



CAPÍTULO 7

Aplicaciones de la integración

«Es como esto —dijo—. Cuando vas a por miel con un globo, lo importante es no dejar que las abejas sepan que vas. Si vas con un globo verde, ellas pensarán que eres parte del árbol y no se fijarán en ti, y si llevas un globo azul pensarán que eres parte del cielo y no se fijarán en ti, y la cuestión —dijo Winnie the Pooh— es: ¿Qué es más probable?».

A. A. Milne (1882-1956)

de *Winnie the Pooh*

Introducción Existen numerosas magnitudes en matemáticas, física, economía, biología, y en prácticamente cualquier ciencia cuantitativa que se pueden representar convenientemente mediante integrales. Además de la medida de áreas planas, el problema que motivó la definición de integral definida, podemos utilizar las integrales para expresar volúmenes de sólidos, longitudes de curvas, áreas de superficies, fuerzas, trabajo, energía, presión, probabilidades, valor monetario de una serie de pagos, y una gran variedad de magnitudes que en un sentido u otro equivalen a áreas encerradas por gráficas.

Además, como vimos previamente, una gran parte de los principios básicos que gobiernan el comportamiento de nuestro mundo se pueden modelar adecuadamente mediante ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial. La integración indefinida es una herramienta clave en la solución de estos problemas.

En este capítulo examinaremos algunas de estas aplicaciones. La mayoría de ellas son independientes entre sí, y por esa razón alguna de las últimas secciones de este capítulo se puede considerar material opcional. El material de las Secciones 7.1-7.3 debe ser considerado fundamental porque estas ideas surgirán de nuevo en el estudio del cálculo multivariable.

7.1 Cálculo de volúmenes mediante rodajas: Sólidos de revolución

En esta sección demostramos cómo se pueden expresar los volúmenes de ciertas regiones tridimensionales (o *sólidos*) en función de integrales definidas y, por tanto, cómo se pueden calcular dichos volúmenes. No intentaremos dar una definición de *volumen* sino que nos basaremos en nuestra intuición y experiencia con objetos sólidos, lo que nos permitirá especificar los volúmenes de ciertos sólidos simples. Por ejemplo, si la base de una caja rectangular es un rectángulo de longitud l y anchura w (y, por tanto, de área $A = lw$), y si la caja tiene una altura h , entonces su volumen es $V = Ah = lwh$. Si l , w y h se miden en *unidades* (por ejemplo, centímetros), entonces el volumen se expresa en *unidades al cubo* (centímetros cúbicos).

Una caja rectangular es un caso especial de sólido denominado **prisma** o **cilindro** (véase la Figura 7.1). Estos sólidos tienen una base plana que ocupa una región R del plano, y el sólido está formado por todos los puntos pertenecientes a segmentos de rectas paralelas con un extremo en R y el otro en una región (necesariamente congruente) en un segundo plano paralelo al plano de la base. Cualquiera de esas regiones se denomina **base** del prisma o cilindro. Si la base está limitada por rectas, el sólido se denomina prisma. Si al menos una parte del límite de la base tiene forma de curva, el sólido se denomina cilindro. La altura del sólido es la distancia perpendicular entre los planos paralelos que contienen a las dos bases. Si esta altura es de h unidades y el área de la base es de A unidades al cuadrado, entonces el volumen del prisma o cilindro es $V = Ah$ unidades al cubo.

Aplicaremos el adjetivo **recto** a un prisma o cilindro si los segmentos de rectas paralelas que lo constituyen son perpendiculares a los planos de la base. Si no es así, el prisma o cilindro se denomina **oblicuo**. Por ejemplo, un cilindro recto cuyas bases sean discos circulares de radio r unidades y cuya altura sea h unidades se denomina **cilindro circular recto**. Su volumen es $V = \pi r^2 h$ unidades al cubo. El carácter de oblicuo no tiene efecto en la expresión del volumen $V = Ah$ de un prisma o cilindro, ya que h siempre se mide en una dirección perpendicular a la base.

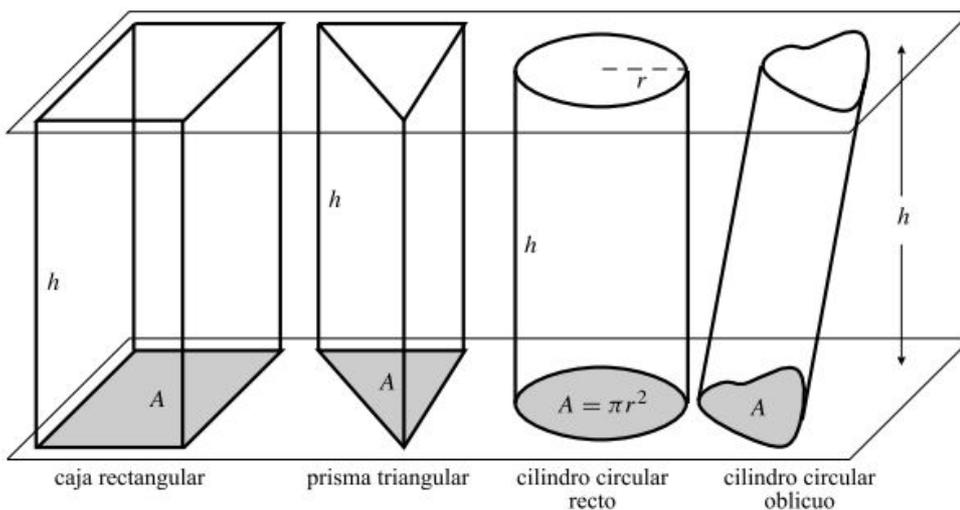


Figura 7.1 El volumen de cualquier prisma o cilindro es el área de la base multiplicada por la altura (medida perpendicularmente a la base): $V = Ah$.

Cálculo de volúmenes mediante rodajas

Conociendo el volumen de un cilindro se puede determinar el volumen de algunos sólidos más generales. Para ello se pueden dividir los sólidos en «rodajas» finas mediante planos paralelos (piénsese en las rebanadas de pan de molde). Cada rodaja es aproximadamente un cilindro de «altura» muy pequeña; dicha altura es el espesor de la rodaja. Véase la Figura 7.2, donde la altura se mide horizontalmente en la dirección del eje x . Si se conoce el área de la sección cruzada

de cada rodaja, se puede determinar su volumen y sumar estos volúmenes para calcular el volumen total del sólido.

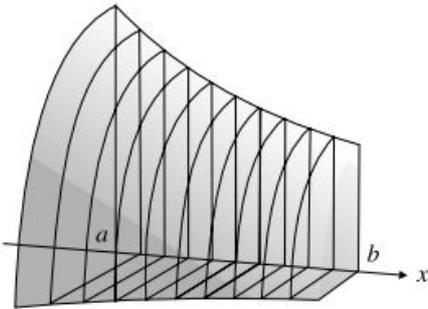


Figura 7.2 División de un sólido en rodajas perpendiculares a un eje.

Para concretar, supongamos que el sólido S está limitado por planos perpendiculares al eje x en las posiciones $x = a$ y $x = b$, y que el área de la sección cruzada de S en el plano perpendicular al eje x en el punto x es una función conocida $A(x)$, para $a \leq x \leq b$. Supondremos que $A(x)$ es continua en $[a, b]$. Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, entonces $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, y los planos perpendiculares al eje x en x_1, x_2, \dots, x_{n-1} dividen al sólido en n rodajas; el espesor de la i -ésima rodaja es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. El volumen ΔV_i de esa rodaja está entre los valores máximo y mínimo de $A(x)\Delta x_i$, para valores de x en $[x_{i-1}, x_i]$ (véase la Figura 7.3); por tanto,

$$\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i$$

para algún c_i en $[x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del Valor Medio. El volumen del sólido se expresa entonces mediante la suma de Riemann

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n A(c_i)\Delta x_i$$

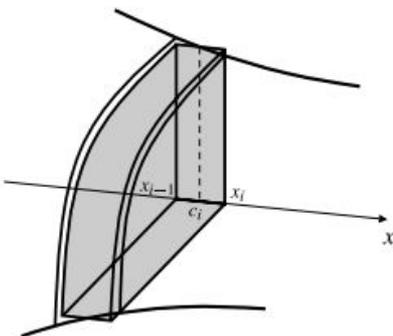


Figura 7.3 Volumen de una rodaja.

Haciendo tender n a infinito, de forma que el máximo Δx_i tienda a 0, se obtiene la integral definida de $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$ como el límite de esta suma de Riemann. Por tanto:

El volumen V de un sólido comprendido entre $x = a$ y $x = b$ con área de sección cruzada $A(x)$ en la posición x es

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Hay otra forma de obtener esta fórmula y otras de naturaleza similar. Consideremos una rodaja del sólido entre los planos perpendiculares al eje x en las posiciones x y $x + \Delta x$. Como $A(x)$ es continua, no cambia mucho en un intervalo corto, de forma que si Δx es pequeño, entonces el

volumen de la rodaja ΔV es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de la base $A(x)$ y altura Δx :

$$\Delta V \approx A(x)\Delta x$$

El error de esta aproximación es pequeño comparado con el tamaño de ΔV . Esto sugiere, correctamente, que el **elemento de volumen**, es decir, el volumen de una rodaja infinitamente fina de espesor dx es $dV = A(x) dx$, y que el volumen del sólido es la «suma» (es decir, la integral) de estos elementos de volumen entre los dos extremos del sólido, $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 7.4):

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV, \quad \text{donde} \quad dV = A(x) dx$$

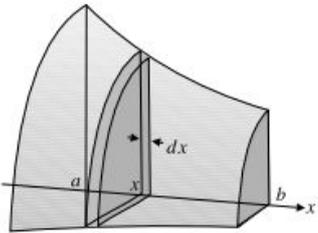


Figura 7.4 Elemento de volumen.

Utilizaremos este enfoque basado en *elementos diferenciales* para modelar otras aplicaciones en las que aparecen integrales, en lugar de utilizar cada vez sumas de Riemann explícitas. Aunque este argumento no constituye una demostración de la fórmula, se recomienda fuertemente pensar en la fórmula de esta manera; el volumen es la integral de los elementos de volumen.

Sólidos de revolución

Muchos sólidos comunes tienen secciones cruzadas circulares en planos perpendiculares a algún eje. Estos sólidos se denominan **sólidos de revolución** porque se pueden generar rotando una región plana alrededor de un eje de dicha región, de forma que barra todo el volumen del sólido. Por ejemplo, una bola sólida se genera rotando un semidisco alrededor de su diámetro (Figura 7.5(a)). De forma similar, un cono circular recto se genera rotando un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (Figura 7.5(b)).

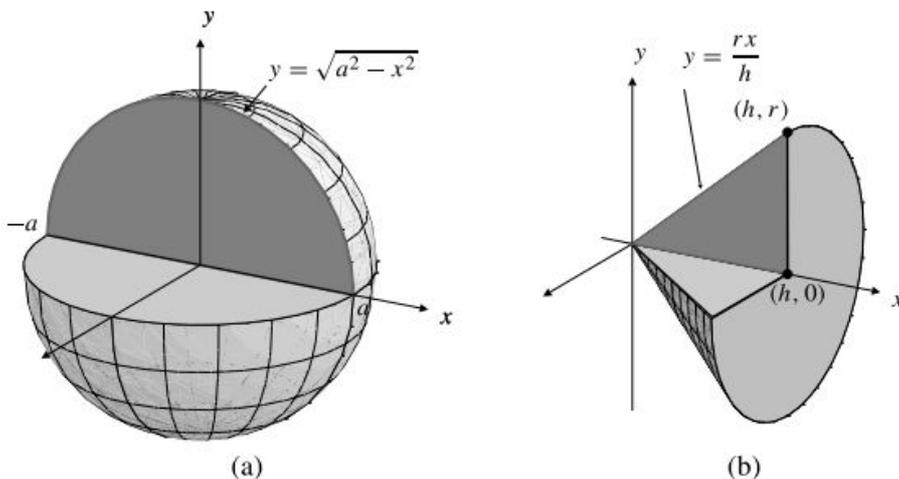


Figura 7.5

- (a) La bola se genera rotando el semidisco $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ (que se muestra en gris oscuro) alrededor del eje x .
- (b) El cono con radio de la base r y altura h se genera rotando el triángulo $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq rx/h$ (gris oscuro) alrededor del eje x .

Si la región R limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ se rota alrededor del eje x , entonces la sección cruzada del sólido generado en el plano perpendicular al eje x en el punto x es un

disco circular de radio $|f(x)|$. El área de esta sección cruzada es $A(x) = \pi(f(x))^2$, por lo que el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Ejemplo 1 (Volumen de una bola) Calcule el volumen de una bola sólida de radio a .

Solución La bola se puede generar rotando el semidisco $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ alrededor del eje x . Véase el corte en la Figura 7.5(a). Por tanto, su volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 (Volumen de un cono circular recto) Calcule el volumen del cono circular recto con radio en su base r y altura h que se genera rotando el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, r) alrededor del eje x .

Solución La ecuación de la recta que va de punto $(0, 0)$ al punto (h, r) es $y = rx/h$. Por tanto, el volumen del cono (véase el corte en la Figura 7.5(b)) es

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ unidades al cubo}$$

Las integrales impropias pueden representar volúmenes de sólidos no limitados. Si la integral impropia converge, el sólido no limitado tiene un volumen finito.

Ejemplo 3 Calcule el volumen del asta infinitamente larga que se genera rotando la región limitada por $y = 1/x$ y $y = 0$ que queda a la derecha de $x = 1$ alrededor del eje x . El asta se muestra en la Figura 7.6.

Solución El volumen del asta es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Big|_1^R = -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) = \pi \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Es interesante advertir que este volumen finito resulta de rotar una región que tiene área infinita: $\int_1^\infty dx/x = \infty$. Se produce una paradoja: se requiere una cantidad infinita de pintura para pintar la región, pero sólo una cantidad finita para rellenar el asta que se obtiene rotando la región (¿Cómo se puede resolver esta paradoja?).

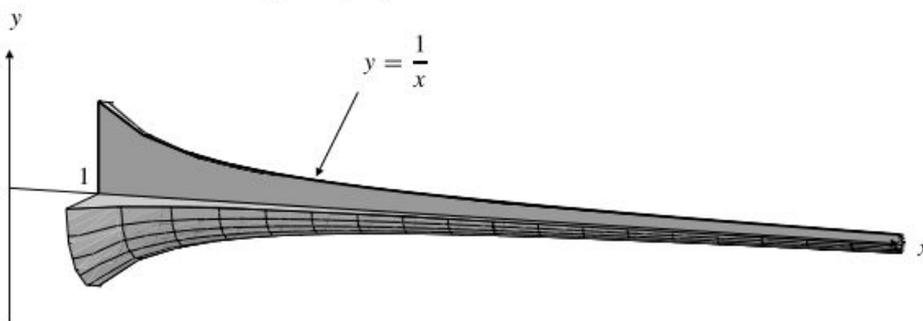


Figura 7.6 Corte de un asta infinitamente larga.

El siguiente ejemplo muestra cómo tratar un problema en que el eje de rotación no es el eje x . Simplemente se rota un elemento de área adecuado alrededor del eje para formar un elemento de volumen.

Ejemplo 4 Un sólido con forma de anillo se genera rotando la región plana finita R limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 1$ alrededor de la recta $y = 2$. Calcule su volumen.

