UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE
AMPOSDRU

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013

Instrumente Structurale
2007-2013

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
UMPFE

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Investeşte în oameni!

Formarea profesională a cadrelor didactice
din învăţământul preuniversitar
pentru noi oportunităţi de dezvoltare în carieră

FUNDAMENTE DE MATEMATICĂ

Constantin NIȚĂ **Ion CHIȚESCU**

Program de conversie profesională la nivel postuniversitar
pentru cadrele didactice din învățământul preuniversitar

Specializarea FIZICĂ
Forma de învățământ ID - semestrul I

2010

FIZICĂ

Fundamente de matematică

Constantin Niţă Ion Chiţescu

2010

ISBN 973-0-04125-3

CUPRINS

INTRODUCERE

Proiectul pentru învăţământul rural (P.I.R.) nu este un program de învăţământ superior (este un program de reconversie profesională), deci nu poate substitui o pregătire universitară sistematică în domeniul respectiv (aici fizica). Pe de altă parte, este necesar ca în urma absolvirii programului prevăzut de P.I.R., absolvenţii să aibă o pregătire minimală de tip superior pentru a putea să aibă o viziune de ansamblu şi dintr-o perspectivă mai elevată asupra materiei predate, precum şi pentru a putea să facă faţă unor situaţii speciale (de exemplu, chestionării din partea elevilor). Pentru a putea parcurge cu succes aceste părţi de nivel superior din materie, este absolut necesar ca respectivul cursant să aibă un minimum de cunoştinţe de matematică superioară. Din această cauză s-a ajuns la concluzia că o pregătire minimală în câteva domenii de matematică de nivel superior este absolut necesară.

Menţionăm că absolvirea programului din cadrul P.I.R. conferă absolvenţilor anumite drepturi, similare cu cele ale unor absolvenţi de învăţământ superior

Toate cele de mai sus demonstrează necesitatea parcurgerii prezentului modul, în scopul justificării diplomei de absolvire a programului de reconversie din cadrul P.I.R

Modulul este structurat pe două unităţi de învăţare (capitole).

Prima unitate de învăţare este intitulată **Elemente de algebră liniară şi teoria polinoamelor.** De fapt, în acest capitol se prezintă noţiunile şi rezultatele fundamentale ale algebrei liniare însoţite de câteva chestiuni de bază legate de teoria polinoamelor. S-a insistat mai mult pe rezultatele privind aducerea la forma canonică Jordan a matricelor şi pe teoria formelor pătratice, aceste chestiuni fiind mai delicate.

Unitate de învăţare 2 este intitulată **Elemente de analiză matematică**. Această unitate de învăţare este mult mai voluminoasă decât celelalte din două motive: primul motiv este acela că se începe cu o substanţială recapitulare a analizei matematice din liceu (pe care o considerăm absolut necesară), al doilea motiv este multitudinea subiectelor trecute în revistă (spaţii abstracte – metrice şi normate, limită şi continuitate, derivabilitate, derivate parţiale, analiticitate, integrale (improprii, curbilinii şi multiple), ecuaţii diferenţiale).

Există două **lucrări de verificare**, câte una la sfârşitul fiecărei unităţi de învăţare. La fiecare lucrare de verificare se dau indicaţii de întocmire şi transmitre către tutore. Se cere cursanţilor să trateze problemele în ordinea care apar. Observaţii de fond asupra modului de rezolvare şi de redactare vor apărea după întâlnirile cu tutorii. Rezolvările vor fi transmise către tutori prin poştă sau, dacă este cazul, prin e-mail.

Evaluarea continuă se face prin rezolvarea testelor de autoevaluare şi discuţiile la întâlnirile cu tutorii.

Evaluarea finală se face pe baza celor două lucrări de verificare şi a examenului de la finele cursului. Evaluarea continuă şi evaluarea finală au ponderi egale în stabilirea notei: câte 50%.

Unitatea de învăţare 1

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI TEORIA POLINOAMELOR

Cuprins

Obiectivele Unităţii de învăţare 1

După ce veţi parcurge această unitate de învăţare, veţi avea cunoştinţe suficiente pentru a fi capabili să faceţi următoarele operaţii matematice:

- Identificarea liniarităţii obiectelor sau aplicaţiilor care intervin în problemă.
- Găsirea elementelor care caracterizează liniaritatea problemei.
- Aplicarea formulelor de calcul aferente structurii liniare sau aplicaţiei liniare studiate.
- Exprimarea în termenii teoriei spaţiilor vectoriale sau / şi în termenii teoriei aplicaţiilor liniare a caracteristicilor matematice ale obiectelor în studiu.
- Analogia cu alte obiecte şi studierea lor în cadrul teoriei algebrei liniare cu aceleaşi metode ca la studiul obiectului întâlnit în problemă.
- Considerarea unor obiecte sau situaţii din cotidian, care au structură liniară (identificarea acestei structuri la obiecte concrete).
- Folosirea teoriei polinoamelor şi a ecuaţiilor algebrice pentru rezolvarea unor probleme apărute în cotidian sau în domenii aparţinând altei specialităţi decât matematica.

1.1. Spaţii vectoriale. Operaţii lineare.

Vom introduce şi noţiunea de **operaţie externă**. Să considerăm o mulţime nevidă X şi o altă mulţime nevidă A (numită **mulţime de operatori peste *X***). Numim **operaţie externă** pe X (**cu operatori din *A***) orice funcţie $\varphi: A \times X \to X$. De obicei, dacă $a \in A$ şi $x \in X$, vom scrie $\varphi(a, x) \overset{D}{=} ax$. Incidental, vom folosi şi alte notaţii.

1. Să considerăm un grup abelian $(X, /)$ (elementul neutru este 0_X şi inversul unui element $x \in X$ se notează $-x$). Fie şi (A, Φ, E) un inel comutativ. Vom admite că avem şi o operaţie externă pe X cu operatori din A, notată ca mai sus, care are următoarele proprietăţi:

$$(\alpha \,\Phi\, \beta)x = (\alpha x) / (\beta x)$$

$$\alpha(x / y) = (\alpha x) / (\alpha y)$$

$$(\alpha \,\mathrm{E}\, \beta)x = \alpha(\beta x)$$

pentru orice $x, y \in X$ şi orice $\alpha, \beta \in A$.

În aceste condiţii spunem că X este **modul peste *A*** (sau A-modul).

În aceleaşi condiţii, dacă A este chiar **corp** şi avem, în plus, pentru orice $x \in X$

$$1x = x,$$

spunem că X este un **spaţiu vectorial** peste A (sau ***A*-spaţiu vectorial**). Alte denumiri: **spaţiu liniar peste *A*** (sau A-spaţiu liniar).

Noi ne vom ocupa mai mult de spaţii vectoriale.

Exemple de module

$\boxed{1°.}$ **Orice grup abelian devine automat $\mathbb{Z}$-modul**. Mai precis: fie $(X,/)$ un grup abelian. Atunci putem gândi pe $\mathbb{Z}$ ca mulţime de operatori peste X, operaţia externă fiind definită astfel:

$$0x \overset{D}{=} 0_X \text{ pentru orice } x \in X$$

(aici $0 \in \mathbb{Z}$ este notat obişnuit):

$nx \overset{D}{=} x / x / x / \ldots / x$

(n termeni în sumă) dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ şi $x \in X$:

$$mx \overset{D}{=} -(|m|x) \quad \text{dacă} \quad x \in X \text{ şi } m \in \mathbb{Z},\ m<0.$$

Se verifică imediat că X este $\mathbb{Z}$-modul pentru operaţia externă definită mai sus.

$\boxed{2°.}$ Orice inel comutativ $(A,/,?)$ devine A-modul, operaţia externă fiind definită prin $ax \overset{D}{=} a \,?\, x$ pentru orice $a \in A$ şi $x \in A$.

Similar, dacă $(A,/,?)$ este corp comutativ, el devine K-spaţiu vectorial.

$\boxed{3°.}$ Reluăm din alt punct de vedere un exemplu anterior.

Să notăm prin K pe $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Fie şi T o mulţime nevidă, precum şi un K-spaţiu vectorial X. Vom nota:

$$\mathcal{F}_X(T)=\{f : T \to X\}.$$

Atunci, dacă notăm ca de obicei:

$$\mathcal{F}_K(T) = \{ f : T \to K \},$$

vom observa că:

a) $\mathcal{F}_K(T)$ este inel comutativ cu unitate pentru operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a funcţiilor. Avem deci inelul ($\mathcal{F}_K(T)$, /, ?).

b) $\mathcal{F}_X(T)$ devine $\mathcal{F}_K(T)$-modul. Operaţiile se definesc astfel:

($\mathcal{F}_X(T)$, Φ) este grup abelian faţă de adunarea funcţiilor $f \,\Phi\, g \overset{D}{=} h$, unde $h : T \to X$, $h(t) = f(t) \perp g(t)$ (am notat „adunarea" din X prin $\perp$).

Dacă $u \in \mathcal{F}_K(T)$, atunci operaţia externă cu operatori din $\mathcal{F}_K(T)$ (aici operatorul este u) se defineşte pentru orice $f \in \mathcal{F}_X(T)$ prin $uf \overset{D}{=} g$ unde $g(t) \overset{D}{=} u(t) f(t)$ pentru orice $t \in T$.

c) $\mathcal{F}_X(T)$ devine K-spaţiu vectorial. Anume, operaţia externă se defineşte acum pentru orice $\alpha \in K$ şi orice $f \in \mathcal{F}_X(T)$ prin $\alpha\, f \overset{D}{=} h$, unde:

$$h : T \to X,\ h(t) = \alpha\, f(t).$$

2. Vom considera un spaţiu vectorial X peste corpul K (operaţiile în K se notează normal: $(K,+,\ \cdot)$). În X adunarea (care dă structura de grup abelian) se notează cu /, iar elementul neutru este $0_X \in X$. În K elementul neutru la adunarea + este 0, iar elementul neutru la înmulţirea $\cdot$ este 1.

Avem nişte **reguli de calcul**:

(i) Pentru orice $\alpha \in K$, $x \in X$: $(\alpha\, x=0_X) \Leftrightarrow (\alpha=0$ sau $x=0_X)$;

(ii) Pentru orice $\alpha \in K$, $x \in X$: $(-\alpha)x=\alpha(-x) \overset{D}{=} -(\alpha x) \overset{D}{=} -\alpha x$.

În expresia $(-\alpha)\, x$ minusul este în K, în expresia $\alpha(-x)$ minusul este în X, iar în expresia $-(\alpha x)$ minusul este în X. Valoarea comună se desemnează deci prin $-\alpha x$.

(iii) În consecinţă, pentru orice $\alpha,\beta \in K$ şi $x,y \in X$ avem:

$$(\alpha-\beta)\, x = \alpha x - \beta x$$

(de fapt avem egalitatea $(\alpha+(-\beta))\, x = (\alpha x) / (-\beta x)$)

$$\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y$$

(de fapt avem egalitatea $\alpha(x / (-y)) = (\alpha x) / (-\alpha y)$).

Elementele din X se numesc **vectori**, elementele din K se numesc **scalari**, operaţia / se numeşte **adunare**, iar φ **înmulţire cu scalari**.

Să considerăm în continuare un număr finit de vectori $x_1,x_2,\dots, x_n \in X$. Un element $x \in X$ se numeşte **combinaţie liniară de** $x_1,x_2,\dots ,x_n$ dacă există $\alpha_1, \alpha_2,\dots ,\alpha_n \in K$ astfel încât $x=\alpha_1 x_1/ \alpha_2 x_2/ \dots / \alpha_n x_n$.

Vom scrie de obicei aceasta sub forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \ .$$

Sistemul de vectori $(x_1,x_2,\dots ,x_n)$ se numeşte **liniar independent** dacă are următoarea proprietate:

$$\forall\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \in K,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i = 0_X\right) \Leftrightarrow (\alpha_1=\alpha_2= \dots = \alpha_n = 0).$$

Se mai spune şi că vectorii $x_1,x_2,\dots ,x_n$ sunt **liniari independenţi**. În caz contrar, spunem că sistemul $(x_1,x_2,\dots ,x_n)$ este **liniar dependent**. Aceasta revine la faptul că există $i \in \{1,2,\dots ,n\}$ astfel încât:

$$x_i = \sum_{u=1}^{n} \alpha_u \cdot x_u$$

(unul din vectori poate fi exprimat ca o combinaţie liniară formată cu ceilalţi vectori). Se mai spune şi că vectorii $x_1,x_2,\dots ,x_n$ sunt **liniari dependenţi**.

Observaţie. În definiţia de mai sus nu am impus faptul că $x_1,x_2,\dots ,x_n$ sunt elemente distincte. Se poate constata că, dacă există $i \neq j$ aşa ca $x_i=x_j$, atunci automat sistemul $(x_1,x_2,\dots ,x_n)$ este liniar dependent: $x_i = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq i}}^{n} \alpha_u \cdot x_u$, unde $\alpha_u=1$ dacă $u=j$ şi $\alpha_u=0$ dacă $u\neq j$ şi $u\neq i$.

Din acest motiv, de acum înainte, când ne vom referi la independenţa sau dependenţa liniară a unui sistem $(x_1,x_2,\dots ,x_n)$, vom subînţe-lege că $x_1,x_2,\dots ,x_n$ sunt vectori distincţi.

În acest sens, dacă $B \subset X$ este o mulţime nevidă, vom spune că ***B*** este **liberă** sau **liniar independentă** dacă pentru orice parte finită nevidă a sa $F \subset B$ avem că F privită ca sistemul $(x_1,x_2,\dots ,x_n)$ format cu elementele lui F este sistem liniar independent (atenţie, avem $F=\{ x_1, x_2, \dots , x_n \}$, deci $i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j$).

Observaţii. 1°. Dacă $0_X \in B$ rezultă automat că mulţimea B **nu** este liniar independentă.

2°. Dacă B este liberă şi $\emptyset \neq G \subset B$ atunci G este liberă.

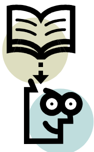
Similar, dacă $x_1,x_2,\dots ,x_n$ sunt în X (iarăşi, presupuse distincte) vom spune că $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este un **sistem de generatori pentru *X*** dacă orice element $x \in X$ poate fi exprimat ca o combinaţie liniară de $x_1, x_2, \dots, x_n$ (adică pentru orice $x \in X$ există $\alpha_1,\alpha_2,\dots, \alpha_n \in K$ aşa ca

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i$). Cu alte cuvinte, X coincide cu mulţimea tuturor combinaţiilor lineare de $(x_1, x_2, \dots , x_n)$.

Dacă $G \subset X$ este o mulţime nevidă, vom spune că G este o **mulţime de generatori pentru *X*** dacă pentru orice $x \in X$ există $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ astfel încât x este combinaţie liniară de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Aşadar, dacă $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, a spune că G este mulţime de generatori pentru X revine la a spune că $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este sistem de generatori pentru X.

Observaţie. Dacă G este mulţime de generatori şi $H \supset G$, atunci H este mulţime de generatori.



Putem interpreta definiţia mulţimii de generatori şi în alt mod.

Vom spune că o submulţime nevidă $Y \subset X$ este **subspaţiu vectorial al lui *X*** dacă are următoarele proprietăţi:

(i) Y este subgrup al lui $(X,/)$;

(ii) Pentru orice $\alpha \in K$ şi $y \in Y$ avem $\alpha\ y \in Y$.

Rezultă atunci că Y **devine**, de asemenea, **spaţiu vectorial peste *K*** (operaţia internă pe Y fiind operaţia indusă de / pe Y şi operaţia externă fiind dată de $\theta : K \times Y \rightarrow Y$, $\theta(\alpha, y) = \alpha\ y$).

Evident, cel mai mic subspaţiu vectorial al lui X este subspaţiul nul $Y=\{0\}$, cel mai mare subspaţiu vectorial este subspaţiul total $Y=X$. Un subspaţiu vectorial Y al lui X pentru care $Y \neq \{0_X\}$ şi $Y \neq X$ se numeşte **subspaţiu propriu**.

Intersecţia unei familii oarecare de subspaţii vectoriale ale lui X este, de asemenea, subspaţiu vectorial al lui X.

Fie acum o mulţime nevidă $A \subset X$. Există cel puţin un subspaţiu vectorial al lui X care include pe A, anume $Y=X$. Atunci, putem considera intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale Y ale lui X care au proprietatea că $Y \supset A$. Se obţine un subspaţiu vectorial care include de asemenea pe A. Vom nota acest subspaţiu prin $Sp(A)$.

Aşadar, $Sp(A)$ este cel mai mic (în raport cu relaţia de incluziune) subspaţiu vectorial Y al lui X pentru care $Y \supset A$.

Din punct de vedere efectiv se constată că $Sp(A)$= mulţimea tuturor combinaţiilor lineare cu elemente din A. Cu alte cuvinte:

$$x \in Sp(A) \Leftrightarrow \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \text{ şi } \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$$

astfel încat $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i$ (bineînţeles, n se schimbă odată cu x etc.).

Cele de mai sus arată că avem următoarea echivalenţă pentru o mulţime nevidă $G \subset X$:

$$G \text{ este mulţime de generatori pentru } X \Leftrightarrow Sp(G)=X.$$

Se numeşte **bază a spaţiului vectorial** X o submulţime nevidă $B \subset X$ care are următoarele proprietăţi:

(i) B este liniar independentă;

(ii) B este mulţime de generatori pentru X.

O caracterizare alternativă a noţiunii de bază este dată de următoarea

Teoremă. *Fie $B \subset X$ o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *B este bază*;

2) *Pentru orice $x \in X$ există o familie **unică** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elemente $x_i \in B$ şi o familie **unică** $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de elemente $\alpha_i \in K$ aşa ca* $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i$

Cu alte cuvinte, orice element *x* din *X* se scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei.

Existenţa şi „unicitatea” unei baze într-un spaţiu vectorial sunt date de următoarea teoremă fundamentală:

Teorema bazei. *Fie X un spaţiu vectorial nenul peste un corp comutativ K. Atunci*:

I. Există cel puţin o bază $B \subset X$ a lui *X*.

II. *Orice două baze sunt **cardinal echivalente*** (*i.e. dacă B_1 şi B_2 sunt baze ale lui X atunci există o funcţie bijectivă h* : $B_1 \to B_2$).

Vedem deci că două baze trebuie să aibă acelaşi „număr de elemente”.

Un spaţiu vectorial *X* se numeşte **finit dimensional** dacă are o bază finită. Atunci, rezultă din teorema bazei că orice altă bază este tot finită şi are acelaşi număr de elemente. Acest număr comun de elemente dintr-o bază se numeşte **dimensiunea spaţiului** şi se notează prin $\dim_K(X)$. Prin convenţie $\dim_K(\{0_X\})=0$.

Un spaţiu care nu este finit dimensional se numeşte infinit dimensional.

***T**eorema de completare a bazei.* *Fie X un spaţiu vectorial*.

1. *Dacă $A \subset X$ este o mulţime liberă, atunci există o bază B a lui X aşa ca $B \supset A$*.

2. *Dacă $Y \subset X$ este un subspaţiu vectorial al lui X având o bază A, există o bază B a lui X aşa că $B \supset A$*.

În virtutea acestei teoreme rezultă următoarele:

1°. Dacă $Y \subset X$ este un subspaţiu finit dimensional şi $Z \subset Y$ este un subspaţiu al lui *X*, rezultă că şi Z este finit dimensional şi avem:

$$\dim_K(Z) \leq \dim_K(Y).$$

2°. Dacă $Y \subset X$ este un subspaţiu vectorial infinit dimensional şi $Z \supset Y$ este un subspaţiu al lui *X*, rezultă că şi Z este infinit dimensional.

În mod dual avem următoarea:

Teoremă. *Dacă X este un spaţiu vectorial şi $G \subset X$ este o mulţime de generatori, rezultă că există o bază B a spaţiului X aşa ca $B \subset G$.*

Să considerăm un spaţiu vectorial finit dimensional *X* cu $\dim_K(X) = n$ şi fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului *X*.

După cum ştim, orice element $x \in X$ se scrie unic sub forma $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i$.

Elementul $K \ni \alpha_i \overset{D}{=} \pi_i(x)$ determinat de *x* se numeşte **coordonata de ordin i a lui *x* în baza** $B=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Trecerea de la baza B la o altă bază se poate face în câte un pas, înlocuind câte un element din baza B cu alt element, după regula dată de:

Lema substituţiei. *Fie X un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K şi $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ o bază a lui X.*

Fie $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in K$, $x=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p e_p$ şi $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Notăm $B^*=\{e_1,e_2,\dots,e_{i-1}, x, e_{i+1},\dots,e_n\} = (B \setminus \{e_i\}) \cup \{x\}$.

I. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *B^* este şi ea bază pentru X.*

2) α_i ! 0

II. *Admiţând că B^* de mai sus este bază pentru spaţiul X, să considerăm un vector oarecare $v \in X$. El se scrie în mod unic în cele două baze B şi B^* după cum urmează*:

$$v=\sum_{p=1}^{n}\lambda_p e_p \quad (\text{în } B)$$

$$v=\sum_{p=1}^{n}\lambda_p^* e_p^* \quad (\text{în } B^*).$$

În mod precis, am notat $B^*=\{e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*\}$, unde $e_k^*=e_k$ dacă $k\neq i$ şi $e_i^*=x$ de mai sus. Atunci avem relaţiile:

$$\lambda_i^*=\frac{\lambda_i}{\alpha_i},\quad \lambda_j^*=\lambda_j-\alpha_j\frac{\lambda_i}{\alpha_i},\ \text{dacă } j\neq i$$

(*am scris* $\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\stackrel{D}{=}\lambda_i\alpha_i^{-1}$).

Tot în acelaşi cadru finit dimensional (adică X= spaţiu vectorial peste K cu baza $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$), vom considera un sistem finit de vectori (nu neapărat distincţi), anume $V=(v^1,v^2,\dots,v^p)$ cu $v^i \in X$.

Fiecare v^i se scrie în mod unic în funcţie de elementele bazei B după cum urmează:

$$v^1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^1 e_i\ ;$$

$$v^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 e_i\ ;$$

. . . .

$$v^p=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^p e_i\ .$$

Putem forma matricea $M(V)=M(v^1,v^2,\dots,v^p)$ dată astfel:

$$M(v^1,v^2,\dots,v^p)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^p\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^p\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^p\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\underbrace{}_{v^1} & \underbrace{}_{v^2} & \dots & \underbrace{}_{v^p}\end{array}\end{array}$$

Este o matrice cu n linii şi p coloane, având pe coloana j coordonatele lui v^j în baza B, fapt marcat jos prin $\underset{\smile}{v^j}$.

Teorema de recunoaştere.

I. *Sistemul* $V=(v^1, v^2, \ldots, v^p)$ *este liniar independent dacă şi numai dacă* rang $(M(V))=p$ (*deci* $p \leq n$).

II. *Sistemul* $V=(v^1, v^2, \ldots, v^p)$ *este sistem de generatori dacă şi numai dacă* rang $(M(V)) = n$ (*deci* $p \geq n$).

III. *Sistemul* $V=(v^1, v^2, \ldots, v^p)$ *este bază dacă şi numai dacă* $p=n$ *şi* rang $(M(V))=n$ (*adică* det $(M(V)) \neq 0$).

Observaţii.

1°. Rangul unei matrice oarecare şi determinantul unei matrice pătrate (notate ca aici cu rang $(M(V))$ şi det $(M(V))$ se definesc ca la matricele cu elemente numerice.

2°. În condiţiile de mai sus, avem, de fapt, egalitatea rang $(M(V))=\dim_K (Sp(\{v^1, v^2, \ldots, v^p\}))$.

Test de autoevaluare 1

1. a) Sunt linear independenţi vectorii (1,3) şi (3,2) în spaţiul $\mathbb{R}^2$?

b) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ sunt vectorii (1,3) şi $(3,a)$ liniar dependenţi?

2. a) Să se arate că vectorii (1,3),(3,2) şi (1,0) sunt liniar dependenţi.

b) Încercaţi să generalizaţi rezultatul de mai sus (cât de „mulţi” vectori liniar independenţi putem avea?)

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

3. a) Este {(1, 3), (3, 2)} mulţime de generatori pentru $\mathbb{R}^2$?

b) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ mulţimea {(1,3), (3,a)} nu este mulţime de generatori?

c) Comparaţi rezultatele de la **1.** b) şi **3**. b). Puteţi trage o conclu-zie?

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 88 a acestei unităţi de învăţare.

Exemple. $\boxed{1°.}$ **Exemplul fundamental**: K^n.

Considerăm un corp comutativ K şi un număr natural $n \geq 1$. Ca de obicei, notăm:

$$K^n=\{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \mid \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in K\}$$

(în cazul n=1, $K^n=K$).

Atunci K^n devine în mod canonic spaţiu vectorial peste K, după cum urmează:

Structura de grup abelian. Avem operaţia internă / pe K^n dată astfel: dacă $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ şi $y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \in K^n$, punem

$$x / y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n).$$

Elementul neutru este $0_K{}^n=(0,\dots,0)$ şi inversul lui $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ este $-x=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$.

Înmulţirea cu scalari. Dacă $\alpha \in K$ şi $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in K^n$, avem $\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$.

În spaţiul vectorial K^n avem **baza canonică** $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ unde:

$e_1=(1,0,0,\dots,0,0)$
$e_2=(0,1,0,\dots,0,0)$
$e_3=(0,0,1,0,\dots,0,0)$
. . . .
$e_n=(0,0,0,\dots 0,1)$.\ea}

Aşadar K^n are dimensiunea n, adică $\dim_K(K^n)=n$.

Dacă $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, avem $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ Deci coordonata de ordin i a lui x în baza canonică este x_i.

De fapt, orice spaţiu vectorial n-dimensional peste K este izomorf cu K^n.

$\boxed{2°.}$ Vom lucra în $\mathbb{C}$. Cum $\mathbb{C}$ este corp (cu operaţiile obişnuite) rezultă că $\mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial în mod canonic (de dimensiune $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})=1$).

Pe de altă parte, $\mathbb{C}$ se identifică cu $\mathbb{R}^2$, prin identificarea :

$$\mathbb{C} \ni z=x+iy \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Atunci $\mathbb{C}$ devine şi $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiunea $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{C}$, operaţia internă este adunarea obişnuită, iar înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ este dată astfel: dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $z=x+iy$,

$$\alpha z=\alpha x+i\alpha y.$$

$\boxed{3°.}$ În spaţiul $\mathbb{R}^3$ vectorii $(1, \lambda, 1) \stackrel{D}{=} x$ şi $(\lambda, -1, \lambda) \stackrel{D}{=} y$ sunt liniar independenţi, pentru orice număr $\lambda \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, avem matricea:

$$M(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Avem $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1-\lambda^2 < 0$, dacă rang (*M* (*x*, *y*)) =2 adică (cu teorema de recunoaştere) *x* şi *y* sunt liniar independenţi.

$\boxed{4°.}$ În spaţiul $\mathbb{C}^3$ se consideră vectorii *x*=(1, λ,1) şi y=(λ,-1,λ), unde $\lambda \in \mathbb{C}$ este fixat.

a) Dacă λ= i, avem:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

şi rang (*M*(*x*,y))=1 (de fapt, în acest caz *y*=i *x*) deci *x* şi y sunt liniar dependenţi.

Dacă λ= – i, avem:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

şi rang (*M*(*x*,y))=1 (de fapt, în acest caz y= – i*x*) deci *x* şi y sunt liniar dependenţi.

b) Dacă $\lambda \neq$ i şi $\lambda \neq -$ i, vom arăta că *x* şi y sunt liniar independenţi. Într-adevăr, avem:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Există trei minori de ordinul doi. De exemplu, minorul $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1-\lambda^2$ este nenul dacă $\lambda \neq \pm$i. Deci rang(*M*(*x*, *y*)) = 2, adică *x* şi *y* sunt independenţi.

$\boxed{5°.}$ Se consideră în $\mathbb{R}^2$ (sau $\mathbb{C}^2$) vectorii *x*=(1,1), y=(λ,-λ) şi z=(1+λ,1– λ) (unde $\lambda \in \mathbb{R}$ (sau $\lambda \in \mathbb{C}$) este fixat).

Atunci {x, y, z} este mulţime de generatori dacă şi numai dacă $\lambda \neq 0$.

Într-adevăr, dacă $\lambda \neq 0$ avem:

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ 1 & -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

şi $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda \neq 0$, deci rang (*M*(*x*,*y*,*z*))=2. Cu teorema de recunoaş-tere avem: {*x*,y,*z*} este mulţime de generatori.

Dacă λ=0 avem:

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi rang ($M(x,y,z)$)=1. Atunci, din nou teorema de recunoaştere ne arată că mulţimea {x, y, z} **nu** este mulţime de generatori. De exemplu, în acest caz nu putem scrie vectorul (1, 2) ca o combinaţie liniară de x, y, z : dacă ar exista u, v, w în R sau C aşa ca (1,2)=u(1,1)+v(0,0)+w(1,1), ar rezulta (1, 2)=(u+w,u+w), deci u+w=1 şi u+w=2, imposibil.

Faptul că în cazul $\lambda \neq 0$ mulţimea {x, y, z} este mulţime de generatori poate fi verificat şi direct după cum urmează.

Considerăm un element arbitrar (a, b) din $\mathbb{R}^2$ (sau $\mathbb{C}^2$). Avem de arătat că există numere u, v, w aşa ca u x / v y / w z=(a, b), adică:

$$u(1,1) / v(\lambda, -\lambda) / w(1+\lambda, 1-\lambda) = (a, b),$$

ceea ce revine la faptul că:

$$\begin{cases} u+\lambda v+(1+\lambda)w=a \\ u-\lambda v+(1-\lambda)w=b, \end{cases}$$

deci $u=\dfrac{a+b}{2}-w$, $v=\dfrac{a-b}{2\lambda}-w$.

Se observă că scrierea lui (a, b) ca o combinaţie liniară de x, y, z nu este unică (coeficienţii u, v depind de parametrul w).

Aceasta se explică prin faptul că x, y, z nu sunt liniar independenţi.

$\boxed{6°.}$ Se consideră vectorii x = (1, 0, 0), y = (1, 1, 0), z=(1,1,1). Atunci aceşti vectori formează bază în $\mathbb{R}^3$.

Într-adevăr, avem:

$$M(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum det (M(x,y,z))=1 rezultă că {x, y,z} este bază în $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{7°.}$ Să considerăm un vector arbitrar x=(a,b,c) $\in$ $\mathbb{R}^3$. Ne propunem să scriem acest vector ca o combinaţie liniară de vectorii bazei precedente:

$$u=(1,0,0), \qquad v=(1,1,0), \qquad w=(1,1,1).$$

Prima metodă. Căutăm scalari α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ aşa ca x=α u / βv/ γ w. Deci: (a,b,c)=α (1,0,0)/ β (1,1,0)/ γ (1,1,1)

adică:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=a \\ \beta+\gamma=b \\ \gamma=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=a-b \\ \beta=b-c \\ \gamma=c \end{cases}.$$

A doua metodă. Vom folosi lema substituţiei. Plecăm cu baza canonică B=(e_1,e_2, e_3):

e_1=(1, 0, 0),

e_2=(0,1, 0),

e_3=(0, 0, 1).

În primul pas trecem la noua **bază** $B^*=(f_1, f_2, f_3)$ unde:

$$f_1 = e_1 = (1,0,0),$$

$$f_2 = (1,1,0),$$

$$f_3 = e_3=(0, 0, 1).$$

Faptul că B^* este bază rezultă din prima parte a lemei substituţiei: am modificat elementul numărul i=2 al bazei B pentru a ajunge la B^*. Noul vector este $f_2=1e_1/ 1e_2$, cu coeficientul lui e_2 nenul, egal cu 1. De fapt: $f_2 = \alpha_1 e_1 / \alpha_2 e_2 / \alpha_3 e_3$ cu $\alpha_1=1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$.

Scriind $x=ae_1/ be_2/ ce_3=a^*f_1/ b^*f_2/ c^*f_3$, avem atunci:

$$b^* = \frac{b}{1}$$

$$a^* = a - 1\cdot b = a - b$$

$$c^* = c - 0\cdot b = c$$

Aşadar $x=(a - b)f_1 + bf_2 + cf_3$.

Acum trecem de la baza $B^*=\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la baza $B^{**}= \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ modificând deci ultimul vector. Noul vector numărul i = 3 este (1,1,1).

Avem (1,1,1)=1(0,0,1) / 1(1,1,0) = 0(1,0,0) / 1(1,1,0) / 1(0,0,1).

Atunci vom scrie $x=a^{**}(1,0,0) / b^{**}(1,1,0) / c^{**}(1,1,1)$ unde

$$c^{**} = \frac{c}{1}$$

$$a^{**} = (a-b) - 0\cdot c = a - b$$

$$b^{**} = b - 1\cdot c = b - c$$

Aşadar, $x=(a - b)\ (1,0,0)\ /\ (b - c)\ (1,1,0)\ /\ c\ (1,1,1)$ reconfirmând primul rezultat.

$\boxed{8°.}$ Considerăm un interval nedegenerat $I \subset \mathbb{R}$. Notăm

$$\mathcal{C}(\mathrm{I}) = \{f : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă}\}.$$

Atunci $\mathcal{C}$ (I) este $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, operaţiile fiind cele obişnuite:

Operaţia internă / este dată prin $f / g \stackrel{D}{=} h$, unde $h(t)=f(t)+ g(t)$. Aici f, g, h sunt în $\mathcal{C}$ (I).

Operaţia externă este dată prin $\alpha\ f \stackrel{D}{=} g$ unde $g(t) = \alpha\, f(t)$. Aici $\alpha\in\mathbb{R}$ şi f, g sunt în $\mathcal{C}(I)$.

a) Fie un număr natural fixat n. Putem defini subspaţiul (n+1)-dimen-sional $\mathcal{P}_n$(I) al lui $\mathcal{C}$ (I), anume:

$$\mathcal{P}_n(I) =\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ este funcţie polinomială de grad cel mult } n\}$$

Pentru orice p natural introducem funcţia $u_p: I \to \mathbb{R}$, $u_p(t)=t^p$, deci $u_p \in \mathcal{C}(I)$. Atunci $B_n = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ formează bază pentru $\mathcal{P}_n(I)$. Într-adevăr, B_n este sistem de generatori: dacă $f \in \mathcal{P}_n(I)$ este dată prin $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, vom avea $f = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k$.

B este liniar independentă: fie $f = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k = O_{\mathcal{P}(I)}$. Deci $\sum_{k=0}^{n} a_k u_k$ este funcţia identic nulă, adică avem pentru orice $t \in I$ relaţia:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = 0 .$$

Acest lucru nu este posibil decât dacă $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$ etc.

Putem introduce **subspaţiul** vectorial $\mathcal{P}(I) \subset \mathcal{C}(I)$, anume:

$\mathcal{P}(I) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(I)$. Deci $\mathcal{P}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ este funcţie polinomială$\}$.

Atunci $\mathcal{P}(I)$ este un **spaţiu infinit dimensional**.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}(I)) = n < \infty$. Atunci fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Rezultă că $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_m(I)) = m + 1 > n$. Pe de altă parte $\mathcal{P}_m(I) \subset \mathcal{P}(I)$, deci $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_m(I)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})$, deci $m + 1 \neq n$ fals.

Cum $\mathcal{P}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ rezultă că şi $\mathcal{C}(I)$ este (cu atât mai mult) spaţiu vectorial infinit dimensional.

Test de autoevaluare 2

1. a) Să se arate că $\{(a,a+1), (a+1,a+2)\}$ este bază pentru $\mathbb{R}^2$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) Care sunt coordonatele vectorului (1,1) în baza de mai sus (pentru $a \in \mathbb{R}$ oarecare)?

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Poate fi $\{(1,2,3),(1,0,0)\}$ bază pentru $\mathbb{R}^3$?

b) Puteţi completa mulţimea $\{(1,2,3),(1,0,0)\}$ pentru ca să obţineţi o bază a lui $\mathbb{R}^3$?

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 88 a acestei unităţi de învăţare.

1.2. Aplicaţii liniare

Acum ne ocupăm de **aplicaţii liniare** (morfisme liniare sau morfisme de spaţii vectoriale).

Considerăm două spaţii vectoriale *X*, *Y* peste acelaşi corp comutativ *K*. În *X* adunarea se notează cu $/$ iar în *Y* adunarea se notează cu Φ. Înmulţirea cu scalari se va nota la fel şi în *X* şi în *Y*: $(\alpha, x)\rightarrow \alpha\ x$ (pentru $\alpha \in K$, $x \in X$) şi $(\alpha, y)\rightarrow \alpha\ y$ (pentru $\alpha \in K$, $y \in Y$).

O aplicaţie T:$X\rightarrow Y$ se numeşte **aplicaţie liniară** dacă a are următoa-rea proprietate:

-- pentru orice x', x'' în *X* avem $T(x' / x'')=T(x')\ \Phi\ T(x'')$.

-- pentru orice $\alpha \in K$ şi $x \in X$ avem $T(\alpha\ x)=\alpha\ T(x)$.

Rezultă imediat că pentru orice $\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_p \in K$ şi orice $x_1,x_2,...,x_p \in X$ avem $T\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i T(x_i)$. În particular $T(x'-x'')=T(x')-T(x'')$.

De asemenea, se vede că $T(0_X)=0_Y$.

Nucleul lui *T* este subspaţiul vectorial al lui *X* definit prin:

$$\ker(T)=\{x \in X \mid T(x)=0_Y\}$$

(cu alte cuvinte $\ker(T)=T^{-1}(\{O_y\})$. Se vede că *T* este injecţie dacă şi numai dacă $\ker(T)=\{0_X\}$.

Relativ la această noţiune vom mai face şi o altă observaţie foarte utilă şi anume:

Considerăm ca mai înainte o aplicaţie liniară T:$X\rightarrow Y$ şi un element $b \in Y$. Ne propunem să ne ocupăm de ecuaţia $T(x)=b$ (necunoscuta este *x*).

Avem două posibilităţi.

