

6ª edición

# Cálculo

Robert A. Adams

PEARSON  
Addison  
Wesley



# **Cálculo**



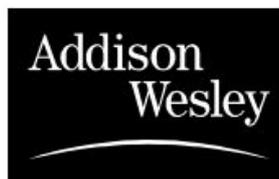
# **Cálculo**

Sexta edición

**Robert A. Adams**  
*University of British Columbia*

**Traducción:**  
**Inés Portillo García**  
*Universidad Pontificia de Comillas*

**Revisión técnica:**  
**Javier Portillo García**  
*Universidad Politécnica de Madrid*



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo  
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • Reading, Massachusetts • Harlow, England

Datos de catalogación bibliográfica

**CÁLCULO**

Robert A. Adams

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2009

ISBN: 978-84-7829-089-5

Materia: 517 – Cálculo

Formato 195 × 250 mm

Páginas: 1240

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos: [www.cedro.org](http://www.cedro.org)), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

**DERECHOS RESERVADOS**

© 2009 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

**CÁLCULO**

Robert A. Adams

ISBN: 978-84-7829-089-5

Depósito legal: M.

**Equipo editorial:**

Editor: Miguel Martín-Romo

Técnico editorial: Marta Caicoya

**Equipo de producción:**

Director: José Antonio Clares

Técnico: Irene Iriarte

**Diseño de cubierta:** Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

**Composición COPIBOOK**

**Impreso por:**

IMPRESO EN ESPAÑA - *PRINTED IN SPAIN*

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

**Nota sobre enlaces a páginas web ajenas:** Este libro puede incluir enlaces a sitios web gestionados por terceros y ajenos a PEARSON EDUCACIÓN S.A. que se incluyen sólo con finalidad informativa. PEARSON EDUCACIÓN S.A. no asume ningún tipo de responsabilidad por los daños y perjuicios derivados del uso de los datos personales que pueda hacer un tercero encargado del mantenimiento de las páginas web ajenas a PEARSON EDUCACIÓN S.A. y del funcionamiento, accesibilidad o mantenimiento de los sitios web no gestionados por PEARSON EDUCACIÓN S.A. Las referencias se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas.

*A Anne*





# Contenido

<b>Prólogo</b> .....	xxi
<b>Al estudiante</b> .....	xxiii
<b>Al profesor</b> .....	xxv
<b>Agradecimientos</b> .....	xxvii
<b>¿Qué es el cálculo?</b> .....	xxix

<b>P</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>P.1.</b>	<b>Los números reales y la recta real</b> .....	2
	Intervalos .....	4
	El valor absoluto .....	7
	Ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos.....	8
<b>P.2.</b>	<b>Coordenadas cartesianas del plano</b> .....	11
	Escalas de los ejes .....	12
	Incrementos y distancias .....	12
	Gráficas .....	13
	Líneas rectas .....	14
	Ecuaciones de la recta .....	16
<b>P.3.</b>	<b>Gráficas de ecuaciones cuadráticas</b> .....	19
	Circunferencias y discos .....	19
	Ecuaciones de parábolas .....	22
	Propiedades de reflexión de las parábolas .....	23
	Escalado de una gráfica .....	24
	Desplazamiento de una gráfica .....	25
	Elipses e hipérbolas .....	26
<b>P.4.</b>	<b>Funciones y sus gráficas</b> .....	29
	Convenio para el dominio .....	31
	Gráficas de funciones .....	32
	Funciones pares e impares. Simetría y reflexiones .....	35
	Reflexiones en rectas .....	36
	Definición y dibujo de funciones con Maple .....	37
<b>P.5.</b>	<b>Combinación de funciones para crear otras nuevas</b> .....	39
	Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos .....	39

Composición de funciones .....	113
Funciones definidas por tramos .....	114
<b>P.6. Polinomios y funciones racionales</b> .....	47
Raíces y factores .....	48
Raíces y factores de polinomios cuadráticos .....	49
Factorizaciones diversas .....	51
<b>P.7. Las funciones trigonométricas</b> .....	53
Identidades de utilidad .....	56
Algunos ángulos especiales .....	57
Fórmulas de sumas .....	60
Otras funciones trigonométricas .....	61
Cálculos con Maple .....	64
Repaso de trigonometría .....	65

## 1 Límites y continuidad 71

<b>1.1. Ejemplos de velocidad, tasa de crecimiento y área</b> .....	72
Velocidad media y velocidad instantánea .....	72
Crecimiento de un cultivo de algas .....	73
Área de un círculo .....	74
<b>1.2. Límites de funciones</b> .....	77
Límites unilaterales .....	80
Reglas para el cálculo de límites .....	82
El teorema del sándwich .....	83
<b>1.3. Límites en el infinito y límites infinitos</b> .....	86
Límites en el infinito .....	86
Límites en el infinito de funciones racionales .....	88
Límites infinitos .....	89
Uso de Maple para calcular límites .....	91
<b>1.4. Continuidad</b> .....	93
Continuidad en un punto .....	94
Continuidad en un intervalo .....	95
Existen muchas funciones continuas .....	96
Extensiones continuas y discontinuidades evitables .....	97
Funciones continuas en intervalos cerrados y finitos .....	98
Obtención de máximos y mínimos por métodos gráficos .....	100
Cálculo de raíces de ecuaciones .....	101
<b>1.5. Definición formal de límite</b> .....	105
Uso de la definición de límite para demostrar teoremas .....	107
Otras clases de límites .....	107
<b>Repaso del capítulo</b> .....	111

## 2 Diferenciación 113

<b>2.1. Rectas tangentes y sus pendientes</b> .....	114
Normales .....	118
<b>2.2. La derivada</b> .....	120
Algunas derivadas importantes .....	121