Solución En primer lugar, se resuelve la pareja de ecuaciones $y = x^2$ y $y = 1$ para obtener los puntos de intersección en $x = -1$ y $x = 1$. El sólido está entre estos dos valores de x . El elemento de área de R en la posición x es una cinta vertical de anchura dx , que se extiende hacia arriba desde $y = x^2$ hasta $y = 1$. Cuando R se rota alrededor de la recta $y = 2$, este elemento de área barre un elemento de volumen con forma de arandela de espesor dx y radio $2 - x^2$, con un agujero de radio 1 en su parte central (véase la Figura 7.7). El área de la sección cruzada de este elemento es el área de un círculo de radio $2 - x^2$ menos el área del agujero, un círculo de radio 1. Entonces,

$$dV = (\pi(2 - x^2)^2 - \pi(1)^2) dx = \pi(3 - 4x^2 + x^4) dx$$

Como el sólido se extiende desde $x = -1$ hasta $x = 1$, su volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (3 - 4x^2 + x^4) dx = 2\pi \int_0^1 (3 - 4x^2 + x^4) dx \\ &= 2\pi \left(3x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{56\pi}{15} \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

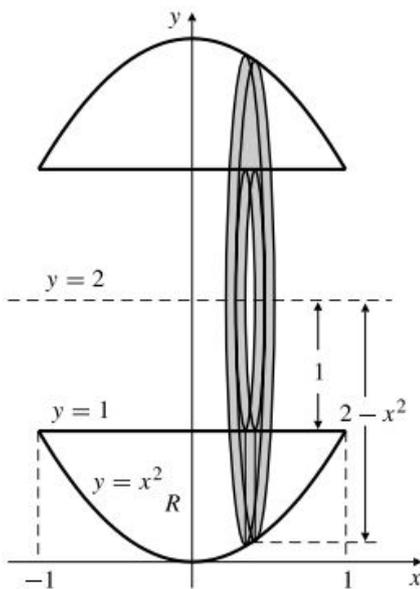


Figura 7.7

Algunas veces se desea rotar una región limitada por curvas con ecuaciones de la forma $x = g(y)$ alrededor del eje y . En este caso, se invierten los papeles de x e y , y se utilizan rodajas horizontales en vez de rodajas verticales.

Ejemplo 5 Calcule el volumen del sólido generado rotando alrededor del eje y la región a la derecha del eje y , y a la izquierda de la curva $x = 2y - y^2$.

Solución Para calcular las intersecciones de $x = 2y - y^2$ y $x = 0$ hacemos

$$2y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{o} \quad y = 2$$

El sólido está entre los planos horizontales en $y = 0$ y $y = 2$. Un elemento de área horizontal en la altura y , con espesor dy , rota alrededor del eje y para generar un elemento de volumen con forma de disco delgado de radio $2y - y^2$ y espesor dy (véase la Figura 7.8). Su volumen es

$$dV = \pi(2y - y^2)^2 dy = \pi(4y^2 - 4y^3 + y^4) dy$$

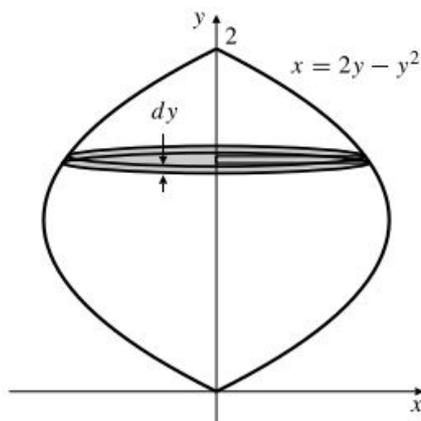


Figura 7.8

Por tanto, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) dy \\ &= \pi \left(\frac{4y^3}{3} - y^4 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 \\ &= \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \frac{16\pi}{15} \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Tubos cilíndricos

Suponga que la región R limitada por $y = f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a \geq 0$ y $x = b > a$ se rota alrededor del eje y para generar un sólido de revolución. Para calcular el volumen del sólido utilizando rodajas (planas), necesitaríamos conocer el área de la sección cruzada $A(y)$ de cada plano a la altura y , y para ello tendríamos que resolver la ecuación $y = f(x)$ para obtener una o más soluciones de la forma $x = g(y)$. En la práctica esto puede ser inconveniente o imposible.

El elemento de área estándar de R en la posición x es una cinta vertical de anchura dx , altura $f(x)$ y área $dA = f(x) dx$. Cuando R se rota alrededor del eje y , esta cinta forma un elemento de volumen con la forma de un **tubo cilíndrico** circular de radio x , altura $f(x)$ y espesor dx (véase la Figura 7.9). Viendo este tubo como una tabla rectangular de dimensiones $2\pi x$, $f(x)$ y dx que gira, su volumen evidentemente es

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$

El volumen del sólido de revolución es la suma (integral) de los volúmenes de esos tubos cuyos radios varían desde a hasta b :

El volumen del sólido obtenido rotando la región plana $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq a < x < b$ alrededor del eje y es

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

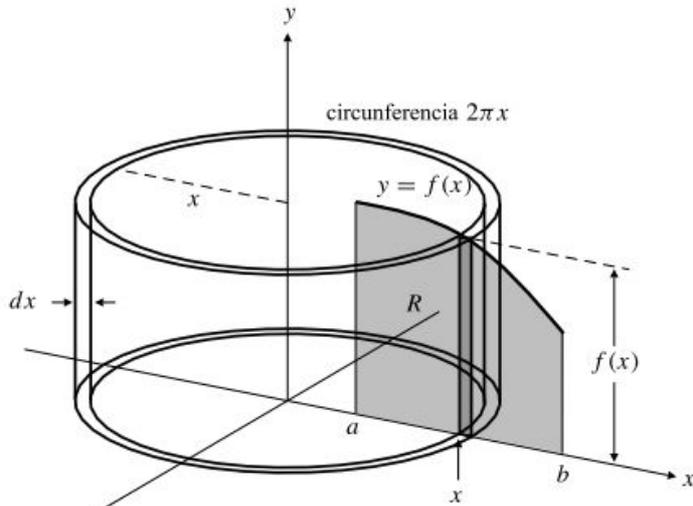


Figura 7.9 Cuando se rota alrededor del eje y , el elemento de área de anchura dx por debajo de $y = f(x)$ en x se genera un tubo cilíndrico de altura $f(x)$, circunferencia $2\pi x$ y volumen $dV = 2\pi x f(x) dx$.

Ejemplo 6 (Volumen de un toro) Un disco de radio a está centrado en el punto $(b, 0)$, siendo $b > a > 0$. El disco se rota alrededor del eje y para generar un **toro** (un sólido con forma de donut), como se ilustra en la Figura 7.10. Calcule su volumen.

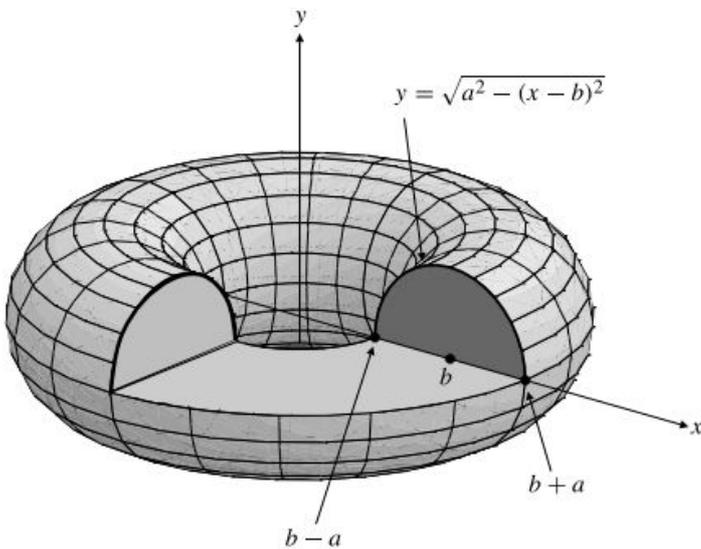


Figura 7.10 Corte de un toro.

Solución La ecuación de la circunferencia con centro en $(b, 0)$ y radio a es $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, y la ecuación del semicírculo superior es

$$f(x) = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$$

Multiplicaremos por 2 el volumen de la mitad superior del toro, que se genera rotando el semidisco $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$, $b - a \leq x \leq b + a$ alrededor del eje y . El volumen del toro completo es

$$\begin{aligned} V &= 2 \times 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x - b)^2} dx && \text{Sea } u = x - b \\ & && du = dx \\ &= 4\pi \int_{-a}^a (u + b) \sqrt{a^2 - u^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi \int_{-a}^a u\sqrt{a^2 - u^2} du + 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - u^2} du \\
 &= 0 + 4\pi b \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b \text{ unidades al cubo}
 \end{aligned}$$

La primera de las dos integrales del final es 0 porque el integrando es impar y el intervalo es simétrico alrededor del 0. La segunda integral es el área de un semicírculo de radio a . Nótese que el volumen del toro es $(\pi a^2)(2\pi b)$, es decir, el área del disco que se rota por la distancia que recorre el centro del disco que se rota alrededor del eje y . Este resultado se generalizará con el Teorema de Pappus en la Sección 7.5.

Ejemplo 7 Calcule el volumen del cuenco que se obtiene mediante la revolución del arco de parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ alrededor del eje y .

Solución El interior del cuenco corresponde a la revolución de la región dada por $x^2 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ alrededor del eje y . La altura del elemento de área en la posición x es $1 - x^2$ y genera un tubo cilíndrico de volumen $dV = 2\pi x(1 - x^2) dx$ (véase la Figura 7.11). Por tanto, el volumen del cuenco es

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ unidades al cubo}
 \end{aligned}$$

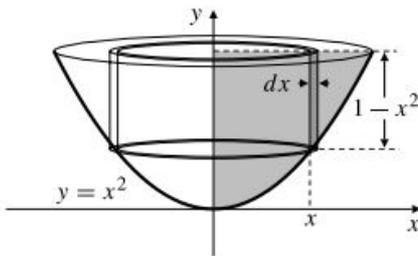
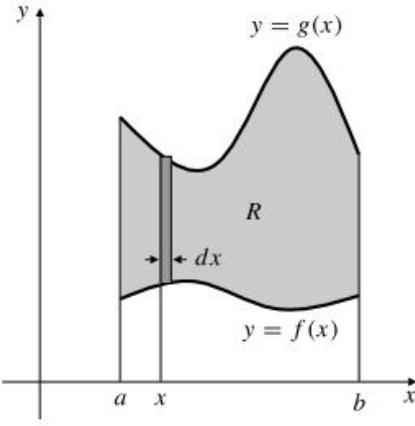
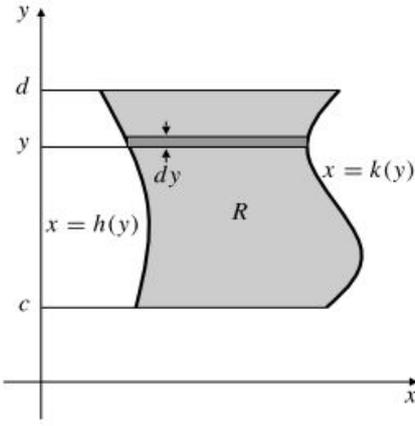


Figura 7.11 Un cuenco parabólico.

Hemos descrito dos métodos para determinar el volumen del sólido de revolución, mediante rodajas y mediante tubos cilíndricos. El método a escoger para un sólido concreto depende en general de la forma de las ecuaciones que definen la región que se rota y del eje de rotación. El elemento de volumen dV siempre se puede determinar rotando un elemento de área adecuado dA alrededor del eje de rotación. Si la región está limitada por rectas verticales y por una o más gráficas de la forma $y = f(x)$, el elemento de área apropiado es una cinta vertical de anchura dx . Si la rotación es alrededor del eje x o de cualquier otra recta horizontal, esta cinta genera un disco o arandela de espesor dx . Si la rotación es alrededor del eje y o de cualquier otra recta vertical, la cinta genera un tubo cilíndrico de espesor dx . Por otra parte, si la región que se rota está limitada por rectas horizontales y por una o más gráficas de la forma $x = g(y)$, es más fácil utilizar una cinta horizontal de anchura dy como elemento de área, y entonces se genera una rodaja si la rotación es alrededor de una recta vertical y un tubo cilíndrico si la rotación es alrededor de una recta horizontal. En el caso de regiones muy simples, cualquier método funcionará fácilmente.

Tabla 1. Volúmenes de sólidos de revolución

Si la región $R \rightarrow$ se rota alrededor de \downarrow		
el eje x	usar discos planos $V = \pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx$	usar cilindros $V = 2\pi \int_c^d y(k(y) - h(y)) dy$
el eje y	usar cilindros $V = 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x)) dx$	usar discos planos $V = \pi \int_c^d ((k(y))^2 - (h(y))^2) dy$

Nuestro ejemplo final presenta una rotación alrededor del eje vertical distinto del eje y .

Ejemplo 8 La región triangular delimitada por $y = x$, $y = 0$ y $x = a > 0$ se rota alrededor de la recta $x = b > a$ (véase la Figura 7.12). Calcule el volumen del sólido generado.

Solución En este ejemplo, el elemento vertical del área en x genera un tubo cilíndrico de radio $b - x$, altura x y espesor dx . Su volumen es $dV = 2\pi(b - x)x dx$, y el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_0^a (b - x)x dx = 2\pi \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \pi \left(a^2b - \frac{2a^3}{3} \right) \text{ unidades al cubo}$$

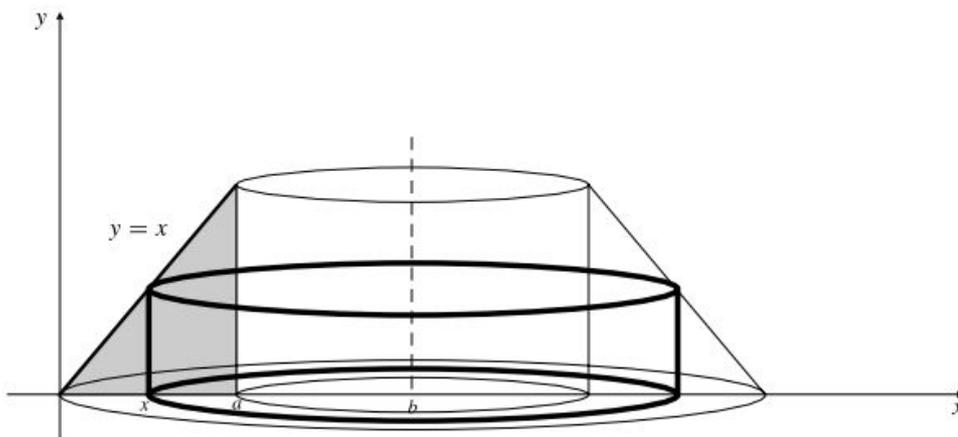


Figura 7.12

Ejercicios 7.1

En los Ejercicios 1-4, calcule el volumen de cada sólido S de dos formas, utilizando el método de las rodajas y el método de los tubos cilíndricos.

1. S se genera rotando alrededor del eje x la región limitada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$.
2. S se genera rotando la región del Ejercicio 1 alrededor del eje y .
3. S se genera rotando alrededor del eje x la región limitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, entre $x = 0$ y $x = 1$.
4. S se genera rotando la región del Ejercicio 3 alrededor del eje y .

Calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen si las regiones planas R que se describen en los Ejercicios 5-10 se rotan alrededor de (a) el eje x y (b) el eje y .

5. R está limitada por $y = x(2 - x)$ e $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 2$.
6. R es la región finita limitada por $y = x$ e $y = x^2$.
7. R es la región finita limitada por $y = x$ y $x = 4y - y^2$.
8. R está limitada por $y = 1 + \sin x$ e $y = 1$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.
9. R está limitada por $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 2$, $x = 0$ y $x = 1$.
10. R es la región finita delimitada por $y = 1/x$ y $3x + 3y = 10$.
11. La región triangular cuyos vértices son $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ se rota alrededor de la recta $x = 2$. Calcule el volumen del sólido que se genera.
12. Calcule el volumen del sólido que se genera rotando la región $0 \leq y \leq 1 - x^2$ alrededor de la recta $y = 1$.
13. ¿Qué porcentaje del volumen de una bola de radio 2 se elimina si se forma un agujero de radio 1 en el centro de la bola?
14. Se perfora un agujero cilíndrico a través del centro de una bola de radio R . Si la longitud del agujero es L , demuestre que el volumen de la parte restante de la bola depende sólo de L y no de R .
15. Se perfora un agujero cilíndrico de radio a a través de un cono circular recto sólido de altura h y radio en la base $b > a$. Si el eje del agujero coincide con el del cono, calcule el volumen de la parte restante del cono.
16. Calcule el volumen del sólido que se obtiene rotando un disco circular alrededor de una de sus tangentes.
17. Un plano divide una bola de radio a en dos trozos. Si el plano pasa a b unidades de distancia del centro de la bola (siendo $b < a$), calcule el volumen del trozo más pequeño.
18. Un cuenco hemisférico de radio 30 cm está parcialmente lleno de agua, de forma que la máxima profundidad del agua es de 20 cm. ¿Qué volumen de agua hay en el cuenco?
19. Calcule el volumen del elipsoide de revolución que se obtiene rotando la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ alrededor del eje x .
20. Vuelva a calcular el volumen del toro del Ejemplo 6 utilizando rodajas perpendiculares al eje y en vez de tubos cilíndricos.
21. La región R limitada por $y = e^{-x}$ e $y = 0$, a la derecha de $x = 0$, se rota (a) alrededor del eje x y (b) alrededor del eje y . Calcule el volumen del sólido de revolución generado en cada caso.
22. La región R limitada por $y = x^{-k}$ e $y = 0$, y a la derecha de $x = 1$, se rota alrededor del eje x . Calcule todos los valores reales de k para los que el sólido generado tiene volumen finito.
23. Repita el Ejercicio 22 con rotación alrededor del eje y .
24. Ediciones anteriores de este libro definían incorrectamente un prisma o cilindro como un sólido en el que las secciones cruzadas paralelas a la base eran congruentes con la base. ¿Se define así un conjunto de sólidos más grande o más pequeño que el correspondiente a la definición dada en esta sección? ¿Qué dice la definición anterior respecto al volumen de un cilindro o prisma con área de la base A y altura h ?
25. Continuando con el Ejercicio 24, considere el sólido S cuya sección cruzada en el plano perpendicular al eje x en x es un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen una longitud de a cm, con un extremo de la hipotenusa en el eje x y con la hipotenusa formando un ángulo x con una dirección fija. ¿Es S un prisma de acuerdo con la definición dada en ediciones anteriores? ¿Es un prisma de acuerdo con la definición de esta edición? Si la altura de S es de b cm, ¿cuál es el volumen de S ?
26. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor del eje x . Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante. 
27. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor del eje y . Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante. 

28. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor de la recta $x = -1$. Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante.

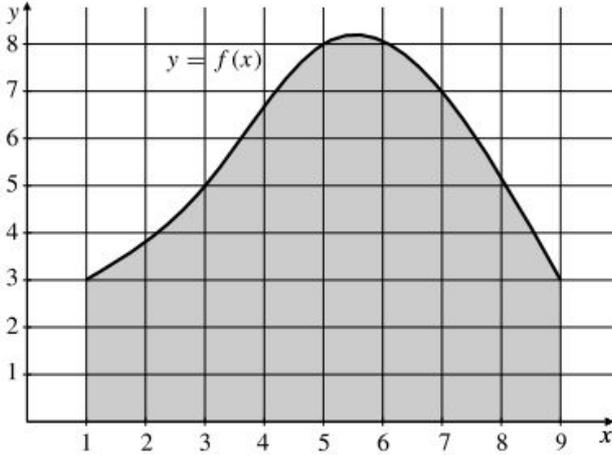


Figura 7.13

Los problemas que siguen son *muy difíciles*. Será necesaria una dosis de ingenio y un trabajo arduo para resolverlos utilizando las técnicas conocidas hasta el momento.

***31.** Una copa de vino con forma de cono circular recto de altura h y semiángulo en el vértice α (véase la Figura 7.14) se llena de vino. Se introduce lentamente una bola en la copa, que desplaza al vino y hace que desborde. Calcule el radio R de la bola que hace que desborde de la copa el máximo volumen de vino.

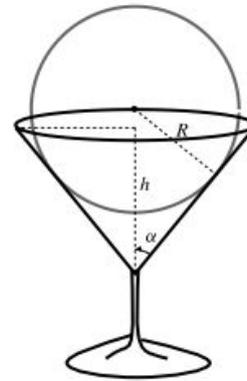


Figura 7.14

- *29.** Calcule el volumen del sólido que se genera rotando alrededor de cada uno de los ejes de coordenadas la región finita del primer cuadrante limitada por los ejes de coordenadas y la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (ambos volúmenes valen lo mismo; ¿por qué?).
- *30.** Sabiendo que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, siendo k una constante independiente de r , exprese el volumen de una bola de radio R como una integral de elementos de volumen correspondientes a los volúmenes de cáscaras esféricas de espesor dr y radios r variables. Calcule k .

***32.** La región plana finita limitada por la curva $xy = 1$ y la recta $2x + 2y = 5$ se rota alrededor de dicha recta para generar un sólido de revolución. Calcule el volumen de dicho sólido.

7.2 Más volúmenes mediante rodajas

El método de las rodajas presentado en la Sección 7.1 se puede utilizar también para determinar volúmenes de sólidos que no sean de revolución. Todo lo que necesitamos saber es el área de la sección cruzada del sólido en cualquier plano perpendicular a algún eje fijo. Si ese eje es el eje x , y el sólido está comprendido entre los planos en $x = a$ y $x = b > a$, y si el área de la sección cruzada en el plano situado en x se puede expresar como una función continua (o incluso continua por tramos) $A(x)$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

En esta sección consideraremos algunos ejemplos que no son sólidos de revolución.

Las **pirámides** y los **conos** son sólidos formados por todos los puntos de segmentos de rectas que unen un punto fijo, denominado **vértice**, con todos los puntos de una región que está en un plano que no contiene al vértice. Esa región se denomina **base** de la pirámide o cono. La Figura 7.15 muestra algunas pirámides y conos. Si la base está limitada por segmentos rectos, el sólido

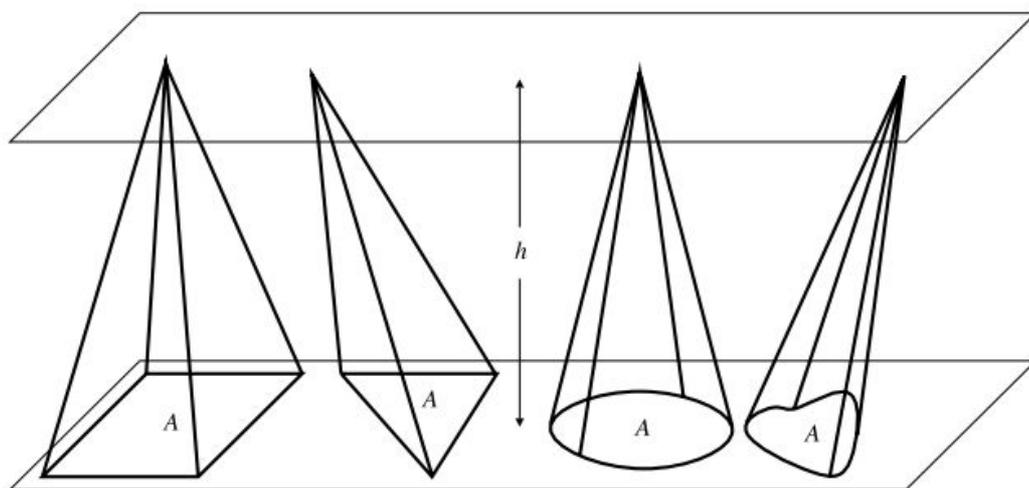


Figura 7.15

Algunas pirámides y conos. El volumen de todas ellas es $V = \frac{1}{3} Ah$, siendo A el área de la base y h la altura medida en dirección perpendicular al plano de la base.

do se denomina pirámide. Si la base tiene algún límite curvo, el sólido se denomina cono. El volumen de todas las pirámides y conos se puede expresar como

$$V = \frac{1}{3} Ah$$

siendo A el área de la región de la base y h la altura desde el vértice al plano de la base, medida en dirección perpendicular a dicho plano. En la Sección 16.4 presentaremos una demostración muy simple de esta fórmula. Por el momento, la verificaremos para el caso de base rectangular.

Ejemplo 1 Verifique la fórmula del volumen de una pirámide con base rectangular de área A y altura h .

Solución Las secciones cruzadas de la pirámide en planos paralelos a la base son rectángulos similares. Si el origen está en el vértice de la pirámide y el eje x es perpendicular a la base, entonces la sección cruzada en la posición x es un rectángulo cuyas dimensiones son x/h multiplicada por las correspondientes dimensiones de la base. Por ejemplo, en la Figura 7.16(a), la longitud LM es x/h multiplicada por la longitud PQ , como se puede ver observando los triángulos similares OLM y OPQ . Por tanto, el área de la sección cruzada rectangular en x es

$$A(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 A$$

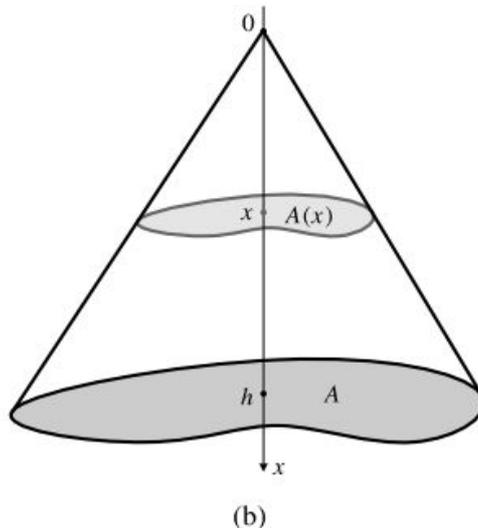
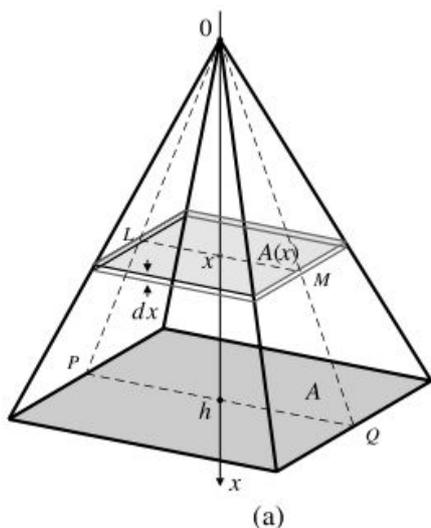


Figura 7.16

(a) Una pirámide rectangular.
(b) Un cono genérico.

Entonces, el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 A \, dx = \frac{A}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} Ah \text{ unidades al cubo}$$

Un argumento similar produce la misma fórmula para el volumen de un cono, es decir, una pirámide cuya base puede tener una forma más general (con curvas), como la que se muestra en la Figura 7.16(b). Aunque no es tan obvio como en el caso de la pirámide, la sección cruzada en x tiene todavía un área que es $(x/h)^2$ multiplicada por el área de la base.

Ejemplo 2 Una tienda de campaña tiene base circular de radio a metros y se sostiene mediante una estructura con una barra superior que se mantiene b metros por encima del diámetro de la base mediante dos soportes verticales en cada extremo del diámetro de la base. El material de la tienda se mantiene tenso de forma que cada sección cruzada perpendicular a la barra superior tiene forma de un triángulo isósceles (véase la Figura 7.17). Calcule el volumen de la tienda.

Solución Sea el eje x el diámetro de la base justo debajo de la barra superior. La longitud de la base de la sección cruzada en la posición x es $2\sqrt{a^2 - x^2}$, por lo que su área es

$$A(x) = \frac{1}{2} (2\sqrt{a^2 - x^2})b = b\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_{-a}^a b\sqrt{a^2 - x^2} \, dx = b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = b \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi}{2} a^2 b \text{ m}^3$$

Nótese que hemos calculado la última integral por simple inspección. Es el área de un semidisco de radio a .

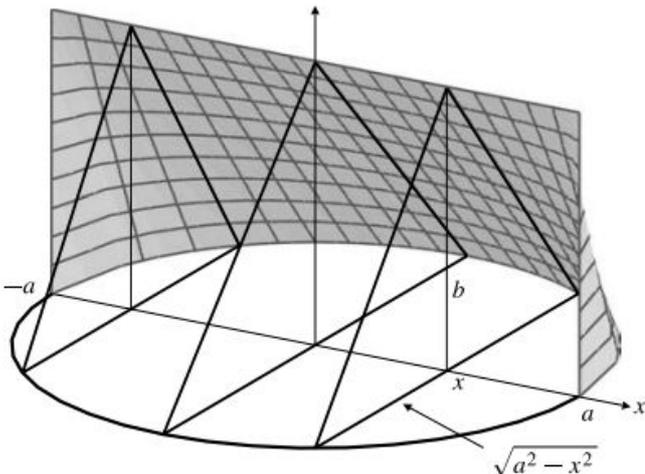


Figura 7.17 La tienda de campaña del Ejemplo 2 donde se ha eliminado la parte frontal para mostrar la forma más claramente.

Ejemplo 3 Dos cilindros circulares, cada uno de radio a , se cruzan de modo que sus ejes forman un ángulo recto. Calcule el volumen de la región en el interior de ambos cilindros.

Solución Representaremos los cilindros en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, donde el plano que contiene a los ejes x e y es horizontal y el eje z es vertical. La Figura 7.18 muestra la octava parte del sólido resultante, es decir, la parte correspondiente a los puntos que tienen sus tres coordenadas positivas. Los ejes de los dos cilindros coinciden con el eje x y el eje y , respectivamente. El cilindro cuyo eje coincide con el eje x corta al plano formado por los ejes y y z formando un círculo de radio a .

