Analysis

Prof. Dr. Knut Smoczyk

Leibniz Universität Hannover

Stand: 21. September 2013*

Inhaltsverzeichnis

§1 Vorbereitungen

Was ist Analysis?

Der Begriff *Analysis* (griech.) bedeutet ursprünglich die Zerlegung und Auflösung eines Begriffs in seine wesentlichen Merkmale, im Gegensatz zur *Synthesis*, die vom Gegebenen und Bekannten ausgeht und daraus das Unbekannte und Gesuchte zusammensetzt.

In der Mathematik baut die Analysis auf den Grundbegriffen *Zahl*, *Funktion* und *Grenzwert* auf. Sie nimmt das Gesuchte als gegeben an, zergliedert es und untersucht die Bedingungen, unter denen es bestehen kann, bis alle Beziehungen zum Bekannten ermittelt sind. Die Analysis umfasst insbesondere die Infinitesimalrechnung, die Differential- und Integralrechnung sowie die Funktionentheorie.

Der wesentliche Gegenstand des nächsten Abschnittes sind Begriffsbildungen aus der Mengenlehre.

1.1 Mengen

1.1.1 Definition (Cantor)
Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die zu einer Menge zusammengefassten Objekte bilden die *Elemente* dieser Menge.

Mengen und Elemente
Elemente und Mengen werden wir mit Buchstaben kennzeichnen. Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir $x \in M$. Dagegen bedeutet $x \notin M$, dass x kein Element von M ist. Besteht die Menge M aus den Elementen a, b und c, so schreiben wir $M = \{a, b, c\}$. Eine Menge kann auch kein Element enthalten. Dies ist die *leere Menge* und sie wird mit $\emptyset$ oder auch mit $\{\}$ gekennzeichnet.

1.1.2 Beispiel
Beispiele für Mengen sind:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$, die Menge aus den Elementen 1, 2, 3 und 4.

b) $\{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\}$.

c) $\{\{1\},\{1,2\}\}$, die Menge, deren Elemente die Mengen $\{1\}$ und $\{1,2\}$ sind.

d) $\{\varnothing\}$, die Menge, deren einziges Element die leere Menge ist.

Zahlenmengen
Für die grundlegenden Mengen der Zahlen verwenden wir die folgende Schreibweise:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen),

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ (natürliche Zahlen einschließlich der Null),

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$ (Menge der ganzen Zahlen),

$\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen),

$\mathbb{R}$ (reelle Zahlen),

$\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen).

Mengendefinition mittels sie charakterisierender Eigenschaften
Für die Definition einer Menge kann man auch Objekte mit einer gemeinsamen Eigenschaft zusammenfassen, etwa

$$M = \{x : E(x)\}.$$

Diese Form wird uns noch oft begegnen und sie ist wie folgt zu lesen: M ist die Menge aller x, für die die Eigenschaft $E(x)$ gilt.

1.1.3 Beispiel

a) Die Menge $M = \{3,4,5,6\}$ kann, anstatt durch Auflistung ihrer Elemente, auch wie folgt definiert werden:

$$M = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl, die größer als 2 und kleiner als 7 ist}\}.$$

b) $\{x \in \mathbb{N} : x < 7\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

c) $\{n^3 : n \in \mathbb{N}\} = \{1,8,27,64,\ldots\}$.

1.1.4 Definition (Mengenoperationen)
A und B seien Mengen.

a) Die *Vereinigung* von A und B ist die Menge

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

b) Der *Durchschnitt* von A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

A und B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.

c) Die *Differenz* von A und B ist die Menge

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

1.1.5 Beispiel
Es seien $A = \{2, 5, 8\}$, $B = \{5, 8, 9\}$.

$$A \cup B = \{2, 5, 8, 9\}, \quad A \cap B = \{5, 8\}, \quad A \setminus B = \{2\}.$$

1.1.6 Satz (Rechenregeln für Mengenoperationen)
A, B, C seien Mengen. Dann gelten für die Mengenoperationen die folgenden Rechenregeln:

i) Assoziativität:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

ii) Kommutativität:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

iii) Idempotenz:

$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A.$$

iv) Distributivität:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beweis:

Quantoren
Für den Ausdruck „Es existiert ein“ ist das Symbol $\exists$ gebräuchlich. Somit lässt sich also für

$$\text{es existiert ein } x \text{ in } A$$

auch

$$\exists\, x \in A$$

schreiben. Die Symbole $\exists!$ und $\forall$ bedeuten „es existiert genau ein“ und „für alle“.

1.1.7 Definition
A und B seien Mengen. A heißt *Teilmenge* von B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Wir schreiben dann $A \subset B$.

Teilmenge
Es gilt also die Aussage

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Dies wiederum liest man so: A ist Teilmenge von B genau dann (ist äquivalent zu), wenn für jedes x gilt: Aus $x \in A$ folgt $x \in B$.

1.1.8 Beispiel
a) $\{2,5\} \subset \{2,3,5\}$.

b) $\{1,3,5,7,\dots\} \subset \mathbb{N}$.

c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$.

1.1.9 Satz
Für Mengen A, B, C gilt:

i) $A \subset A$.

ii) $(A \subset B \text{ und } B \subset A) \Leftrightarrow A = B$.

iii) $(A \subset B \text{ und } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

iv) $\emptyset \subset A$.

Beweis: Offensichtlich. □

1.1.10 Definition
$M, A_1, \dots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ seien Mengen.

a) Die *Potenzmenge* von M ist die Menge

$$\mathscr{P}(M) := \{A : A \subset M\}.$$

b) Das *kartesische Produkt* $A_1 \times \cdots \times A_n$ der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist die Menge der geordneten n-Tupel

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Sind $A_1 = \cdots = A_n = A$, so schreiben wir auch A^n für $A \times \cdots \times A$.

1.1.11 Beispiel

a) Es sei $M = \{1,2\}$. Dann gilt

$$\mathscr{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

b) Es sei $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$ Dann ist

$$A_1 \times A_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}.$$

c) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n-mal}}.$

1.2 Relationen

1.2.1 Definition

Es seien A, B Mengen. Eine Teilmenge $R \subset A \times B$ heißt *(zweistellige) Relation* zwischen den Mengen A und B. Gilt $A = B$, so sagen wir, R ist eine Relation auf A.

Infixschreibweise
Statt $(a,b) \in R$ benutzt man meistens die *Infixschreibweise*, d.h. man schreibt $a\,R\,b$, wobei R in der Regel ein spezielles Symbol ist, z.B. $=, <, \leq, \sim, \simeq, \subset$.

1.2.2 Beispiel

Die folgenden Mengen stellen jeweils die Kleiner- und die Gleichheitsrelation auf den natürlichen Zahlen dar:

1. $< \; = \{(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (3,4), (1,5), \ldots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. $= \; = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \ldots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.2.3 Definition

Sei R eine Relation auf einer Menge A. R heißt

reflexiv	$:\Leftrightarrow \forall\, a \in A:$	$(a,a) \in R$,
symmetrisch	$:\Leftrightarrow \forall\, a, b \in A:$	$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$,
transitiv	$:\Leftrightarrow \forall\, a, b, c \in A:$	$(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$,
total	$:\Leftrightarrow \forall\, a, b \in A:$	$(a,b) \in R$ oder $(b,a) \in R$,
irreflexiv	$:\Leftrightarrow \forall\, a \in A:$	$(a,a) \notin R$,
antisymmetrisch	$:\Leftrightarrow \forall\, a, b \in A:$	$(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$.

Man beachte, dass totale Relationen immer reflexiv sein müssen.

1.2.4 Beispiel

Sei M die Menge aller Menschen.

a)
$$R = \{(a,b) \subset M \times M : a \text{ und } b \text{ sprechen eine gleiche Sprache}\}.$$
Die Relation ist reflexiv (jeder kann sich mit sich selbst unterhalten), symmetrisch, aber nicht transitiv (z.B. kann es sein, dass von drei Personen eine nur Deutsch, eine nur Englisch und die andere Deutsch und Englisch spricht), nicht total (es gibt Menschen, die keine gemeinsame Sprache sprechen). R ist nicht irreflexiv und nicht antisymmetrisch.

b)
$$R = \{(a,b) \subset M \times M : a,\, b \text{ haben dieselbe Mutter}\}.$$
Die Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, aber nicht total.

Eine nicht leere Relation kann nicht gleichzeitig reflexiv und irreflexiv sein. Jedoch gibt es Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind, z.B. die Relation
$$R = \{(1,2),(2,2)\} \subset \{1,2\} \times \{1,2\}.$$
Somit kann man nicht folgern: „Die Relation ist nicht reflexiv, also ist sie irreflexiv“. Auch gibt es Relationen, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind.

1.2.5 Definition

Eine Relation R auf M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für $a \in M$ nennt man
$$[a] := \{b \in M : (a,b) \in R\}$$
die *Äquivalenzklasse* von a bzgl. R. Eine Relation heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine irreflexive, transitive Relation heißt *strenge Halbordnung* und eine Halbordnung, die zusätzlich eine totale Relation ist, heißt *Totalordnung* oder auch *lineare Ordnung*.

Man beachte, dass bei einer Äquivalenzrelation für $(a,b) \in R$ wegen der Symmetrie $[a] = [b]$ gilt und dass aufgrund der Reflexivität stets $a \in [a]$ ist.

1.2.6 Beispiel

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Relation
$$R := \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m - n \text{ ist durch } p \text{ teilbar}\}.$$
Für $(m,n) \in R$ schreiben wir $m \equiv_p n$ und nennen *m kongruent n modulo p*. Die Relation $\equiv_p$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Die Äquivalenzklassen nennt man die *Restklassen modulo p*. Für $p = 2$ zerfällt $\mathbb{Z}$ z.B. in die Restklassen der geraden (durch 2 teilbaren) und der ungeraden Zahlen.

b) Die Relation $\leq$ ist eine Totalordung auf Z und die Relation $<$ eine strenge Halbordnung.

1.2.7 Definition
Die *inverse Relation* einer Relation $R \subset A \times B$ ist die Relation

$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\} \subset B \times A .$$

1.2.8 Beispiel
Die Größer-Relation $>$ auf $\mathbb{Z}$ ist die inverse Relation zur Kleiner-Relation $<$.

1.3 Abbildungen

1.3.1 Definition
A, B seien Mengen.

a) Eine *partielle Abbildung* f ist eine Relation $f \subset A \times B$ mit der Eigenschaft:

$$f \text{ ist eindeutig, d.h. sind } (a,b), (a,b') \in f, \text{ so folgt } b = b'.$$

Der *Definitionsbereich* von f ist die Menge

$$D_f := \{a \in A : \exists\, b \in B : (a,b) \in f\} \subset A$$

und der *Wertebereich* von f ist die Menge

$$W_f := \{b \in B : \exists\, a \in A : (a,b) \in f\} \subset B.$$

b) Eine partielle Abbildung $f \subset A \times B$ heißt *Abbildung*, wenn $D_f = A$, d.h. wenn gilt:

$$f \text{ ist total definiert, d.h. zu jedem } a \in A \text{ existiert ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in f.$$

c) Ist $f \subset A \times B$ eine Abbildung und $B \subset \mathbb{R}$ oder $B \subset \mathbb{C}$, so nennen wir f eine *reelle bzw. komplexe Funktion*.[1)]

d) Eine Abbildung $f : A \times A \to A$ nennen wir eine *(binäre) innere Verknüpfung* auf A.

Abbildungen
Ist $f \subset A \times B$ eine Abbildung, so gibt es also zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in f$. Wir schreiben dann $f : A \to B$ und sagen, *f bildet die Menge A in die Menge B ab*. Ist $(a,b) \in f$, so schreiben wir $b = f(a)$ und sagen f *nimmt an der Stelle a den Wert $b = f(a)$ an.*

[1)] In der Literatur wird häufig nicht zwischen Abbildungen und Funktionen unterschieden, unabhängig davon, ob in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ abgebildet wird.

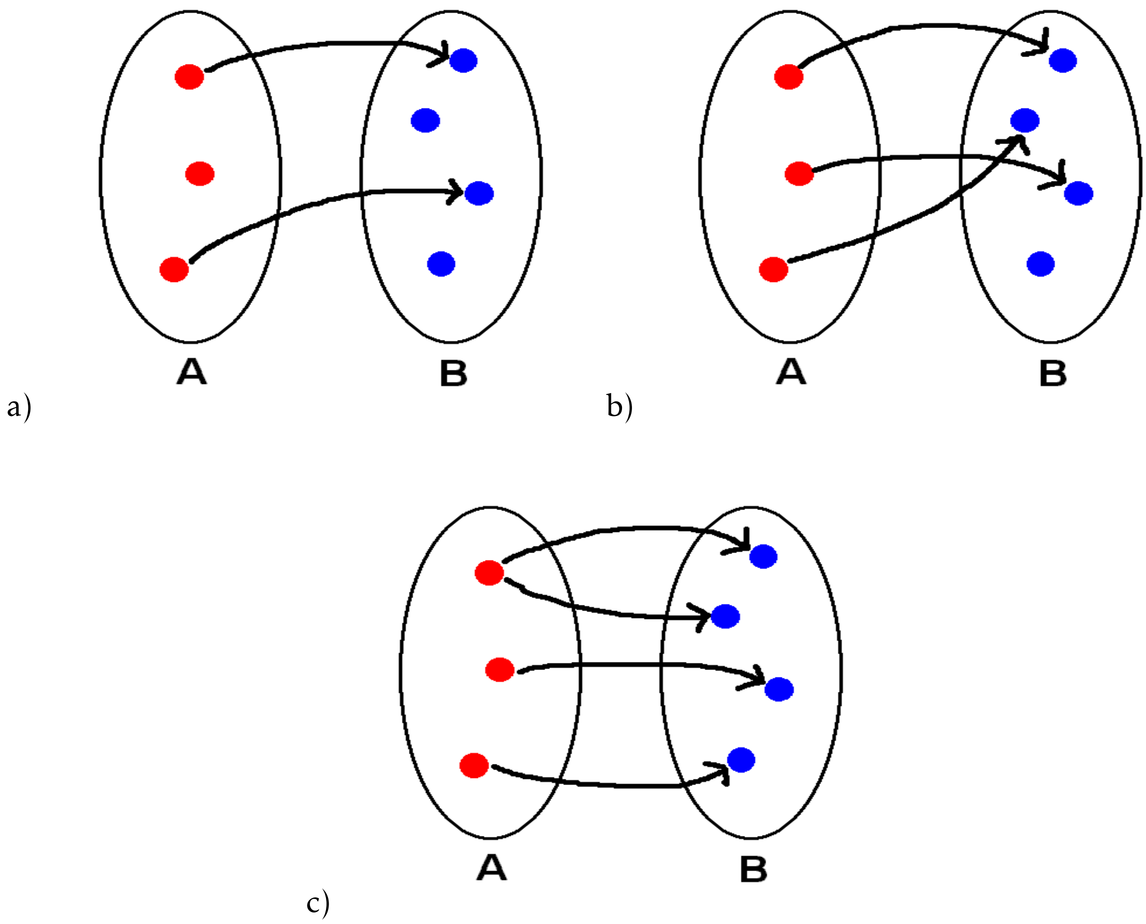


Abbildung 1.1: a) Partielle Abbildung. b) Abbildung. c) Keine partielle Abbildung.

Binäre Verknüpfungen
Für binäre Verknüpfungen verwenden wir meistens die Infixnotation, wobei wir f durch ein Symbol, z.B. $+, \cdot, \times, \otimes$, ersetzen. Also schreiben wir z.B. statt $+(a,b)$ eher $a+b$.