Notación de Leibniz .....	124
Diferenciales .....	127
Las derivadas tienen la propiedad del valor medio .....	127
<b>2.3. Reglas de diferenciación .....</b>	<b>129</b>
Sumas y productos por constantes .....	130
Regla del Producto .....	132
Regla de la Inversa .....	134
Regla del Cociente .....	136
<b>2.4. Regla de la Cadena .....</b>	<b>138</b>
Cálculo de derivadas con Maple .....	141
Uso de la Regla de la Cadena en las fórmulas de diferenciación .....	142
Demostración de la Regla de la Cadena (Teorema 6) .....	142
<b>2.5. Derivadas de funciones trigonométricas .....</b>	<b>144</b>
Algunos límites especiales .....	144
Derivadas del seno y el coseno .....	146
Derivadas de otras funciones trigonométricas .....	148
<b>2.6. El Teorema del Valor Medio .....</b>	<b>151</b>
Funciones crecientes y decrecientes .....	154
Demostración del Teorema del Valor Medio .....	156
<b>2.7. Aplicación de las derivadas .....</b>	<b>159</b>
Aproximación de pequeños cambios .....	159
Velocidad de cambio media e instantánea .....	160
Sensibilidad a los cambios .....	161
Derivadas en economía .....	162
<b>2.8. Derivadas de orden superior .....</b>	<b>165</b>
<b>2.9. Diferenciación implícita .....</b>	<b>169</b>
Derivadas de orden superior .....	172
Regla General de la Potencia .....	174
<b>2.10. Primitivas y problemas de valor inicial .....</b>	<b>175</b>
Primitivas .....	175
La integral indefinida .....	176
Ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial .....	178
<b>2.11. Velocidad y aceleración .....</b>	<b>182</b>
Velocidad .....	182
Aceleración .....	183
Caída libre .....	186
<b>Repaso del capítulo .....</b>	<b>188</b>

<b>3.1. Funciones inversas .....</b>	<b>194</b>
Inversión de funciones que no son uno a uno .....	197
Derivadas de funciones inversas .....	198
<b>3.2. Las funciones exponencial y logarítmica .....</b>	<b>200</b>
Exponenciales .....	200
Logaritmos .....	202

<b>3.3. La exponencial y el logaritmo natural</b> .....	205
El logaritmo natural .....	205
La función exponencial .....	209
Exponenciales y logaritmos generales .....	211
Diferenciación logarítmica .....	213
<b>3.4. Crecimiento y decrecimiento</b> .....	216
Crecimiento de exponenciales y logaritmos .....	216
Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial .....	217
Interés de inversiones .....	220
Crecimiento logístico .....	222
<b>3.5. Funciones trigonométricas inversas</b> .....	225
Función inversa del seno (o arcoseno) .....	225
Función inversa de la tangente (o arcotangente) .....	229
Otras funciones trigonométricas inversas .....	231
<b>3.6. Funciones hiperbólicas</b> .....	235
Funciones hiperbólicas inversas .....	238
<b>3.7. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes</b> ...	240
Procedimiento para resolver $ay'' + by' + cy = 0$ .....	241
Movimiento armónico simple .....	243
Movimiento armónico amortiguado .....	246
<b>Repaso del capítulo</b> .....	249

<b>4</b>	<b>Aplicaciones de las derivadas</b>	<b>253</b>
----------	--------------------------------------	------------

<b>4.1. Tasas relacionadas</b> .....	254
Procedimiento para problemas de tasas relacionadas .....	255
<b>4.2. Problemas de valores extremos</b> .....	260
Valores máximo y mínimo .....	260
Puntos críticos, puntos singulares y extremos .....	262
Cálculo de valores extremos absolutos .....	262
El test de la primera derivada .....	263
Funciones no definidas en intervalos cerrados y finitos .....	265
<b>4.3. Concavidad y puntos de inflexión</b> .....	269
El test de la segunda derivada .....	272
<b>4.4. Dibujo de la gráfica de una función</b> .....	274
Asíntotas .....	275
Ejemplos de dibujo formal de curvas .....	279
<b>4.5. Problemas de valores extremos</b> .....	284
Procedimiento para resolver problemas de valores extremos .....	285
<b>4.6. Cálculo de raíces de ecuaciones</b> .....	293
Método de Newton .....	294
Iteración del punto fijo .....	297
Rutinas «Solve» .....	299
<b>4.7. Aproximaciones lineales</b> .....	301
Aproximación de valores de funciones .....	302
Análisis del error .....	303

<b>48. Polinomios de Taylor</b> .....	306
Fórmula de Taylor .....	309
Notación $O$ .....	312
<b>49. Formas indeterminadas</b> .....	315
Reglas de l'Hôpital .....	317
<b>Repaso del capítulo</b> .....	322

## 5 Integración 327

<b>5.1. Sumas y notación sigma</b> .....	328
Cálculo de sumas .....	329
<b>5.2. Áreas como límites de sumas</b> .....	333
El problema básico del área .....	334
Cálculo de algunas áreas .....	335
<b>5.3. La integral definida</b> .....	339
Particiones y sumas de Riemann .....	339
La integral definida .....	341
Sumas de Riemann generales .....	343
<b>5.4. Propiedades de la integral definida</b> .....	345
Un Teorema del Valor Medio para integrales .....	348
Definición de integrales de funciones continuas por tramos .....	349
<b>5.5. El Teorema Fundamental del Cálculo</b> .....	352
<b>5.6. El método de sustitución</b> .....	358
Integrales trigonométricas .....	363
<b>5.7. Áreas de regiones planas</b> .....	367
Área entre dos curvas .....	368
<b>Repaso del capítulo</b> .....	372

## 6 Técnicas de integración 375

<b>6.1. Integración por partes</b> .....	376
Fórmulas de reducción .....	379
<b>6.2. Sustituciones inversas</b> .....	382
Las sustituciones trigonométricas inversas .....	382
Completar el cuadrado .....	386
Otras sustituciones inversas .....	388
El cambio $\tan(\theta/2)$ .....	389
<b>6.3. Integrales de funciones racionales</b> .....	391
Denominadores lineales y cuadráticos .....	392
Descomposición en fracciones simples .....	393
<b>6.4. Integración mediante programas de computador o tablas</b> .....	399
Uso de Maple para integración .....	399
Uso de tablas de integrales .....	401
<b>6.5. Integrales impropias</b> .....	403
Integrales impropias de tipo I .....	403
Integrales impropias de tipo II .....	405