- Prima posibilitate: ecuaţia nu are soluţie (revine la faptul că $b \notin T(X)$).
- A doua posibilitate: ecuaţia are soluţie (revine la faptul că $b \in T(X)$). Atunci, fie $x_0 \in X$ o soluţie oarecare. Se constată imediat că mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei este:

$$S = x_0 / \ker(T) \stackrel{D}{=} \{x_0 / u \mid u \in \ker(T)\}.$$

Spunem că o soluţie oarecare a ecuaţiei este de forma $x = x_0 / u=$ o soluţie particulară (adică x_0) plus **o soluţie a ecuatiei omogene ataşate** $T(x)=0_Y$ (adică u).

Imaginea lui *T* este subspaţiul vectorial $T(X) \subset Y$.

O aplicaţie liniară T:$X\rightarrow Y$ se numeşte **izomorfism liniar** dacă este bijectivă. În acest caz rezultă imediat că şi T^{-1} este izomorfism liniar (numit izomorfismul invers al lui *T*). Evident că **nu întotdeauna** două spaţii vectoriale peste acelaşi corp *K* pot fi **izomorfe** (adică există un izomorfism liniar între ele). Vom reveni imediat.

Dacă *X*, *Y*, Z sunt spaţii vectoriale peste *K* şi T:$X\rightarrow Y$, S:$Y\rightarrow$ Z sunt liniare, rezultă că şi $S\circ T$:$X\rightarrow Z$ este liniară.

Dacă T şi S sunt izomorfisme liniare, rezultă că şi $S \circ T$ este izomorfism liniar.

Fie acum X, Y două spaţii vectoriale peste corpul comutativ K şi $A \subset X$ bază, $B \subset Y$ bază. A da o aplicaţie liniară bijectivă $T{:}X \to Y$ revine la a da o funcţie $U : A \to B$ bijectivă. Anume, $T\left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i U(b_i)$, pentru orice b_1, b_2,... ,$b_n \in A$. În particular, rezultă că două spaţiii liniare finit dimensionale sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.

De exemplu, dacă X are dimensiunea n, rezultă că X este izomorf cu K^n. Anume, dacă $B=\{b_1,b_2,... ,b_n\}$ este o bază a lui X şi $\{e_1,e_2,... ,e_n\}$ este baza canonică a lui K^n, un izomorfism posibil $T : X \to K^n$ este dat prin $T\left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Avem un rezultat general privind aplicaţiile liniare între spaţii vectoriale finit dimensionale. Anume, dacă X şi Y sunt spaţii vectoriale finit dimensionale peste acelaşi corp comutativ K vom avea pentru orice aplicaţie liniară $T : X \to Y$ **formula dimensiunii**:

$$\mathrm{Dim}_K(X) = \dim_K(\ker(T)) + \dim_K(T(X)).$$

Recomandăm cititorului ca, studiind cele ce preced, să demonstreze următorul rezultat de rigiditate care are două părţi strâns legate:

I. Fie X un spaţiu vectorial de dimensiune finită $\dim_K(X)=n$ peste corpul comutativ K. Fie şi $x_1,x_2,... ,x_n$ elemente în X. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $\{ x_1,x_2,... ,x_n \}$ este liberă;

2) $\{ x_1,x_2,... ,x_n \}$ este mulţime de generatori pentru X;

3) $\{ x_1,x_2,... ,x_n \}$ este bază pentru X.

II. Fie X un spaţiu vectorial finit dimensional peste K şi Y un alt spaţiu vectorial finit dimensional peste K, astfel încât $\dim_K(X) = \dim_K(Y)$. Fie şi $T{:}X \to Y$ o aplicaţie liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) T este injecţie;

2) T este surjecţie;

3) T este izomorfism liniar.

Test de autoevaluare 3

1. a) Se consideră un număr real a. Definim aplicaţia $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ prin $T(x,y)=x+y+ax^2$. Poate fi T liniară? În ce condiţii?

b) Fie $n \in \mathbb{N}$. În ce condiţii este liniară aplicaţia $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $T(x)=x^n$?

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Considerăm pe $\mathbb{C}$ ca $\mathbb{R}$-spaţiu liniar. Arătaţi că aplicaţia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin $T(z) = \overline{z}$ (conjugatul complex) este liniară (adică $\mathbb{R}$-lineară).

b) Arătaţi că aplicaţia de mai sus nu este $\mathbb{C}$-liniară (acum considerăm pe $\mathbb{C}$ ca $\mathbb{C}$-spaţiu liniar).

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 89 a acestei unităţi de învăţare.

Încheiem această expunere a teoriei privind aplicaţiile liniare cu prezentarea **legăturii între aplicaţii liniare între spaţii finit dimensionale şi matrice**.

Dacă X şi Y sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ K vom nota $L(X,Y) = \{T:X\to Y \mid T$ este liniară$\}$. Evident că şi $L(X,Y)$ devine K-spaţiu vectorial cu operaţiile obişnuite ($L(X,Y)$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{F}_Y(X)$), vezi începutul paragrafului).

De asemenea, dacă m,n sunt numere naturale nenule, putem construi spaţiul $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ al tuturor matricelor $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ cu elemente aij $\in K$ şi având n linii şi m coloane. Şi acesta este un spaţiu vectorial peste K (de dimensiune mn) cu operaţia internă de adunare obişnuită a matricelor şi înmulţirea cu scalari din K dată prin $(\alpha, (a_{ij})_{ij}) \to (\alpha\, a_{ij})_{ij}$ (înmulţirea obişnuită cu scalari a matricelor). Remarcăm notaţia $(a_{ij})_{ij}$ pentru o matrice.

Considerăm acum două spaţii vectoriale finit dimensionale: X cu $\dim_K(X) = m$ şi o bază $U=\{u_1,u_2,\ldots ,u_m\}$ şi Y cu $\dim_K(Y)=n$ şi o bază $V=\{v_1,v_2,\ldots ,v_n\}$. Vom stabili un izomorfism liniar:

$$\Omega : L(X,Y)\to \mathcal{M}_{n,m}(K).$$

Fie $T\in L(X,Y)$. În virtutea liniarităţii, a da pe T înseamnă a da modul cum acţionează T pe vectorii bazei U, deci a preciza:

$$T(u_1),\ T(u_2),\ldots\ T(u_m) \in Y$$

(deoarece pentru $x=\sum_{j=1}^{m} x_j u_j \in X$ oarecare vom avea:

$$T(x)=\sum_{j=1}^{m} x_j T(u_j))$$

Fiecare element $T(u_j)$ este în Y, deci vom scrie $T(u_j)$ în baza V:

$$T(u_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\ ,\quad j=1,2,\ldots\ m$$

cu $a_{ij} \in K$.

În acest mod am pus în evidenţă matricea:

$$M(T;U,V)=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

care are pe coloane coordonatele vectorilor $T(u_j)$ în baza V:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix}}_{T(u_1)} & \underbrace{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2}\end{matrix}}_{T(u_2)} \begin{matrix}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm}\end{matrix}}_{T(u_m)} \end{array}$$

Cu ajutorul matricei $M(T,U,V)$ putem descrie în întregime acţiunea aplicaţiei T.

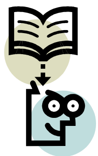
Anume, fie $x=\sum_{j=1}^{m} x_j u_j \in X$ arbitrar. Vom avea $T(x)$=y $\in Y$, deci y va fi de forma $y=\sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. **Exprimarea elementelor y_i în funcţie de elementele x_j dă deci felul cum acţionază *T*.**

Se constată că deducerea elementelor y_i din x_j se face prin **înmulţire formală** de matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{(m)}$$

Din acest motiv matricea $M(T;U,V)$ se numeşte **matricea operaţiei *T* în perechea de baze (*U*,*V*)**. Dacă $X=Y$ şi $U=V$, vom nota $M(T;U) \overset{D}{=} M(T;U,U)$ şi vom numi pe $M(T;U)$ matricea aplicaţiei T în baza U.

Observaţie. Avem rang $(M(T;U,V))=\dim_K(T(X))$.



Aplicaţia Ω: $L(X,Y)\rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K)$ este **izomorfism liniar**. Faptul că Ω este bijecţie (deci inversabilă) rezultă din faptul că, reciproc, pentru orice matrice $M=(a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ putem defini aplicaţia liniară $T\in L(X,Y)$ dată prin:

$$T\left(x=\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{n} y_i v_i ,$$

unde y_i se deduc din x_y ca în (m) de mai sus. Avem atunci $T=\Omega^{-1}(M)$.

Având în vedere cele două baze fixate U şi V, vom folosi următoarea notaţie: dacă $M \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ este dată, aplicaţia T obţinută ca mai sus din M se notează prin $T=T(M;U,V)$ şi numim pe $T(M;U,V)$ **aplicaţia liniară generată de matricea *M* în perechea de baze (*U*,*V*)**.

Notaţii similare: $T(M;U)$ când $U=V$ etc.

Atenţie! În toate consideraţiile făcute privind legătura între matrice şi operaţii liniare, **bazele se consideră ordonate** (ordinea în care se scriu elementele bazei este esenţială).

Izomorfismul Ω de mai sus are proprietăţi suplimentare:

A) **La compunerea de aplicaţii liniare corespunde înmulţire de matrice (şi reciproc).** Mai precis: dacă X, Y, Z sunt spaţii vectoriale finit dimensionale cu bazele $U\subset X$, $V\subset Y$, $W\subset Z$ şi $S \in L(X,Y)$, $T \in L(Y,Z)$, vom avea:

$$M(T\circ S;U,W)=M(T;V,W)\cdot M(S;U,V),$$

care se mai poate scrie şi astfel (scrierea este incompletă! reflectaţi...):

$$\Omega(T\circ S)=\Omega(T)\cdot\Omega(S)$$

B) Acum, admiţând, în plus, că spaţiile vectoriale X, Y sunt izomorfe şi luând o bază $U \subset X$ şi o bază $V \subset Y$ vom considera un izomorfism liniar $T \in L(X,Y)$. Pentru el există izomorfismul invers $T^{-1}L(Y, X)$. Atunci:

$$M(T^{-1};V, U) = (M\,(T;U,V))^{-1}$$

(**la inverse de aplicaţii corespund inverse de matrice**).

Remarcăm deci că izomorfismele liniare sunt caracterizate de matrice de reprezentare inversabile.

Test de autoevaluare 4

1. a) Pentru orice număr real t considerăm matricea:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Demonstraţi că $A(t) \cdot A(s)=A(t+s)$ pentru orice t şi s din $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $A(t)$ este inversabilă pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$(A(t))^{-1}=A\,(-t).$$

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Să se determine aplicaţia liniară T_t generată de matricea $A(t)$ de la punctul **1.**, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

b) Este T_t inversabilă?

c) Aţi mai întâlnit aplicaţia T_t?

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 90 a acestei unităţi de învăţare.

Remarcă importantă. Cititorul trebuie să observe importanţa decisivă pentru calcul a faptului că **s-a fixat câte o pereche de baze** în teoria reprezentării aplicaţiilor liniare ca matrice.

-- De obicei se lucrează în spaţii K^n cu bazele canonice.

Prin trecerea la alte perechi de baze, matricea de reprezentare se schimbă, putând deveni foarte simplă. Formele simplificate (canonice) ale matricelor de reprezentare formează obiectul unui capitol al algebrei liniare.

Exemple. $\boxed{1°}$ **Spaţiul dual**. Considerăm un spaţiu vectorial X peste un corp comutativ K. Vom nota:

$$X^* = \{T: X \to K \mid T \text{ este liniară}\} = L(X, K)$$

Atunci spaţiul vectorial peste K astfel obţinut X^* se numeşte **dualul (algebric) al lui *X***.

Operaţiile din X^* au mai fost definite.

a) **Operaţia internă** (adunarea): pentru x^*, y^* în X^* avem:

$$x^* \,\Phi\, y^* = z^*$$

unde $z^* \in X^*$, $z^*(x) = x^*(x) + y^*(x)$.

b) **Înmulţirea cu scalari**: dacă $\alpha \in K$ şi $x^* \in X^*$, avem $\alpha x^* \in X^*$ dat prin $(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$.

În continuare vom considera că X este **finit dimensional** şi fie

$e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ o bază a lui X.

Această bază generează **baza duală a lui *X* ***, anume $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ obţinută după cum urmează:

Fie $1 \le i < n$. Pentru orice $x = \sum_{p=1}^{n} x_p e_p \in X$, avem $e_i^*(x) = x_i$.

Verificăm faptul că $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^{x}$ este bază pentru X^*.

Elementele $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ sunt liniar independente. Într-adevăr, considerând o combinaţie liniară nulă $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$, vom avea pentru orice $x \in X$ egalitatea $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(x) = 0$. Luând $x = e_t$, vom avea $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_t) = \alpha_t = 0$ şi t este arbitrar, $t = 1, 2, \dots, n$.

Elementele $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ sunt un sistem de generatori pentru X^*. Într-adevăr, fie $x^* \in X^*$. Fie pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$: $x^*(e_i) = \alpha_i \in K$. Atunci $x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$. Într-adevăr, dacă $x = \sum_{t=1}^{n} x_t e_t$, vom avea:

$$x^*(x) = \sum_{t=1}^{n} x_t x^*(e_t) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t x_t .$$

Pe de altă parte

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*\right)(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*\left(\sum_{t=1}^{n}x_t e_t\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{t=1}^{n}x_t e_i^*(e_t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \text{ etc.}$$

Aşadar, spaţiile X şi X^* sunt **izomorfe**. Izomorfismul este următorul:

$$h: X\to X^*,\ h\left(x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i^* .$$

$\boxed{2°.}$ Considerăm aplicaţia liniară $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, dată prin:

$$T(x,y,z)=(x+y+z,x+y+z).$$

Calculăm $\ker(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^2}\}$, adică:

$$\ker(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

Se constată că $\ker(T)$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$ (reprezentarea geometrică este aceea a unui plan care trece prin origine).

Avem $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))=2$.

Apoi $\mathrm{Im}(T)=T(\mathbb{R}^3)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u=v\}$ după cum se poate verifica uşor. Este un subspaţiu 1-dimensional al lui $\mathbb{R}^2$, a cărui reprezentare geometrică este prima bisectoare în plan.

Se verifică şi formula dimensiunii:

$$3=\dim_{\mathbb{R}}(X=\mathbb{R}^3)=\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))+\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T))=2+1.$$

$\boxed{3°.}$ În spaţiul $\mathbb{R}^3$ considerăm baza $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ unde $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(1,1,0)$, $u_3=(1,1,1)$ (verificarea că U este bază a mai fost făcută). În spaţiul $\mathbb{R}^2$ avem baza $V=\{v_1,v_2\}$ unde $v_1=(1,0)$, $v_2(1,1)$.

Vom considera matricea:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

care dă aplicaţia liniară $T(M;U,V)$. Anume avem înmulţirea formală:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3x\\ y-x\end{pmatrix}.$$

Atunci acţiunea lui T este următoarea:

$$T(xu_1 / yu_2 / zu_3)=(x+2y+3z)v_1\,\Phi\,(y-z)v_2.$$

Avem deci:

$$T(xu_1/ yu_2/ zu_3)=(x+2y+3z)(1,0)\Phi(y-z)(1,1)=(x+3y+2z,\ y-z).$$

Cum însă:

$$xu_1 / yu_2 / zu_3=x(1,0,0) / y(1,1,0) / z(1,1,1)=(x+y+z,y+z,z),$$

vom recalcula pe T.

Să luăm acum un element arbitrar $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Vom calcula $T((a,b,c))$.

Pentru aceasta, vom exprima pe (a,b,c) sub forma:

$$(a,b,c) = (x+y+z,\ y+z,\ z),$$

deci:

$$\begin{pmatrix} x+y+z=a \Rightarrow x=a-b \\ y+z=b \Rightarrow y=b-c \\ z=c \Rightarrow z=c \end{pmatrix}.$$

Atunci:

$$T(a,b,c) = (x + 3y + 2z,\ y - z) = ((a - b) + 3(b- c) + 2c,\ (b - c)- c)=$$
$$=(a+2b - c,\ b- 2c).$$

Dacă vom considera în $\mathbb{R}^3$ baza canonică:

$$M=\{e_1=(1,0,0),\ \ e_2=(0,1,0),\ \ e_3=(0,0,1)\}$$

şi în $\mathbb{R}^2$ baza canonică: $N=\{f_1= (1,0),\ f_2 = (0,1)\}$ putem obţine matricea lui T în această pereche de baze:

$$T(e_1)=T(1,0,0)=(1,0);$$
$$T(e_2)=T(0,1,0)=(2,1);$$
$$T(e_3)=T(0,0,1)=(-1,-2);$$
$$M(T;M,N)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4°.}$ Acum vom lucra în sens invers (ca verificare). Anume, considerăm aplicaţia $T : \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}^2$, dată prin $T(a,b,c) = (a+2b -c, b-2c)$.

Vom considera în $\mathbb{R}^3$ baza $U = \{u_1,u_2,u_3\}$ unde $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(1,1,0)$ şi $u_3=(1,1,1)$. În $\mathbb{R}^2$ vom considera baza $V=\{v_1,v_2\}$ unde $v_1=(1,0)$, $v_2=(1,1)$.

Ne propunem să găsim matricea $M(T;\ U,\ V)$.

Fie un element arbitrar $xu_1 / yu_2 / zu_3$ din $\mathbb{R}^3$. Vom calcula:

$$T(xu_1 / yu_2 / zu_3)=\alpha\ v_1 \Phi\ \beta\ v_2.$$

Pentru aceasta vom folosi metoda de aflare a matricei în bazele U,V.

$$T(u_1) = T(1,0,0) = (1,0).$$

Exprimăm (1,0) în baza V, deci

$$(1,0) = \alpha\ v_1\ \Phi\ \beta\ v_2 = \alpha\ (1,0)\ \Phi\ \beta\ (1,1) = (\alpha +\beta,\ \beta\ ).$$

Rezultă că $\alpha +\beta =1$ şi $\beta =0$, deci $\alpha =1$.

$$T(u_2)=T(1,1,0)=(3,1)=\alpha\ v_1\ \Phi\ \beta\ v_2=\alpha\ (1,0)\ \Phi\ \beta\ (1,1)=(\alpha +\beta\ ,\ \beta).$$

Rezultă că $\alpha +\beta = 3$ şi $\beta =1$, deci $\alpha = 2$.

$$T(u_3)=T(1,1,1)=(2,-1)=\alpha\ v_1\ \Phi\ \beta\ v_2 = \alpha\ (1,0)\ \Phi\ \beta(1,1) = (\alpha +\beta\ ,\ \beta).$$

Rezultă că $\alpha +\beta =2$, $\beta = -1$, deci $\alpha = 3$.

Avem deci:

$$M(T;U,V)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

regăsind matricea de la 3°, ca o verificare. Deci, la fel

$$T(xu_1 / yu_2 / zu_3) = (x + 2y + 3z)\, v_1 \Phi\, (y - z)v_2.$$

$\boxed{5°.}$ Considerăm un număr natural $n \geq 1$, un interval nedegenerat $I \subset \mathbb{R}$ şi spaţiul vectorial peste $\mathbb{R}$ (deja construit):

$$\mathcal{P}_n(\mathrm{I})=\{f{:}\mathrm{I}\to \mathbb{R} \mid f \text{ este o funcţie polinomială de grad} \geq n\}.$$

Avem deci $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_n(\mathrm{I})) = n+1$.

Considerăm în acest spaţiu baza $B = \{u_0,u_1,u_2,\ldots ,u_n\}$, unde $u_k(t)=t^k$ pentru $k=0,1,\ldots ,n$.

Definim aplicaţia T: $\mathcal{P}_n(\mathrm{I})\to \mathcal{P}_n(\mathrm{I})$ dată prin $T(f)=f'$. Ne propunem să calculăm matricea acestei aplicaţii în baza B, deci matricea $M(T;B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Avem $T(u_0)=0$ şi $T(u_k)=ku_{k-1}$ pentru $1\leq k \leq n$. Atunci, cu regula de formare a matricei avem:

$$M(T;B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Explicaţii:

pe prima coloană am scris coordonatele lui

$$T(u_0) = O_{\mathcal{P}_n(I)} = 0u_0 \oplus 0u_1 \otimes \ldots \otimes 0u_{\mathcal{P}_n(I)}.$$

Pe a doua coloană am scris coordonatele lui

$$T(u_1) = 1u_0 / 0u_1 / \ldots / 0u_n.$$

Pe a treia coloană am scris coordonatele lui

$$T(u_2)=0u_0 / 2u_1 / 0u_2 / \ldots / 0u_n \text{ etc.}$$

Test de autoevaluare 5

1. a) Se consideră aplicaţia $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin:

$$T(x,y) = (x - y,\ x + y).$$

Să se arate că *T* este liniară şi să se calculeze matricea lui *T* în perechea de baze (U,U) unde $U = \{(1, 0), (0, 1)\}$ = baza canonică.

b) Să se scrie matricea lui *T* în perechea de baze (V, V) unde $V=\{(1, 0), (1, 1)\}$ (verificaţi că *V* este bază!).

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Descrieţi acţiunea unei aplicaţii liniare $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care are în perechea de baze (U,U) (unde *U* este baza canonică) matricea de reprezentare diagonală (adică $a_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$).

b) Invers, dacă $V=\{u_1,u_2,\ldots ,u_n\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^n$, calculaţi matricea de reprezentare a unei aplicaţii liniare $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care are proprietatea că există $t_1, t_2,\ldots , t_n$ în $\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$T(u_i) = t_i u_i, \qquad i=1,2,\ldots ,n.$$

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 90 a acestei unităţi de învăţare.

1.3. Sisteme liniare

Un sistem liniar este un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

unde a_{ij} şi b_i sunt elemente date în $K=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_m$ sunt necunoscutele ($x_i \in K$). Spunem că avem un **sistem de *n* ecuaţii cu *m* necunoscute**.

O **soluţie** a lui (1) este un element $(x_1,x_2,\ldots, x_m) \in K^m$ care verifică (1).

Observaţie. Teoria poate fi expusă exact la fel pentru un corp comutativ oarecare K în loc de $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Putem privi pe (1) în alt mod. Considerăm aplicaţia liniară $T:K^m \to K^n$ dată de matricea $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ (numită **matricea sistemului** (1)).

Anume, se iau bazele canonice U = $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ în K^m şi V = $\{f_1, f_2, \ldots,f_n\}$ în spaţiul K^n. Deci $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ ... în K^m şi $f_1 = (1,0,0,0,\ldots,0)$ $f_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots$ în K^n.

Considerăm $T=T(A;U,V) \in L(K^m,K^n)$. Atunci rezultă imediat că pentru

orice $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in K^m$ şi orice $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in K^n$ egalitatea $T(x) = y$ echivalează cu egalitatea $A\,{}^tx = {}^ty$, unde:

$${}^tx = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ şi } {}^ty = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(scriem vectorii pe coloană).

În concluzie, a spune că $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in K^m$ este soluţie pentru sistemul (1) (unde notăm $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$) înseamnă a spune una din următoarele afirmaţii echivalente:

$$T(x) = b$$

$$A\,{}^tx = {}^tb$$

Matricea **extinsă a sistemului** (1) este:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Teorema Kronecker-Capelli. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) *Sistemul* (1) *este* **compatibil** *i.e. are cel puţin o soluţie*

2) rang (A) = rang ($\overline{A}$).

Această teoremă fundamentală va fi mai puţin folosită în practica rezolvării efective a sistemului (1) de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

Pentru început, reamintim că dacă $m = n$ (matricea A este pătrată, deci numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor şi rang (A)=n, adică det (A) $\neq 0$) sistemul (1) are **soluţie unică** dată de **formulele lui Cramer**:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad j=1,2,\dots,m$$

unde Δ = det (A) şi Δ_j = det (A_j). Aici A_j este matricea obţinută din matricea A prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi b.

Rezolvarea practică presupune noţiunile de **minor principal şi minor caracteristic**.

Dacă rang (A) = $r \geq 1$ (excludem cazul când matricea A este identic nulă), numim **minor principal** (al matricei A) un minor P de ordinul r al lui A pentru care det (P) $\neq 0$. Liniile corespunzătoare acestui minor principal dau **ecuaţiile principale** ale sistemului (1) (deci avem r ecuaţii principale) iar necunoscutele x_j din sistem indexate cu indici de coloană dintr-un minor principal se numesc **necunoscute principale** (avem deci r necunoscute principale), celelalte necunos-cute (dacă mai rămân, în cazul $m-r>0$) se numesc necunoscute secundare.

Un minor de ordinul r+1 al matricei extinse $\overline{A}$ obţinut prin bordarea cu o linie din cele $n - r$ linii rămase a minorului principal şi prin bordarea pe verticală a aceluiaşi minor cu elementele corespunzătoare din coloana termenilor liberi se numeşte **determinant caracteristic** al sistemului (1).

Evident, noţiunea are sens numai dacă $n - r > 0$ (numărul ecuaţiilor > rangul matricei A). Avem deci n-r determinanţi caracteristici.

Teorema lui Rouché. *Se presupune că* $n - r > 0$. *Următoarele afirmaţii sunt echiva-lente*:

1) *Sistemul* (1) *este compatibil*.

2) *Toţi* cei $n - r$ *determinanţi caracteristici sunt nuli*.

Să urmărim cum se face discutarea şi rezolvarea (în caz de compatibilitate) a sistemului A. Notăm prin r rangul matricei A.

Primul caz: $r = n$

În acest caz sistemul este compatibil,

-- Dacă $m = r = n$, sistemul este cramerian. Avem soluţie unică, dată de formulele lui Cramer.

-- Dacă $m > r$, avem r necunoscute principale şi $m - r$ necunoscute secundare.

Ducem în membrul al doilea necunoscutele secundare, scriind deci (**renumerotăm** necunoscutele pentru ca x_1, x_2, ... ,x_r să fie necunos-cutele principale):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2m}x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rm}x_m \end{cases} \quad (2)$$

Rezolvăm sistemul **cramerian** (2) în raport cu x_1,x_2,... ,x_r. Soluţiile depind de $m - r$ parametri (necunoscutele secundare x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_m). Spunem că sistemul (1) este (m – r)-**nedeterminat** (nu are soluţie unică).

Al doilea caz: $r<n$.

În acest caz folosim teorema lui Rouché.

Întâi studiem compatibilitatea lui (1) cu teorema lui Rouché.

Dacă sistemul este compatibil avem două situaţii (în ambele cazuri **renumerotăm** necunoscutele şi ecuaţiile astfel încât ecuaţiile principale să fie 1, 2, ... , r şi necunoscutele principale să fie x_1,x_2,... , x_r.

Reţinem numai necunoscutele şi ecuaţiile principale ca mai sus, formăm sistemul (2) şi îl rezolvăm ca la primul caz. Din nou sistemul este compatibil (m–r)-nedeterminat.

SCHEMĂ

n =numărul de ecuaţii

m =numărul de necunoscute

r =rangul matricei sistemului

I. $r = n$ COMPATIBIL

1) $m=r=n$ CRAMER

2) $m>r$ compatibil ($m - r$)-nedeterminat

II. $r < n$ ROUCHÉ

INCOMPATIBIL → STOP

COMPATIBIL

1) $m=r$ CRAMER pe ecuaţiile principale, soluţie unică

2) m>r compatibil ($m - r$)-nedeterminat pe ecuaţiile principale

Observaţie. Se vede că avem soluţie unică dacă şi numai dacă m (numărul de necunoscute) = r (rangul matricei sistemului).

Test de autoevaluare 6

1. Se consideră sistemul (*t* este parametru) $\begin{cases} tx + y = 1 \\ -x + ty = 1 \end{cases}$.

a) Este cramerian sistemul (adică admite soluţie unică) privit ca sistem în $\mathbb{R}$?

b) Este cramerian sistemul, privit ca sistem în $\mathbb{C}$?

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

b) Să se discute şi să se rezolve sistemul (*t* este un parametru):

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ tx + y = 2 \\ x + ty = 2 \end{cases}.$$

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 91 a acestei unităţi de învăţare.

Sistemul (1) se numeşte **omogen** dacă avem $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

Din cele ce preced rezultă că un sistem omogen este întotdeauna compatibil (are cel puţin soluţia banală $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$). Practic, a rezolva sistemul omogen înseamnă a determina ker ($T(A;U,V)$).

De asemenea mai rezultă următoarele:

1°. Sistemul omogen are şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă r = rangul matricei sistemului < m = numărul necunoscutelor.

2°. Presupunând că (1) este compatibil, o soluţie oarecare x a sistemului are forma:

$$x = x_0 / u$$

unde x_0 este o soluţie particulară a sistemului şi u este o soluţie a **sistemului omogen asociat lui** (1) (adică a sistemului obţinut din (1) prin înlocuirea tuturor b_i cu 0, sau, echivalent, $u \in \ker(T(A;U,V))$

Exemple. $\boxed{1°.}$ Să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ x + ay + z = 3 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

în funcţie de parametrul (real sau complex) a.

În primul rând, deoarece numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute, vom calcula determinantul Δ al matricei sistemului:

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a-1)^2(a+2).$$

I. Întâi considerăm situaţia când $a \neq 1$ şi $a \neq -2$. Rezultă $\Delta \neq 0$ şi sistemul este cramerian.

$$\Delta_1 = \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 3(a-1)^2$$

deci $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{3}{a+2}$.

Similar $y = z = \dfrac{3}{a+2}$.

Avem soluţia unică $(x,y,z) = \left(\dfrac{3}{a+2}, \dfrac{3}{a+2}, \dfrac{3}{a+2}\right)$.

II. Acum, fie $a = 1$. Sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3. \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Rangul matricei A este $r = 1$.

Ecuaţia principală cu necunoscuta principală x:

$$x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = 3 - y - z.$$

Sistemul este compatibil **dublu nedeterminat** (2-nedeterminat) având o infinitate de soluţii care depinde de 2 parametri λ, μ reali sau complecşi. Mulţimea soluţiilor este:

$$S = \{(3-\lambda-\mu,\ \lambda,\ \mu) \mid \lambda, \mu \in K\}$$

unde $K=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

III. În fine, fie şi $a = -2$.

Matricea sistemului devine:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şi rang (A) = $r = 2$ (am încadrat un minor principal).

Aplicăm teorema lui Rouché. Avem un singur determinant caracte-ristic, anume

$$C = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

În acest caz sistemul este incompatibil.

Observaţie. $\boxed{1.}$ În cazul $a = -2$, sistemul devine

$$\begin{cases} -2x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}.$$

Prin adunare rezultă 0 = 9 şi se vede direct incompatibilitate.

$\boxed{2°.}$ Să se discute şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ ax + y = 2 \\ 3x + 2ay = 5 \end{cases}$$

în funcţie de parametrul (real sau complex) a.

Deoarece rangul matricei sistemului este cel mult 2, vom aplica teorema lui Rouché.

Minorul dat de primele două ecuaţii este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$.

Prima variantă: $a \neq 1$.

Rangul este 2. Ecuaţiile principale sunt primele două.

Avem un singur determinant caracteristic:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 3 & 2a & 5 \end{vmatrix} = 4a^2 - 9a + 5$$

Avem $C = 0 \Leftrightarrow a=1$ (exclus) sau $a = \frac{5}{4}$. Deci în acest caz sistemul este compatibil dacă şi numai dacă $a = \frac{5}{4}$.

În acest caz avem soluţia unică $x=0$, $y=2$.

A doua variantă: $a=1$

Rangul este tot 2. Ecuaţiile principale sunt ultimele două.

Unicul determinant caracteristic este

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

deci sistemul este compatibil.

În acest caz avem soluţia unică $x = 1$, $y = 1$.

$\boxed{3°.}$ Vom face o aplicaţie la **teoria ecuaţiilor integrale**.

O ecuaţie integrală cu nucleu degenerat este o ecuaţie de forma:

$$\varphi(x) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \varphi(y) \right) \mathrm{d}y + f(x).$$

Aici funcţiile continue $u_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $v_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt cunoscute, iar **necunoscuta este funcţia** φ (**tot continuă**), $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Rezolvarea unei astfel de ecuaţii se reduce la rezolvarea unui sistem liniar de ecuaţii algebrice.

Vom exemplifica modul cum se rezolvă aceste ecuaţii pe un exemplu simplu.

Ne propunem să rezolvăm ecuaţia integrală

$$\varphi(x) = \int_0^1 \left(xy + x^2 y \right) \varphi(y) \mathrm{d}y + x \qquad \text{(e)}$$

Aici $n = 2$; $u_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u_1(x) = x$; $u_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u_2(x) = x^2$;

$v_1 = v_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $v_1(y) = y$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Reluând relaţia (e) observăm că rezultă $\varphi(x) = \alpha x + \alpha x^2 + x$, unde $\alpha(x) = \int_0^1 y \varphi(y) \mathrm{d}y$ (deci şi $\alpha \in \mathbb{R}$ este necunoscut).

Rezultă că trebuie să căutăm pe φ de forma:

$$\varphi(x) = ax + bx^2,$$

cu *a*, *b* necunoscute. Ecuaţia (e) devine:

$$ax+bx^2=\int_0^1\left(xy+x^2y\right)\left(ay+by^2\right)\mathrm{d}y+x,$$

deci pentru orice $x\in$ [0,1] vom avea:

$$ax+bx^2=\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+1\right)x+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)x^2.$$

Rezultă că trebuie să avem:

$$a=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+1 \quad \text{şi} \quad b=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}.$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b=1\\ \frac{1}{3}a-\frac{3}{4}b=0\end{cases} \quad \text{deci} \quad a-b=1,$$

cu soluţiile $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{4}{5}$.

Soluţia φ a ecuaţiei integrale (e) este deci

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\frac{9}{5}x+\frac{4}{5}x^2.$$

1.4. Algebre. Polinoame

Vom considera un corp comutativ *K*. Se numeşte **algebră peste *K*** un inel (*X*,/ ,?) care este spaţiu vectorial peste *K* şi are în plus proprietatea: *pentru orice* $\alpha\in K$ *şi orice x*,y *în X avem*:

α (*x* ? y) = (α *x*) ? *y* = *x* ? (α *y*).

În *K* unitatea este 1 şi operaţiile sunt notate obişnuit: $\alpha+\beta$ şi $\alpha\,\beta$. Dacă inelul (*X*, / ,?) este comutativ spunem că algebra este comutativă, iar dacă inelul (*X*, / ,?) este unitar spunem că algebra este unitară. Rezultă şi ($\alpha\,\beta$) (*x* ? y) = (α *x*) ? (β y) pentru orice $\alpha,\beta\in K$; $x, y\in X$.

Exemple. $\boxed{1°.}$ Orice corp comutativ *K* devine automat algebră comutativă cu unitate peste *K*.

$\boxed{2°.}$ Din nou, fie *K* un corp comutativ. Fie şi *T* o mulţime nevidă . Am notat $\mathcal{F}_k(T)$ = {*f* : *T*→ *K*}. Atunci $\mathcal{F}_k(T)$ devine algebră comutativă cu unitate peste *K*. Structura de inel ($\mathcal{F}_k(T)$, /, ?) este cea canonică: *f*/ *g*=*h* unde *h*(*t*)=*f*(*t*)+*g*(t); *f* ? *g* = *u* unde *u*(*t*) = *f*(*t*) *g*(*t*). Înmulţirea cu scalari este cea obişnuită: α *f* = *g* unde *g*(*t*) = α *f*(*t*). Unitatea este funcţia $\underline{1}$:*T*→ *K*, $\underline{1}$(*t*)=1.

$\boxed{3°.}$ Luând *T*=*I* $\subset\mathbb{R}$ interval $\subset\mathbb{R}$ şi *K*=$\mathbb{R}$, putem forma ca mai sus $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ([*a*,*b*]). O subalgebră a lui $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ([*a*,*b*]) este:

$$\mathcal{C}([a, b])=\{f :[a, b]\to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă } \}$$

Noţiunea de **subalgebră** este definită natural: este şi subinel şi sub-spaţiu vectorial.

$\boxed{4°.}$ Din nou, fie K un corp comutativ. Atunci $\mathcal{M}_n(K)$ = mulţimea matricelor pătrate de ordin n cu elemente din K este algebră (necomutativă) peste K. Operaţiile de inel sunt adunarea şi înmulţirea obişnuite de matrice, iar înmulţirea este cea obişnuită (cu scalari). Matricea unitate E_n este element unitate.

$\boxed{5°.}$ Strâns legat de exemplul precedent este exemplul care este prezentat acum. Fie K un corp comutativ şi X un K-spaţiu vectorial. Notăm, ca de obicei, $L(X,X)=\{T:X\to X \mid T \text{ este liniară}\} \overset{D}{=} L(X)$. Atunci $L(X)$ devine algebră peste K cu operaţiile următoare: operaţiile de inel sunt / (adunarea obişnuită a funcţiilor), ca „adunare”, compunerea funcţiilor, ca „înmulţire”. Înmulţirea cu scalari este cea obişnuită. Această algebră este necomutativă, dar are unitate pe 1_X.

Acum să considerăm două algebre X şi Y peste acelaşi corp comutativ K. O aplicaţie $h : X\to Y$ se numeşte **morfism de algebre** dacă este morfism de inele n şi aplicaţie liniară. Dacă este şi morfism de inele cu unitate (în cazul în care algebrele sunt cu unitate) îi vom spune **morfism unitar de algebre**. În cazul special când $Y=K$ numim un morfism de algebre **caracter**. Un morfism bijectiv de algebre se numeşte **izomorfism de algebre**. Inversul lui este de asemenea izomorfism.

Exemple. $\boxed{1°.}$ Considerăm o mulţime nevidă T, un element fixat $t_0 \in T$ şi un corp comutativ K. Fie $\mathcal{F}_k(T)$ algebra definită mai sus la 2° şi considerăm aplicaţia de evaluare în t_0, anume $h : \mathcal{F}_k(T)\to K$, $h(f) = f(t_0)$. Atunci h este caracter.

$\boxed{2°.}$ Considerăm un spaţiu vectorial n-dimensional peste corpul comutativ K şi fie U o bază a lui X. Atunci aplicaţia $\Omega : L(X)\to \mathcal{M}_n(K)$ dată prin $\Omega(T) = M(T;U)$, este izomorfism de algebre.

