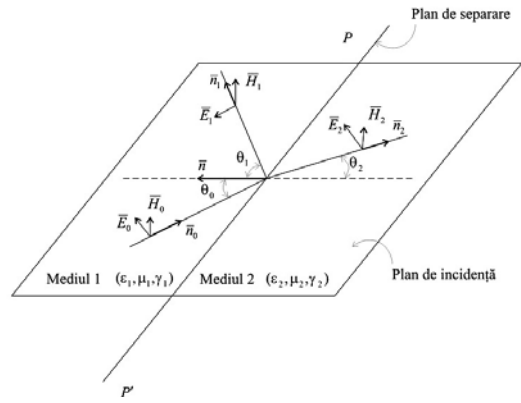


Fig. 7.37

Problema raportului dintre valorile complexe ale intensității câmpurilor electrice (notate la modul general cu \underline{I} – pentru unda i incidentă, \underline{R} – pentru unda r reflectată și \underline{T} – pentru unda refractată/ care a t recut prin planul de separare), poate fi tratată –pentru undele plane– global dacă se introduce indicele \parallel pentru coponenta câmpului paralelă cu planul de incidență și cu indicele \perp pentru componenta perpendiculară pe acest plan. Teorema continuității componentelor tangențiale ale câmpurilor \underline{E}_{tg} și \underline{H}_{tg} , conform egalităților (7.90), permite să se scrie cu notațiile generalizate:

$$\begin{aligned} \{(\underline{I}_{\parallel} = \underline{R}_{\parallel}) \cos \theta_0 = \underline{T}_{\parallel} \cos \theta_0 \\ \underline{I}_{\perp} + \underline{R}_{\perp} = \underline{I}_{\perp} \\ \varepsilon_2^2 (\underline{I}_{\perp} - \underline{R}_{\perp}) \cos \theta_0 = \varepsilon_1^2 \cos \theta_2 \underline{T}_{\perp} \\ \varepsilon_2^2 (\underline{I}_{\parallel} + \underline{R}_{\parallel}) = \varepsilon_1^2 \underline{T}_{\parallel} . \end{aligned} \quad (7.5-5)$$

Se remarcă faptul că sistemul (7.5-5), de patru ecuații cu patru necunoscute, se poate separa în două sisteme, în care apar fie numai componentele \parallel , fie numai componentele \perp , ceea ce arată că aceste două categorii de componente sunt independente, fapt specific undelor electromagnetice plane (v. § 7.1.3).

Din sistemul (7.5-5) se obțin **formulele clasice ale lui Fresnel** și anume:

$$\underline{T}_{\parallel} = \frac{2\varepsilon_2^2 \cos \theta_0}{\varepsilon_1^2 \cos \theta_0 + \varepsilon_2^2 \cos \theta_2} \underline{I}_{\parallel} , \quad (7.96 \text{ tp})$$

$$\underline{T}_{\perp} = \frac{2\varepsilon_2^2 \cos \theta_0}{\varepsilon_2^2 \cos \theta_0 + \varepsilon_1^2 \cos \theta_2} \underline{I}_{\perp} , \quad (7.96 \text{ tn})$$

$$\underline{R}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_1^2 \cos \theta_0 - \varepsilon_2^2 \cos \theta_2}{\varepsilon_1^2 \cos \theta_0 + \varepsilon_2^2 \cos \theta_2} \underline{I}_{\parallel} , \quad (7.96 \text{ rp})$$

$$\underline{R}_{\perp} = \frac{\varepsilon_2^2 \cos \theta_0 - \varepsilon_1^2 \cos \theta_2}{\varepsilon_2^2 \cos \theta_0 + \varepsilon_1^2 \cos \theta_2} \underline{I}_{\perp} . \quad (7.96 \text{ rn})$$

Utilizându-se relațiile (7.96) se pot calcula raporturile $\underline{R}/\underline{I}$ și $\underline{T}/\underline{I}$, denumite **coeficienții lui Fresnel**.

Aplicația 7.6. Unghiul lui Brewster

Se poate pune întrebarea: „care sunt condițiile ce fac ca unii dintre coeficienții lui Fresnel (7.96) să fie nuli?”

Astfel, din formulele (7.96), rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{T}/\underline{I} = 0 &\Rightarrow \theta_0 = 90^\circ - \text{caz neinteresant în practică,} \\ \underline{R}/\underline{I} = 0 &\Rightarrow (\varepsilon_1^2 \cos \theta_0 = \varepsilon_2^2 \cos \theta_2) \cup (\varepsilon_1^2 \cos \theta_0 = \varepsilon_1^2 \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Pe de altă parte teorema refracției (7.94), în care se consideră că cele două medii au aceeași permeabilitate absolută ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) –caz uzual în practica radiocomunicațiilor–, conduce la: $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_0 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta_2$, ceea ce permite să se stabilească o ecuație în funcție de unghiul de incidență θ_0 .