De forma similar, el otro cilindro corta al plano formado por los ejes x y z formando un círculo de radio a . Se deduce entonces que si la región que está en el interior de ambos cilindros (y que tiene $x \geq 0$, $y \geq 0$ y

$z \geq 0$) se divide mediante rodajas horizontales, entonces la rodaja que está a una altura z por encima del plano xy es un cuadrado de lado $\sqrt{a^2 - z^2}$, cuya área es $A(z) = a^2 - z^2$. El volumen V de toda la región, que será ocho veces el de la parte que muestra la figura, es

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = 8 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3 \text{ unidades al cubo}$$

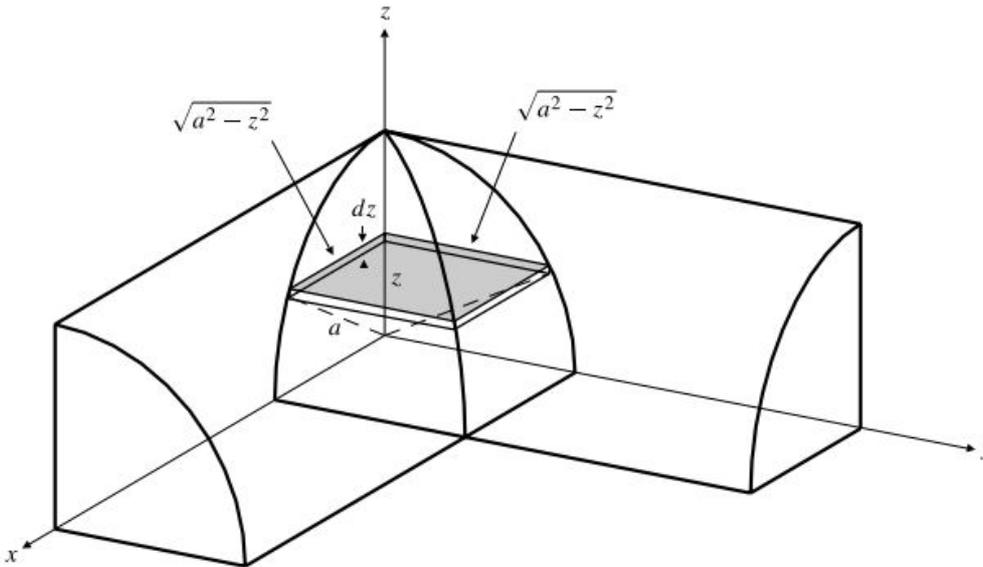


Figura 7.18 Un octavo del sólido está en el interior de dos cilindros perpendiculares que se cortan. La rodaja horizontal que se muestra es cuadrada.

Ejercicios 7.2

- Un sólido tiene 2 m de altura. La sección cruzada de dicho sólido a la altura x por encima de su base tiene un área de $3x$ metros cuadrados. Calcule el volumen del sólido.
- La sección cruzada a la altura z de un sólido de altura total h es un rectángulo de dimensiones z y $h - z$. Calcule el volumen del sólido.
- Calcule el volumen del sólido de altura 1 cuya sección cruzada a la altura z es una elipse de semiejes z y $\sqrt{1 - z^2}$.
- Un sólido se extiende desde $x = 1$ hasta $x = 3$. La sección cruzada de dicho sólido en el plano perpendicular al eje x en la posición x es un cuadrado de lado x . Calcule el volumen del sólido.
- La altura de un sólido es de 6 pies. Su sección cruzada horizontal a la altura de z pies por encima de su base es un rectángulo de longitud $2 + z$ pies y anchura $8 - z$ pies. Calcule el volumen del sólido.
- Un sólido se extiende por el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 4$. Su sección cruzada en la posición x es un triángulo equilátero de lado \sqrt{x} . Calcule el volumen del sólido.
- Calcule el volumen de un sólido cuya altura es de h cm si su sección cruzada horizontal a cualquier altura y por encima de su base es un sector circular de radio a cm y ángulo $2\pi(1 - (y/h))$ radianes.
- Los extremos opuestos de un sólido están en $x = 0$ y $x = 2$. El área de la sección cruzada de dicho sólido en un plano perpendicular al eje x en la posición x es kx^3 unidades al cuadrado. El volumen del sólido es de 4 unidades al cubo. Calcule k .
- Calcule el área de la sección cruzada de un sólido en cualquier plano horizontal situado a altura z desde la base, si el volumen de la parte del sólido que está por debajo de dicho plano es de z^3 unidades al cubo.
- Todas las secciones cruzadas de un sólido en planos horizontales son cuadrados. El volumen de la parte del sólido que está por debajo de cualquier plano a la altura z es de $4z$ unidades al cubo, con $0 < z < h$, la altura del sólido. Calcule la longitud del lado del cuadrado de la sección cruzada a la altura z para $0 < z < h$.
- Un sólido tiene una base circular de radio r . Todas las secciones del sólido perpendiculares a un diámetro particular de la base son cuadrados. Calcule el volumen del sólido.

- 12.** Repita el Ejercicio 11 pero con secciones que sean triángulos equiláteros en vez de cuadrados.
- 13.** La base de un sólido es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 12 cm. Todas las secciones cruzadas perpendiculares a uno de esos catetos tienen la forma de la mitad de un disco circular. Calcule el volumen del sólido.
- 14 (Principio de Cavalieri)** Dos sólidos tienen secciones cruzadas iguales a las mismas alturas medidas desde sus bases. Si los dos sólidos tienen la misma altura, demuestre que ambos tienen el mismo volumen.
- 15.** La parte superior de un cilindro circular de radio r es un plano inclinado un determinado ángulo respecto a la horizontal (véase la Figura 7.19). Si los puntos más bajo y más alto de dicha parte superior tienen alturas respectivas a y b , medidas desde la base, calcule el volumen del cilindro (nótese que existe una forma geométrica sencilla de obtener la respuesta, pero debe intentar hacerlo mediante rodajas. Puede utilizar rodajas rectangulares o con forma de trapecio).

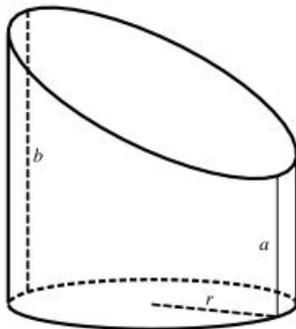


Figura 7.19

- *16 (Volumen de un elipsoide)** Calcule el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sugerencia: No es un sólido de revolución. Como en el Ejemplo 3, el eje z es perpendicular al plano de los ejes x e y . Todos los planos horizontales $z = k$ ($-c \leq k \leq c$) cortan al elipsoide formando una elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 - (k/c)^2$. Por tanto, $dV = dz \times$ el área de esta elipse. El área de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ es πab .

- *17. (Muesca en un tronco)** Se corta una muesca de 45° hasta el centro de un tronco cilíndrico de radio 20 cm, como se muestra en la Figura 7.20. La otra parte plana de la muesca es perpendicular al eje del tronco. ¿Qué volumen de madera se ha eliminado del tronco al cortar la muesca?

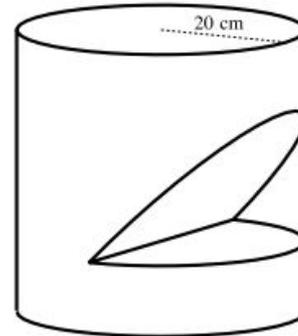


Figura 7.20

- 18. (Una muesca más pequeña)** Repita el Ejercicio 17, pero suponga que la muesca penetra sólo hasta la cuarta parte (10 cm) del tronco.
- 19.** ¿Qué volumen de madera se elimina de una tabla de tres pulgadas de espesor si se realiza un agujero circular de dos pulgadas de radio a través del tablero, y el eje del agujero forma un ángulo de 45° con el tablero?
- *20. (Más cilindros que se cortan)** Los ejes de dos cilindros circulares se cortan formando un ángulo recto. Si los radios de los cilindros son a y b ($a > b > 0$), demuestre que el volumen de la región que está en el interior de ambos cilindros es

$$V = 8 \int_0^b \sqrt{b^2 - z^2} \sqrt{a^2 - z^2} dz$$

Sugerencia: Revise el Ejemplo 3. Intente realizar un diagrama similar, mostrando sólo la octava parte de la región. La integral resultante no es sencilla.

- 21.** Se perfora un agujero circular de 2 cm de radio en el centro de un tronco circular de radio 4 cm, con el eje del agujero perpendicular al eje del tronco. Calcule el volumen de madera eliminado de dicho tronco. *Sugerencia:* Este ejercicio es muy similar al Ejercicio 20. Será necesario utilizar métodos numéricos o una calculadora con funciones de integración numérica para obtener la respuesta.

7.3 Longitud de un arco y área de una superficie

En esta sección vamos a considerar la forma en que se pueden utilizar las integrales para calcular las longitudes de curvas y las áreas de superficies de sólidos de revolución.

Longitud de un arco

Sean A y B dos puntos del plano, y sea $|AB|$ la distancia entre A y B , es decir, la longitud del segmento recto AB .

Dada una curva c que une los dos puntos A y B , deseamos definir lo que se entiende por *longitud* de la curva c desde A hasta B . Supongamos que escogemos una serie de puntos $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ y $P_n = B$ ordenados a lo largo de la curva, como se muestra en la Figura 7.21. La línea poligonal $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ construida uniendo parejas adyacentes de los puntos anteriores con segmentos rectos, forma una *aproximación poligonal* a la curva c , de longitud

$$L_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \dots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

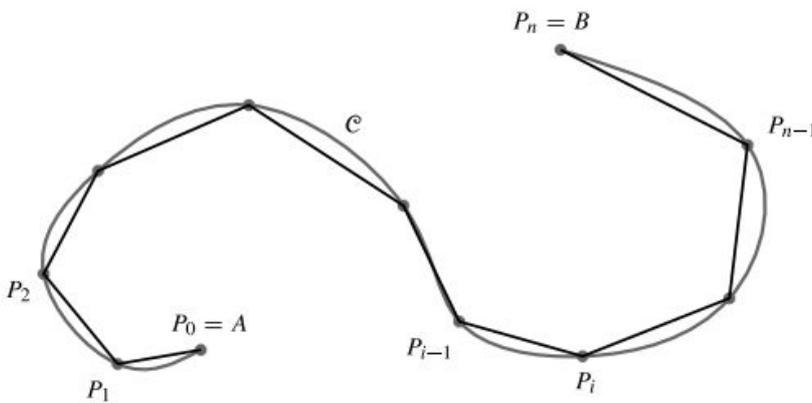


Figura 7.21 Aproximación poligonal a la curva c .

La intuición nos dice que la curva de mínima longitud que une dos puntos es un segmento recto, por lo que la longitud L_n de cualquier aproximación poligonal a la curva c no puede ser superior a la longitud de c . Si aumentamos n añadiendo más vértices a la línea poligonal entre los vértices adyacentes, L_n no puede reducirse, sino sólo incrementarse. Si existe un número finito K tal que $L_n \leq K$ para toda aproximación poligonal c , entonces debe existir un mínimo de dichos números K (por la completitud de los números reales), y denominaremos a ese valor mínimo de K , longitud de arco de c .

DEFINICIÓN 1

La **longitud de arco** de la curva c desde A hasta B es el mínimo número real s tal que las longitudes L_n de todas las aproximaciones poligonales a c cumplen que $L_n \leq s$.

Las curvas cuyas longitudes de arco son finitas se denominan **rectificables**. Su longitud de arco s es el límite de las longitudes L_n de las aproximaciones poligonales cuando $n \rightarrow \infty$ de forma que la longitud máxima del segmento $|P_{i-1}P_i| \rightarrow 0$.

Es posible construir curvas continuas que estén acotadas (es decir que no escapen hacia el infinito por ninguna parte), pero que no sean rectificables. Esas curvas tienen longitud infinita. Para evitar estos ejemplos patológicos, supondremos que nuestras curvas son **suaves**, es decir, que se pueden definir mediante funciones que tienen derivadas continuas.

Longitud de arco de la gráfica de una función

Sea f una función definida en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$, con derivada f' continua en dicho intervalo. Si c es la gráfica de f , es decir, la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, entonces cual-

quier partición del intervalo $[a, b]$ permite construir una aproximación poligonal a c . Para la partición

$$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

sea P_i el punto $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leq i \leq n)$. La longitud de la línea poligonal $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ es

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \Delta x_i \end{aligned}$$

siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número c_i en el intervalo $|x_{i-1}, x_i|$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

y, por tanto, tenemos que $L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i$

Así, L_n es una suma de Riemann para la integral $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Siendo el límite de esas sumas de Riemann cuando $n \rightarrow \infty$ tal que $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$, esa integral corresponde a la longitud de la curva c .

La longitud de arco s de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ se expresa como

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

La fórmula integral anterior puede verse como una forma de expresar longitud de arco s de la curva c como una «suma» de **elementos de longitud de arco**

$$s = \int_{x=a}^{x=b} ds, \quad \text{siendo} \quad ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

La Figura 7.22 nos muestra una forma adecuada para recordar esto y también sugiere cómo se pueden obtener fórmulas similares para elementos de longitud del arco de otros tipos de curvas. El *triángulo diferencial* de la figura sugiere que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

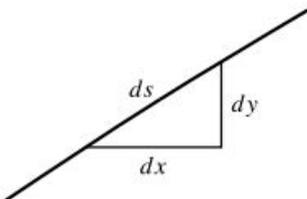


Figura 7.22 Un triángulo diferencial.

Dividiendo esta ecuación por $(dx)^2$ y tomando raíces cuadradas, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx\end{aligned}$$

Un argumento similar permite demostrar que dada una curva especificada por una ecuación de la forma $x = g(y)$, ($c \leq y \leq d$), el elemento de longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Ejemplo 1 Calcule la longitud de la curva $y = x^{2/3}$ desde $x = 1$ hasta $x = 8$.

Solución Como $dy/dx = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ es continua entre $x = 1$ y $x = 8$ y además en ese intervalo $x^{1/3} > 0$, la longitud de la curva se expresa como

$$\begin{aligned}s &= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}} dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}} dx \\ &= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}} dx \quad \text{Sea } u = 9x^{2/3} + 4 \\ &\quad \quad \quad du = 6x^{-1/3} dx \\ &= \frac{1}{18} \int_{13}^{40} u^{1/2} du = \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_{13}^{40} = \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27} \text{ unidades}\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcule la longitud de la curva $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Solución En este caso $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{1}{16x^3}$

$$\begin{aligned}1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(4x^3 - \frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ &= 1 + (4x^3)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ &= (4x^3)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2\end{aligned}$$

La expresión de los últimos paréntesis es positiva para $1 \leq x \leq 2$, por lo que la longitud de la curva es

$$\begin{aligned}s &= \int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right) dx = \left(x^4 - \frac{1}{32x^2}\right) \Big|_1^2 \\ &= 16 - \frac{1}{128} - \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 15 + \frac{3}{128} \text{ unidades}\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores son aparentemente simples; las curvas se han escogido de forma que las integrales de la longitud de arco se pudieran calcular fácilmente. Por ejemplo, el número 32 de la curva del Ejemplo 2 se escogió para que la expresión $1 + (dy/dx)^2$ se transformara en un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada no causara problemas. Debido a la raíz cuadrada en la fórmula, los problemas de longitud de arco producen, para la mayoría de las curvas, integrales que son difíciles o imposibles de resolver sin utilizar técnicas numéricas.

Ejemplo 3 (Fabricación de paneles ondulados) Se van a transformar hojas planas rectangulares de metal de 2 m de anchura en paneles ondulados para techados también de 2 m de anchura doblándolos para que tomen una forma sinusoidal, como se muestra en la Figura 7.23. El periodo del seno de la curva de la sección cruzada es de 20 cm. Su amplitud es de 5 cm, por lo que el espesor del panel es de 10 cm. ¿De qué longitud debe cortarse la hoja plana de metal si los paneles resultantes deben tener 5 m de longitud?