În rest vom considera un corp comutativ K şi ne vom ocupa de algebra $K[X]$ a polinoamelor într-o nedeterminată peste K.

Se ştie că un astfel de polinom este de fapt un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din K cu proprietatea că $\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n\neq 0\}$ este o mulţime finită.

Să considerăm un polinom $P = (a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots ,a_n, \ldots)$. Dacă toţi $a_n = 0$ vom scrie $P = 0$. Dacă există $n \in \mathbb{N}$ aşa ca $a_n \neq 0$ vom considera:

$$\deg (P)= \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n\neq 0\}$$

(acest număr se numeşte **gradul lui *P***). În acest caz vom scrie:

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2+ \ldots + a_n X^n$$

unde $n= \deg (P)$.

Prin convenţie $\deg (0)= -\infty$.

Atunci $K[X]$ devine algebră comutativă cu unitate, operaţiile fiind date astfel:

- ♦ Dacă $P = (a_n)_{n\geq 0}$, $Q = (b_n)_{n\geq 0}$, atunci P / $Q \overset{D}{=} S=(u_n)_{n\geq 0}$, unde $u_n = a_n + b_n$ pentru orice n.
- ♦ Dacă $P = (a_n)_{n\geq 0}$, $Q = (b_n)_{n\geq 0}$, atunci P ? $Q \overset{D}{=} T=(v_n)_{n\geq 0}$ unde $v_n=a_0b_n+a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... +a_n b_0$.
- ♦ Dacă $P = (a_n)_{n\geq 0}$ şi $\alpha \in K$, atunci $\alpha\ P \overset{D}{=} U=(w_n)_{n\geq 0}$ unde $w_n=\alpha\ a_n$ (operaţia externă).

Inelul ($K[X]$,/ ,?) este integru.

Menţionăm că operaţiile de mai sus au fost definite în mod abstract. Operaţiile / şi ? sunt efectiv operaţii interne. De exemplu, dacă P şi Q sunt nenule, calculând P ? $Q=(v_n)_{n\geq 0}$ avem $v_n=0$ pentru orice $n > \deg(P) + \deg(Q)$. Cititorul a observat că în corpul K suma elementelor a şi b se notează prin $a + b$, iar produsul lor prin ab.

Mai menţionăm că operaţiile definite abstract ca mai sus revin la cele cunoscute prin calcul clasic. De exemplu, dacă $P=a_0+a_1X+...+a_mX^m$ şi $Q = b_0+b_1X+... +b_nX_n$, vom scrie P ? $Q \overset{D}{=} T=v_0+v_1X+... +v_{m+n} X^{m+n}$ înmulţirea fiind cea obişnuită:

$$(a_0+a_1X+... +a_mX^m)(b_0+b_1X+... +b_nX_n)=$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X +...+ (a_mb_n)X^{m+n}.$$

Fiecare polinom $P = \sum_{n=0}^{K} a_n X^n$ (sau P=0) pune în evidenţă **funcţia polinomială ataşată lui *P***, anume funcţia:

$$f_P:K\rightarrow K,\ f_p(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_n a^n.$$

Aplicaţia $H:K[X]\rightarrow \mathcal{F}_k(K)$ dată prin $H(P)=f_P$ este morfism de algebre. Subliniem faptul că H **nu este întotdeauna injectivă**. De exemplu, dacă vom lua $K = \mathbb{Z}_2$, observăm că avem $f_0 = f_p = 0$ (funcţia identic nulă) pentru $P = X + X^2$. Cititorul va reflecta asupra acestei chestiuni, observând că avem:

$$\ker(H)=\{P\in K[X] \mid f_P(x)=0 \text{ pentru orice } x \in K\}.$$

Aşadar, identificarea obişnuită a unui polinom P cu funcţia polinomială f_P ataşată lui, nu este întotdeauna justificată.

În cazul când $K = \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ aplicaţia H este injectivă şi se obişnuieşte să se identifice P cu f_P.

Aceasta revine la faptul că ker (H) = {$\underline{0}$} (unicul element al lui ker H este polinomul $\underline{0}$ = (0,0,0,... ,0,...) numit polinomul identic nul).

În general H nu este nici surjectivă. De remarcat că atunci când K este un corp finit, H este surjecţie (orice funcţie $f : K\rightarrow K$ este polinomială).

O problemă fundamentală în teoria polinoamelor este **problema rădăcinilor unui polinom**.

Reamintim că dacă $P\in$ K[X], un element a $\in K$ se numeşte **rădăcină a lui *P*** dacă f_P(a) = 0 (uneori se scrie mai simplu $P(a)$=0). De acum înainte vom scrie şi noi pentru orice a $\in K$ mai simplu $P(a)$ în loc de $f_P(a)$.

Pentru un polinom $P \in K[X]$ şi un element $a \in K$, calculul valorii $P(a)$

se poate face direct prin înlocuire sau folosind teorema lui Bézout: $P(a) = R(a)$, unde $R\in K[X]$ este polinomul rest al împărţirii lui P la polinomul X-a (de fapt R este o constantă!). Menţionăm că în $K[X]$ calculele de împărţire cu rest, aflarea celui mai mare divizor comun (algoritmul lui Euclid) şi schema lui Horner se fac după reguli similare celor din $\mathbb{R}[X]$ sau $\mathbb{C}[X]$.

Exemplu. Să efectuăm în $\mathbb{Z}_5[X]$ împărţirea lui $P = X^4+\dot{3}X^2+\dot{1}$ la $Q=\dot{4}X^2+X+\dot{3}$. Vom folosi tabla de înmulţire a lui $\mathbb{Z}_5$: $(\dot{1})^{-1}=\dot{1}$, $(\dot{2})^{-1}=\dot{3}$, $(\dot{3})^{-1}=\dot{2}$, $(\dot{4})^{-1}=\dot{4}$. Aşezăm calculele astfel:

$$\begin{array}{l|l} X^4+\dot{0}X^3+\dot{3}X^2+\dot{0}X+1 & \dot{4}X^2+X+\dot{1} \\ \hline \dot{4}X^4+\dot{1}X^3+\dot{1}X^2 & \\ \hline / \quad \dot{1}X^3+\dot{4}X^2+\dot{0}X & \\ \quad\;\; \dot{4}X^3+\dot{1}X^2+\dot{1}X & \\ \hline / \quad\; / \quad \dot{1}X+\dot{1} & \end{array}$$

Aşadar, câtul este $\dot{4}X^2+\dot{4}X$ şi restul este $X+\dot{1}$ adică identitatea împărţirii cu rest este:

$$X^4+\dot{3}X^2+\dot{1}=\left(\dot{4}X^2+X+\dot{1}\right)\left(\dot{4}X^2+\dot{4}X\right)+X+\dot{1}.$$

Rezultă că un element $a \in K$ este rădăcină pentru $P\in K[X]$ dacă şi numai dacă $(X\text{-a})\,|\,P$ (X-a este divizor al lui P, adică există Q $\in K[X]$ aşa ca $P = (X\text{-a})Q$).

Un polinom $P \in K[X]$ se numeşte **reductibil** dacă există două polinoame $U,V \in K[X]$ de grad strict mai mic decât P (atenţie! deci în orice caz $P\neq 0$) astfel încât $P=UV$. În caz contrar, P se numeşte **ireductibil**.

Un polinom $P\in K[X]$ ireductibil nu are rădăcini. Invers este fals.

Totuşi, dacă deg (P) = 2 sau 3 şi P nu are rădăcini, rezultă că P este ireductibil. Evident, polinoamele de grad 1 sunt ireductibile şi au rădăcini.

Să considerăm un polinom nenul $P \in K[X]$ şi $a \in K$. Vom spune că a este **rădăcină simplă pentru *P*** dacă a este rădăcină pentru P şi $(X\text{-}a)^2$ **nu** este divizor al lui P. Dacă $a \in K$ este rădăcină pentru P, vom spune că a este **rădăcină multiplă pentru *P*** dacă $(X\text{-}a)^2\,|\,P$. Pentru o rădăcină $a \in K$ a lui P se defineşte **ordinul de multi-plicitate al lui *P*** ca fiind unicul număr natural $n \geq 1$ care are următoarele proprietăţi: $(X-a)^n\,|\,P$ şi $(X-a)^{n+1}$ nu îl divide pe P.

Fie $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in K[X]$. **Derivata formală a lui *P* este** prin definiţie:

$$P' = P^{(1)} = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + ... + na_nX^{n-1}.$$

Derivata secundă formală este prin definiţie:

$$P'' = P^{(2)} = (P')' = 2a_2 + 6a_3X + ... + n(n-1)\,a_nX^{n-2}.$$

Putem defini în general $P^{(t)} \in K[X]$ (se vede că $P^{(t)}=0$ dacă $t \geq n+1$).

Se poate arăta atunci că dacă $P \in K[X]$ este nenul şi $a \in K$ următoa-rele afirmaţii sunt echivalente:

1) a este rădăcină pentru P cu ordinul de multiplicitate $t \geq 1$;

2) $P(a) = P^{(1)}(a) = P^{(2)}(a) = ... = P^{(t-1)}(a) = 0$ şi $P^{(t)}(a) \neq 0$.

Un corp comutativ K se numeşte **algebric închis** dacă pentru orice $P \in K[X]$, P nenul, există $a \in P$ astfel încât a este rădăcină pentru P. Dacă $P \in K[X]$, $P \neq 0$, în general P are un număr de rădăcini mai mic sau cel mult egal cu gradul lui P. Dacă K este algebric închis rezultă că P are exact n **rădăcini** (nu neapărat distincte! fiecare rădăcină se numără cu ordinul ei de multiplicitate). Dacă deg $(P)= n$ rezultă în acest caz descompunerea:

$$P = a_n (X - a_1)^{n_1} (X - a_2)^{n_2} ... (X - a_t)^{n_t}$$

unde a_i sunt rădăcinile distincte, fiecare cu ordinul de multiplicitate

n_i şi avem $n_1+n_2+... +n_t = n$.

Dacă P şi Q sunt în $K[X]$, rezultă că P şi Q au rădăcini comune dacă şi numai dacă cel mai mare divizor comun al lor, notat (P,Q) (se poate calcula cu algoritmul lui Euclid) nu este 1, adică polinoamele nu sunt prime între ele.

În particular, a spune că P are şi rădăcini multiple înseamnă a spune că P şi P' au rădăcini comune, deci $(P,P') \neq 1$.

Încheiem cu celebra teoremă **Hamilton-Cayley**. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n\geq 1$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se consideră **polinomul caracteristic al lui *A***, adică polinomul $P = a_0 + a_1X + a_2 X^2 + ... +a_nX^n$

obţinut astfel: pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ avem $P(\lambda)=\det(\lambda E_n - A)$.

Atunci $P(A)=0$, adică avem:

$$a_0E_n + a_1A + a_2A^2+... +a_nA^n=0.$$

1.5. Teorie Jordan

1.5.1. Inele euclidiene

Să amintim mai întâi două teoreme importante din algebră.

Teorema impărţirii cu rest pentru numere întregi. Fie a şi b două numere întregi cu $b \neq 0$. Atunci există numerele întregi, unic determinate, q şi r astfel încât:

$$a = bq + r \qquad \text{cu} \qquad 0 \leq r < |b| \tag{1}$$

Nmerele q şi r se numesc *câtul* şi respectiv *restul* împărţirii lui a la b.

Teorema impărţirii cu rest pentru polinoame. Fie K un corp comutativ, iar f şi g cu $g \neq 0$ polinoame din $K[X]$. Atunci există polinoamele q si r din $K[X]$, unic determinate, astfel încât:

$$f = gq + r \qquad \text{cu} \qquad \text{grad } r < \text{grad } g \tag{2}$$

Polinoamele q şi r se numesc *câtul* şi respectiv *restul* împărţirii lui f prin g.

Se observă că cele două relaţii (1) şi (2) sunt asemănătoare. Este suficient să schimbăm cuvântul „număr întreg” cu cel de „polinom” şi din (1) obţinem (2) cu schimbarea condiţiei $0 \leq r < |b|$ cu condiţia $\text{grad } r < \text{grad } g$.

Mai mult, demonstraţiile celor două teoreme, bazate pe proprietatea de bună ordonare a mulţimii numerelor naturale, sunt la fel.

Aceste teoreme stau la baza aritmeticii numerelor întregi şi a aritmeticii polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un corp comutativ. Pe baza lor se construieşte algoritmul lui Euclid de determinare a celui mai mare divizor comun pentru numere întregi şi pentru polinoame.

De asemenea, se obţine teorema de descompunere în factori primi pentru numere întregi şi pentru polinoame etc.

Există şi alte mulţimi de numere sau mulţimi ale căror elemente sunt de o natură oarecare pentru care se pot da teorema de împărţire cu rest şi care le conferă anumite proprietăţi aritmetice. Aritmetica numerelor întregi, aritmetica polinoamelor, cât şi alte aritmetici se pot trata în mod unitar prin introducerea noţiunii de inel euclidian.

Definiţie. Se numeşte inel euclidian un domeniu de integritate R pentru care există o funcţie $\varphi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ având proprietatea că, oricare ar fi $a, b \in R$ cu $b \neq 0$, există $q, r \in R$, astfel încât:

$$a = bq + r, \quad \text{unde} \quad r = 0 \quad \text{sau} \quad \varphi(r) < \varphi(b)$$

Exemple. $\boxed{1.}$ Din teorema împărţirii cu rest pentru $\mathbb{Z}$, rezultă că inelul $\mathbb{Z}$ este inel euclidian în raport cu funcţia $\varphi : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $\varphi(a) = |a|$.

$\boxed{2.}$ Din teorema împărţirii cu rest pentru $K[X]$, rezultă că inelul $K[X]$, K corp comutativ, este inel euclidian în raport cu funcţia $\varphi : K[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $\varphi(f) = \text{grad} f$.

Observaţie. În continuare, când vom spune că R este inel euclidian, vom înţelege că R este unul din inelele menţionate mai sus: fie inelul $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi, fie inelul $K[X]$ al polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un corp comutativ K.

Dacă R este unul din inelele de mai sus, pentru orice $a,b \in R$, există cel mai mare divizor comun al lor, notat c.m.m.d.c.{*a,b*}, sau pe scurt, (*a,b*). În plus, dacă $a,b \in R$ şi $d=(a,b)$, atunci există $u,v \in R$, astfel încât $d = ua + vb$.

Fie R un inel euclidian. Dacă $a,b \in R$ spunem că a divide b şi scriem $a \mid b$ dacă există $c \in R$ astfel încât $b = ac$. Spunem că elementele $a,b \in R$ sunt asociate în divizibilitate dacă $a \mid b$ şi $b \mid a$ şi scriem $a \sim_d b$. Este imediat că $a \sim_d b$ dacă şi numai dacă există un element inversabil u din R astfel încât $b = ua$. Rezultă uşor că relaţia de asociere în divizibilitate este o relaţie de echivalenţă pe R.

Observăm că dacă $R = \mathbb{Z}$, atunci $a \sim_d b$ dacă şi numai dacă $a = \pm b$, iar dacă $R = K[X]$, atunci $f \sim_d g$ dacă şi numai dacă există $\alpha \in K \setminus \{0\}$, astfel încât $g = \alpha f$.

Un polinom nenul din $K[X]$ se numeşte **monic** sau **unitar** dacă are coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1.

Este evident că orice polinom nenul din $K[X]$ este asociat în divizibilitate cu un unic polinom monic din $K[X]$.

1.5.2. Matrice aritmetic echivalente

Fie R un inel comutativ şi $M_n(R)$ inelul matricelor pătratice de ordin n cu elemente din inelul R. Notăm cu:

$$GL_n(R) = \{T \in M_n(R) \mid T \text{ inversabilă}\}.$$

Avem că T este matrice inversabilă dacă şi numai dacă $\det T \in U(R)$, unde $U(R)$ este mulţimea elementelor inversabile din inelul R.

Considerăm matricea pătratică de forma:

I) $$T_{ij}(a) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & 1 & & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & a & \dots & \dots \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}, \quad i \neq j,\ a \in R,$$

care are pe diagonala principală 1, la intersecţia liniei i cu coloana j, un element $a \in R$ şi în rest zero.

$$\text{II)}\qquad P_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccc} & & & i & & & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & & \mathrm{i} & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array},\qquad i<j,$$

în care pe locurile (t,t) cu $t\neq i,j$ şi pe locurile (i,j), (j,i) se găseşte 1, iar în rest zero.

$$\text{III)}\qquad D_i(u)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & u & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array},\qquad u\in U(R),$$

În care pe locurile (t,t) cu $t\neq i$ se găseşte 1 şi pe locul (i,i) se găseşte un element $u\in U(R)$, iar în rest zero.

Matricela $T_{ij}(a)$, P_{ij} şi $D_i(u)$ sunt inversabile:

$T_{ij}^{-1}(a)=T_{ij}(-a)$, $P_{ij}^{-1}=P_{ij}$, $D_i^{-1}(u)=D_i(u^{-1})$.

Vom nota $M(m,n,R)$ mulţimea matricelor de tip (m,n) cu elemente din R. În particular, vom nota $M(m,m,R)=M_m(R)$.

Fie $A\in M(m,n,R)$.

Dacă $T_{ij}(a)$, P_{ij} şi $D_i(u)$ sunt matrice din $M_m(R)$, atunci:

I) $T_{ij}(a)A$ se obţine din A adunând la linia i linia j, înmulţită cu a;

II) $P_{ij}A$ se obţine din A permutând linia i cu linia j;

III) $D_i(u)A$ se obţine din A înmulţind linia i cu u.

Dacă $T_{ij}(a)$, P_{ij} şi $D_i(u)$ sunt matrice din $M_n(R)$, atunci:

I´) $AT_{ij}(a)$ se obţine din A adunând la coloana j coloana i, înmulţită cu a;

II´) AP_{ij} se obţine din A permutând coloanele i şi j;

III´) $AD_i(u)$ se obţine din A înmulţind coloana i cu u.

Definiţie. Matricele $T_{ij}(a)$, P_{ij}, $D_i(u)$ se numesc matrice elementare respectiv de tip I, II şi III. Multiplicările matricei A cu asemenea matrice la stânga, respectiv la dreapta, se numesc transformări elementare asupra liniilor, respectiv coloanelor, matricei A, respectiv de tip I, II şi III.

Definiţie. Fie $A,B \in M(m,n,R)$. Spunem că matricele A şi B sunt matrice echivalente şi scriem $A \sim B$, dacă există $U \in GL_m(R)$ şi $V \in GL_n(R)$, astfel încât $B = UAV$.

Rezultă imediat că relaţia binară $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $M(m,n,R)$.

Definiţie. Fie R un inel comutativ. Spunem că o matrice $D \in M(m,n,R)$ are **forma diagonal-canonică** dacă:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

cu $d_i \neq 0$ oricare $1 \le i \le r$, $r \le \min\{m,n\}$ şi $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_r$.

Matricea D se mai notează $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$.

Vom arăta că dacă R este un inel euclidian, orice matrice este aritmetic echivalentă cu o matrice diagonal-canonică. Acest lucru permite aflarea imediată a rangului matricei şi, dacă este cazul, aflarea inversei unei matrice.

Observăm că: $GL_n(\mathbb{Z}) = \{U \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(U) = \pm 1\}$

şi $GL_n(K[X]) = \{U \in M_n(K[X]) \mid \det(U) \in K \setminus \{0\}\}$,

unde K este corp comutativ.

Teorema 1. Fie R un inel euclidian şi $A \in M(m,n,R)$, $A \neq 0$. Atunci există o matrice diagonal-canonică D, unic determinată, mai puţin o asociere în divizibilitate a elementelor de pe diagonală, astfel încât $A \sim D$.

Demonstraţie. Vom arăta că efectuând asupra lui A un număr finit de transformări elementare se ajunge la o matrice D diagonal-canonică,

$$D = U_s \ldots U_1 A V_1 \ldots V_t$$

unde $U_i\,(1 \le i \le s)$ şi $V_j\,(1 \le j \le t)$ sunt matrice elementare de ordin m, respectiv n. Cum $U_i\,(1 \le i \le s)$ şi $V_j\,(1 \le j \le t)$ sunt inversabile, rezultă că $U = U_s \ldots U_1$ şi $V = V_1 \ldots V_t$ sunt matrice inversabile, deci $A \sim D$.

Fie $\varphi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ funcţia care intervine în definiţia inelelor euclidiene. Presupunem că $A = (a_{ij}) \in M(m,n,R)$, $A \neq 0$ şi fie

$\varphi(A) = \min\{\varphi(a_{ij}) \mid a_{ij} \neq 0\}$.

Presupunem teorema adevărată pentru matricele de tip $(m-1, n-1)$ şi pentru matricele B de tip (m,n) astfel încât $\varphi(B) < \varphi(A)$.

Presupunem că există un element a_{ij} care divide toate elementele matricei A. Matricea $P_{1i}AP_{1j}$ este echivalentă cu A şi are pe locul (1,1) elementul a_{ij}. Putem deci presupune că $a_{ij} \neq 0$ şi $a_{11} \mid a_{st}$, oricare ar fi $1 \le s \le m$ şi $1 \le t \le n$.

Fie $q_{i1}, q_{1j} \in R$ astfel încât $a_{i1} = a_{11}q_{i1}$ $(2 \le i \le m)$, $a_{1j} = a_{11}q_{1j}$ $(2 \le j \le n)$.

Înmulţind succesiv la stânga matricea A cu matricele $T_{i1}(-q_{i1})$ de ordin m şi la dreapta cu matricele $T_{1j}(-q_{1j})$ de ordin n, unde $1 \le i \le m$ şi $1 \le j \le n$, obţinem că:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Este clar că $a_{11} \mid a'_{ij}$, oricare $2 \le i \le m$ şi $2 \le j \le n$. Cum A_1 este de tipul $(m-1, n-1)$, conform presupunerii făcute, există $U' \in GL_{m-1}(R)$ şi $V' \in GL_{n-1}(R)$ astfel încât:

$$U'A_1V' = \begin{pmatrix} d_2 & & & & & & \\ & d_3 & & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = D'$$

să fie matrice diagonal-canonică.

Fie $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}$. Avem că există $U \in GL_m(R)$, $V \in GL_n(R)$ şi

$$UAV = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & d_2 & & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Mai mult $a_{11} \mid d_2$ şi luând $d_2 = a_{11}$ se obţine rezultatul cerut.

Să considerăm acum că există $a_{ij} \neq 0$ care să dividă toate elementele matricei *A*. Există a_{st} astfel încât $\varphi(A) = \varphi(a_{st})$. Atnci $P_{1s}AP_{1t}$ are pe locul $(1,1)$ elementul a_{st}. Putem presupune deci că $a_{11} \neq 0$ şi $\varphi(A) = \varphi(a_{11})$.

Dacă există $j \geq 2$ astfel încât $a_{11} \nmid a_{1j}$, avem

$$a_{1j} = a_{11}q_{1j} + r_{1j}\text{, unde } r_{1j} \neq 0 \text{ şi } \varphi(r_{1j}) < \varphi(a_{11}).$$

Înmulţind prima coloană cu $-q_{1j}$ şi adunând-o la coloana j se obţine o matrice $A_1 \sim A$ care are pe locul $(1, j)$ elementul r_{1j}.

Cum $\varphi(A_1) \leq \varphi(r_{1j}) < \varphi(a_{11}) = \varphi(A)$, conform presupunerii făcute, există o matrice diagonal canonică *D* astfel încât $A_1 \sim D$ şi deci $A \sim D$.

Analog se procedează dacă există $i \geq 2$ astfel încât $a_{11} \nmid a_{i1}$.

În caz contrar, $a_{11} \mid a_{1j}$ $(2 \leq j \leq n)$ şi $a_{11} \mid a_{i1}$ $(2 \leq i \leq m)$ şi procedând ca în primul caz, obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = A_2 .$$

Deoarece a_{11} nu divide toate elementele matricei *A* rezultă că a_{11} nu divide toate elementele matricei A_1.

Dacă a_{11} nu divide un element de pe linia *i* a matricei A_1, adunând linia *i* la prima linie se obţine o situaţie întâlnită înainte.

Să demonstrăm unicitatea. Aceasta rezultă din următoarele rezultate.

Dacă $A \in M(m,n,R)$, pentru orice $1 \leq k \leq \min\{m,n\}$ vom nota cu $\Delta_k(A)$ cel mai mare divizor comun al tuturor minorilor de ordin *k* ai matricei *A*.

Propoziţia 1. Fie $A, B \in M(m,n,R)$, unde *R* este inel euclidian. Dacă *A* şi *B* sunt aritmetic echivalente, atunci $\Delta_k(A) \sim_d \Delta_k(B)$ pentru orice $1 \leq k \leq \min\{m,n\}$.

Demonstraţie. Pentru $1 \leq j \leq n$, notăm cu c_A^j coloana *j* a matricei *A*. Din $V = (v_{ij}) \in M(n,p,R)$, atunci pentru orice $1 \leq j \leq p$:

$$c_{AV}^j = c_A^1 v_{1j} c_A^2 v_{2j} + \ldots + c_A^n v_{nj} .$$

Din proprietăţile determinanţilor rezultă că orice minor de ordin *k* al matricei *AV* este o combinaţie liniară cu coeficienţi din *R* de minori de ordin *k* ai matricei *A*. Prin urmare, $\Delta_k(A)$ divide orice minor de ordin *k* al matriicei *AV* şi deci $\Delta_k(A) \mid \Delta_k(AV)$. Analog, dacă $U \in M\{q,m,R\}$, atunci $\Delta_k(A) \mid \Delta_k(UA)$.

Acum, dacă $A \sim B$, rezultă că există $U \in GL_m(R)$ şi $V \in GL_n(R)$ astfel încât $B = UAV$. Din cele prezentate obţinem că:

$$\Delta_k(A) \mid \Delta_k(UA) \mid \Delta_k(UAV) = \Delta_k(B) \text{ şi } \Delta_k(B) \mid \Delta_k(U^{-1}B) \mid \Delta_k(U^{-1}BV^{-1}) = \Delta_k(A)$$

şi deci $\Delta_k(A) \sim_d \Delta_k(B)$.

Propoziţia 2. Fie R inel euclidian şi $A \in M(n,p,R)$ şi

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & \boxed{0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \boxed{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

o formă diagonal-canonică a matricei A. Atunci $d_1 \sim_d \Delta_1(A)$ şi $d_k \sim_d \Delta_k(A) / \Delta_{k-1}(A)$, $2 \le k \le r$.

Demonstraţie. Avem $A \sim D$ şi cum $\Delta_k(D) = d_1 d_2 \ldots d_r$, $1 \le k \le r$, rezultă afirmaţiile din enunţ.

Din această propoziţie rezultă în mod clar că d_k, $1 \le k \le r$, sunt determinate mai puţin o asociere în divizibilitate.

Exemple. $\boxed{1.}$ Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 12 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$. Să determinăm forma diagonal-canonică a matricei A.

Soluţie. Avem $\varphi(A) = 2$ şi permutând prima coloană cu a doua vom obţine că:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 12 \\ 10 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Cum pe prima linie se găseşte 3 care nu divide cu 2 şi cum 3 împărţit la 2 dă câtul 1 şi restul 1, se adună la coloana a doua prima coloană înmulţită cu -1 şi apoi se permută primele două coloane. Obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 12 \\ 10 & -1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ -1 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a treia prima linie şi apoi adunăm la coloana a doua prima coloană înmulţită cu -2. Se obţine:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la coloana a treia coloana a doua inmulţită cu -1, apoi se permută coloana a doua cu a treia şi obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la coloana a treia coloana a doua inmulţită cu -3 şi obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = D.$$

Deci $D = \text{diag}(1,3,12)$ este forma diagonal-canonică a matricei *A*.

2) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 & 8 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 12 & 2 & -24 & 14 \end{pmatrix} \in M_3(3,4,\mathbb{Z})$. Să determinăm forma diagonal canonică a matricei *A*.

Soluţia 1. Avem $\varphi(A) = 2$ şi permutând prima coloană cu a doua, obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 & 8 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a treia prima linie înmulţită cu -1 şi apoi adunăm la coloana a doua, a treia şi a patra prima coloană înmulţită, respectiv, cu -3, cu 6 şi cu -4. Obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a treia linia a doua şi obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a treia linia a doua şi apoi adunăm la coloana a treia şi a patra coloana a doua inmulţită, respectiv cu 2 şi cu -1. Obţinem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(2,-6,0).$$

Soluţia 2. Determinăm forma diagonal canonică a matricei *A* folosind propoziţia precedentă.

$\Delta_1(A) \sim 2$ (c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul 1);

$\Delta_2(A) \sim 6$ (c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul 2);

$\Delta_3(A) \sim 0$ (c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul 3).

Deci $d_1 \sim 2$, $d_2 \sim 6$ şi se obţine:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Determinarea formei diagonal-canonice $D \in M(m,n,R)$ a unei matrice $A \in M(m,n,R)$ prin efectuarea de transformări elementare (adică, prin înmulţirea la stânga şi la dreapta matricei A cu matrice elementare) permite, dacă se cere, aflarea matricelor inversabile $U \in GL_m(R)$ şi $V \in GL_n(R)$, astfel încât $D = AUV$.

Test de autoevaluare 7

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & -10 \\ -8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$. Să se determine forma diagonal-canonică a matricei *A.*

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -12 & 6 \\ -4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in M(2,3,\mathbb{Z})$. Să se determine forma diagonal-canonică *D* a matricei *A* şi matricele inversabile *U* şi *V* astfel încât $D = AUV$

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} X-2 & -6 & 15 \\ -1 & X-1 & 5 \\ -1 & -2 & X+6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}[X])$. Să se determine forma diagonal canonică a matricei *A*.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 92 a acestei unităţi de învăţare.

1.5.3. Matrice asemenea

Fie R un inel necomutativ, X nedeterminată astfel încât $aX = Xa$, oricare ar fi $a \in R$. Ca şi în cazul comutativ se construieşte inelul polinoamelor $R[X]$. Luând în particular $R = M_n(K)$, K corp comutativ, putem vorbi de inelul polinoamelor $M_n(K)[X]$ (polinoame în nedeterminata X, având coeficienţii matrice din inelul $M_n(K)$).

Propoziţia 3. Fie $F(X) = A_m X^m + \ldots + A_1 X + A_0 \in M_n(K)[X]$ şi $A \in M_n(K)$. Atunci:

1) există maricele $B_{m-1},\ldots,B_1,B_0,M \in M_n(K)$, unice, astfel încât:

$$F(X) = (B_{m-1}X^{m-1} + \ldots + B_1 X + B_0)(I_n X - A) + M \qquad (*)$$

şi în plus, $M = A_m A^m + \ldots + A_1 A + A_0$;

2) există matricele $C_{m-1},\ldots,C_1,C_0,M' \in M_n(K)$, unice, astfel încât:

$$F(X) = (I_n X - A)(C_{m-1}X^{m-1} + \ldots + C_1 X + C_0) + M' \qquad (**)$$

şi în plus, $M' = A^m A_m + \ldots + AA_1 + A_0$.

Demonstraţie. 1) În relaţia $(*)$ scriem membrul drept sub formă canonică şi apoi identificăm coeficienţii corespunzători din cei doi membri. Obţinem $A_m = B_{m-1}$, $A_{m-1} = B_{m-2} - B_{m-1}A$, $A_{m-2} = B_{m-3} - B_{m-2}A$, …, $A_1 = B_0 - B_1 A$, $A_0 = R - B_0 A$, de unde $B_{m-1} = A_m$, $B_{m-2} = A_m A - A_{m-1}$,
$B_{m-3} = A_m A^2 + A_{m-1}A + A_{m-2}$, …, $B_0 = A_{m-1}A^{m-1} + \ldots + A_2 A + A_1$,
$M = A_m A^m + \ldots + A_1 A + A$.

2) Se demonstrează analog.

Observaţie. Se vede uşor că aplicaţia:

$$\varphi : M_n(X)[K] \to M_n(K[X]),\ \sum_{k\geq 0}(a_{ij}^k)_{ij} X^k \xrightarrow{\varphi} (\sum_{k\geq 0}(a_{ij}^k X^k)_{i,j}$$

este izomorfism de inele.

Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Atunci polinomul $I_n X - A \in M_n(K)[X]$ poate fi scris ca o matrice:

$$I_n X - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K[X])$$

şi se numeşte **matricea caracteristică** a lui A.

Polinomul $P_A(X) = \det(I_n X - A) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A \in K[X]$ se numeşte **polinomul caracteristic** al matricei A, unde $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ este *urma* matricei A.

Exemple. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Matricea caracteristică a lui A este:

$$I_3X - A = \begin{pmatrix} X-4 & 1 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -1 & 1 & X-1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X]).$$

Polinomul caracteristic al matricei A este:

$$p_A = \begin{pmatrix} X-4 & 1 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -1 & 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Teorema 2. (Hamilton-Cayley). Dacă $A \in M_n(K)$ şi $p_A(X)$ este polinomul său caracteristic, atunci $p_A(A) = 0$.

Demonstraţie. Dacă $B = I_nX - A$ este matricea caracteristică, matricea reciprocă a lui B este $B^* = (b_{ji}^*) \in M_n(K[X])$, unde $b_{ij}^* = (-1)^{i+j}\det B_{ij}$, B_{ij} fiind matricea care se obţine din *B*, eliminând linia *i* şi coloana *j*. Avem că $B^*B = BB^* = (\det B)I_n$ în $M_n(K[X])$, de unde obţinem egalitatea $\varphi^{-1}((\det B)I_n) = \varphi^{-1}(B^*)\varphi^{-1}(B)$, unde φ este izomorfimul din observaţia de mai înainte. Cum $B = I_nX - A$, rezultă că $\varphi^{-1}(I_nX - A)$ este un polinom monic de grad $n-1$, $Q(X) \in M_n(K)[X]$ şi atunci egalitatea precedentă se scrie sub forma:

$$I_nX^n - a_{n-1}I_nX^{n-1} + \ldots + a_1I_nX + a_0I_n = Q(X)(I_nX - A) + 0$$

unde $p_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

Conform propoziţiei precedente pct. 1), rezultă $p_A(A) = I_np_A(A) = 0$.

Definiţie. Fie K un corp comutativ şi $A, B \in M_n(K)$. Spunem că matricea A este asemenea cu matricea *B*, şi scriem $A \approx B$, dacă există $P \in GL_n(K)$ astfel încât $B = P^{-1}AP$.

Teorema 3 (teorema fundamentală a asemănării).
Fie $A, B \in M_n(K)$, K fiind corp comutativ . Sunt echivalente afirmaţiile:

1) $A \approx B$,

2) $I_nX - A \sim I_nX - B$ (ca matrice cu coeficienţi în inelul $K[X]$).

Demonstraţie. $1) \Rightarrow 2)$ Deoarece $A \approx B$, există $P \in GL_n(K)$ astfel încât $P^{-1}AP = B$. Atunci $P^{-1}(I_nX - A)P = I_nX - B$ şi cum $P^{-1}, P \in GL_n(K[X])$ rezultă că $I_nX - A \sim I_nX - B$.

$2) \Rightarrow 1)$ Cum $I_nX - A \sim I_nX - B$, există $U, V \in GL_n(K[X])$ astfel încât $U(I_nX - A)V = I_nX - B \quad (*)$

Cum *U* şi *V* sunt polinoame în nedeterminata *X* cu coeficienţi matrice din $M_n(K)$, aplicând propoziţia 3, avem:

$$U = (I_nX - A)Q_1 + M_1, \quad V = Q_2(I_nX - B) + M_2$$

cu $Q_1, Q_2 \in M_n(K[X])$ şi $M_1, M_2 \in M_n(K)$. Înlocuind U şi V în $(*)$ obţinem:
$M_1(I_nX - A)M_2 = I_nX - B - U(I_nX - A)Q_2(I_nX - B) - (I_nX - B)Q_1(I_nX - A)V +$
$+(I_nX - B)Q_1(I_nX - A)Q_2(I_nX - B)$, de unde:

$$M_1(I_nX - A)M_2 = I_nX - B - (I_nX - A)(V^{-1}Q_2 + Q_1U^{-1} - Q_1(I_nX - A)Q_2)(I_nX - B).$$

Dacă polinomul $V^{-1}Q_2 + Q_1U^{-1} - Q_1(I_nX - A)Q_2$ ar fi nenul, atunci membrul stâng al egalităţii precedente este un polinom de gradul întâi, iar membrul drept este un polinom de grad mai mare sau egal cu doi, contradicţie. Rezultă $V^{-1}Q_2 + Q_1U^{-1} - Q_1(I_nX - A)Q_2 = 0$, de unde:

$$M_1(I_nX - A)M_2 = I_nX - B$$

şi, identificând coeficienţii, rezultă $M_1M_2 = I_n$, $M_1AM_2 = B$. Deci $M_1 = M_2^{-1}$ şi $M_2^{-1}AM_2 = B$, adică $A \approx B$.

Observaţie. Din demonstraţia teoremei precedente se obţine totodată un mod de a calcula matricea inversabilă M_2 astfel încât $P = M_2^{-1}AM_2$.

Exemplu. Matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$ sunt asemenea deoarece matricele caracteristice $I_2X - A$ şi $I_2X - B$ sunt aritmetic echivalente.

Într-adevăr, aducând la forma diagonal-canonică matricele $I_2X - A$ şi $I_2X - B$, avem:

$$I_2X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - X - 6 \end{pmatrix} \sim I_2X - B.$$

Deci $I_2X - A \sim I_2X - B$, de unde $A \approx B$.

1.5.4. Matricea canonică Jordan

Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lambda \in K$. Matricea pătratică:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

se numeşte *celulă Jordan* de ordin n asociată lui $\lambda \in K$.

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ şi $n_1, n_2, \ldots, n_s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$, matricea pătratică

$$J_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

se numeşte *matrice canonică Jordan* de ordin n.

Când nu este pericol de confuzie o vom nota simplu J.

