CAPITOLUL III

III.1. CURBE ÎN SPAȚIU

III.1.1. Breviar teoretic

Fie R^3 spațiul euclidian tridimensional.

O curbă în spațiu este reprezentată prin ecuația vectorială

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \ \ t \in I \subset R, \tag{3.1.1}$$

de ecuațiile parametrice

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ \ t \in I \subset R, \tag{3.1.2}$$

de ecuațiile implicite

$$F(x, y, z) = 0, \ G(x, y, z) = 0, \ (x, y, z) \subset D \subset R^3, \tag{3.1.3}$$

sau de ecuațiile explicite

$$z = f(x, y), \ \mathrm{z} = \mathrm{g}(x, y), \ (x, y) \subset D \subset R^2, \tag{3.1.4}$$

unde funcțiile *x, y, z, F, G, f, g* admit cel puțin derivate parțiale de ordinal doi.

Tangenta la curba (3.1.2) în punctual regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al curbei are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \tag{3.1.5}$$

unde t_0 este astfel că $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ şi $z_0 = z(t_0)$.

Ecuația planului normal la curbă în punctul regulat M_0 este:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 . \tag{3.1.6}$$

Pentru o curbă dată de ecuațiile (3.1.3), tangenta şi planul normal la curbă în M_0 au ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(F,G)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{D(F,G)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{D(F,G)}{D(x_0, y_0)}}, \tag{3.1.7}$$

respectiv,

$$\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}(x-x_0)+\frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}(y-y_0)+\frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}(z-z_0)=0\,, \qquad (3.1.8)$$

unde $\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}$, $\frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}$ şi $\frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}$ sunt determinanţii funcţionali ai funcţiilor *F* şi *G*.

Versorii triedrului Frenet sunt:

- versorul tangentei: $\vec{\tau}=\frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|}$, (3.1.9)
- versorul binormalei: $\vec{\beta}=\frac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\|}$, (3.1.10)
- versorul normalei principale: $\vec{\gamma}=\vec{\beta}\times\vec{\tau}$. (3.1.11)

Axele triedrului Frenet în punctul regulat M_0 sunt:

- tangenta la curbă în M_0,
- binormala la curbă în M_0 (dreapta care trece prin M_0 şi de versor director $\vec{\beta}$),
- normala principală la curbă în M_0 (dreapta care trece prin M_0 şi de versor director $\vec{\gamma}$).

Planele triedrului Frenet se numesc, respectiv: planul normal, Π_N (trece prin M_0 şi este paralel cu direcţiile $\vec{\beta}$ şi $\vec{\gamma}$), planul osculator, Π_O (trece prin M_0 şi este paralel cu direcţiile $\vec{\tau}$ şi $\vec{\gamma}$) şi planul rectificant Π_R (trece prin M_0 şi este paralel cu direcţiile $\vec{\tau}$ şi $\vec{\beta}$).

Curbura unei curbe într-un punct regulat *M* este viteza de variaţie a unghiului pe care-l face tangenta la curbă cu o dreaptă fixă şi are expresia:

$$K=\frac{\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\|}{\|\vec{r}\,'\|^3} \qquad (3.1.12)$$

Torsiunea unei curbe într-un punct regulat *M* este viteza de variaţie a unghiului pe care-l face binormala cu o dreaptă fixă şi este dată de:

$$T=\frac{\left(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''\right)}{\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\|^2} \qquad (3.1.13)$$

Inversele $\frac{1}{K}$ şi $\frac{1}{T}$ ale curburii şi torsiunii se numesc raza de curbură şi raza de torsiune a curbei într-un punct considerat.

Formulele lui Frenet sunt:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\gamma}, \quad \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = -K\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\vec{\gamma} \tag{3.1.14}$$

Elementul de arc are expresia:

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \tag{3.1.15}$$

III.1.2. *Probleme rezolvate*

P1. Se consideră curba $x = 2t, y = t^2, z = \ln t, t > 0$. Să se arate că această curbă trece prin punctele $P(2,1,0)$ şi $Q(4,4,ln\ 2)$ şi să se găsească lungimea arcului între aceste puncte.

Soluţie. Se observă că pentru t=1 se obţine punctual P, iar pentru t=2 se obţine punctual Q. Deoarece $x'(t) = 2, y'(t) = 2t, z'(t) = \frac{1}{t}$, rezultă pentru lungimea arcului între P şi Q:

$$l(1,2) = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}}\, dt = \int_1^2 \frac{2t^2 + 1}{t} dt$$

Deci, $l(1,2) = t^2\Big|_1^2 + \ln t\Big|_1^2 = 3 + \ln 2.$

P2. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curbele:

a) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ în $t = 0$;

b) $z = x^2 + y^2, x = y$ în $M_0(1,1,2)$;

c) $x^2 + z^2 - 4 = 0, x^2 + y^2 - 4 = 0$, în $M_0(\sqrt{3},1,1)$.