Pentru componentele normale (\perp) o astfel de ecuație conduce la condiția imposibilă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (adică să nu existe medii diferite).

Pentru componentele paralele (\parallel) se obține o ecuație în θ_0 din care se determină:

$$(7.97) \quad \sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1} = 0,$$

în care θ_0 poartă denumirea de *unghiul lui Brewster*.

Semnificația acestui unghi este următoarea: anularea coeficientului \underline{R} arată că radiațiile (unde plane) care vin sub un unghi de incidență θ_0 ce respectă ecuația (7.97), sunt supuse numai procesului de refracție, intensitatea unei reflectate fiind nulă.

7.4.4. Vitezele asociate undelor electromagnetice plane

În legătură cu propagarea undelor electromagnetice plane se pot defini mai multe „feluri” de viteze, în funcție de tipul semnalului și proprietățile mediului. Cele mai importante –din punctul de vedere al aplicațiilor din radiotehnică– sunt:

- viteza de fază, o noțiune fundamentală, care se utilizează numai pentru undele pur sinusoidale, caracterizate numai de o singură valoare a pulsației ω (așa-zisele *unde monocromatice*);

- viteza de grup, utilizată în cazul undelor modulate sau –în general– al semnalelor cu un spectru al frecvențelor ce nu poate fi redus la o singură componentă ω (practic, această viteză poate fi considerată ca fiind viteza cu care s-ar propaga într-un mediu numai înfășurarea de joasă frecvență, din cazul unei unde purtătoare armonice, modulată în amplitudine);

- viteza de transport a energiei electromagnetice;

- viteza de semnal, în legătură cu propagarea unui impuls (o perturbare bruscă care apare într-un mediu dispersiv).

Aplicația 7.7. Viteza de fază

După cum se știe (v. § 7.1.3), o undă plană este de forma:

$$f(\vec{r}, t) = f(y - vt),$$

considerându-se că propagarea unei se face după direcția axei y . Prin definiție, faza acestui semnal este $\varphi = y - vt$ și dacă se dă lui φ o anumită valoare constantă, de exemplu $\varphi = \varphi_0$, rezultă că toate perechile de valori (y, t) care satisfac relația:

$$(7.7-1) \quad dy - v dt = 0$$

corespund unei faze de valoare constantă, deoarece, dacă $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$, rezultă că perechea diferențială $(dy, dt) \rightarrow d\varphi = d\varphi_0 = 0$, pentru că $d\varphi_0 = 0$. Aceasta înseamnă că, dacă perechea de valori (y_0, t_0) corespunde unui câmp $f_0 = f(y_0 - vt_0)$, valoarea f_0 se va regăsi și în punctul:

$y = y_0 + dy$ însă la momentul $t = t_0 + dt$, unde –aşa cum reiese din condiția (7.7-1)– $dt = dy/v$, v fiind interpretată atunci ca o *viteză de propagare a fazei*.

În cazul mediilor izolante perfecte și nedispersive (v. aplicația 7.11) viteza de fază are expresia cunoscută: $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Aplicația 7.8. Viteza de grup

Această noțiune apare numai în cazul grupurilor de undă, adică a undelor în care sunt implicate mai multe semnale cu frecvențe diferite.

Cazul cel mai simplu este acela în care într-un mediu dispersiv (v. aplicația 7.11) se propagă simultan două semnale, s_1 și s_2 , cu pulsațiile $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ și $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$, care în regim armonic sunt de forma:

$$s_1 = B\sin(\omega_1 t - k_1 y) \text{ și } s_2 = B\sin(\omega_2 t - k_2 y),$$

în care $k_1 = k_1(\omega)$ și $k_2 = k_2(\omega)$. Dacă mediul nu este foarte dispersiv, constantele de propagare se pot scrie sub forma:

$$k_1 = k_0 + (dk/d\omega)\Delta\omega \text{ și } k_2 = k_0 - (dk/d\omega)\Delta\omega,$$

unde $k_0 = k(\omega_0)$. Atunci semnalul total, $s = s_1 + s_2$, va avea expresia:

$$s = s_1 + s_2 = 2B \sin(\omega_0 t + k_0 y) \cos[\Delta\omega(t - \frac{dk}{d\omega} y)] = A(y,t) \sin(\omega_0 t - k_0 y), \tag{7.8-1}$$

care poate fi interpretat ca o undă purtătoare (cu pulsația ω_0) modulată în amplitudine, așa cum se arată în figura 7.38.