Durschnitte und Vereinigungen über beliebigen Indexmengen
Wir können nun auch Durchschnitte und Vereinigungen über beliebigen Indexmengen definieren. Sei hierzu I eine beliebige Menge. Jedem $i \in I$ ordnen wir eine Menge M_i zu. Dann seien

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x : x \in M_i \text{ für mindestens ein } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x : x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Summen- und Produktzeichen
Für $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ (oder $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) setzen wir

$$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \dots + a_n, \qquad \prod_{k=0}^{n} a_k := a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Fakultät
Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* von n (sprich: n-Fakultät) durch

$$n! := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & , n \geq 1. \end{cases}$$

Binomialkoeffizient
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ sei der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k) gegeben durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

1.3.2 Bemerkung
Jede Abbildung ist partielle Abbildung. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Allerdings wird jede partielle Abbildung durch Einschränkung auf ihren Definitionsbereich zu einer Abbildung. Dabei ist die *Einschränkung* einer partiellen Abbildung $f \subset A \times B$ auf eine Teilmenge $A' \subset A$ definiert durch die Relation

$$f_{|A'} := \{(a,b) \in f : a \in A'\} \subset A' \times B.$$

Ist also $f \subset A \times B$ eine partielle Abbildung, so ist $f_{|D_f} : D_f \to B$ eine Abbildung.

1.3.3 Definition
$f : A \to B$ sei eine Abbildung.

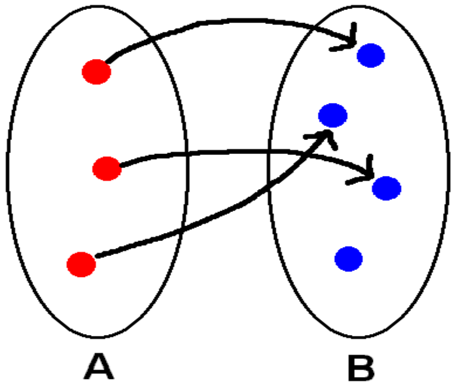
a) f heißt *injektiv*, wenn aus $f(a) = f(a')$ auch $a = a'$ folgt.

b) f heißt *surjektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

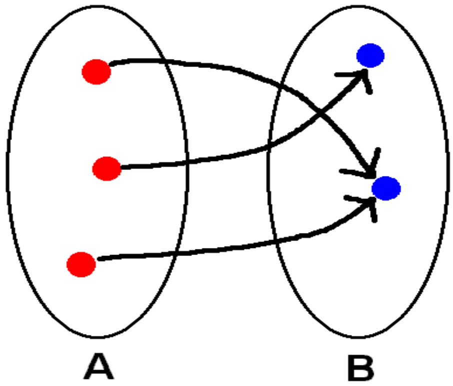
c) f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

d) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Unter der *Verkettung* der Abbildungen g und f verstehen wir die Abbildung

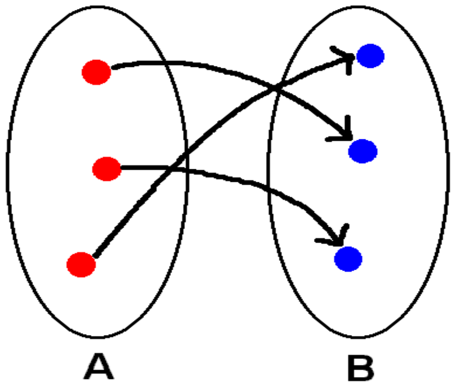
$$g \circ f : A \to C \quad \text{mit} \quad (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$



a)



b)



c)

Abbildung 1.2: a) Injektiv aber nicht surjektiv. b) Surjektiv aber nicht injektiv. c) Bijektiv.

1.3.4 Beispiel

a) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) := k^3$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Dieselbe Abbildung, aufgefasst als Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - x$, ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Umkehrabbildung und Urbild
Bei einer bijektiven Abbildung f ist die inverse Relation f^{-1} auch eine bijektive Abbildung. Diese nennt man *Umkehrabbildung* oder auch *inverse Abbildung*. Ist allgemeiner $f : A \to B$ eine Abbildung, so bezeichnet für eine beliebige Teilmenge $B' \subset B$

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

die *Urbildmenge* von B' unter der Abbildung f.

1.3.1 Permutationen

1.3.5 Definition

a) Sei M eine Menge und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $a : \{1, \ldots, n\} \to M$ heißt ein *n-Tupel* in M.

b) Eine *Permutation* von n Elementen ist eine bijektive Abbildung

$$p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Permutationen
Ein n-Tupel $a : \{1, \ldots, n\} \to M$ kann man in der Form $a = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i := a(i)$, $i = 1, \ldots, n$, schreiben. Die Menge aller Permutationen von n Elementen wird mit S_n bezeichnet. Eine Permutation ist ein n-Tupel in der Menge $\{1, \ldots, n\}$ und ist daher eindeutig durch ihre Bilder festgelegt. Wir schreiben deswegen auch hier $p = (p(1), \ldots, p(n))$.

1.3.6 Beispiel
Die Permutation $(3, 1, 2)$ ist die Abbildung $p : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $p(1) = 3$, $p(2) = 1$, $p(3) = 2$.

1.3.2 Abzählungen

1.3.7 Definition
Sei M eine Menge.

a) M heißt *endlich*, wenn entweder $M = \emptyset$ oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to M$ gibt. Wir schreiben

$$\sharp(M) = n,$$

wenn M endlich ist und M genau n Elemente enthält (für $M = \emptyset$ ist also $\sharp(M) = 0$).

b) M heißt *abzählbar*,, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen *überabzählbar*.

c) Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist.

1.3.8 Beispiel

a) Die Menge aller Menschen ist endlich.

b) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge M ist abzählbar. Insbesondere sind endliche Mengen abzählbar.

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich. Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ ist z.B.

$$f(k) := \begin{cases} k/2 & k \text{ ist gerade} \\ -(k+1)/2 & k \text{ ist ungerade}. \end{cases}$$

1.3.9 Satz (Abzählbarkeitssatz)
Gegeben sei eine abzählbare Menge A und für jedes $i \in A$ sei M_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch die Menge

$$M := \bigcup_{i \in A} M_i$$

abzählbar.

Beweis:

1.3.10 Beispiel
Es sei $A := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Für jedes $q \in I$ setzen wir

$$M_q := \{p/q : p \in \mathbb{N}_0\}.$$

Es ist klar, dass A und M_q jeweils abzählbar sind. Somit sind nach Satz 1.3.9 auch die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in A} M_q$$

abzählbar.

1.4 Beweisverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir einige Beweisverfahren vorstellen. Dabei versteht man unter einem Beweis die gültige Herleitung der Richtigkeit oder auch Unrichtigkeit einer Aussage A aus einer Menge von *Axiomen*, d.h. als wahr angenommene und in sich widerspruchsfreie Aussagen, oder aus anderen Aussagen, die bereits aus diesen Axiomen hergeleitet wurden.

Ein Beweis kann entweder direkt oder indirekt, konstruktiv oder nicht-konstruktiv geführt werden. Oft ist es zweckmäßig umfangreiche Beweise in mehrere Teilbeweise aufzuteilen, von denen dann einige direkt oder indirekt bzw. konstruktiv oder nicht-konstruktiv sein können.

1.4.1 Direkte Beweise

Zunächst widmen wir uns den *direkten Beweisen*. Dabei wird der Beweis einer Aussage direkt aus bekannten Aussagen oder Axiomen durch logische Schlussfolgerungen erbracht. Die direkte Beweismethode lässt sich am besten durch Beispiele veranschaulichen.

1.4.1 Beispiel
Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Dann ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{1.4.1}$$

Beweis: Für $k = n$ ist dies wegen $1 = 1 + 0$ offensichtlich erfüllt. In den verbleibenden

Fällen ist $1 \leq k \leq n-1$ und dann

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Ein weiteres Beispiel ist:

1.4.2 Beispiel
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = n^3$. Dann existiert eine natürliche Zahl a mit $m = a^3$, $n = a^2$.

Beweis: Jede Primzahl p mit $p|m$ (*p ist Teiler von m*) erfüllt auch $p|n$. Seien

$$m = p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}, \quad n = p_1^{j_1} \cdots p_k^{j_k}$$

die Primfaktorzerlegungen von m und n. Aus $m^2 = n^3$ folgt

$$2i_s = 3j_s, \quad \forall\, s = 1, \ldots, k.$$

Da 2 und 3 teilerfremd sind, kann dies nur erfüllt sein, wenn

$$i_s = 3l_s, \quad j_s = 2l_s, \quad \forall\, s = 1, \ldots, k$$

mit natürlichen Zahlen $l_1, \ldots, l_k$. Folglich ist

$$m = (p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k})^3 \quad \text{und} \quad n = (p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k})^2.$$

Die Behauptung folgt mit $a := p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$. □

1.4.2 Indirekte Beweise

Bei einem *indirekten Beweis* zeigt man, dass ein Widerspruch entstünde, wenn die zu beweisende Aussage falsch wäre. Daher nennt man diese Beweismethode auch oft *Widerspruchsbeweis*.

1.4.3 Beispiel
Es existiert keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Zahl r. Sei $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Durch eventuelles Kürzen können wir ohne Einschränkung annehmen, dass p und q *teilerfremd* sind, d.h. $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$[2]. Dann folgt aus

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

auch

$$p^2 = 2q^2.$$

Somit muss $p^2 = p \cdot p$ durch 2 teilbar sein, d.h. p muss durch 2 teilbar sein. Dann ist p^2 aber sogar durch 4 teilbar, so dass auch $2q^2$ durch 4 und somit q^2 durch 2 teilbar wäre. Demnach ist q selbst durch 2 teilbar und $\mathrm{ggT}(p,q) \neq 1$. Dies ist ein Widerspruch.

□

1.4.4 Beispiel
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Dann ist die nätürliche Zahl $m := p_1 \cdots p_n + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ teilbar, also entweder selbst eine Primzahl, oder es gibt eine weitere Primzahl q mit $q|m$. Beides ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $p_1, \ldots, p_n$ die einzigen Primzahlen sind. □

1.4.3 Konstruktive und nicht konstruktive Beweise

Oft wird in einer Aussage die Existenz oder Nichtexistenz eines mathematischen Objektes behauptet. Man kann dann versuchen, den Beweis konstruktiv zu führen, d.h. das gesuchte Objekt direkt anzugeben. In vielen Fällen wird dies aber nicht möglich sein, obwohl man die Existenz nachweisen kann.

1.4.5 Beispiel (Konstruktiver Beweis)
Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ besitzt eine reelle Nullstelle.

Beweis: Wir berechnen $f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, also liegt bei $x = 1$ eine Nullstelle.

□

1.4.6 Beispiel (Nicht konstruktiver Beweis)
Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ besitzt eine reelle Nullstelle.

Beweis: Die Funktion ist stetig und es gilt $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$. Der Graph von f muss also irgendwann die x-Achse schneiden (und zwar auf dem Intervall $[0,2]$), d.h.

[2] Mit $\mathrm{ggT}(p,q)$ ist hier der **g**_rößte_ **g**_emeinsame_ **T**_eiler_ von p und q gemeint.

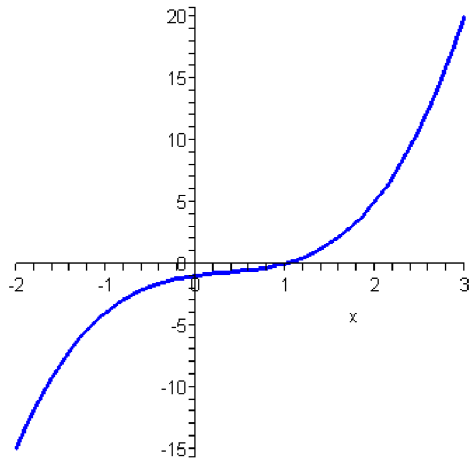


Abbildung 1.3: Der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz (siehe Satz 3.1.12, vergl. auch mit Abbildung 1.3). □

1.4.4 Vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der *vollständigen Induktion* beruht auf dem *Induktionsaxiom* der natürlichen Zahlen. Dieses besagt:

Induktionsaxiom: Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) mit den Eigenschaften, dass 1 (bzw. 0) in M liegt und dass mit jedem Element $m \in M$ auch sein Nachfolger $m+1 \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$ (bzw. $M = \mathbb{N}_0$).

Die Beweisidee bei der vollständigen Induktion ist nun folgende: Ist eine Folge von Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit den Eigenschaften:

Induktionsanfang **(IA)**: $A(k)$ sei richtig für ein $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt **(IS)**: Für alle $n \geq k$ gilt die Aussage: Unter der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig.

Dann folgt der *Induktionsschluss*: Die Aussage $A(n)$ ist für alle $k \geq n$ erfüllt.

1.4.7 Beispiel
Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M ist $\binom{n}{k}$. Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ ganzzahlig.

Beweis:

(IA): Für $n = 0$ ist die Aussage offenbar erfüllt, da die einzige 0-elementige Teilmenge einer 0-elementigen (d.h. leeren) Menge die leere Menge ist und wir $\binom{0}{0} = 1$ haben. Außerdem ist $\binom{0}{k} = 0$, wenn $k > 0$.

(IS): Sei $n \geq 0$ und die Aussage schon für n bewiesen. Ferner sei M eine $(n+1)$-elementige Menge und $x \in M$ ein beliebiges Element. Für $0 \leq k \leq n+1$ betrachten wir die k-elementigen Teilmengen von M. Da die leere Menge die einzige 0-elementige Teilmenge von M ist, ist die Aussage für $k = 0$ sicherlich erfüllt, denn $\binom{n+1}{0} = 1$. Wir können also $1 \leq k \leq n+1$ annehmen. Für eine k-elementige Teilmengen P von M gilt entweder

$$P \subset M \setminus \{x\}$$

oder

$$P = \tilde{P} \cup \{x\} \quad \text{mit} \quad \tilde{P} \subset M \setminus \{x\}.$$

$\tilde{P}$ ist dann aber eine $(k-1)$-elementige Teilmenge der n-elementigen Menge $M \setminus \{x\}$. Da nach Voraussetzung $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmenge $P \subset M \setminus \{x\}$ und $\binom{n}{k-1}$ $(k-1)$-elementige Teilmengen $\tilde{P} \subset M \setminus \{x\}$ existieren, erhalten wir insgesamt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{(1.4.1)}{=} \binom{n+1}{k}$$

k-elementige Teilmengen von M.

□

1.5 Die reellen Zahlen

In diesem Kapitel wollen wir lernen, was man unter den reellen Zahlen versteht. Vereinfacht ausgedrückt, sind die reellen Zahlen eine Menge M mit zwei inneren Verknüpfungen + (genannt *Addition*) und · (genannt *Multiplikation*) sowie einer Relation < (genannt *Ordnungsrelation*), für die gewisse Axiome gelten.

Nun kann man in der Mathematik viele Objekte definieren, die Frage ist aber stets, ob Objekte mit den geforderten Eigenschaften überhaupt existieren (*Existenz*) und falls ja, ob sie durch die geforderten Eigenschaften eindeutig festgelegt sind (*Eindeutigkeit*), oder ob es eventuell mehrere Objekte mit denselben Eigenschaften gibt.

Wir werden in den nächsten Abschnitten die für die rellen Zahlen geforderten Eigenschaften Schritt für Schritt vorstellen.

1.5.1 Körper

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der Addition und der Multiplikation zunächst einmal einen sogenannten Körper. Dieser ist wie folgt definiert.

1.5.1 Definition
Ein Tripel $(\mathbb{K},+,\cdot)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei inneren Verknüpfungen $+$, genannt *Addition* und $\cdot$, genannt *Multiplikation*, heißt Körper, wenn folgende Körperaxiome erfüllt sind.

(K1) Assoziativgesetz der Addition

$$x+(y+z)=(x+y)+z\,, \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{K}\,.$$

(K2) Existenz der Null

Es gibt ein Element in $\mathbb{K}$, genannt *Null* und mit 0 bezeichnet, so dass

$$x+0=x\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{K}\,.$$

(K3) Existenz des additiven Inversen

Zu jedem $x\in\mathbb{K}$ existiert ein $y\in\mathbb{K}$ mit

$$x+y=0\,.$$

Die Zahl[3] y heißt das *additive Inverse* zu x.

(K4) Kommutativgesetz der Addition

$$x+y=y+x\,, \quad \forall\, x,y\in\mathbb{K}\,.$$

(K5) Assoziativgesetz der Multiplikation

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z\,, \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{K}\,.$$

(K6) Existenz der Eins

Es gibt ein Element in $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\setminus\{0\}$, genannt *Eins* und mit 1 bezeichnet, so dass

$$x\cdot 1=x\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{K}\,.$$

(K7) Existenz des multiplikativen Inversen

Zu jedem $x\in\mathbb{K}^*$ existiert ein $y\in\mathbb{K}$ mit

$$x\cdot y=1\,.$$

Die Zahl y heißt das *multiplikative Inverse* zu x.