Soluție. a) Pentru $t=0$ se obține punctual (0,0,0). Se utilizează ecuațiile (3.1.5) şi (3.1.6) în care derivatele $x'(t)=1-\cos t, y'(t)=\sin t$ şi $z'(t)=2\cos\frac{t}{2}$ sunt calculate în punctul $t=0$. Rezultă: $T:\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{2}$, $\Pi_T: z=0$;

b) Punând $x=t$, se obține reprezentarea parametrică a curbei $x=t, y=t, z=2t^2$. Punctul (1,1,2) corespunde lui $t=1$. Prin derivare, ecuațiile (3.1.5) şi (3.1.6) devin:

$$T:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4},\ \Pi_T: 1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+4\cdot(z-2)=0,$$

adică, $\Pi_T: x+y+4z-10=0$;

c) Fie $F(x,y,z)=x^2+z^2-4$ şi $G(x,y,z)=x^2+y^2-4$. Pentru ecuațiile (3.1.7) se calculează determinanții funcționali:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2z\\ 2y & 0\end{vmatrix}=-4yz,\quad \frac{D(F,G)}{D(z,x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 0 & 2x\end{vmatrix}=4xz;$$

$$\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 0\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=4xy.$$

În punctul $(\sqrt{3},1,1)$ ecuațiile tangentei şi planului normal sunt:

$$T:\frac{x-\sqrt{3}}{-4}=\frac{y-1}{4\sqrt{3}}=\frac{z-1}{4\sqrt{3}},\ \Pi_T: -4(x-\sqrt{3})+4\sqrt{3}(y-1)+4\sqrt{3}(z-1)=0,$$

adică $x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+\sqrt{3}=0$.

P3. Pentru curba $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ht, t\in R$, să se determine triedrul Frenet.

Soluție. Prin derivare se obține $\vec{r}'(t)=(-a\sin t)\vec{i}+a\cos t\vec{j}+h\vec{k}$. Ecuațiile tangentei sunt:

$$T:\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-ht}{h},$$

versorul $\vec{\tau}$ este dat de $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + h\vec{k})$.

Planul normal $(\Pi_N \perp \vec{\tau})$ are ecuația:

$$\Pi_N : -a\sin t(x - a\cos t) + a\cos t(y - a\sin t) + h(z - ht) = 0.$$

Pentru versorul $\vec{\beta}$ se calculează $\vec{r}\,''(t) = (-a\cos t)\vec{i} + (-a\sin t)\vec{j}$. Deci,

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ah\sin t\vec{i} - ah\cos t\vec{j} + a^2\vec{k}.$$

In concluzie,

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h\sin t\vec{i} - h\cos t\vec{j} + \vec{k}).$$

Ecuațiile binormalei (de direcție $\vec{\beta}$) sunt:

$$B : \frac{x - a\cos t}{h\sin t} = \frac{y - a\sin t}{-h\cos t} = \frac{z - ht}{a}$$

Planul osculator $(\Pi_O \perp \vec{\beta})$ are ecuația:

$$\Pi_O : h\sin t(x - a\cos t) - h\cos t(y - a\cos t) + a(z - ht) = 0.$$

Pentru versorul normalei principale $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$ se obține:

$$\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{h\sin t}{\sqrt{h^2+a^2}} & \dfrac{-h\cos t}{\sqrt{h^2+a^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{h^2+a^2}} \\ \dfrac{-a\sin t}{\sqrt{h^2+a^2}} & \dfrac{a\cos t}{\sqrt{h^2+a^2}} & \dfrac{h}{\sqrt{h^2+a^2}} \end{vmatrix} = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.$$

Ecuațiile normalei principale (de direcție $\vec{\gamma}$) sunt:

$$N_P : \frac{x - a\cos t}{\cos t} = \frac{y - a\sin t}{-\sin t} = \frac{z - ht}{0}.$$

Planul rectificant ($\Pi_R \perp \vec{\gamma}$) este de ecuație:

$$\Pi_R : \cos t(x - a\cos t) - \sin t(y - a\sin t) = 0.$$

P4. Pentru curba $x^2 = 2az, y^2 = 2bz, a, b > 0$, să se determine triedrul Frenet.

Soluție. O reprezentare parametrică a curbei este dată de $x = \sqrt{2a}t, y = \sqrt{2b}t, z = t^2, t \in R$. Se obține $x' = \sqrt{2a}, y' = \sqrt{2b}, z = 2t$, $x'' = y'' = 0$, $z'' = 0$.

Ecuațiile tangentei la curbă sunt:

$$T: \frac{x - \sqrt{2a}t}{\sqrt{2a}} = \frac{y - \sqrt{2b}t}{\sqrt{2b}} = \frac{z - t^2}{2t},$$

versorul $\vec{\tau}$ este dat de $\vec{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{2a + 2b + 4t^2}}(\sqrt{2a}\vec{i} + \sqrt{2b}\vec{j} + 2t\vec{k})$.

Ecuația planului normal este:

$$\Pi_N : \sqrt{2a}(x - \sqrt{2a}t) + \sqrt{2b}(y - \sqrt{2b}t) + 2t(z - t^2) = 0.$$

Versorul binormalei are expresia:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2a + 2b}}(\sqrt{2a}\vec{i} - \sqrt{2b}\vec{j}).$$

Ecuațiile binormalei sunt:

$$B: \frac{x - \sqrt{2a}t}{\sqrt{2a}} = \frac{y - \sqrt{2b}t}{-\sqrt{2b}} = \frac{z - t^2}{0}.$$

Pentru planul osculator se găsește:

$$\Pi_O : \sqrt{2a}(x - \sqrt{2a}t) - \sqrt{2b}(y - \sqrt{2b}t) = 0.$$

Se obține versorul normalei principale:

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(2t^2 + a + b)}}(-\sqrt{2b}t\vec{i} - \sqrt{2a}t\vec{j} + (a+b)\vec{k}).$$

Deci ecuația normalei principale sunt:

$$B: \frac{x - \sqrt{2a}t}{-\sqrt{2b}t} = \frac{y - \sqrt{2b}t}{-\sqrt{2a}t} = \frac{z - t^2}{a + b}.$$

In final, planul rectificant are ecuația:

$$\Pi_R : -\sqrt{2b}t(x - \sqrt{2a}t) - \sqrt{2a}t(y - \sqrt{2b}t) + (a+b)(z - t^2) = 0.$$

P5. Să se calculeze curbura şi torsiunea într-un punct al curbei $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$.