Amplitudinea semnalului $s = s_1 + s_2$ este:

$$A(y,t) = 2B \cos[\Delta\omega(t - y/v_g)], \tag{7.8-2}$$

unde v_g este viteza de grup, dată de următoarea relație:

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega}. \tag{7.98}$$

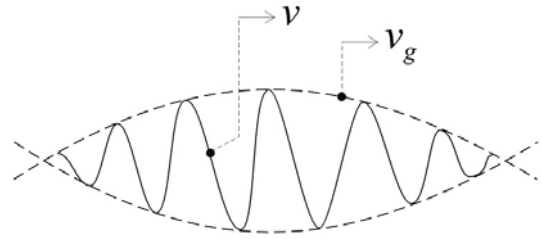


Fig. 7.38

Datorită factorului $\Delta\omega$, amplitudinea are o variație lentă în raport cu timpul t , așa cum rezultă

din expresia ei (7.8-1), precum și cu direcția de propagare y . Din relația (7.8-1) se observă că semnalul total s corespunde unei unde modulate care ocupă întreg spațiul.

Pentru mediile nedispersive (v. aplicația 7.11), $v_g = v$ – adică viteza de grup este egală cu viteza de fază.

Formula (7.98), a vitezei de grup, s-a dedus pentru cazul particular al unui semnal având spectrul format numai din două frecvențe. Cazul general, al unui semnal cu un spectru larg de frecvențe, poate fi analizat considerându-se un semnal impuls, de tip Dirac (v. cursul Semnale, circuite și sisteme), de forma:

$$s(y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{j(\omega t - ky)} dk, \tag{7.8-3}$$

în care $A(k)$ are valori neglijabile în afara intervalului $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ și $\omega = \omega(k)$.

Pentru mediile care nu sunt puternic dispersive rezultă:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (d\omega/dk)_0 (k - k_0),$$

astfel că pentru argumentul exponențialei (7.8-3) se poate scrie :

$$\omega t - ky = \omega(k_0)t + (d\omega/dk)_0 (k - k_0)t - ky.$$

De aici, notându-se $\omega(k) = \omega_0$, rezultă:

$$s(y,t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 y)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k)e^{j[(k - k_0)(d\omega/dk)_0 t - y]} dk.$$

Această integrală va avea o valoare maximă atunci când toate componentele vor fi în fază, ceea ce se produce când se respectă condiția:

$$(d\omega/dk)_0 t - y = \text{const.} \quad (7.8-4)$$

Prin diferențiere aplicată condiției (7.8-4) rezultă că maximum amplitudinii semnalului (7.8-3) se propagă cu viteza de grup:

$$v_g = dy/dt = d\omega/dk \Big|_0. \quad (7.99)$$

Relația (7.99) este valabilă numai pentru mediul de propagare ce nu este prea puternic dispersiv, astfel încât în dezvoltarea lui $\omega(k)$ în serie Taylor să se poată neglija, fără erori mari, termenii de rang superior. Se reamintește că termenul k reprezintă constanta de propagare a mediului la o anumită pulsație ω , fiind definită (după cum se știe) prin $k^2 \stackrel{D}{=} \omega^2 \varepsilon \mu$ sau $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, ultima formă arătând că în mediile fără pierderi: $k = \omega/v$, unde $v = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ reprezintă viteza de fază (v. aplicația 7.7).

După cum se va argumenta în aplicațiile 7.9 și 7.11, viteza de grup este identică cu viteza de transport a energiei electromagnetice dacă mediul nu este dispersiv.

Aplicația 7.9. Viteza de transport a energiei electromagnetice

Această viteză, notată cu v_e , este asociată undelor electromagnetice plane în legătură cu viteza cu care se propagă vectorul Poynting \bar{S} (ce reprezintă densitatea de suprafață a energiei electromagnetice pe care o transmit undele plane în procesul lor de propagare printr-un mediu).

După cum se știe (v. § 7.1.3 și fig. 7.11), propagarea undelor plane, prin componentele lor directă și inversă, sunt caracterizate energetic prin vectorul Poynting direct $\bar{S}_d = \bar{k} \bar{E}_d \times i \bar{H}_d = \bar{j} \bar{E}_d H_d$ și vectorul Poynting invers $\bar{S}_i = \bar{k} \bar{E}_i \times (-i) \bar{H}_i = -\bar{j} \bar{E}_i H_i$. În mediile puternic dispersive (v. aplicația 7.11) se constată că viteza de transport a energiei electromagnetice (referitoare la propagarea vectorilor \bar{S}), v_e , diferă de vitezele de fază v și de grup v_g . Explicația fizică a diferențelor între aceste viteze constă în interacțiunea dintre câmp și mediu, mai concret în faptul că starea instantanee a mediului (descrișă prin densitatea de volum a energiei din câmpul electromagnetic: $w_e = \frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D}$ și $w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B}$, pe care unda electromagnetică ce se propagă trebuie să o cedeze mediului) are o anumită variație în timp, care apare și în domeniul vitezelor asociate undei (v , v_g și v_e), viteze care implică timpul.