[3] Elemente in einem Körper nennen wir Zahlen.

(K8) Kommutativgesetz der Multiplikation

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}.$$

(K9) Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{K}.$$

In vielen Fällen ist es unproblematisch, den Multiplikationspunkt $\cdot$ garnicht erst hinzuschreiben, d.h. man schreibt xy anstatt $x \cdot y$. Ganz verzichten kann man aber nicht auf den Punkt, denn z.B. ist ja $1 \cdot 2$ nicht dasselbe wie 12.

Das additive Inverse von x wird mit $-x$ bezeichnet und statt $z + (-x)$ schreibt man einfach $z - x$. Ferner sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$nx := 0 + \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}.$$

Das multiplikative Inverse von x wird mit x^{-1} bezeichnet. Entsprechend sind z/x oder $\frac{z}{x}$ die Kurzschreibweisen für $z \cdot (x^{-1})$. Außerdem setzt man für $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^n := 1 \cdot \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}.$$

1.5.2 Satz (Folgerungen aus den Körperaxiomen)

a) *Die* 0 *ist eindeutig bestimmt.*

b) *Das additive Inverse zu* $x \in \mathbb{K}$ *ist eindeutig bestimmt.*

c) $-0 = 0$.

d) $-(-x) = x$.

e) *Die* 1 *ist eindeutig bestimmt.*

f) *Das multiplikative Inverse zu* $x \in \mathbb{K}^*$ *ist eindeutig bestimmt.*

g) $1^{-1} = 1$.

h) $(x^{-1})^{-1} = x$ *für alle* $x \in \mathbb{K}^*$.

i) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

j) *In einem Körper gilt die Nullteilerfreiheit, d.h.*

$$xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } y = 0. \tag{1.5.1}$$

Beweis:

Es gibt sehr viele Körper, d.h. die Körperaxiome legen die reellen Zahlen noch nicht eindeutig fest. Beispiele für weitere Körper sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Ein eher exotisches Exemplar ist der im folgenden Beispiel angegebene 2-elementige Körper $\mathbb{F}_2$.

1.5.3 Beispiel ($\mathbb{F}_2$)
Jeder Körper enthält mindestens die zwei verschiedenen Elemente 0 und 1. Umgekehrt ist es möglich, eine Menge $K := \{x, y\}$ bestehend aus nur zwei Elementen x und y zu einem Körper zu machen. Wir definieren die beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation nach folgendem Schema.

$+$	x	y
x	x	y
y	y	x

$\cdot$	x	y
x	x	x
y	x	y

Wie man leicht nachprüft, sind die Axiome **(K1)**-**(K9)** erfüllt, d.h. die Menge K wird mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper, wobei die 0 durch x und die 1 durch y gegeben ist. Dieser Körper wird auch mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnet. Offenbar gilt in $\mathbb{F}_2$ die Gleichung $1 + 1 = 0$. $\mathbb{F}_2$ ist der sogenannte Restklassenkörper modulo 2. Elemente in $\mathbb{F}_2$ verhalten sich wie die Restklassen modulo 2 unter der üblichen Addition und Multiplikation, d.h. ersetzt man x durch den Begriff „gerade“ und y durch den Begriff „ungerade“, so wird z.B. die Aussage $y \cdot y = y$ zu

$$\text{„ungerade} \cdot \text{ungerade} = \text{ungerade“}$$

und die Aussage $y + y = x$ zu

$$\text{„ungerade} + \text{ungerade} = \text{gerade“}.$$

Man kann den Begriff des Körpers auch auf den Begriff der Gruppe zurückführen.

1.5.4 Definition (Gruppe)
Es sei G eine Menge und $*$ sei eine innerer Verknüpfung (Multiplikation) auf G. Dann heißt $(G, *)$ eine Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind.

(G1) Assoziativgesetz

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall\, a, b, c \in G.$$

(G2) Existenz des neutralen Elements
Es gibt ein Element $e \in G$, so dass

$$a * e = a, \quad \forall\, a \in G.$$

(G3) Existenz des Inversen
Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $b \in G$, so dass $a * b = e$.

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn zusätzlich das folgende Axiom der Kommutativität erfüllt ist.

(G4) Kommutativgesetz

$$a * b = b * a, \quad \forall\, a, b \in G.$$

Ein Körper ist somit eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei inneren Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), so dass gilt:

- $(\mathbb{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Hierbei ist $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $0 := e_+$.
- Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{K}.$$

1.5.5 Beispiel

a) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit der Addition $+$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $e = 0$.

b) Sei $\mathscr{P}(M)$ die Potenzmenge einer beliebigen Menge. Für A, $B \in \mathscr{P}(M)$ definieren wir die symmetrische Differenz (siehe Abbildung 1.4)

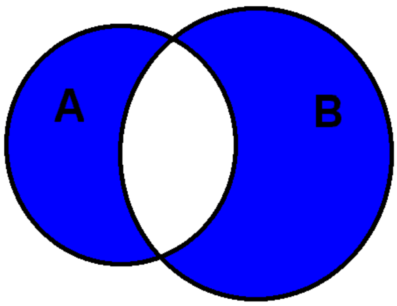


Abbildung 1.4: Symmetrische Differenz zweier Mengen.

$$A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Dann ist $(\mathscr{P}(M), \vartriangle)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $e = \emptyset$. A ist jeweils zu sich selbst invers, d.h.

$$A \vartriangle A = \emptyset.$$

c) M sei eine beliebige nichtleere Menge und $\mathscr{B}(M)$ sei die Menge aller Bijektionen von M auf sich selbst. Dann bildet $\mathscr{B}(M)$ mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe. Diese ist jedoch im Allgemeinen nicht abelsch. Das neutrale Element ist die Identität

$$\mathrm{Id} : M \to M\,, \quad \mathrm{Id}(x) := x\,.$$

Insbesondere bildet die Menge der Permutationen

$$S_n = \mathscr{B}(\{1, \ldots, n\})$$

mit der Verkettung eine Gruppe, welche man daher auch die *Permutationsgruppe* von n Elementen nennt.

1.5.2 Angeordnete Körper und die Betragsfunktion

1.5.6 Definition (Angeordneter Körper)
Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *angeordnet*, wenn es auf ihm eine Relation gibt, welche mit $<$ bezeichnet wird, für die die folgenden *Anordnungsaxiome* gelten.

(A1) Trichotomie

Für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Beziehungen

$$x = 0\,, \quad 0 < x\,, \quad 0 < -x\,.$$

(A2) Monotonie der Addition

Sind $x, y \in \mathbb{K}$ mit $0 < x$ und $0 < y$, so ist auch $0 < x + y$.

(A3) Monotonie der Multiplikation

Sind $x, y \in \mathbb{K}$ mit $0 < x$ und $0 < y$, so ist auch $0 < x \cdot y$.

Ein Element $x \in \mathbb{K}$ heißt *positiv*, wenn $0 < x$. Ist $0 < -x$, so heißt x *negativ*.

Wir schreiben $x > 0$, wenn $0 < x$, d.h. wir bezeichnen die zu $<$ inverse Relation mit $>$. Falls $0 < y - x$, so schreiben wir auch $x < y$ oder $y > x$. Ferner bedeutet $0 \leq x$, dass $x = 0$ oder $0 < x$ bzw. $x \geq 0$, dass $x = 0$ oder $x > 0$.

1.5.7 Beispiel

a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gehören mit der üblichen Kleiner-Relation zur Klasse der angeordneten Körper.

b) Der Körper $\mathbb{F}_2$ lässt sich nicht anordnen, denn hier gilt $1 = -1$, womit schon die Trichotomie verletzt ist.

1.5.8 Satz (Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen)
In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Regeln.

a) Aus $x > y$ und $y > z$ folgt $x > z$ (Transitivität der Kleiner-Relation).

b) $x < y \Leftrightarrow -y < -x$.

c) $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$, insbesondere ist $1 > 0$.

d) $x > 0 \Leftrightarrow 1/x > 0$.

e) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0)$ oder $(x < 0, y < 0)$.

$xy < 0 \Leftrightarrow (x > 0, y < 0)$ oder $(x < 0, y > 0)$.

f) Aus $x < y$ und $z < 0$ folgt $zx > zy$.

g) Aus $x^2 < y^2$, $x \geq 0$ und $y > 0$ folgt $x < y$.

Beweis:

1.5.9 Definition
$(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ sei ein angeordneter Körper. Wir definieren die *Betragsfunktion*

$$|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad |x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \,. \end{cases}$$

1.5.10 Satz (Eigenschaften des Betrags)
Für den Betrag gilt:

a) $|x| \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{K} \quad \textit{und} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

b) $|-x| = |x|, \forall\, x \in \mathbb{K}.$

c) $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall\, x, y \in \mathbb{K}.$

d) **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}. \tag{1.5.2}$$

Beweis:

1.5.3 Das Vollständigkeitsaxiom, Supremum und Infimum

Da neben $\mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper ist, müssen wir zur Charakterisierung der reellen Zahlen die Klasse der angeordneten Körper durch Hinzufügen von mindestens einem Axiom weiter einschränken. In der Tat benötigen wir genau ein zusätzliches Axiom, um die reellen Zahlen eindeutig festzulegen; dies ist das sogenannte Vollständigkeitsaxiom **(V)**. Das Vollständigkeitsaxiom ist für das Verständnis von Grenzprozessen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit essentiell.

1.5.11 Definition

a) Eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ eines angeordneten Körpers $\mathbb{K}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{K}$ gibt, so dass gilt:
$$x \leq M, \quad \forall\, x \in A.$$
Jede solche Zahl heißt eine *obere Schranke* von A.

b) Eine nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{K}$ heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $m \in \mathbb{K}$ gibt, so dass
$$m \leq x, \quad \forall\, x \in A$$
erfüllt ist und jedes solche m heißt eine *untere Schranke* von A.

c) Eine nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

1.5.12 Beispiel

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und
$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}.$$
Dann ist A beschränkt, denn z.B. ist $M = 2$ eine obere und $m = -2$ eine untere Schranke, da
$$x^2 \leq 2 < 4, \quad \forall\, x \in A$$
und somit
$$|x| < 2, \quad \forall\, x \in A.$$

1.5.13 Definition

Eine obere Schranke $M \in \mathbb{K}$ einer nichtleeren Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ heißt *kleinste obere Schranke* von A, wenn es keine kleinere obere Schranke von A in $\mathbb{K}$ gibt. Entsprechend ist die *größte untere Schranke* von A erklärt.

1.5.14 Beispiel

Die Menge A aus Beispiel 1.5.12 besitzt in $\mathbb{Q}$ keine kleinste obere Schranke.

Beweis: Um dies zu zeigen, weisen wir die folgenden beiden Aussagen nach.

a) Zu jedem
$$M \in \mathscr{O} := \{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ und } y^2 > 2\}$$
existiert ein $\tilde{M} \in \mathscr{O}$ mit $\tilde{M} < M$.

b) $M \in \mathbb{Q}$ ist genau dann obere Schranke von A wenn $M \in \mathscr{O}$.

Aus diesen Aussagen folgt dann, dass es in der Menge der oberen Schranken von A keine kleinste geben kann.

Zu a) Sei $M \in \mathscr{O}$. Wir definieren
$$\tilde{M} := \frac{1}{2}\left(M + \frac{2}{M}\right).$$
Dann gilt $\tilde{M} \in \mathbb{Q}$, $\tilde{M} > 0$ und
$$\tilde{M}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(M^2 + 4 + \frac{4}{M}\right) - 2 = \frac{1}{4}\left(M - \frac{2}{M}\right)^2 > 0\,,$$
denn $\left(M - \frac{2}{M}\right)^2 = \frac{(M^2-2)^2}{M^2} > 0$. Also ist $\tilde{M} \in \mathscr{O}$. Außerdem folgt
$$M - \tilde{M} = \frac{1}{2}\left(M - \frac{2}{M}\right) = \frac{1}{2M}\left(M^2 - 2\right) > 0\,.$$

Zu b) „$\Leftarrow$“: Sei $M \in \mathscr{O}$, d.h. $M \in \mathbb{Q}$ erfüllt $M^2 > 2$ und $M > 0$. Dann gilt für alle $x \in A$
$$x^2 = |x|^2 \le 2 < M^2$$
und aus Satz 1.5.8, Teil g) folgt
$$x \le |x| < M\,, \quad \forall\, x \in A\,.$$
Folglich ist M eine obere Schranke von A.
„$\Rightarrow$“: Sei nun umgekehrt $M \in \mathbb{Q}$ eine obere Schranke von A. Wegen $1 \in A$ gilt zunächst $1 \le M$, also insbesondere $M > 0$. Es existiert kein $M \in \mathbb{Q}$ mit $M^2 = 2$ (Übung!), somit gilt entweder $M^2 > 2$, oder $M^2 < 2$. Wir zeigen, dass der letzte Fall unmöglich ist, dann folgt die Behauptung.
Sei also $M \in \mathbb{Q}$ obere Schranke von A mit $M > 0$ und $M^2 < 2$. Wir setzen
$$x := \frac{4M}{M^2 + 2}\,.$$
Dann ist $x \in \mathbb{Q}$ und
$$x^2 - 2 = \frac{16M^2 - 2(M^2+2)^2}{(M^2+2)^2} = -2\left(\frac{M^2 - 2}{M^2 + 2}\right)^2 < 0\,,$$
also $x \in A$. Es ist aber auch
$$x - M = \frac{M(2 - M^2)}{M^2 + 2} > 0\,,$$
so dass M keine obere Schranke von A sein kann. Dies ist der gesuchte Widerspruch.

□

1.5.15 Bemerkung

a) Der wesentliche Punkt in Beispiel 1.5.14 ist, dass es in $\mathbb{Q}$ keine Quadratwurzel von 2 gibt. Genauer gilt: Für $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, besitzt die Menge

$$A_r := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq r\}$$

genau dann in $\mathbb{Q}$ eine kleinste obere Schranke, wenn es eine rationale Zahl q mit $q^2 = r$ gibt. In diesem Fall ist $|q|$ die gesuchte kleinste obere Schranke.

b) Analog kann man zeigen, dass die Menge A aus Beispiel 1.5.12 keine größte untere Schranke in $\mathbb{Q}$ besitzt, indem man die folgenden Aussagen beweist.

   a)' Zu jedem
   $$m \in \mathcal{U} := \{y \in \mathbb{Q} : y < 0 \text{ und } y^2 > 2\}$$
   existiert ein $\tilde{m} \in \mathcal{U}$ mit $\tilde{m} > m$.

   b)' $m \in \mathbb{Q}$ ist genau dann untere Schranke von A wenn $m \in \mathcal{U}$.

Wir überlassen dem Leser die Details des Beweises zur Übung.

1.5.16 Definition

Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *ordnungsvollständig*, wenn in ihm das folgende Axiom erfüllt ist:

(V) Vollständigkeitsaxiom

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{K}$ besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese wird das *Supremum* von A genannt und mit $\sup A$ bezeichnet.

Ein zum Vollständigkeitsaxiom **(V)** offensichtlich äquivalentes Axiom ist

(V') Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{K}$ besitzt eine größte untere Schranke welche *Infimum* von A genannt und mit $\inf A$ bezeichnet wird.

Nach Beispiel 1.5.14 bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ also noch keinen vollständigen Körper.

1.5.17 Bemerkung

a) Wie schon in Satz 1.5.22 behauptet, kann man zeigen, dass es bis auf Isomorphie genau einen angeordneten und vollständigen Körper gibt. Der Existenzbeweis ist konstruktiv. Man geht von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aus und erweitert schrittweise zu $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und schließlich durch „Vervollständigung" zu $\mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit ist schwieriger und soll an dieser Stelle nicht bewiesen werden.

b) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der *irrationalen Zahlen*.