Soluție. Ecuația vectorială a curbei este $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t\sqrt{2}\vec{k}$.

Se calculează:

$$\vec{r}\,'(t) = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\vec{r}\,''(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j}$$

$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = e^{-t}\vec{i} + e^t\sqrt{2}\vec{j} + 2\vec{k}$. Deci, pentru curbură se obține:

$$K = \frac{\left\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right\|}{\left\|\vec{r}\,'\right\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}.$$

Pentru torsiunea T se calculează:

$$\left(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''\right) = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}.$$

Deci, $T = -\dfrac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

P6. Să se determine versorii triedrului Frenet, curbura şi torsiunea pentru curba $\vec{r}(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5}\cos s\right)$.

Soluție. Se observă că $v = \left\|\vec{r}\,'\right\| = 1$ şi deci parametrul pe curba dată este chiar abscisa curbilinie. Astfel, formulele care dau elementele Frenet sunt:

$$\vec{\tau}(s) = \vec{r}\,'(s),\ K = \left\|\vec{\tau}\,'(s)\right\|,\ \vec{\gamma}(s) = \frac{1}{K}\vec{\tau}\,'(s),\ \vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{\gamma}(s),\ \vec{\beta}\,' = -\tau\vec{\gamma}.$$

Se găseşte $\vec{\tau}\,'(s) = \vec{r}\,''(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s\right)$ şi K=1. De asemenea, $\vec{\gamma}(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s\right)$, $\vec{\beta}(s) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$. Deoarece câmpul binormal este paralel rezultă T=0. Din $K = 1 > 0$ şi $T = 0, (\forall)s$, rezultă că $\vec{r}(s)$ este un cerc.

III.1.3. ***Probleme propuse***

P1. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în punctul M_0 la curba Γ, pentru:

a) $x = e^t \cos 3t, y = e^t \sin 3t, z = e^{-2t}, M_0(1,0,1)$;

b) $x = a\cos^2 t, y = a\sin t\cos t, z = a\sin t, M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{4}\right)$;

c) $x^2 + y^2 + z + 6 = 0, x - y^2 + z^3 + 6 = 0, M_0(-1,-2,-1)$;

Indicaţie. a) $T : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-2}; \Pi_N : x + 3y - 2z + 1 = 0$;

b) $T : \dfrac{2x-a}{-2} = \dfrac{2y-a}{0} = \dfrac{2z - a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \Pi_N : -2x + \sqrt{2}z = 0$;

c) $T : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}; \Pi_N : x + 2y - 3z = 0$;

P2. Să se scrie ecuaţiile feţelor triedrului Frenet al curbei $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{t}{\sqrt{2}}, z = \ln|\sin t|$ în punctual $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Indicaţie. $\Pi_N : x + y - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = 0; \Pi_O : x - y = 0; \Pi_R : z = 0.$

P3. Să se scrie ecuaţiile axelor triedrului Frenet într+un punct oarecare al curbei

$$x = \frac{1}{2}\sin^2 t, y = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t), z = \sin t .$$

Indicaţie.

$$T : \frac{X-x}{\sin t} = \frac{Y-y}{\cos t} = \frac{Z-z}{1}; B : \frac{X-x}{\sin t} = \frac{Y-y}{\cos t} = \frac{Z-z}{-1};\ N_P : \frac{X-x}{\cos t} = \frac{Y-y}{\sin t} = \frac{Z-z}{0} .$$

P4. Să se scrie ecuaţia planului osculator al curbei $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$ într+un punct al ei.

Indicaţie. $\Pi_O : xe^{-t} - ye^t - z\sqrt{2} + 2t = 0$.

P5. Să se scrie ecuația planului osculator al curbei $y^2 = x, x^2 = z$ în punctual $M(1,1,1)$.

Indicație. Curba poate fi exprimată prin ecuațiile parametrice $x = t^2, y = t, z = t^4$. Planul osculator are ecuația $\Pi_O : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

P6. Să se determine ecuațiile normalei principale şi binormalei la curba $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{2t^3}{3}, z = \frac{t^4}{2}$ în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Indicație. $t = 1; N_P : \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}$; $B : \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$.

P7. Să se scrie ecuațiile normalei principale şi binormalei la curba $x = y^2, z = x^2$ în punctual $M(1,1,1)$.

Indicație. O reprezentare parametrică a curbei este $x = t^2, y = t, z = t^4$; $N_P : \frac{x-1}{-31} = \frac{y-1}{-26} = \frac{z-1}{22}$; $B : \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

P8. Se dă curba $\vec{r} = t\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + \frac{1}{6}t^3\vec{k}$. Se cere:

a) elementul de arc;

b) versorii triedrului Frenet în punctul t=1;

c) ecuația planului osculator în acelaşi punct.