	Estimación de la convergencia y la divergencia .....	409
<b>6.6</b>	<b>La Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio</b> .....	412
	La Regla del Trapecio .....	412
	La Regla del Punto Medio .....	415
	Estimaciones del error .....	417
<b>6.7</b>	<b>La Regla de Simpson</b> .....	420
<b>6.8</b>	<b>Otros aspectos de la integración aproximada</b> .....	425
	Aproximación de integrales impropias .....	425
	Uso de la fórmula de Taylor .....	426
	Integración de Romberg .....	427
	Otros métodos .....	430
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	431
<b>7</b>	<b>Aplicaciones de la integración</b> .....	<b>435</b>
<b>7.1</b>	<b>Cálculo de volúmenes mediante rodajas: Sólidos de revolución</b> .....	436
	Cálculo de volúmenes mediante rodajas .....	436
	Sólidos de revolución .....	438
	Tubos cilíndricos .....	441
<b>7.2</b>	<b>Más volúmenes mediante rodajas</b> .....	446
<b>7.3</b>	<b>Longitud de un arco y área de una superficie</b> .....	450
	Longitud de un arco .....	451
	Longitud de arco de la gráfica de una función .....	451
	Áreas de superficies de revolución .....	456
<b>7.4</b>	<b>Masas, momentos y centros de masas</b> .....	459
	Masa y densidad .....	459
	Momentos y centros de masas .....	462
	Ejemplos en dos y tres dimensiones .....	464
<b>7.5</b>	<b>Centroides</b> .....	467
	Teorema de Pappus .....	471
<b>7.6</b>	<b>Otras aplicaciones en física</b> .....	474
	Presión hidrostática .....	474
	Trabajo .....	476
	Energía potencial y energía cinética .....	478
<b>7.7</b>	<b>Aplicaciones en negocios, finanzas y ecología</b> .....	481
	Valor actual de una serie de pagos futuros .....	481
	Economía de explotación de recursos renovables .....	482
<b>7.8</b>	<b>Probabilidad</b> .....	485
	Variables aleatorias discretas .....	486
	Esperanza, media, varianza, y desviación típica .....	488
	Variables aleatorias continuas .....	490
	La distribución normal .....	494
<b>7.9</b>	<b>Ecuaciones diferenciales de primer orden</b> .....	499
	Ecuaciones separables .....	499
	Ecuaciones lineales de primer orden .....	503
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	507

**8****Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares****513**

<b>81. Cónicas</b> .....	514
Parábolas .....	515
Propiedad focal de la parábola .....	516
Elipses .....	517
La propiedad focal de la elipse .....	519
Directrices de una elipse .....	519
Hipérbolas .....	520
Propiedad focal de una hipérbola .....	522
Clasificación de cónicas generales .....	523
<b>82. Curvas paramétricas</b> .....	527
Curvas planas generales y parametrizaciones .....	530
Algunas curvas planas de interés .....	531
<b>83. Curvas paramétricas suaves y sus pendientes</b> .....	535
Pendiente de una curva paramétrica .....	536
Dibujo de curvas paramétricas .....	537
<b>84. Longitudes de arco y áreas de curvas paramétricas</b> .....	539
Longitudes de arco y áreas de superficie .....	539
Áreas limitadas por curvas paramétricas .....	541
<b>85. Coordenadas polares y curvas en polares</b> .....	545
Algunas curvas en polares .....	547
Intersecciones de curvas en polares .....	551
Cónicas en polares .....	552
<b>86. Pendientes, áreas y longitudes de arco de curvas en polares</b> .....	554
Áreas limitadas por curvas en polares .....	555
Longitudes de arco de curvas en polares .....	557
<b>Repaso del capítulo</b> .....	559

**9****Secuencias, series y series de potencias****561**

<b>9.1. Secuencias y convergencia</b> .....	562
Convergencia de secuencias .....	564
<b>9.2. Series infinitas</b> .....	570
Serie geométrica .....	571
Series telescópicas y series armónicas .....	573
Algunos teoremas sobre series .....	575
<b>9.3. Tests de convergencia para series positivas</b> .....	577
El test de la integral .....	577
Uso de cotas de integrales para estimar la suma de una serie .....	579
Tests de comparación .....	580
Tests de la razón y de la raíz .....	583
Uso de cotas de la serie geométrica para estimar la suma de una serie .....	585
<b>9.4. Convergencia absoluta y condicional</b> .....	588
El test de la serie alternante .....	589
Reordenación de los términos de una serie .....	592
<b>9.5. Series de potencias</b> .....	594
Operaciones algebraicas en series de potencias .....	597

Diferenciación e integración de series de potencias .....	599
Cálculos con Maple .....	604
<b>9.6. Series de Taylor y Maclaurin</b> .....	605
Series de Maclaurin de algunas funciones elementales .....	607
Otras series de Taylor y Maclaurin .....	609
Revisión de la fórmula de Taylor .....	612
<b>9.7. Aplicaciones de las series de Taylor y Maclaurin</b> .....	615
Aproximación de valores de funciones .....	615
Funciones definidas por integrales .....	616
Formas indeterminadas .....	617
<b>9.8. El teorema binomial y la serie binomial</b> .....	619
La serie binomial .....	620
<b>9.9. Series de Fourier</b> .....	623
Funciones periódicas .....	623
Series de Fourier .....	624
Convergencia de la serie de Fourier .....	626
Serie de Fourier en cosenos y senos .....	628
<b>Repaso del capítulo</b> .....	629

## 10 Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional 633

<b>10.1. Geometría analítica en tres dimensiones</b> .....	634
Espacio euclídeo $n$ -dimensional .....	638
Descripción de conjuntos en el plano, el espacio tridimensional y el espacio $n$ -dimensional .....	639
<b>10.2. Vectores</b> .....	641
Vectores en el espacio tridimensional .....	644
Cables y cadenas que cuelgan .....	646
Producto escalar y proyecciones .....	648
Vectores en el espacio $n$ -dimensional .....	650
<b>10.3. Producto vectorial en el espacio tridimensional</b> .....	652
Determinantes .....	655
El producto vectorial como un determinante .....	657
Aplicaciones del producto vectorial .....	659
<b>10.4. Planos y rectas</b> .....	661
Planos en el espacio tridimensional .....	662
Rectas en el espacio tridimensional .....	664
Distancias .....	666
<b>10.5. Superficies cuadráticas</b> .....	669
<b>10.6. Un poco de álgebra lineal</b> .....	673
Matrices .....	674
Determinantes e inversos de matrices .....	675
Transformaciones lineales .....	678
Ecuaciones lineales .....	678
Formas cuadráticas, autovalores y autovectores .....	681
<b>10.7. Uso de Maple para cálculos con vectores y matrices</b> .....	683
Vectores .....	684