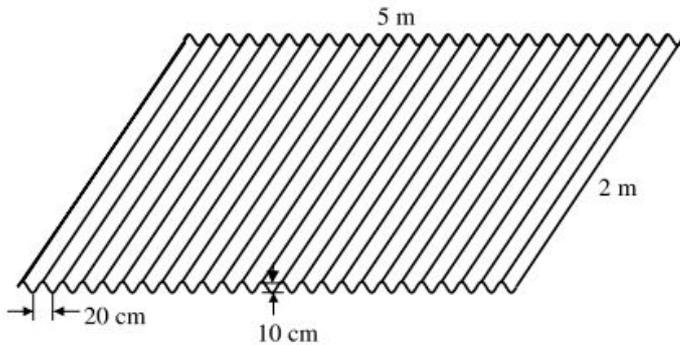


Figura 7.23 Panel ondulado para techados.

Solución La Figura 7.24 muestra un periodo de la sección cruzada sinusoidal. Todas las distancias están en metros; la amplitud de 5 cm se muestra como $1/20$ m, y el periodo de 20 cm se muestra como $2/10$ m. La ecuación de la curva es

$$y = \frac{1}{20} \text{sen}(10\pi x)$$

Nótese que se requieren 25 periodos para producir un panel de 5 m de longitud. La longitud de la hoja plana requerida será 25 veces la longitud de un periodo de la curva sinusoidal:

$$\begin{aligned} s &= 25 \int_0^{2/10} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right)^2} dx && \text{Sea } t = 10\pi x \\ & && dt = 10\pi dx \\ &= \frac{5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \cos^2 t} dt = \frac{10}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

La integral se puede calcular numéricamente empleando las técnicas del capítulo anterior o bien utilizando la función de integral definida de una calculadora científica avanzada. Su valor es de $s \approx 7.32$. Por tanto, la hoja de metal plana debe tener aproximadamente 7.32 m de longitud para producir un panel ondulado final de 5 m de longitud.

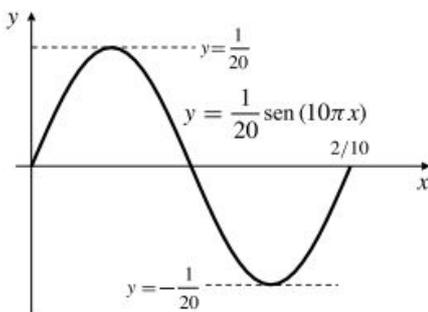


Figura 7.24

Si las integrales necesarias para resolver problemas estándar como los de longitudes de arco de curvas simples no se pueden calcular de forma exacta, se utilizan algunas veces para definir nuevas funciones cuyos valores se tabulan o se incorporan a programas de computador. Un ejemplo de esto es la función integral elíptica completa que aparece el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 (Longitud de circunferencia de una elipse) Calcule la longitud de circunferencia de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo $a \geq b > 0$. Véase la Figura 7.25.

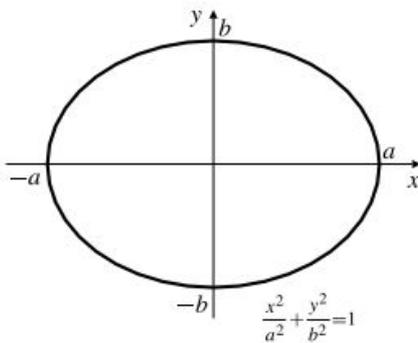


Figura 7.25

Solución La ecuación de la mitad superior de la elipse es $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

con lo que

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

La longitud de la circunferencia de la elipse es cuatro veces la longitud del arco de la parte que está en el primer cuadrante; por tanto,

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^a \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} dx && \text{Sea } x = a \operatorname{sen} t \\ & && dx = a \operatorname{cos} t \, dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)a^2 \operatorname{sen}^2 t}}{a(a \operatorname{cos} t)} a \operatorname{cos} t \, dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t} \, dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 t} \, dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t} \, dt \text{ unidades} \end{aligned}$$

siendo $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$ la *excentricidad* de la elipse (véase la Sección 8.1, donde se presentan las elipses en profundidad). Nótese que $0 \leq \varepsilon < 1$. La función $E(\varepsilon)$, definida como

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

se denomina **integral elíptica completa de segunda clase**. Esta integral no se puede calcular mediante técnicas elementales para un valor general de ε , aunque se pueden aplicar métodos numéricos para obtener valores aproximados para un valor de ε dado. En las recopilaciones de tablas matemáticas se pueden encontrar tablas con los valores de $E(\varepsilon)$ para diversos valores de ε . Como se demuestra anteriormente, la longitud de circunferencia de la elipse es $4aE(\varepsilon)$. Nótese que para $a = b$ tenemos $\varepsilon = 0$, y la fórmula da como resultado la longitud de la circunferencia en el caso circular: $s = 4a(\pi/2) = 2\pi a$ unidades.

Áreas de superficies de revolución

Cuando una curva plana rota (en tres dimensiones) alrededor de una recta en el plano de la curva, forma lo que se denomina una **superficie de revolución**. Por ejemplo, una esfera de radio a se puede generar rotando una semicircunferencia de radio a alrededor de su diámetro. El área de una superficie de revolución se puede obtener integrando un elemento de área dS construido rotando el elemento de arco ds de la curva alrededor de la recta dada. Si el radio de rotación del elemento ds es r , entonces genera, al rotar, una banda circular de anchura ds y longitud (circunferencia) $2\pi r$. El área de esta banda es, por tanto,

$$dS = 2\pi r ds$$

como se muestra en la Figura 7.26. Las áreas de superficies de revolución alrededor de líneas se obtienen integrando dS eligiendo apropiadamente r . He aquí algunos casos especiales importantes.

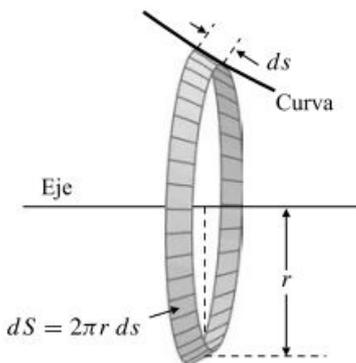


Figura 7.26 Banda circular generada rotando el elemento de longitud de arco ds alrededor del eje.

Área de una superficie de revolución

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y la curva $y = f(x)$ se rota alrededor del eje x , el área de la superficie de revolución que se genera es

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} |y| ds = 2\pi \int_b^a |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si la rotación es alrededor del eje y , el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} |x| ds = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si $g'(y)$ es continua en el intervalo $[c, d]$ y la curva $x = g(y)$ se rota alrededor del eje x , el área de la superficie de revolución que se genera es

$$S = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} |y| ds = 2\pi \int_c^d |y| \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Si la rotación es alrededor del eje y , el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} |x| ds = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Observación Algunas veces los estudiantes se preguntan por qué son realmente necesarias fórmulas tan complicadas. ¿Por qué no utilizar simplemente $dS = 2\pi|y| dx$ para expresar el elemento de área cuando $y = f(x)$ se rota alrededor del eje x en vez del elemento de área más complicado $dS = 2\pi|y| ds$? Después de todo, tanto dx como ds son infinitamente pequeños y, de hecho, hemos utilizado dx para expresar la anchura del elemento de volumen con forma de disco bajo la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x para generar un sólido de revolución. La razón es algo sutil. Para espesores pequeños Δx , el volumen de una rodaja del sólido de revolución sólo es $\pi y^2 \Delta x$ de una forma aproximada, pero el error es *pequeño comparado con el volumen de esta rodaja*. Por otra parte, si se utilizara $2\pi|y|\Delta x$ como una aproximación al área de una banda delgada de la superficie de revolución correspondiente a un intervalo situado en x de anchura Δx , el error *no sería pequeño comparado con el área de esa banda*. Si, por ejemplo, la curva $y = f(x)$ tiene pendiente 1 en x , entonces la anchura de la banda es realmente $\Delta s = \sqrt{2} \Delta x$, por lo que el área de la banda es $\Delta S = 2\pi\sqrt{2}|y|\Delta x$, no sólo $2\pi|y|\Delta x$. Cuando se rota una curva para obtener el área de una superficie de revolución, siempre hay que utilizar el elemento de longitud de arco apropiado a lo largo de dicha curva.

Ejemplo 5 (Área de la superficie de una esfera) Calcule el área de la superficie de una esfera de radio a .

Solución La esfera se puede generar rotando la semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, ($-a \leq x \leq a$), alrededor del eje x (véase la Figura 7.27). Como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

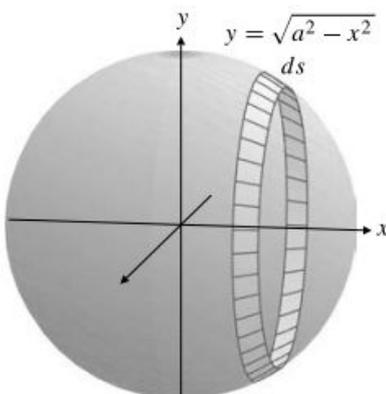


Figura 7.27 Un elemento de área en una esfera.

el área de la esfera se expresa como

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-a}^a y \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} dx \\
 &= 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + x^2} dx \\
 &= 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2} dx = 4\pi ax \Big|_0^a = 4\pi a^2 \text{ unidades al cuadrado}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6 (Área de superficie de una antena parabólica) Calcule el área de superficie de un reflector parabólico cuya forma se obtiene rotando el arco de parábola $y = x^2$, ($0 \leq x \leq 1$), alrededor del eje y , como se muestra en la Figura 7.28.

Solución El elemento de longitud de arco de la parábola $y = x^2$ es $ds = \sqrt{1 + 4x^2} dx$, por lo que el área de la superficie pedida es

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx && \text{Sea } u = 1 + 4x^2 \\
 &&& du = 8x dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2} du \\
 &= \frac{\pi}{6} u^{3/2} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \text{ unidades al cuadrado}
 \end{aligned}$$

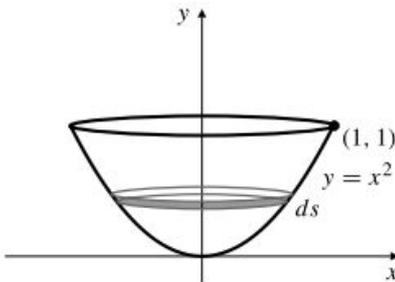


Figura 7.28 Aquí el elemento de área es una banda horizontal.

Ejercicios 7.3

En los Ejercicios 1-14, calcule las longitudes de las curvas dadas.

1. $y = 2x - 1$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$

2. $y = ax + b$ desde $x = A$ hasta $x = B$

3. $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 8$

4. $y^2 = (x - 1)^3$ desde $(1, 0)$ hasta $(2, 1)$

5. $y^3 = x^3$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$

6. $2(x+1)^3 = 3(y-1)^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 1 + \sqrt{2/3})$

7. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$

8. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$

9. $4y = 2 \ln x - x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = e$

10. $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$

11. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($= \cosh x$) desde $x = 0$ hasta $x = a$

12. $y = \ln \cos x$ desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/4$

*13. $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

*14. $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ desde $x = 2$ hasta $x = 4$

- 15.** Calcule la longitud de la circunferencia de la curva cerrada $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Sugerencia:* La curva es simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas (¿por qué?), de forma que una cuarta parte de ella está en el primer cuadrante.

Utilice métodos numéricos (o una calculadora con función de integración) para calcular las longitudes de las curvas de los Ejercicios 16-19 con una precisión de cuatro cifras decimales.

- 16.** $y = x^4$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ 
- 17.** $y = x^{1/3}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$ 
- 18.** La circunferencia de la elipse $3x^2 + y^2 = 3$ 
- 19.** El arco más corto de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ entre $(0, 1)$ y $(1, 1/\sqrt{2})$. 

En los Ejercicios 20-27, calcule las áreas de las superficies que se obtienen rotando las curvas dadas alrededor de las rectas que se indican.

- 20.** $y = x^2$, ($0 \leq x \leq 2$) alrededor del eje y .
- 21.** $y = x^3$, ($0 \leq x \leq 1$) alrededor del eje x .
- 22.** $y = x^{3/2}$, ($0 \leq x \leq 1$) alrededor del eje x .
- 23.** $y = x^{3/2}$, ($0 \leq x \leq 1$) alrededor del eje y .
- 24.** $y = e^x$, ($0 \leq x \leq 1$) alrededor del eje x .
- 25.** $y = \sin x$, ($0 \leq x \leq \pi$) alrededor del eje x .
- 26.** $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, ($1 \leq x \leq 4$) alrededor del eje x .
- 27.** $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, ($1 \leq x \leq 4$) alrededor del eje y .
- 28. (Área de la superficie de un cono)** Calcule el área de la superficie curva de un cono circular recto con radio en la base r y altura h que se obtiene rotando el segmento recto que va desde $(0, 0)$ hasta (r, h) alrededor del eje y .
- 29. (¿Cuánto glaseado hay en un donut?)** Calcule el área de la superficie del toro (donut) que se obtiene

rotando la circunferencia $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje y .

- 30. (Área de un esferoide prolado)** Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ alrededor del eje x .
- 31. (Área de un esferoide oblado)** Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ alrededor del eje y .
- *32.** La elipse del Ejemplo 4 se rota alrededor de la recta $y = c > b$ para generar un donut con sección cruzada elíptica. Expresé el área de la superficie de este donut en función de la integral elíptica completa $E(e)$ presentada en ese ejemplo.
- *33.** Expresé la fórmula integral obtenida para la longitud de la hoja de metal del Ejemplo 3 en función de la integral elíptica completa $E(e)$ presentada en el Ejemplo 4.
- 34. (Una propiedad interesante de las esferas)** Si dos planos paralelos cortan a una esfera, demuestre que el área de la superficie de la parte de la esfera que está entre los dos planos depende sólo del radio de la esfera y de la distancia entre los planos, y no de su posición.
- 35.** ¿Para qué valores reales de k la superficie generada rotando la curva $y = x^k$, ($0 < x \leq 1$), alrededor del eje y tiene una superficie de área finita?
- *36.** La curva $y = \ln x$, ($0 < x \leq 1$), se rota alrededor del eje y . Calcule el área de la superficie en forma de asta que se genera.
- 37.** Un recipiente hueco con forma de asta infinitamente larga se genera rotando la curva $y = 1/x$, ($1 \leq x < \infty$), alrededor del eje x .
- Calcule el volumen del recipiente.
 - Demuestre que el área de la superficie del recipiente es infinita.
 - ¿Cómo se explica la «paradoja» de que el contenedor se puede llenar con un volumen finito de pintura pero requiere una cantidad infinita de pintura para cubrir su superficie?

7.4 Masas, momentos y centros de masas

Muchas magnitudes de interés en física, mecánica, ecología, finanzas y otras disciplinas se pueden expresar en función de densidades sobre regiones del espacio, del plano o incluso de la recta real. Para determinar el valor total de la magnitud hay que sumar (integrar) las contribuciones de los diversos lugares donde dicha magnitud está distribuida.