Indicație. a) $ds = \frac{1}{2}\left(2 + t^2\right)dt$; $\vec{\tau}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{\beta}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{\gamma}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; c) $\Pi_O : x - 2y + 2z - \frac{1}{3} = 0$.

P9. Se dă curba $\vec{r} = \cos^2 t\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{6}\sin^3 t\vec{k}$. Se cere:

a) elementul de arc;

b) versorii triedrului Frenet într-un punct oarecare al curbei;

c) curbura.

Indicație. $ds = 3\sin t\cos t dt$; $\vec{\tau}\left(-\cos t, 0, \sin t\right)$, $\vec{\beta}\left(0,1,0\right)$, $\vec{\gamma}\left(\sin t, 0, \cos t\right)$; c) $K = \dfrac{1}{3\sin t\cos t}$.

P10. Să se scrie ecuația binormalei la curba $x = \dfrac{t^2}{2}, y = \dfrac{2t^3}{3}, z = \dfrac{t^4}{2}$ în punctul $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Indicație. $B: \dfrac{x-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{1}$.

P11. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 2t$ în punctual $M(0,1,-1)$.

Indicație. K=17, T=0.

P12. Se consideră curba $\vec{r} = \dfrac{1}{2}t^2\vec{i} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2}t^{3/2}\vec{j} + t\vec{k}$. Se cere:

a) versorii tangentei şi binormalei principale precum şi curbura în punctual t=2;

b) ecuațiile tangentei şi planului rectificant în acelaşi punct.

Indicație. a) $\vec{\tau}\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\vec{\gamma}\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$; $K = \dfrac{1}{18}$; b) $T: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{z-2}{1}$; $\Pi_R: 2x - y - 2z + \dfrac{8}{3} = 0$.

P13. Fie curba $\vec{r} = t\vec{i} + \left(1-t^2\right)\vec{j} + \dfrac{2}{3}t^3\vec{k}$.

a) să se calculeze versorii triedrului Frenet în t=1;

b) să se scrie ecuațiile normalei principale şi ale planului osculator;

c) să se calculeze torsiunea în acelaşi punct.

Indicație. a) $\vec{\tau}\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{\beta}\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $\vec{\gamma}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; b) $N_P : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{2}$; $\Pi_O : 2x+2y+z-\frac{8}{3}=0$; c) $T=\frac{2}{9}$.

P14. Să se afle raza de curbură pentru curba $x = t-\sin t, y = 1-\cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$.

Indicație. $R = \frac{1}{K} = \frac{4}{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}$.

P15. Se dă curba $x=\cos t, y=\sin t, z=-\ln|\cos t|$. Se cere:

a) curbura într-un punct oarecare al curbei;

b) versorii normalei principale şi binormalei;

c) ecuațiile binormalei şi planului rectificant în t=0.

Indicație. a) $K = \cos t\sqrt{1+\cos^2 t}$; b) $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\left(\cos t\left(1+\sin^2 t\right)\vec{i} + \right.$ $\left. + \sin^3 t\vec{j} + \cos^2 t\vec{k} \right)$, $\vec{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\left(-\cos 2t\vec{i} - \sin 2t\vec{j} + \cos t\vec{k}\right)$, c) $B : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$.

P16. Să se calculeze lungimea curbei închise $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, z=\cos^2 t$.

Indicație. $ds = \frac{5}{2}|\sin 2t|dt$; $s = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt = 10\int_0^{2\pi}\sin 2t dt = 10$.

P17. Să se demonstreze că planele normale la curba $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos t$ trec prin originea sistemului de coordinate.

Indicație. $\Pi_N : \left(x-\sin^2 t\right)\sin 2t + \left(y-\sin t\cos t\right)\cos 2t - \left(z-\cos t\right)\sin t = 0$.
Ecuația nu conține termen liber rezultă că planele normale trec prin originea sistemului.

P18. Să se arate că curbura curbei $x = t\cos t, y = t\sin t, z = at$ în origine este $K = \dfrac{1}{1+a^2}$.

P19. Să se arate că curba $x = a\sin^2 t, y = a\sin 2t, z = a\cos^2 t$ este plană. Să se stabilească planul ei.

Indicație. $\dfrac{1}{T} = 0$, deci curba este plană. Planul curbei este $\Pi_O : x + z = a$.

P20. Să se determine punctele de pe curba $\vec{r} = \dfrac{1}{t}\vec{i} + \ln t\vec{j} + t\vec{k}$ unde normala principală este paralelă cu planul $5x + 2y - 5z - 4 = 0$.

Indicație. Se pune condiția de perpendicularitate între vectorul director al normalei principale și vectorul normal la plan (5,2,-5). Se obțin patru puncte corespunzătoare valorilor $t_1 = -1, t_2 = \dfrac{1}{2}, t_3 = 1, t_4 = 2$.

P21. Să se determine tangentele la curba $\vec{r} = \dfrac{1}{2}t^4\vec{i} + \dfrac{1}{3}t^3\vec{j} + t^2\vec{k}$ care sunt paralele cu planul $3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Indicație. Din condiția de paralelism între vectorul director al tangentei și vectorul normal la plan (3,-2,-2) rezultă $t_1 = -1, t_2 = \dfrac{2}{3}$.

P22. Să se determine punctele curbei $\vec{r} = \dfrac{1}{t}\vec{i} + t\vec{j} + (2t^2 - 1)\vec{k}$ ale căror binormale sunt perpendiculare pe dreapta de ecuații $x + y = 0, z = 4x$.