Matrices .....	689
Ecuaciones lineales .....	691
Autovectores y autofunciones .....	692
<b>Repaso del capítulo</b> .....	693

## 11 Funciones vectoriales y curvas 697

<b>11.1. Funciones vectoriales de una variable</b> .....	698
Diferenciación de combinaciones de vectores .....	702
<b>11.2. Algunas aplicaciones de la diferenciación vectorial</b> .....	705
Movimiento de una masa variable .....	705
Movimiento circular .....	706
Sistemas en rotación y el efecto de Coriolis .....	708
<b>11.3. Curvas y parametrizaciones</b> .....	713
Parametrización de la curva de intersección de dos superficies .....	715
Longitud de arco .....	716
Curvas suaves por tramos .....	718
Parametrización mediante la longitud de arco .....	718
<b>11.4. Curvatura, torsión y sistema de referencia de Frenet</b> .....	720
El vector tangente unitario .....	720
Curvatura y normal unitaria .....	721
Torsión y binormal, fórmulas de Frenet-Serret .....	725
<b>11.5. Curvatura y torsión para parametrizaciones generales</b> .....	728
Aceleración tangencial y normal .....	730
Evolutas .....	731
Aplicación al diseño de vías (o carreteras) .....	732
Cálculos con Maple .....	734
<b>11.6. Leyes de Kepler del movimiento planetario</b> .....	737
Elipses en coordenadas polares .....	738
Componentes polares de la velocidad y la aceleración .....	740
Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler .....	741
Obtención de las leyes de Kepler primera y tercera .....	742
Conservación de la energía .....	745
<b>Repaso del capítulo</b> .....	748

## 12 Diferenciación parcial 753

<b>12.1. Funciones de varias variables</b> .....	754
Representaciones gráficas .....	754
Uso de gráficos en Maple .....	758
<b>12.2. Límites y continuidad</b> .....	762
<b>12.3. Derivadas parciales</b> .....	766
Planos tangentes y rectas normales .....	770
Distancia de un punto a una superficie: un ejemplo geométrico .....	772
<b>12.4. Derivadas de orden superior</b> .....	774
Las ecuaciones de Laplace y de onda .....	777
<b>12.5. La Regla de la Cadena</b> .....	780
Funciones homogéneas .....	786
Derivadas de orden superior .....	786

<b>12.6</b>	<b>Aproximaciones lineales, diferenciabilidad y diferenciales</b> .....	791
	Demostración de la Regla de la Cadena .....	794
	Diferenciales .....	795
	Funciones de un espacio de $n$ dimensiones en un espacio de $m$ dimensiones .....	796
<b>12.7</b>	<b>Gradientes y derivadas direccionales</b> .....	799
	Derivadas direccionales .....	801
	Tasas de cambio percibidas por un observador en movimiento .....	805
	El gradiente en tres y más dimensiones .....	806
<b>12.8</b>	<b>Funciones implícitas</b> .....	811
	Sistemas de ecuaciones .....	812
	Determinantes jacobianos .....	815
	El Teorema de la Función Implícita .....	816
<b>12.9</b>	<b>Aproximaciones mediante series de Taylor</b> .....	821
	Aproximación de funciones implícitas .....	824
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	826

**13** Aplicaciones de las derivadas parciales **829**

<b>13.1</b>	<b>Valores extremos</b> .....	830
	Clasificación de los puntos críticos .....	833
<b>13.2</b>	<b>Valores extremos de funciones definidas en dominios restringidos</b> .....	838
	Programación lineal .....	842
<b>13.3</b>	<b>Multiplicadores de Lagrange</b> .....	845
	El método de los multiplicadores de Lagrange .....	846
	Problemas con más de una restricción .....	850
	Programación no lineal .....	852
<b>13.4</b>	<b>El método de los mínimos cuadrados</b> .....	855
	Regresión lineal .....	856
	Aplicaciones del método de los mínimos cuadrados a integrales .....	858
<b>13.5</b>	<b>Problemas paramétricos</b> .....	861
	Diferenciación de integrales con parámetros .....	862
	Envolventes .....	865
	Ecuaciones con perturbaciones .....	869
<b>13.6</b>	<b>Método de Newton</b> .....	871
	Realización del Método de Newton utilizando una hoja de cálculo .....	873
<b>13.7</b>	<b>Cálculos con Maple</b> .....	875
	Resolución de sistemas de ecuaciones .....	875
	Búsqueda y clasificación de puntos críticos .....	877
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	880

**14** Integración múltiple **883**

<b>14.1</b>	<b>Integrales dobles</b> .....	884
	Integrales dobles en dominios más generales .....	886
	Propiedades de la integral doble .....	888
	Resolución de integrales dobles por inspección .....	888

<b>14.2</b>	<b>Iteración de integrales dobles en coordenadas cartesianas</b> .....	891
<b>14.3</b>	<b>Integrales impropias y un teorema del valor medio</b> .....	899
	Integrales impropias de funciones positivas .....	899
	Un teorema del valor medio para integrales dobles .....	903
<b>14.4</b>	<b>Integrales dobles en coordenadas polares</b> .....	906
	Cambio de variables en integrales dobles .....	911
<b>14.5</b>	<b>Integrales triples</b> .....	917
<b>14.6</b>	<b>Cambio de variables en integrales triples</b> .....	924
	Coordenadas cilíndricas .....	924
	Coordenadas esféricas .....	927
<b>14.7</b>	<b>Aplicaciones de las integrales múltiples</b> .....	932
	Área de la superficie de una gráfica .....	933
	Atracción gravitatoria de un disco .....	934
	Momentos y centros de masa .....	935
	Momento de inercia .....	938
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	942