Propoziţia 4. Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lambda \in K$. Atunci:

$$I_n X - J_n(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & (X-\lambda)^n \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Deoarece $\det(I_n X - J_n(\lambda)) = (X-\lambda)^n$ rezultă

$\Delta_n(I_n X - J_n(\lambda)) = (X-\lambda)^n$. În matricea $I_n X - J_n(\lambda)$ minorul (de ordin $n-1$) obţinut eliminând ultima linie şi prima coloană este egal cu $(-1)^{n-1}$ şi deci $\Delta_{n-1}(I_n X - J_n(\lambda)) = 1$.

Cum, în plus, $\Delta_k(I_n X - J_n(\lambda)) \mid \Delta_{k+1}(I_n X - J_n(\lambda))$, $1 \le k \le n-2$, avem că $d_1 = d_2 = \ldots = d_{n-1} = 1$, iar $d_n = (X-\lambda)^n$ şi deci rezultă cerinţa din propoziţie.

Propoziţia 5. Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t \in K[X]$ astfel încât $(\varphi_i, \varphi_j) = 1$ pentru orice $1 \le i \ne j \le t$, atunci:

$$A_t = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_t \end{pmatrix} = D_t$$

*Demonstraţie***.** Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după t.

Pentru $t=1$ afirmaţia este evidentă, iar pentru $t=2$, cum $(\varphi_1, \varphi_2) = 1$, există $u, v \in K[X]$ astfel încât $u\varphi_1 + v\varphi_2 = 1$. Considerăm matricele $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -v\varphi_2 & u\varphi_1 \end{pmatrix}$ şi $V_2 = \begin{pmatrix} u & -\varphi_2 \\ v & \varphi_1 \end{pmatrix}$.

Avem că $\det U_2 = \det V_2 = u\varphi_1 + v\varphi_2 = 1$ şi deci $U_2, V_2 \in GL_2(K[X])$.

Mai mult,

$$U_2 A V_2 = \begin{pmatrix} u\varphi_1 + v\varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2(v\varphi_2 + u\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2 \end{pmatrix} = D_2.$$

Deci $A_2 \sim D_2$. Presupunem adevărată afirmaţia pentru $t-1$ şi să demonstrăm pentru t. Există deci $U_{t-1}, V_{t-1} \in GL_{t-1}(K[X])$ astfel încât $U_{t-1} A_{t-1} V_{t-1} = D_{t-1}$. Definim

$$U_t' = \begin{pmatrix} U_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } V_t' = \begin{pmatrix} V_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det(U_t') = \det U_{t-1}$ şi $\det(V_t') = \det V_{t-1}$. Atunci $U_t'V_t' \in GL_t([X])$. Mai mult, avem că:

$$U_t' A_t V_t' = \begin{pmatrix} U_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{t-1} & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{t-1}A_{t-1}V_{t-1} & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_{t-1} & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{t-2} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_t \end{pmatrix}.$$

Notăm:

$A_2' = \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{t-1} & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix}$ şi cum $(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{t-1}, \varphi_t) = 1$, conform pasului $t = 2$ există $U_2', V_2' \in GL_2(K[X])$ astfel încât $U_2' A_2' V_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_t \end{pmatrix}$. Fie acum $U_t'' = \begin{pmatrix} I_{t-2} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$ şi $V_t'' = \begin{pmatrix} I_{t-2} & 0 \\ 0 & V_2'' \end{pmatrix}$.

Avem acum că $U_2'', V_2'' \in GL_2(K[X])$ şi în plus,

$$U_t''U_t' A_t' V_t' V_t'' = \begin{pmatrix} I_{t-2} & 0 \\ 0 & U_2' A_2' V_2' \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} I_{t-2} & 0 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_t \end{pmatrix} = D_t.$$

Prin urmare există $U_t = U_t''U_t' \in GL_t(K[X])$ şi $V_t = V_t'V_t'' \in GL_t(K[X])$ astfel încât $U_tA_tV_t = D_t$, adică $A_t \sim D_t$.

Fie acum:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

o matrice canonică Jordan. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ cu $t \le s$ elementele distincte (eventual renumerotate) dintre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ şi q_i numărul celulelor Jordan asociate lui λ_i, $1 \le i \le t$, de ordine, respectiv $k_{i1} \ge k_{i2} \ge \ldots \ge k_{iq_i}$.

Avem $\sum_{i=1}^{t} q_i = s$ şi $\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{q_i} k_{ij}\right) = n$, unde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ este ordinul matricei Jordan *J.*

Aranjăm polinoamele care corespund (conform propoziţiei 4) celulelor Jordan în tabloul:

$$\begin{cases} (X-\lambda_1)^{k_{11}},(X-\lambda_2)^{k_{12}},\dots,(X-\lambda_1)^{k_{1q_1}} \\ (X-\lambda_1)^{k_{21}},(X-\lambda_2)^{k_{22}},\dots,(X-\lambda_1)^{k_{2q_2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (X-\lambda_1)^{k_{t1}},(X-\lambda_2)^{k_{t2}},\dots,(X-\lambda_t)^{k_{tq_t}} \end{cases} \qquad (*)$$

Fie $m=\max\{q_1,q_2,\dots,q_t\}$ şi $d_m,d_{m-1},\dots,d_1$ respectiv produsul polinoamelor din coloana întâi, a doua, ..., a $r-$a a tabloului $(*)$. Este clar că $d_1,d_2,\dots,d_m$ sunt polinoame monice cu grad $d_i\geq 1$, $1\leq i\leq m$ şi $d_1\,|\,d_2\,|\dots|\,d_m$.

Cu notaţiile precedente avem:

Teorema 4.

$$I_nX-J\sim\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & d_m \end{pmatrix},$$

unde numărul de 1 este $n-r$.

Demonstraţie.

$$I_nX-J\sim\begin{pmatrix} I_{n_1}X-J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & I_{n_2}X-J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_{n_s}X-J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}\overset{\text{Prop. 4}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & (X-\lambda_1)^{n_1} & & & & \\ \hdashline & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & (X-\lambda_s)^{n_s} \end{array}\right)\overset{\text{Prop. 5}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & d_1 & & & \\ & 0 & & & & d_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & d_m \end{pmatrix}.$$

Observaţie. În continuare, unele rezultate sunt date în cazul în care corpul K este corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe sau un subcorp al acestuia. Amintim că, corpul $\mathbb{C}$ este algebric închis, adică orice polinom de grad ≥ 1 are toate rădăcinile în $\mathbb{C}$. Rezultă că orice polinom $f\in\mathbb{C}[X]$ de grad ≥ 1 poate fi scris în mod unic sub forma:

$$f=\alpha(X-\lambda_1)^{l_1}(X-\lambda_2)^{l_2}\cdots(X-\lambda_p)^{l_p},$$

unde $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, pentru orice $1 \le i \neq j \le p$ şi $l_i \in \mathbb{N}^*$, oricare $1 \le i \le p$.

Dacă polinomul *f* este monic, atunci $\alpha = 1$.

Teorema fundamentală a teoriei lui Jordan este următoarea.

Teorema 5. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Atunci există o matrice canonică Jordan J_A, unic determinată mai puţin ordinea celulelor de pe diagonală, astfel încât $A \approx J_A$.

Demonstraţie. Cum $\det(I_n X - A) = P_A(X) \neq 0$, rezultă că există polinoamele monice $d_1, d_2, \ldots, d_m \in \mathbb{C}[X]$ unic determinate astfel încât

$$I_n X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_m \end{pmatrix},$$

unde $\text{grad} d_1 \ge 1$, $1 \le i \le r$ şi $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_m$.

*Polinoamele monice $d_1, d_2, \ldots, d_m$ se numesc **factorii invarianţi** ai matricei A.*

Polinomul d_m are toate rădăcinile în $\mathbb{C}$ şi fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ rădăcinile distincte ale lui d_m având respectiv multiplicităţile $k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{t1}$. Atunci $d_m = (X - \lambda_1)^{k_{11}} (X - \lambda_2)^{k_{21}} \cdots (X - \lambda_t)^{k_{t1}}$ şi cum $d_{m-1} \mid d_m$, avem:

$$d_{m-1} = (X - \lambda_1)^{k_{12}} (X - \lambda_2)^{k_{22}} \cdots (X - \lambda_t)^{k_{t2}},$$

unde $k_{11} \ge k_{12}$, $k_{21} \ge k_{22}$, …, $k_{t1} \ge k_{t2}$. Continuăm procedeul, descompunând succesiv factorii invarianţi, care se încheie cu descompunerea lui d_1 şi formăm tabloul $(*)$.

*Polinoamele $(X - \lambda_i)^{k_{ij}}$, $k_{ij} > 0$, din tabelul $(*)$ se numesc **divizorii elementari** ai matricei À.*

Fie J_A matricea canonică Jordan care are pe diagonala principală, într-o ordine oarecare, celulele Jordan $J_{k_{ij}}(\lambda_i)$, $1 \le i \le t$, $1 \le j \le q_i$ asociate divizorilor elementari ai matricei *A*. Conform teoremei 1 avem că:

$$I_n X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_m \end{pmatrix}.$$

Deci $I_nX - A \sim I_nX - J_A$ şi conform teoremei fundamentale a asemănării avem $A \approx J_A$.

Observaţie. Este clar că rezultatul din teorema precedentă rămâne adevărat pentru $A \in M_n(K)$, K fiind un corp comutativ, dacă şi numai dacă polinomul caracteristic p_A se descompune în produs de factori de gradul întâi în $K[X]$, adică p_A are toate rădădcinile în K.

Definiţie. O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numeşte diagonalizabilă dacă $A \approx \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ cu $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le n$, nu neapărat distincte.

Corolar. Fie K un subcorp al lui $\mathbb{C}$ şi $A \in M_n(K)$. Atunci matricea A este diagonalizabilă dacă şi numai dacă d_m este un produs de factori de gradul întâi din $K[X]$, monici şi distincţi.

Algoritmul de calcul al formei canonice Jordan a unei matrice din $M_n(\mathbb{C})$.

1. Se scrie matricea caracteristică.

2. Se aduce matricea caracteristică la forma diagonal-canonică (prin transformari elementare).

3. Se descompun factorii invarianţi în factori ireductibili (de gradul întâi) şi se calculează divizorii elementari.

4. Fiecărui divizor elemetar i se asociază celula Jordan corespunzătoare.

Exemple. $\boxed{1.}$ Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Să se găsească matricea canonică Jordan J_A astfel încât $A \approx J_A$.

Soluţia 1. Aducem la forma diagonal-canonică matricea caracteristică a lui A,

$$I_3X - A = \begin{pmatrix} X-1 & 3 & -4 \\ -4 & X+7 & -8 \\ -6 & 7 & X-7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}[X]),$$

având coeficienţii în inelul euclidian $\mathbb{C}[X]$.

Adunăm coloana a doua la coloana a treia şi apoi permutăm prima coloană cu a treia . Obţinem:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & X-1 \\ X-1 & X+7 & -4 \\ X & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la coloana a doua şi a treia prima coloană înmulţită cu 3, respectiv cu $X-1$ şi apoi adunăm la linia a doua şi a treia prima linie înmulţită cu $X-1$, respectiv cu X şi obţinem:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4X+4 & X^2-2X-3 \\ 0 & 3X+7 & X^2-X-6 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a doua linia a treia înmulţită cu -1, apoi adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -3 şi permutând linia a doua cu linia a treia se obţine:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & X^2+2X-15 \\ 0 & X-3 & -X+3 \end{pmatrix}.$$

Adunăm coloana a doua la coloana a treia, apoi împărţim linia a doua la 16 şi se obţine:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{(X+1)^2}{16} \\ 0 & X-3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu $3-X$ şi apoi adunăm la coloana a treia coloana a doua înmulţită cu $-\dfrac{(X+1)^2}{16}$ şi se obţine:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(X+1)^2}{16}(3-X) \end{pmatrix}$$

În fine, înmulţim prima linie cu -1 şi linia a treia cu -16. Se obţine:

$$I_3X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X+1)^2(X-3) \end{pmatrix}.$$

Avem un singur factor invariant $d_1 = (X+1)^2(X-3)$. Celulele Jordan asociate divizorilor elementari sunt $J_1(3)$ şi $J_2(-1)$ şi deci:

$$A \approx \begin{pmatrix} J_1(3) & 0 \\ 0 & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluţia 2. Formăm matricea caracteristică:

$$I_3X - A = \begin{pmatrix} X-1 & 3 & -4 \\ -4 & X+7 & -8 \\ -6 & 7 & X-7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}[X]).$$

Determinăm forma diagonal-canonică a matricei I_3X-A folosind propoziţia 2 din secţiunea 2.

$\Delta_1(I_3X-A)=1$ (c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul 1).

$\Delta_2(I_3X-A)=1$ (c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul 2).

$\Delta_3(I_3X-A)=\det\ (I_3X-A)=(X+1)^2(X-3)$.

Prin urmare, elementele formei diagonal-canonice ale matricei I_3X-A sunt $d_1=1,\ d_2=1,\ d_3=(X+1)^2(X-3)$ şi

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (X+1)^2(X-3)\end{pmatrix}.$$

Deci: $$I_3X-A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (X+1)^2(X-3)\end{pmatrix}.$$

Se continuă ca la soluţia 1.

$\boxed{2.}$ Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$. Să se găsească matricea canonică Jordan J_A astfel încât $A\approx J_A$.

Soluţia 1. Aducem la forma diagonal-canonică matricea caracteristică a lui A,

$$I_4X-A=\begin{pmatrix}X-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & X+6 & 0 & -13\\ 0 & 3 & X-1 & -3\\ 1 & 4 & 0 & X-8\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C}[X]),$$

având coeficienţi în inelul euclidian $\mathbb{C}[X]$.

Permutând între ele linii ale matricei I_4X-A avem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & X-8\\ X-1 & 3 & 0 & 3\\ 2 & X+6 & 0 & -13\\ 0 & 3 & X-1 & -3\end{pmatrix}.$$

Adunăm la coloana a doua şi a patra prima coloană înmulţită cu -4, respectiv cu $8-X$ şi apoi adunăm la linia a doua şi a treia prima linie înmulţită cu $1-X$ şi cu -2 şi obţinem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4X-7&0&X^2-9X+11\\0&-X+2&0&2X-3\\0&-3&-X+1&3\end{pmatrix}.$$

Adunăm coloana a doua la coloana a patra, apoi permutăm linia a doua cu linia a patra şi obţinem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&-X+1&0\\0&-X+2&0&X-1\\0&4X-7&0&X^2-5X+4\end{pmatrix}.$$

Înmulţim linia a doua $-\frac{1}{3}$ şi apoi înmulţim coloana a treia cu 3 obţinem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&X-1&0\\0&-X+2&0&X-1\\0&4X-7&0&X^2-5X+4\end{pmatrix}$$

Adunăm la coloana a treia coloana a doua înmulţită cu $1-X$ şi apoi permutăm coloana a treia cu coloana a patra. Se obţine:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&X-1&(X-1)(X-2)\\0&0&(X-1)(X-4)&(1-X)(4X-7)\end{pmatrix}.$$

Adunăm la coloana a treia coloana a doua înmulţită cu $2-X$ şi apoi adunăm la linia a patra linia a treia înmulţită cu $4-X$ şi obţinem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&X-1&0\\0&0&0&-(X-1)^3\end{pmatrix}.$$

Înmulţind cu -1 ultima coloană avem:

$$I_4X-A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&X-1&0\\0&0&0&(X-1)^3\end{pmatrix}$$

Factorii invarianţi sunt $d_1=X-1$ şi $d_2=(X-1)^3$, aceştia fiind şi divizorii elementari. Deci:

$$A \approx J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test de autoevaluare 8

1. Să se arate că matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ sunt asemenea.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$. Să se determine factorii invarianţi, divizorii elemetari şi forma canonică Jordan.

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$. Să se determine factorii invarianţi, divizorii elemetari şi forma canonică Jordan.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 93 a acestei unităţi de învăţare.

1.5.3. Polinomul minimal al unei matrice

Fie K un corp comutativ şi $A \in M_n(K)$. Există polinoame $f \in K[X]$, $f \neq 0$, astfel încât $f(A) = 0$ (de exemplu, polinomul caracteristic p_A al matricei A). Fie $m_A \in K[X]$ polinomul monic de grad minim din $K[X]$ astfel încât $m_A(A) = 0$. Evident m_A este unic determinat de condiţiile:

1) $m_A \in K[X]$, m_A este monic;

2) $m_A(A) = 0$;

3) Dacă $f \in K[X]$ şi $f(A) = 0$, atunci $m_A \mid f$.

Polinomul m_A se numeşte *polinomul minimal* al matricei A.

Teorema 6. Fie K un subcorp lui $\mathbb{C}$, $A \in M_n(K)$ şi $d_1, d_2, \ldots, d_m \in K[X]$ factorii invarianţi ai matricei A, Atunci:
1) $p_A = d_1 d_2 \ldots d_m$, $m_A = d_m$;

2) (teorema lui Frobenius) m_A şi p_A au aceiaşi factori ireductibili din $K[X]$.

Demonstraţie. 1) Cum $p_A = \det(I_n X - A)$, din teorema 1 rezultă că $p_A = d_1 d_2 \ldots d_m$. Să arătăm că $m_A = d_m$.

Fie mai întâi, $A = J_n(\lambda) \in M_n(K)$. Avem $A = \lambda I_n + N$ unde:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Cum $N^k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \; \ldots \; 0}^{k} & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 \; \ldots \; 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$, rezultă că $N^k \neq 0$, oricare ar fi $1 \leq k \leq n-1$ şi $N^n = 0$. Deoarece $p_A = (X - \lambda)^n$ şi $m_A \mid p_A$, rezultă că $m_A = (X - \lambda)^l$, $1 \leq l \leq n$. Cum $0 = m_A(A) = (A - \lambda I_n)^l = N^l$, $N^n = 0$, $N^{n-1} \neq 0$, rezultă $l = n$ şi deci $m_A = p_A = (X - \lambda)^n$ (singurul factor invariant).

Să presupunem acum că p_A se descompune în produs de factori de gradul întâi în $K[X]$. Există $P \in GL_n(K)$ astfel încât:

$$P^{-1}AP = J_A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in K.$$

Este clar că pentru $f \in K[X]$ avem

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow p^{-1}f(A)P = 0 \Leftrightarrow f(P^{-1}AP) = 0 \Leftrightarrow f(J_A) = 0,$$

adică

$$\begin{pmatrix} f(J_{n_1}(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_{n_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow f(J_{n_i}(\lambda_i)) = 0,\ 1 \le i \le s \Leftrightarrow (X - \lambda_i)^{n_i} \mid f,$$

$1 \le i \le n \Leftrightarrow d_m \mid f$, de unde $m_A = d_m$ (conform relaţiilor $(*)$).

În sfârşit, să presupunem că p_A nu se descompune în produs de factori de gradul întâi. Deoarece $K \subseteq \mathbb{C}$, atunci $I_n X - A \in M_n(K[X]) \subseteq M_n(\mathbb{C}[X])$ şi în plus $GL_n(K[X]) \subseteq GL_n(\mathbb{C}[X])$. Deci forma diagonal-canonică a matricei $I_n X - A$ în $M_n(K[X])$ este aceeaşi cu forma diagonal-canonică în $M_n(\mathbb{C}[X])$. Cum $p_A = d_1 d_2 \ldots d_m$ se descompune în produs de factori de gradul întâi în $\mathbb{C}[X]$ rezultă că polinomul monic de grad minim din $\mathbb{C}[X]$ care admite pe A ca rădăcină este d_m şi, totodată, d_m este polinomul din $K[X]$ cu aceleaşi proprietăţi. Deci $m_A = d_m$.

2) Cum $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_m$, din 1) rezultă evident afirmaţia.

Exemple. $\boxed{1.}$ Să se găsească p_A şi m_A dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soluţie. După cum am văzut la secţiunea precedentă, avem că:

$$I_3 - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X+1)^2(X-3) \end{pmatrix}$$

şi deci $p_A = m_A = (X+1)^2(X-3)$.

$\boxed{2.}$ Să se găsească p_A şi m_A dacă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Soluţie. Din secţiunea precedentă, avem că:

$$I_4 X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X-3)^3 \end{pmatrix}.$$

Atunci $p_A = (X-1)^4$ şi $m_A = (X-1)^3$.

1.5.6. Aplicaţii la studiul transformărilor liniare. Subspaţii invariante

Fie K un corp comutativ şi V, un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, $n = \dim_K V$. Un morfism de spaţii vectoriale (sau aplicaţie liniară) $u : V \to V$ se numeşte încă endomorfism al lui V sau încă transformare liniară a lui V. Vom nota cu $\mathrm{End}_K(V)$ mulţimea tuturor transformărilor liniare ale lui V sau încă mulţimea tuturor endomorfismelor spaţiului V.

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o $K-$bază a lui V şi $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(u)$ matricea asociată lui u în baza $\mathcal{B}$. Matricea A este definită de relaţiile $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $1 \le i \le n$. Vom defini polinomul caracteristic p_u şi polinomul minimal m_u al endomorfismului u prin $p_u = p_A$ şi $m_u = m_A$. Aceste definiţii sunt corecte în sensul că ele nu depind de alegerea bazei $\mathcal{B}$. Într-adevăr, fie $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ o altă $K-$bază a lui V şi $p \in GL_n(K)$ matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$. Dacă $A' = (a_{ij}') = M_{\mathcal{B}'}(u)$, atunci $A' = P^{-1}AP$, adică $A \approx A'$ şi deci $I_n X - A \sim I_n X - A'$. Prin urmare $p_A = p_{A'}$ şi $m_A = m_{A'}$ şi deci definiţiile date pentru p_u şi m_u sunt corecte.

Teorema 7. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune finită n peste $\mathbb{C}$ şi $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Atunci există o bază $\mathcal{B}'$ a lui V' astfel încât $M_{\mathcal{B}'}(u)$, notată J_u să fie o matrice canonică Jordan. Mai mult, J_u este unic determinată mai puţin ordinea celulelor Jordan de pe diagonala matricei J_u.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o $\mathbb{C}-$bază a lui V şi $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. Există $P = (p_{ij}) = GL_n(\mathbb{C})$ astfel încât $P^{-1}AP = J_A$ este matrice canonică Jordan. Fie $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$, unde $e_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, $1 \le i \le n$. Deoarece P este matrice inversabilă, rezultă că $\mathcal{B}'$ este o $\mathbb{C}-$bază a lui V şi, în plus, $M_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}AP = J_A = J_u$. Unicitatea este evidentă.

Definim acum **suma directă de subspaţii**, noţiune pe care o vom folosi în continuare.

Fie K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial şi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ subspaţii vectoriale ale lui V. Fie $L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \{x \in V \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ x_i \in L_i,\ 1 \le i \le n\}$ suma subspaţiilor L_i, $1 \le i \le n$.

Propoziţia 6. Fie V un un K-spaţiu vectorial şi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ subspaţii vectoriale ale lui V şi $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) oricare ar fi $x \in L$ se scrie în mod unic sub forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in L_i$, $1 \le i \le n$;

2) Dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $x_i \in L_i$, $1 \le i \le n$, atunci $x_i = 0$, $1 \le i \le n$;

3) pentru orice $1 \le j \le n$ avem $L_j \cap \left(\sum_{i \ne j} L_i \right) = 0$.

Demonstraţie. $1) \Rightarrow 2)$. Fie $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $x_i \in L_i$, $1 \le i \le n$. Avem $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} 0$ şi din unicitatea scrierii lui $0 \in V$ rezultă $x_i = 0$, $1 \le i \le n$.

$2) \Rightarrow 3)$. Fie $x \in L_j \cap \left(\sum_{i \ne j} L_i \right)$. Atunci $x_i \in L_j$ şi $x \in \sum_{i \ne j} L_i$, deci avem $x \in \sum_{i \ne j} x_i$,adică $x_1 + \ldots + x_{j-1} + (-x) + x_{j+1} + \ldots + x_n = 0$. Cum $-x \in L_i$ şi $x_i \in L_i$ pentru $i \ne j$, din 2) rezultă că $x = 0$ şi deci $L_j \cap \left(\sum_{i \ne j} L_i \right) = 0$.

$3) \Rightarrow 1)$. Fie $x \in L$ astfel încât $x = \sum_{i=1j}^{n} x_i = \sum_{i=1j}^{n} x_i'$, $x_i, x_i' \in L_i$, $1 \le i \le n$.

Pentru orice j avem $x_j - x_j' = \sum_{i \ne j} (x_i' - x_i) \in \sum_{i \ne j} L_i$ şi deci:

$$x_j - x_j' \in L_i \cap \left(\sum_{i \ne j} L_i \right) = 0,$$

Prin urmare $x_j = x_j'$, oricare $1 \le i \le n$.

Dacă $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$ satisface una din condiţiile echivalente ale propoziţiei precedente, spunem că L este **sumă directă** a subspaţiilor L_i, $1 \le i \le n$ şi scriem $L = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$.

Spunem că spaţiul vectorial V este **sumă directă** a subspaţiilor L_i, $1 \le i \le n$, dacă $V = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$.

În particular, dacă $n = 2$ avem $V = L_1 \oplus L_2$ dacă şi numai dacă $V = L_1 + L_2$ şi $L_1 \cap L_2 = 0$.

Observaţie. Fie V un $K-$spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ subspaţii ale lui V. Atunci:

$$\dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^{n} L_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(L_i).$$

Această relaţie rezultă din faptul că dacă $\mathcal{B}_i$ este o bază a lui L_i, pentru orice $1 \le i \le n$, atunci $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ este o bază pentru $\bigoplus_{i=1}^{n} L_i$.

Definiţie. Fie V un $K-$spaţiu vectorial, L un subspaţiu vectorial al lui V şi $u \in \mathrm{End}_K(V)$.

1) L se numeşte invariant în raport cu u dacă $u(L) \subseteq L$.

2) $V \neq 0$ se numeşte indecompozabil în raport cu u dacă din $V = L_1 \oplus L_2$ cu L_1 şi L_2 subspaţii invariante în raport cu u, rezultă $L_1 = 0$ sau $L_2 = 0$.

În caz contrar V se numeşte decompozabil în raport cu u.

3) subspaţiul invariant $L \neq 0$ este indecompozabil în raport cu u dacă este indecompozabil ca spaţiu vectorial în raport cu restricţia $u' = u|_L$.

Propoziţia 7. Fie V un $K-$spaţiu vectorial şi $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Atunci V poate fi reprezentat ca o sumă directă de subspaţii indecompozabile în raport cu u,

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s.$$

Demonstraţie. Raţionăm prin inducţie după $n = \dim_K V$.

Dacă $n = 1$, atunci V este indecompozabil.

Dacă $n > 1$ şi V este indecompozabil în raport cu u, atunci este clar.

Dacă $n > 1$, iar V este decompozabil în raport cu u, atunci $V = L_1 \oplus L_2$, unde L_1 şi L_2 sunt subspaţii nenule invariante în raport cu u. Cum $\dim_K L_i < n$, $i \in \{1,2\}$, se aplică ipoteza de inducţie pentru L_1 şi L_2.

Propoziţia 8. Fie V un $K-$spaţiu vectorial şi $u \in \mathrm{End}_K(V)$ astfel încât $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s$, unde $L_1, L_2, \ldots, L_s$ sunt subspaţii ale lui V, invariante în raport cu u, Dacă $u' = u|_{L_i}$ şi $\mathcal{B}_i$ este o $K-$bază a lui L_i, $1 \le i \le n$, atunci $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_i$ este o $K-$bază a lui V şi

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(u_1) & & & \\ & M_{\mathcal{B}_2}(u_2) & & \boxed{0} \\ & & \ddots & \\ & \boxed{0} & & M_{\mathcal{B}_s}(u_s) \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{B}$ este o $K-$bază a lui V rezultă din scrierea lui V ca sumă directă de $L_1, L_2, \ldots, L_s$. Deoarece subspaţiile L_i, $1 \le i \le s$, sunt invariante în raport cu u, rezultă imediat că matricea $M_{\mathcal{B}}(u)$ are forma de mai sus.

Dacă $x \in V$, cum $\dim_K V = n$, rezultă că vectorii $x, u(x), \ldots, u^n(x)$ sunt liniar dependenţi. Deci există $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i(x) = 0$, adică $g(u)(x) = 0$, unde $0 \neq g(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \in K[X]$. Fie $m_x(X) \in K[X]$ polinomul monic de grad minim, astfel încât $m_x(u)(x) = 0$. Polinomul m_x se numeşte polinomul minimal al vectorului $x \in V$ şi, este clar că are următoarele proprietăţi:

(i) Dacă $g \in K[X]$ astfel încât $g(u)(x) = 0$, atunci $m_x \mid g$.

(ii) Dacă $d = \text{grad}(m_x)$, atunci vectorii $x, u(x), \ldots u^{d-1}(x)$ sunt liniar independenţi.

(iii) $m_x \mid m_u$ oricare ar fi $x \in V$.

Propoziţia 9. Fie V un $K-$spaţiu vectorial şi $u \in \text{End}_K(V)$. Atunci V este indecompozabil în raport cu u şi p_u se descompune în factori de gradul întâi în $K[X]$ (când $K = \mathbb{C}$ este adevărat) dacă şi numai dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $J_u = J_n(\lambda)$.

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o $K-$bază a lui V astfel încât $M_{\mathcal{B}}(u) = J_n(\lambda)$. Dacă $e = e_n$, atunci $u(e) = u(e_n) = e_{n-1} + \lambda e_n = e_{n-1} + \lambda e$, de unde rezultă $e_{n-1} = (u - \lambda 1_V)(e)$. Analog, din $u(e_{n-1}) = e_{n-2} + \lambda e_{n-1}$, obţinem $e_{n-2} = (u - \lambda 1_V)^2(e_{n-1}) = (u - \lambda 1_V)^2(e)$. În general, avem $e_k = (u - \lambda 1_V)^{n-k}(e)$, $1 \leq k \leq n-1$. Am văzut că $p_u = (X - \lambda)^n$ şi cum $m_u \mid p_u$, rezultă că $m_u = (X - \lambda)^l$, cu $1 \leq l \leq n$. Cum $(u - \lambda 1_V)^{n-1}(e) = e_1 \neq 0$, rezultă că $l > n-1$ şi deci $l = n$. Atunci $m_u = (X - \lambda)^n = p_u = m_e$.

Dacă, prin absurd, V este decompozabil în raport cu u, atunci există L_1 şi L_2, subspaţii nenule ale lui V, invariante în raport cu u astfel încât $V = L_1 \oplus L_2$. Fie $n_i = \dim_K V_i < n$, $i \in \{1,2\}$ şi $e = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in L_1$ şi $x_2 \in L_2$. Cum $m_{x_i} \mid m_u$, $i \in \{1,2\}$, rezultă că $m_{x_i} = (X - \lambda)^{d_i}$, unde $d_i = \text{grad}\, m_{x_i}$, $i \in \{1,2\}$. Deoarece vectorii $x_i, u(x_i), \ldots u^{d_i - 1}(x_i)$ sunt liniar independenţi, rezultă $d_i \leq n_i < n$, $i \in \{1,2\}$. Dacă $d = \max\{d_1, d_2\}$, atunci $(u - \lambda 1_V)^d(x_i) = 0$, $i \in \{1,2\}$ şi deci $(u - \lambda 1_V)^d(e) = 0$. Cum $m_e = (X - \lambda)^n$, rezultă $d \geq n$, contradicţie.

Evident $p_u = (X - \lambda)^n$ se descompune în factori de gradul întâi în $K[X]$.

„$\Rightarrow$" Fie s numărul celulelor Jordan ale lui J_u. Să arătăm că $s = 1$. Dacă $s > 1$, fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o $K-$bază a lui V astfel încât:

$$M_{\mathcal{B}}(u)=J_u=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

unde $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$. Dacă notăm $\mathcal{B}_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n_1}\}$, $\mathcal{B}_2=\{e_{n_1+1},\ldots,e_{n_1+n_2}\}$, …, $\mathcal{B}_s=\{e_{n_1+\ldots n_{s-1}+1},\ldots,e_n\}$, fie $L_i=\langle\mathcal{B}_i\rangle$ subspaţiul generat de $\mathcal{B}_i$ pentru orice $1\le i\le s$. Avem $L_1=Ke_1\oplus\ldots\oplus Ke_n$, $L_2=Ke_{n_1+1}\oplus\ldots\oplus Ke_{n_1+n_2}$, … , $L_s=Ke_{n_1+\ldots n_{s-1}+1}\oplus\ldots\oplus Ke_n$. Atunci L_i este subspaţiu al lui V, invariant în raport cu u pentru orice $1\le i\le s$ şi $V=L_1\oplus\ldots\oplus L_s$. Deci V este decompozabil în raport cu u, contradicţie.

Din cele de mai sus rezultă

Teorema 8. Orice reprezentare a lui V ca sumă directă de subspaţii invariante indecompozabile în raport cu u are s sumanzi şi dimensiunile acestora coincid cu ordinele celulelor Jordan ale matricei J_u.

1.5.7. Vectori şi valori proprii. Diagonalizarea matricelor pătratice

Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul comutativ K, L un subspaţiu al lui V şi $u\in\mathrm{End}_K(V)$. Observăm că dacă L este un subspaţiu invariant în raport cu u, de dimensiune 1 şi $e\in L$ este un generator al lui L, atunci $e\ne 0$ şi $u(e)=\lambda e$ cu $\lambda\in K$. Reciproc, dacă $u(e)=\lambda e$ cu $0\ne e\in V$ şi $\lambda\in K$, iar $L=Ke$, atunci L est invariant în raport cu u şi $\dim_K V=1$.

Definiţie. Un scalar $\lambda\in K$ se numeşte **valoare proprie** sau **valoare caracteristică** a lui u dacă există $e\in V$, $e\ne 0$, astfel încât $u(e)=\lambda e$. Vectorul e se numeşte **vectorul propriu** al lui u asociat valorii proprii λ.

Teorema 9. Fie K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial, $n=\dim_K V$ şi $u\in\mathrm{End}_K(V)$. Pentru un scalar $\lambda\in K$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) λ este valoarea proprie a lui u;

2) $p_u(\lambda)=0$.

Cu alte cuvinte, valorile proprii ale lui u sunt exact rădăcinile din K ale lui p_u. În particular, dacă $K=\mathbb{C}$, valorile proprii coincid cu rădăcinile lui p_u.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ o $K-$bază a lui V, $A=(a_{ij})=M_{\mathcal{B}}(u)$ şi $x\in V$, $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n$ cu $\alpha_i\in K$, $1\le i\le n$. Atunci:

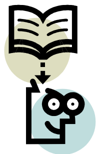
$$u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u(e_j)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i e_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_j\right)e_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i e_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_i=\lambda\alpha_i,\ 1\le i\le n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Prin urmare, pentru un scalar $\lambda \in K$ există $x \in V$, $x \neq 0$, astfel încât $u(x) = \lambda x$ dacă şi numai dacă sistemul omogen $(*)$ are soluţii nenule dacă şi numai dacă $\det(\lambda I_n - A) = 0$, adică $p_u(\lambda) = 0$.

Observaţie. Dacă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o $K-$bază a lui V şi $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$, $x \neq 0$, atunci x este vector propriu al lui u asociat valorii proprii λ dacă şi numai dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ constituie o soluţie nenulă a sistemului omogen $(*)$. Prin urmare, determinarea vectorilor proprii revine la determinarea soluţiilor nenule ale sistemului omogen $(*)$.



Propoziţia 10. Fie V un $K-$spaţiu vectorial, $u \in \mathrm{End}_K(V)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ valori proprii distincte ale lui u, iar $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vectori proprii asociaţi, respectiv acestor valori proprii. Atunci $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt vectori liniar independenţi.

Demonstraţie. Raţionăm prin inducţie după m. Pentru $m = 1$, cum $x_1 \neq 0$, rezultă că x_1 este liniar independent. Presupunem afirmaţia adevărată pentru m, adică vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt liniar independenţi. Fie:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m = 0. \qquad (1)$$

Avem $u\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = 0$, adică $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(x_i) = 0$, de unde:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0 \qquad (2)$$

Presupunând că $\lambda_m \neq 0$, înmulţim relaţia (1) cu $-\lambda_m$ şi obţinem:

$$-\alpha_1 \lambda_m x_1 - \ldots - \alpha_{m-1} \lambda_m x_{m-1} - \alpha_m \lambda_m x_m = 0. \qquad (3)$$

Adunând relaţiile (2) şi (3), obţinem:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_1 - \lambda_{m-1}) x_{m-1} = 0.$$

Din ipoteza de inducţie rezultă:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0,\ \ldots,\ \alpha_{m-1}(\lambda_1 - \lambda_{m-1}) = 0,\ \alpha_m \lambda_m = 0.$$

Cum $\lambda_m \neq 0$ şi $\lambda_i \neq \lambda_j$, oricare ar fi $1 \leq i \neq j \leq m$, rezultă că:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = \alpha_m = 0.$$

Deci $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt vectori liniar independenţi.

Corolar. Fie V un $\mathbb{C}-$spaţiu vectorial, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ având valorile proprii distincte. Atunci vectorii proprii asociaţi formează o bază a lui V.

Fie V un $K-$spaţiu vectorial, $\dim_K V = n$, $u \in \mathrm{End}_K(V)$ şi $\lambda \in K$ o valoare proprie a lui u. Atunci λ este rădăcină a polinomului caracteristic p_u şi fie k_λ multiciplicitatea rădăcinii λ. Numărul k_λ se numeşte **multiplicitatea algebrică** a valorii proprii λ.

Notăm $L_\lambda = \{x \in V \mid u(x) = \lambda x\}$. Se vede uşor că L_λ este subspaţiu al lui V, invariant în raport cu u. Numărul $\dim_K L_\lambda$ se numeşte **multiplicitatea geometrică a lui** λ.