Masa y densidad

Si un objeto sólido está hecho de un material homogéneo, diferentes partes del mismo que tengan idéntico volumen tendrán también la misma masa. Expresaremos esta homogeneidad di-

ciendo que el objeto tiene densidad constante, siendo esa densidad su masa dividida por su volumen, bien para todo el objeto o bien para cualquier parte del mismo. Así, por ejemplo, un ladrillo rectangular de dimensiones 20 cm, 10 cm y 8 cm tendría un volumen $V = 20 \times 10 \times 8 = 1600 \text{ cm}^3$ y si estuviera hecho de un material con densidad constante $\delta = 3 \text{ g/cm}^3$, su masa sería $m = \delta V = 3 \times 1600 = 4800 \text{ g}$ (utilizaremos la letra griega delta minúscula (δ) para representar la densidad).

Si la densidad del material que forma un objeto sólido no es constante sino que varía de un punto a otro del objeto, no existe una relación tan simple entre masa y volumen. Si la densidad $\delta = \delta(P)$ es una *función continua* de la posición P , se puede subdividir el sólido en muchos pequeños elementos de volumen y, considerando que δ es aproximadamente constante en cada uno de sus elementos, determinar las masas de todos esos elementos y sumarlas para calcular la masa del sólido. La masa Δm de un elemento de volumen ΔV que contiene al punto P debe cumplir

$$\Delta m \approx \delta(P)\Delta V$$

de forma que la masa m del sólido se puede aproximar así:

$$m = \Sigma \Delta m \approx \Sigma \delta(P)\Delta V$$

Por «densidad en un punto P » de un objeto sólido queremos indicar el límite $\delta(P)$ del cociente masa/volumen para una parte del sólido que está en una pequeña región que contiene a P , por ejemplo, bolas centradas en P , cuando las dimensiones de las regiones tienden a cero. Así definida, la densidad δ es continua en P si se puede asegurar que $|\delta(Q) - \delta(P)|$ se hace tan pequeña como queramos cuando Q se acerca suficientemente a P .

Estas aproximaciones se hacen exactas al pasar al límite de las masas diferenciales y los elementos de volumen, $dm = \delta(P) dV$, de forma que podemos pensar en calcular las masas utilizando integrales, es decir, como límite de esas sumas:

$$m = \int dm = \int \delta(P) dV$$

Ejemplo 1 La densidad de un cilindro vertical sólido de altura H cm y área en la base $A \text{ cm}^2$ es $\delta = \delta_0(1 + h) \text{ g/cm}^3$, siendo h la altura en centímetros desde la base y δ_0 una constante. Calcule la masa del cilindro.

Solución Véase la Figura 7.29(a). Una rodaja del sólido a una altura h por encima de su base y con espesor dh tiene la forma de un disco circular de volumen $dV = A dh$. Como la densidad es constante en todo ese disco, la masa del elemento de volumen es

$$dm = \delta dV = \delta_0(1 + h)A dh$$

Por tanto, la masa del cilindro completo es

$$m = \int_0^H \delta_0 A(1 + h) dh = \delta_0 A \left(H + \frac{H^2}{2} \right) \text{ g}$$

Ejemplo 2 (Uso de capas esféricas) La densidad de cierto planeta esférico de radio R m varía con la distancia r a su centro de acuerdo con la fórmula

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + r^2} \text{ kg/m}^3$$

Calcule la masa del planeta.

Solución Recuérdese que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$. El planeta puede considerarse compuesto por capas esféricas concéntricas cuyo radio varía entre 0 y R . El volumen de una capa de radio r y espesor dr (véase la Figura 7.29(b)) es igual al área de superficie multiplicada por su espesor, y su masa es su volumen multiplicado por su densidad:

$$dV = 4\pi r^2 dr, \quad dm = \delta dV = 4\pi\delta_0 \frac{r^2}{1+r^2} dr$$

Sumando las masas de las capas se obtiene la masa de todo el planeta:

$$\begin{aligned} m &= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{r^2}{1+r^2} dr = 4\pi\delta_0 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr \\ &= 4\pi\delta_0 (r - \tan^{-1} r) \Big|_0^R = 4\pi\delta_0 (R - \tan^{-1} R) \text{ kg} \end{aligned}$$

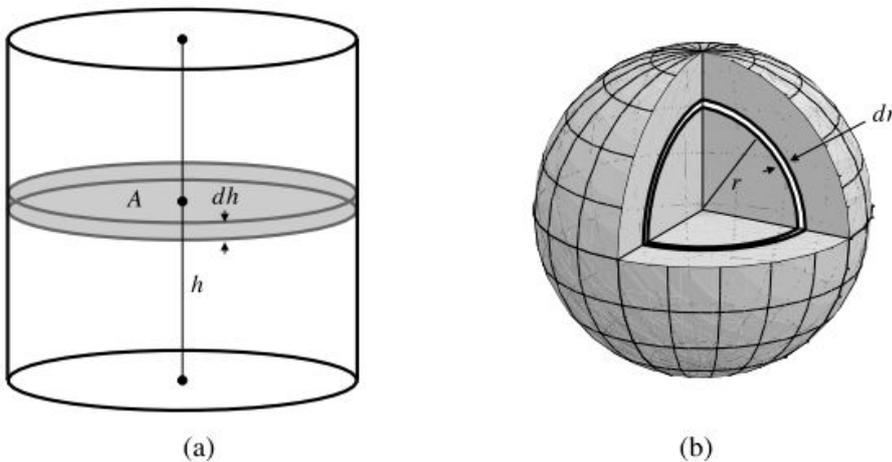


Figura 7.29

- (a) Un cilindro sólido cuya densidad varía con la altura.
 (b) Corte de un planeta cuya densidad depende de la distancia a su centro.

Se pueden aplicar técnicas similares para obtener las masas de objetos unidimensionales y bidimensionales, tales como cables y discos finos, que tengan densidades variables de la forma masa/unidad de longitud (**densidad lineal**) y masa/unidad de área (**densidad de área**).

Ejemplo 3 Un cable de composición variable se estira siguiendo el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$ cm. Calcule la masa del cable si la densidad lineal en la posición x es $\delta(x) = kx$ g/cm, siendo k una constante positiva.

Solución La masa de un elemento de longitud dx del cable situado en la posición x se expresa como $dm = \delta(x) dx = kx dx$. Por tanto, la masa del cable es

$$m = \int_0^L kx dx = \left(\frac{kx^2}{2}\right) \Big|_0^L = \frac{kL^2}{2} \text{ g}$$

Ejemplo 4 Calcule la masa de un disco de radio a cm cuyo centro está en el origen del plano xy si la densidad de área en la posición (x, y) es $\delta = k(2a + x)$ g/cm², siendo k una constante.

Solución La densidad depende sólo de la coordenada horizontal x , por lo que es constante a lo largo de líneas verticales en el disco. Esto sugiere que se deben utilizar bandas verticales finas como elementos de área. Una banda vertical de espesor dx situada en x tiene un área de $dA = 2\sqrt{a^2 - x^2} dx$ (véase la Figura 7.30). Por tanto, su masa es

$$dm = \delta dA = 2k(2a + x)\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Y la masa del disco es

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{x=-a}^{x=a} dm = 2k \int_{-a}^a (2a + x)\sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= 4ak \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + 2k \int_{-a}^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= 4ak \frac{\pi a^2}{2} + 0 = 2\pi k a^3 g
 \end{aligned}$$

Hemos utilizado el área de un semicírculo para calcular la primera integral. La segunda integral es cero porque el integrando es impar y la integral es simétrica respecto a $x = 0$.

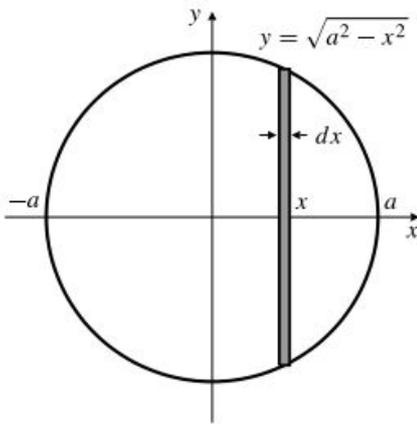


Figura 7.30

Las distribuciones de masa a lo largo de estructuras unidimensionales (líneas o curvas) conducen necesariamente a integrales de funciones de una variable, pero las distribuciones de masa sobre una superficie o en el espacio pueden conducir a integrales de funciones de más de una variable. Esas integrales se estudian en cálculo multivariable (véase, por ejemplo, la Sección 14.7). En los ejemplos anteriores, las densidades dadas son funciones de sólo una variable, por lo que estos problemas, aunque de naturaleza multidimensional, conducen a integrales de funciones de sólo una variable, que se pueden resolver con los métodos conocidos hasta ahora.

Momentos y centros de masas

El **momento** con respecto al punto $x = x_0$ de una masa m situada en la posición x sobre el eje x es el producto $m(x - x_0)$ de la masa y su distancia (con signo) a x_0 . Si el eje x es un brazo horizontal con una bisagra en x_0 , el momento con respecto a x_0 mide la tendencia del peso de la masa m a hacer que el brazo rote. Si varias masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ están situadas en los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ respectivamente, entonces el momento total del sistema de masas respecto al punto $x = x_0$ es la suma de los momentos individuales (véase la Figura 7.31):

$$M_{x=x_0} = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_0)m_2 + \dots + (x_n - x_0)m_n = \sum_{j=1}^n (x_j - x_0)m_j$$



Figura 7.31 Un sistema de masas discretas sobre una recta.

El **centro de masas** del sistema de masas es el punto \bar{x} con respecto al que el momento total del sistema es cero. Entonces,

$$0 = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})m_j = \sum_{j=1}^n x_j m_j - \bar{x} \sum_{j=1}^n m_j$$

Así, el centro de masas del sistema se expresa como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j m_j}{\sum_{j=1}^n m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

siendo m la masa total del sistema y $M_{x=0}$ el momento total respecto a $x=0$. Si pensamos en el eje x como un cable sin peso que da soporte a las masas, entonces \bar{x} es el punto de donde se podría colgar el cable quedando en perfecto equilibrio, sin inclinarse a ningún lado. Incluso si el eje representa un soporte sin peso $x = \bar{x}$, como un balancín, quedará en equilibrio después de añadir las masas, suponiendo que estaba previamente el equilibrio. A muchos efectos, un sistema de masas se comporta como si su masa total estuviera concentrada en su centro de masas.

Supongamos ahora que una distribución unidimensional de masa con densidad lineal variable de forma continua $\delta(x)$ se sitúa en el intervalo $[a, b]$ del eje x . Un elemento de longitud dx situado en la posición x contiene una masa $dm = \delta(x) dx$, por lo que su momento es $dM_{x=0} = x dm = x\delta(x) dx$ con respecto a $x=0$. El momento total con respecto a $x=0$ es la *suma* (integral) de esos elementos de momento:

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x) dx$$

Como la masa total es

$$m = \int_a^b \delta(x) dx$$

se obtiene la siguiente fórmula para el centro de masas.

El centro de masas de una distribución de masas con densidad lineal $\delta(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}$$

Ejemplo 5 ¿De qué punto se puede suspender el cable del Ejemplo 3 para que esté en equilibrio?

Solución En el Ejemplo 3 calculamos que la masa del cable era $kL^2/2$ g. Su momento respecto a $x=0$ es

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \int_0^L x\delta(x) dx \\ &= \int_0^L kx^2 dx = \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Big|_0^L = \frac{kL^3}{3} \text{ g} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

Nótese que las unidades apropiadas del momento son unidades de masa por unidades de distancia, en este caso de gramos-centímetros. El centro de masas del cable es

$$\bar{x} = \frac{kL^3/3}{kL^2/2} = \frac{2L}{3}$$

el cable quedará en equilibrio si se cuelga de la posición $x = 2L/3$ cm.

Ejemplos en dos y tres dimensiones

El sistema de masas considerado en el Ejemplo 5 es unidimensional y dispuesto en línea recta. Si la masa se distribuye en un plano o en el espacio, se aplican consideraciones similares. Dado un sistema de masas m_1 en (x_1, y_1) , m_2 en (x_2, y_2) , ..., m_n en (x_n, y_n) , su **momento respecto a $x = 0$** es

$$M_{x=0} = x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n = \sum_{j=1}^n x_j m_j$$

y su **momento respecto a $y = 0$** es

$$M_{y=0} = y_1m_1 + y_2m_2 + \dots + y_nm_n = \sum_{j=1}^n y_j m_j$$

El **centro de masas** es el punto (\bar{x}, \bar{y}) , siendo

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j m_j}{\sum_{j=1}^n m_j} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j m_j}{\sum_{j=1}^n m_j}$$

En el caso de distribuciones continuas de masa, las sumas se convierten en las integrales apropiadas.

Ejemplo 6 Calcule el centro de masas de una placa rectangular que ocupa la región $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, si la densidad de área del material de la placa en la posición (x, y) es ky .

Solución Como la densidad es independiente de x y el rectángulo es simétrico respecto a la recta $x = a/2$, la coordenada x del centro de masas debe ser $\bar{x} = a/2$. La masa de una banda horizontal fina de anchura dy situada a la altura y (véase la Figura 7.32) es $dm = aky \, dy$. El momento de esta banda respecto a $y = 0$ es $dM_{y=0} = ydm = kay^2 \, dy$. Por tanto, la masa y el momento respecto a $y = 0$ de la placa valen

$$m = ka \int_0^b y \, dy = \frac{kab^2}{2}$$

$$M_{y=0} = ka \int_0^b y^2 \, dy = \frac{kab^3}{3}$$

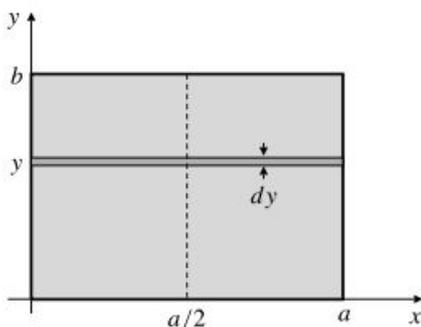


Figura 7.32

Por tanto, $\bar{y} = M_{y=0}/m = 2b/3$ y el centro de masas de la placa es $(a/2, 2b/3)$. La placa quedará en equilibrio si se cuelga de este punto.

Para el caso de distribuciones de masa en el espacio tridimensional se definen, análogamente, los momentos $M_{x=0}$, $M_{y=0}$ y $M_{z=0}$ del sistema de masas respecto a los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente. El centro de masas es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, siendo

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}$$

m es la masa total $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. En el caso de distribuciones continuas de masa, las sumas se convierten de nuevo en integrales.

Ejemplo 7 Calcule el centro de masas de una semiesfera sólida de radio R pies si su densidad a la altura de z pies por encima del plano de su base es de $\delta_0 z$ lb/pie³.

