DEMONSTRAREA CONCURENȚEI ŞI COLINIARITĂȚII UTILIZÂND METODA FASCICULELOR CONVERGENTE

NECULAI STANCIU[1]

Abstract. This article is devoted to the study of two fundamental and reciprocal questions: when do three given points lie on a single line, and when do three given lines pass through a single point? The techniques we describe in this article will be augmented by more sophisticated approaches, such as the Papus's theorems, the Desargues's theorems, the Pascal's theorem, the Brianchon's theorem and the Newton's theorem.

The formalism of projective geometry makes a discussion of such properties possible, and exposes some remarkable facts, such as the duality of points and lines.While technique "cross-ratio" of four points, and in the light of duality the cross-ratio of four lines can be useful on contest problems, much of the material here is considered "too advanced" for primary and secondary school education.This is a pity, as some of the most beautiful classical geometry appears only in the projective geometry.

Key words: cross-ratio, bivalent range, harmonic range, harmonic conjugate, concurrence and collinearity .

AMS Classification. 51-xx,51Axx, 51A05.

Scopul principal al rezultatelor de mai jos este familiarizarea cititorilor cu *noi metode (puțin cunoscute chiar de profesorii de matematică) de rezolvare a problemelor de concurență şi coliniaritate şi anume cu tehnicile oferite de proprietățile fasciculelor anarmonice.*

Considerăm fig.1 unde $S(a,b,c,d)$ sau $S(A,B,C,D)$ reprezintă un *fascicul convergent*, cu punctul S *propriu* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD şi fig.2 în care $S(a,b,c,d)$ este un *fascicul paralel* de raze a,b,c,d sau SA, SB, SC, SD cu punctul S *impropriu*.

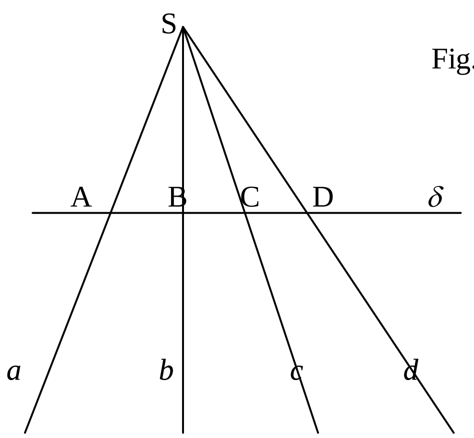


Fig.1

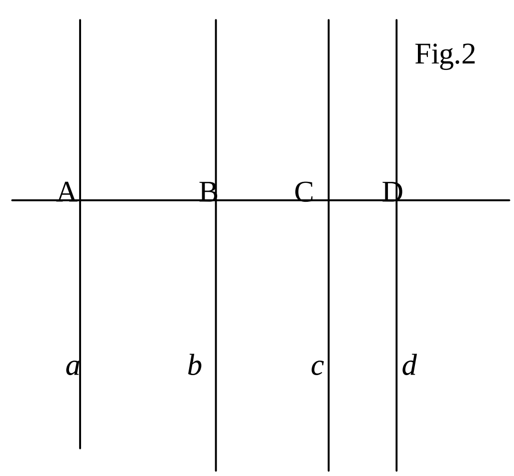


Fig.2

[1] Prof., Şc. "George Emil Palade'', Buzău, Romania
Str. Micro V, Bl.36, Ap.15, Buzau, cod 120057, e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

Dacă diviziunea $(ABCD) \overset{def}{=} \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ este *diviziune armonică* ($(ABCD) = -1$) atunci fasciculul ataşat $S(ABCD)$ se numeşte *fascicul armonic.*

Biraportul ataşat unui fascicul convergent.