## 15 Campos vectoriales 945

<b>15.1</b>	<b>Campos escalares y vectoriales</b> .....	946
	Líneas de campo (curvas integrales) .....	947
	Campos vectoriales en coordenadas polares .....	949
<b>15.2</b>	<b>Campos conservativos</b> .....	951
	Superficies y curvas equipotenciales .....	953
	Fuentes, sumideros y dipolos .....	957
<b>15.3</b>	<b>Integrales sobre curvas</b> .....	960
	Cálculo de integrales sobre curvas .....	961
<b>15.4</b>	<b>Integrales sobre curvas de campos vectoriales</b> .....	965
	Dominios conexos y simplemente conexos .....	968
	Independencia del camino .....	969
<b>15.5</b>	<b>Superficies e integrales de superficie</b> .....	974
	Superficies paramétricas .....	974
	Superficies compuestas .....	976
	Integrales de superficie .....	977
	Superficies suaves, normales y elementos de área .....	977
	Cálculo de integrales de superficie .....	980
	Atracción de una corteza esférica .....	983
<b>15.6</b>	<b>Superficies orientadas e integrales de flujo</b> .....	987
	Superficies orientadas .....	987
	Flujo de un campo vectorial por una superficie .....	988
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	993

## 16 Cálculo vectorial 995

<b>16.1</b>	<b>Gradiente, divergencia y rotacional</b> .....	996
	Interpretación de la divergencia .....	998
	Distribuciones y funciones delta .....	1000
	Interpretación del rotacional .....	1002

<b>16.2</b>	<b>Algunas identidades con el gradiente, la divergencia y el rotacional</b> .....	1005
	Potencial escalar y potencial vector .....	1007
	Cálculos con Maple .....	1010
<b>16.3</b>	<b>El Teorema de Green en el plano</b> .....	1012
	El Teorema de la Divergencia en dos dimensiones .....	1016
<b>16.4</b>	<b>El Teorema de la Divergencia en el espacio tridimensional</b> .....	1017
	Variantes del Teorema de la Divergencia .....	1022
<b>16.5</b>	<b>El Teorema de Stokes</b> .....	1024
<b>16.6</b>	<b>Algunas aplicaciones en Física del cálculo vectorial</b> .....	1030
	Dinámica de fluidos .....	1030
	Electromagnetismo .....	1032
	Electrostática .....	1032
	Magnetostática .....	1034
	Ecuaciones de Maxwell .....	1036
<b>16.7</b>	<b>Coordenadas curvilíneas ortogonales</b> .....	1038
	Curvas coordenadas y superficies coordenadas .....	1040
	Factores de escala y elementos diferenciales .....	1041
	Grad, div y rot en coordenadas curvilíneas ortogonales .....	1045
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	1049
<b>17</b>	<b>Ecuaciones diferenciales ordinarias</b> .....	<b>1053</b>
<b>17.1.</b>	<b>Clasificación de las ecuaciones diferenciales</b> .....	1054
<b>17.2.</b>	<b>Solución de ecuaciones de primer orden</b> .....	1057
	Ecuaciones separables .....	1058
	Ecuaciones homogéneas de primer orden .....	1058
	Ecuaciones exactas .....	1059
	Factores de integración .....	1060
	Ecuaciones lineales de primero orden .....	1061
<b>17.3.</b>	<b>Existencia, unicidad y métodos numéricos</b> .....	1062
	Existencia y unicidad de soluciones .....	1063
	Métodos numéricos .....	1065
<b>17.4.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales de segundo orden</b> .....	1071
	Ecuaciones reducibles a primer orden .....	1071
	Ecuaciones lineales de segundo orden .....	1073
<b>17.5.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes</b> .....	1075
	Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes .....	1075
	Ecuaciones de Euler (equidimensionales) .....	1077
<b>17.6.</b>	<b>Ecuaciones lineales no homogéneas</b> .....	1079
	Resonancia .....	1081
	Variación de parámetros .....	1082
	Cálculos con Maple .....	1084
<b>17.7.</b>	<b>Soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en series</b> .....	1085
	<b>Repaso del capítulo</b> .....	1089
<b>Apéndice I.</b>	<b>Números complejos</b> .....	1091
	Definición de números complejos .....	1092

Representación gráfica de números complejos .....	1093
Aritmética compleja .....	1096
Raíces de números complejos .....	1100
<b>Apéndice II. Funciones complejas</b> .....	1105
Límites y continuidad .....	1106
La derivada compleja .....	1107
La función exponencial .....	1109
El Teorema Fundamental del Álgebra .....	1111
<b>Apéndice III. Funciones continuas</b> .....	1115
Límites de funciones .....	1116
Funciones continuas .....	1116
Complejidad y límites secuenciales .....	1117
Funciones continuas en un intervalo cerrado y finito .....	1119
<b>Apéndice IV. La integral de Riemann</b> .....	1123
Continuidad Uniforme .....	1126
<b>Apéndice V. Realización de cálculos con Maple</b> .....	1129
Lista de ejemplos de Maple con su presentación .....	1130
<b>Respuestas a los ejercicios de numeración impar</b> .....	1131
<b>Índice alfabético</b> .....	1185





# Prólogo

Cuando un libro de texto alcanza su sexta edición, sus lectores han llegado a ciertas expectativas que un autor no puede ignorar. El objetivo de este texto sigue siendo presentar el cálculo de una forma clara, coherente y legible, y sobre todo de manera que sus lectores lo encuentren *interesante*. La creación de un libro completo ha sido también un objetivo; es mejor cubrir muchos contenidos en el entendimiento de que los profesores y los estudiantes deberán saltarse algunos, que no considerar suficientes contenidos para cubrir las necesidades de usuarios con intereses y formación previa muy diversos. Dos temas periféricos que estaban presentes en la cuarta edición y se omitieron en la quinta, concretamente, introducciones muy breves a las series de Fourier (Sección 9.9) y a las funciones de variable compleja (Apéndice II) se han recuperado a petición de algunos usuarios que lamentaron mucho su desaparición.