Solución El sólido es simétrico respecto al eje vertical (que denominaremos eje z), y la densidad es constante en planos perpendiculares a dicho eje. Por tanto, el centro de masas debe estar en algún lugar de ese eje. Una rodaja del sólido situada a una altura z por encima de su base y de espesor dz tiene la forma de un disco de radio $\sqrt{R^2 - z^2}$ (véase la Figura 7.33). Su volumen es $dV = \pi(R^2 - z^2) dz$ y su masa es $dm = \delta_0 z dV = \delta_0 \pi(R^2 z - z^3) dz$. Su momento respecto al plano de la base $z = 0$ es $dM_{z=0} = z dm = \delta_0 \pi(R^2 z^2 - z^4) dz$. La masa del sólido es

$$m = \delta_0 \pi \int_0^R (R^2 z - z^3) dz = \delta_0 \pi \left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} \delta_0 R^4 \text{ lb}$$

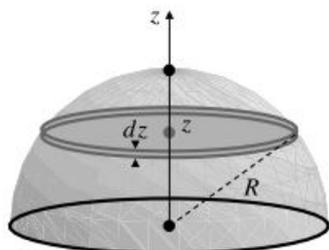


Figura 7.33 Elemento de masa de una semiesfera sólida cuya densidad depende de la altura.

El momento de las semiesfera con respecto al plano $z = 0$ es

$$M_{z=0} = \delta_0 \pi \int_0^R (R^2 z^2 - z^4) dz = \delta_0 \pi \left(\frac{R^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^R = \frac{2\pi}{15} \delta_0 R^5 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Por tanto, el centro de masas está en el eje de simetría de la semiesfera a la altura $\bar{z} = M_{z=0}/m = 8R/15$ ft por encima de su base. ■

Ejemplo 8 Calcule el centro de masas de una placa que ocupa la región $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ si su densidad en el punto (x, y) es $\delta(x)$.

Solución La Figura 7.34 muestra el elemento de área adecuado. Su área es $f(x) dx$ y su masa

$$dm = \delta(x) f(x) dx$$

Su momento respecto a $x = 0$ es

$$dM_{x=0} = x \delta(x) f(x) dx$$

Como la densidad depende sólo de x , el elemento de masa dm tiene densidad constante, por lo que la coordenada y de su centro de masas está en su punto medio: $\bar{y}_{dm} = \frac{1}{2} f(x)$. Por tanto, el momento del elemento de masa dm respecto a $y = 0$ es

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm} dm = \frac{1}{2} \delta(x) (f(x))^2 dx$$

Las coordenadas del centro de masas de la placa son $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$ e $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$, siendo

$$m = \int_a^b \delta(x) f(x) dx$$

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x) f(x) dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \delta(x) (f(x))^2 dx$$

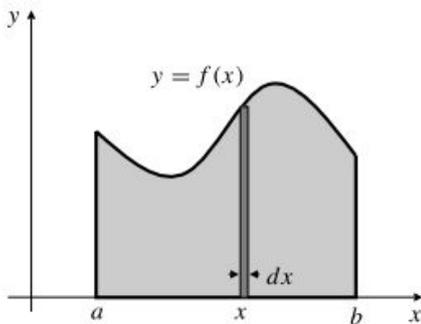


Figura 7.34 Elemento de masa de una placa.

Observación Se pueden obtener fórmulas similares si la densidad depende de y en vez de depender de x , suponiendo que la región admite un elemento de área horizontal adecuado (por ejemplo, si la región se especifica como $c \leq y \leq d$, $0 \leq x \leq g(y)$). El cálculo del centro de masas de placas que ocupan regiones especificadas por funciones de x , pero en las que la densidad depende de y , requieren en general el uso de «integrales dobles». Por tanto, esos problemas se estudiarán en cálculo multivariable (véase la Sección 14.7).

Ejercicios 7.4

Calcule las masas y los centros de masas de los sistemas que se presentan en los Ejercicios 1-16. Tenga en cuenta las simetrías.

1. Un cable recto de longitud L cm, en el que la densidad a la distancia de s cm desde uno de sus extremos es $\delta(s) = \text{sen } \pi s/L$ g/cm.
2. Un cable recto sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$, si su densidad es constante δ_0 , pero el radio de su sección cruzada varía de forma que su valor en x es $a + bx$.
3. Una placa con forma de un cuarto de círculo de radio a , densidad de área constante δ_0 y que ocupa la región $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
4. Una placa con forma de un cuarto de círculo de radio a que ocupa la región $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ y con densidad de área $\delta(x) = \delta_0 x$.
5. Una placa que ocupa la región $0 \leq y \leq 4 - x^2$, si su densidad de área en (x, y) es ky .
6. Una placa con forma de triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 m y 3 m, si la densidad de área en cualquier punto P de la placa es $5h$ kg/m², siendo h la distancia del punto P al cateto más corto.
7. Una placa cuadrada cuyo lado mide a cm, si su densidad de área en el punto P es de kx g/cm², siendo x la distancia desde el punto P a un lado del cuadrado.
8. La placa del Ejercicio 7, pero ahora con densidad de área kr g/cm², siendo r la distancia (en centímetros) desde el punto P a una de las diagonales del cuadrado.
9. Una placa de densidad $\delta(x)$ que ocupa la región $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$.
10. Un ladrillo rectangular de dimensiones 20 cm, 10 cm y 5 cm, si la densidad en el punto P es de kx g/cm³, siendo x la distancia desde P a una de sus caras de dimensión 10×5 .
11. Una bola sólida de radio R m, si la densidad en el punto P es de z g/m³, siendo z la distancia desde el

punto P a un plano que está a distancia $2R$ m del centro de la bola.

- 12.** Un cono circular recto con radio en la base de a cm y altura de b cm, si la densidad en el punto P es de kz g/cm³, siendo z la distancia desde el punto P a la base del cono.
- *13.** El sólido formado por la cuarta parte de una bola de radio a centrada en el origen que tiene como base la región $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$ en el plano xy , si la densidad a una altura z desde la base es de $\delta_0 z$.
- *14.** El cono del Ejercicio 12, pero ahora con densidad en el punto P igual a kx g/cm³, siendo x la distancia desde el punto P al eje de simetría del cono.
Sugerencia: Utilice una capa cilíndrica centrada en el eje de simetría como elemento de volumen. Este elemento tiene densidad constante, por lo que su centro de masas es conocido y su momento se puede determinar a partir de su masa.
- *15.** Una placa semicircular que ocupa la región $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, si la densidad a una distancia s del origen es ks g/cm².
- *16.** El cable del Ejercicio 1 si se dobla en forma de semicircunferencia.
- 17.** Se estima que la densidad de materia en las proximidades de una estrella gigante se puede expresar como $\delta(r) = Ce^{-kr^2}$, siendo C y k constantes positivas y r la distancia al centro de la estrella. El radio de la estrella está indeterminado, pero se puede suponer que es infinito ya que $\delta(r)$ decrece muy rápidamente para valores de r grandes. Calcule la masa aproximada de la estrella en función de C y k . 
- 18.** Calcule la distancia media \bar{r} de la materia de la estrella del Ejercicio 17 a su centro. \bar{r} se expresa como $\int_0^\infty r dm / \int_0^\infty dm$, siendo dm el elemento de masa situado a una distancia r del centro de la estrella. 

7.5 Centroides

Si la materia de un sistema está distribuida uniformemente, de forma que la densidad δ es constante, entonces esa densidad se cancela del numerador y el denominador en las expresiones en forma de suma o integral de las coordenadas del centro de masas. En esos casos, el centro de masas depende sólo de la *forma* del objeto, es decir, de propiedades geométricas de la región ocupada por el objeto, y se denomina **centroide** de la región.

Los centroides se calculan utilizando las mismas fórmulas que se emplean en los centros de masas, con la salvedad de que la densidad (que es constante) toma el valor 1, por lo que la masa es simplemente la longitud, área o volumen de la región y los momentos se denominan **momentos de la región**, en vez de referirlos a la masa que ocupa la región. Si en las fórmulas que se obtuvieron en el Ejemplo 8 de la Sección 7.4 hacemos $\delta(x) = 1$, se llega al siguiente resultado:

Centroide de una región plana estándar

El centroide de una región plana $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, es (\bar{x}, \bar{y}) , siendo $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{A}$, $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A}$, y

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad M_{x=0} = \int_a^b x f(x) dx, \quad M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Así, por ejemplo, \bar{x} es el *valor medio* de la función x en la región.
Los centroides de algunas regiones se pueden calcular fácilmente por simetría. El centroide de un disco circular o de un disco elíptico está en su centro. El centroide de un rectángulo también está en su centro; el centro es el punto de intersección de las diagonales. El centroide de cualquier región estará en los ejes de simetría de dicha región.

Ejemplo 1 ¿Cuál es el valor medio de y en el semidisco $-a \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$? Calcule el centroide del semidisco.

Solución Por simetría, el centroide estará en el eje y , por lo que su coordenada x será $\bar{x} = 0$ (véase la Figura 7.35). Como el área del semidisco es $A = \frac{1}{2} \pi a^2$, el valor medio de y en el semidisco será

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{2}{\pi a^2} \frac{1}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi a^2} \frac{2a^3}{3} = \frac{4a}{3\pi}$$

El centroide del semidisco es $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$.

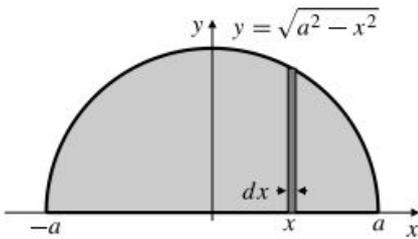


Figura 7.35

Ejemplo 2 Calcule el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solución Aquí, la «región» es una curva unidimensional que tiene longitud en vez de área. De nuevo $\bar{x} = 0$ por simetría. El momento de un pequeño arco de longitud ds situado a una altura y en el semicírculo, respecto a $y = 0$, es $dM_{y=0} = y ds$ (véase la Figura 7.36). Como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

y como $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en la semicircunferencia, tenemos que

$$M_{y=0} = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \int_{-a}^a dx = 2a^2$$

Como la longitud del semicírculo es πa , tenemos que $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$ y el centroide de la semicircunferencia es $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$. Nótese que el centroide de una semicircunferencia de radio a no es el mismo que el de un semidisco de radio a . Nótese también que el centroide de la semicircunferencia no está sobre la propia semicircunferencia.

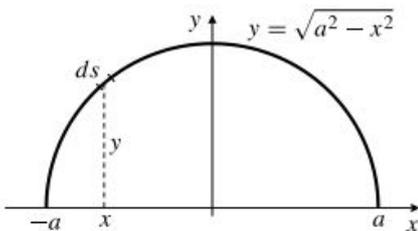


Figura 7.36

TEOREMA 1 Centroide de un triángulo

El centroide de un triángulo es el punto en el que se cruzan sus tres medianas.

DEMOSTRACIÓN Recuérdese que la mediana del triángulo es la recta que une uno de sus vértices con el punto medio del lado opuesto. Dada una mediana de un triángulo, de-

mostraremos que el centroide está en dicha mediana. Por tanto, el centroide deberá estar en las tres medianas.

Adoptemos un sistema de coordenadas donde la mediana en cuestión esté en el eje y , y en el que el vértice del triángulo correspondiente a dicha mediana sea el origen (véase la Figura 7.37). Sea $(0, m)$ el punto medio del lado opuesto. Entonces, los otros dos vértices del triángulo tendrán coordenadas de la forma $(-a, m - c)$ y $(a, m + c)$, ya que $(0, m)$ debe ser el punto medio entre ellos. Los dos elementos de área verticales que se muestran en la figura están a la misma distancia, en lados opuestos del eje y , por lo que tienen las mismas alturas, $h(-x) = h(x)$ (por triángulos similares), y la misma área. La suma de los momentos respecto a $x = 0$ de esos elementos de área es

$$dM_{x=0} = -xh(-x) dx + xh(x) dx = 0$$

por lo que el momento del triángulo completo respecto a $x = 0$ es

$$M_{x=0} = \int_{x=-a}^{x=a} dM_{x=0} = 0$$

por tanto, el centroide del triángulo está en el eje y .

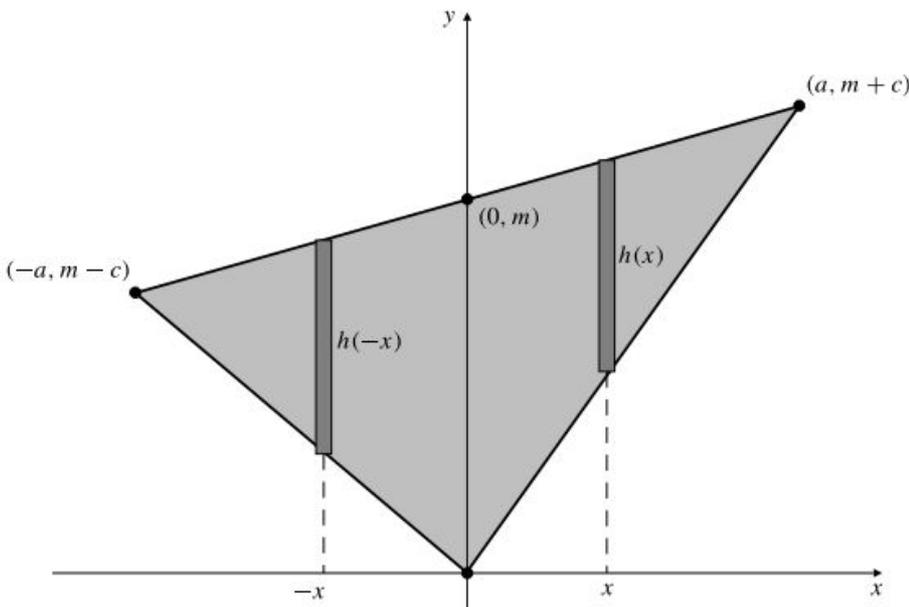


Figura 7.37

Observación Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de dos medianas cualesquiera de un triángulo, se puede verificar la siguiente fórmula:

Coordenadas del centroide de un triángulo

Las coordenadas del centroide un triángulo son el promedio de las correspondientes coordenadas de los tres vértices del triángulo. El centroide de un triángulo de vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Si una región está formada por la unión sin solapamiento de subregiones, entonces el momento de la región será la suma de los correspondientes momentos de las subregiones. Esto hace posible calcular el centroide de una región si se conocen los centroides y las áreas de todas las subregiones.

Ejemplo 3 Calcule el centroide del trapecio de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 1)$.