Indicație. $t_1 = -1, t_2 = 2$.

P23. Fiind dată curba $\vec{r} = t\cos(a\ln t)\vec{i} + t\sin(a\ln t)\vec{j} + bt\vec{k}, t > 0$, să se demonstreze că raportul între K şi $\dfrac{1}{T}$ în orice punct al curbei este constant.

Indicație. $K = \dfrac{a\sqrt{1+a^2}}{\left(1+a^2+b^2\right)t}$, $\dfrac{1}{T} = \dfrac{ab}{\left(1+a^2+b^2\right)t}$, $\dfrac{K}{\frac{1}{T}} = \dfrac{a\sqrt{1+a^2}}{b}$.

III.2. CONICE

III.2.1. *Breviar theoretic*

Nucleul unei forme pătratice afine f pe un plan E_2 se numeşte conică sau curbă de ordinul doi, adică

$$\Gamma = Kerf = f^{-1}(0) = \{P \in E_2 / f(P) = 0\} \tag{3.2.1}$$

Dacă forma pătratică afină este dată prin

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{10}x + a_{20}y) + a_{00} \tag{3.2.2}$$

atunci relația $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{10}x + a_{20}y) + a_{00} = 0$ se numeşte *ecuația generală* a conicei Γ.

Se poate demonstra că Γ este echivalentă cu una din următoarele mulțimi:

1) $x^2 + y^2 = r^2$ (cerc) (3.2.3)

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (elipsă) (3.2.4)

3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (hiperbolă) (3.2.5)

4) $y^2 = 2px$ (parabolă) (3.2.6)

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (pereche de drepte concurente) (3.2.7)

6) $x^2 - a^2 = 0$ (pereche de drepte paralele) (3.2.8)

7) $x^2 = 0$, (pereche de drepte confundate) (3.2.9)

8) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ (mulțime cu un singur element $\{0\}$) (3.2.10)

9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$ (mulțimea vidă) (3.2.11)

Trecerea de la reperul cartezian $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ la un reper cartezian orientat pozitiv (numit reper canonic) față de care ecuația lui Γ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită ecuația redusă sau canonică) se realizează cu ajutorul unei roto-translații. Față de aceste roto-translații ecuația $f(x,y)=0$ are următorii invarianți:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\quad I=a_{11}+a_{22} \tag{3.2.12}$$

Pentru reducerea unei conice la forma canonică se procedează astfel:

1) se efectuează mai întâi o translație dacă $a_{12}=0$;

2) se efectuează mai întâi o rotație folosind metoda valorilor proprii sau formulele rotației şi apoi o translație (dacă este cazul).

a) *Metoda valorilor proprii*. Se consideră forma pătratică $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$. Se determină valorile proprii λ_1,λ_2 (reale, distincte) şi versorii proprii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (ortogonali) ai matricei simetrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ataşată formei pătratice. Se notează $R=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$, $\det R=+1$ (în cazul în care $\det R=-1$, se renumerotează valorile proprii). Rotația: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ reduce forma pătratică la expresia $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$. Versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ fixează noul reper $x'Oy'$.

b) *Formulele rotației*. Dacă $a_{11}\neq 0$, atunci prin rotația plană:

$$R:\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases} \tag{3.2.13}$$

de unghi θ dat de ecuația $(a_{11}-a_{22})\sin 2\theta=2a_{12}\cos 2\theta$ (3.2.14) ecuația conicei devine:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2(a'_{10}x'+a'_{20}y')+a'_{00}=0.$$

Se formează pătrate şi se efectuează translația $T: x'' = x' + \frac{a'_{10}}{a'_{11}}, y'' = y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}$ şi se obține ecuația canonică.

Dacă o conică are centru de simetrie, atunci coordonatele sale sunt soluția sistemului: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$, sau , $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$ (3.2.15)

Natura unei conice: $\begin{cases} \Delta = 0, & \text{conice degenerate (5 - 8)} \\ \Delta \neq 0, & \text{conicene degenerate (1 - 4 si 9)} \end{cases}$

Genul unei conice: $\begin{cases} \delta > 0, & \text{gen eliptic,} \\ \delta = 0, & \text{gen parabolic,} \\ \delta < 0, & \text{gen hiperbolic.} \end{cases}$

Ecuația tangentei la Γ într-un punct $P_0(x_{0,}y_0)$ este:

$$T: (x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} = 0 . \tag{3.2.16}$$

Normala la Γ în $P_0(x_{0,}y_0)$ are ecuația:

$$N: (x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} = 0 . \tag{3.2.17}$$

Ecuația care determină direcțiile asimptotice este

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 , \tag{3.2.18}$$

iar ecuația unei asimptote este $lf_x + mf_y = 0$. (3.2.19)

Polara lui $P_0(x_{0,}y_0)$ în raport cu Γ are ecuația

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0 . \tag{3.2.20}$$

Ecuația diametrului conjugat cu direcția (*l*,*m*) este: $lf_x + mf_y = 0$ (3.2.21)

Direcțiile axelor unei conice sunt date de:

$$(a_{11} - a_{22})lm + a_{12}(m^2 - l^2) = 0 . \tag{3.2.22}$$

III.2.2. Probleme rezolvate

P1. Se dă conica $\Gamma: 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$.

a) să se determine natura şi genul conicei

b) să se reducă ecuația la forma canonică.