Fie fasciculul $S(abcd)$ tăiat de secanta δ (vezi fig.1) în punctele $A = \delta \cap a, B = \delta \cap b, C = \delta \cap c, D = \delta \cap d$ .Dacă $S(XYZ) \overset{not}{=}$ aria triunghiului de vârfuri X, Y şi Z , $\hat{XY} \overset{not}{=} X\hat{S}Y$, $h = d(S, \delta)$, atunci $\frac{CA}{CB} = \frac{CA \cdot h}{CB \cdot h} = \frac{2 \cdot S(CSA)}{2 \cdot S(CSB)} = \frac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{S(CSA)}{S(CSB)} : \frac{S(DSA)}{S(DSB)} = \frac{SC \cdot SA \cdot \sin(\hat{ca})}{SC \cdot SB \cdot \sin(\hat{cb})} : \frac{SD \cdot SA \cdot \sin(\hat{da})}{SD \cdot SB \cdot \sin(\hat{db})} =$$

$$= \frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})} : \frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})} .$$

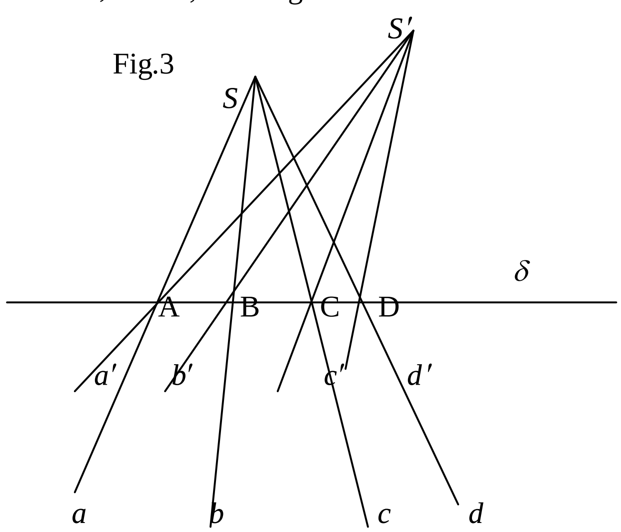
Dacă $S(abcd) \overset{not}{=} \frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})} : \frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$, atunci rezultă $(ABCD) = S(abcd)$.

Teoreme de invarianţă

Teorema 1. Fiind date pe dreapta δ , punctele fixe A, B, C, D .Pentru orice $S \notin \delta$, notăm $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$ .Biraportul ataşat fasciculului $S(abcd)$ este *invariant.*

Demonstraţie. Fie $S, S' \notin \delta$, ca în fig.3.

Fig.3

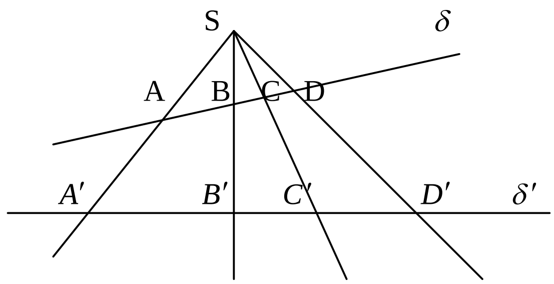


Din $S(abcd) = (ABCD)$ şi $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ rezultă $S(abcd) = S'(a'b'c'd')$.(q.e.d).

Teorema 2. Fiind dat fasciculul fix de vârf S şi raze a, b, c, d .Pentru orice secantă δ care intersectează razele fasciculului în $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ şi $D = d \cap \delta$, *biraportul* ataşat diviziunii $(ABCD)$ este *invariant.*

Demonstraţie. Fie δ şi δ' două secante oarecare (fig.4), care intersectează razele fasciculului în punctele A, B, C, D şi A', B', C', D' .

Fig.4

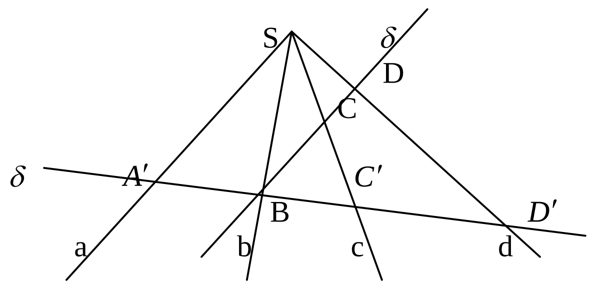


Avem $(ABCD) = S(abcd)$ şi $(A'B'C'D') = S(abcd)$ .Rezultă $(ABCD) = (A'B'C'D')$.(q.e.d.).

Fasciculul tăiat de o secantă paralelă cu una din raze.

Fie fasciculul $S(abcd)$ şi $\delta \| a$ (fig.5).