Propoziţia 11. Fie $u \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V = n$. Pentru orice valoare proprie λ a lui u avem $\dim_K L_\lambda \le k_\lambda$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ o bază a lui L_λ, $r = r_\lambda = \dim_K L_\lambda$. Completăm baza $\mathcal{B}_1$ la o bază a lui V, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_n\}$. Cum $e_1, \ldots, e_r \in L_\lambda$, avem că $u(e_1) = \lambda e_1 = \lambda e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_{r+1} + \ldots + 0 \cdot f_n$,
$u(e_2) = \lambda e_2 = 0 \cdot e_1 + \lambda \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \ldots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_{r+1} + \ldots + 0 \cdot f_n$, ...,
$u(e_r) = \lambda e_r = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_{r-1} + \lambda e_r + 0 \cdot f_{r+1} + \ldots + 0 \cdot f_n$,

$u(f_{r+1}) = \alpha_1^{r+1} e_1 + \ldots + \alpha_r^{r+1} e_r + \alpha_{r+1}^{r+1} f_{r+1} + \ldots + \alpha_n^{r+1} f_n$. ...,

$u(f_n) = \alpha_1^n e_1 + \ldots + \alpha_r^n e_r + \alpha_{r+1}^n f_{r+1} + \ldots + \alpha_n^n f_n$ şi deci matricea asociată lui u în baza $\mathcal{B}$ este:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^{r+1} & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \alpha_r^{r+1} & \ldots & \alpha_r^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{r+1}^{r+1} & \ldots & \alpha_{r+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^{r+1} & \ldots & \alpha_{r+1}^{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \lambda & A \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Atunci $XI_n - M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r(X-\lambda) & -A \\ 0 & I_{n-r}X - B \end{pmatrix}$ şi

$p_u(X) = \det(XI_n - M_{\mathcal{B}}(u)) = (X-\lambda)^r p_B(X)$. Dar $p_u(X) = (X-\lambda)^{k_\lambda} q(X)$ cu $q(\lambda) \ne 0$ şi deci $r \le k_\lambda$, adică $\dim_K L_\lambda \le k_\lambda$.

Fie V un $K-$spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Transformarea liniară u se numeşte **diagonalizabilă** dacă există o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului V astfel încât matricea $M_{\mathcal{B}}(u)$ să fie diagonalizabilă.

Observăm că dacă $M_{\mathcal{B}}(u)$ este diagonalizabilă, adică $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, atunci $P_{M_{\mathcal{B}}(u)}(X) = p_D(X)$ şi deci $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt chiar valorile proprii ale lui $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Teorema 10. Fie V un $\mathbb{C}-$ spaţiu vectorial, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ şi $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ rădăcinile distincte ale lui p_u şi $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}^*$ multiciplicităţile acestor rădăcini. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Transformarea liniară u este diagonalizabilă.

2) Există o bază $\mathcal{B}$ a lui V formată numai cu vectori proprii ai transformării liniare u.

3) $V = L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m}$.

4) Pentru orice $1 \le i \le m$, $\dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_i} = k_i$.

Demonstraţie. $1) \Rightarrow 2)$. Din ipoteză există o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui V astfel încât $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ cu $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le n$ nu neapărat distincte. Atunci $f(e_i) = \lambda_1 e_1, \ldots, f(e_n) = \lambda_n e_n$ şi deci baza $\mathcal{B}$ este formată numai cu vectori proprii ai lui u.

$2) \Rightarrow 3)$ Din propoziţia 10 rezultă că suma subspaţiilor L_{λ_i}, $1 \le i \le m$, este directă şi avem $L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m} \subset V$. Reciproc, fie $x \in V$ şi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului V formată cu vectori proprii ai lui u. Atunci $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ cu $\alpha_j \in K$, $1 \le j \le n$ şi grupând termenii $\alpha_j e_j$ care aparţin aceluiaşi subspaţiu L_{λ_i}, rezultă că $x \in L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m}$.

$3) \Rightarrow 4)$ Să presupunem că există l, $1 \le l \le m$, astfel încât $\dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_l} < k_l$. Cum $\dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_i} \le k_i$ pentru orice $1 \le i \le m$, rezultă că

$$n = \dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_1} + \ldots + \dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_l} + \ldots + \dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_m} < k_1 + \ldots k_l + \ldots + k_m = n,$$

de unde $n < n$, contradicţie.

$4) \Rightarrow 1)$ Avem $L_{\lambda_1} + \ldots + L_{\lambda_m} = L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m} \subset V$. Cum

$$\dim_{\mathbb{C}}(L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m}) = \dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_1} + \ldots + \dim_{\mathbb{C}} L_{\lambda_m} = k_1 + \ldots + k_m = n$$

şi deci $L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m} = V$. Alegând câte o bază $\mathcal{B}_j$ în fiecare L_{λ_j} pentru orice $1 \le j \le m$ şi reunind aceste baze se obţine o bază pentru V, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$. Dacă $\mathcal{B}_1 = \{e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{e_1^2, \ldots, e_{k_2}^2\}$, …, $\mathcal{B}_m = \{e_1^m, \ldots, e_{k_m}^m\}$, atunci $\mathcal{B}_1 = \{e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{k_2}^2, \ldots, e_1^m, \ldots, e_{k_m}^m\}$. Avem:

$u(e_1^1) = \lambda_1 e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_1}^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_m}^m$,

$u(e_2^1) = 0 \cdot e_1^1 + \lambda_1 e_2^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_1}^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_m}^m$, …

$u(e_{k_1}^1) = 0 \cdot e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 + \ldots + \lambda_1 e_{k_1}^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_m}^m$, …

$u(e_{k_m}^m) = 0 \cdot e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 + \ldots + 0 \cdot e_{k_m}^1 + \ldots + \lambda_m e_{k_m}^m$, de unde rezultă că

$M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_m)$ unde λ_1 se repetă de k_1 ori, λ_2 se repetă de k_2 ori, …, λ_m se repetă de k_m ori. Deci u este diagonalizabilă.

Observaţie. Teorema precedentă dă algoritmul de diagonalizare a matricelor pătratice.

Exemple. $\boxed{1.}$ Fie $V \in \mathbb{R}^3 = M(3,1,\mathbb{R})$ şi $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ astfel încât:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

unde $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, iar $e_1 = (1,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0)^t$ şi $e_3 = (0,0,1)^t$. (Dacă A este o matrice, atunci A^t este transpusa sa.)

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării u.

Este transformarea liniară u diagonalizabilă?

Soluţie. Avem:

$$p_u = \det(I_3 X - M_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} X-5 & 6 & 6 \\ 1 & X-4 & -2 \\ -3 & 6 & X+4 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1).$$

Rădăcinile din $\mathbb{R}$ ale lui p_u sunt $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 2$, aceste fiind valorile proprii.

Pentru $\lambda_1 = 1$ sistemul omogen $(*)$ este:

$$(S_1) \quad \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar pentru $\lambda_2 = 2$ sistemul omogen $(*)$ este

$$(S_2) \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemele (S_1) şi (S_2) se scriu, respectiv:

$$(S_1') \quad \begin{cases} -4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0; \end{cases},$$

$$(S_2') \quad \begin{cases} -3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Vectorii proprii pentru u asociaţi valorilor proprii $\lambda_1 = 1$ şi respectiv $\lambda_2 = 2$ sunt tocmai soluţiile nenule ale sistemelor omogene (S_1') şi respectiv (S_2').

Pentru $\lambda = 1$, vectorii proprii pentru u sunt vectorii nenuli de forma $\begin{pmatrix} 3x \\ -x \\ 3x \end{pmatrix}$ cu x real. Pentru $\lambda = 2$ vectorii proprii ai lui u sunt vectorii nenuli de forma $\begin{pmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cu y, z reale. Deci $L_1 = \{(3x, -x, 3x)^t \mid x \in \mathbb{R}\}$ şi $L_2 = \{(2y+2z, y, z)^t \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, iar $\dim_{\mathbb{R}} L_1 = 1$ şi $\dim_{\mathbb{R}} L_2 = 2$. Cum multiplicităţile algebrice şi geometrice ale lui 1 şi respectiv 2 sunt egale, rezultă că u este diagonalizabilă,

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Fie $V \in \mathbb{R}^4 = M(4,1,\mathbb{R})$ şi $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ astfel încât:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}),$$

unde $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, iar $e_1 = (1,0,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0,0)^t$, $e_3 = (0,0,1,0)^t$, $e_4 = (0,0,0,1)^t$.

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării u.

Este transformarea liniară u diagonalizabilă ?

Soluţie. Avem:

$$p_u = \det(I_4 X - M_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & X-4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3)^4.$$

Polinomul caracteristic p_u are rădăcina $\lambda = 3$, aceasta fiind valoarea proprie.

Pentru $\lambda = 3$ sistemul omogen $(*)$ devine:

$$(S_1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

adică $\alpha_2 = 0$, $-\alpha_1 - \alpha_4 = 0$, $-\alpha_2 = 0$ sau $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Rezultă $\alpha_1 = -x$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = y$, $\alpha_4 = x$ cu x, y reale.

Vectorii proprii pentru u care corespund valorii proprii $\lambda = 3$ sunt vectorii nenuli de forma $(-x, 0, y, x)^t$ cu x, y reale.

Deci $L_3 = \{(-x, 0, y, x)^t \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, iar $\dim_{\mathbb{R}} L_3 = 2$. Cum multiplicitatea geometrică a lui 3 este 2, iar multiplicitatea sa algebrică este 4, iar $4 \neq 2$, rezultă că u nu este diagonalizabilă,

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

Test de autoevaluare 9

1. Fie $V \in \mathbb{R}^3$ şi $u \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ astfel încât $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

unde $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, iar $e_1 = (1,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0)^t$ şi $e_3 = (0,0,1)^t$.

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării u.

Este transformarea liniară u diagonalizabilă ?

2. Fie $V \in \mathbb{R}^4$ şi $u \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ astfel încât $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

unde $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, iar $e_1 = (1,0,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0,0)^t$, $e_3 = (0,0,1,0)^t$ şi $e_4 = (0,0,0,1)^t$.

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării u.

Este transformarea liniară u diagonalizabilă ?

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 93 a acestei unităţi de învăţare.

1.6. Forme biliniare şi forme pătratice

1.6.1. Forme biliniare

Vom considera numai spaţii vectoriale reale, de dimensiune finită.

Definţie. Fie V un spaţiu vectorial real. Se numeşte formă biliniară pe V o aplicaţie $b: V \times V \to \mathbb{R}$ care are proprietăţile:

1) $b(x+x', y) = b(x,y) + b(x', y)$, $b(x, y+y') = b(x,y) + b(x,y')$;

2) $b(\lambda x, y) = \lambda b(x,y)$, $b(x, \lambda y) = \lambda b(x,y)$,

oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x, x', y, y' \in V$.

Deci b este $\mathbb{R}-$liniară în fiecare argument.

Forma biliniară b se numeşte **simetrică** dacă $b(x,y) = b(y,x)$, oricare ar fi $x, y \in V$.

Exemple. $\boxed{1.}$ Fie $\mathbb{R}-$spaţiul vectorial, $V = \mathbb{R}^2$. Aplicaţia $b: V \times V \to \mathbb{R}$,

$b((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ este o formă biliniară simetrică, iar aplicaţia $b': V \times V \to \mathbb{R}$, $b'((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ este o formă biliniară care nu este simetrică.

$\boxed{2.}$ Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ o matrice, $V = \mathbb{R}^2$ şi $b: V \times V \to \mathbb{R}$ definită prin $b((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = a_{11}x_1x_2 + a_{21}x_1y_2 + a_{12}x_2y_1 + a_{22}y_1y_2$. Se verifică uşor că b este o formă biliniară. Dacă A este o matrice simetrică, atunci forma b este, de asemenea, simetrică.

$\boxed{3.}$ Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \alpha x$ şi $g(x) = \beta x$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicaţia $b: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(x,y) = f(x)g(y)$ este o formă biliniară simetrică.

Matricea unei forme biliniare

Fie V un $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ o bază a lui V şi $b: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o formă biliniară. Dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ sunt vectori ai lui V, atunci $b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$.

Dacă notăm cu $a_{ji} = b(e_i, e_j)$, atunci $b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j$.

Matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte matricea formei biliniare b în baza $\mathcal{B}$.

Propoziţia 1. O formă biliniară $b: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea formei biliniare într-o bază oarecare este simetrică.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ o bază a spaţiului V. Dacă b este simetrică, atunci $b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$, adică $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice $1 \le i$, $j \le n$ şi deci matricea $A = (a_{ij})$ este simetrică.

Invers, să presupunem că matricea $A=(a_{ij})$ a formei biliniare b în baza $\mathcal{B}$ este simetrică. Deci $b(e_j,e_i)=a_{ij}=a_{ji}=b(e_i,e_j)$ pentru orice $1\le i$, $j\le n$. Dacă $x,y\in V$, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$, atunci:

$$b(x,y)=b\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_jb(e_i,e_j)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^n y_jx_ib(e_j,e_i)=b\left(\sum_{j=1}^n y_je_j,\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=b(y,x)$$

şi deci b este simetrică.

Teorema 1. Fie V un $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial real, $\dim V=n$, $b:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o formă biliniară, $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',\dots,e_n'\}$ două baze ale lui V şi $P=(p_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Dacă A şi A' sunt matricele lui b în bazele $\mathcal{B}$, respectiv $\mathcal{B}'$, atunci $A'=P^tAP$.

Demonstraţie. Avem $e_j'=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i$, $1\le j\le n$. Dacă $A=(a_{ij})$, $A'=(a'_{ij})$, atunci $a_{ji}=b(e_i,e_j)$, $a'_{ji}=b(e'_i,e'_j)$ şi deci: $a_{ji}'=b(e_i',e_j')=$

$$=b\left(\sum_{k=1}^n p_{ki}e_k,\sum_{l=1}^n p_{lj}e_l\right)=\sum_{k,l=1}^n p_{ki}p_{lj}b(e_k,e_l)=\sum_{l=1}^n p_{lj}\left(\sum_{k=1}^n a_{lk}p_{ki}\right)=\sum_{l=1}^n p_{jl}^t\left(\sum_{k=1}^n a_{lk}p_{ki}\right).$$

Prin urmare, $a'_{ji}=\sum_{l=1}^n p_{jl}^t\left(\sum_{k=1}^n a_{lk}p_{ki}\right)$., oricare $1\le i$, $j\le n$. Deci $A'=P^tAP$, unde $P^t=(p_{jl}^t)$ este transpusa matricei P.

Corolar. Cu notaţiile din teorema precedentă, A şi A' fiind matricele asociate formei biliniare b în bazele $\mathcal{B}$ şi respectiv $\mathcal{B}'$, avem:

$$\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}A'.$$

Acest corolar ne permite să dăm:

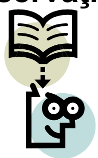
Definiţie. Se numeşte **rangul** formei biliniare b, rangul matricei A asociată lui b într-o bază oarecare $\mathcal{B}$ a lui V.

1.6.2. Forme pătratice. Forma canonică a unei forme pătratice

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial real. O aplicaţie $q: V \to \mathbb{R}$ se numeşte **formă pătratică**, dacă există o formă biliniară simetrică $b: V \times V \to \mathbb{R}$, astfel încât $q(x) = b(x,x)$ oricare ar fi $x \in V$. Se spune că q este forma pătratică asociată lui b.

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V, atunci orice $x \in V$ se scrie în mod unic $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, unde $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, atunci $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, unde $a_{ij} = a_{ji} = b(e_i, e_j)$.

Observaţie. Dacă $b: V \times V \to \mathbb{R}$ este o formă biliniară simetrică, iar $q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată, $q(x) = b(x,y)$, atunci:



$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y) = q(x) + q(y) + 2b(x,y),$$

de unde $b(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$.

Deci forma biliniară b este unic determinată de forma pătratică.

Exemplu. Să se determine forma biliniară a cărei formă pătratică asociată este

$$q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3,$$

unde $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ fiind baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, iar $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Soluţie. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ şi $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, avem: $b(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) = \frac{1}{2}((x_1+y_1)^2 - 2(x_2+y_2)^2 +$

$$+2(x_3+y_3)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 2(x_2+y_2)(x_3+y_3) - x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 +$$

$+2x_1x_2 - 2x_2x_3 - y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2y_3)$. Efectuând calculele din membrul drept se obţine:

$$b(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Problema formelor pătratice este următoarea:

Fiind dată o formă pătratică q, să se determine o bază astfel încât q să aibă o reprezentare cât mai simplă, cu cât mai mulţi coeficienţi a_{ij} nuli.

Dacă matricea unei forme pătratice reale într-o bază $\mathcal{B}$ are forma diagonală, atunci forma pătratică se scrie:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2, \text{ unde } \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n.$$

O astfel de bază se numeşte **bază canonică** pentru q, iar expresia de mai înainte se numeşte **forma canonică** a formei pătratice q.

Exisă mai multe metode de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

I) Metoda lui Jacobi

Teorema 2 (Jacobi). Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază oarecare a sa. Fie $q(x) = b(x, x)$ o formă pătratică pe V a cărei matrice în baza $\mathcal{B}$ este $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă determinanţii:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \det A$$

sunt nenuli, atunci există o bază $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ a lui V astfel încât $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, unde $\lambda_k = \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, $\Delta_0 = 1$, $1 \le k \le n$, iar y_k, $1 \le k \le n$ sunt coordonatele vectorului x în baza $\mathcal{B}'$.

Demonstraţie. Construim baza $\mathcal{B}'$ astfel încât:

$$e_1' = \alpha_{11} e_1, \ e_2' = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2, \ldots, \ e_n' = \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \ldots + \alpha_{nn} e_n$$

cu condiţiile $b(e_i, e_k') = 0$ pentru $1 \le i \le k-1$, $2 \le k \le n$ şi $b(e_k, e_k') = 1$, $1 \le k \le n$. Pentru $k = 1$ se obţine $1 = b(e_1, e_1') = \alpha_{11} b(e_1, e_1) = \alpha_{11} a_{11}$, de unde $\alpha_{11} = \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}$. Presupunem că am găsit vectorii $e_1', e_2', \ldots, e_{k-1}'$. Punând condiţiile $b(e_1, e_k') = 0$, $b(e_2, e_k') = 0, \ldots,$ $b(e_{k-1}, e_k') = 0$ şi $b(e_k, e_k') = 1$ se obţine sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{1k} + a_{21}\alpha_{2k} + \ldots + a_{k1}\alpha_{kk} = 0, \\ a_{12}\alpha_{1k} + a_{22}\alpha_{2k} + \ldots + a_{k2}\alpha_{kk} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + \ldots + a_{kk}\alpha_{kk} = 1, \end{cases}$$

cu necunoscutele $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{kk}$.

Conform regulii lui Cramer, obţinem:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \ldots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{kk} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Atunci, dacă $U = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, rezultă că $\det U = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} \ldots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \dfrac{1}{\Delta_n} \ne 0$.

Deci $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ este o bază a lui V. Pentru orice k, $2 \le k \le n$ şi $1 \le i \le k-1$, avem $a_{ki}' = b(e_i', e_k') = b\left(\sum_{t=1}^{i} \alpha_{ti} e_t, e_k' \right) = \sum_{t=1}^{i} \alpha_{ti} b(e_t, e_k') = 0$ pentru orice $1 \le i \ne k \le n$, matricea asociată lui b în baza $\mathcal{B}'$ fiind simetrică. Atunci matricea $A' = \left(a_{ij}'\right) \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonală şi, în plus, avem relaţia: $a_{kk}'=b(e_k',e_k')=b\left(\sum_{t=1}^{k}\alpha_{tk}e_t,e_k'\right)=\alpha_{kk}b(e_k,e_k')=\alpha_{kk}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$,

adică $q(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}y_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2$, pentru orice $x=\sum_{k=1}^{n}y_k e_k'\in V$.

Exemplu. Folosind metoda Jacobi să se aducă la forma canonică forma pătratică

$$q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ q(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3.$$

Soluţie. Matricea lui q în baza canonică $\mathbb{R}^3$ este:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=1$ şi $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{vmatrix}=2$ sunt nenuli, putem aplica metoda lui Jacobi.

Rezultă că forma canonică a lui $q(x)$ în baza $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',e_3'\}$ este $q(x)=y_1^2+y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$.. Să determinăm baza $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',e_3'\}$, unde:

$$e_1'=\alpha_{11}e_1,\ e_2'=\alpha_{12}e_1+\alpha_{22}e_2,\ e_3'=\alpha_{13}e_1+\alpha_{23}e_2+\alpha_{33}e_3.$$

Dacă q este forma pătratică asociată formei biliniare b, determinăm coeficienţii α_{11}, α_{12}, α_{22}, α_{13}, α_{23}, α_{33} în modul următor:

Din condiţia $b(e_1,e_1')=1$ deducem că $\alpha_{11}=1$ şi deci $e_1'=e_1=(1,0,0)$.

Din condiţiile $b(e_1,e_2')=0$ şi $b(e_2,e_2')=1$ rezultă sistemul $\begin{cases}\alpha_{12}-\alpha_{22}=0\\-\alpha_{12}+2\alpha_{22}=1\end{cases}$,

de unde $\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$ şi $e_2'=e_1+e_2=(1,1,0)$. Pentru a determina e_3' avem condiţiile $b(e_1,e_3')=b(e_2,e_3')=0$ şi $b(e_3,e_3')=1$. Rezultă sistemul:

$\begin{cases}\alpha_{13}-\alpha_{23}=0\\-\alpha_{13}+2\alpha_{23}-\alpha_{33}=0\\-\alpha_{23}+3\alpha_{33}=1\end{cases}$, de unde $\alpha_{13}=\alpha_{23}=\alpha_{33}=\frac{1}{2}$ şi deci:

$$e_3'=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Deci baza $\mathcal{B}'$ în care forma pătratică q are forma canonică este $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',e_3'\}$, unde $e_1'=(1,0,0)$, $e_2'=(1,1,0)$ şi $e_3'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Avem $q(x)=y_1^2+y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$, $x=y_1e_1'+y_2e_2'+y_3e_3'$.

II) Metoda lui Gauss.

Metoda lui Gauss de reducere a unei forma pătratice la forma canonică constă în gruparea convenabilă a termenilor şi restrângerea de pătrate.

Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi q o formă pătratică având în raport cu baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ expresia $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

Atunci există o bază $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ a lui V şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in V$, $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, unde:

$$x = y_1 e_1' + y_2 e_2' + \ldots + y_n e_n' .$$

Dacă $q(x) = 0$, aceasta este forma canonică.

Dacă $q(x)$ este nenulă, distingem două cazuri:

1. există cel puţin un indice i, $1 \le i \le n$, astfel încât $a_{ii} \ne 0$;

2. oricare ar fi i, $1 \le i \le n$, $a_{ii} = 0$, dar există indici $1 \le i \ne j \le n$, astfel încât $a_{ij} \ne 0$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a_{12} \ne 0$. Făcând schimbarea de coordonate, $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$ şi $x_i = y_i$ pentru orice $3 \le i \le n$, atunci termenul $2a_{12}x_1x_2$ al lui $q(x)$ are forma $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2$. Cum $a_{11} = a_{22} = 0$, termenii care conţin pe y_1^2 şi y_2^2 au coeficienţii nenuli şi astfel am redus suituaţia la cazul 1. Fie, prin urmare, o formă pătratică q astfel încât există i, $1 \le i \le n$, cu $a_{ii} \ne 0$ şi după cum am văzut putem presupune că $a_{11} \ne 0$.

Mai întâi, dacă $a_{11} \ne 0$, scriem:

$$q(x) = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + q'(x),$$

unde $q'(x)$ este o formă pătratică care nu conţine pe x_1. Notăm:

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ şi scriem $q'(x) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}' x_i x_j$. La fel ca mai sus, dacă $a_{22}' \ne 0$, scriem:

$$q'(x) = a'^{-1}_{22}(a_{22}' x_1 + a_{23}' x_3 + \ldots + a_{2n}' x_n)^2 + q''(x),$$

unde $q''(x)$ nu conţine pe x_2 (şi nici pe x_1). Notăm
$y_2 = a_{22}' x_1 + a_{23}' x_3 + \ldots + a_{2n}' x_n$ şi se continuă procedeul cu $q''(x)$ ş.a.m.d. După un număr finit de paşi, găsim o expresie a lui q de forma:

$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Matricea transformării coordonatelor este triunghiulară şi aceasta dă o transformare de baze.

Observaţie. Fie $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ şi $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',\ldots,e_n'\}$ două baze ale spaţiului vectorial V şi $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$.

Avem $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$.

Dacă vectorul $x\in V$ se scrie în cele două baze $\mathcal{B}$ şi respectiv $\mathcal{B}'$, $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n$ şi $x'=\alpha_1'e_1'+\alpha_2'e_2'+\ldots+\alpha_n'e_n'$, atunci :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

numită formula transformării coordonatelor.

În concluzie, dacă

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ atunci } \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = (C^{-1})^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Exemple. **1.** Folosind metoda lui Gauss să se aducă la formă canonică forma pătratică $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, dată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$,

$$q(x)=2x_1^3-2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3-3x_1x_3.$$

Soluţie. Baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$, unde $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ şi $e_3=(0,0,1)$.

Observăm că $a_{11}=2\neq 0$. Avem succesiv:

$$q(x)=\frac{1}{2}(2x_1-x_2+2x_3)^2+\frac{5}{2}x_2^2+x_3^2-x_2x_3=$$

$$=\frac{1}{2}(2x_1-x_2+2x_3)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{11}{10}x_3^2$$

Atunci $q(x)=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{2}{5}y_2^2+\frac{11}{10}y_3^2$, unde:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= \quad\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ y_3 &= \qquad\qquad\quad x_3, \end{aligned}$$

iar $x = y_1e_1' + y_2e_2' + y_3e_3'$, unde $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ este noua bază. Să determinăm baza $\mathcal{B}'$.

Avem $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Dacă $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, din observaţia precedentă rezultă $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \left(C^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Dar $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{11}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$\left(C^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$, de unde $e_1' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ şi $e_3' = \left(-\frac{11}{10}, -\frac{1}{5}, 1\right)$.

$\boxed{2.}$ Folosind metoda lui Gauss să se aducă la formă canonică forma pătratică $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$,

$$q(x) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

Soluţie. Deoarece $a_{ii} = 0$ pentru orice $1 \le i \le 3$ şi $a_{12} \ne 0$, facem schimbarea de coordonate $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Obţinem $q(x) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3$, unde $x = y_1e_1' + y_2e_2' + y_3e_3'$ este scris în noua bază $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$.

Cum coeficientul lui y_1^2 este $2 \ne 0$, obţinem, succesiv,

$$q(x) = \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_3)^2 - y_3^2 - 8y_2y_3 = \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_3)^2 - \frac{1}{2}(2y_2 + 4y_3)^2 + 6y_3^2.$$

Punem:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2y_1 \quad\ \ - 2y_3, \\ z_2 &= \quad\ \ 2y_2 + 4y_3, \qquad (*) \\ z_3 &= \qquad\qquad\ \ y_3, \end{aligned}$$

şi obţinem $q(x)=\frac{1}{2}z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2+6z_3^2$, unde $x=z_1e_1"+z_2e_2"+z_3e_3"$ este scris în baza $\mathcal{B}"=\{e_1",e_2",e_3"\}$. Să determinăm baza $\mathcal{B}"$.

Avem $y_1=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_2=\frac{x_2-x_1}{2}$ şi $y_3=x_3$ şi, înlocuind în $(*)$ deducem:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+x_2-2x_3,\\ z_2 &= -x_1+x_2+4x_3,\\ z_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Avem $\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$. Dacă $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, din observaţia precedentă rezultă $\begin{pmatrix} e_1"\\ e_2"\\ e_3" \end{pmatrix}=\left(C^{-1}\right)^t\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3 \end{pmatrix}$. Dar $C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$\left(C^{-1}\right)^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $e_1"=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $e_2"=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ şi $e_3"=\left(3,-1,1\right)$.

1.6. 3. Forma normală a unei forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}}V=n$ şi $q:V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică. Am văzut că există o bază a lui V, astfel încât:

$$q(x)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2,$$

unde $y_1,y_2,\ldots,y_n$ sunt coordonatele lui x în baza considerată, iar $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Această expresie este forma canonică a lui q, iar baza în care q are o formă canonică este baza canonică.

Printr-o renumerotare putem presupune că $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ sunt coeficienţi pozitivi, $\lambda_{l+1},\ldots,\lambda_r$ sunt coeficienţi negativi şi $\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_n$ sunt nuli.

Făcând schimbarea de coordonate: $z_i=\sqrt{\lambda_i}y_i$, $1\le i\le l$, $z_j=\sqrt{-\lambda_j}y_j$, $l+1\le j\le r$, $z_k=y_k$, $r+1\le k\le n$, se obţine:

$$q(x)=z_1^2+\ldots+z_l^2-z_{l+1}^2-\ldots-z_r^2.$$

O formă canonică ai cărei coeficienţi sunt 0, – 1, +1, se numeşte **formă normală**.

Matricea acestei forme este $C = \text{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1,0,\ldots 0)$, unde 1 se repetă de l ori, -1 de $r-l$ ori şi 0 de $n-r$ ori.

Observaţie. Numărul r este un invariant deoarece reprezintă rangul matricei asociate formei pătratice, fiind numit **rangul** formei pătratice.

Forma canonică la care se reduce o formă pătratică dată nu este în general unic determinată.

De exemplu, fie forma pătratică:

$$q(x) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 .$$

În exemplul 2) de mai înainte am arătat că :

$$q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2 ,$$

unde $y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$, $y_2 = -x_1 + x_2 + 4x_3$, $y_3 = x_3$.

De asemenea, $q(x) = 2z_1^2 + 6z_2^2 - 8y_3^2$ unde $z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3$, $z_2 = x_3$, $z_3 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - x_3$.

Un rezultat fundamental al teoriei formelor pătratice arată că indiferent de metoda de reducere la forma canonică, numărul coeficienţilor pozitivi, negativi sau nenuli este acelaşi.

Teorema 3 (legea de inerţie a formelor pătratice a lui Sylvester). Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Pentru orice formă pătratică $q : V \to \mathbb{R}$, numărul coeficienţilor pozitivi, negativi sau nuli ai formei canonice nu depinde de alegerea bazei în care q este adusă la forma canonică.

Demonstraţie. Fie două reprezentări în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}_1$ ale formei pătratice q sub formă normală (obţinute prin procedeele descrise mai înainte),

$$\begin{aligned} q(x) &= y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 \\ &= z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2 . \end{aligned}$$

Vom demonstra că $l = k$. Să presupunem prin absurd că $l \neq k$ şi fie $l > k$. Dacă $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}_1$, atunci $y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j$, $1 \le i \le n$. Vom arăta că există vectori $x \in V$ astfel încât să satisfacă relaţiile: $z_{l+1} = \ldots = z_r = z_{r+1} = \ldots = z_n = 0$ şi $y_1 = \ldots = y_k = 0$, care sunt în număr de $n - l + k < n$. Se obţine astfel sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + \ldots + p_{1l}z_l = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{k1}z_1 + p_{k2}z_2 + \ldots + p_{kl}z_l = 0, \end{cases}$$

în care numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuaţii. Prin urmare, sistemul are şi soluţii nenule. Rezultă că pentru vectorii $x \in V$

care satisfac relaţiile de mai sus, avem: $q(x) = -y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + \ldots + z_l^2$, contradicţie. Deci $l = k$ şi, în plus, $r - l = r - k$, adică numărul coeficienţilor pozitivi şi respectiv negativi din cele două forme normale ale lui $q(x)$ este acelaşi.

1.6. 4. Forme pătratice pozitiv definite

Forma pătratică reală $q : V \to \mathbb{R}$ se numeşte **pozitiv definită** dacă:

1) $q(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in V$;

2) $q(x) = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$.

Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de rang r. Fie forma normală:

$$q(x) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 \qquad (*)$$

Avem următorul rezultat:

Propoziţia 2. Cu notaţiile precedente, forma pătratică q este pozitiv definită dacă şi numai dacă $r = k = n$ (r, k şi n sunt numerele din forma normală $(*)$).

Demonstraţie. Dacă $r = k = n$, într-o bază canonică a lui V, avem că $q(x) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$, oricare ar fi $x \in V$. Deci $q(x) \geq 0$ şi $q(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$, adică q este pozitiv definită.

Reciproc, fie q este pozitiv definită şi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază canonică a lui V. Pentru orice $1 \leq i \leq n$ avem $e_i \neq 0$ şi deci:

$$q(e_i) = b(e_i, e_i) = a_{ii} = \lambda_i > 0.$$

Rezultă, evident, $k = n = r$.

Teorema 4 (criteriul lui Sylvester.) O formă pătratică q este pozitiv definită dacă şi numai dacă toţi minorii principali ai matricei asociate lui q într-o bază oarecare sunt pozitivi.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază oarecare a spaţiului vectorial real V cu $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matricea asociată în această bază formei pătratice pozitiv definite q. Pentru $1 \leq k \leq n$ fie $V_k \leq V$ subspaţiul vectorial generat de $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Avem că restricţia formei pătratice q la V_k este o formă pătratică q_k pozitiv definită a cărei matrice asociată în baza $\mathcal{B}_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ a lui V_k este:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Aducând pe q_k la forma canonică (într-o bază $\mathcal{B}_k'$ a lui V_k) avem:

$$q_k(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_k x_k^2,$$

unde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V_k$ şi $\lambda_i > 0$, $1 \le i \le k$. Atunci matricea asociată lui q_k în noua bază $\mathcal{B}_k'$ este matricea diagonală $D_k = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$. Dacă P_k este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_k$ la baza $\mathcal{B}_k'$, atunci $D_k = P_k^t A_k P_k$ şi deci $\det D_k = \det(P_k^t A_k P_k) = (\det P_k^t)(\det A_k)(\det P_k) =$

$= (\det A_k)(\det P_k)^2 = \Delta_k (\det P_k)^2 > 0$, de unde $\Delta_k > 0$, $1 \le k \le n$.

Reciproc, fie $\Delta_k > 0$, oricare ar fi $1 \le k \le n$. Din teorema 2 rezultă că $q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2$, unde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Prin urmare $q(x) > 0$ oricare ar fi $x \in V$ şi deci q este pozitiv definită.

Exemple. $\boxed{1.}$ Forma pătratică $q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ este pozitiv definită, deoarece minorii ei principali:

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

sunt pozitivi.

$\boxed{2.}$ Forma pătratică $q(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ nu este pozitiv definită, deoarece minorul ei principal de ordinul al doilea, este negativ:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Observaţie. Analog, pot fi introduse forme pătratice *negativ definite*.

Test de autoevaluare 10

1. Fie forma pătratică $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

dată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

i) Să se determine forma biliniară b a cărei formă pătratică asociată este q.

ii) Este forma pătratică q pozitiv definită ?

iii) Să se aducă la formă canonică forma pătratică q folosind metoda Jacobi.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Folosind metoda lui Gauss să se aducă la formă canonică formele pătratice următoare, date în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$:

i) $q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

ii) $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 94 a acestei unităţi de învăţare.

1.7. Comentarii şi răspunsuri la testele de autoevaluare

Test 1

1. a) Da. Folosim teorema de recunoaştere: matricea $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu –7 $\neq$ 0, deci rangul matricei este egal cu numărul coloanelor.

b) *T*ot cu teorema de recunoaştere: matricea $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ trebuie să aibă rangul < 2 = numărul vectorilor = numărul coloanelor, adică trebuie să aibă determinantul a – 9 egal cu 0.

Vectorii sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă a=9.

2. a) Folosim din nou teorema de recunoaştere: matricea $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ nu poate avea rangul 3 = numărul vectorilor (rangul este $\leq$ 2).
Se poate încerca şi direct: se arată că, de exemplu, (1,3) este combinaţie liniară de (3,2) şi (1,0). Într-adevăr, egalitatea
(1,3) = a (3, 2) + b (1,0) revine la sistemul $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 2a = 3 \end{cases}$ cu soluţia $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$.
b) Dacă avem un spaţiu vectorial X de dimensiune m şi n vectori din X, n > m, atunci vectorii respectivi sunt liniar dependenţi.

3. a) Da. Cu teorema de recunoaştere, rezultă că matricea $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

are rangul 2=numărul liniilor.

b) Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ cu determinantul a – 9 trebuie să aibă rangul < 2 = dimensiunea spaţiilor = numărul liniilor, adică trebuie să avem:

$$a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 9.$$

c) Am găsit echivalenţele: {(1, 3), (3, a)} este liberă $\Leftrightarrow$ {(1,3),(3,a)} este mulţime de generatori $\Leftrightarrow$ $a \neq 9$.

Test 2

1. a) Cu teorema de recunoaştere: matricea $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu –1$\neq$ 0, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
b) Coordonatele cerute sunt numerele reale (unic determinate!) x şi y cu proprietatea că (1,1) = x(a,a+1) + y(a+1, a+2). Ele sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} ax + (a+1)y = 1 \\ (a+1)x + (a+2)y = 1 \end{cases}$ cu soluţiile x= –1, y = 1.

2. a) Nu. Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3.

b) Întâi **trebuie**} să verificăm că vectorii (1,2,3) şi (1,0,0) sunt liniar independenţi. Într-adevăr, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ are rangul 2, deoarece:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

O bază posibilă, obţinută prin completare este

$$\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

În adevăr, determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este egal cu $3 \neq 0$.

Test 3

1. a) Dacă $a = 0$, aplicaţia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată prin $T(x, y) = x + y$ este liniară (calcul!).

Invers, se presupune că $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată prin $T(x, y) = x + y + ax^2$ este liniară. Rezultă că T este omogenă, deci $T(2(x, y)) = 2T(x, y)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pentru $(x,y)=(1,0)$, ar trebui să avem:

$$T(2, 0) = 2T(1, 0),$$

adică:

$$2 + 0 + 4a = 2(1 + 0 + a) \Leftrightarrow 2 + 4a = 2 + 2a \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Prin urmare: T este liniară $\Leftrightarrow a=0$.

b) Dacă $n = 1$, $T(x)=x$ şi T este, evident, liniară.

Invers, dacă T este liniară, trebuie să avem $T(2x) = 2T(x)$ pentru

orice $x \in \mathbb{R}$, deci $T(2) = 2T(1)$, adică:

$$2^n = 2 \Leftrightarrow n = 1.$$

Aşadar, T este liniară $\Leftrightarrow n=1$.