Soluție. a) $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=-4<0$, $\delta=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$. Astfel Γ este o conică de tip hyperbolic; b) Matricea formei pătratice a acestei matrice este $3x^2-4xy$ este $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică a acestei matrice este $\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}=0$ sau $\lambda^2-3\lambda-4=0$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt valorile proprii $\lambda_1=-1$ şi $\lambda_2=4$. Coordonatele (u_1,v_1) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1=-1$, constituie soluția sistemului $4u_1-2v_1=0,-2u_1+v_1=0$ adică $(t,2t),t\in R\setminus\{0\}$. Prin normalizare se obține versorul propriu $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Analog, pentru $\lambda_2=4$ se găseşte $\vec{e}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. Deoarece $\det R=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{vmatrix}=-1$ (rotație şi simetrie), pentur a avea numai rotație se renumerotează $\lambda_1'=\lambda_2$, $\lambda_2'=\lambda_1$, de unde rezultă $\vec{e}_1'=\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=\vec{e}_1$.

Rotația $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ sau $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x'+2y')\end{cases}$ conduce la $4x'^2-y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'+\frac{6}{\sqrt{5}}y'-3=0$. Se completează pătratele în x' şi y' şi se obține $4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(y'-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-2=0$.

Se efectuează o translație a sistemului $x'Oy'$ în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ dată de $x' = X - \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = Y + \frac{3}{\sqrt{5}}$. Se obține ecuația canonică a hiperbolei $\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{2} - 1 = 0$ care are vârfurile pe axa C_1x.

P2. Să se stabilească natura şi genul conicei $\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$. Să se reducă la forma canonică folosind metoda roto-translației.

Soluție. Se calculează invarianții:

$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100$, $\delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Astfel Γ este o conică nedegenerată de gen parabolic. Intrucât $a_{12} \neq 0$, se efectuează o rotație al cărei unghi θ este soluția ecuației $(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta - 2a_{12}\cos 2\theta = 0$. Pentru conica dată, ecuația devine $3tg^2\theta - 8tg\theta - 3 = 0$, cu soluțiile $tg\theta_1 = 3, tg\theta_2 = -\frac{1}{3}$. Pentru $tg\theta_1 = 3$ se obține $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ şi $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$; formulele care dau rotația sistemului xOy sunt $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$. Față de sistemul rotit $x'Oy'$, ecuația conicei devine $y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0$. Se completează pătratele şi se obține $\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{10}}x'$. Se efectuează translația $x' = X, y' = Y + \frac{3}{\sqrt{10}}$ şi se găseşte ecuația canonică a parabolei $Y^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}X + \frac{9}{10}$. Pentru $tg\theta_2 = -\frac{1}{3}$ se obține $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ şi $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Ecuația conicei devine $x'^2 - \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0$ prin rotația $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$. Se completează pătratele şi se efectuează translația $x' = X + \frac{3}{\sqrt{10}}, y' = Y$ şi se găseşte ecuația canonică $X^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}Y + \frac{9}{10}$ a parabolei raportată la sistemul canonic obținut prin roto-translație.

P3. Se dau punctul A(1,-1), dreapta $D: 3x + 3y - 5 = 0$ şi conica $\Gamma: x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0$. Se cer:

a) polara punctului A în raport cu conica Γ;

b) Tangentele în A la conică;

c) Centrul conicei;

d) Axele conicei;

e) Asimptotele conicei;

f) Polul dreptei D în raport cu Γ;

g) Tangentele la conică paralele cu dreapta D;

h) Diametrul conjugat direcției lui D.

Soluție a) Ecuația polarei punctului A în raport cu conica se obține prin dedublare (3.2.20). Se găseşte astfel

$1 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 \cdot y - 1 \cdot x) + 2 \cdot \frac{1}{2}(x+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y-1) - 2 = 0$, adică $x + 3y - 3 = 0$.

b) Intersecția dintre polară şi conică este dată de

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ x^2 + 2xy + x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 8x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + \sqrt{10} \\ x_1 = -4 - \sqrt{10} \end{cases}.$$

Punctele de tangență obținute sunt $B\left(-4 + \sqrt{10}, \frac{7 - \sqrt{10}}{3}\right)$, $C\left(-4 - \sqrt{10}, \frac{7 + \sqrt{10}}{3}\right)$.

Tangentele vor avea, astfel, ecuațiile:

$$AB: \frac{x-1}{\sqrt{10} - 5} = \frac{y+1}{\frac{10 - \sqrt{10}}{3}}; AC: \frac{x-1}{-\sqrt{10} - 5} = \frac{y+1}{\frac{10 + \sqrt{10}}{3}}.$$

c) Coordonatele centrului conicei sunt soluțiile sistemului (3.2.15), $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$. Se obține C(-2,1). d) Dacă (l,m) este o direcție oarecare, $k = \frac{l}{m}$ este panta unei drepte paralele cu direcția considerată. Ecuația (3.2.22) se scrie $(a_{11}-a_{22})k+a_{12}(k^2-1)=0$, adică, $a_{11}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0$. In acest caz avem $k^2+k-1=0$ cu soluția $k_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ şi $k_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Deoarece axele trec prin *C*, rezultă că ecuațiile celor două axe sunt $\begin{cases}(1+\sqrt{5})x+2y+2\sqrt{5}=0\\(1-\sqrt{5})x+2y-2\sqrt{5}=0\end{cases}$. e) Asimptotele conicei sunt date de ecuațiile (3.2.18) şi (3.2.19), $l^2+2lm=0$. Din $l=0$ şi $l+2m=0$ se găsesc direcțiile (0,*m*) şi (-2,1) şi deci $0\cdot(x+y+1)+m(x+2)=0$, respectiv, $-2(x+y+1)+1\cdot(x+2)=0$. Deci asimptotele lui Γ sunt $x+2=0$ şi $x+2y=0$. f) Fie $M_0(x_0,y_0)$ polul dreptei *D*. Prin urmare, polara lui M_0 în raport cu Γ este *D*, adică