Pentru început se vor considera două medi diferite (cu mărimile de material $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ și $\mu_1 \neq \mu_2$), izotrope, nedisipative ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) și nedispersive, separata de planul $y = 0$ (adică planul xOy) – figura 7.39.

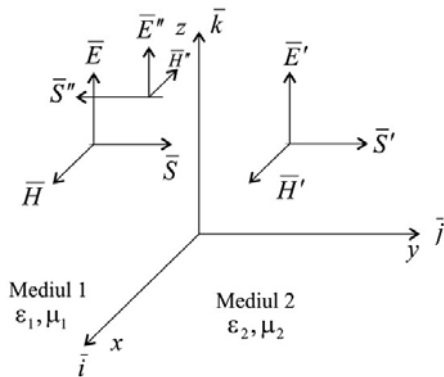


Fig. 7.39

amplitudinea lui \bar{H}'' negativă (v. fig. 7.11).

O undă care vine după direcția y la suprafața de separație produce o undă reflectată (care se reîntoarce în primul mediu, 1) și o undă refractată (care pătrunde în cel de-al doilea mediu, 2). Pentru simplificarea scrierii, se va nota cu ' unda refractată și cu '' unda reflectată, vitezele de propagare fiind v în mediul 1 și v' în mediul 2 (din dreapta planului xOy). La unda reflectată, faza variază invers proporțional cu y (dat fiind sensul de propagare, înapoi în stânga planului xOz). De asemenea, deoarece vectorul \bar{E}'' (reflectat) s-a luat pozitiv și deoarece sistemul $\bar{E}'', \bar{H}'', \bar{S}''$ (v. fig. 7.39) formează totdeauna un triedru drept (pentru că energia se propagă aici înspre y descrescător), rezultă că este necesar să se ia

Pe suprafața de separare a celor două medii, în virtutea teoremei de conservare a componentelor tangențiale la această suprafață a intensității câmpurilor electric și magnetic, câmpul electric și magnetic tangent la planul xOz în stânga lui, trebuie să fie egal cu câmpul electric –respectiv– magnetic din dreapta acestui plan. Aceasta înseamnă că se poate scrie (v. fig. 7.39):

$$\overline{E} + \overline{E}'' = \overline{E}' \text{ și } \overline{H} - \overline{H}'' = \overline{H}' .$$

Ținându-se seama de legătura dintre câmpurile \overline{E} și \overline{H} , relația relativă la câmpul magnetic (ultima egalitate scrisă anterior) devine:

$$\sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} (\overline{E} - \overline{E}'') = \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} \overline{E}' ,$$

de unde rezultă:

$$\varepsilon_1 v (\overline{E} - \overline{E}'')^2 = \varepsilon_2 v' \overline{E}'^2 , \quad (7.9-0)$$

relație valabilă chiar în cazul mediilor dispersive, la care ε este o funcție de ω (v. aplicația 7.11).

Dacă mediul este nedispersiv, deci dacă permitivitatea absolută nu depinde de frecvență, această ultimă relație arată că nici vitezele de fază nu depind de frecvență și se mai poate scrie:

$$\overline{S} - \overline{S}'' = \overline{S}' , \quad (7.9-1)$$

așa cum reiese și din figura 7.39. Integrând această ultimă egalitate în raport cu timpul, se obține ecuația de bilanț energetic (de conservare a energiei) pentru undele electromagnetice implicate în procesul de propagare a lor în cele două medii. Se mai poate interpreta acest rezultat (7.9-1) și în felul următor: în unitatea de timp, pe unitatea de suprafață normală pe direcția de propagare trece o energie electromagnetică W care satisface relația:

$$\varepsilon E^2 v_e = W v_e , \quad (7.9-2)$$

în care E este amplitudinea undei, iar v_e este viteza de transport a energiei electromagnetice, care aici apare a fi egală cu viteza de fază.

Se reține, deci, un fapt important: în mediile nedispersive izotrope și nedisipative, viteza de transport a energiei este egală cu viteza de fază.

Pentru a se studia fenomenul acesta într-un mediu puternic dispersiv trebuie să se calculeze densitatea medie de energie într-un astfel de mediu. În acest scop, fie un condensator plan suficient de mare, din care se va „decupa” un element paralelipipedic cu baza de arie unitară (fig. 7.40)