2. a) $T(z=x+iy) = x - iy$.

$$T((x+ i y) + (a + ib)) = T((x + a) + i (y + b)) = (x+a) - i (y + b) =$$
$$= x - i y + a - i b = T(x + i y) + T(a+i b)$$

Pentru $t \in \mathbb{R}$: $T(t(x + i y)) = T(tx + i t y) = t x - i t y = tT(x + i y)$.

b) Dacă T ar fi $\mathbb{C}$-liniară, am avea:

$$T(i z)=i T(z),$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Luând însă $z = i$, avem:

$T(i i) = T(i^2) = T(-1) = -1, \qquad i T(i) = i(-i) = -i^2 = 1.$

Test 4

1. a) $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos t\cos s - \sin t\sin s & \cos t\sin s + \sin t\cos s \\ -\sin t\cos s - \cos t\sin s & -\sin t\sin s + \cos t\cos s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(s+t) & \sin(s+t) \\ -\sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix}$$

b) Avem det (A(t)) = $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, deci $A(t)$ este inversabilă.

Matricea complemenţilor algebrici este:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

deci matricea adjunctă este:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = A(-t)$$

şi matricea adjunctă coincide cu matricea inversă, deoarece determinantul este egal cu 1.

2. a) $T(x,y)=(u,v)$ după regula de înmulţire:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

deci $T(x, y) = (x \cos t + y \sin t, - x \sin t + y \cos t)$.

b) Da, deoarece matricea generatoare $A(t)$ este inversabilă.

c) Da. La studiul grupurilor, am văzut că A_t este rotaţia de unghi $-t$.

Test 5

1. a) $T(1, 0) = (1, 1)$ şi $T(0,1) =(-1,1)$, deci matricea căutată este:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) V este bază (teorema de recunoaştere) deoarece:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Un vector (a,b) se scrie în baza V astfel:

$$(a,b) = x(1, 0) + y (1, 1) = (x + y, y),$$

deci:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-b \\ y=b \end{cases},$$

adică $(a,b)=(a-b)(1,0)+b(1,1)$.

Atunci:

$T(1, 0) = (1, 1) = 0(1, 0) + 1(1,1)$,

$T(1, 1) = (0, 2) = -2(1, 0) + 2(1,1)$.

Matricea căutată este:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) Matricea are deci forma

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

unde $t_i \in \mathbb{R}$, i=1,2,... ,n.

Atunci $T(e_i)=t_i e_i$, i=1,2,... ,n şi deci

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i t_i e_i = (x_1 t_1, x_2 t_2, \dots, x_n t_n).$$

b) Este exact matricea de la **1.** b).

Test 6

1. Matricea sistemului:

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

are determinantul t^2+1.

a) În $\mathbb{R}$, $t^2 + 1 > 0$, deci sistemul este cramerian.

b) În $\mathbb{C}$, ecuaţia:

$$t^2 + 1 = 0$$

are soluţiile i şi -i .

Dacă $t \neq$ i şi $t \neq -$ i , sistemul este cramerian.

Dacă t = i , sistemul devine:

$$\begin{cases} \mathrm{i}x + y = 1 \\ -x + \mathrm{i}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \mathrm{i}y = \mathrm{i} \\ -x + \mathrm{i}y = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 = 1 - \mathrm{i}, \text{ fals.}$$

Sistemul este incompatibil.

Dacă $t = -$ i , sistemul devine:

$$\begin{cases} -\mathrm{i}x + y = 1 \\ -x - \mathrm{i}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mathrm{i}x + y = 1 \\ -\mathrm{i}x + y = i \end{cases} \Rightarrow 0 = 1 - \mathrm{i}, \text{ fals.}$$

Sistemul este incompatibil.

2. a) Necunoscutele principale sunt *x* şi y:

$$\begin{cases} x+y=2-z \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2-z \\ 2y=2-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-z}{2} \\ y=\dfrac{2-z}{2} \end{cases}.$$

Mulţimea soluţiilor este:

$$S=\left\{\left(\frac{2-z}{2},\frac{2-z}{2},z\right)\middle|\, z\in K\right\},$$

unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

b) Matricea sistemului este:

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Minorul format cu primele două linii este:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} = 1-t$$

Dacă $t \neq 1$ acest minor este principal şi rangul matricei este $r = 2$.

Aplicăm teorema lui Rouché. Avem un singur determinant caracteristic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ t & 1 & 2 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} = 2(t-1)^2,$$

care se anulează numai pentru $t = 1$.

Sistemul are soluţie dacă şi numai dacă $t = 1$. În acest caz sistemul devine

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=2.$$

Mulţimea soluţiilor este:

$$S = \{(a, 2-a) \mid a \in K\}$$

unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Test 7

1. $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -21 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

3. Determinăm forma diagonal-canonică a lui A folosind propoziţia 2 din secţiunea 2.

Avem $\Delta_1(A) \sim 1$, $\Delta_2(A) \sim X+1$, $\Delta_3(A) \sim (X+1)^3$. Deci $d_1 \sim 1$, $d_2 \sim X+1$, $d_3 \sim (X+1)^2$ şi forma diagonal canonică a matricei A este:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & (X+1)^2 \end{pmatrix}$$

Test 8

1. Avem $I_2X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - 5X + 2 \end{pmatrix} \sim I_2X - B$ şi deci $A \approx B$.

2. Avem $I_3X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)^2(X+2) \end{pmatrix}$. Există un singur factor invariant $d_1 = (X-1)^2(X+2)$, divizorii elementari sunt: $X+2$ şi $(X-1)^2$, iar forma canonică Jordan este

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Avem $I_4X - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X-2)(X-3)^2 \end{pmatrix}$. Factorii invarianţi sunt: $X-2$, $(X-2)(X-3)^2$; divizorii elementari sunt: $X-2$, $X-2$ şi $(X-3)^2$, iar forma canonică Jordan este:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Test 9

1. $p_u = (X-1)(X-2)(X-3)$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = 3$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 1$ sunt de forma $(\alpha, \alpha, \alpha)^t$, pentru $\lambda = 2$ sunt de forma $(\alpha, 0, \alpha)^t$, iar pentru $\lambda = 3$ sunt de forma $(\alpha, \alpha, 0)^t$ cu α real nenul. Avem că *u* este diagonalizabilă deoarece valorile proprii sunt distincte.

Atunci $M_B(u) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $p_u = (X-2)^2(X-3)^2$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 3$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 2$ sunt de forma $(0,\alpha,0,\beta)^t$ cu α şi β reali, cel puţin unul nenul, iar pentru $\lambda = 3$ sunt de forma $(\alpha,-\alpha,-\alpha,3\alpha)^t$ cu α real nenul. Deci $L_3 = \{(\alpha,-\alpha,-\alpha,3\alpha)^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi $\dim_{\mathbb{R}} L_3 = 1$. Deci multplicitatea geometrică a lui 3 este 1, iar multiplicitatea sa algebrică este 2. Cum acestea sunt diferite, rezultă că *u* nu este diagonalizabilă.

Test 10

1. i) $b(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$.

ii) $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$, $\Delta_3 = -5 < 0$. Deci q nu este pozitiv definită.

iii) $q(x) = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{5}y_3^2$ unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$. Avem $e_1' = (1,0,0)$, $e_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $e_3 = \left(1,\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

2. i) $q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2 + \frac{19}{10}y_3^2$ unde $y_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3$, $y_2 = \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$, $y_3 = x_3$, iar $x = y_1e_1' + y_2e_2' + y_3e_3'$ este scris în baza $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$. Avem $e_1' = \left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},0\right)$, $e_3' = \left(-\frac{9}{10},\frac{1}{5},1\right)$.

ii) Cum $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, punem $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$ şi obţinem :

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - x_3^2.$$

Deci $q(x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ unde $z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $z_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $z_3 = x_3$, iar $x = z_1e_1'' + z_2e_2'' + z_3e_3''$ este scris în baza $\mathcal{B}'' = \{e_1'', e_2'', e_3''\}$. Avem $e_1'' = (1,1,0)$, $e_2'' = (-1,1,0)$, $e_3'' = (-1,-1,1)$.

1.8. Lucrare de verificare pentru studenţi

Indicaţii de redactare. Problemele se vor rezolva în ordinea din textul enunţului. Rezolvările se vor expedia pe adresa tutorelui.

1 punct din oficiu

1,5p **1.** Fie X un spaţiu vectorial de dimensiune n, $n \geq 1$. Fie u_1, u_2, ... , u_n vectori în X.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Sistemul $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ este liniar independent.

b) Sistemul $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ este sistem de generatori pentru X.

c) Mulţimea $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este bază pentru X.

1,5p **2.** Se consideră spaţiul vectorial:

$$\{f : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathrm{R} \mid f \text{ este continuă}\}$$

Să se arate că vectorii *f, g* din *X* sunt liniar independenţi, unde:

$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathrm{R}$, $f(x) = \cos x$;

$g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathrm{R}$, g(x)=\sin x .

1,5p **3.** a) Să se arate că U={(1,1),(2,1)} şi V={(2,0)(0,2)} sunt baze în $\mathbb{R}^2$.

b) Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fie T=T(M; U, V) aplicaţia liniară generată de matricea M în perechea de baze (U, V). Să se calculeze $T(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1,5p **4.** Să se calculeze ker (T)= nucleul lui T, unde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ este aplicaţia liniară definită prin

$$T(x, y, z) = (x - y,\ x + y + z).$$

1,5p **5.** Să se discute şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{C}$ este un parametru.

1,5p **6.** Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{C}$, polinomul

$$P = X^{3} - X^2 - X + a$$

are rădăcini multiple?

1.9. Bibliografie

[1.] I. Creangă, C. Reischer, *Algebră liniară*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[2.] H. Ikramov: *Recueil de problèmes d' algèbre linéaire*. Editions MIR Moscou, 1977.

[3.] I. D. Ion, N. Radu: *Algebră,* ed. III. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.

[4.] I. D. Ion, C. Niţă, D. Popescu, N. Radu: *Probleme de algebră*. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.

[5.] A. Kurosh: *Cours d' Algèbre superieure*, Ed. MIR, Moscou, 1973.

[6.] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu: *Bazele algebrei*, vol. I, Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1981.

[7.] C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Brandiburu, D. Joiţa: *Culegere de probleme pentru liceu. Algebra, clasele IX-XII*. Ed. Rotech Pro. Bucureşti, 2004.

[8.] C. Năstăsescu, M. Ţena, I. Otărăşanu, G. Andrei: *Probleme de algebră pentru clasa a XII-a*. Ed. Rotech Pro. Bucureşti, 1997.

[9.] C. Năstăsescu, M. Ţena, G. Andrei, I. Otărăşanu: *Probleme de structuri algebrice*. Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1988.

[10.] O. Stănăşilă: *Analiză liniară şi Geometrie*, Ed. All, Bucureşti, 2000.

[11.] I. Gh. Şabac: *Matematici speciale*, vol. I. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.

[12.] G. Şilov: *Analiză matematică* (spaţii finit dimensionale) Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică. Bucureşti, 1983.

[13.] V. Voïévodine: *Algèbre linéaire*. Editions MIR. Moscou, 1976.

Unitatea de învăţare 2

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cuprins

Obiectivele Unităţii de învăţare 2

După ce veţi parcurge această unitate de învăţare, veţi avea suficiente cunoştinţe pentru a putea face următoarele operaţii matematice şi a rezolva următoarele probleme:

- Identificarea numerelor care apar sau se cer în respectiva problemă de analiză.
- Încadrarea problemei în unul sau mai multe capitole de analiză.
- Identificarea de proprietăţi posibile ale elementelor cerute. Determinarea datelor primordiale şi a modului cum trebuie iniţiată procedura pe baza lor
- Precizarea nivelului acceptabil de aproximare pentru soluţii.
- Verificarea riguroasă a îndeplinirii ipotezelor de lucru.
- Aplicarea formulelor de calcul ale analizei pentru rezolvarea problemei.
- Exprimarea riguroasă a rezultatelor obţinute.
- Transpunerea problemei într-un cadru mai general (de exemplu, trecerea de la $\mathbb{R}$ la spaţii normate), adaptând metoda la cadrul mai general.
- Modelarea cu ajutorul Analizei Matematice a unor probleme practice (de exemplu, calculul cu formule integrale, de lungimi, arii şi volume concrete).

2.1. Recapitularea elementelor de Analiză Matematică din liceu

2.1.1. Şiruri şi serii

Mulţimea numerelor reale se va nota, ca deobicei, cu $\mathbb{R}$, iar dreapta reală încheiată se va nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ (reamintim că $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Vom lucra cu şiruri şi serii de numere reale.

A. Şiruri de numere reale

În general, un **şir** este o secvenţă de numere (reale) de forma

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots .$$

Mai general, vom putea considera un număr natural n_0 şi vom putea considera un şir numerotat, începând cu n_0:

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots x_n \ldots$$

Această generalizare este necesară, deoarece apar situaţii când nu putem scrie x_n pentru orice n. De exemplu, dacă :

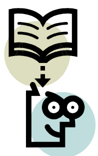
$$x_n = \frac{1}{n-4}.$$

Vom considera $n_0 = 5$ şi vom scrie şirul $x_5, x_6, \ldots x_n \ldots$, adică:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n-4}, \ldots$$

Vom nota, pe scurt, situaţia de la (1) astfel: $(x_n)_{n \ge n_0}$. Dacă n_0 este subînţeles, un şir se notează simplu: $(x_n)_n$.

Observaţie. O definiţie riguroasă a noţiunii de şir poate fi dată după cum urmează.



Se consideră un număr natural n_0 şi se notează:

$$\mathbb{N}(n_0) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots n, \ldots\}.$$

Atunci, un şir este o funcţie $f = \mathbb{N}(n_0) \to \mathbb{R}$. Anume, identificăm

$$f \equiv (x_n)_{n \ge n_0}, \text{ unde } x_n = f(n).$$

Deobicei se ia $n_0 = 0$ sau $n_0 = 1$.

Urmează **prima definiţie fundamentală a Analizei Matematice**: definiţia limitei unui şir. Pentru a da această definiţie, vom defini întâi noţiunea de **vecinătate** a unui element $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

► Dacă $a \in \mathbb{R}$, numim vecinătate a punctului a orice mulţime de forma

$$V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

unde $\varepsilon > 0$, este un număr.

Aşadar, în acest caz, avem echivalenţa:

$$x \in V \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

► Dacă $a = \infty$, numim vecinătate a punctului ∞, orice mulţime de forma:

$$V=(\lambda,\infty]=(\lambda,\infty)\cup\{\infty\},$$

unde $\lambda>0$ este un număr. Aşadar, în acest caz, avem echivalenţa

$$x\in V \Leftrightarrow x>\lambda.$$

►Dacă $a=-\infty$, numim vecinătate a punctului $-\infty$, orice mulţime de forma:

$$V=[-\infty,-\lambda)=(-\infty,-\lambda)\cup\{-\infty\},$$

unde $\lambda>0$ este un număr. Aşadar, în acest caz, avem echivalenţa:

$$x\in V \Leftrightarrow x<-\lambda.$$

Definiţie. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere (reale) şi $a\in\mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ **tinde către *a*** (în scris $x_n \xrightarrow[n]{} a$), dacă:

pentru orice vecinătate V a punctului a există un număr natural n(V) cu proprietatea că pentru orice $\mathbb{N}\ni n\geq n(V)$ *avem* $x_n\in V$.

În aceste caz, spunem că ***a* este limita şirului** $(x_n)_n$ şi scriem :

$$a=\lim_n x_n.$$

Alte denumiri. Spunem că un şir $(x_n)_n$ **are limită** dacă există $a\in\overline{\mathbb{R}}$, astfel încât $a=\lim_n x_n$. (Atenţie! Dacă există, limita unui şir este unică!).

Un şir se numeşte **convergent** dacă are **limită finită**.

Un şir care nu este convergent, se numeşte şir **divergen**t.

Exemple

$\boxed{1.}$ Şirul $(x_n)_{n\geq1}$, dat prin $x_n=\frac{1}{n}$ este convergent şi $\lim_n x_n=0$.

$\boxed{2.}$ Şirul $(x_n)_n$, dat prin $x_n=n$ este divergent. Anume: $\lim_n x_n=\infty$.

$\boxed{3.}$ Şirul $(x_n)_{n\geq1}$, dat prin $x_n=1+(-1)^n$, adică şirul:

0, 2, 0, 2, ..., 0, 2, ...

este divergent, deoarece nu are limită.

Să revedem definiţia unificatoare a limitei, în cazul când limita este finită.

Aşadar, $x_n \xrightarrow[n]{} a\in\mathbb{R}$ (şirul este convergent). Avem echivalenţa: $x_n \xrightarrow[n]{} a \Leftrightarrow$ (pentru orice $\varepsilon>0$, există $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $\mathbb{N}\ni n\geq n(\varepsilon)$ avem

$$|x_n-a|<\varepsilon). \qquad (*)$$

Am scris $n(\varepsilon)$ pentru a marca faptul că $n(\varepsilon)$ depinde de ε. Relaţia $(*)$ ne spune că, dacă ε > 0 este suficient de mic, valoarea x_n aproximează foarte bine limita *a*.

Observaţie. Să presupunem că şirul $(x_n)_n$ este convergent şi $x_n \xrightarrow[n]{} a$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi $n(\varepsilon)$, ca mai sus. Acest $n(\varepsilon)$ nu este unic! Care este variabilitatea lui $n(\varepsilon)$?

Primul tip de variabilitate: pentru un ε dat, găsim $n(\varepsilon)$; atunci acest $n(\varepsilon)$ este „bun" pentru orice $\varepsilon' \geq \varepsilon$, adică avem pentru orice $\mathbb{N} \ni n \geq n(\varepsilon)$, cu atât mai mult (v.(*)) $|x_n - a| < \varepsilon'$.

Referitor la acest tip de variabilitate, comentăm că este indicat să **găsim** $n(\varepsilon)$ **pentru un** ε **cât mai mic**. În acest fel, valoarea x_n aproximează (pentru $n \geq n(\varepsilon)$) foarte bine limita *a.*

De exemplu, dacă luăm ε de forma $\varepsilon = \dfrac{1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, spunem că x_n **aproximează pe *a* cu *n* zecimale exacte**.

Al doilea tip de variabilitate: pentru acelaşi ε, dacă am găsit un $n(\varepsilon)$, atunci orice număr natural $n'(\varepsilon) \geq n(\varepsilon)$ este „bun", în sensul că, pentru orice $\mathbb{N} \ni n \geq n'(\varepsilon)$ avem (v.($*$)):

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

Concluzionăm cele de mai sus cu o **consecinţă calculatorie** (calculul precis al lui n(ε)), după cum urmează.

Fie $(x_n)_n$ un şir convergent către *a*. Fie şi ε > 0 un număr dat. Atunci, mulţimea

$$A(\varepsilon) = \left\{ m \in \mathbb{N} \middle\| x_n - a \right| < \varepsilon \ \text{ pentru orice } \ n \geq m \}$$

este **nevidă**. Fie n(ε) cel mai mic element al mulţimii A(ε) (orice mulţime nevidă de numere naturale are un prim element!).

Aşadar, acest n(ε) este cel mai mic număr m (dependent de ε), începând de la care aproximarea este mai mică decât ε (adică, avem pentru orice $n \geq m$ inegalitatea $|x_n - a| < \varepsilon$).

Am putea să îl numim pe $n(\varepsilon)$ **pragul precis de aproximare cu ε pentru** $\lim\limits_n x_n = a$.

De obicei, nu se găseşte pragul precis, ci se găseşte o valoare mai mare. Exemplul care urmează este edificator pentru întreaga discuţie anterioară.

Exemplu. Să arătăm, folosind definiţia, că

$$\lim_n \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 2 .$$

Vom rezolva problema prin două metode.

Prima metodă (Metoda „precisă")

Avem de arătat că, pentru orice ε > 0, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că pentru orice $\mathbb{N} \ni n \geq n(\varepsilon)$ avem:

$$\left| \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} - 2 \right| < \varepsilon \tag{1}$$

adică :

$$\left| \frac{-2n-1}{n^2+n+1} \right| = \frac{2n+1}{n^2+n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 + (\varepsilon - 2)n + \varepsilon - 1 > 0 \tag{2}$$

Evident, este suficient să arătăm că (1) are loc pentru ε < 1.

Fie, deci, 0 < ε < 1 . Notăm:

$$P(x) = \varepsilon x^2 + (\varepsilon - 2)x + \varepsilon - 1$$

şi (2) se rescrie sub forma

$$P(n) > 0 \tag{2'}$$

Trinomul $P(x)$ are discriminantul

$$\Delta = -3\varepsilon^2 + 4 > 0,$$

deci rădăcinile sale reale sunt:

$$x_1 = \frac{2 - \varepsilon - \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon} < 0 < x_2 = \frac{2 - \varepsilon + \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}$$

(cititorul poate verifica singur că $2 - \varepsilon < \sqrt{\Delta}$, adică $(2-\varepsilon)^2 < \Delta$).

Teoria referitoare la semnul trinomului ne spune că (2') este echivalentă cu $n < x_1$ sau $n > x_2$, ceea ce echivalează cu $n > x_2$, deoarece am văzut că $x_1 < 0$. Ajungem la următoarea **concluzie**:
trebuie să avem

$$n(\varepsilon) > x_2 \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă nu ar avea loc (3), am avea două posibilităţi:

a) $n(\varepsilon) = x_2$. În acest caz, luând $n(\varepsilon) = n = x_2$, ar rezulta P(*n*) = 0, ceea ce ar contrazice (2').

b) $n(\varepsilon) < x_2$. Deoarece $x_1 < 0$, rezultă că $x_1 < n(\varepsilon) < x_2$. Luând $n = n(\varepsilon)$, va rezulta P(*n*) < 0, ceea ce contrazice (2').

Concluzia (3) ne conduce la următorul **rezultat final şi precis**:

Cel mai mic număr *n*(ε) posibil este:

$$n(\varepsilon) = [x_2] + 1 = \left[\frac{2 - \varepsilon + \sqrt{-3\varepsilon^2 + 4}}{2\varepsilon} \right] + 1 \tag{4}$$

Aici, $[x_2]$ este **partea întreagă a lui x_2**.

Reamintim că, pentru un număr real *x*, partea sa întreagă [*x*] este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât *x*, adică avem simultan

$$[x] \in \mathbb{Z},$$

$$[x] \le x < [x]+1.$$

Concluzia de la (4) rezultă observând că, dacă am lua un număr natural $m < [x_2]+1$, ar rezulta $m \le [x_2]$ şi, folosind (3), se vede că nu putem avea $m = n(\varepsilon)$.

Aşadar, $n(\varepsilon)$ de la (4) este pragul precis de aproximare cu ε pentru (1).

A doua metodă (Metoda majorărilor)

Această metodă este mai puţin precisă. Deobicei, ea furnizează valori $n(\varepsilon)$ care sunt mai mari decât cea mai mică valoare posibilă. În schimb, această metodă este mai rapidă şi nu necesită raţionamente atât de delicate ca prima metodă. Din acest motiv, această metodă este considerată mai avantajoasă şi se foloseşte curent.

Căutăm deci $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $\mathbb{N} \ni n \ge m(\varepsilon)$ avem (v. (2)) .

$$\frac{2n+1}{n^2+n+1} < \varepsilon \tag{5}$$

Avem însă, succesiv, următoarele **majorări**:

$$\frac{2n+1}{n^2+n+1} < \frac{2n+2}{n^2+n+1} < \frac{2n+2}{n^2+n} = \frac{2}{n} .$$

Aşadar, pentru a avea (5), este **suficient** să avem $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$. Putem lua, deci:

$$m(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 \tag{6}$$

Vom **compara** rezultatele date de cele două metode, adică (4) şi (6), pentru valoarea $\varepsilon = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Vom obţine (calcule aproximative cu un PC):

$$x_2 = 199{,}49624.$$

Prin urmare, valoarea dată de (4) este:

$$n\left(\frac{1}{100}\right) = 200 .$$

Pe de altă parte, în acest caz avem $\frac{2}{\varepsilon} = 200$, deci valoarea dată de (6) este

$$m\left(\frac{1}{100}\right) = 201.$$

Putem verifica direct că valoarea $n\left(\frac{1}{100}\right) = 200$ **este cea mai mică posibilă.** Într-adevăr, calculând expresia:

$$E(n) = \frac{2n^2+1}{n^2+n+1}$$

obţinem:

► pentru n = 200, valoarea $E(200)=\frac{80.001}{40.201}=1{,}9900251$, deci, în acest caz:

$$\left|E(200)-2\right|=0{,}0099749<0{,}01$$

(valoarea n = 200 este acceptabilă).

► pentru n = 199, valoarea $E(199)=\frac{79.203}{39.801}=1{,}9899751$, deci, în acest caz:

$$\left|E(199)-2\right|=0{,}0100249>0{,}01$$

(valoarea n = 199 este inacceptabilă).

Discuţii similare se pot face şi în cazurile $x_n \xrightarrow[n]{} \infty$ sau $x_n \xrightarrow[n]{} -\infty$

Atenţie!
Recapitulaţi singuri!

Teoria limitei pentru şiruri este fundamentală pentru întreaga Analiză Matematică. Încheiem aici prezentarea fundamentelor acestei teorii, recomandând cititorilor să recapituleze capitolul „Şiruri" din manualele de liceu, partea de Analiză Matematică. Se vor avea în vedere următoarele elemente:

- limitele fundamentale de şiruri,
- teorema şirurilor monotone,
- trecerea la limită în inegalităţi,
- operaţii algebrice cu şiruri, etc.

Test de autoevaluare 1

1. Numim permutare a unei mulţimi nevide A orice aplicaţie bijectivă $p: A \to A$.

Arătaţi că un element $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dacă şi numai dacă pentru orice permutare $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ şirul

$\left(x_{p(n)}\right)_{n\geq 0}$ tinde către a_0.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Fie $t \in \mathbb{R}$. În ce condiţii are limită şirul $(x_n)_n$ dat prin $x_n = (-1)^n t^n$?

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 221 a acestei unităţi de învăţare.

B. Serii de numere reale

Vom discuta aici foarte puţin despre serii, o expunere mai amănunţită fiind făcută în subparagraful 3.5.5. (Funcţii analitice).

Considerăm un şir $(x_n)_{n\geq n_0}$. Construim şirul $(S_n)_{n\geq n_0}$ dat astfel

$$S_n = \sum_{i=n_0}^{n} x_i$$

şi spunem că S_n = suma parţială de ordin *n* a seriei

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \qquad (1)$$

Se spune că seria (1) este **convergentă**, dacă şirul $(S_n)_n$ este convergent. În acest caz, fie $S = \lim_n S_n$. Numărul *S* se numeşte **suma seriei** (1).

De multe ori scriem (confundăm seria cu suma) $S = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

O serie care nu este convergentă, se numeşte **divergentă.**

Exemplele fundamentale de serii la care ne vom referi în continuare sunt: seria geometrică şi seria armonică generalizată.

Seria geometrică de raţie *a* (unde $a \in \mathbb{R}$ este dat) este seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

adică: $1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$

Ea este convergentă, dacă şi numai dacă $|a| < 1$. În acest caz suma ei este

$$S = \frac{1}{1-a}.$$

Seria armonică generalizată (de exponent *t*) este seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} \qquad (2)$$

În cazul *t* = 1, seria se numeşte **serie armonică**. Se arată că seria (2) este convergentă dacă şi numai dacă $t > 1$.

Încheiem cu câteva precizări privind **fracţiile zecimale infinite** din punctul de vedere al teoriei seriilor.

Când scriem egalitatea $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ avem în vedere „aproximările din ce în ce mai bune” ale lui $\frac{1}{3}$:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{100} = 0{,}33; \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = 0{,}333\ ...$$

De fapt, scriind

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n} = 0,333...3$$

(cu n zecimale) avem $\frac{1}{3} = \lim_n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$.

Mai general, orice număr real $a \in (0,1]$ poate fi reprezentat ca sumă a unei serii zecimale:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{3}$$

unde $a_n \in \{0,1,2,...9\}$. Scriem (3) şi sub forma

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$$

(fracţie zecimală infinită).

Dacă $a_1, a_2, ... a_p$ $(p \geq 1)$ sunt numere naturale, vom folosi notaţia :

$$\overline{a_1 a_2 ... a_p} = a_1 \cdot 10^{p-1} + a_2 \cdot 10^{p-2} + \dots + a_{p-1} \cdot 10 + a_p .$$

Numărul a este raţional dacă şi numai dacă poate fi reprezentat ca suma unei **serii zecimale periodice**. O astfel de serie zecimală poate fi:

a) **Periodică simplă** (perioada începe de la primul termen) de forma:

$$\underbrace{\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k}} + \underbrace{\frac{a_1}{10^{k+1}} + \frac{a_2}{10^{k+2}} + \dots + \frac{a_k}{10^{2k}}} + \dots$$

În acest caz, suma este: $a = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_k}}{10^k - 1} = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_k}}{999...9}$

(avem la numitor k cifre 9).

Exemplu 0,232323... = 0,(23) = $\frac{23}{99}$

b) **Periodică mixtă** (există o parte neperiodică la început) de forma:

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_p}{10^p} + \underbrace{\frac{a_1}{10^{p+1}} + \frac{a_2}{10^{p+2}} + \dots + \frac{a_k}{10^{p+k}}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{a_1}{10^{p+k+1}} + \frac{a_2}{10^{p+k+2}} + \dots + \frac{a_k}{10^{p+2k}}} + \dots$$

În acest caz, suma este

$$a = \frac{\overline{b_1 b_2 ... b_p a_1 a_2 ... a_k} - \overline{b_1 b_2 ... b_p}}{10^p \left(10^k - 1\right)} = \frac{\overline{b_1 b_2 ... b_p a_1 a_2 ... a_k} - \overline{b_1 b_2 ... b_p}}{999...9000..0}$$

(avem la numitor k cifre 9 şi p cifre 0).

Exemplu $0,01221313... = 0,012(13) = \frac{\overline{01213} - \overline{012}}{99000} = \frac{1213 - 12}{99000} = \frac{1201}{99000}$.

Subliniem că teoria se menţine şi pentru alte baze de numeraţie $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ (în locul lui 10). În acest caz, numerele se reprezintă ca sume ale unor serii b – adică de forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{b^n} \text{ unde } u_n \in \{0,1,...b-1\}.$$

Baza b = 2 (deci u_n pot fi 0 şi 1) este utilizată pentru calculatoarele electronice.

Test de autoevaluare 2

1. Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă. Care este suma ei ?

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Arătaţi că numărul reprezentat de fracţia zecimală infinită

$$0,\underbrace{1}_{1}\underbrace{10}_{2}\underbrace{100}_{3}\underbrace{1000}_{4}\underbrace{10000}_{5}...\underbrace{1000...0}_{n}...$$

(se numără cifrele din fiecare grup) este iraţional.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 221 a acestei unităţi de învăţare.

2.1.2. Limită şi continuitate

A. Limite de funcţii

Noţiunea de limită este noţiunea de bază a Analizei Matematice. Intuitiv, „*a* trece la limită” înseamnă a te apropia oricât de mult de un punct, fără a spera să atingi acel punct. Din acest motiv, limita se studiază în puncte de acumulare.

Definiţie. Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că ***a*₀ este punct de acumulare pentru *A*** dacă are următoarea proprietate: pentru orice vecinătate V a punctului a_0, există puncte $x \in A \cap V, x \neq a_0$.

Se arată că a_0 este punct de acumulare pentru A, dacă şi numai dacă, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din $A \setminus \{a_0\}$, cu proprietatea că $x_n \xrightarrow[n]{} a_0$.

În cele ce urmează vom lucra în următorul

Cadru de lucru. Se consideră o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ şi un punct $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ care este punct de acumulare pentru A. Se mai consideră şi o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$.

Definiţie. Se spune că funcţia ***f* are limită în punctul *a*₀** dacă există un element $L \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea următoare: pentru orice vecinătate V a lui L, există o vecinătate U a lui a_0, astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in A \cap U$, $x \neq a_0$.

Se poate arăta că, dacă există L, ca mai sus, atunci L este unic determinat. Atunci, în condiţiile de mai sus, dăm următoarea

Denumire. Numim pe L **limita funcţiei *f* în punctul *a*₀** şi scriem

$$L = \lim_{x \to a_0} f(x) .$$

Mai scriem şi

$$f(x) \xrightarrow[x \to a_0]{} L$$

(spunem că ***f*(*x*) tinde către *L*, când *x* tinde către *a*₀**).

Dacă $L \in \mathbb{R}$ şi $a_0 \in \mathbb{R}$, obţinem

Definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei. Avem echivalenţa:

$$L = \lim_{x \to a_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in A, x \neq a_0, |x - a_0| < \delta$$

avem $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Totul se poate reduce la limite de şiruri, după cum arată următoarea

Teoremă (Definiţia cu şiruri a limitei)

I. Fie $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Avem egalitatea $L = \lim_{x \to a_0} f(x)$.

2) Pentru orice şir $(x_n)_n$ de elemente din $A \setminus \{a_0\}$, cu proprietatea că $x_n \xrightarrow[n]{} a_0$, avem $\lim_n f(x_n) = L$.

II. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Funcţia f are limită în punctul a_0.

2) Pentru orice şir $(x_n)_n$ de elemente din $A \setminus \{a_0\}$, cu proprietatea că $x_n \xrightarrow[n]{} a_0$, există $\lim_n f(x_n)$.

Consecinţă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Funcţia f nu are limită în punctul a_0 .

2) Există un şir $(x_n)_n$ de elemente din $A\setminus\{a_0\}$, cu proprietatea că $x_n \xrightarrow[n]{} a_0$ şi astfel încât şirul $(f(x_n))_n$ nu are limită.

De exemplu, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sin x$ nu are limită în punctul ∞ (nu are limită la ∞), deoarece, dacă luăm $x_n=\dfrac{n\pi}{2}\xrightarrow[n]{}\infty$, şirul $f(x_n)$ nu are limită (avem $f(x_{2p})=0$ şi $f(x_{4p+1})=1$ etc.).

Remarcă importantă. După cum se vede, în studiul limitei unei funcţii într-un punct, **nu interesează comportamentul lui *f* în acel punct** (funcţia poate să nu fie definită în acel punct!).

Mai târziu, la continuitate, va trebui ca valorile lui f în a_0 şi în punctele apropiate lui a_0 să fie şi ele apropiate. În acest sens, să considerăm următorul

Exemplu. 1) Se consideră un număr real t. Definim funcţia $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin

$$f_t(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dacă } x\neq 1\\ t, & \text{dacă } x=1\end{cases}.$$

Atunci $\lim\limits_{x\to1} f_t(x)=2$ (valoarea limitei este aceeaşi pentru orice $t\in\mathbb{R}$). Într-adevăr: dacă $x\neq1$, avem $f(x)=x+1$, deci $\lim\limits_{n} f_t(x_n)= \ =\lim\limits_{n}(x_n+1)=2$ pentru orice şir $x_n \xrightarrow[n]{} 1,\ x_n\neq1$.

2) Se consideră funcţia $F=\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Atunci $\lim\limits_{x\to1}F(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$. Practic, studiul limitelor în 1 pentru F şi toate f_t este acelaşi!

Dacă mulţimea A **este interval** şi $a_0\in\mathbb{R}$, putem vorbi despre limitele laterale ale lui f în punctul a_0. Anume, dacă a_0 nu este extremitate stângă (respectiv dreaptă) a lui A, putem defini **limita laterală la stânga** (respectiv **la dreapta**) a lui f în a_0 după cum urmează:

Limita la stânga. Se consideră restricţia lui f la mulţimea $(-\infty,a_0)\cap A$, pe care o notăm cu g. Dacă există $\lim\limits_{x\to a_0} g(x)$, vom nota:

$$\lim_{x\to a_0} g(x)\overset{D}{=}\lim_{x\nearrow a_0} f(x)\overset{D}{=}f(a_0-0)\overset{D}{=}\ \textbf{limita la stânga a lui } \boldsymbol{f} \textbf{ în } \boldsymbol{a_0}.$$

Limita la drepta. Se consideră restricţia lui f la mulţimea $(a_0,\infty)\cap A$, pe care o notăm cu h. Dacă există $\lim\limits_{x\to a_0} h(x)$, vom nota:

$$\lim_{x\to a_0} h(x)\overset{D}{=}\lim_{x\searrow a_0} f(x)\overset{D}{=}f(a_0+0)\overset{D}{=}\ \textbf{limita la dreapta a lui } \boldsymbol{f} \textbf{ în } \boldsymbol{a_0}.$$

Dacă există $\lim\limits_{x\to a_0} f(x)$, atunci există şi limitele laterale (care au sens) ale lui f în a_0 şi sunt egale cu $\lim\limits_{x\to a_0} f(x)$. Reciproca este, evident, falsă.

Teoremă. Se presupune că a_0 este interior lui A. Atunci:
Funcţia f are limită în a_0, dacă şi numai dacă există $f(a_0-0)$ şi $f(a_0+0)$ şi sunt egale. În acest caz, limita este egală cu valoarea comună:

$$\lim_{x\to a_0} f(x) = f(a_0+0) = f(a_0-0).$$

Observaţie. Dacă a_0 este extremitate stângă pentru A, atunci: a spune că f are limită în a_0 înseamnă a spune că există limita la dreapta $f(a_0+0)$. În acest caz, $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) = f(a_0+0)$.

Exemplu. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases} ax+1, & \text{dacă} \quad x<0 \\ b, & \text{dacă} \quad x=0 \\ x+a & \text{dacă} \quad x>0 \end{cases}$$

unde a şi b sunt numere reale.