$$x(x_0+y_0+1)+y(x_0+2)+x_0+2y_0-2=0.$$

Din condiția ca această dreaptă să fie *D* se obține sistemul $\frac{x_0+y_0+1}{3}=\frac{x_0+2}{3}=\frac{x_0+2y_0-2}{-5}$. Rezultă $M_0\left(-\frac{5}{4},1\right)$. g) Orice dreaptă paralelă cu dreapta *D* are ecuația $x+y+\lambda=0$. Se intersectează cu conica şi se pune condiția ca ecuația găsită să aibă rădăcina dublă. Se obține $\begin{cases}x+y+\lambda=0\\x^2+2xy+2x+4y-2=0\end{cases}$. Din $(\lambda+1)^2-(4\lambda+2)=0$ rezultă $\lambda^2-2\lambda-1=0$ cu $\lambda_1=1+\sqrt{2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}$. Tangentele căutate au ecuațiile $x+y+1\pm\sqrt{2}=0$. h) Panta dreptei *D* este $\frac{m}{l}=-1$. Diametrul conjugat direcției lui *D* are ecuația (3.2.21), adică, $2x+2y+2-(2x+4)=0$, sau, $y-1=0$.

P4. Să se discute natura conicei $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+3=0, \lambda\in R$.

Soluție. Relativ la reducerea la forma canonică se mai pot formula teoreme ce se rezumă în următorul tabel:

	r'	r	$sig\delta$	Ecuația normală	Denumirea conicei
$\Delta \neq 0$ conice nedegenerate	3	2	$\delta > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; $I\Delta < 0$	Elipsă
				$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$; $I\Delta > 0$	$\Gamma = \emptyset$, elipsă vidă (imaginară)
			$\delta < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;	hiperbolă
		1	$\delta = 0$	$y^2 = 2px$	parabolă
$\Delta = 0$ conice degenerate	2	2	$\delta > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\Gamma = \{(0,0)\}$,conică nulă
			$\delta < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Pereche de drepte concurente
		1	$\delta = 0$	$x^2 - a^2 = 0$	Pereche de drepte paralele
				$x^2 + a^2 = 0$	$\Gamma = \emptyset$, perechea vidă de drepte paralele
	1	1	$\delta = 0$	$x^2 = 0$	Dreapta dublă

$\delta = \lambda^2 - 1$, $\Delta = (3\lambda + 1)(\lambda - 1)$, $I = 2\lambda$. Studiind semnul acestor invarianți,

λ	$-\infty$ -1 $-1/3$ 0 1 $+\infty$
Δ	++++++++++++++++++++ 0 --------------------------- 0 ++++++++++++++++++++++++
δ	+++++++++++++ 0 --- 0 ++++++++++++++++++++++++
I	-- 0 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++
$\delta I\Delta$	---------------------------------- 0 +++++++ 0 ---------------- 0 ++++++++++++++++++++++++

rezultă:

- $\lambda \in (-\infty, -1)$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $I < 0$, $I\Delta < 0$, elipse reale
- $\lambda = -1$, $\Delta > 0$, $\delta = 0$, parabolă
- $\lambda \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, $\Delta > 0$, $\delta < 0$, hiperbolă
- $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$, $\delta < 0$, pereche de drepte concurente

- $\lambda \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbolă

- $\lambda = 0$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbolă ($I\Delta = 0$, hiperbolă echilateră)

- $\lambda \in (0,1)$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbole

- $\lambda = 1$, $\Delta = 0$, $\delta = 0$, pereche de drepte paralele

- $\lambda \in (1, \infty)$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $I > 0$, $I\Delta > 0$, elipsă imaginară

P5. Să se determine α astfel încât ecuația $2x^2 - xy - y^2 + \alpha x - 5y + 14 = 0$ să reprezinte două drepte.

Soluție. Din $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 & \alpha/2 \\ -1/2 & -1 & -5/2 \\ \alpha/2 & -5/2 & 14 \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5\alpha}{4} - 44 = 0$ se obțin $\alpha_1 = 11, \alpha_2 = -16$. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{vmatrix} = -9/4 < 0$ conica este de tip hiperbolă. Pentru $\alpha = 11$ se obțin dreptele $x - y + 2 = 0$, $2x + y + 7 = 0$.