$A \subset \mathbb{R}$ sei eine nichtleere Menge. Wir schreiben

$$\sup A < \infty,$$

falls A nach oben beschränkt ist, wenn also

$$M := \sup A \in \mathbb{R}.$$

Umgekehrt bedeutet

$$\sup A = \infty,$$

dass A nicht nach oben beschränkt ist. Entsprechend schreiben wir für nach unten beschränkte Mengen

$$\inf A > -\infty$$

und für nach unten unbeschränkte Mengen

$$\inf A = -\infty.$$

1.5.18 Satz

$A \subset \mathbb{R}$ sei eine nichtleere Menge.

a) Ist $\sup A < \infty$, so existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ mit

$$x > \sup A - \epsilon.$$

b) Ist $\sup A = \infty$, so existiert zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $x \in A$ mit

$$x > M.$$

Beweis:

1.5.19 Satz (Satz des Archimedes)
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Beweis:

1.5.20 Definition
$A \subset \mathbb{R}$ sei nichtleer.

a) M heißt *Maximum* von A, geschrieben $M = \max A$, wenn $M = \sup A < \infty$ und $M \in A$.

b) m heißt *Minimum* von A, geschrieben $m = \min A$, wenn $m = \inf A > -\infty$ und $m \in A$.

1.5.21 Beispiel
Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}.$$

Die Menge ist offensichtlich beschränkt und es gilt

$$\inf A = 0, \quad \sup A = 1.$$

Da $1 \in A$, gilt $\max A = 1$. Weil jedoch das Infimum nicht angenommen wird, existiert kein Minimum.

Ohne Beweis erwähnen wir

1.5.22 Satz (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen)

a) Es existiert eine nichtleere Menge M mit zwei inneren Verknüpfungen $+, \cdot$ und einer Relation $<$, so dass die Körperaxiome **(K1)**-**(K9)**, *die Anordnungsaxiome* **(A1)**-**(A3)** *und das Vollständigkeitsaxiom* **(V)** *erfüllt sind.*

b) Die unter a) genannte Menge ist bis auf Isomorphismen, die mit sämtlichen Axiomen verträglich sind, eindeutig bestimmt.

1.5.23 Definition
Die in Satz 1.5.22 genannte und bis auf Isomorphismen eindeutig festgelegte Menge heißt *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

§2 Folgen, Grenzwerte, Reihen

Einer der zentralsten Begriffe in der Analysis ist der des Grenzwertes. Grenzwertprozesse spielen eine wichtige Rolle bei vielen mathematischen Überlegungen und bilden zusammen mit den Zahlkörpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ das Fundament der Analysis. Die Differential- und Integralrechnung wird erst durch die Definition von Grenzwerten ermöglicht.

2.1 Folgen

2.1.1 Definition (Folge)
Es sei M eine beliebige Menge. Unter einer *Folge* in M verstehen wir eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M.$$

In diesem Fall setzen wir für $n \in \mathbb{N}$: $a_n := a(n)$ und schreiben, statt $a : \mathbb{N} \to M$ einfach $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Ist $M = \mathbb{R}$ bzw. $M = \mathbb{C}$, so sagen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *reelle* bzw. *komplexe Folge*. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ fest, so nennen wir allgemeiner auch jede Abbildung

$$a : \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq k\} \to M$$

eine Folge und wir schreiben $(a_n)_{n\geq k} \subset M$.

2.1.2 Beispiel

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nennt man *konstante Folge*.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ heißt *harmonische Folge*

c) Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ für } n \geq 3$$

heißt *Fibonacci-Folge*.

d) Für $A, q \in \mathbb{R}$ sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := Aq^{n-1}$ definiert. Man nennt diese Folge die *geometrische Folge* zum Anfangswert A und zum Quotienten q.

Es ist oft nötig, das Verhalten der Folgenglieder a_n einer Folge zu beschreiben, wenn n immer größer wird. Betrachten wir z.B. die harmonische Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots,$$

so beobachten wir, dass die Folgenglieder für wachsendes n immer kleiner werden und sich offenbar der Zahl 0 beliebig nähern. Dieses Verhalten nennt man *Grenzwertbildung* einer Folge. Nicht jede Folge muss solch ein Verhalten besitzen. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt mathematische präzisieren.

2.1.1 Grenzwerte

2.1.3 Definition (Folgenkonvergenz)

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn gilt:

   ϵ-**Konvergenzkriterium.** *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (welches von ϵ abhängen darf), so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.*

   Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so nennen wir a den *Grenzwert* oder auch den *Limes* der Folge.

b) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt *divergent*.

c) Falls es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt (welches von M abhängen darf), so dass $a_n > M$ für alle $n \geq n_0$, dann sagen wir, *die Folge konvergiert uneigentlich*[1)] gegen ∞ und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

   Analog schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

   und sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich gegen* $-\infty$, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt (welche von m abhängen darf), so dass $a_n < m$ für alle $n \geq n_0$.

2.1.4 Beispiel

a) Die konstante Folge $a_n = c$, für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen c, da

$$|a_n - c| = 0 < \epsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \epsilon > 0.$$

b) Die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, denn zu $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ und somit ist für alle $n \geq n_0$ auch

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

[1)]Statt *uneigentlich konvergent* sagt man auch oft *bestimmt divergent*.

c) Die Folge $a_n := n$ konvergiert uneigentlich gegen ∞.

d) Die *alternierende Folge* $a_n := (-1)^n$ divergiert.

Eine berechtigte Frage ist natürlich, ob eine Folge eventuell sogar mehrere verschiedene Grenzwerte besitzen kann. Wie der nächste Satz zeigt, sind Grenzwerte, falls sie existieren, eindeutig durch die Folge festgelegt.

2.1.5 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei eine konvergente Folge. Dann ist der Grenzwert der Folge eindeutig bestimmt.*

Beweis:

2.1.6 Definition (Nullfolgen)
Unter einer *Nullfolge* verstehen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.1.7 Lemma
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_n - a$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Trivial, da $|b_n - 0| = |a_n - a|$. □

2.1.8 Definition (Beschränkte Folgen)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, bzw. *nach oben (unten) beschränkt*, wenn dies jeweils für die Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zutrifft.

2.1.9 Satz (Beschränktheit konvergenter Folgen)
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

2.1.10 Beispiel

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Das Konvergenzverhalten der Folge $a_n := x^n$ hängt von x ab.

i) Für $|x| < 1$ konvergiert die Folge gegen 0. Denn für $|x| < 1$ gilt nach der Bernoullischen Ungleichung

$$\frac{1}{|x|^n} = \left(1 + \frac{1}{|x|} - 1\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\left(\frac{1}{|x|} - 1\right).$$

Wählen wir also $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1 + n_0\left(\frac{1}{|x|} - 1\right) > \frac{1}{\epsilon}$, so gilt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{|x|^n} \geq 1 + n\left(\frac{1}{|x|} - 1\right) \geq 1 + n_0\left(\frac{1}{|x|} - 1\right) > \frac{1}{\epsilon},$$

d.h.

$$|a_n - 0| = |x^n| = |x|^n < \epsilon .$$

ii) Für $|x| > 1$ divergiert die Folge, da sie unbeschränkt ist. Ist $x > 1$, so konvergiert sie uneigentlich gegen ∞.

iii) Ist $x = 1$, so ist die Folge konstant und folglich gegen 1 konvergent. Für $x = -1$ divergiert sie.

2.1.11 Satz (Grenzwertsätze)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b .$$

Dann gilt:

a) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a + b .$$

b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b .$$

c) Ist zudem $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und für die Folge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} .$$

Beweis:

2.1.12 Korollar
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n\,, \quad \lim(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

2.1.13 Beispiel
Es seien

$$p(n) := \sum_{i=0}^{k} a_i n^i\,, \quad q(n) := \sum_{j=0}^{l} b_j n^j$$

zwei Polynome mit reellen Koeffizienten $a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_l$ und es seien $a_k > 0$, $b_l > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } l > k \\ \frac{a_k}{b_l} & \text{, falls } l = k \\ \infty & \text{, falls } l < k\,. \end{cases}$$

Beweis: Dies folgt mit den Grenzwertsätzen unmittelbar aus Beispiel 2.1.4, denn

$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l}\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^{i-k}}{\sum_{j=0}^{l} b_j n^{j-l}}\,.$$

□

2.1.14 Satz (Monotonie der Konvergenz)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Folgen mit $a_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Beweis:

2.1.2 Intervallschachtelungen

2.1.15 Definition (Intervalle)
Für reelle Zahlen $a < b$ definieren wir die *Intervalle*

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.
\end{aligned}
$$

Das Intervall $[a,b]$ heißt *abgeschlossen*, das Intervall (a,b) *offen*, und die Intervalle $[a,b),(a,b]$ heißen *halboffen*. Ist I eins der Intervalle von oben, so setzen wir $|I| := b - a$ und nennen dies die *Länge* von I.

2.1.16 Definition (Intervallschachtelung)
Unter einer *Intervallschachtelung* verstehen wir eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen mit

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} |I_n| = 0.$$

Der folgende Satz erklärt, warum **(V)** das Vollständigkeitsaxiom heißt. Die geometrische Interpretation ist, dass die *reelle Zahlengerade* keine „Löcher" besitzt, also vollständig ist. Ersetzt man im nachstehenden Satz $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$, so ist die Aussage nicht mehr richtig, $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

2.1.17 Satz
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

2.1.18 Bemerkung
Definiert man für eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ die *rationalen Intervalle*

$$\widetilde{I_n} := I_n \cap \mathbb{Q}\,,$$

so existiert nicht unbedingt ein $\widetilde{x} \in \mathbb{Q}$ mit $\widetilde{x} \in \widetilde{I_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Der Grund hierfür ist, dass die Mengen $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht notwendig ein Supremum bzw. Infimum in $\mathbb{Q}$ besitzen müssen. Die Vollständigkeit ist der wesentliche Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.

2.1.19 Satz
Jede reelle Zahl läßt sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $|r - x| < \epsilon$.

Beweis:

2.1.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

2.1.20 Definition (Teilfolgen)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine beliebige Folge und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *streng monotone Abbildung*, d.h. es gelte

$$\phi(m) > \phi(n), \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m > n\,.$$

Dann nennen wir die Folge $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In den meisten Fällen setzen wir $n_k := \phi(k)$ und schreiben $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ statt $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

2.1.21 Beispiel
Die Folge $a_n := n$ besitzt insbesondere die Folgen $a_{n_k} = a_{2k} = 2k$ und $a_{n_k} = a_{2k-1} = 2k-1$ als Teilfolgen.

2.1.22 Definition (Häufungspunkt)
Eine reelle Zahl x heißt *Häufungspunkt* (manchmal *Häufungswert* genannt) einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.

2.1.23 Beispiel
a) Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.
b) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht konvergent, besitzt aber die beiden Häufungspunkte 1 und -1.
c) Die Folge

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & , n \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\, n & , n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist unbeschränkt und besitzt den Häufungspunkt $x = 0$.

Wir haben bereits in Satz 2.1.9 gesehen, dass die Beschränktheit einer Folge ein notwendiges Kriterium für deren Konvergenz ist. Jedoch ist dies nicht hinreichend, wie etwa das Beispiel 2.1.23, b) zeigt. Allerdings besitzen, wie wir jetzt sehen werden, beschränkte Folgen immer konvergente Teilfolgen.

2.1.24 Satz (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis:

2.1.4 Konvergenzkriterien für Folgen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir bereits ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nämlich ihre Beschränktheit, kennengelernt. Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob es weitere notwendige und auch hinreichende Kriterien für die Konvergenz einer reellen Folge gibt.

2.1.25 Definition (Monotone Folgen)
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *streng monoton wachsend*) , falls $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. falls ($a_n < a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt *monoton fallend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.1.26 Satz (Monotone Konvergenz)
Eine monoton wachsende (bzw. fallende) Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben (bzw. unten) beschränkt ist.

Beweis:

2.1.27 Korollar

Für monoton wachsende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt stets:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dabei konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Supremum, falls $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞, wenn $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

2.1.28 Beispiel (Wurzel)

Als Anwendung beweisen wir: Zu jeder positiven reellen Zahl $a > 0$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert genau eine positive reelle Zahl s mit $s^k = a$. Diese nennen wir die positive *k-te Wurzel* von a und schreiben

$$s = \sqrt[k]{a}.$$

Beweis: Wir definieren zunächst rekursiv die Folge

$$a_1 := a + 1, \quad a_{n+1} := a_n \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k a_n^k}\right).$$

Per Induktion zeigen wir nun

$$\text{(i)} \quad a_n > 0, \quad \text{(ii)} \quad a_n < a_{n-1}, \quad \text{(iii)} \quad a_n^k > a.$$

Offensichtlich ist dies für $n = 1$ erfüllt. Gelten (i), (ii) und (iii) nun für ein n, so folgt

$$a_{n+1} - a_n = a_n \frac{a - a_n^k}{k a_n^k} < 0,$$

wegen (iii) für n. also gilt (ii) auch für $n+1$. Aus $a_n > 0$ und $k a_n^k + a - a_n^k > 0$ folgt

$$a_{n+1} = a_n \frac{k a_n^k + a - a_n^k}{k a_n^k} > 0,$$

also (i) für $n+1$. Schließlich folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$a_{n+1}^k = a_n^k \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k a_n^k}\right)^k \geq a_n^k \left(1 + k \frac{a - a_n^k}{k a_n^k}\right) = a,$$

also (iii) für $n+1$. Unsere Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist demnach monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Nach Satz 2.1.26 konvergiert sie gegen ein $s \geq 0$, nämlich gegen ihr Infimum. Da

$$k a_n^{k-1} a_{n+1} = k a_n^k + a - a_n^k,$$

folgt jetzt aus den Grenzwertsätzen wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ die Gleichung

$$k s^k = k s^k + a - s^k,$$

also $s^k = a$. Aus $s \geq 0$ und $a > 0$ folgt nun sogar $s > 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $s > 0$ die eindeutige Lösung von $s^k = a$ ist. Wäre $t > 0$ eine weitere Lösung von $t^k = a$, so wäre $s^k = t^k$, also nach der geometrischen Summenformel

$$0 = s^k - t^k = (s-t)\sum_{j=0}^{k-1} s^j t^{k-1-j}$$

und da der rechte Faktor wegen $s > 0$, $t > 0$ auch positiv ist, kann dies nur für den Fall $s - t = 0$ gelten. □

2.1.29 Korollar (Limes superior und Limes inferior)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine beschränkte Folge. Dann konvergieren die Folgen

$$s_k := \sup\{a_n : n \geq k\}, \quad i_k := \inf\{a_n : n \geq k\}.$$

Wir nennen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} s_k$$

den Limes superior und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} i_k$$

den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis: Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt und die Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Die Behauptung ergibt sich somit aus Satz 2.1.26. □

2.1.30 Beispiel
Für die Folge $a_n := (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

2.1.31 Satz
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

In diesem Fall gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis:

2.1.32 Definition (Cauchy-Folge)
Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_{\in}\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon\,, \quad \forall\, m, n \geq n_0\,.$$

2.1.33 Lemma
Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Beweis:

Eine Cauchy-Folge erfüllt somit das für die Konvergenz notwendige Kriterium der Beschränktheit. Wir werden jetzt sehen, dass Cauchy-Folgen auch konvergieren.

2.1.34 Satz (Cauchys Konvergenzkriterium)
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis:

2.2 Reihen

In diesem Abschnitt werden wir eine besonders wichtige Klasse von Folgen vorstellen, nämlich die sogenannten Reihen. Sie spielten bei der Entwicklung der modernen Analysis eine zentrale Rolle und mit ihrer Hilfe lassen sich viele Funktionen auf eine für rechnerische Zwecke sehr geeignete Weise darstellen.

2.2.1 Definition (Reihen)
Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der *Partialsummen*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt *Reihe* und wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet. Wir sagen die Reihe konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

2.2.2 Beispiel

a) Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

2.2.3 Satz
Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + \lambda b_k)$$

konvergent.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Grenzwertsätzen (Satz 2.1.11), angewandt auf die Folgen der Partialsummen. □

2.2.1 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir wollen im Folgenden einige notwendige und in manchen Fällen auch hinreichende Kriterien für die Konvergenz einer Reihe vorstellen. Als erstes haben wir das allgemeine Konvergenzkriterium von Cauchy, welches sich aus dem entsprechenden Konvergenzkriterium für Folgen (Satz 2.1.34) ableiten lässt.