Se consideră o arie delimitată de bază, fețele laterale și suprafața hașurată (v. fig. 7.40); rezultă că pe unitatea de arie a armăturilor condensatorului se află o densitate de sarcină egală cu inducția electrică D , ceea ce se explică prin legea fluxului electric (v. § 1.3.1). În interiorul condensatorului intensitatea câmpului electric fiind \overline{E} , o variație a sarcinii electrice de pe plăci se poate face numai prin exercitarea unui lucru mecanic, care –la trecerea capacității electrice de la starea 0 la starea 1– este:

$$L = \int_0^1 \overline{E} \cdot d\overline{D} = W_1 - W_0 , \quad (7.9-3)$$

presupunându-se că evoluția energetică a condensatorului se face adiabatic. Astfel, de exemplu, dacă se consideră o variație armonică în timp a mărimilor de stare \overline{E} și \overline{D} , adică:

$$\overline{E} = \overline{E}_0 \sin \omega t \text{ și } \overline{D} = \varepsilon \overline{E} = \varepsilon(\omega) \overline{E}_0 \sin \omega t ,$$

în care $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ deoarece mediul este dispersiv, atunci luând integrala între momentele: $t_0 = 2n\pi/\omega_0$ și $t_1 = 2n\pi/\omega_0 + \pi/2\omega$ (unde n este un întreg) se obține:

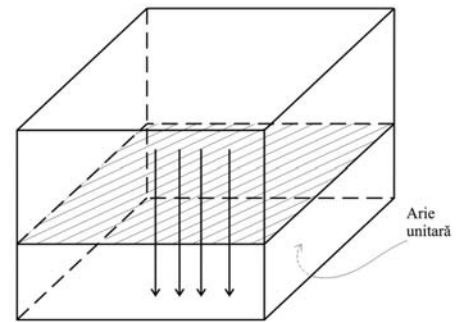


Fig. 7.40

$$(7.9-4) \quad W_1 - W_0 = \varepsilon(\omega) E_0^2/2$$

Această valoare nu reprezintă însă valoarea totală a energiei condensatorului, deoarece în momentele în care câmpul din dielectric este nul, energia condensatorului este diferită de energia pe care ar fi avut-o dielectricul după ce mult timp n-ar fi fost supus nici unui câmp electric. Explicația fizică a acestui fapt constă în aceea că dielectricii sunt formați din particule care –sub acțiunea câmpului electric– intră în oscilație; în momentul în care câmpul este nul, energia câmpului este nulă, însă energia totală a dielectricului nu este zero, fiind formată din energia cinetică a particulelor aflate în stare de oscilație mecanică.

De aceea, energia medie a dielectricului pe unitatea de volum (notată cu \tilde{W}) este, conform relației (7.9-4):

$$(7.9-5) \quad \tilde{W} = W_0 + \frac{1}{2} \varepsilon(\omega) \tilde{E}^2.$$

În cazul în care câmpul electric nu este perfect sinusoidal, ci format –spre exemplu– din suprapunerea a două câmpuri sinusoidale cu pulsații apropiate, $\omega' = \omega + \Delta\omega$ și $\omega'' = \omega - \Delta\omega$, atunci expresia intensității câmpului electric este:

$$(7.9-6) \quad E = \frac{1}{2} E_0 (\cos \omega' t - \cos \omega'' t) = -E_0 \sin \Delta\omega t \sin \omega t$$

și a inducției electrice:

$$D = \frac{1}{2} E_0 (\varepsilon' \cos \omega' t - \varepsilon'' \cos \omega'' t),$$

în care $\varepsilon' = \varepsilon(\omega')$ și $\varepsilon'' = \varepsilon(\omega'')$. De aici rezultă:

$$(7.9-7) \quad \begin{aligned} dD/dt &= -E_0 (\varepsilon' \omega' \sin \omega' t - \varepsilon'' \omega'' \sin \omega'' t) / 2 = \\ &= -E_0 (\varepsilon\omega \sin \Delta\omega t \cos \omega t - \Delta\omega \frac{\partial \varepsilon\omega}{\partial \omega} \cos \Delta\omega t \sin \omega t), \end{aligned}$$

rezultat care se obține prin dezvoltarea în serie Taylor a lui ε și prin păstrare din serie numai primului termen. În plus, la dezvoltarea în serie a produsului $\varepsilon' \omega'$, s-au neglijat infiniții mici de ordinul doi (deoarece $\Delta\omega \ll \omega$) scriindu-se numai:

$$(7.9-8) \quad \varepsilon' \omega' = \varepsilon\omega - \Delta\omega \frac{\partial \varepsilon\omega}{\partial \omega}.$$

Formulele (7.9-7) și (7.9-8) sunt valabile numai dacă ε variază lent cu ω , în caz contrar fiind necesar să se ia mai mulți termeni ai dezvoltării în serie Taylor.