Fig.5



$(1)\, S(abcd) = (A'BC'D') = \frac{C'A'}{C'B} : \frac{D'A'}{D'B}$,$(2)\, \Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \frac{C'A'}{C'B} = \frac{SA'}{CB}$,

$(3)\, \Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \frac{D'A'}{D'B} = \frac{SA'}{DB}$ .Din (1),(2) şi (3) rezultă :

$S(abcd) = \frac{SA'}{CB} : \frac{SA'}{DB} = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB} = (A'BC'D')$.

Avem următoarea *regulă mnemotehnică* pentru scrierea valorii biraportului $\frac{1}{CB} : \frac{1}{DB}$.

Deoarece $\delta \| a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (*punctul impropriu* pe direcția paralelelor $\delta \| a$),

$S(abcd) = \frac{CA_i}{CB} : \frac{DA_i}{DB}$ şi luom $CA_i : DA_i = 1$ (trecerea la limită $A' \to A_i$).

$S(abcd) = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB}$.

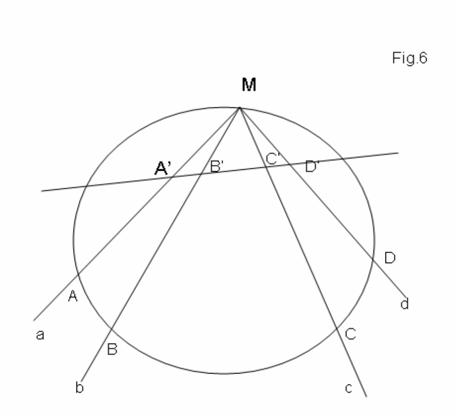
Consecință. Fie B, C, D puncte fixe pe dreapta δ , $a \| \delta, S \in a$, $SB = b, SC = c, SD = d$.
Atunci $\forall S \in a, S(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. Fie $A_i = \delta \cap a$. $S(abcd) = (A_i BCD) = \frac{CA_i}{CB} : \frac{DA_i}{DB} = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB}$ =constant.

Teorema 3. Fie A, B, C, D puncte fixe pe $C(O; R)$ şi $M \in C(O; R)$ (fig.6).Dacă $MA = a, MB = b, MC = c, MD = d$ atunci , $\forall M \in C(O; R)$ $M(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. $M(abcd)=\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$ =constant, deoarece A,B,C,D sunt puncte fixe şi

$\hat{ca}=\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}$ =ct., $\hat{cb}=\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$ =ct., $\hat{da}=\frac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$ =ct., $\hat{db}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$ =ct.



Observație. Din figura 6 rezultă $M(ABCD)=M(A'B'C'D')$.

Teorema 4. Fie $A,B,C,$ şi D puncte fixe pe $C(O;R)$ iar , $a,b,c,$ şi d tangentele în cele patru puncte la cercul $C(O;R)$ .Atunci oricarea ar fi tangenta t la cercul $C(O;R)$ în punctul $T\in C(O;R)$, punctele $A_1=a\cap t, B_1=b\cap t, C_1=c\cap t$ şi $D_1=d\cap t$ formează o diviziune anarmonică $(A_1B_1C_1D_1)$ invariantă.

Demonstrație. Considerăm fig.7

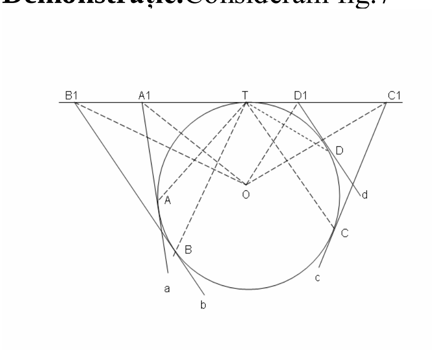


Fig.7

Avem $(A_1B_1C_1D_1)=O(A_1B_1C_1D_1)$ .Formăm apoi fasciculul cu vârful în T şi raze $TA\perp OA_1$, $TB\perp OB_1$, $TC\perp OC_1$ şi $TD\perp OD_1$ .Deci $T(ABCD)=O(A_1B_1C_1D_1)$.

Obținem $(A_1B_1C_1D_1)=T(ABCD)=(\sin\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}:\sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}):(\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R}:\sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

Teorema 5. Pe cercul $C(O;R)$ considerăm punctele distincte A,B,C,D şi tangentele a,b,c,d în aceste puncte la cerc (fig.8).Avem egalitățile:
$A(aBCD)=B(AbCD)=C(ABcD)=D(ABCd)$.