2.2.4 Satz (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, mit:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon, \quad \forall\, m, n \ \text{mit} \ n \geq m \geq n_0 .$$

Beweis:

Für die meisten Anwendungen ist das letzte Kriterium allerdings unpraktisch. Wir suchen daher nach weiteren Kriterien. Ein einfaches notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium ist das Trivialkriterium.

2.2.5 Satz (Trivialkriterium)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis:

2.2.6 Beispiel

a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$ und in diesem Fall ist ihr Grenzwert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

gegeben.

Beweis: Es gilt zunächst für die Partialsumme $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ die Gleichung

$$(x-1)S_n = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - 1\,,$$

so dass

$$S_n = \begin{cases} n+1 & ,x = 1 \\ \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & ,x \neq 1\,. \end{cases}$$

Da genau dann $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, wenn $|x| < 1$, kann die Reihe nach Satz 2.2.5 höchstens für $|x| < 1$ konvergieren und hier tut sie es auch, da

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}\,.$$

□

b) Das Trivialkriterium ist nur notwendig, aber nicht hinreichend. Als Beispiel zeigen wir, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ offensichtlich das Trivialkriterium erfüllt. Hierzu betrachten wir

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right)}_{2^i \text{ Summanden}} \geq 1 + \frac{1}{2} + n\left(2^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$

Also ist $S_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$ und die Reihe divergiert.

2.2.7 Satz (Leibnizsches Konvergenzkriterium)

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k\,.$$

Beweis:

2.2.8 Beispiel
Nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

2.2.9 Definition (Absolute Konvergenz)
Wir sagen eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut*, falls die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

2.2.10 Beispiel
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut, da die harmonische Reihe divergiert.

2.2.11 Satz
Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beweis:

2.2.12 Bemerkung
Man beachte, dass die Grenzwerte von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, falls sie existieren, im Allgemeinen voneinander verschieden sind.

2.2.13 Satz
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ beschränkt ist.

Beweis:

2.2.14 Satz (Majorantenkriterium)
Für zwei reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(c_k)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gelte $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Man nennt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine Majoranteon $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis:

2.2.15 Satz (Quotientenkriterium)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k > 0$ *für alle* $k \geq k_0 \in \mathbb{N}_0$*. Existiert ein* θ *mit* $0 < \theta < 1$ *und* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta$ *für alle* $k \geq k_0$*, so konvergiert die Reihe absolut.*

Beweis:

2.2.16 Beispiel

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und es gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ für alle $k \geq 1$. Dies ist kein Widerspruch zu Satz 2.2.15, da wir kein θ mit $0 < \theta < 1$ finden können, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \theta$ für alle $k \geq 1$ gleichzeitig erfüllt ist.

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ konvergiert, denn mit $a_k = \frac{k^3}{3^k}$ erhalten wir

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 =: \theta < 1\,, \quad \forall\, k \geq 3\,.$$

2.2.17 Satz (Wurzelkriterium)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$. Es existiere ein θ mit $0 < \theta < 1$ und $\sqrt[k]{a_k} \leq \theta$ für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe absolut. Gilt hingegen $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ für unendlich viele k, so divergiert die Reihe.

Beweis:

2.2.18 Definition (Umordung einer Reihe)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn es eine Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$b_k = a_{\tau(k)}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 .$$

2.2.19 Satz (Umordnungssatz)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen a.

Beweis:

2.2.20 Satz (Cauchy-Produkt von Reihen)
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$$c_k := \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis:

2.2.2 Doppelreihen

Zu den wichtigesten Reihen zählen die Potenzreihen. Um diesen Begriff erklären zu können, wollen wir zunächst die Begriffe *Doppelfolge* und *Doppelreihe* einführen.

2.2.21 Definition (Doppelfolgen und -reihen)

a) Unter einer reellen *Doppelfolge* $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$ verstehen wir eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad a_{jk} := a(j,k).$$

Eine Doppelfolge heißt *konvergent gegen* $c \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{j,k\to\infty} a_{jk} = c,$$

wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$|a_{jk} - c| < \epsilon, \quad \forall\, j,k \geq n_0.$$

b) Eine *Doppelreihe*

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$$

ist die Doppelfolge $(S_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen

$$S_{mn} := \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk}$$

einer Doppelfolge $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$. Existiert der Limes

$$S = \lim_{m,n\to\infty} S_{mn},$$

so sagt man, die Doppelreihe *konvergiert für* $m,n \to \infty$ *gegen den Wert* S und schreibt

$$S = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}.$$

Ist die Doppelreihe $\sum_{j,k=0}^{\infty} |a_{jk}|$ konvergent, so heißt die Doppelreihe *absolut konvergent*.

c) Wir nennen die Reihen

$$z_j := \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \quad (j = 0,1,\dots) \quad \text{und} \quad s_k := \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} \quad (k = 0,1,\dots)$$

Zeilen- und *Spaltenreihen* der Doppelreihe $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$. Entsprechend heißen ihre Werte, falls sie überhaupt existieren, *Zeilen-* und *Spaltensummen*.

2.2.22 Bemerkung
Die absolute Konvergenz einer Doppelreihe impliziert auch die Konvergenz derselben. Dies beweist man ähnlich, wie schon früher die analoge Aussage für Reihen gezeigt wurde.

2.2.23 Satz (Doppelreihensatz von Cauchy)
Es sei $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelreihe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Jede Zeilenreihe $z_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergiert absolut und die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{jk}|\right)$ konvergiert ebenfalls.

b) Jede Spaltenreihe $s_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergiert absolut und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|a_{jk}|\right)$ konvergiert ebenfalls.

Ist eine dieser beiden äquivalenten Aussagen erfüllt, so ist auch die Doppelreihe absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\right).$$

Beweis:

2.2.3 Potenzreihen

2.2.24 Definition (Potenzreihen)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die *Potenzreihe in $x \in \mathbb{R}$ mit Mittelpunkt x_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$* ist die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k .$$

2.2.25 Satz (Cauchy-Hadamard)
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ eine Potenzreihe. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes r mit $0 \le r \le \infty$, so dass gilt:

a) Die Reihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$.

b) Die Reihe divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$.

Wir nennen r den Konvergenzradius der Potenzreihe f. Der Konvergenzradius r ist gegeben durch

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wobei $r := 0$, wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ und $r := \infty$, wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$.

Beweis:

2.2.26 Bemerkung
Für $|x-x_0| = r$ kann man ohne nähere Untersuchung keine Aussage über das Konvergenzverhalten machen, d.h. es gibt Fälle, wo eine Reihe in einem Punkt x mit $|x-x_0| = r$ absolut konvergiert und Fälle in denen Reihen mit diesem Konvergenzradius in einem solchen Punkt divergieren.

2.2.27 Definition (Konvergenzintervall)
Es sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Das *Konvergenzintervall*[2] I von f ist gegeben durch

$$I = (x_0 - r, x_0 + r).$$

2.2.28 Satz (Transformationssatz für Potenzreihen)
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $x_1 \in I$ sei ein beliebiger Punkt im Konvergenzintervall I. Dann gilt (mindestens) für alle x mit $|x-x_1| < r - |x_1 - x_0|$[3] die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$$

mit

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1 - x_0)^{n-k}.$$

Beweis:

[2] Für $r = \infty$ sei $I = \mathbb{R}$.
[3] Für $r = \infty$ ersetze man $r - |x_1 - x_0|$ ebenfalls durch ∞

§3 Stetigkeit

3.1 Allgemeine Sätze über stetige Funktionen

Grenzwerte bei Funktionen
Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\overline{D} &:= \{a \in \mathbb{R} : \exists \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a.\},\\
\overline{D}_+ &:= \{a \in \mathbb{R} : \exists \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } x_n > a \text{ für alle } n.\},\\
\overline{D}_- &:= \{a \in \mathbb{R} : \exists \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } x_n < a \text{ für alle } n.\}.
\end{aligned}$$

Für $a \in \overline{D}$, $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c, \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Konvergenz „von oben“ und „von unten“
Für $a \in \overline{D}_+$ schreiben wir

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = c,$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c, \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } x_n > a \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

und schließlich bedeutet für $a \in \overline{D}_-$ die Schreibweise

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = c,$$

dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c, \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } x_n < a \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

3.1.1 Beispiel
Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\overline{D} = \overline{D}_+ = \overline{D}_- = \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 \,, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1 \,,$$

aber $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

3.1.2 Definition (Stetigkeit)
Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt *stetig* im Punkt x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \,.$$

f heißt stetig in D, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Raum der stetigen Funktionen über D
Wir schreiben

$$C^0(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig in } D\} \,.$$

3.1.3 Beispiel

a) Die konstanten Funktionen $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ und die Identität $f(x) = x$ sind stetig in $\mathbb{R}$.

b) Der *Absolutbetrag*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad x \mapsto |x|$$

ist stetig in $\mathbb{R}$.

Beweis:

i) Sei $a < 0$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \lim_{n \to \infty} (-x_n) = -\lim_{n \to \infty} x_n = -a = |a| \,,$$

denn wegen $a < 0$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, gilt ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ stets $x_n < 0$, also $|x_n| = -x_n$. Somit ist der Absolutbetrag in jedem Punkt $a < 0$ stetig.

ii) Ist $a > 0$ und gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ so ist $x_n > 0$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ und folglich

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \lim_{n \to \infty} x_n = a = |a| \,.$$

iii) Schließlich folgt aus $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ auch $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = |0|$, d.h. die Stetigkeit des Absolutbetrags im Nullpunkt.

□

c) Die *charakteristische Funktion* einer Menge $D \subset \mathbb{R}$, d.h. die Funktion

$$1_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 1_D(x) := \begin{cases} 1 & , x \in D \\ 0 & , x \notin D \end{cases}$$

ist im Allgemeinen nicht stetig, z.B. ist dies für $D = \mathbb{Q}$ nirgends der Fall.

3.1.4 Satz
Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen

$$f + g, \lambda f, fg : D \to \mathbb{R}$$

in x_0 stetig. Gilt zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D^* \to \mathbb{R}, \quad \textit{mit} \quad D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

in x_0 stetig.

Beweis: Dies folgt sofort aus den Grenzwertsätzen für Folgen. □

3.1.5 Beispiel
Es seien $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $q(x) := b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ Polynome. Dann ist die *rationale Funktion*

$$\frac{p}{q} : D \to \mathbb{R}$$

in ihrem Definitionsbereich $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ stetig.

3.1.6 Satz (Verkettung stetiger Funktionen)
E seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset E$. Ist f in $x \in D$ und g in $y := f(x) \in E$ stetig, so ist die Verkettung (Komposition)

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

in x stetig.

Beweis:

3.1.7 Beispiel
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, so ist auch $|f| : D \to \mathbb{R}$, $|f|(x) := |f(x)|$ in x_0 stetig.

3.1.8 Definition (Beschränkte Funktionen)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in D$$

gibt, d.h. wenn die Menge $f(D)$ beschränkt ist.

3.1.9 Satz
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion f auf $[a,b]$ beschränkt und nimmt dort ihr Supremum und ihr Infimum an, d.h. es existieren $p, q \in [a,b]$ mit

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \forall x \in [a,b].$$

Beweis:

3.1.10 Satz (Epsilon-Delta-Kriterium)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Dabei darf δ sowohl von ϵ als auch von f und x_0 abhängen.

Beweis:

3.1.11 Korollar
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Beweis:

3.1.12 Satz (Zwischenwertsatz)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis:

3.1.13 Korollar
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis:

3.1.14 Beispiel
Jedes Polynom ungeraden Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_{n+1}$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle ξ, denn da

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

existieren a, b mit $a < b$ und $f(a) < 0 < f(b)$. Da Polynome stetig sind, muss es zwischen a und b nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle geben.

3.1.15 Definition (Monotone Funktionen)
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. f heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend*), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \le f(x_2)$ gilt (bzw. $f(x_1) \ge f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$).

3.1.16 Satz (Existenz der stetigen Inversen)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion und $A := f(a)$, $B := f(b)$. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf das Intervall $[A,B]$ (bzw. auf $[B,A]$) ab, und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [A,B] \to \mathbb{R}, \quad (\text{bzw. } f^{-1} : [B,A] \to \mathbb{R})$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis:

3.1.17 Satz (Stetigkeitssatz für Potenzreihen)
Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Dann ist* f *auf dem gesamten Konvergenzintervall* I *stetig.*

Beweis:

3.2 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

In diesem Abschnitt stellen wir einige spezielle Funktionen in Form von Potenzreihen vor. Diese Darstellung ist für viele analytische Anwendungen besonders praktisch.

3.2.1 Definition (Exponentialreihe)
Unter der *Exponentialreihe* verstehen wir die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Hierbei ist x eine reelle Zahl.

3.2.2 Satz
Die Exponentialreihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Ferner gilt die Restgliedabschätzung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x)$$

mit

$$|r_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \textit{für} \quad |x| \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Beweis:

Satz 3.2.2 rechtfertigt die folgende Definition:

3.2.3 Definition (Exponentialfunktion)
Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x)$$

heißt *Exponentialfunktion*.

3.2.4 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

3.2.5 Definition (Eulersche Zahl)
Die Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

heißt *Eulersche Zahl*.

3.2.6 Korollar
Für die Exponentialfunktion gilt:

a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

b) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *d.h.* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

c) $\exp(k) = e^k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

d) *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

e) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *ist streng monoton wachsend.*

Beweis:

3.2.7 Satz (Logarithmus)
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}_{>0}$ *ab. Die Umkehrfunktion* $\ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, stetig und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wir nennen $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *den natürlichen Logarithmus.*

Beweis:

3.2.8 Definition (Exponentialfunktion zur Basis r)
Es sei $r > 0$. Dann heißt die Funktion

$$\exp_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad \exp_r(x) := \exp(x \cdot \ln(r))$$

die *Exponentialfunktion zur Basis r*.

3.2.9 Satz
Die Funktion $\exp_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *ist stetig und es gilt:*

a)

$$\exp_r(x + y) = \exp_r(x) \cdot \exp_r(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

b)

$$\exp_r\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{r^p}, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

Wir möchten gerne für $r > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ die Potenz r^x erklären und zwar so, dass die Funktion $x \mapsto r^x$ überall stetig ist. Da

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\},$$

können wir für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ zunächst einfach

$$r^x := \sqrt[q]{r^p}$$

setzen. Damit ist die Funktion r^x aber erst auf $\mathbb{Q}$ erklärt. Da einerseits der auf diese Weise festgelegte Wert r^x nach Satz 3.2.9 mit dem Wert $\exp_r(x)$ übereinstimmt und andererseits die Funktion $\exp_r(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt und dort stetig ist, ist die einzig mögliche stetige Fortsetzung der Funktion r^x von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ durch die Funktion $\exp_r(x)$ gegeben, d.h. die folgende Definition macht Sinn:

3.2.10 Definition (Allgemeine Potenzen und Wurzeln)

a) Für $r > 0$ sei $r^{(\cdot)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion

$$r^x := \exp_r(x).$$

Wir nennen r^x die *x-te Potenz* von r.

b) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sei $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion

$$\sqrt[n]{x} := \begin{cases} \exp_x(1/n) & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

Wir nennen $\sqrt[n]{x}$ die *n-te Wurzel* von x.

3.2.11 Bemerkung

a) Die n-te Wurzel ist wegen

$$\lim_{x \searrow 0} \exp_x(1/n) = \lim_{x \searrow 0} \exp(1/n \cdot \ln(x)) = \lim_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$$

auf dem gesamten Definitionsbereich stetig.

b) Die Stetigkeit von exp impliziert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{r} = \lim_{n \to \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(r)\right) = \exp(0) = 1, \quad \forall\, r > 0.$$

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \exp_e(x) = \exp(x \cdot \ln(e)) = \exp(x),$$

denn $\ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1$.

d) Sind $r, s > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $r^x = \exp(x \cdot \ln(r))$, also $\ln(r^x) = x\ln(r)$ und damit

$$(r^x)^y = \exp(y \cdot \ln(r^x)) = \ln(yx \cdot \ln(r)) = r^{xy}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} r^x s^x &= \exp(x \cdot \ln(r)) \cdot \exp(x \cdot \ln(r)) \\ &= \exp\big(x(\ln(r) + \ln(s))\big) \\ &= \exp(x \cdot \ln(rs)) = (rs)^x \end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{1}{r}\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \exp(-x \cdot \ln(r)) = r^{-x}.$$

3.3 Trigonometrische Funktionen

Da die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, konvergieren auch die Reihen

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ absolut, denn z.B. ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \exp(|x|).$$

3.3.1 Definition (Sinus und Cosinus)
Die beiden Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{3.3.1}$$

heißen *Sinus* und *Cosinus*.