Utilizându-se expresiile (7.9-5) ... (7.9-8), integrala (7.9-3) a lui $\overline{E \cdot dD}$ efectuată între limitele $t_0 = 0$ (atunci când câmpul este nul) și $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$ (atunci când câmpul are valoarea maximă), devine:

$$(7.9-9) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \overline{E \cdot dD} = \varepsilon E_0^2 \int_0^{2\pi/\Delta\omega} \sin^2 \Delta\omega t \cos \omega t dt + E_0^2 \Delta\omega \frac{\partial \varepsilon\omega}{\partial \omega} \int_0^{2\pi/\Delta\omega} \sin^2 \omega t \cos \Delta\omega t \sin \Delta\omega t dt.$$

Pentru că cele două pulsații, ω' și ω'' , diferă puțin între ele prin ipoteză (adică $\varepsilon' - \varepsilon'' = 2\Delta\omega \ll \omega$), termenii $\sin \Delta\omega t$ și $\cos \Delta\omega t$ variază lent în timp, spre deosebire de $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$ care variază rapid, astfel încât prima integrală a expresiei (7.9-9) poate fi considerată nulă. Cea de-a doua integrală din (7.9-9), în care se înlocuiește $\sin^2 \omega t$ prin valoarea sa medie $1/2$, devine:

$$(7.9-10) \quad W = \frac{1}{4} E_0^2 (\varepsilon' - \omega \partial \varepsilon / \partial \omega).$$

Comparând expresia lui W din (7.9-10) cu \tilde{W} din (7.9-5) rezultă că energia dielectricului nu este nulă în momentele în care câmpul electric din condensator este nul, ci are valoarea:

$$(7.9-11) \quad W_1 = \frac{1}{4} E_0^2 \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}.$$

Se poate demonstra că același rezultat se obține pentru orice funcție, suficient de lentă, de variație a lui ε cu ω , deci în medii dispersive.

Dacă se scrie densitatea de volum a energiei electrice din mediul în care există câmp electromagnetic, sub aceeași formă, atât pentru mediile nedispersive cât și pentru cele dispersive rezultă:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon' E_0^2 \Rightarrow \varepsilon' = \varepsilon + \omega(\partial\varepsilon/\partial\omega)/2, \quad (7.9-12)$$

cu ajutorul căreia se poate determina viteza de transport a energiei electromagnetice, folosind relația (7.9-2):

$$Wv_e = \frac{1}{2} \varepsilon' v_e E_0^2, \quad (7.9-13)$$

în care v_e este viteza de transport a energiei electromagnetice.

Pentru a se determina expresia acestei viteze, se vor considera și undele reflectate și refractate prin suprafața de separație dintre două medii diferite, pentru care s-a obținut –independent de fenomenul de dispersie– relația:

$$\varepsilon_1 v(E^2 - E'^2) = \varepsilon_2 v' E'^2,$$

conform egalității (7.9-0).

Teorema conservării energiei conduce la:

$$\varepsilon_1' v_e(E^2 - E'^2) = \varepsilon_2' v_e' E'^2.$$

Ecuatie de bilanț a energiei valabilă pentru oricare ar fi mediul 1 (al undelor incidente și reflectate – v. fig. 7.39), deci inclusiv în cazul unui mediu nedispersiv. În acest caz s-a arătat că $v_e = v$, iar $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$, de unde rezultă și egalitatea (dacă nu mai scriem indicii):

$$\varepsilon v = \varepsilon' v_e \dots v_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} v. \quad (7.9-14)$$

Din relația (7.9-14), în care ε' se înlocuiește cu expresia lui din (7.9-12), se obține un model pentru viteza v_e de transport a energiei electromagnetice în procesul de propagare a undelor:

$$\frac{1}{v_e} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon v} = \frac{1}{v} \left[1 + \frac{\omega}{2\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} \right] = \frac{1}{v} \left[1 + \omega \frac{\partial \lg \varepsilon^{1/2}}{\partial\omega} \right], \quad (7.100)$$

iar, pentru viteza de grup –având în vedere expresia (7.98)– rezultă modelul:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial \frac{\omega}{v}}{\partial\omega} = \frac{1}{v} \left[1 - \frac{\omega}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial\omega} \right] = \frac{1}{v} \left[1 - \omega \frac{\partial \lg v}{\partial\omega} \right]. \quad (7.101)$$

Deoarece viteza de fază $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, rezultă că viteza de transport a energiei este egală cu viteza de grup în cazul mediilor slab dispersive (pentru că în acest caz $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$ și $\partial v/\partial\omega \rightarrow 0$). Dacă dispersia este puternică, atunci $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ și –ca urmare– $v = v(\omega)$, ceea ce face ca în aceste medii vitezele v , v_e și v_g să difere între ele.

Aplicația 7.10. Viteza de semnal

Viteza de semnal este legată de propagarea unui impuls într-un mediu dispersiv și măsoară –într-un anumit fel– viteza de propagare a frontului impulsului. S-a folosit aprecierea de „într-un anumit fel”, deoarece noțiunea de front al unui impuls nu este precis determinată (mai ales dacă se are în vedere funcția impuls Dirac), ceea ce face ca și viteza de semnal –definită așa ca mai înainte– să aibă o anumită imprecizie. Chiar așa definită, noțiunea de viteză de semnal scoate în evidență o serie de fenomene importante în legătură cu propagarea undelor în medii dispersive, necesare a fi cunoscute în radiocomunicații, unde semnalele au un spectru larg de frecvențe.