Atunci, f are limită în 0 dacă şi numai dacă $a = 1$ (şi b poate lua orice valoare reală !). Într-adevăr:

$$f(0-0)=\lim_{x\nearrow 0}(ax+1)=1$$
$$f(0+0)=\lim_{x\searrow 0}(x+a)=a$$
$$f(0-0)=f(0+0)\Leftrightarrow a=1$$

În acest caz avem $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă} \ \ x\neq 0 \\ b, & \text{dacă} \ \ x=0 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Pentru calculul practic al **limitelor de funcţii**, se va ţine seama de următoarele fapte:

► Se pot face **operaţii cu limite de funcţii**.

De exemplu, avem: $\lim\limits_{x\to a_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a_0} f(x)+\lim\limits_{x\to a_0} g(x)$.

Aceasta înseamnă că avem $f:A\to\mathbb{R}$ (ca în cadrul general) şi $g:A\to\mathbb{R}$. De asemenea, se presupune că există:

$$\lim_{x\to a_0} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to a_0} g(x)=G\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Se mai presupune că $L + G$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$. Atunci rezultă că există şi

$$\lim_{x\to a_0}(f+g)(x)=L+G.$$

Consideraţii similare pentru alte operaţii.

◆ Funcţiile elementare **sunt continue** (vom reveni la continuitate asupra acestei expresii), adică avem pentru astfel de funcţii

$$\lim_{x\to a_0} f(x)=f(a_0),$$

dacă a_0 este în domeniul de definiţie al lui f.

De exemplu, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$, avem:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(3x+1)=13=f(4).$$

◆ Se cunosc limitele standard

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \text{dacă } a>0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b},\ \text{dacă } a\neq 0, b\neq 0\ \left(\text{în particular } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right).$$

◆ Se foloseşte teorema de compunere a limitelor (limita funcţiilor compuse sau schimbarea de variabilă în calculul limitelor), adică următoarea

Teoremă. Fie $A\subset\mathbb{R}, B\subset\mathbb{R}$ mulţimi nevide.

Fie $a_0\in\overline{\mathbb{R}}$ punct de acumulare pentru A, astfel încât există

$$\lim_{x\to a_0} f(x)=b_0\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Se presupune, în plus, că există o vecinătate U a lui a_0 cu proprietatea că $f(x)\neq b_0$ pentru orice $x\in(U\cap A)\setminus\{a_0\}$.

Se mai presupune că $f(A)\subset B$ (atunci, rezultă că b_0 este punct de acumulare pentru B !).

Fie, de asemenea, o funcţie $g:B\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că există $\lim_{y\to b_0} g(y)=c_0\in\overline{\mathbb{R}}$.

Rezultă atunci că există:

$$\lim_{x\to a_0} g(f(x))=c_0$$

(adică funcţia compusă $F:A\to\mathbb{R}, F(x)=g(f(x))$ are limită egală cu c_0 în a_0).

Expunere schematică:

$$x\to a_0 \Rightarrow f(x)\to b_0$$

$$y\to b_0 \Rightarrow g(y)\to c_0$$

$$y=f(x)$$

$$x\to x_0 \Rightarrow g(f(x))\to c_0.$$

Exemplu. Avem $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$. Întâi **explicăm enunţul**. De fapt, avem funcţia $F:(0,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $F(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$. Trebuie să vedem dacă F are limită în $a_0 = 1$ şi să calculăm (dacă există) această limită.

Vom arăta cum se poate aplica teorema precedentă.

Avem, de fapt $x^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}}$ şi atunci considerăm funcţiile:

$$f:(0,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = x-1$$

(deci $f\left((0,1)\cup(1,\infty)\right) = (-1,0)\cup(0,\infty)$.

$$g:(-1,0)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R},\quad g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$$

(deoarece trebuie să avem $1 + y > 0$ şi $y \neq 0$).

Atunci, putem lua $A = (0,1)\cup(1,\infty)$, $B = (-1,0)\cup(0,\infty)$ şi putem forma

$$F = g\circ f : A\to\mathbb{R}.$$

$$F(x) = \left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}} = x^{\frac{1}{x-1}}.$$

În plus, dacă luăm $a_0 = 1$ avem

$$\lim_{x\to a_0} f(x) = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0 = b_0$$

şi $f(x)\neq 0 = b_0$ dacă $x\neq a_0$.

Apoi, $\lim\limits_{y\to b_0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e = c_0$.

Prin urmare $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = e$ etc.

Schematic, avem:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \text{nedeterminare de tip}\,1^{\infty}.$$

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$x\to 1 \Rightarrow x-1\to 0;$$

$$x-1 = y\to 0$$

$$\left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}} = (1+y)^{\frac{1}{y}}\to e$$

B. Continuitate

Vom lucra în următorul

Cadru de lucru. Se consideră o mulţime $A\subset\mathbb{R}$, un punct $a_0 \in A$ şi o funcţie $f: A\to\mathbb{R}$.

Definiţie. Se spune că ***f* este continuă în *a*$_0$** dacă are următoarea proprietate: pentru orice vecinătate V a lui $f(a_0)$ există o vecinătate U a lui a_0 cu proprietatea că $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap A$.

Teoremă.(Definiţia ε - δ a continuităţii) Avem echivalenţa: f este continuă în a_0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in A$, $|x-a| < \delta$ avem:

$$\left|f(x) - f(a_0)\right| < \varepsilon.$$

Totul se reduce la limite de şiruri, după cum arată următoarea

Teoremă. (Definiţia cu şiruri a continuităţii) Următoarele afirmaţii sunt echivalente.

1. Funcţia f este continuă în a_0.
2. Pentru orice şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu proprietatea $x_n \xrightarrow[n]{} a_0$ avem $f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a_0)$.

Punctele izolate (adică punctele $a_0 \in A$ care nu sunt puncte de acumulare pentru A) nu prezintă interes din punct de vedere al continuităţii, deoarece, în astfel de puncte, funcţia f este **automat continuă**.

Pentru punctele $a_0 \in A$, care sunt şi puncte de acumulare, avem următoarea

Teoremă (Legătura între limită şi continuitate). Fie $a_0 \in A$ un punct care este şi punct de acumulare pentru A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. Funcţia f este continuă în a_0.
2. Există $\lim\limits_{x \to a_0} f(x)$ şi avem $\lim\limits_{x \to a_0} f(x) = f(a_0)$

Dacă A este interval, putem defini continuitatea laterală. Anume, dacă restricţia lui f la $(-\infty, a_0] \cap A$ este continuă, spunem că ***f* este continuă la stânga în *a*$_0$**, iar dacă restricţia lui f la $[a_0, \infty) \cap A$ este continuă, spunem că ***f* este continuă la dreapta în *a*$_0$**.

Teoremă. Dacă a_0 este interior lui A, atunci f este continuă în a_0 dacă şi numai dacă f este continuă şi la dreapta şi la stânga în a_0.

Exemplu. Reluăm un exemplu studiat la limite de funcţii.

Fie a şi b numere reale. Să vedem în ce condiţii funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{dacă } x < 0 \\ b, & \text{dacă } x = 0 \\ x+a, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

este continuă în 0.

Pentru continuitate, trebuie să avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

În primul rând, am observat că f are limită în $x = 0$ dacă şi numai dacă $a = 1$. În acest caz $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Apoi $f(0) = b$.

Prin urmare: f este continuă în 0 dacă şi numai dacă $a = 1$ şi $b = 1$. În acest caz, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = x + 1$.

Teorema de compunere a funcţiilor continue

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$, cu proprietatea că f este continuă în a.

Fie $B \subset \mathbb{R}$, astfel încât $f(A) \subset B$.

Considerăm şi o funcţie $g : B \to \mathbb{R}$ care este continuă în $f(a)$. Atunci funcţia $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ este continuă în a.

Test de autoevaluare 3

1. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$ (Aici, $[x]$ = partea întreagă a lui x. Anume, $[x]$ este acel unic număr întreg m cu proprietatea $m \le x < m + 1$). Care din cele două funcţii este continuă în 0 ?

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 222 a acestei unităţi de învăţare.

Continuitatea se poate studia şi **global.** Anume, avem următoarea

Definiţie. Fie $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Se spune că f este **o funcţie continuă** dacă are proprietatea că este continuă în toate punctele lui A.

Proprietatea unei funcţii de a fi continuă este globală (adică se referă la întreaga funcţie, privită în toate punctele unde este definită).

Funcţiile continue au proprietăţi speciale. Vom menţiona, în încheierea acestui paragraf, două proprietăţi speciale ale funcţiilor continue.

Teoremă. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, f are proprietatea lui Darboux (adică: pentru orice interval $I \subset A$, mulţimea $f(I)$ este interval).

Aplicaţie. Să se arate că ecuaţia:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

are o singură rădăcină reală, plasată în intervalul (–1,0).

În adevăr, dacă scriem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

$$f(x) = x^3 + x + 1,$$

atunci:

$$f = u + v$$

unde $u(x) = x^3, v(x) = x + 1$ şi funcţiile $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt strict crescătoare. Rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Atunci f poate avea cel mult o rădăcină.

Avem $f(-1) = -1$ şi $f(0) = 1$.

Cum $f(-1) < 0 < f(0)$, rezultă că trebuie să existe $a \in (-1,0)$ aşa ca $f(a) = 0$, deoarece $f([-1,0])$ este interval, etc.

Teoremă. Dacă $-\infty < a < b < \infty$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $x_1 \in [a,b]$ şi $x_2 \in [a,b]$ cu proprietatea că

$$f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$$

(spunem că f este mărginită şi îşi atinge marginile).

2.1.3. Derivabilitate

Se consideră un interval (nedegenerat) $I \subset \mathbb{R}$, un punct $a \in I$ şi o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definiţie. Se spune că f are derivată în a dacă există:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{D}{=} f'(a) \in \overline{\mathbb{R}} .$$

Elementul $f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *derivata lui f în a*. Dacă f are derivată în a şi $f'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că ***f* este derivabilă în *a***.

Reţinem: f este derivabilă în $a \Leftrightarrow f$ are derivată în a şi derivata este finită.

Definiţie. Fie $\varnothing \neq A \subset I$. Spunem că f este derivabilă pe A dacă f este derivabilă în orice punct $a \in A$. În cazul particular când f este derivabilă pe I, spunem că f este derivabilă.

Observaţie. În mod riguros, definiţia faptului că f are derivată în a trebuie privită astfel:

a) Se consideră funcţia $P : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$P(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

b) Se observă că a este punct de acumulare pentru $I \setminus \{a\}$.

c) Are sens să studiem limita lui P în a. Dacă există

$$\lim_{x \to a} P(x) \overset{def}{=} f'(a),$$

spunem că f are derivată în a şi $f'(a)$ este derivata lui f în a.

Similar, dacă a nu este extremitate stângă (respectiv dreaptă) pentru I, putem considera (dacă există)

$f_s'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ **derivata la stânga a lui *f* în** a;

dacă $f_s'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f este derivabilă la stânga în a (respectiv $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ **derivata la dreapta a lui *f* în *a***; dacă $f_d'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f este derivabilă la dreapta în a).

Dacă a este interior lui I, se vede că: f are derivată în $a \Leftrightarrow f$ are derivată la stânga şi la dreapta în a şi avem $f_s'(a) = f_d'(a)$ (în acest caz $f'(a) = f_s'(a) = f_d'(a)$).

Dacă a este extremitatea stângă (respectiv dreaptă) pentru a, faptul că f are derivată în a revine la faptul că f are derivata la dreapta (respectiv la stânga) în a (în acest caz, $f'(a) = f_d'(a)$ (respectiv $f'(a) = f_s'(a)$)).

Înainte de a da câteva exemple, reţinem următorul rezultat important (care nu admite reciprocă).

Propoziţie. Dacă f este derivabilă în a (respectiv f este derivabilă la stânga sau la dreapta în a) rezultă că f este continuă în a (respectiv este continuă la stânga sau la dreapta în a).

Exemple. $\boxed{1)}$ Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2$. Atunci f este derivabilă şi avem $f'(a) = 2a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$. În adevăr, dacă $x \neq a$, avem:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a.$$

$\boxed{2)}$ Fie n un număr natural nenul. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x^n \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$ este continuă în 0 şi este derivabilă în 0, dacă şi numai dacă $n > 1$ (de fapt, pentru $n = 1$, funcţia f nu are derivată în 0).

Continuitatea rezultă din faptul că avem $\left|f(x)\right| \le \left|x^n\right| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Pentru a studia derivabilitatea, formăm raportul canonic pentru $x \neq 0$:

$$P(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{n-1}\sin\frac{1}{x}.$$

Dacă n = 1, avem $P(x) = \sin\frac{1}{x}$ şi se vede că **nu există** $\lim\limits_{x\to 0} P(x)$, deci f nu are derivată în 0. În adevăr,

– dacă $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, avem $x_n \xrightarrow[n]{} 0$ şi $P(x_n) \xrightarrow[n]{} 0$.

– dacă $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, avem $y_n \xrightarrow[n]{} 0$ şi $P(y_n) \xrightarrow[n]{} 1$.

Dacă $n > 1$, avem $\left|P(x)\right| \le \left|x^{n-1}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, deci $f'(0) = 0$.

$\boxed{3)}$ Funcţia $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}$$

are derivată în 0, anume $f'(0) = \infty$.

În adevăr, dacă $x \neq 0$, avem $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$. Această funcţie nu este derivabilă în 0 (de altfel este discontinuă în 0), deşi are derivată (infinită) în 0.

$\boxed{4)}$ Fie $t \in \mathbb{R}$. Funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{dacă } x = 0 \\ x^t \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

este derivabilă în 0, dacă şi numai dacă $t > 1$. În acest caz, derivabilitatea în 0 revine la derivabilitatea la dreapta în 0.

Pentru $x > 0$, raportul canonic este $P(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{t-1}\sin\dfrac{1}{x}$.

– Dacă $t \le 1$, nu există $\lim\limits_{x\to 0} P(x)$ (deci f nu are derivată în 0).

Într-adevăr, vom arăta acest fapt separat pentru $t < 1$ şi $t = 1$.

- Dacă $t < 1$, luăm şirurile $x_n \xrightarrow[n]{} 0$ şi $y_n \xrightarrow[n]{} 0$, definite prin:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$$

şi obţinem:

$$P(x_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1-t} \xrightarrow[n]{} \infty ,$$

$$P(y_n) = -\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{1-t} \xrightarrow[n]{} -\infty .$$

• Dacă t = 1 obţinem $P(x_n) = 1 \xrightarrow[n]{} 1$ şi $P(y_n) = -1 \xrightarrow[n]{} -1$ etc.

– Dacă $t > 1$, avem:

$$|P(x)| \leq x^{t-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 ,$$

deci $\lim\limits_{x\to 0} P(x) = 0$, adică $f'(0) = 0$.

$\boxed{5)}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x \quad , & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x-1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este continuă în 1, dar nu are derivată în 1 (unde are derivate laterale neegale).

Continuitatea în 1 este banală (se va testa continuitatea laterală). În ceea ce priveşte derivabilitatea în 1 vom observa că

$P(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$, dacă $x < 1$

$P(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{2x-2}{x-1} = 2$, dacă $x > 1$, deci, trecând la limită lateral către 1, vom obţine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} P(x) = f_s'(1) = 1 \neq 2 = f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} P(x)$.

Atenţie! Recapitulaţi singuri!

Cititorul va recapitula singur formulele pentru calculul derivatelor funcţiilor elementare.

De exemplu: $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

$(\sin x)' = \cos x$ etc.

De asemenea se vor recapitula regulile de bază ale derivării.

De exemplu: $(f+g)' = f' + g'$,

$(fg)' = f'g + fg'$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

În continuare câte ceva despre **derivabilitatea de ordin superior**. Considerăm întâi derivabilitatea de ordin 2.

Definiţie. Pentru $f : I \to \mathbb{R}$ şi $a \in I$ ca la început, vom spune că f este de două ori derivabilă în a dacă:

1) Există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că f este derivabilă pe $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I$.

2) Funcţia derivată $f' : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I \to \mathbb{R}$, care acţionează prin $x \mapsto f'(x)$ este derivabilă în a.

În acest caz:

$$(f')'(a) \overset{D}{=} f''(a) = f^{(2)}(a) =$$

= **derivata a doua a lui *f* în *a*** (sau **derivata secundă a lui *f* în *a*** sau, încă, **derivata de ordinul 2 a lui *f* în *a***).

În general, derivata de ordin $n \geq 2$ se defineşte recurent, după cum urmează.

Definiţie. Se spune că *f* este derivabilă de *n* ori în *a* dacă:

1) Există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că *f* este derivabilă de *n*-1 ori pe $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I$.

2) Funcţia derivată de ordin $n - 1$, adică funcţia $f^{(n-1)} : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I \to \mathbb{R}$, care acţionează prin $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$, este derivabilă în *a*.

În acest caz: $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) \overset{D}{=} f^{(n)}(a)$ = **derivata de ordin *n* a lui *f* în *a***.

Definiţiile de mai sus se pot da şi lateral (derivata a doua la stânga a lui *f* în *a* ...).

Exemplu. Dacă $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ este definită prin $f(x) = x^3$, atunci, pentru orice $a \in \mathrm{R}$ avem:

$$f'(a) = 3a^2$$

$$f''(a) = 6a$$

$$f'''(a) = f^{(3)}(a) = 6$$

$f^{(n)}(a) = 0$, dacă $n \geq 4$.

Urmează câteva teoreme fundmentale ale calculului diferenţial (adică ale teoriei derivatei).

Teorema lui Cauchy. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, care sunt derivabile pe (a,b). Se presupune că $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$.

Atunci:

a) Avem $g(a) \neq g(b)$.

b) Există $a < u < b$ cu proprietatea că:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

Luând $g(x) = x$ în teorema lui Cauchy, obţinem

Teorema lui Lagrange (Formula creşterilor finite). Fie $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ o funcţie continuă şi derivabilă pe (a, b). Atunci:

există $a < u < b$ cu proprietatea că $f(b) - f(a) = f'(u)(b-a)$.

În cazul particular când $f(a) = f(b)$, din teorema lui Lagrange obţinem

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi derivabilă pe (a, b) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci:

există $a < u < b$ *astfel încât* $f'(u) = 0$.

Notă. Din punct de vedere istoric, teorema lui Rolle a apărut prima şi, cu ajutorul ei, s-au dedus succesiv teoremele lui Lagrange şi Cauchy.

Teorema lui Darboux. Orice derivată are proprietatea lui Darboux. Mai precis: fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există $F : I \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât $F' = f$ (spunem că F este o primitivă a funcţiei f). Atunci: f are proprietatea lui Darboux.

Pentru a enunţa teorema următoare, vom reaminti următoarea

Definiţie. Fie $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că a este **punct de maxim local** (respectiv **minim local**) pentru f, dacă există o vecinătate V a punctului a, astfel încât $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$) pentru orice $x \in V \cap A$.

Valoarea $f(a)$ se numeşte **maxim local** (respectiv **minim local**) **pentru** f.

Un punct de maxim sau de minim local se numeşte **punct de extremum local**, iar un maxim sau un minim local se numeşte **extremum local**.

Acum putem enunţa

Teorema lui Fermat. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Se presupune că:

a) Punctul a este interior lui I (adică există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$).

b) Funcţia f este derivabilă în a.

c) Punctul a este punct de extremum local pentru f.

Atunci $f'(a) = 0$.

Derivatele ne ajută şi la calculul de limite de funcţii. În acest sens, vom enunţa regulile lui L' Hospital. Aceste două reguli (teoreme) au un

Cadru comun. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare pentru I. Fie $f, g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile. Se presupune că:

a) Avem $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \backslash \{a\}$.

b) Există $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

În continuare prezentăm regulile lui L'Hospital.

Regula I a lui L'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$).

În plus, faţă de cadrul comun, se presupune că:

există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Atunci:

(i) Avem $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \backslash \{a\}$.

(ii) Există $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Regula a II-a a lui L'Hospital (cazul $\frac{\bullet}{\infty}$).

În plus, faţă de cadrul comun, se presupune că:

existã $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$.

Atunci:

(i) Există o vecinătate V a lui a cu proprietatea că $g(x) \neq 0$ pentru orice $x\in V\cap(I\setminus\{a\})$.

(ii) Există $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Notă. În multe cărţi, regula **II** este cunoscută sub denumirea de „cazul $\frac{\infty}{\infty}$", deoarece, în enunţuri, se cere în plus ca

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ (ipoteză nenecesară !).}$$

Urmează câteva consecinţe importante ale teoremelor de mai sus.

În primul rînd, avem

Consecinţa teoremei creşterilor finite pentru calculul derivatei.

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Se presupune că x_0 nu este extremitate stângă (respectiv dreaptă) pentru I şi fie $-\infty\le a<x_0$ astfel încât $(a,x_0]\subset I$ (respectiv $x_0<a\le\infty$ astfel încât $[x_0,a)\subset I$). Se presupune că:

a) Funcţia f este continuă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0.

b) Funcţia f este derivabilă pe (a, x_0) (respectiv (x_0, a)).

c) Există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f'(x)=A\in\overline{\mathbb{R}}$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f'(x)=A\in\overline{\mathbb{R}}$).

Atunci, există derivata la stânga $f_s'(x_0)=A$ (respectiv derivata la dreapta $f_d'(x_0)=A$).

Să aplicăm această teoremă în următorul

Exemplu. Fie a şi b numere reale şi fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită după cum urmează

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{dacă } x\le 2\\ x^2, & \text{dacă } x>2\end{cases}.$$

Să se determine a şi b astfel încât f să fie derivabilă.

În primul rând, este evident că f este derivabilă în orice $x\neq 2$. (Explicaţia este dată de faptul că proprietatea de a fi derivabilă este **locală**:

a) Dacă $x_0 < 2$, avem $f(x) = ax + b$ pe o vecinătate $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ a lui x_0, cu ε mic, luat astfel încât $x_0 + \varepsilon < 2$.

b) Dacă $x_0 > 2$, avem $f(x) = x^2$ pe o vecinătate $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ a lui x_0 cu ε mic, luat astfel încât $x_0 - \varepsilon > 2$. În ambele situaţii, derivabilitatea restricţiei lui *f* la *V* în x_0 (care este echivalentă cu derivabilitatea lui *f* în x_0) este evidentă).

Rămâne să studiem derivabilitatea lui *f* în 2. Această derivabilitate este echivalentă cu $f_s'(2) = f_d'(2) \in \mathbb{R}$.

Prima etapă. Dacă *f* este derivabilă în x_0 (ceea ce se doreşte) rezultă că *f* este continuă în 2. Aşadar, este necesar să asigurăm întâi continuitatea lui *f* în x_0. Avem succesiv:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 2a + b = f(2);$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 4.$$

Aşadar: *f* este continuă în 2 $\Leftrightarrow$ 2 *a* + *b* = 4 $\Leftrightarrow$ *b* = 4 – 2 *a* (1)

A doua etapă. Având continuitatea în 2 (deci şi continuitatea) asigurată de (1), putem să folosim consecinţa teoremei creşterilor finite.

La stânga: în condiţiile teoremei, luăm $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 2$, $a = -\infty$, deci $(-\infty, 2] \subset \mathbb{R}$ şi $f'(x) = a$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$.

Rezultă $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f'(x) = a = f_s'(2)$.

La dreapta: luăm $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 2$, $b = \infty$, deci $f'(x) = 2x$ pentru orice $x \in (2, \infty)$. Rezultă $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x) = 4 = f_d'(2)$.

Aşadar, avem $f_s'(2) = f_d'(2) \Leftrightarrow a = 4$

Cu (1) obţinem *b* = – 4.

În aceste condiţii, funcţia (derivabilă) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & \text{dacă } x \le 2 \\ x^2, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Consecinţe privind monotonia

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă (unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval). Atunci

1) *f* este crescătoare (respectiv descrescătoare) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \ge 0$ (respectiv $f(x) \le 0$) pentru orice $x \in I$.

2) Dacă $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) < 0$) cu excepţia, cel mult, a unui număr finit de puncte din $I \Rightarrow$ *f* este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

Consecinţe privind convexitatea

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ (unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval), derivabilă de două ori.

Atunci: f este convexă (respectiv concavă) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ (respectiv $f''(x) \leq 0$) pentru orice $x \in I$.

Reamintim că f este **convexă**, dacă are proprietatea că:

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

pentru orice $t \in [0, 1]$ şi orice x, $y \in I$.

Spunem că f este **concavă** dacă – f este convexă (adică:

$$f\left((1-t)x + ty\right) \geq (1-t)f(x) + tf(y),$$

pentru orice $t \in [0, 1)$ şi orice x, y în I).

Din punct de vedere geometric, **convexitatea** (respectiv **concavitatea**) înseamnă că graficul lui f se află dedesubtul (respectiv deasupra) oricărei coarde. A se vedea figura 2.1 şi figura 2. 2.

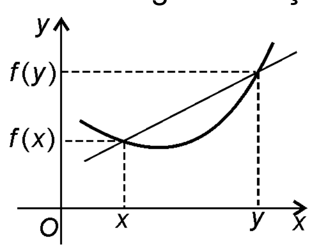


Fig. 2.1

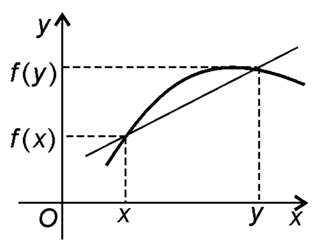


Fig. 2.2.

Cele de mai sus se aplică la construirea graficului unei funcţii.

Înainte de a prezenta un exemplu în acest sens, vom reaminti definiţia **asimptotelor**.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$.

Definirea asimptotei verticale. Fie $x_0 \in I$. Spunem că dreapta de ecuaţie $x = x_0$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f dacă există şi este infinită cel puţin una din limitele laterale $f(x_0–0)$ sau $f(x_0 + 0)$.

Definirea asimptotei oblice (în particular orizontale). Se presupune că I este nemărginit la dreapta (respectiv la stînga). Spunem că dreapta de ecuaţie $y = m\,x + n$ este **asimptotă oblică la** ∞ (respectiv **la –** ∞) **pentru graficul lui *f*** dacă

există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$) şi apoi, cu m calculat ca mai sus,

există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = n \in \mathbb{R}$ $\left(\text{respectiv } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - mx = n \in \mathbb{R}\right)$.

În particular, dacă există

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = n \in \mathbb{R} \quad (\text{respectiv } \lim_{x\to-\infty} f(x) = n \in \mathbb{R})$$

(ceea ce implică $m = 0$, vezi mai sus !) spunem că dreapta de ecuaţie $y = n$ este asimptotă orizontală la ∞ (respectiv la – ∞) pentru graficul lui f.

Exemplu. Să reprezentăm grafic funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, nu avem asimptote orizontale. Avem însă:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x^2}=1=m \text{ şi } \lim_{x\to\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=n,$$

deci dreapta de ecuaţie *y* = *x* este asimptotă la ∞ pentru graficul lui *f*.

Similar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x^2}=1=m \text{ şi } \lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0=n,$$

deci dreapta de ecuaţie *y* = *x* este asimptotă şi la – ∞ pentru graficul lui *f*.

De asemenea:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\infty,$$

deci dreapta de ecuaţie *x* = 0 este asimptotă verticală la graficul lui *f*.

Avem $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$ pentru $x\neq 0$, deci:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ sau } x=1$$

$$\begin{cases} f'(x)<0 & \text{pe } (-1,0)\cup(0,1) \\ f'(x)>0 & \text{pe } (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \end{cases}$$

Rezultă că *x* =-1 este punct de maxim local, iar *x* = 1 este punct de minim local.

Avem şi $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, deci $f''(x)<0$ pentru $x<0$ şi $f''(x)>0$ pentru $x>0$.

Tabel de variaţie

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	+	+	0	–	|	–	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	–2	↘	$_{-\infty}\|^{+\infty}$	↘	2	↗	∞
$f''(x)$		–	–		|	+		+	

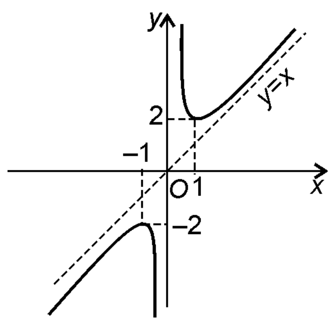


Fig. 2.3.

Încheiem prezentarea derivatei cu câteva chestiuni legate de **formula lui Taylor**.

Considerăm un interval $I \subset \mathbb{R}$, un punct $a \in I$ şi o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ care este derivabilă de n ori în punctul a ($n \geq 1$, n natural).

Polinomul lui Taylor de ordinul *n* ataşat funcţiei *f* în punctul *a* este funcţia $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definim funcţia $R_n : I \to \mathbb{R}$ prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

şi obţinem formula (valabilă pentru orice $x \in I$)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

numită **formula lui Taylor de ordin *n* ataşată funcţiei *f* în punctul *a***. Funcţia R_n este numită **restul formulei lui Taylor** (de ordin n, ataşată lui f în a).

Remarcăm că formula lui Taylor este interesantă numai pentru $x \neq a$ (dacă $x = a$, avem $R_n(a) = 0$, $f(a) = T_n(a)$).

Se constată că, dacă x este foarte apropiat de a, rezultă că valoarea $T_n(x)$ este foarte apropiată de $f(x)$, deci $T_n(x)$ aproximează pe $f(x)$. Schematic:

$$x \approx a \Rightarrow T_n(x) \approx f(x).$$

În acest sens, avem următoarea teoremă, care arată că $R_n(x)$ tinde către 0 „mai repede" decât $(x-a)^n$ când x tinde către a:

Teoremă. Avem $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Întărind ipotezele, obţinem un rezultat mai precis.

Teoremă. (Restul formulei lui Taylor în forma lui Lagrange)

Folosim aceceleaşi notaţii ca mai sus. În plus, presupunem că f este derivabilă de n + 1 ori. Atunci, pentru orice $I \ni x \neq a$, există un punct u situat strict între a şi x, cu proprietatea următoare:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Cu alte cuvinte, formula de mai sus „continuă" formula din polinomul lui Taylor, adică formula lui Taylor se scrie astfel:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Aplicaţie. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de grad $\leq n$, formula lui Taylor de ordinul n este precisă, adică $R_n(x) \equiv 0$. Cu alte cuvinte $f(x) = T_n(x)$, adică „dezvoltăm" pe $f(x)$ după puterile lui $x - a$.

Exemplu. Luăm $f(x)=x^3$ şi a = 2. Avem deci:

$$f(x)=x^3=T_3(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3=$$
$$=8+12(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3.$$

Test de autoevaluare 4

1. Să se calculeze, folosind regulile lui L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

(se vor verifica condiţiile de aplicare).

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze derivata funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 222 a acestei unităţi de învăţare.

2.1.4. Integrabilitate

1. Definiţiile fundamentale

Vom considera un interval [*a*, *b*] (unde $-\infty < a < b < \infty$).

O **diviziune a lui** [*a*, *b*] este un sistem de puncte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

(deci $n \geq 1$). Vom nota o astfel de diviziune prin Δ; mai precis:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b .$$

Norma diviziunii Δ este numărul $\|\Delta\|$, definit astfel:

$$\|\Delta\| = \max_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Vom nota cu $\mathrm{div}\left[a,b\right]$ mulţimea diviziunilor lui [*a*, *b*].

Pentru o diviziune Δ ca mai sus, un **sistem de puncte intermediare** este un sistem de puncte $u_1, u_2, \ldots u_n$, astfel încât $u_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ pentru *i* = 1,2,..., *n.* Vom nota pe scurt un astfel de sistem de puncte intermediare după cum urmează: $\left(u_i\right)_i$.

Acum să considerăm şi o funcţie $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$.

Definiţie. Cu notaţiile care preced, se numeşte **sumă Riemann** (sau **sumă riemanniană**) ataşată funcţiei *f* , diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\left(u_i\right)_i$ numărul $S\left(f,\Delta,\left(u_i\right)_i\right) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} f\left(u_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$.

Acum avem toate noţiunile şi notaţiile necesare pentru a prezenta definiţia integrabilităţii şi a integralei în sensul lui Riemann.

Cu notaţii dinainte, avem următoarea

Definiţie. Se spune că funcţia *f* este **integrabilă Riemann** (pe scurt, **integrabilă**) dacă:

există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$, *cu proprietatea că pentru orice diviziune* Δ *cu* $\|\Delta\| < \delta$ *şi orice sistem de puncte intermediare* $\left(u_i\right)_i$, *pentru* Δ *avem*:

$$\left|I - S\left(f,\Delta,\left(u_i\right)_i\right)\right| < \varepsilon .$$

Formal, putem scrie:

f este integrabilă $\stackrel{D}{=} \exists I \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \Delta \in \mathrm{div}\left[a,b\right]$, cu $\|\Delta\| < \delta$, $\forall \left(u_i\right)_i$ sistem de puncte intermediare pentru Δ:

$$\left|I - S\left(f,\Delta,\left(u_i\right)_i\right)\right| < \varepsilon .$$

Acum, să presupunemcă *f* este integrabilă. În definiţie se spune că „există $I \in \mathbb{R}$" cu anumite proprietăţi.

De fapt, se poate arăta că *I*, dacă există (adică, dacă *f* este **integrabilă**), este **unic determinat**. Cu alte cuvinte, numărul *I* este unic determinat de funcţia integrabilă *f*.

Definiţie. Numărul unic determinat *I* din definiţia integrabilităţii unei funcţii *f* se numeşte **integrala Riemann a lui *f*** (pe scurt, **integrala lui *f***) şi se notează astfel:

$$I \overset{def}{=} \int_a^b f(x)\,dx .$$

Uneori se mai scrie şi $\int_a^b f$ în loc de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Comentariu. Există şi alte definiţii ale noţiunii de integrabilitate şi (pe cale de consecinţă) ale integralei. De aceea vorbim de integrală Riemann, integrabilitate Riemann etc.

De exemplu, integrabilitatea în sensul lui Lebesgue (şi integrala Lebesgue) sunt mai generale.

În prezentul curs vom vorbi numai despre integrabilitatea şi integrala Riemann (deci vom putea omite numele).

Cele mai importante exemple de funcţii integrabile sunt date de următoarele teoreme:

Teoremă. Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ este integrabilă.

Teoremă. Orice funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ este integrabilă.

Teoremă. Orice funcţie continuă pe porţiuni este integrabilă.

(Referitor la ultima teoremă, trebuie să precizăm termenii).

Vom numi **funcţie continuă pe porţiuni** o funcţie f : $[a, b] \to \mathrm{R}$ cu următoarea proprietate: *există o diviziune* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *cu următoarele proprietăţi*:

a) *Pentru orice* i = 1,2,...n, *funcţia este continuă pe* (x_{i-1}, x_i) (*adică* $f\big|_{(x_{i-1},x_i)}$ *este continuă*).

b) *Există şi sunt finite*:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \to b} f(x)$$

şi, dacă 1 < i < n, *există şi sunt finite* $\lim_{x \nearrow x_i} f(x)$ şi $\lim_{x \searrow x_i} f(x)$.

Evident, dacă $n = 1$, deci $\Delta : a < b$, condiţiile pentru $1 < i < n$ nu se mai pun.

Pentru o funcţie *f* ca mai sus şi 1 ≤ *i* ≤ *n*, se constată că putem defini **funcţia continuă** $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \lim\limits_{x \searrow x_{i-1}} f(x), & \text{dacă} \quad x = x_{i-1} \\ \lim\limits_{x \nearrow x_i} f(x), & \text{dacă} \quad x = x_i \end{cases}$$

Pentru o astfel de funcţie *f*, integrala se calculează astfel:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i dx .$$

Exemplu. Fie f : [-1, 1] → R, definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

Aici n = 2. Anume, $\Delta : -1 = x_0 < 0 = x_1 < 1 = x_2$

$f_1 : [-1,0] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x$.

$f_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{1} f_2(x)dx = \int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{1} x^2dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Există şi funcţii care nu sunt integrabile. De exemplu, funcţia lui Dirichlet, definită astfel:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă Riemann.

(**Remarcă.** Această funcţie este, însă, integrabilă Lebesgue şi integrala sa Lebesgue este egală cu 0.)

2. Proprietăţi. Reguli de calcul

1) Orice funcţie integrabilă (Riemann) este mărginită.

2) Fie f : [a, b] → R, g: [a, b] → R integrabile. Atunci $f + g$ este integrabilă şi avem

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

3) Fie f : [a, b] → R integrabilă şi $\alpha \in$ R. Atunci $\alpha\, f$ este integrabilă şi avem

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx .$$

4) Fie f : [a, b] → R, g: [a, b] → R integrabile. Atunci $f\ g$ este integrabilă.

5) (Aceste proprietăţi sunt consecinţe imediate ale celor ce preced). $\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

pentru f : [a, b] → R, g: [a, b] → R integrabile.

6) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi $[c,d] \subset [a,b]$, rezultă $f|_{[c,d]}$ este integrabilă. Vom nota $\int_c^d f(x)dx \overset{D}{=} \int_c^d g(x)dx$, unde $g = f|_{[c,d]}$.

7) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă şi $a < c < b$. Atunci (v. **6)**):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile şi $f \le g$ avem

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

9) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, rezultă că şi $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi avem

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

10) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie **pozitivă** integrabilă şi $[c,d] \subset [a,b]$. Atunci (v. **6)**):

$$\int_c^d f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx.$$

11) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $(x_n)_n$ un şir de elemente din (a,b). Fie şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci:

a) Dacă $x_n \xrightarrow[n]{} b$ avem $\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^{x_n} f(x)dx$.

b) Dacă $x_n \xrightarrow[n]{} a$ avem $\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_{x_n}^b f(x)dx$.

Trecem la câteva modalităţi de calcul al integralei.

Teorema fundamentală a calculului integral este

Formula Leibniz – Newton

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitivă (de exemplu, f poate fi o funcţie continuă).

Atunci, pentru orice primitivă $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a lui f avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a \overset{D}{=} F(b) - F(a).$$

(Reamintim că o **primitivă a lui *f*** este o funcţie derivabilă F:[a,b]$\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$.)

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $F + C$ este şi ea o primitivă a lui f, pentru orice $C \in \mathbb{R}$.

Pentru orice funcţie continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, există $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, care este primitivă a lui *f* (se spune că *f* admite primitivă)).