III.2.3. Probleme propuse

P1. Să se studieze natura şi genul conicelor şi să se reducă la forma canonică:

a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;

b) $2x^2 - 6xy + 10y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$;

c) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$;

d) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$;

e) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 10y + 5 = 0$;

f) $x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

Soluție. a) conică nedegenerată ($\Delta < 0$)de tip eliptic ($\delta > 0$), $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$; b) conică nedegenerată ($\Delta < 0$)de tip eliptic ($\delta > 0$), $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{6} - 1 = 0$; c) conică nedegenerată ($\Delta < 0$)de tip hiperbolic ($\delta < 0$), $\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - 1 = 0$; d) conică nedegenerată ($\Delta < 0$), de tip hiperbolic ($\delta < 0$), $\frac{X^2}{\frac{1}{9}} - \frac{Y^2}{1} + 1 = 0$; e) conică nedegenerată de tip parabolic ($\delta = 0$), $Y^2 = \frac{22}{25}X$;f) conică nedegenerată de tip parabolic ($\delta = 0$), $Y^2 = 2X$.

P2. Ce conică reprezintă ecuația $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$?

Indicație. $\Delta = 6 \neq 0, \delta = 3 > 0, I = 5, I\Delta = 30 > 0$, elipsă imaginară.

P3. Să se determine coeficienții λ și μ din ecuația $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$, astfel încât această ecuație să reprezinte două drepte paralele.

Indicație. Se impun condițiile $\Delta = 0, \delta = 0$. Se obține $\lambda = 4, \mu = -7$ sau $\lambda = -4, \mu = 7$.

P4. Să se discute natura conicei $\alpha x^2 + 4xy + (\alpha - 3)y^2 + 10x + 3 = 0, \alpha \in R$.

Indicație. $\alpha \in (-\infty, -1)$, elipse reale; $\alpha = -1$, parabolă; $\alpha \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, hiperbole; $\alpha = \frac{3}{2}$, hiperbolă echilateră; $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$, hiperbole; $\alpha = \frac{7}{3}$, perche de drepte concurente; $\alpha \in \left(\frac{7}{3}, 4\right)$, hiperbole; $\alpha = 4$, parabolă; $\alpha \in (4,9)$, elipse reale; $\alpha = 9$, perche de drepte secante imaginare; $\alpha \in (9, \infty)$, elipse imaginare.

P5. Să se studieze conica $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$.

Indicație. Două drepte confundate, $(x - 3y + 2)^2 = 0$.

P6. Pentru ce valori ale lui λ şi μ conicele din familia $\lambda x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + \mu y - 13 = 0$ sunt a) conice cu centru, b) conice nedegenerate fără centru.

Indicaţie. a) $\lambda \neq 4$; $\lambda = 4$ şi $\mu \neq 6$.

P7. Să se găsească centrul şi asimptotele conicei $4xy - 3y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$.

Indicaţie. $C(1,1)$; Din $4lm - 3m^2 = 0$ se găsesc direcţiile $(0,l)$ şi $\left(\frac{3}{4},1\right)$, deci, $y = 1$ şi $4x - 3y - 1 = 0$.

P8. In punctele de intersecţie ale conicei $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ cu dreapta $3x - y + 6 = 0$ se duc tangentele la această conică. Să se găsească punctul de intersecţie al acestor tangente.

Indicaţie. Punctele de intersecţie ale conicei cu dreapta sunt (0,6) şi (-2,0). Tangentele în aceste puncte au ecuaţiile $-5x + 3y = 18$, respectiv, $-2x - 2y = 4$. Se obţine punctul (-3,1) de intersecţie al celor două tangente.

P9. Se dau conicele $\Gamma_1 : 6x^2 - 5xy + y^2 - 22x + 9y - 4 = 0$, $\Gamma_2 : 3x^2 - 2xy - y^2 - 10x - 2y + 12 = 0$ şi se cere:

a) Să se arate că au acelaşi centru

b) Să se determine diametrii lui Γ_1 care sunt conjugaţi direcţiilor asimptotice ale lui Γ_2.

c) Să se determine ecuaţiile axelor conicei Γ_1.

Indicaţie. a) $C(1,-2)$; b) $3l^2 - 2lm - m^2 = 0 \Rightarrow (1,1),(1,-3)$. Diametrii conjugaţi au ecuaţiile $7x - 3y - 13 = 0, 27x - 11y - 49 = 0$, corespunzător direcţiilor (l,m) ale direcţiilor asimptotice ale lui Γ_2. c) Pantele axelor $k = \frac{m}{l}$ sunt rădăcinile ecuaţiei $-k^2 + 2k + 1 = 0$. Se obţine $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Ecuaţiile axelor sunt $y + 2 = (1 \pm \sqrt{2})(x - 1)$.

P10. Să se scrie ecuația conicei care trece prin punctul $A(0,-1)$, are centrul în $B(1,1)$ şi admite dreapta $x+2y+1=0$ drept directoare.

Indicație. $(5x-1)^2+(5y+3)^2=5(x+2y+1)^2$ sau $(4x+1)^2+(4y+6)^2=5(x+2y+1)^2$.

P11. Să se scrie ecuația parabolei care trece prin punctele $A(0,0)$, $B(0,1)$ şi care admite dreapta $x+y+1=0$ drept axă.

Indicație. $(x+y)^2+5x-y=0$.

P12. Să se scrie ecuația elipsei cu semiaxele 2 şi 1 şi care admite dreptele $x+y-1=0$, $x-y+1=0$ drept diametrii conjugați.

Indicație. $(x-y+1)^2+4(x+y-1)^2=8$.

P13. Se dă conica $3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+20=0$. Să se scrie diametrii conjugați care fac între ei un unghi de 45°.

Indicație $2y-5=0$ şi $3x-3y-2=0$; $6x-12y+11=0$ şi $3x-y-7=0$.