Din studiile făcute, rezultă că în cazul unei perturbații care produce o undă impuls ce se propagă pe direcția y , deoarece pentru $t \ll y/c$ nu apar perturbații în mediu, reiese că viteza de propagare a semnalului treaptă în mediu este întotdeauna c . Aceasta se datorează frecvențelor

înalte, care se propagă prin mediu fără a-l perturba (se spune că mediul este transparent pentru frecvențele înalte).

Dacă semnalul impuls se reprezintă prin transformarea Fourier (v. cursul Semnale, circuite și sisteme) se constată că amplitudinea maximă corespunde frecvenței de excitație. Eliminându-se această componentă, semnalul (notat cu f_2 pentru că se propagă pe direcția y) este de forma Fourier:

$$f_2(y, t) = \int A(\omega) e^{j\varphi} d\omega, \text{ cu } \varphi = \varphi(\omega),$$

unde se consideră că $A(\omega) = 0$ pentru un domeniu centrat pe frecvența ω_0 a semnalului inițial.

Dacă φ are o variație rapidă cu ω , valoarea integralei f_2 este neglijabilă. Dacă însă există o pulsație ω_1 astfel ca în jurul ei faza să fie staționară, adică $(\partial\varphi/\partial\omega)_{\omega=\omega_1} = 0$, atunci în jurul acestei pulsații componentele (de amplitudine mică) se vor aduna, producând așa numiții (în radiotehnică) *precursori*. Astfel, într-un punct din mediu „sosesc”, ai întâi precursorii și apoi frontul semnalului. Viteza precursorilor, și anume $\omega_0 c / \sqrt{\omega_0^2 + \omega_k^2}$, este mai mică decât viteza de

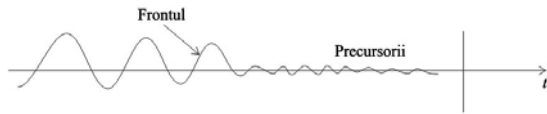


Fig. 7.41

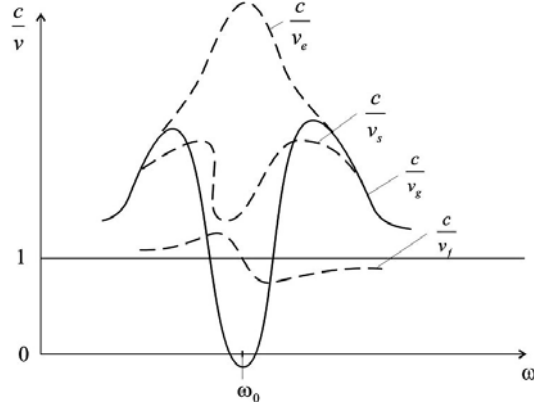


Fig. 7.42

fază c dintr-un mediu nedisipativ. În timp, într-un punct dat, dar la o altă scară a timpului, semnalul variază așa cum se arată în figura 7.41.

În mediile slab dispersive, viteza de semnal este egală cu viteza de grup. Pentru mediile puternic dispersive, situația se schimbă total, așa cum se arată în figura 7.42.

După cum arată graficele din această figură, care reprezintă variația cu pulsația a celor patru viteze (de grup v_g , de transport a energiei electromagnetice v_e , de fază v_f și de semnal v_s), pentru un mediu la care ϵ_r variază în funcție de pulsație, $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ după modelul rezonatorului lorentzian (v. Radiotehnică), diferența între vitezele asociate undelor electromagnetice plane este pronunțată în zona pulsației ω_0 .

Aplicația 7.11. Dispersia undelor

Caracteristic pentru *undele plane* studiate până în prezent și care *se propagă în dielectricii perfecți* este faptul că toate undele se propagă *cu aceeași viteză, indiferent de direcția lor de*

propagare și de forma undei. În dielectricii perfecți, producându-se un impuls de undă (o perturbație), se produce un fenomen ondulatoriu – adică unde, care dacă sunt reprezentate printr-o mărime de stare notată – generic (așa ca în § 7.1.1) – cu simbolul u pot fi descrise de modelul:

$$(7.11-1) \quad \Delta u - \epsilon\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0,$$

ce reprezintă bine-cunoscuta ecuație a undelor și a cărei soluție arată că unda se propagă în mediul descris de mărimile de stare ϵ și μ (constante în timp și spațiu) și izotrop cu aceeași formă și aceeași viteză ($v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$), care nu sunt afectate de propagare.