3.3.2 Satz (Funktionalgleichungen für Sinus und Cosinus)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

b) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

c) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

d) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Beweis:

3.3.3 Satz (Restgliedabschätzung für Sinus und Cosinus)
Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x)\,, \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)\,,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
|r_{2n+3}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \textit{für} \quad |x| \leq 2n+4\,, \\
|r_{2n+2}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \textit{für} \quad |x| \leq 2n+3\,.
\end{aligned}$$

Beweis:

3.3.4 Satz (Kreiszahl π)
Es existiert genau ein $x_0 \in [0,2]$ mit $\cos(x_0) = 0$. Die Zahl $\pi := 2x_0$ heißt Kreiszahl(Pi).

Beweis:

i) Aus der Restgliedabschätzung des Cosinus folgt, dass $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + r_4(x)$ mit $|r_4(x)| \leq \frac{x^4}{24}$ für $|x| \leq 5$. Für $x = 2$ ergibt sich

$$\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0\,. \tag{3.3.2}$$

ii) Für $x \neq 0$ ist

$$\sin x = x\left(1 + \frac{r_3(x)}{x}\right)$$

und die Restgliedabschätzung für den Sinus impliziert

$$\left|\frac{r_3(x)}{x}\right| \leq \frac{x^2}{6} \leq \frac{2}{3}, \quad \forall\, x \in (0,2],$$

und folglich

$$\sin x \geq x\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{x}{3} > 0\,, \quad \forall\, x \in (0,2]. \tag{3.3.3}$$

iii) Es seien $0 \leq x < y \leq 2$. Dann folgt aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus und aus (3.3.3), dass

$$\cos y - \cos x = -2 \sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{y-x}{2} < 0\,. \tag{3.3.4}$$

iv) Satz 3.1.17 impliziert, dass die Funktionen sin und cos in ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Da $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$, schließen wir mit dem Zwischenwertsatz, dass es mindestens eine Nullstelle x_0 im Intervall $[0,2]$ geben muss. Da der Cosinus aber wegen (3.3.4) auf dem Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend ist, kann es dort keine weitere Nullstelle geben und x_0 ist eindeutig.

□

3.3.5 Korollar (Periodizität von Sinus und Cosinus)
a) Es gilt die folgende Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Zudem gilt jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$:

b) $\cos(x + 2\pi) = \cos x\,, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$

c) $\cos(x + \pi) = -\cos x\,, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x\,.$

d) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Beweis:

3.3.6 Korollar (Nullstellen von Sinus und Cosinus)
Die Nullstellenmengen von Sinus und Cosinus sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} &= \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} &= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Beweis:

Hieraus erhält man wiederum ohne Mühe:

3.3.7 Korollar

a) *Die Funktion* $\cos$ *ist auf dem Intervall* $[0,\pi]$ *streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1,1]$ *ab.*

b) *Die Funktion* $\sin$ *ist auf dem Intervall* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1,1]$ *ab.*

3.3.8 Definition (Tangens)

Die Funktion

$$\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\quad \tan x:=\frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*.

3.3.9 Korollar

Die Funktion $\tan$ *ist auf dem Intervall* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *streng monoton wachsend und es gilt*

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty.$$

Insbesondere bildet der Tangens das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab.*

Beweis:

3.3.10 Definition
Nach Korollar 3.3.7, Korollar 3.3.9 und Satz 3.1.16 existieren die Umkehrfunktionen von cos, sin und tan auf geeigneten Intervallen. Diese bezeichnen wir mit *Arcus-Cosinus*, *Arcus-Sinus*, und *Arcus-Tangens*, und schreiben

$$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

3.4 Weitere Stetigkeitsbegriffe

3.4.1 Gleichmäßige Stetigkeit

3.4.1 Definition (Gleichmäßige Stetigkeit)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

3.4.2 Beispiel
Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x^2}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig in $D := (0,1]$. Die Stetigkeit von f ist klar. Um zu sehen, dass f in D nicht gleichmäßig stetig ist, wählen wir $\epsilon := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}, \quad \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = 3n^2.$$

Da es zu jedem $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n_0} < \delta$ gibt, gilt also mit $x := \frac{1}{n_0}$, $y := \frac{1}{2n_0}$:

$$|x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| > 1 = \epsilon.$$

Somit kann f in D nicht gleichmäßig stetig sein.

3.4.3 Lemma (gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig in D, so ist f auch stetig in D.

Beweis: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in D gleichmäßig stetig und $x_0 \in D$, $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ gilt. Insbesondere ist für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Dies beweist, dass f in x_0 stetig ist. Da $x_0 \in D$ beliebig war, folgt, dass f in ganz D stetig ist. □

Gleichmäßige Stetigkeit ist also eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit. Der nächste Satz zeigt, dass auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen die Umkehrung auch erfüllt ist.

3.4.4 Satz
Gegeben sei eine auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f in $[a,b]$ sogar gleichmäßig stetig.

Beweis:

3.4.2 Lipschitz- und α-Hölder-Stetigkeit

3.4.5 Definition (α-Hölder-stetig, Lipschitz-stetig)
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben und $0 < \alpha \leq 1$ eine Konstante. f heißt *α-Hölder-stetig* in D, wenn eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad \forall\, x, y \in D.$$

Ist speziell $\alpha = 1$, so nennen wir f *Lipschitz-stetig*.

3.4.6 Beispiel
Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

Denn ist etwa $x \geq y \geq 0$, so ist

$$|x-y| = x - y = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \geq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2.$$

Somit ist die Wurzel α-Hölder-stetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$.

3.4.7 Bemerkung
Warum man bei der Definition α-Hölder-stetiger Funktionen die Einschränkung $\alpha \leq 1$ vornimmt, werden wir im nächsten Kapitel erläutern.

§4 Differenzierbarkeit

4.1 Differenzierbare Funktionen

4.1.1 Definition
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Zu $x_0 \in D$ gebe es mindestens eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\xi_n \neq x_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Dann schreiben wir

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0},$$

falls der Limes existiert und nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung* oder den *Differentialquotienten* von f an der Stelle x_0. Wir sagen dann auch, dass die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

Ableitung
Wir schreiben auch oft $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}_{|x_0}$ anstatt $f'(x_0)$. Bei vielen naturwissenschaftlichen Prozessen werden Funktion f als Funktionen von der Zeit t (t für „time“) aufgefasst und man schreibt dann auch $\dot{f}(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt}$.

4.1.2 Bemerkung
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar und substituiert man $\xi = x_0 + h$, so ergibt sich

$$\lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wir wollen zunächst einige Beispiele untersuchen.

4.1.3 Beispiel
a) Für die konstanten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{c - c}{\xi - x_0} = 0.$$

b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ gilt

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{\xi - x_0}{\xi - x_0} = 1 \,.$$

c) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \frac{\xi^n - x_0^n}{\xi - x_0} \\ &= \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi^j x_0^{n-1-j} \right) = n x_0^{n-1} \,. \end{aligned}$$

d) Entsprechend gilt für die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\}}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\}}} \frac{\xi^{-n} - x_0^{-n}}{\xi - x_0} \\ &= \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\}}} \frac{\frac{1}{\xi^n} - \frac{1}{x_0^n}}{-\xi x_0 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x_0} \right)} \\ &= \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\}}} \left(-\frac{1}{\xi x_0} \sum_{j=0}^{n-1} \xi^{-j} x_0^{j-n+1} \right) = -\frac{n}{x_0^{n+1}} \,. \end{aligned}$$

4.1.4 Satz (Lineare Approximierbarkeit differenzierbarer Funktionen)
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann in $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Funktion

$$\phi : D \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

die Gleichung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis:

4.1.5 Korollar (Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Beweis:

4.1.6 Satz (Ableitungsregeln)
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $x_0 \in D$ differenzierbar seien. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und fg in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{4.1.1}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{4.1.2}$$

Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion f/g in x_0 differenzierbar und es ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{4.1.3}$$

Beweis:

Wir wollen als nächstes untersuchen, ob wir eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

auf ihrem Konvergenzintervall I einfach gliedweise differenzieren dürfen, d.h. ob f' auf I existiert und ob dort

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

gilt. Dies ist keineswegs offensichtlich, da wir an dieser Stelle Grenzwertprozesse miteinander vertauschen, d.h. wir untersuchen, ob

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi \to x} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\xi - x_0)^k - a_k(x - x_0)^k}{\xi - x_0} \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\lim_{\xi \to x} \frac{a_k(\xi - x_0)^k - a_k(x - x_0)^k}{\xi - x_0} \right). \end{aligned}$$

4.1.7 Satz (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)
Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r. Dann ist f auf dem gesamten Konvergentzintervall I differenzierbar und für die Ableitung gilt für alle $x \in I$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Beweis:

4.1.8 Beispiel
Wir können jetzt einfach die Ableitungen der Exponentialfunktion und von Sinus und Cosinus berechnen.

a)

$$(e^x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x .$$

b)

$$(\sin x)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x .$$

c)

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x .\end{aligned}$$

4.1.9 Korollar
Besitzt eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ den Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, so ist sie auf ihrem gesamten Konvergenzintervall differenzierbar, die Ableitung ist

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$$

und die Potenzreihe f' besitzt denselben Konvergenzradius wie f.

Beweis:

4.1.10 Satz (Kettenregel)
Seien $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $f(D) \subset E$. f *sei in* $x_0 \in D$ *und* g *in* $f(x_0)$ *differenzierbar. Dann ist auch die Funktion* $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ *in* x_0 *differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis:

4.1.11 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)
$f : D \to E$ sei invertierbar mit Inverser $f^{-1} : E \to D$. Ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ und ist f^{-1} in $f(x_0)$ stetig, so ist f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis:

4.1.12 Bemerkung
Ist f wie in Satz 4.1.11, so kann man für jedes $y_0 \in E$ mit $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ auch

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \tag{4.1.4}$$

schreiben.

4.1.13 Beispiel

a) Die Funktion $f = \exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ besitzt die Inverse $f^{-1} = \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und da $(\exp)'(x) = \exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt für alle $y \in (0,\infty)$ nach (4.1.4)
$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

b) Auf dem Intervall $D = (0,\pi)$ gilt $\cos' x = -\sin x \neq 0$ und somit
$$\arccos'(\cos x) = \frac{1}{\cos' x} = \frac{-1}{\sin x}.$$
Da $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ und $\sin x > 0$ für $x \in (0,\pi)$, folgt
$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \forall\, x \in (0,\pi).$$
Daher gilt für alle $y \in (-1,1)$ die Gleichung
$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

c) Aus $\arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arccos y$ folgt
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

d) Für den Tangens erhält man nach der Quotientenregel für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Ableitung
$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$
Daraus ergibt sich für den Arcus-Tangens die Ableitung
$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan' x} = \cos^2 x.$$
wählen wir zu $y \in \mathbb{R}$ das eindeutig bestimmte $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $\tan x = y$, so gilt wegen
$$y^2 + 1 = \tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
die Gleichung
$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

4.1.14 Definition (Höhere Ableitungen)
$f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := f''(x_0) := f^{(2)}(x_0) := (f')'(x_0)$$

die *zweite Ableitung* von f an der Stelle x_0. Induktiv kann man dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in x_0 k-mal differenzierbar, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f : D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}$ in $D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x_0 differenzierbar ist. Wir schreiben

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) := f^{(k)}(x_0) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0).$$

f heißt in D *k-mal differenzierbar*, wenn f in jedem $x \in D$ k-mal differenzierbar ist. Ein k-mal differenzierbares $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ zusätzlich stetig ist. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$C^k(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist in } D\ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Außerdem setzen wir

$$C^\infty(D) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D).$$

Eine Funktion $f \in C^\infty(D)$ nennen wir *glatt*.

4.1.15 Bemerkung
Offensichtlich ist

$$C^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist in } D \text{ stetig}\}.$$

4.1.16 Beispiel
a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist überall differenzierbar mit Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) := \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkt $x = 0$ unstetig. Daher ist f zwar in $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

ist überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2|x|$. Somit ist f in $C^1(\mathbb{R})$, aber nicht in $C^2(\mathbb{R})$.

c) Ist

$$f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist nach Korollar 4.1.9 $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$.

4.2 Lokale Extremwerte

4.2.1 Definition (Extremwerte)
$f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $x_0 \in D$.

a) f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall\, x \in D \cap \{x : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

b) f besitzt an der Stelle x_0 ein *striktes lokales Maximum*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) > f(x), \quad \forall\, x \in D \setminus \{x_0\} \cap \{x : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

c) f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein *isoliertes lokales Maximum*, wenn f in x_0 ein lokales Maximum besitzt und es in einer Umgebung von x_0 keine weiteren Maxima von f gibt.

d) f besitzt an der Stelle x_0 ein *globales Maximum*, wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum annimmt und zusätzlich $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Entsprechend sagen wir, f besitzt an der Stelle x_0 ein *(lokales, striktes, isoliertes, globales) Minimum*, wenn $-f$ dort ein (lokales, striktes, isoliertes, globales) Maximum besitzt. Der Begriff *Extremum* ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum. Lokale Extrema werden auch häufig *relative Extrema* genannt.

4.2.2 Beispiel
Die Funktion $\cos x$ hat an den Stellen $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isolierte lokale Maxima und an den Stellen $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isolierte lokale Minima.

4.2.3 Satz
Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum besitzt. Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: f habe z.B. an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum. Für genügend kleines $\epsilon > 0$ ist $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a,b)$ und $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

und entsprechend für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt durch Grenzwertbildung

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \geq \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

und daher überall Gleichheit. Im Fall eines lokalen inneren Minimums kann man analog vorgehen. □

4.2.4 Definition
$f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Die Stellen $x \in D$, für die $f'(x) = 0$ gilt, heißen *kritische Punkte* von f.

4.2.5 Bemerkung

a) Nach Satz 4.2.3 ist bei einer differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine innere lokale Extremstelle von f auch ein kritischer Punkt $x \in (a,b)$ von f. Dies ist aber nur ein notwendiges und kein hinreichendes Kriterium für die Existenz innerer Extremstellen, da z.B. die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, an der Stelle $x = 0$ einen kritischen Punkt besitzt, dort aber weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum vorliegt.

b) Satz 4.2.3 sagt nur etwas über die inneren Extremstellen aus. Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, besitzt an der Stelle $x = 0$ ein isoliertes inneres Minimum und dort liegt auch ein kritischer Punkt, aber sie besitzt am Rand des Intervalls $[-1,1]$, d.h. in den Punkten $a = -1$ und $b = 1$, jeweils isolierte lokale Maxima, obwohl dort keine kritischen Punkte von f liegen.

4.2.6 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es sei $a < b$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Beweis: Wir definieren die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

$h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist in $[a,b]$ stetig mit $h(a) = h(b)$ und außerdem ist h in (a,b) differenzierbar mit Ableitung

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Der Satz ist somit trivial, falls h konstant ist. Ist h nicht konstant, so wird das Supremum

$$M := \sup_{x\in[a,b]} h(x)$$

in einem inneren Punkt $\xi \in (a,b)$ angenommen (dass das Supremum überhaupt, d.h. in einem Punkt $x \in [a,b]$, angenommen wird, liegt an der Stetigkeit von h, siehe auch Satz 3.1.9.). Nach Satz 4.2.3 gilt $h'(\xi) = 0$. Daher ist für dieses ξ

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

4.2.7 Korollar (Satz von Rolle)
Es sei $a < b$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Ferner gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$, so dass

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis: Dies ist ein direktes Korollar aus dem Mittelwertsatz. □

4.2.8 Bemerkung
Tatsächlich sind der Mittelwertsatz und der Satz von Rolle sogar äquivalent. Ist nämlich eine Funktion $f \in C^1((a,b)) \cap C^0([a,b])$ wie im Mittelwertsatz gegeben, so erfüllt die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\xi$$

die Voraussetzungen im Satz von Rolle und weil dann

$$0 = g'/\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

folgt hieraus die Behauptung im Mittelwertsatz.