Demonstrație. $A(aBCD)=(\sin C\hat{A}a:\sin C\hat{A}B):(\sin D\hat{A}a:\sin D\hat{A}B)=$

$=(\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}:\sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}):(\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R}:\sin\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})=r=$constant=
$=B(AbCD)=C(ABcD)=D(ABCd)$ (din egalități de sinusuri).

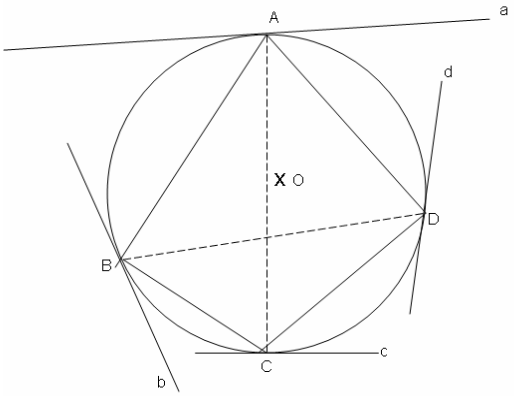


Fig. 8

Observație. *Teorema 5* reprezintă cazul limită a *teoremei 3* în care punctul M de pe $C(O;R)$ coincide cu unl din punctele A,B,C sau D.

Teorema 6. Pe cercul $C(O;R)$ se consideră punctele distincte A,B,C,D şi tangentele la cerc în aceste puncte: a,b,c,d (fig.9).

Dacă notăm $E=a\cap b, F=b\cap c, G=c\cap d, H=d\cap a, I=b\cap d$ şi $J=a\cap c,$ atunci avem egalitățile: $(AEJH)=(EBFI)=(JFCG)=(HIGD)$.

Demonstrație. Considerăm fasciculul cu vârful în O şi raze OA,OE,OJ şi OH

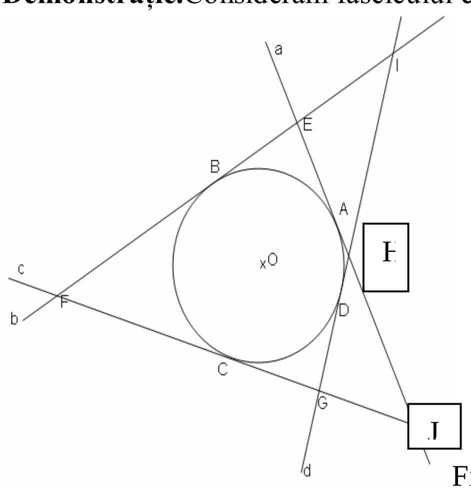


Fig.9

$OAEJH$, apoi fasciculul cu vârful în A şi razele perpendiculare pe razele fasciculului anterior : $a\perp OA, AB\perp OE, AC\perp OJ$ respectiv $AD\perp OH$, $A(aBCD)$ şi avem :

$(AEJH)=O(AEJH)=A(aBCD)$.

Analog se obțin şi relațiile:

$(EBFI)=O(EBFI)=B(AbCD)$;

$(JFCG)=O(JFCG)=C(ABcD)$;

$(HIGD)=O(HIGD)=D(ABCd)$.

Acum aplicăm relații între sinusuri, ca în teorema 5, pe care aici le detaliem astfel:

$C\hat{A}a=C\hat{B}A=c\hat{C}A=\dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$ şi $C\hat{D}A=\dfrac{\overset{\frown}{ABC}}{2R}=\pi-\dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}$, rezultă:

$\sin(C\hat{A}a)=\sin(C\hat{B}A)=\sin(c\hat{C}A)=\sin(C\hat{D}A)=\sin(\dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R})$ şi analoagele

$\sin(C\hat{A}B)=\sin(C\hat{B}b)=\sin(c\hat{C}B)=\sin(C\hat{D}B)=\sin(\dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2R})$

$$\sin(D\hat{A}a) = \sin(D\hat{B}A) = \sin(D\hat{C}A) = \sin(d\hat{D}A) = \sin\left(\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R}\right)$$

$$\sin(D\hat{A}B) = \sin(D\hat{B}b) = \sin(D\hat{C}B) = \sin(d\hat{D}B) = \sin\left(\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R}\right).$$

Ținând seama de aceste valori putem scrie:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = \left(\sin\frac{\overset{\frown}{CDA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{CB}}{2R}\right) : \left(\sin\frac{\overset{\frown}{DA}}{2R} : \sin\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2R}\right)$$

(q.e.d.).