Există situații, datorate fie mediului, fie formei de undă (fie ambelor), în care ecuația undelor – „clasifică” (7.11-1) – nu mai este valabilă. În aceste situații modelul cel mai potrivit pentru descrierea propagării undelor este:

$$(7.11-2) \quad \Delta u - 1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + cu = 0,$$

în care operatorul lui Laplace (Δ) este considerat într-un spațiu n – dimensional (raportat la un sistem de axe x_1, x_2, \dots, x_n), c este o constantă, iar scara timpului a fost astfel aleasă încât viteza de propagare a undelor electromagnetice în mediul considerat (adică $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$) să fie unitară, ceea ce implică condiția de scară:

$$t' = vt. \quad (7.11-3)$$

La scrierea ecuației generale (7.11-2) nu s-a mai pus (pentru a se evita complicațiile de scriere) accentul ' la t .

Integrarea ecuației (7.11-2), poate avea o soluție de tipul:

$$u = f(A - bt) \text{ cu } A = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (7.11-4)$$

care există numai dacă este satisfăcută ecuația:

$$f''(B)(a^2 - b^2) + f(B)c = 0. \quad (7.11-5)$$

Un prim caz al sistemului fizic (undă – mediu) este următorul: pentru undele care se propagă cu viteza $v = 1$, adică pentru acele unde la care este îndeplinită condiția $a^2 = b^2$, amplitudinea undei este nulă. Deci nu există unde progresive (adică unde determinate de o perturbație inițială), care să se propage cu viteza 1, indiferent de forma undei. Aceasta este deosebirea esențială față de sistemele fizice pentru care propagarea undelor este descrisă de ecuația (7.11-1), adică o propagare în care toate undele au aceeași viteză indiferent de forma înfășurătoarei undei. În cazul ecuației generale (7.11-2), direcția și viteza de propagare pot fi date arbitrar dacă $f(B)$ satisface ecuația (7.11-5).

Faptul că viteza de propagare a undei este variabilă se datorează unui fenomen care a fost denumit **dispersia undelor**, descris de modelele (7.11-2)... (7.11-5) care sunt liniare și arată că suma unor soluții (integrale) ale ecuației (7.11-2) este de asemenea o soluție a ecuației (7.11-2). Aceasta înseamnă că dacă se consideră o perturbație inițială de o anumită formă, ea poate fi –la un anumit moment t' dat de definiția (7.11-3)– o rezultantă a suprapunerii unor unde plane care se propagă în direcții diferite sau în aceeași direcție cu viteze diferite. Atunci, deoarece undele se propagă cu viteze diferite, după un timp oarecare ele vor da o rezultantă diferită de cea inițială.

Fie, spre exemplificare, două unde care se propagă ambele în direcția x_1 , având fazele B' și B'' :

$$B' = a' x_1 - b' t \text{ și } B'' = a'' x_1 - b'' t.$$

Deoarece forma undei satisface ecuația (7.11-4), atunci undele se vor propaga de-a lungul axei x_1 cu viteze diferite:

$$v' = b'/a' \text{ și } v'' = b''/a''.$$

Cele două unde propagându-se cu viteze diferite și fiecare având o aceeași formă, rezultanta va varia în timp.

Pentru a se înțelege mai bine sensul fizic al fenomenului de dispersie, se va integra ecuația (7.11-5) pentru a se obține explicit forma undei; va rezulta direct:

$$f = C_1 e^{d(ax-bt)} + C_2 e^{-d(ax-bt)}. \quad (7.11-6)$$

Deoarece unda trebuie să rămână finită în orice moment și în orice punct din spațiu n – dimensional, argumentele exponențialelor trebuie să fie pur imaginare, ceea ce înseamnă –în primul rând– că singurele soluții mărginite ale ecuației (7.11-2) sunt cele periodice (atât în timp cât și în spațiu) dacă integralele sunt de tipul (7.11-4), adică de tipul undelor progresive. Cu această explicație se va înțelege de ce forma undei este:

$$f = C e^{j\omega \sum_{i=1}^n (k_i x_i - vt)}, \quad (7.11-7)$$

unde k_i este numărul de undă corespunzând direcției x_i și:

$$b = v, a_i = k_i$$

Integrala (7.11-7) verifică ecuația (7.11-5) indiferent de valoarea pulsației. Ecuația (7.11-5) fiind liniară, o combinație liniară de integrale (7.11-7) de diverse pulsații, este de asemenea o soluție a ecuației undelor cu dispersie (7.11-2). La un moment dat t_0 , această soluție –care rezultă din însumarea unor soluții particulare– are o anumită formă. Datorită fenomenului de dispersie, undele progresive, corespund diferitelor pulsații, se propagă cu viteze diferite. Atunci, un impuls (care rezultă din însumarea mai multor componente armonice) se va deforma în cazul propagării cu dispersie, fiecare componentă propagându-se cu altă viteză.

Această dispersare a „pachetului” de unde a determinat denumirea de *mediu dispersiv*.