4.2.9 Korollar

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie im Mittelwertsatz. Gilt für zwei Konstanten m, M und für alle $x \in (a,b)$ die Ungleichung $m \leq f'(x) \leq M$, so ist

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x), \quad \forall\, x, y \text{ mit } a \leq x \leq y \leq b.$$

Beweis: Für $x = y$ ist die Behauptung trivial. Sei also $a \leq x < y \leq b$. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

mit einem $\xi \in (x,y)$. Da $m \leq f'(\xi) \leq M$ und $y - x > 0$, folgt die Behauptung. □

4.2.10 Satz

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a,b) differenzierbar. Gilt für alle $x \in (a,b)$:

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) > 0, f'(x) \leq (0), f'(x) < 0),$$

so ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

Beweis: Sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Angenommen, f wäre nicht monoton wachsend. Dann gäbe es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$, aber $f(x_1) > f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann aber ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Die anderen Fälle beweist man analog. □

4.2.11 Satz

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei in (a,b) differenzierbar und in $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$). Dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beweis:

4.2.12 Satz
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *sei zweimal differenzierbar. Dann sind äquivalent:*

(i) $f''(x) \geq 0\,, \forall\, x \in (a,b)$.

(ii) $f(sx_1 + (1-s)x_2) \leq sf(x_1) + (1-s)f(x_2)\,, \quad \forall\, s \in [0,1], \forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$.

Beweis:

4.2.13 Definition (Konvexe Funktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f(sx_1 + (1-s)x_2) \leq sf(x_1) + (1-s)f(x_2), \quad \forall\, s \in [0,1], \forall\, x_1, x_2 \in D.$$

Eine Funktion f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist, oder äquivalent hierzu, wenn

$$f(sx_1 + (1-s)x_2) \geq sf(x_1) + (1-s)f(x_2), \quad \forall\, s \in [0,1], \forall\, x_1, x_2 \in D.$$

Satz 4.2.12 sagt demnach, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.

4.2.14 Korollar (Youngsche Ungleichung)
Für $x, y \geq 0$ und $s \in [0,1]$ gilt die Youngsche Ungleichung

$$x^s y^{1-s} \leq sx + (1-s)y.$$

Beweis:

4.3 Taylor-Reihen

4.3.1 Satz (Taylorsche Formel)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei in $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar und in (a,b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert zu jedem x_0, $x \in [a,b]$ ein $s \in (0,1)$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(sx+(1-s)x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Beweis:

4.3.2 Definition

a) Den Term

$$\frac{f^{(n+1)}(sx+(1-s)x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

in Satz 4.3.1 nennt man die *Lagrangesche Form des Restglieds* und das Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt das *n-te Taylor-Polynom* von f.

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei in $[a,b]$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in [a,b]$. Dann heißt

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$$

die *Taylor-Reihe* von f mit *Entwicklungspunkt* x_0.

4.3.3 Bemerkung

a) Für den Konvergenzradius r einer Taylor-Reihe kann $r = 0$ gelten.

b) Falls $T_f(x)$ konvergiert, so gilt nicht notwendig $T_f(x) = f(x)$.

4.3.4 Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Wir behaupten:

i) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

ii) Es existieren Polynome p_n mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Wir beweisen dies per Induktion. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar. Sei also

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Dann ist für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= -\left(p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Man wähle also

$$p_{n+1}(x) := -\left(p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}\right),$$

□

Es bleibt zu zeigen, dass $f^{(n)}$ im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist, mit Ableitung $f^{(n+1)}(0) = 0$. Dies folgt jedoch aus

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\ &= \lim_{R\to\pm\infty}\left(Rp_n(R)e^{-R^2}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Daher ist f glatt, aber die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt 0 verschwindet identisch, so dass $0 = T_f(x) \neq f(x)$ für $x \neq 0$.

4.3.5 Satz

Es sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ die Gleichung

$$T_f(x) = f(x)\,.$$

Hierbei ist $T_f(x)$ die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt x_0. Insbesondere gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,.$$

Beweis:

§5 Das Riemann-Integral

In diesem Kapitel wollen wir den durch Bernhard Riemann entwickelten Integralbegriff einführen. Hierzu definieren wir zunächst das Integral für die Klasse der Treppenfunktionen. Danach werden wir für beliebige beschränkte Funktionen durch Bilden eines Supremums bzw. Infimums jeweils ein Ober- und Unterintegral festlegen. Wenn diese Integrale übereinstimmen, so nennen wir die Funktion Riemann-integrierbar. Das Riemann-Integral ist für viele Anwendungen ausreichend. Jedoch werden wir später einen wesentlich stärkeren Integralbegriff einführen, das sogenannte Lebesgue-Integral. Dieser Integralbegriff ist insofern stärker, als er die Integration einer weitaus größeren Klasse von Funktionen erlaubt.

5.1 Treppenfunktionen

5.1.1 Definition (Treppenfunktion)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

gibt, so dass $\tau_{|(x_{i-1},x_i)}$ für jedes $i = 1,\ldots,n$ jeweils konstant ist. Mit $T[a,b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$.

5.1.2 Bemerkung
$T[a,b]$ bildet mit der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit Skalaren einen reellen Vektorraum, welcher wiederum einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathscr{F}[a,b]$ aller reellen Funktionen auf $[a,b]$ bildet.

5.1.3 Lemma
$\tau \in T[a,b]$ sei eine Treppenfunktion und

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b\,, \quad a = y_0 < \cdots < y_m = b$$

seien zwei Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$, so dass für $i = 1,\ldots,n$ und $j = 1,\ldots,m$ jeweils

$$\tau_{|(x_{i-1},x_i)} = c_i\,, \quad \tau_{|(y_{j-1},y_j)} = d_j$$

mit geeigneten Konstanten $c_i, d_j \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \dots, n$*,* $j = 1, \dots, m$*. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j (y_j - y_{j-1}).$$

Beweis:

Das vorstehende Lemma rechtfertigt die nächste Definition.

5.1.4 Definition (Integral für eine Treppenfunktion)
$\tau \in T[a,b]$ sei eine Treppenfunktion und $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$, so dass $\tau_{|(x_{i-1},x_i)} = c_i$ mit Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$. Dann sei

$$\int_a^b \tau(x)dx := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Wir nennen $\int_a^b \tau(x)dx$ das Integral von τ auf dem Intervall $[a,b]$.

5.1.5 Satz
Für $\tau, \sigma \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

a)
$$\int_a^b (\tau+\sigma)(x)dx = \int_a^b \tau(x)dx + \int_a^b \sigma(x)dx.$$

b)
$$\int_a^b (\lambda\tau)(x)dx = \lambda \int_a^b \tau(x)dx.$$

c) Falls $\tau \le \sigma$, d.h. $\tau(x) \le \sigma(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist auch

$$\int_a^b \tau(x)dx \le \int_a^b \sigma(x)dx.$$

Beweis:

Wir wollen natürlich für eine größere Klasse von Funktionen ein Integral erklären. Hierzu führen wir zunächst Ober- und Unterintegrale ein.

5.1.6 Definition (Ober- und Unterintegral)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzen wir

$$\int_a^{b^*} f(x)dx := \inf\left\{ \int_a^b \tau(x)dx : \tau \in T[a,b],\, \tau \geq f \right\}$$

und

$$\int_{a_*}^b f(x)dx := \sup\left\{ \int_a^b \tau(x)dx : \tau \in T[a,b],\, \tau \leq f \right\}.$$

Wir nennen $\int_a^{b^*} f(x)dx$ das *Oberintegral* und $\int_{a_*}^b f(x)dx$ das *Unterintegral* von f auf dem Intervall $[a,b]$.

5.1.7 Bemerkung
a) Da f als beschränkt vorausgesetzt wird, sind die Ober- und Unterintegrale wohldefiniert und endlich.

b) Trivialerweise gilt stets

$$\int_{a_*}^b f(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx.$$

c) Nach Definition ist auch

$$\int_{a_*}^b f(x)dx = -\int_a^{b^*} (-f)(x)dx.$$

5.1.8 Beispiel
a) Für eine Treppenfunktion $\tau \in T[a,b]$ ist

$$\int_a^b \tau(x)dx = \int_a^{b^*} \tau(x)dx = \int_{a_*}^b \tau(x)dx.$$

b) Es sei

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann sind

$$\int_a^{b^*} f(x)dx = b - a, \quad \int_{a_*}^{b} f(x)dx = 0.$$

5.1.9 Lemma

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt und $\lambda \geq 0$. Dann gelten

a)

$$\int_a^{b^*} (g+g)(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \int_a^{b^*} g(x)dx,$$

b)

$$\int_a^{b^*} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{b^*} f(x)dx.$$

Beweis:

5.1.10 Definition
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar,* wenn sie beschränkt ist und

$$\int_a^{b^*} f(x)dx = \int_{a_*}^{b} f(x)dx.$$

In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert

$$\int_a^{b} f(x)dx := \int_a^{b^*} f(x)dx = \int_{a_*}^{b} f(x)$$

das *Riemann-Integral* von f auf dem Intervall $[a,b]$. Den Raum aller auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{R}[a,b]$.

Direkt aus Lemma 5.1.9 und $\int_a^{b_*} f(x)dx = -\int_{a_*}^{b} (-f)(x)dx$ folgt

5.1.11 Satz
$\mathscr{R}[a,b]$ ist ein reeller Vektorraum und das Riemann-Integral ist ein monotones lineares Funktional auf $\mathscr{R}[a,b]$, d.h. für $f,g \in \mathscr{R}[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{b} (f+g)(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_a^{b} g(x)dx, \quad \int_a^{b} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{b} f(x)dx.$$

Ist ferner $f \leq g$, so gilt

$$\int_a^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b} g(x)dx.$$

5.1.12 Satz
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\tau, \sigma \in T[a,b]$ mit $\tau \leq f \leq \sigma$ gibt, so dass

$$\int_a^{b} \sigma(x)dx - \int_a^{b} \tau(x)dx \leq \epsilon.$$

Beweis: Dies folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

Als nächstes suchen wir nach hinreichenden Kriterien für die Integrierbarkeit einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

5.1.13 Satz
Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis:

Damit haben wir bereits eine große Menge integrierbarer Funktionen gefunden. Jedoch ist nicht jede Riemann-integrierbare Funktion stetig, wie das Beispiel der Treppenfunktionen zeigt. Wie der nächste Satz zeigt, sind auch monotone Funktionen Riemann-integrierbar.

5.1.14 Satz
Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis:

5.1.15 Definition
Für eine beliebige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$f_+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f_-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Offensichtlich gilt

$$f_- = (-f)_+, \quad f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

5.1.16 Satz
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *seien Riemann-integrierbar und* $p \in [1, \infty)$. *Dann sind auch die Funktionen* f_+, f_-, $|f|^p$ *und* $f\,g$ *auf* $[a,b]$ *Riemann-integrierbar.*

Beweis:

5.1.17 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $g \geq 0$ Riemann-integrierbar. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Beweis:

5.1.18 Korollar
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)\,.$$

Beweis: Man wähle in Satz 5.1.17 $g \equiv 1$. □

5.2 Unbestimmte Integrale

Wir wollen jetzt das Integral einer Riemann-integrierbaren Funktion als Funktion ihrer Intervallgrenzen studieren. Eine einfache Vorbemerkung hierzu ist:

5.2.1 Bemerkung
Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, wenn für jedes $x \in (a,b)$ die Funktionen $f_{|[a,x]}$ und $f_{|[x,b]}$ auf $[a,x]$ bzw. auf $[x,b]$ Riemann-integrierbar sind und in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = \int_a^x f(\xi)d\xi + \int_x^b f(\xi)d\xi\,.$$

5.2.2 Definition (Unbestimmtes Integral)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und $c \in [a,b]$. Dann heißt die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_c^x f(\xi)d\xi$$

das *unbestimmte Integral* von f zum *Aufpunkt* c. Hierbei setzen wir für $x < c$

$$\int_c^x f(\xi)d\xi := -\int_x^c f(\xi)d\xi$$

und

$$\int_c^c f(\xi)d\xi := 0\,.$$

5.2.3 Satz
$f[a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $c \in [a,b]$. Dann ist das unbestimmte Integral F von f zum Aufpunkt c stetig differenzierbar und es gilt

$$F' = f\,.$$

Beweis:

5.2.4 Definition (Stammfunktion)
Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

5.2.5 Bemerkung

a) Ist F eine Stammfunktion von f, so auch $F+c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$. Umgekehrt gilt: Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2 = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, denn aus $F_1' = F_2' = f$, folgt $(F_1 - F_2)' = 0$.

b) Nach Satz 5.2.3 besitzt jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F, nämlich ihr unbestimmtes Integral (zu einem beliebigen Aufpunkt). Wegen Teil a) der Bemerkung, ist diese Stammfunktion bis auf Addition einer Konstanten sogar eindeutig durch ihr unbestimmtes Integral F gegeben.

5.2.6 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

Man setzt

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

und schreibt auch oft

$$\int f(x)dx = F(x),$$

wenn $F' = f$.

5.2.7 Beispiel

a) Es sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^s$$

mit

$$D := \begin{cases} (0,\infty) & ,s \notin \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} & ,s \in \mathbb{N}_0 \\ \mathbb{R}^* & ,s \in \mathbb{Z}, s \leq -1\,. \end{cases}$$

Wegen $(x^{s+1})' = (s+1)x^s$ für $s \neq -1$ und $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, gilt dann

$$\int_a^b x^s dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1}(b^{s+1} - a^{s+1}) & ,s \neq -1, [a,b] \subset D \text{ oder } [b,a] \subset D \\ \ln|b| - \ln|a| & ,s = -1, [a,b] \subset D \text{ oder } [b,a] \subset D\,. \end{cases}$$

b)

$$\int cos(x)dx = \sin(x), \quad \int \sin(x)dx = -\cos(x).$$

c)

$$\int e^x dx = e^x.$$

d)

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_a^b, \quad \text{für } a, b \in (-1,1).$$

e)

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x.$$

5.2.8 Satz (Substitutionsregel)

$f : [c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\phi : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

Beweis:

Verwendent man die symbolische Schreibweise

$$d\phi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}\,dx = \phi'(x)dx,$$

so liest sich die Substitutionsregel wie folgt:

$$\int_a^b f(\phi(x))d\phi(x) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

5.2.9 Beispiel
Wir berechnen den Flächeninhalt A des Halbkreises

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

Dies ist der Flächeninhalt unterhalb des Graphen von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, d.h.

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Mit der Substitution

$$x(t) := \sin(t)$$

erhalten wir für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$dx(t)x'(t)dt = \cos(t)dt$$

und damit für kleines $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\arcsin(-1+\epsilon)}^{\arcsin(1-\epsilon)} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= \int_{\arcsin(-1+\epsilon)}^{\arcsin(1-\epsilon)} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen erhalten wir für $\epsilon \to 0$ die Gleichung

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \cos^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

Aus Symmetriegründen gilt jedoch

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) dt = \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt,$$

also

$$\int_{-\pi/2}^{\pi^2} \cos^2 t dt = \pi/2.$$

Der Flächeninhalt K eines Kreises mit Radius 1 ist somit

$$K = 2A = \pi.$$

5.2.10 Satz (Partielle Integration)
Für $f, g \in C^1([a,b])$ gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x) + (fg)(x)\Big|_a^b.$$

Beweis:

5.2.11 Beispiel
Für $a, b > 0$ ist

$$\int_a^b \ln x dx = (x \ln x)\Big|_a^b - \int_a^b (\ln x)' x dx = (x \ln x)\Big|_a^b - \int_a^b dx = (x \ln x - x)\Big|_a^b.$$

5.3 Uneigentliche Integrale

Wir fragen nun, ob wir auch das Riemann-Integral für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ erklären können, wenn der Definitionsbereich D kein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist oder wenn die Funktion nicht mehr beschränkt ist.