Observație. *Teorema 6* reprezintă cazul limită al *teoremei 4* în care tangenta t la cercul $C(O;R)$ coincide cu una din tangentele a,b,c,d .

Teoreme de concurență şi coliniaritate.

Teorema 7. Dacă două diviziuni anarmonice egale $(ABCD) = (AB'C'D')$ au un *punct comun* A, atunci dreptele BB', CC' şi DD' sunt concurente.

Demonstrație. Avem fig.10.

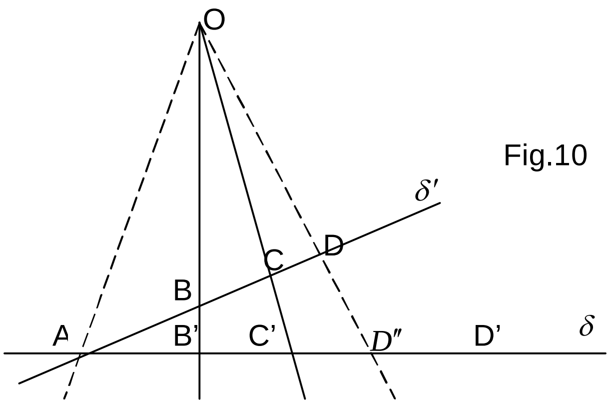
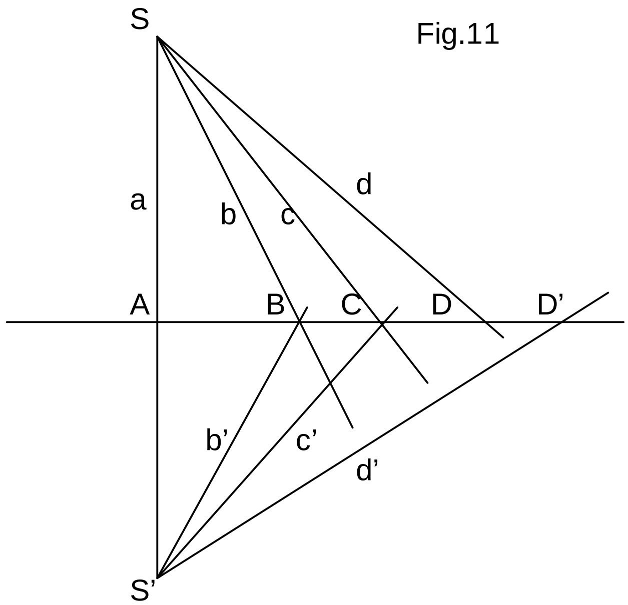


Fig.10

Fie $O = BB' \cap CC'$ şi $D'' = OD \cap \delta'$ .Din *teorema 2* rezultă $(ABCD) = (AB'C'D'')$ iar, din ipoteză avem $(ABCD) = (AB'C'D')$ .Deci $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, apoi din *teorema I.5* se obține $D'' = D'$.(q.e.d.).

Teorema 8. Dacă două fascicule anarmonice egale $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ au o *rază comună* $SS' = a$, atunci punctele de intersecție ale celor trei perechi de raze corespondente: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ sunt coliniare.



Demonstrație.
Fie $A = BC \cap a, D = BC \cap d$ şi $D' = DC \cap d'$ (fig.11).
Din ipoteză rezultă (1) $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ .Intersectând fasciculul $S(abcd)$ cu secanta BC rezultă (2) $S(abcd) = (ABCD)$ .Intersectând fasciculul $S'(ab'c'd')$ cu secanta BC rezultă (3) $S'(ab'c'd') = (ABCD')$ .Din cele trei relații avem $(ABCD) = (ABCD')$, apoi din *teorema I.5.* se obține $D = D'$.(q.e.d.).