Esta edición tiene pocos cambios en el orden de presentación de los contenidos. Se ha añadido algún material (véase la lista posterior), y no se ha eliminado nada significativo. No obstante, los procesos habituales de reescritura y ajuste fino de la presentación y un pequeño cambio en el tamaño de las páginas han tenido como resultado un número de páginas significativamente inferior. Los principales cambios en el texto son pocos, y se enumeran a continuación:

- Se ha incluido un capítulo completo (Capítulo 17) sobre Ecuaciones Diferenciales, que ha reabsorbido parte del material de EDs diseminado previamente por todo el texto, por ejemplo, las soluciones de EDs basadas en series del Capítulo 9. Sin embargo, algunos aspectos elementales de EDs como la solución de ecuaciones separables de primer orden y ecuaciones lineales, que son buenas aplicaciones de la integración, y la solución de ecuaciones lineales de segundo orden de coeficientes constantes, cuyas soluciones se basan en recetas y utilizan las funciones exponenciales y trigonométricas, quedan en las Secciones 7.9 y 3.7, respectivamente. En los lugares adecuados del Capítulo 17, se hace referencia a estas secciones.
- Se han añadido varias páginas nuevas sobre probabilidad discreta al comienzo de la Sección 7.8 (Probabilidad). Aunque el propósito de esta sección es ilustrar el uso de la integración al estudiar la probabilidad, los conceptos básicos de probabilidad se presentan mejor comenzando con el caso discreto.
- La utilización de Maple para manejar vectores, matrices y funciones con valores vectoriales hace uso ahora de los nuevos paquetes «LinearAlgebra» y «VectorCalculus». Esto simplifica grandemente las cosas. Afecta a los capítulos desde el 10 en adelante y ha tenido como consecuencia la reescritura completa de la Sección 10.7.
- Se ha añadido al Capítulo P (Preliminares) una nueva sección sobre polinomios y funciones racionales.
- Las Secciones 4.7 (Aproximaciones Lineales) y especialmente la 4.8 (Polinomios de Taylor) han sufrido cambios considerables en la notación y la presentación. Además, la

Sección 9.6 (Series de Taylor y de Maclaurin) han tenido muchos cambios y han absorbido lo que antes era una sección separada revisando la Fórmula de Taylor. Ahora el enfoque completo del Teorema de Taylor está más unificado, aunque todavía está dividido entre los Capítulos 4 y 9.

Además de todo lo anterior, se han realizado numerosos pequeños cambios locales aquí y allá para mejorar el texto. Se han eliminado algunos ejemplos confusos o se han sustituido por otros más apropiados. Se han eliminado algunos ejercicios y se han añadido otros. Se han añadido algunas figuras nuevas y se han mejorado algunas otras. Se han cambiado algunas notaciones. Los intervalos abiertos se escriben ahora  $(a, b)$  del nuevo; aunque lógico, no parece adecuado. El proceso de hacer que el libro sea más agradable a los lectores sigue en curso y se basa en buena parte en los comentarios de los propios lectores.



# Al estudiante

Cuando recibí mi primer curso de cálculo, no había un libro de texto prescrito, sino un libro denominado *Calculus Made Easy* que se recomendaba a todos aquellos que necesitábamos algo más que los apuntes tomados durante las clases. Compré el libro, esperando que sería como indicaba su título y que me facilitaría el aprendizaje del cálculo. No fue así.

¿Es el cálculo una materia muy difícil? No, realmente no, pero algunas veces se lo parece a los estudiantes, especialmente al principio, debido a las nuevas ideas y técnicas que se utilizan, y porque el éxito del aprendizaje del cálculo depende de tener una base muy sólida en las matemáticas previas (álgebra, geometría y trigonometría), sobre la que se pueda construir. Es conveniente revisar el material previo del Capítulo P (Preliminares) incluso si el profesor no lo menciona en clase. Al aprender cálculo dispondremos de herramientas muy útiles para analizar problemas en numerosos campos de interés, especialmente los que se consideran «científicos». Merece la pena adquirir estas herramientas, pero, como toda tarea que merece la pena, ésta requiere mucho esfuerzo de nuestra parte. No existe libro ni profesor que puedan evitar este requisito.

Al escribir este libro he intentado organizar el material de forma que resulte tan fácil como sea posible, pero no a expensas de «barrer las dificultades reales bajo la alfombra». Encontraremos que algunos conceptos son difíciles de entender cuando se presentan por primera vez. Cuando sea así, *debemos releer* el material despacio, si es necesario varias veces; *pensar sobre él*; formular preguntas para realizar a los estudiantes más experimentados, a nuestro tutor o a nuestro profesor. No hay que retrasarlo. Es importante resolver los problemas tan pronto como sea posible. Si no se entiende una cosa hoy, tampoco entenderemos cómo se aplica mañana. Las matemáticas son una «disciplina lineal»; construyen una idea basándose en la anterior.

Resolver ejercicios es la mejor forma de profundizar en nuestra comprensión del cálculo, y de convencernos de que lo hemos entendido. Este libro contiene numerosos ejercicios; demasiados para intentar resolverlos todos. Algunos de ellos son ejercicios directos, que nos ayudarán a desarrollar nuestras propias destrezas en cálculo. Sin embargo, son más importantes los problemas que ayudan a desarrollar las habilidades de razonamiento y la forma de aplicar las técnicas aprendidas a situaciones concretas. En algunos casos habrá que planificar la forma de resolver un problema que requiera varios «pasos» diferentes antes de llegar a la respuesta. Otros ejercicios están diseñados para ampliar la teoría desarrollada en el texto y mejorar, por tanto, nuestra comprensión de los conceptos del cálculo.

Los ejercicios varían grandemente en dificultad. En general, los más difíciles aparecen hacia el final de la serie de ejercicios, pero la serie completa no está graduada estrictamente de esta forma porque los ejercicios sobre un tema específico tienden a agruparse. Algunos ejercicios de las series regulares se marcan con un asterisco \*. Este símbolo indica que el ejercicio es *o bien* algo más teórico *o* algo más difícil que la mayoría. Los que son más teóricos no tienen por qué ser difíciles; algunas veces son bastante fáciles. La mayoría de los problemas en la sección de

*Problemas Avanzados*, que forma parte del *Repaso del Capítulo* al final de la mayoría de los capítulos, tienen mayor dificultad, aunque en general no estén marcados con un \*.