5.3.1 Definition (Uneigentliche Integrale)

a) $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ Riemann-integrierbar sei. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Ähnlich erklären wir $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ für eine Funktion $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $[a, b] \subset (-\infty, b]$ Riemann-integrierbar ist, wenn der Grenzwert der Integrale für $a \to -\infty$ existiert.

b) Nun sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a + \epsilon, b] \subset (a, b]$ Riemann-integrierbar sei. Falls dann

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

existiert, so sagen wir das Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist konvergent und setzen

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Ähnlich erklären wir das Integral $\int_a^b f(x)dx$ für eine Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $[a, b-\epsilon] \subset [a,b)$ Riemann-integrierbar ist, wenn der Grenzwert der Integrale für $\epsilon \to 0$ existiert.

c) Schließlich betrachten wir noch den Fall einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, welche auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a', b'] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar sei. Falls dann für ein $c \in (a,b)$ die Integrale

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x)dx$$

beide existieren, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. die Definition hängt nicht von der Wahl der Konstanten c ab.

Die oben definierten Ausdrücke nennt man *uneigentliche Integrale*.

5.3.2 Beispiel

a) Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$$

konvergiert genau dann, wenn $s > 1$.

Beweis: Zunächst ist wegen

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b$$

das uneigentliche Integral nicht konvergent, wenn $s = 1$. Sei jetzt $s \neq 1$ und $b \geq 1$. Dann ist

$$\int_1^b \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_1^b$$

und dies konvergiert für $b \to \infty$ genau dann, wenn $s > 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

□

b) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$$

konvergiert genau dann, wenn $s < 1$.

Beweis: Sei $1 > \epsilon > 0$. Zunächst ist wegen

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_\epsilon^1 = -\ln \epsilon$$

das uneigentliche Integral nicht konvergent, wenn $s = 1$. Sei jetzt $s \neq 1$. Dann ist

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_\epsilon^1$$

und dies konvergiert für $\epsilon \to 0$ genau dann, wenn $s < 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}.$$

□

c) Die vorstehenden Überlegungen zeigen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

5.3.3 Satz (Integral-Vergleichskriterium für Reihen)

$f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ *sei monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

konvergiert.

Beweis:

5.3.4 Bemerkung
Man beachte, dass die Terme $\int_1^\infty f(x)dx$ und $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ nicht notwendig identisch sind.

5.3.5 Beispiel
Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ genau dann konvergent, wenn $s > 1$.

Beweis: Für $s \leq 0$ ist die Reihe sicherlich divergent. Für $s > 0$ folgt die Behauptung aus Satz 5.3.3 und Beispiel 5.3.2 mit $f(x) = x^{-s}$. $\square$

§6 Funktionenfolgen

In diesem Kapitel wollen wir verschiedene Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen einführen und hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften untersuchen.

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

6.1.1 Definition
Gegeben seien eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : D \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf D punktweise* gegen f, geschrieben $f_n \to f$, wenn es zu jedem $x \in D$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N\,.$$

b) Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf D gleichmäßig* gegen f, geschrieben $f_n \rightrightarrows f$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N \text{ und } \forall\, x \in D\,.$$

6.1.2 Definition (Supremumsnorm)
$f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Wir setzen

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$$

und nennen $\|f\|_D \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die *Supremumsnorm* von f auf D.

6.1.3 Bemerkung

a) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0\,.$$

b) Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, die Umkehrung gilt jedoch nicht (siehe Beispiel 6.1.4 a)).

6.1.4 Beispiel

a) Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & , 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & , \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $0 \le f_n(x) \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Funktionenfolge ist gleichmäßig beschränkt. Außerdem ist jedes f_n gleichmäßig stetig. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = 1 , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

b) Der punktweise Limes stetiger Funktionen braucht nicht wieder stetig zu sein, z.B. konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} , \quad f_n(x) = x^n$$

auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1 , \end{cases}$$

aber diese Funktion ist an der Stelle $x = 1$ unstetig.

c) Die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

konvergiert gleichmäßig gegen $f = 0$. Jedes f_n ist (beliebig oft) differenzierbar, aber die Ableitungen $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergieren nicht einmal punktweise gegen die Ableitung der Grenzfunktion f, d.h. gegen 0.

6.1.5 Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D < \infty .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf D absolut und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$.

Beweis:

6.1.6 Beispiel
Eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

konvergiere in einem Punkt $a \neq x_0$. Dann konvergiert f absolut und gleichmäßig auf jedem Intervall $[a - \rho, a + \rho]$ mit $0 < \rho < |a - x_0|$.

Beweis: Wir wählen $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$, also $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Da nach Voraussetzung $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ konvergiert, existiert ein $M > 0$, so dass $|f_n(a)| = |a_n(a - x_0)^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle $x \in [a - \rho, a + \rho]$ gilt dann

$$|f_n(x)| = |a_n(x - x_0)^n| = |a_n(a - x_0)^n| \cdot \left| \frac{x - x_0}{a - x_0} \right|^n \leq M\theta^n,$$

mit

$$\theta := \frac{\rho}{|a - x_0|} \in (0, 1).$$

Es gilt also

$$\|f_n\|_{[a-\rho, a+\rho]} \leq M\theta^n.$$

Da dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{[a-\rho, a+\rho]} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{M}{1 - \theta},$$

folgt die Behauptung aus dem Konvergenzkriterium von Weierstraß. □

6.2 Sätze über gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen

Nach Beispiel 6.1.4 b) ist der punktweise Limes stetiger Funktionen nicht notwendig stetig, es gilt jedoch der folgende Satz:

6.2.1 Satz
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : D \to \mathbb{R}$ sei eine Folge stetiger Funktionen, die auf D gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.

Beweis:

Für den folgenden Satz benötigen wir das nachstehende Lemma.

6.2.2 Lemma (Dreiecksungleichung für Integrale)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis:

6.2.3 Satz

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die auf* $[a,b]$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergiere. Dann ist* f *Riemann-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Beweis:

6.2.4 Korollar
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen für die*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{[a,b]} < \infty .$$

Dann ist auch die Funktion

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

auf $[a,b]$ *Riemann-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Beweis:

6.2.5 Beispiel

a) Eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

konvergiere in einem Punkt $x_0 \neq 0$. Dann gilt auf jedem Intervall $[a,b] \subset (-|x_0|, |x_0|)$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right) \Bigg|_a^b ,$$

denn nach Beispiel 6.1.6 konvergiert die Potenzreihe auf diesen Intervallen absolut und gleichmäßig. Da jedes $f_n(x) := a_n x^n$ Riemann-integrierbar ist, folgt die Behauptung somit aus Korollar 6.2.4.

b) Satz 6.2.3 gilt nicht mehr bei punktweiser Konvergenz. So konvergiert z.B. die für $n \geq 2$ definierte Funktionenfolge

$$f_n(x) = \max\left\{ n - n^2 \left| x - \frac{1}{n} \right|, 0 \right\}$$

punktweise gegen $f = 0$, aber es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1\,, \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

6.2.6 Satz

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere. Wenn dann die Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen eine weitere Grenzfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren, so ist f differenzierbar und es gilt $f' = g$, d.h. dann ist

$$f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' = g\,.$$

Beweis:

§7 Fourierreihen

Für viele technische Anwendungen, insbesondere in den Ingenieurswissenschaften, ist es oft nötig, periodische Funktionen - auch unstetige - in geeigneter Form durch trigonometrische Funktionen zu approximieren. Diese Aufgabe erfüllt die Theorie der Fourier-Analysis.

7.1 Trigonometrische Polynome

7.1.1 Definition
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, falls

$$f(x+L) = f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

7.1.2 Beispiel
Die Funktionen $\cos(kx), \sin(kx)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ besitzen die Periode 2π.

7.1.3 Bemerkung

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode L, so ist die Funktion

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right)$$

periodisch mit Periode 2π.

b) Ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$, so erhält man durch

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(kx) := f(x), \quad \forall\, x \in [0, 2\pi), \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

eine periodische Funktion mit Periode 2π.

7.1.4 Definition (Trigonometrisches Polynom)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *trigonometrisches Polynom* der Ordnung n, falls sie sich in der Form

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(2c_k \cos(kx) + 2s_k \sin(kx)\Big)$$

mit reellen Konstanten c_k, s_k schreiben läßt.

7.1.5 Bemerkung
Die Koeffizienten c_0, c_k, s_k ($k \in \mathbb{N}$) eines trigonometrischen Polynoms f sind eindeutig bestimmt. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = c_k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = s_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

denn

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx = 0, \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx = 0, \quad \forall k \neq l, k, l \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(kx)dx = \pi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Für den Rest des Kapitels bezeichne $\mathscr{V}$ den Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbar sind.

7.1.6 Definition
Für $f, g \in \mathscr{V}$ definieren wir

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Wie man leicht nachprüft gilt für alle $f, g, h \in \mathscr{V}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle f + h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle, \quad \langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle,$$

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle, \quad \langle f, f\rangle \geq 0.$$

Jedoch folgt aus $\langle f, f\rangle = 0$ nicht, dass $f = 0$. Durch $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ ist demnach ein positiv semi-definiertes Skalarprodukt gegeben. Wir setzen

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

7.2 Fourier-Koeffizienten und -Reihen

7.2.1 Definition (Fourier-Koeffizienten)
Für $f \in \mathscr{V}$ heißen die Zahlen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \langle f, \cos(k\cdot) \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

die geraden und

$$s_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \langle f, \sin(k\cdot) \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

die ungeraden *Fourier-Koeffizienten* von f. Die *Fourier-Reihe* von f ist dann die Reihe

$$\mathscr{F}[f](x) := c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(2c_k \cos(kx) + 2s_k \sin(kx) \Big).$$

7.2.2 Bemerkung
Man bemerke, dass stets $s_0 = 0$ gilt. Außerdem ist

$$c_{-k} = c_k, \quad s_{-k} = -s_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Da $\cos(-kx) = \cos(kx)$ und $\sin(-kx) = -\sin(kx)$, kann man daher die Fourierreihe auch in der Form

$$\mathscr{F}[f](x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(c_k \cos(kx) + s_k \sin(kx) \Big)$$

schreiben.

7.2.3 Beispiel
Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x < \pi \\ -1 & , \pi \le x < 2\pi . \end{cases}$$

Für $k = 0$ ist

$$c_k = s_k = 0$$

und für $k \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)dx - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi k}\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi k}\sin(kx)\Big|_\pi^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
s_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)dx - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi k}\cos(kx)\Big|_\pi^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } k \\ \frac{2}{k\pi} & \text{für ungerades } k\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f lautet folglich

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f](x) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2c_k\cos(kx) + 2s_k\sin(kx)\Big) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} s_k\sin(kx) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

Die für uns wichtige Frage ist, ob und in welchem Sinne die Fourier-Reihe $\mathscr{F}[f]$ einer Funktion f gegen f konvergiert. Offensichtlich ist ein trigonometrisches Polynom seine eigene Fourier-Reihe.

7.2.4 Definition
Sei $f \in \mathscr{V}$ mit Fourier-Koeffizienten c_k, s_k, $k \in \mathbb{Z}$. Das *n-te Fourier-Polynom* von f ist das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n[f](x) &:= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(2c_k \cos(kx) + 2s_k \sin(kx)\Big) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \Big(c_k \cos(kx) + s_k \sin(kx)\Big).\end{aligned}$$

7.2.5 Lemma
Für $f \in \mathscr{V}$ mit Fourier-Koeffizienten c_k, s_k gilt

$$\begin{aligned}\|f - \mathscr{F}_n[f]\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \|\mathscr{F}_n[f]\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} (c_k^2 + s_k^2).\end{aligned}$$

Beweis:

7.2.6 Definition
Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{V}$ *konvergiert im quadratischen Mittel* gegen $f \in \mathscr{V}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 .$$

7.2.7 Satz (Besselsche Ungleichung)
Für $f \in \mathscr{V}$ mit Fourier-Koeffizienten $c_k, s_k, k \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k^2 + s_k^2) = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2 + s_k^2) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx .$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Beweis:

Falls in der Besselschen Ungleichung die Gleichheit erfüllt ist, so spricht man auch oft von der Gültigkeit der Vollständigkeitsrelation.

7.2.8 Satz
$f \in \mathscr{V}$ sei auf dem Intervall $[a,b] \subset [0,2\pi]$ stetig differenzierbar. Für $k \in \mathbb{R}$ seien

$$S(k) := \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\sin(kx)dx, \quad C(k) := \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\cos(kx)dx.$$

Dann gilt

$$\lim_{|k|\to\infty} C(k) = 0 = \lim_{|k|\to\infty} S(k).$$

Insbesondere gilt für die Fourier-Koeffizienten einer stetig differenzierbaren Funktion $f \in \mathscr{V}$

$$\lim_{|k|\to\infty} s_k = \lim_{|k|\to\infty} c_k = 0.$$

Beweis:

7.2.9 Beispiel (Sägezahn-Funktion)
Sei $\sigma \in \mathscr{V}$ die Funktion mit

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 2\pi \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{für } x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Wegen ihrer Gestalt nennt man diese Funktion auch häufig *Sägezahn-Funktion*.

i) Wir wollen die Fourier-Reihe von σ berechnen. Zunächst ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(x) \cos(kx) dx = 0,$$

denn es ist

$$\sigma(\pi - x) \cos(k(\pi - x)) = -\sigma(\pi + x) \cos(k(\pi + x)), \quad \forall x \in [0, \pi], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Für s_k mit $k \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(kx) dx \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x}{k} \cos(kx) - \frac{1}{k^2} \sin(kx) \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2k}, \end{aligned}$$

d.h. die Fourier-Reihe des Sägezahns ist

$$\mathscr{F}[\sigma](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

ii) Es gilt sogar

$$\sigma(x) = \mathscr{F}[\sigma](x),$$

d.h. die Fourier-Reihe von σ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise gegen σ. In den Punkten $x = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, ist dies trivial, da $\sin(kl\pi) = 0$, für alle $k, l \in \mathbb{Z}$. Für $x \in (0, 2\pi)$ folgt aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + nx\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}. \tag{7.2.1}$$

Damit gilt für alle $x \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right) dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2} + nt\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \frac{\sin\left(\frac{t}{2} + nt\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}(x - \pi).
\end{aligned}$$

Nach Satz 7.2.8 konvergiert das Integral auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen 0, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} = \sigma(x).$$

iii) Da σ nicht stetig ist, aber sämtliche Partialsumme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ stetig sind, kann die Konvergenz der Fourier-Reihe gegen σ nach Satz 6.2.1 nicht gleichmäßig sein, jedenfalls nicht überall. Wir zeigen jetzt, dass die Konvergenz aber auf jedem Intervall $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, $\epsilon \in (0, 2\pi)$ gleichmäßig ist. Hierzu definieren wir für $x \in (0, 2\pi)$ die Funktionen

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sin((k-1)x)\cos x + \cos((k-1)x)\sin x \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x \Big) \\
&= \cos x \cdot f_{n-1}(x) + \sin x \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + (n-1)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (7.2.1) benutzt haben. Also ist

$$(1-\cos x)f_n(x) = -\cos x\sin(nx) + \sin x\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+(n-1)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right).$$

Es folgt für alle $x \in (0, 2\pi)$ die Abschätzung

$$|(1-\cos x)f_n(x)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Insbesondere ist

$$\|f_n\|_{[\epsilon, 2\pi-\epsilon]} \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

mit einer Konstanten $M > 0$, die nur von ϵ aber nicht von n abhängt. Für $m > n > 0$ und $x \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{f_k(x) - f_{k-1}(x)}{k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{f_n(x)}{n+1} - \frac{f_{m-1}(x)}{m}\right| \\
&\leq M\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\right) \leq \frac{2M}{m},
\end{aligned}$$

also auch

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2M}{m}, \quad \forall\, x \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon].$$

Dies beweist die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

gegen σ auf dem Intervall $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.

7.2.10 Satz

Sei $f \in \mathscr{V}$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $\mathscr{F}[f]$ von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2 + s_k^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx.$$

Beweis:

Literaturverzeichnis

Symbolverzeichnis

Namens- und Sachverzeichnis