Propun în încheiere câteva *teoreme clasice* ce pot fi atacate cu *tehnicile fasciculelor anarmonice(teoremele 7 şi 8).*

Aplicații.Teoreme clasice(se demonstrează cel mai simplu cu teoremele 7 şi 8)

Teorema 9. Prima teoremă a lui Papus.
În ΔABC fie A', B', C' trei puncte coliniare situate pe laturile BC, CA, AB şi $BB' \cap CC' = M$, $AM \cap BC = A_1$.În aceste condiții A' şi A_1 sunt conjugate armonic în raport cu B şi C, adică $(BCA'A_1) = -1$.

Teorema 10. A doua teoremă a lui Papus.
Pe două drepte δ şi δ' luom trei şiruri de puncte arbitrare $A, B, C \in \delta$ respectiv $A', B', C' \in \delta'$ .Intersecțiile $U = BC' \cap B'C, V = CA' \cap C'A$ şi $W = AB' \cap A'B$ sunt trei puncte coliniare .

Teorema .11. Teorema plană a lui Desargues, directă şi reciprocă.
Dacă două triunghiuri au vârfurile aşezate pe trei drepte concurente atunci laturile lor corespunzătoare se taie în trei puncte coliniare şi reciproc dacă intersecția perechilor de laturi a două triunghiuri sunt coliniare atunci vârfurile corespunzătoare sunt aşezate pe trei drepte concurente.
Având în vedere că teorema rămâne valabilă şi în cazul în care punctul de concurență al celor trei drepte este impropriu iar unul sau toate cele trei puncte de intersecție pot fi improprii enunțul poate fi reformulate astfel:
Fie trei drepte a, b, c pe care luom : $A, A' \in a$; $B, B' \in b$; $C, C' \in c$ .Dreptele a, b, c sunt concurente în O (propriu sau impropriu) dacă şi numai dacă intersecțiile $A_0 = BC \cap B'C'$, $B_0 = CA \cap C'A'$ şi $C_0 = AB \cap A'B'$ sunt situate pe o dreaptă (*proprie sau improprie*).Spunem că ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt *omologice* , O este *centrul omologiei* şi $\delta = B_0C_0$ este *axa omologiei.*

Teorema 12. Teorema lui Desargues directă – cazul spațial.
Fie *Oabc* fasciculul de vârf O - propriu sau O_i - impropriu şi $A, A' \in a; B, B' \in b; C, C' \in c$.În aceste condiții, punctele proprii sau improprii

$A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ sunt coliniare pe dreapta d (proprie) sau d_i (improprie).

Teorema 13. Teorema lui Desargues reciprocă – cazul spațial.
Fie $A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ coliniare pe dreapta d (*proprie*) sau d_i (*improprie*).Atunci $AA' \cap BB' \cap CC' = O$.

Observație. Şi în cazul plan (*teorema II.11.*), omologia de centru O - propriu şi axă improprie este o *omotetie*, iar omologia de centru impropriu şi axă improprie este o *translație.*

Teorema 14.Teorema lui Pascal pentru hexagon.
Într-un hexagon înscris într-un cerc, laturile opuse se taie în puncte coliniare.

Teorema 15.Teorema lui Pascal pentru patrulatere înscrise.
Într-un patrulater inscriptibil, inersecțiile laturilor opuse şi cele ale tangentelor la cercul circumscris duse prin perechile de vârfuri opuse sunt 4 puncte coliniare.

Teorema 16.Teorema lui Brianchon.
Într-un hexagon circumscris unui cerc diagonalele sunt concurente.

Teorema 17.Teorema lui Newton.
Într-un patrulater circumscriptibil, cele două diagonale împreună cu cele două drepte determinate de punctele de contact ale perechilor de laturi opuse cu cercul înscris, sunt patru drepte concurente.

Teorema 18.Într-un trapez isoscel, intersecția laturilor neparalele şi intersecțiile tangentelor duse prin vârfurile opuse la cercul circumscris trapezului, sunt puncte coliniare pe o dreaptă paralelă cu bazele.

Teorema 19. Raportul anarmonic al unui fascicul este egal cu *raportul anarmonic al coeficienților unghiulari* ai razelor fasciculului.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.
[3] http://www.nct.anth.org.uk/
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry
[5] http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/
[6] http://www.math.poly.edu/courses/projective_geometry/
[7] http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/proj/proj.html
[8] http://www.geometer.org/mathcircles/projective.pdf