Solución El trapecio es la unión (sin solapamiento) de un cuadrado y un triángulo, como se muestra en la Figura 7.38. Por simetría, el centroide del cuadrado es $(\bar{x}_S, \bar{y}_S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y su área es $A_S = 1$. El área del triángulo es $A_T = \frac{1}{2}$ y su centroide es (\bar{x}_T, \bar{y}_T) , siendo

$$\bar{x}_T = \frac{0 + 1 + 1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \bar{y}_T = \frac{1 + 1 + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

Continuando con el uso de los subíndices S y T para indicar el cuadrado y el triángulo, respectivamente, se calcula

$$M_{x=0} = M_{S,x=0} + M_{T,x=0} = A_S \bar{x}_S + A_T \bar{x}_T = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$M_{y=0} = M_{S,y=0} + M_{T,y=0} = A_S \bar{y}_S + A_T \bar{y}_T = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$$

Como el área del trapecio es $A = A_S + A_T = \frac{3}{2}$, su centroide es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5/6}{3/2}, \frac{7/6}{3/2} \right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9} \right)$$

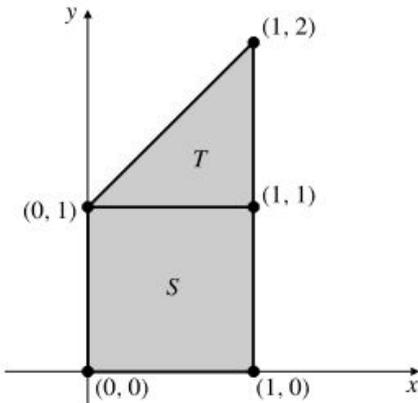


Figura 7.38

Ejemplo 4 Calcule el centroide de la región sólida que se obtiene rotando alrededor del eje y la región del primer cuadrante que está entre el eje x y la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución Por simetría, el centroide del sólido parabólico estará en su eje de simetría, el eje y . El volumen de una rodaja fina del sólido con forma de disco, de espesor dy y situada a una altura y es (véase la Figura 7.39)

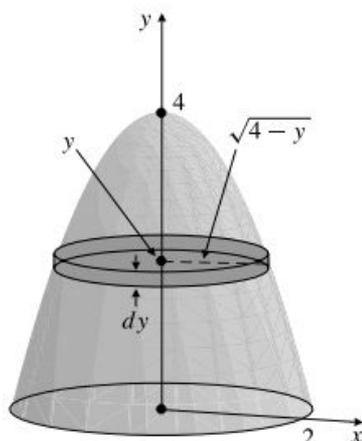
$$dV = \pi x^2 dy = \pi(4 - y) dy$$

y su momento con respecto al plano de la base

$$dM_{y=0} = y dV = \pi(4y - y^2) dy$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi \int_0^4 (4 - y) dy = \pi \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \pi(16 - 8) = 8\pi$$


Figura 7.39

y su momento con respecto a $y = 0$ es

$$M_{y=0} = \pi \int_0^4 (4y - y^2) dy = \pi \left(2y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{32}{3} \pi$$

Por consiguiente, el centroide está situado en $\bar{y} = \frac{32\pi}{3} \times \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$.

Teorema de Pappus

El siguiente teorema relaciona volúmenes o áreas de superficies de revolución con el centroide de la región o curva que se rota.

TEOREMA 2 Teorema de Pappus

- (a) Si una región plana R está a un lado de una recta L perteneciente a dicha región plana, y la región se rota alrededor de L para generar un sólido de revolución, entonces el volumen V del sólido es el producto del área de R por la distancia recorrida por el centroide de R debido a la rotación, es decir,

$$V = 2\pi\bar{r}A$$

siendo A el área de R y \bar{r} la distancia medida perpendicularmente desde el centroide de R hasta L .

- (b) Si una curva plana c está situada a un lado de una recta L perteneciente al mismo plano que la curva, y dicha curva se rota alrededor de la recta para generar una superficie de revolución, entonces el área S de dicha superficie es la longitud de la curva c multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de c :

$$S = 2\pi\bar{r}s$$

siendo s la longitud de la curva c y \bar{r} la distancia medida perpendicularmente desde el centroide c a la recta L .

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el apartado (a). La demostración del apartado (b) es similar y se deja como ejercicio.

Tomemos la recta L como eje y , y supongamos que la región R está comprendida entre $x = a$ y $x = b$, siendo $0 \leq a < b$. Entonces $\bar{r} = \bar{x}$, la coordenada x del centroide de R . Sea dA el área de una banda fina de R situada en la posición x con anchura dx (véase la Figu-

ra 7.40). Esta banda genera, al rotar alrededor de L , un tubo cilíndrico de volumen $dV = 2\pi x dA$, por lo que el volumen del sólido de revolución es

$$V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x dA = 2\pi M_{x=0} = 2\pi \bar{x}A = 2\pi \bar{r}A$$

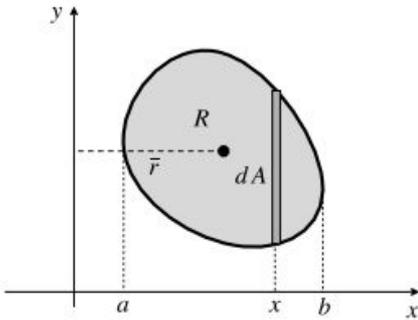


Figura 7.40

Como ilustran los ejemplos siguientes, el Teorema de Pappus se puede usar de dos formas: se puede determinar el centroide cuando se conoce el volumen o el área de la superficie, o se puede determinar el volumen o el área de la superficie si se conoce el centroide de la región que rota.

Ejemplo 5 Utilice el Teorema de Pappus para calcular el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solución El centroide de la semicircunferencia está en su eje de simetría, el eje y , por lo que estará situado en un punto de coordenadas $(0, \bar{y})$. Como la longitud de la semicircunferencia es de πa unidades y genera, al rotar alrededor del eje x , una esfera de área $4\pi a^2$ unidades al cuadrado, se obtiene, utilizando el apartado (b) del Teorema de Pappus,

$$4\pi a^2 = 2\pi(\pi a)\bar{y}$$

Por tanto, $\bar{y} = 2a/\pi$, como demostramos previamente en el Ejemplo 2.

Ejemplo 6 Utilice el Teorema de Pappus para calcular el volumen y el área de la superficie del toro (dónut) que se obtiene rotando el disco $(x - b)^2 + y^2 \leq a^2$ alrededor del eje y . En este ejemplo, $0 < a < b$ (véase la Figura 7.10 en la Sección 7.1).

Solución El centroide del disco está en $(b, 0)$, a una distancia de $\bar{r} = b$ unidades del eje de rotación. Como el área del disco es πa^2 unidades al cuadrado, el volumen del toro es

$$V = 2\pi b(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b \text{ unidades al cubo}$$

Para obtener el área S de la superficie del toro (en caso de que se quisiera glasear el dónut), se rota alrededor del eje y la circunferencia exterior del disco, cuya longitud es $2\pi a$, con lo que se obtiene

$$S = 2\pi b(2\pi a) = 4\pi^2 ab \text{ unidades al cuadrado}$$

Ejercicios 7.5

Calcule los centroides de las estructuras geométricas que se presentan en los Ejercicios 1-21. Tenga en cuenta las simetrías y las oportunidades de utilizar el Teorema de Pappus.

1. El cuarto de disco $x^2 + y^2 \leq r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. La región $0 \leq y \leq 9 - x^2$.
3. La región $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. El sector de disco circular $x^2 + y^2 \leq r^2$, $0 \leq y \leq x$.
5. El segmento de disco circular $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} - 1$.
6. El disco semielíptico $0 \leq y \leq b\sqrt{1-(x/a)^2}$.

- 7. El cuadrilátero cuyos vértices son (en el sentido de las agujas del reloj) $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ y $(2, -2)$.
- 8. La región limitada por el semicírculo $y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, el eje y y la recta $y = x - 2$.
- 9. Una superficie semisférica de radio r .
- 10. Media bola sólida de radio r .
- 11. Un cono sólido de radio en su base r y altura h .
- 12. Una superficie cónica de radio en su base r y altura h .
- 13. La región plana $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 14. La región plana $0 \leq y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
- 15. El arco correspondiente a un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- 16. El sólido que se obtiene rotando la región de la Figura 7.41(a) alrededor del eje y .

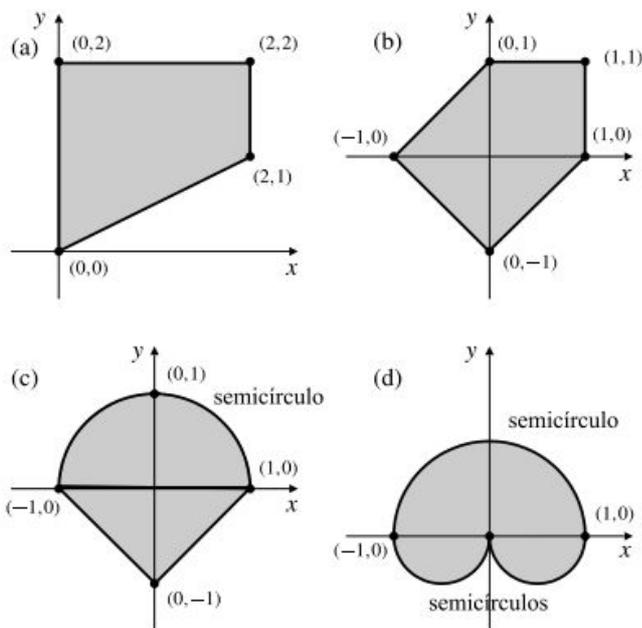


Figura 7.41

- 17. La región de la Figura 7.41(a).
- 18. La región de la Figura 7.41(b).
- 19. La región de la Figura 7.41(c).
- 20. La región de la Figura 7.41(d).
- 21. El sólido que se obtiene rotando la región plana $0 \leq y \leq 2x - x^2$ alrededor de la recta $y = -2$.
- 22. El segmento de recta que va desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$ se rota alrededor de la recta $x = 2$ para generar parte de una superficie cónica. Calcule el área de dicha superficie.

23. El triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ se rota alrededor de la recta $x = 2$ para generar un cierto sólido. Calcule el volumen de dicho sólido.

24. Un triángulo equilátero cuyo lado vale x cm se rota alrededor de uno de sus lados para generar un sólido. Calcule el volumen y el área de la superficie de ese sólido.

25. Calcule con 5 cifras decimales de precisión las coordenadas del centroide de la región $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \sqrt{x} \cos x$.

26. Calcule con 5 cifras decimales de precisión las coordenadas del centroide de la región $0 < x \leq \pi/2$, $\ln(\sin x) \leq y \leq 0$.

27. Calcule el centroide de la región infinitamente larga que está entre el eje x y la curva $y = (x + 1)^{-3}$, a la derecha del eje y .

28. Demuestre que la curva $y = e^{-x^2}$ ($-\infty < x < \infty$) genera una superficie de área finita cuando se rota alrededor del eje x . ¿Qué implica esto respecto a la posición del centroide de esta curva infinitamente larga?

29. Obtenga fórmulas para las coordenadas del centroide de la región plana $c \leq y \leq d$, $0 < f(y) \leq x \leq g(y)$.

30. Demuestre el apartado (b) del Teorema de Pappus (Teorema 2).

31. **(Estabilidad de un objeto flotante)** La determinación de la orientación que tomará un objeto flotante es un problema de importancia crítica en el diseño de barcos. Los barcos se deben diseñar de forma que floten establemente en posición vertical. Si el barco se desplaza de su posición vertical, las fuerzas que actúan sobre él deben devolverlo de nuevo a dicha posición. Las dos fuerzas que actúan sobre un objeto flotante que necesitamos tener en cuenta son su peso \mathbf{W} y el empuje ascendente $\mathbf{B} = -\mathbf{W}$. El peso \mathbf{W} debe tratarse a efectos mecánicos como si se aplicara en el centro de masas (CM) del objeto. La fuerza de empuje ascendente, sin embargo, actúa en el *centro de empuje* (CB), que es el centro de masas del agua desplazada por el objeto, y por tanto es el centroide del «agujero en el agua» hecho por el objeto.

Por ejemplo, considere una boya de marca de canal, formada por un casco semiesférico sobre el que se monta una torre cónica que da soporte a una luz de navegación. La boya tiene un eje de simetría vertical. Si se sitúa en posición vertical, tanto CM como CB pasarán por este eje, como se muestra en la Figura 7.42 (izquierda).

¿Es estable la flotación vertical de la boya? Lo será si CM está por debajo del centro O del casco semiesférico, como se muestra en la figura. Para ver

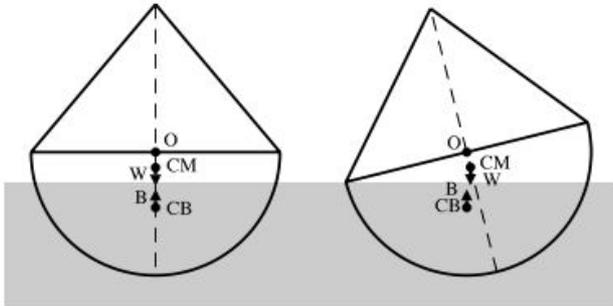


Figura 7.42

por qué, imagine que la boya se desplaza ligeramente de su posición vertical, como se muestra la figura de la derecha. Obsérvese que CM todavía está en el eje de simetría de la boya, pero CB está en la línea vertical que pasa por O. Las fuerzas **W** y **B** ya no actúan en la misma recta, pero su par de torsión es tal que tiende a rotar la boya de nuevo a su posición vertical. Si CM hubiera estado por encima de O en la figura de la izquierda, el par de torsión habría tendido a volcar la boya una vez que ésta se desplazara incluso muy poco desde la posición vertical.

Una viga de madera tiene sección cruzada con forma de cuadrado y gravedad específica 0.5, por lo que flotará con la mitad de su volumen sumergido (véase la Figura 7.43). Suponiendo que flota horizontalmente en

el agua, ¿cuál es la orientación estable de la sección cruzada cuadrada con respecto a la superficie del agua? En particular, ¿flotará la viga con la parte plana hacia arriba o con la arista hacia arriba? Demuestre sus afirmaciones. Puede resultar de utilidad Maple o algún otro programa de matemáticas por computador.

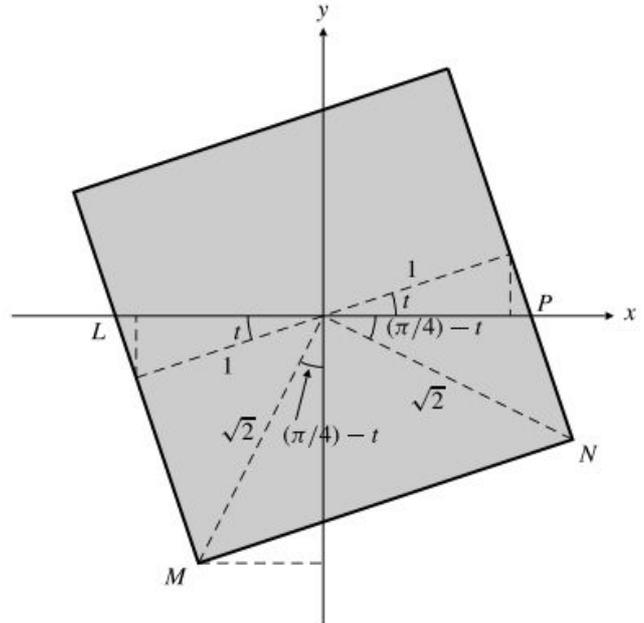


Figura 7.43

7.6 Otras aplicaciones en física

En esta sección presentaremos algunos ejemplos del uso de la integración para calcular magnitudes que aparecen en física y mecánica.

Presión hidrostática

La **presión** p a una profundidad h bajo la superficie de un líquido es la fuerza por unidad de área que se realiza sobre una superficie plana horizontal situada a esa profundidad, debido al peso del líquido que hay por encima de ella. Por tanto, p se expresa como

$$p = \delta gh$$

siendo δ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad donde está situado el fluido (véase la Figura 7.44). Para el caso del agua en la superficie de la tierra tenemos, aproximadamente, $\delta = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, por lo que la presión a la profundidad de h m es

$$p = 9800h \text{ N/m}^2$$

La unidad de fuerza que se utiliza es el newton (N); $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$, y corresponde a la fuerza que, aplicada sobre una masa de 1 kg, produce sobre la misma una aceleración de 1 m/s^2 .

Las moléculas de un líquido interactúan de tal manera que la presión a cualquier profundidad actúa de igual forma en todas las direcciones. La presión contra una superficie vertical es la misma que la presión contra una superficie horizontal. Éste es el **principio de Pascal**.