No hay que desanimarse si no podemos hacer *todos* los ejercicios. Algunos son de hecho muy difíciles, y sólo unos pocos estudiantes dotados serán capaces de resolverlos. Sin embargo, debemos ser capaces de realizar una amplia mayoría de ellos. Algunos requerirán mucho más esfuerzo que otros. Cuando encontramos dificultades con los problemas, es conveniente proceder como sigue:

1. Lea y vuelva a leer el problema hasta entender exactamente la información que se da y qué hay que calcular o qué hay que hacer.
2. Si es apropiado, dibuje un diagrama ilustrando las relaciones entre las magnitudes involucradas en el problema.
3. Si es necesario, introduzca símbolos para representar las magnitudes del problema. Utilice letras apropiadas (por ejemplo,  $V$  para volúmenes,  $t$  para el tiempo). No creamos necesario utilizar  $x$  e  $y$  para todo.
4. Desarrolle un plan de ataque. Esto es en general la parte más difícil. Busque relaciones conocidas; intente reconocer modelos; vuelva sobre los ejemplos desarrollados en la sección actual o en algunas secciones previas relevantes; intente descubrir posibles conexiones entre el problema bajo estudio y otros que se han visto anteriormente. ¿Se puede simplificar el problema realizando suposiciones adicionales? Si se puede resolver una versión simplificada, ello puede ayudarnos a decidir qué hacer con el problema dado: ¿se puede dividir el problema en varios casos, siendo cada uno de ellos un problema más simple? Al leer los ejemplos del texto, esté atento para descubrir métodos que puedan resultar útiles más adelante en otros contextos.
5. Intente seguir los pasos de su plan. Si tenemos problemas con alguno o varios de ellos, puede ser necesario modificar el plan.
6. Al llegar al resultado de un problema, pregúntese siempre si es *razonable*. Si no lo es, busque para determinar los lugares donde se puede haber cometido un error.

Las respuestas de la mayoría de los ejercicios con numeración impar se proporcionan al final del libro. Las excepciones son los ejercicios que no tienen respuestas cortas, por ejemplo «Demuestre que.» o «Pruebe que.», que son problemas donde la respuesta es la solución completa. Hay disponible un Manual de Soluciones para el Estudiante que contiene soluciones detalladas a los ejercicios con numeración par.

Además de los asteriscos utilizados para marcar los problemas más difíciles o teóricos, los símbolos siguientes se utilizan para marcar ejercicios de equipos especiales:

- ◆ Ejercicios pertenecientes a ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial (no se utiliza en secciones que están completamente dedicadas a EDs).
-  Problemas que requieren el uso de una calculadora. A menudo se necesitará una calculadora científica. Algunos de sus problemas pueden requerir una calculadora programable.
-  Problemas que requieren un *software* de gráficos por ordenador en un ordenador personal.
-  Problemas que requieren el uso de un ordenador. En general requerirán *software* de matemáticas por ordenador (por ejemplo, Maple o Mathematica) o bien un programa de hoja de cálculo (por ejemplo, Lotus 123, Excel de Microsoft o Quattro Pro).



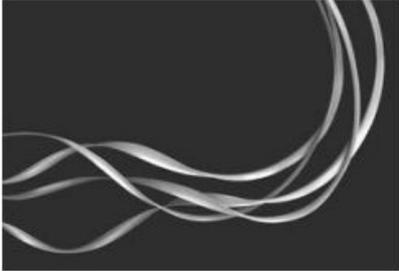
# Al profesor

Como sugiere su título, este libro pretende cubrir todo el material en programas de cálculo de tres o cuatro semestres, con funciones reales de una sola variable real (cálculo diferencial en los Capítulos 1-4 y cálculo integral en los Capítulos 5-8), así como funciones vectoriales de una sola variable real (en el Capítulo 11), funciones reales de varias variables reales (en los Capítulos 12-14), y funciones vectoriales de varias variables reales (en los Capítulos 15-16). El Capítulo 9 está dedicado a las secuencias y las series y su posición es más bien arbitraria. El Capítulo 10 contiene material básico necesario sobre vectores y geometría en el espacio tridimensional, y es de utilidad, aunque no absolutamente esencial, para la comprensión del material multivariable subsiguiente. La materia que se incluye es muy amplia para incluirla en cualquier curso. Se debe seleccionar qué material incluir y cuál omitir, teniendo en cuenta la formación previa y las necesidades de los estudiantes.

En la Universidad de British Columbia, donde el autor lleva enseñando 34 años, el cálculo se divide en cuatro trimestres; los dos primeros se ocupan del cálculo de una sola variable (Capítulos 1-9); el tercero trata las funciones de varias variables (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 12-14), y es seguido por menos estudiantes, y el cuarto se ocupa del cálculo vectorial (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 11, 15-16) y es seguido por un número relativamente reducido de estudiantes, principalmente de ciencias matemáticas, físicas e ingeniería. En ninguno de estos cursos hay suficiente tiempo como para tratar todo el material; siempre se omiten algunas secciones. Sin embargo, la amplia selección de temas y aplicaciones proporciona a los estudiantes una experiencia de aprendizaje rica y variada a los estudiantes.

El texto está diseñado para cursos de cálculo general, especialmente para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La mayor parte del material requiere sólo un conocimiento previo razonable en álgebra y geometría analítica (*véase* el Capítulo P, Preliminares, donde se revisa este material). Sin embargo, alguna materia opcional es más sutil y/o teórica, y está dirigida principalmente a los estudiantes más duros.





# Agradecimientos

Las primeras cinco ediciones de este texto se han utilizado para la impartición de clases en cursos de ciencias en general, de ingeniería y de matemáticas en la Universidad de British Columbia. Estoy agradecido a muchos colegas y estudiantes, tanto de la UBC como de muchas otras instituciones donde se han utilizado estos libros, por su apoyo y sus comentarios y sugerencias de utilidad.

Al preparar esta edición he recibido sugerencias de varios revisores que han proporcionado nuevas perspectivas y direcciones a mi trabajo. Estoy especialmente agradecido a las siguientes personas:

Pekka Alestalo	Universidad Tecnológica de Helsinki	Finlandia
Helge Dahle	Universidad de Bergen	Noruega
Marius Irgens	Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología	Noruega
Michael Lamoureaux	Universidad de Calgary	Canadá
Tom Lindstrom	Universidad de Oslo	Noruega
Marlene McCallum	Universidad de Carleton	Canadá
Graene Pettet	Universidad Tecnológica de Queensland	Australia
Viena Statna	Universidad de Calgary	Canadá
Martin Stynes	Universidad Nacional de Irlanda, Cork	Irlanda
Brian Wetton	Universidad de British Columbia	Canadá
Eric Woolgar	Universidad de Alberta	Canadá
Frank Zorzitto	Universidad de Waterloo	Canadá

Finalmente, deseo agradecer a los departamentos de ventas y *marketing* de todas las divisiones mundiales de Addison Wesley (actualmente Pearson Canada) por hacer que las ediciones anteriores tuvieran tanto éxito, y en particular al departamento editorial y de producción de Toronto, a Meaghan Ealey, Michael Kelley, Kelly Torrance, Dave Ward y Mary Ann McCutcheon, por su ayuda y apoyo, y a Betty R. Robinson por su cuidadosa copia y edición del manuscrito inicial.

Yo escribí el volumen utilizando TEX y PostScript bajo Linux-Mandrake, y generé todas las figuras en PostScript utilizando el paquete de *software* matemático MG desarrollado por mi colega Robert Israel y por mí mismo.

La eliminación de errores y oscuridades del texto es siempre un proceso en curso y asintótico; felizmente, cada edición es mejor que la anterior. No obstante, algunas imperfecciones siempre quedan, y quedaré agradecido a los lectores que me las hagan saber o que me proporcionen sugerencias para mejoras futuras.

R. A. A.  
Vancouver, Canadá  
Abril 2005  
adms@math.ubc.ca





# ¿Qué es el cálculo?

Al principio del siglo XVII el matemático alemán Johannes Kepler analizó un amplio número de observaciones astronómicas realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe y concluyó que los planetas se movían alrededor del sol en órbitas elípticas. Él no sabía por qué. Cincuenta años más tarde, el matemático y físico inglés Isaac Newton lo resolvió.

¿Por qué los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del sol? ¿Por qué los vientos de los huracanes giran en espiral en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio Norte? ¿Cómo se pueden predecir los efectos de los cambios de los tipos de interés en la economía y en los mercados de valores? ¿Cuándo desaparecerá suficiente material radiactivo para permitir un manejo seguro? ¿Cómo afectan las corrientes oceánicas calientes del Pacífico ecuatorial al clima del este de Norteamérica? ¿Cuánto tiempo permanece la concentración de un medicamento en sangre en niveles efectivos? ¿Cómo se propagan las ondas de radio por el espacio? ¿Por qué una epidemia se extiende cada vez más rápido y después se ralentiza? ¿Cómo puedo asegurar que el puente que acabo de diseñar no será destruido por una tormenta?

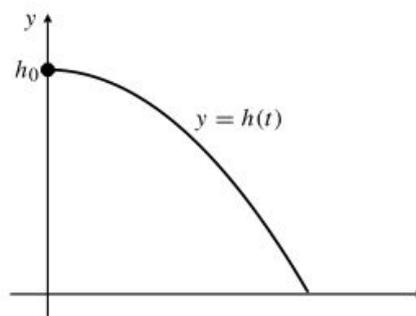
Estas y muchas otras cuestiones de interés e importancia en nuestro mundo se relacionan directamente con nuestra capacidad de analizar el movimiento y la forma en que las magnitudes cambian con respecto al tiempo o a otra magnitud. El álgebra y la geometría son herramientas útiles para describir relaciones entre magnitudes *estáticas*, pero en ellas no intervienen conceptos apropiados para describir cómo *cambia* una magnitud. Para hacer esto necesitamos nuevas operaciones matemáticas que van más allá de las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división y del cálculo de potencias y raíces. Necesitamos operaciones que midan la forma en que varían magnitudes relacionadas.

El cálculo proporciona las herramientas para describir el movimiento cuantitativamente. Presenta dos nuevas operaciones denominadas *diferenciación* e *integración* que, como la suma y la resta, son opuestas entre sí; lo que hace la diferenciación, lo deshace la integración.

Por ejemplo, consideremos el movimiento de una roca que cae. La altura (en metros) de la roca  $t$  segundos después de que se lanza desde una altura  $h_0$  es una función  $h(t)$  dada por

$$h(t) = h_0 - 4.9t^2$$

La gráfica de  $y = h(t)$  se muestra en la figura siguiente:



El proceso de diferenciación hace posible obtener una nueva función, que denotaremos  $H(t)$ , y denominaremos *derivada* de  $h$  con respecto a  $t$ , que representa la *velocidad de cambio* de la altura de la roca, es decir, su velocidad en metros/segundo:

$$H(t) = -9.8t$$

Al contrario, si conocemos la velocidad de la roca que cae en función del tiempo, la integración permite obtener la función altura  $h(t)$ .

El cálculo fue inventado de manera independiente y de forma algo diferente por dos matemáticos del siglo XVII: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibnitz. La motivación de Newton era un deseo de analizar el movimiento de objetos móviles. Utilizando su cálculo pudo formular sus leyes del movimiento y de la gravitación y *concluir a partir de ellas* que los planetas debían moverse alrededor del sol en órbitas elípticas.

Muchas de las más fundamentales e importantes «leyes de la naturaleza» se expresan convenientemente en forma de ecuaciones en las que intervienen velocidades de cambio de magnitudes. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*, y las técnicas para su estudio y resolución están en el corazón del cálculo. En el ejemplo de la roca que cae la ley apropiada es la Segunda Ley de Newton del Movimiento:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

La *aceleración* ( $-9.8\text{m/s}^2$ ) es la velocidad de cambio (la *derivada*) de la velocidad, que es a su vez la velocidad de cambio (la *derivada*) de la función altura.

Una buena parte de las matemáticas se relacionan indirectamente con el estudio del movimiento. Vemos las *rectas* o las *curvas* como objetos geométricos, pero los antiguos griegos las veían como trayectorias trazadas por puntos en movimiento. No obstante, el estudio de las curvas requiere conceptos geométricos como tangencia o área. El problema de la diferenciación está estrechamente relacionado con el problema geométrico de obtener rectas tangentes; de forma similar, la integración está relacionada con el problema geométrico de calcular áreas de regiones con fronteras curvas.

Tanto la diferenciación como la integración se definen en función de una nueva operación matemática denominada **límite**. El concepto de límite de una función se desarrollará en el Capítulo 1. Ése será el comienzo real del estudio del cálculo. En el capítulo denominado Preliminares revisaremos algunos conocimientos previos de álgebra y geometría necesarios para el desarrollo del cálculo.