Metodele uzuale de calcul pentru integrală sunt următoarele:

integrarea prin părţi şi **schimbarea de variabilă**.

Evident, avem mereu în vedere formula Leibniz – Newton, deci trebuie să ştim să calculăm **primitive**.

Teoremă . (Integrarea prin părţi pentru integrale)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate integrabile (adică funcţiile $f':[a,b]\to\mathbb{R}$, $g':[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile). În aceste condiţii avem:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Schematic:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = ?$$

$$\begin{array}{ll} f(x) & g'(x) \\ \downarrow & \downarrow \\ f'(x) & g(x)=\int g'(x)dx \end{array}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

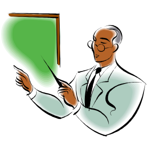
Exemplu. Să calculăm $\int_0^1 xe^x dx$.

$$\begin{array}{ll} f(x)=x & g'(x)=e^x \\ \downarrow & \downarrow \\ f'(x)=1 & g(x)=\int e^x dx = e^x \end{array}$$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e-\left(e^1-e^0\right) = e-e+1=1.$$

Integrala propusă este egală cu 1.

Comentariu. În calculul făcut, am avut $g'(x)=e^x$ şi, prin urmare, *g* trebuie să fie o primitivă a funcţiei $x\mapsto e^x$. Am luat drept primitivă pe $x\mapsto e^x$ (cea mai simplă variantă). Puteam să luăm drept primitivă şi pe $x\mapsto C+e^x$, unde $C\in\mathbb{R}$ este o constantă. Rezultatul este acelaşi, dar calculul este mult mai complicat !



Într-adevăr, calculul făcut astfel este:

$$\int_0^1 xe^x dx = ?$$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^x$
$\downarrow \qquad\quad \downarrow$
$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x + C$

$$\int_0^1 xe^x dx = x\left(e^x + C\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(e^x + C\right)dx = \left(xe^x + Cx\right)\Big|_0^1 - \left(e^x + Cx\right)\Big|_0^1 =$$
$$= 1\cdot e^1 + C\cdot 1 - 0\cdot e^0 - C\cdot 0 - \left(e^1 + C\cdot 1\right) + e^0 + C\cdot 0 = = e + C - e - C + 1 = 1.$$

Trecem la **schimbarea de variabilă**. Vom prezenta întâi formula principală şi apoi două reformulări ale ei.

Teoremă. (Formula schimbării de variabilă).

Fie *I*, *J* intervale în $\mathbb{R}$ şi $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$. Se presupune că *f* este continuă şi *u* este derivabilă cu derivata u' integrabilă (în particular, u' poate fi continuă). Atunci, pentru orice două numere $a < b$ din *I*, avem

$$\int_a^b f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Comentarii asupra enunţului:

1°. Schema cu funcţiile *f* şi *u* care intervin este:

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

2°. Derivata $u' : I \to \mathbb{R}$ este integrabilă (în particular, continuă).

3°. Deşi $a < b$, **nu** rezultă că $u(a) < u(b)$. Pentru a putea cuprtinde şi cazurile celelalte (adică situaţia $u(a) = u(b)$ sau situaţia $u(a) > u(b)$), vom face **convenţiile de calcul**:

$$\int_\alpha^\alpha \varphi(t)dt \overset{D}{=} 0 .$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt \overset{D}{=} -\int_\beta^\alpha \varphi(t)dt \quad \text{dacă } \propto > \beta$$

4°. Formula se aplică dacă $u'(x)$ apare ca factor.

Reţinem formula schimbării de variabilă după următoarea schemă:

Schematic:

$$\int_a^b f\left(u(x)\right)u'(x)dx = ?$$

$$\boxed{u(x)=t} \Rightarrow \begin{cases} x=a, & t=u(a) \\ x=b, & t=u(b) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$u'(x)dx = dt$$

$$\int_a^b f\Big(\underbrace{u(x)}_{t}\Big)\underbrace{u'(x)dx}_{dt} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Primul exemplu. Fie n un număr natural nenul. Să calculăm

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x\, dx .$$

Observăm că $\sin' x = \cos x$. După schemă:

$$\sin x = t \Rightarrow \begin{cases} x=0, & t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2}, & t=1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x dx = dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^n}_{t^n} \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \int_0^1 t^n dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1} .$$

Al doilea exemplu

Să calculăm $\int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt{1-x^2}\cdot xdx$ Observăm că $\left(1-x^2\right)' = -2x$.

Pentru a pune în evidenţă derivata lui 1 – x^2, vom scrie integrala sub forma:

$$L = \int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt{1-x^2}\cdot xdx = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt{1-x^2}\,(-2x)dx .$$

După schemă:

$$1-x^2=t \Rightarrow \begin{cases} x=0, & t=1 \\ x=\dfrac{4}{5}, & t=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(-2x)\,dx=dt$$

$$L=\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{4}{5}}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{t}}\underbrace{(-2x)\,dx}_{dt}=\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^{\frac{9}{25}}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{9}{25}}^{1}\sqrt{t}\,dt \text{ (convenţia !)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{9}{25}}^{1}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{\frac{9}{25}}^{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{9}{25}}^{1}=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_{\frac{9}{25}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{9}{25}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{75-27}{75}=\frac{16}{75}.$$

Teoremă. (Citirea inversă a formulei schimbării de variabilă)

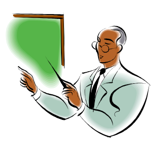
Fie $J\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:J\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie şi $a<b$ puncte în J.

Se presupune că există un interval $I\subset\mathbb{R}$, o funcţie $u:I\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă şi două numere α şi β în I aşa ca $u(\alpha)=a$, $u(\beta)=b$. În plus, admitem că $u(t)\in J$ pentru orice $t\in[\alpha,\beta]$, dacă $\propto$ < β (respectiv $t\in[\beta,\alpha]$ dacă $\beta<\alpha$).

Atunci, avem formula:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$

Comentarii asupra enunţului



1°. Denumirea de „citire inversă” provine din faptul că, practic, variabila *x* devine funcţia *u* (vezi schema).

2°. În acest calcul, punctul central este posibilitatea rezolvării ecuaţiilor în α, β : $u(\alpha)=a$, $u(\beta)$ cu o funcţie *u* care trebuie găsită. Reţinem această formulă după următoarea schemă:

Schematic:

$$\int_a^b f(x)dx = ?$$

$$\boxed{x = u(t)} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = a, & u(\alpha) = a \\ u(t) = b, & u(\beta) = b \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = u'(t)dt$$

$$\int_a^b f\underbrace{(x)}_{u(t)}\underbrace{dx}_{u'(t)dt} = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

Exemplu. Să calculăm $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Deoarece, dacă scriem $x = \sin t$, vom avea

$1-x^2 = 1-(\sin t)^2 = (\cos t)^2$: urmăm schema astfel:

$$x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0, & \sin 0 = 0 \\ \sin t = 1, & \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = \cos t dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos t)^2}\cos t dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

„Ultima” formulă de schimbare de variabilă pe care o prezentăm este denumită „a doua formulă a schimbării de variabilă” (uneori).

În această formulă, apare **inversa generalizată a unei funcţii.** Funcţia din formulă este strict monotonă, deci injectivă, şi are inversa generalizată.

Teoremă (A doua formulă a schimbării de variabilă)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $a < b$ puncte în I şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Fie şi $X : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict monotonă. Notăm: $X([a,b]) = J$ (deci J este un interval).

Fie $h : J \to [a,b]$ inversa generalizată a lui X. Se presupune că h este derivabilă cu derivata continuă. Atunci avem formula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{X(a)}^{X(b)} f(h(t))h'(t)dt.$$

Vom reţine formula după următoarea schemă:

Schematic:

$$\int_a^b f(x)dx = ?$$

$$\boxed{X(x)=t} \Rightarrow \begin{cases} x=a, & t=X(a) \\ x=b, & t=X(b) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x = X^{-1}(t) = h(t) \Rightarrow dx = h'(t)dt$$

$$\int_a^b f\Big(\underbrace{x}_{h(t)}\Big)\underbrace{dx}_{h'(t)dt} = \int_{X(a)}^{X(b)} f(h(t))h'(t)dt .$$

Primul exemplu

Să calcuilăm $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

Aici apare funcţia strict crescătoare $X:[0,1]\to\mathbb{R},\ X(x)=e^x$.

Îi vom calcula inversa generalizată după cum urmează:

$$X(0)=e^0=1,\ X(1)=e^1=e .$$

$$e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$$

Aşadar $h:[1,e]\to[0,1],\ h(t)=\ln t$.

În plus $h':[1,e]\to\mathbb{R},\ h'(t)=\frac{1}{t}$, deci h' este continuă.

Putem aplica schema:

$$e^x = t \Rightarrow \begin{cases} x=0, & t=1 \\ x=1, & t=e \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x=\ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{t}}\underbrace{dx}_{\frac{1}{t}dt} = \int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t|\Big|_1^e - \ln|t+1|\Big|_1^e =$$

$$\ln t\Big|_1^e - \ln(t+1)\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 - (\ln(e+1)-\ln 2) = .$$

$$= 1-\ln(e+1)+\ln 2 = \ln 2 - \ln(e+1)+1$$

Al doilea exemplu

Să calculăm $\int_0^\pi \frac{1}{2+\sin x}dx$.

La astfel de integrale trigonometrice, se face schimbarea de variabilă

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \qquad (1)$$

Rezultă, după cum se ştie: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$.

Din nefericire, substituţia (1) nu poate fi făcută pentru valori ale lui x de forma $x=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

Pentru a calcula integrala propusă, vom folosi proprietatea de trecere la limită 11) , deja menţionată (v. subparagraful 2). Mai precis:

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin x}dx=\lim_n\int_0^{x_n}\frac{1}{2+\sin x}dx,$$

unde $0<x_n<\pi,\ \lim_n x_n=\pi$.

Fie, prin urmare, un număr $0 < a < \pi$.

Vom calcula mai întâi integrala

$$I(a)=\int_0^{a}\frac{1}{2+\sin x}dx \qquad (2)$$

Acum putem considera funcţia strict crescătoare:

$$X:[0,a]\to\mathbb{R},\ X(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

O inversăm generalizat: $X(0)=0,\quad X(a)=\operatorname{tg}\frac{a}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t\in[0,\frac{a}{2}]\subset[0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow x=2\operatorname{arctg}t.$$

Deci $h:[0,\operatorname{tg}\frac{a}{2}]\to[0,a],\quad h(t)=2\operatorname{arctg}t$ şi $h'(t)=\frac{2}{1+t^2}$, prin urmare $h':[0,\operatorname{tg}\frac{a}{2}]\to\mathbb{R}$ este continuă.

Aplicăm schema:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=0, & t=0\\ x=a, & t=\operatorname{tg}\frac{a}{2}=X(a)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$I(a)=\int_0^a \frac{1}{2+\sin x}dx=\int_0^{X(a)} \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int_0^{x(a)} \frac{1}{t^2+t+1}dt=\int_0^{x(a)} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_0^{X(a)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{X(a)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2X(a)+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Fie acum un şir $(x_n)_n$ aşa ca $0<x_n<\pi$ şi $\lim\limits_n x_n=l$. Rezultă că integrala propusă este (deoarece $\lim\limits_n X(x_n)=\infty$ şi $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\operatorname{arctg}\lambda=\frac{\pi}{2}$), folosind (2):

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin x}dx=\lim_n I(x_n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Test de autoevaluare 5

1. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } -1\le x<0 \\ 1, & \text{dacă } x=0 \\ \frac{1}{2x+1}, & \text{dacă } 0<x\le 1 \end{cases}$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 223 a acestei unităţi de învăţare.

2.1.5. Calcule de lungimi, arii şi volume cu formule integrale

A. Lungimi de arce

Practic, vom prezenta aici calculul lungimilor unor grafice de funcţii.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Graficul funcţiei f este mulţimea (plană) $graf(f)=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (a se vedea fig. 2.4 unde porţiunea curbă este graficul).

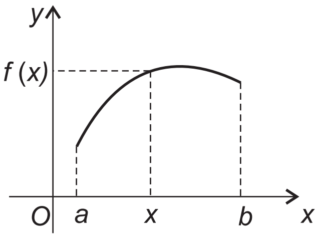


Figura 2.4.

Teoremă. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă. Atunci, **lungimea graficului** lui f (pe care nu o definim riguros!) este numărul $l(f)$ dat prin formula

$$l(f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt.$$

Exemplu. Să calculăm lungimea graficului funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=x^2$ (deci, calculăm lungimea unui arc al parabolei de ecuaţie $y=x^2$).

Avem $f'(x)=2x$, deci lungimea căutată este $l(f)=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx$. Folosim formula a doua a schimbării de variabilă şi facem substituţia lui Euler $\sqrt{1+4x^2}=2x+t\Leftrightarrow t=\sqrt{1+4x^2}-2x$.

Prin urmare: $\begin{matrix} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{5}-2 \end{matrix}$.

Prin ridicare la pătrat în formula de substituţie:

$$1+4x^2=4x^2+4xt+t^2\Rightarrow x=\frac{1-t^2}{4t}\qquad dx=-\frac{t^2+1}{4t^2}dt$$

$$\sqrt{1+4x^2}=2x+t=\frac{1-t^2}{2t}+t=\frac{1+t^2}{2t}$$

Integrala devine:

$$\int_1^{\sqrt{5}-2}\frac{1+t^2}{2t}\left(-\frac{t^2+1}{4t^2}\right)dt=\frac{1}{8}\int_{\sqrt{5}-2}^{1}\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^3}dt=\frac{1}{8}\int_{\sqrt{5}-2}^{1}\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_{\sqrt{5}-2}^{1}\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{16}t^2\Big|_{\sqrt{5}-2}^{1}+4\ln t\Big|_{\sqrt{5}-2}^{1}-\frac{1}{16}\frac{1}{t^2}\Big|_{\sqrt{5}-2}^{1}=$$

$$= \frac{1}{16}\left(1-\left(\sqrt{5}-2\right)^2\right) - 4\ln\left(\sqrt{5}-2\right) - \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}\right).$$

Remarcă. De multe ori, formula de mai sus nu este aplicabilă, deoarece nu se îndeplinesc condiţiile din ipoteză, relative la funcţia F.

Exemplu. Să calculăm lungimea cercului de rază 1. Acest cerc are ecuaţia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Semicercul superior al acestui cerc este dat astfel:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\right\}.$$

Rezultă că $S = \text{graf}(f)$, unde $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Pentru a calcula lungimea semicercului, adică lungimea graficului lui f, nu putem aplica formula deoarece f nu este derivabilă în punctele -1 şi 1.

Procedăm după cum urmează. Vom considera un număr $0 < \varepsilon < 1$ şi funcţia $f_\varepsilon : [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f_\varepsilon(x) = f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Atunci, funcţia f_ε este derivabilă, cu derivata continuă dată de formula

$$f'_\varepsilon(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Avem, deci

$$\sqrt{1+\left(f'_\varepsilon(x)\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vom calcula atunci lungimea graficului lui f_ε (vezi figura. 2.5).

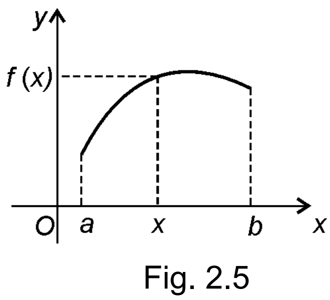


Fig. 2.5

Acest grafic al lui f_ε este o parte a semicercului nostru şi are lungimea:

$$l(f_\varepsilon) = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\arcsin(1-\varepsilon).$$

Se vede că, luând pentru ε valori din ce în ce mai mici, graficul lui f_ε tinde să acopere întreg semicercul. Este, deci natural, să afirmăm că lungimea semicercului este egală cu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} l(f_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\arcsin(1-\varepsilon) = 2\arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Rezultatul este în concordanţă cu ce ştim: semicercul are lungimea π, cercul are lungimea 2π.

B. Arii

B1. Arii de figuri plane mărginite de grafice de funcţii

Definiţie. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie **pozitivă** (adică $f(x) \geq 0$ pentru $x \in [a, b]$). **Subgraficul lui *f*** este mulţimea:

$$S(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

(vezi figura. 2.6).

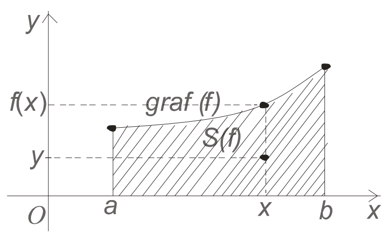


Fig. 2.6

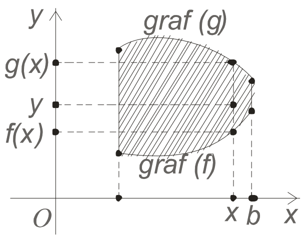


Fig. 2.7.

Se vede că $S(f)$ este „trapezul curbiliniu” mărginit de dreptele verticale de ecuaţii $x = a$ şi $x = b$, de dreapta Ox şi de graficul funcţiei f.

Teoremă. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă şi integrabilă Riemann. Atunci, subgraficul lui f **are arie** (nu am definit în mod riguros aria!) dată de formula:

$$\text{aria} S(f) = \int_a^b f(x)dx .$$

Exemplu. Fie $n \geq 1$ un număr natural şi $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^n$. Atunci, aria subgraficului lui f este $\text{aria} S(f) = \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Mai general, putem calcula aria porţiunii plane cuprinse între două grafice de funcţii. În mod precis:

Teoremă. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii integrabile cu proprietatea că $f \leq g$ (adică $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$). Se consideră mulţimea (vezi figura 2.7):

$$S(f,g) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\right\}.$$

Atunci $S(f, g)$ are arie dată de formula:

$$\text{aria} S(f,g) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx .$$

De multe ori se spune că $S(f, g)$ este mulţimea cuprinsă între dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $y = g(x)$.

Exemplu. Să considerăm funcţiile $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şi $g:[0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Avem $f \le g$. Să calculăm aria $S(f, g)$.

$$\text{aria}S(f,g)=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

B2. Ariile suprafeţelor de rotaţie (obţinute prin rotirea graficelor unor funcţii).

Se consideră o funcţie pozitivă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ al cărui grafic se roteşte în jurul axei Ox (vezi figura 2.8).

În acest mod se generează o suprafaţă $SR(f)$ care se numeşte **suprafaţa de rotaţie** (generată prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox).

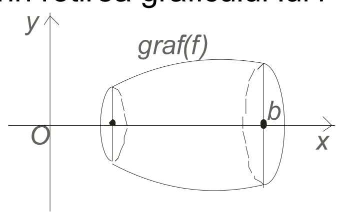


Fig. 2.8

Teoremă. Se presupune, în plus, că funcţia f este derivabilă cu derivata $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă.

Atunci, suprafaţa $SR(f)$ **are arie** (nu am definit în mod riguros aria!) dată de formula

$$\text{aria}SR(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx .$$

Exemplu. Fie h şi m numere strict pozitive. Se consideră funcţia $f:[0,h]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=mx$. Să calculăm aria $SR(f)$.

Avem $f'(x)=m$, deci:

$$\text{aria}SR(f)=2\pi\int_0^h mx\sqrt{1+m^2}dx=2\pi m\sqrt{1+m^2}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^h=\pi m\sqrt{1+m^2}h^2 .$$

Interpretare geometrică. Graficul lui f este un segment de dreaptă, care prin rotaţie generează un con circular drept cu vârful în origine, înălţimea h şi raza bazei $h\,m$.

Cititorul va calcula aria laterală a acestui con şi va verifica egalitatea ei cu aria găsită mai sus.

C. Volumele corpurilor de rotaţie (obţinute prin rotirea graficelor de funcţii)

Se repetă construcţia de la punctul precedent B2. Se obţine un corp geometric $V(f)$ mărginit de suprafaţa de rotaţie de la punctul B2, precum şi de „capacele” date de porţiunile plane corespunzătoare lui $x = a$ şi $x = b$ (vezi figura 2.8)

Spunem că $V(f)$ este **corp de rotaţie** (generat prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox).

Teoremă. Fie, ca mai sus, funcţia pozitivă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Atunci, dacă f este integrabilă Riemann, mulţimea $V(f)$ **are volum** (nu am definit volumul în mod riguros!) dat de formula

$$\text{volum}\, V(f)=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Exemplu. Reluăm ultimul exemplu studiat înainte. Atunci volum

$$V(f)=\pi\int_0^h m^2x^2dx=\pi m^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{\pi}{3}m^2h^3.$$

Acesta este exact volumul conului circular drept de înălţime h şi rază a bazei $m\,h$.

D. Centrele de greutate ale plăcilor omogene plane mărginite de grafice de funcţii

Considerăm o funcţie continuă pozitivă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Subgraficul său (v. B1) considerat ca placă omogenă, are centrul de greutate $G(f)$. Considerente de aproximare ne conduc la următoarea

Teoremă. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, pozitivă şi nenulă. Atunci $G(f)$ are coordonatele date de următoarele formule

$$x_{G(f)}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx};\qquad y_{G(f)}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Observaţie. Din ipoteze, rezultă că $\int_a^b f(x)dx>0$.

Exemplu. Să calculăm coordonatele lui $G(f)$ pentru $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 (f(x))^2dx=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},$$

$$x_{G(f)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4},\qquad y_{G(f)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{10}.$$

Test de autoevaluare 6

1. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între dreptele de ecuaţii $x = -1$ şi $x = 1$ şi graficele funcţiilor $y = x^4$ şi $y = |x|^3$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze volumul de rotaţie obţinut prin rotirea graficului funcţiei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ în jurul axei Ox. Aici $0 \le a < b$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 223 a acestei unităţi de învăţare.

2.1.6. Calcule aproximative

Analiza Matematică este o ştiinţă a aproximărilor. Noţiunea fundamentală a Analizei Matematice – limita – exprimă perfect această idee: ne putem apropia oricât de mult de limită, fără speranţa de a o atinge. Aşadar, prin însăşi natura ei, Analiza Matematică generează aproximări, care fac parte din teoria ei.

Când se pune însă problema lucrului practic cu aceste aproximări (de exemplu, când se pune problema numărului de paşi necesari pentru ca eroarea să fie mai mică decât un număr dat – a se vedea începutul acestei unităţi de învăţare, anume 1.1.1.), atunci intrăm într-un domeniu special al Analizei Matematice, anume este vorba de Analiza Numerică.

În aceste paragraf vom exemplifica numai câteva posibilităţi de a face calcule aproximative controlate, în spiritul practic al Analizei Numerice. Vom arăta, de exemplu, cum putem aproxima valori numerice pe care nu le putem calcula exact.

A. Reluăm un exemplu din 1.1.1. Avem:

$$\lim_{n} \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} = 2.$$

Am văzut că, pentru 0 < ε < 1 dat, putem calcula:

$$n(\varepsilon) = [\frac{2-\varepsilon+\sqrt{-3\varepsilon^2+4}}{2\varepsilon}]+1$$

şi avem, pentru orice număr natural $n \geq n(\varepsilon)$ inegalitatea $|x_n - 2| < \varepsilon$, unde $x_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n+1}$.

Dacă notăm $err(n) = |x_n - 2|$, adică err (n) măsoară distanţa între valoarea calculată (aproximativă) la pasul n a lui x_n , vom avea:

$$err(n) < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$.

De exemplu, după cum am văzut, pentru ε = 0,01 avem n(0,01) = 200.

Calculele de mai sus respectă cerinţa fundamentală a analizei numerice, anume cerinţa de a controla eroarea făcută atunci când calculăm valoarea aproximativă în locul valorii exacte. Prin control înţelegem posibilitatea de a spune cu precizie până unde trebuie dus calculul (de exemplu aici, cât de mare trebuie să fie rangul n al lui x_n) pentru ca eroarea făcută să fie mai mică decât un prag prestabilit.

Notăm că eroarea definită ca mai sus se mai numeşte şi eroare absolută.

B. Să calculăm cos 1 cu două zecimale exacte. Evident, cos 1 nu poate fi calculat „exact”. Pentru a preciza lucrurile, reamintim că în analiză unghiurile se măsoară în radiani, iar logaritmii sunt naturali, adică în baza *e*.

Prin urmare, cos 1 înseamnă cosinusul unui unghi de 1 radian. Deoarece cercul întreg (adică 360° = 360 grade sexagesimale) are 2π ≈ 2 ·3,14 radiani, rezultă că 1 radian ≈ 57° 30'. Aşadar putem prevedea că $\cos 1 > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, unde $\frac{\pi}{3}$ reprezintă 60°. În plus, valoarea cos 1 este foarte apropiată de $\frac{1}{2}$.

Pentru rezolvarea problemei vom folosi **formula lui Taylor**.

Luăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$. Scriem formula lui Taylor de ordin *n* ataşată funcţiei *f* în punctul *a* = 0, pentru valoarea *x* ≠ 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)= \\ &= 1+\frac{0}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \end{aligned}.$$

Pentru *x* = 1 avem deci:

$$f(1)=\cos 1=\cos(0)+\frac{\cos'(0)}{1!}+\frac{\cos''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}+R_n(1).$$

Restul în forma lui Lagrange este $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}x^n$, unde *u* este strict cuprins între 0 şi *x*.

Pentru *x* = 1 avem deci $\cos 1 = A_n+\frac{\cos^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}=A_n+R_n(1)$, unde $0<u<1$ şi

$$\begin{aligned} A_n &= \cos(0)+\frac{\cos'(0)}{1!}+\frac{\cos''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}= \\ &= 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}.$$

Aşadar avem $\cos 1 - A_n = R_n(1)$, deci:

$$\left|\cos 1 - A_n\right| = \left|R_n(1)\right| = \left|\frac{\cos^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}\right|.$$

Vom lua ca valoare aproximativă pentru cos 1 pe A_n .

Atenţie! Deocamdată *n* este necunoscut. Va trebui să stabilim ce valoare a lui *n* face ca eroarea să fie cea propusă, adică să avem:

$$err(n)=\left|\cos 1 - A_n\right| < \frac{1}{100} \qquad (1)$$

Rezultă că trebuie să avem $\left|R_n(1)\right|<\frac{1}{100}$. Deoarece $\cos^{(n+1)}(u)$ poate fi egal cu ±cos *u* sau ±sin *u* , vom avea:

$$\left|\cos^{(n+1)}(u)\right| \le 1 \Rightarrow \left|R_n(1)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}.$$

Prin urmare, pentru a îndeplini condiţia (1), va fi suficient să avem:

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow (n+1)! > 100.$$

Pentru n = 3 avem 4! = 24 < 100, iar pentru n=4 avem 5! =120 $>$ 100. Aşadar, valoarea n = 4 este cea mai mică posibilă, deci putem să aproximăm cos 1 ≈ $A_4 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$.

Aşadar, $\cos 1 \approx \frac{13}{24} \approx 0,541...$

C. Metoda trapezelor pentru calculul aproximativ al integralelor.

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Deşi integrala lui f există, de multe ori nu o putem calcula exact. De exemplu, dacă nu putem calcula o primitivă a lui f, nu putem aplica formula Leibniz – Newton, etc.

Există metode de calcul proximativ al integralei. Anume, după un algoritm, se calculează o valoare numerică şi aceasta va fi valoarea aproximativă căutată. Metoda nu are valoare dacă nu putem controla eroarea, deci trebuie să putem preciza necesarul de calcul pentru a avea o eroare mai mică decât un prag dat dinainte.

Dintre metodele cunoscute de aproximare, vom prezenta numai una, anume, **metoda trapezelor**.

Metoda trapezelor înlocuieşte valoarea integralei $\int_a^b f(x)dx$ cu valoarea aproximativă:

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + f(b) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\big)\Big).$$

Aici n ≥ 1 şi avem **diviziunea echidistantă**:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 = \frac{b-a}{n} < x_2 = \frac{2(b-a)}{n} < ... < x_{n-1} = \frac{(n-1)(b-a)}{n} < x_n = b.$$

Controlul erorii este dat de următoarea:

Teoremă. Se presupune că f este de două ori derivabilă şi $f'':[a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.
Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

unde $M = \sup\left\{\left|f''(x)\right| \,\middle|\, x \in [a,b]\right\}$.

Ca aplicaţie, vom prezenta un exemplu de integrală pe care o putem calcula exact şi vom vedea cum funcţionează metoda.

Exemplu. Să calculăm cu două zecimale exacte, folosind metoda trapezelor, $\int_0^1 x^2 dx$.

Evident, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} = 0,333...$.

Aici $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, deci a = 0, b = 1. Avem $b - a$ = 1 şi

$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$, deci putem lua M = 2.

Cerinţa problemei este ca

$$\text{err }(n) = \left| \int_0^1 x^2 dx - T_n(f) \right| < \frac{1}{100}.$$

Va fi suficient ca:

$$\frac{2 \cdot 1^3}{12n^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 3n^2 > 50 \Leftrightarrow n^2 > \frac{50}{3}.$$

Pentru n = 4 avem $n^2 = 16 < \frac{50}{3}$, iar pentru n = 5 avem

$$n^2 = 25 > \frac{50}{3}.$$

Putem lua n = 5. Valoarea aproximativă va fi:

$$T_5(f) = \frac{1}{10}\left(f(0) + f(1) + 2\left(f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(0 + 1 + 2\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(1 + 2 \cdot \frac{30}{25}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{12}{5}\right) = \frac{17}{50} = 0,34.$$

Se vede că, într-adevăr

$$\left| T_5(f) - \int_0^1 f(x) dx \right| = |0,34 - 0,333...| = 0,00666... < 0,01 = \frac{1}{100}.$$

Test de autoevaluare 7

1. Să se indice un număr natural n_0 cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem $\left|\frac{3n+1}{n+1}-3\right| < \frac{1}{100}$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze cu o zecimală exactă $\int_0^1 x^3 dx$, folosind metoda trapezelor.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 224 a acestei unităţi de învăţare.

2.2. Spaţii metrice. Spaţii normate

O expunere modernă a unor elemente de analiză trebuie făcută în cadru general, abstract. Noţiunea fundamentală a analizei, anume **noţiunea de limită**, îşi găseşte locul natural de expunere în cadrul spaţiilor topologice. Noi nu vom lucra în acest cadru atât de general. Vom face expunerea pentru spaţii metrice şi, mai particular, pentru spaţii normate. Acest cadru este suficient de general şi, în acelaşi timp, mult mai intuitiv decât cadrul spaţiilor topologice. Pe parcurs vom lucra foarte mult cu spaţiile normate speciale $\mathbb{R}^n$, care constituie cadrul natural al analizei clasice. Vom considera cunoscute elementele de analiză din liceu.

Vom nota prin $\mathbb{R}_+$ mulţimea $[0,\infty)$.

Dacă X este o mulţime nevidă şi $d : X \times X \to Y$ este o funcţie oarecare (unde Y este o altă mulţime nevidă), vom nota $d(x,y)$ în loc de $d((x,y))$, pentru orice x, y în X.

Definiţie. Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte **metrică** sau **distanţă pe *X*** dacă are proprietăţile:

(i) … $x, y \in X$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) … $x, y \in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) … $x, y, z \in X$, $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$;

Dacă x,y sunt în X, numărul $d(x,y)$ *se numeşte* ***distanţa între x şi y***.

Un cuplu (X,d), unde X este o mulţime nevidă şi d este o metrică pe X, se numeşte ***spaţiu metric***.

În cadrul de mai sus, pentru orice $x \in X$ şi orice număr $r > 0$ introducem mulţimile:

$$B(x,r)=\{y\in X \mid d(y,x)<r\}$$

(se numeşte **bila deschisă de centru *x* şi rază *r*).**

$$B[x,r]=\{y\in X \mid d(y,x)\le r\}$$

(se numeşte **bila închisă de centru *x* şi rază *r***).

Evident $x \in B(x,r) \subset B[x,r]$.

Din nou în acelaşi cadru dăm următoarea:

Definiţie. Fie $(x_n)_n$ un şir de elemente din X şi x un element din X. Vom spune că $(x_n)_n$ **tinde la *x* (converge la x)** dacă:

$$\ldots\ \varepsilon>0,\ \exists\ n(\varepsilon)\in \mathbb{N},\ \ldots\ n \ge n(\varepsilon),\ d(x_n,x) < \varepsilon .$$

În aceste condiţii x se numeşte **limita lui** $(x_n)_n$ şi scriem $x = \lim\limits_n x_n$

Observaţii. 1°. Dacă un şir $x_{n/n}$ este **convergent** (adică există $x \in X$ aşa ca $\lim\limits_n x_n = x$ rezultă că x este **unic determinat**.

2°. A spune $x_n \xrightarrow[n]{} x$ (scrierea aceasta înseamnă că $(x_n)_n$ tinde la x) revine la a spune că oricum am lua o bilă $B(x, \varepsilon)$ există un rang $n(\varepsilon)\in \mathbb{N}$ aşa ca $x_n \in B(x, \varepsilon)$ dacă $n \ge n(\varepsilon)$.

3°. În limbajul analizei din liceu, faptul că $x_n \xrightarrow[n]{} x$ în spaţiul metric (X, d) revine la faptul că $d(x_n, x) \xrightarrow[n]{} 0$ (adică distanţa între x_n şi x poate fi făcută oricât de mică).

Exemple de spaţii metrice

$\boxed{1°.}$ Pentru orice mulţime nevidă X definim metrica $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ dată prin

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Atunci $B(x,r) = B[x,r] = \{x\}$ pentru orice $x \in X$ şi orice $0 < r < 1$. Apoi $B(x,1) = \{x\}$ şi $B\,[x,1] = X$ pentru orice $x \in X$. În fine, pentru orice $x \in X$ şi orice $r > 1$ avem $B(x,r) = B[x, r] = X$.

Se poate arăta că în acest spaţiu metric avem echivalenţa

$$x_n \xrightarrow[n]{} x \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ldots\, n \geq n_0,\ x_n = x.$$

$\boxed{2°.}$ Cel mai familiar exemplu de spaţiu metric este $(\mathbb{R}, d)$ unde

$$d(x,y) = |x - y| \text{ pentru orice } x,y \in \mathbb{R}$$

(aceasta este **distanţa canonică în $\mathbb{R}$)**.

Pentru orice $r > 0$ şi $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$B(x,r) = (x - r,\ x + r) \text{ şi } B[x,r] = [x - r,\ x + r].$$

Constatăm că $x_n \xrightarrow[n]{} x$ \^{\i}n $(\mathbb{R}, d) \Leftrightarrow x_n \to x$ \^{\i}n

sensul obişnuit (cunoscut din liceu).

$\boxed{3°.}$ În mod similar definim spaţiul metric $(\mathbb{C}, d)$ unde:

$$d(x,y) = |x-y| \text{ pentru orice } x,y \in \mathbb{C}.$$

Bilele sunt în acest caz **discuri** (v. fig. 2.9):

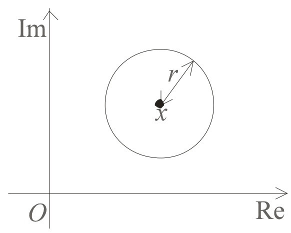


Fig. 2.9

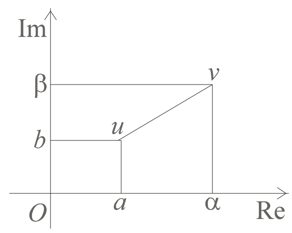


Fig. 2.10

$B(x,r)$ = discul centrat în punctul din plan de afix x, de rază r, fără circumferinţă.

$B[x,y]$= discul centrat în punctul din plan de afix x, de rază r, împreună cu circumferinţa.

Se vede că dacă $u = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ şi $v = \alpha + \mathrm{i}\, \beta \in \mathbb{C}$, avem

$$d(u,v) = \sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-b)^2}\ .$$

Obţinem în fond distanţa obişnuită în plan (v.fig. 2.10).

$\boxed{4°.}$ Vom da şi o construcţie a unei metrici pe $\overline{\mathrm{R}}$ (reamintim că $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. În această metrică avem următorul rezultat: convergenţa coincide cu convergenţa obişnuită (cunoscută din liceu), adică cu următoarele fapte:

a) $x_n \xrightarrow[n]{} x \Leftrightarrow \ldots\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathrm{N},\ \ldots\ n \geq n(\varepsilon),\ |x_n - x| < \varepsilon$ (în cazul $x_n \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}$);

b) $x_n \xrightarrow[n]{} \infty \Leftrightarrow \ldots\ \lambda > 0,\ \exists\ n(\lambda) \in \mathrm{N},\ \ldots\ n \geq n(\lambda),\ x_n > \lambda$ (aici $x_n \in \mathrm{R}$);

c) $x_n \to -\infty \Leftrightarrow \ldots\ \lambda > 0,\ \exists\ n(\lambda) \in \mathrm{N},\ \ldots\ n \geq n(\lambda),\ x_n < -\lambda$ (aici $x_n \in \mathrm{R}$).

Construcţia anunţată se bazează pe faptul că funcţia: $\varphi : \overline{\mathrm{R}} \to [-1,1]$, dată prin:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & -\infty < x < \infty \\ 1 & x = \infty \end{cases}$$

este o bijecţie.

Atunci pe $\overline{\mathrm{R}}$ se instituie metrica dată prin:

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Construcţia de mai sus este un caz particular al „transportului de metrică``.

5°. Vom considera spaţiul s al tuturor şirurilor $x = (x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ de numere (reale sau complexe). Pe s se consideră metrica d dată prin:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

(aici $x = (x_n)_n$ şi $y = (y_n) \in$ s).

Vom reveni asupra seriilor mai târziu.

Relativ la spaţiile metrice, un concept fundamental este conceptul de **completitudine**, la care ne vom referi pe scurt.

Într-un spaţiu metric (X,d), un şir $(x_n)_n$ este numit **şir Cauchy** dacă are proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ natural aşa ca $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pentru orice m, $n \geq n(\varepsilon)$. Evident, orice şir convergent este Cauchy. Reciproca nu este valabilă în general. Spaţiile metrice în care reciproca este valabilă se numesc **spaţii metrice complete**. Aşadar, un spaţiu metric (X,d) este complet dacă şi numai dacă pentru orice şir Cauchy $(x_n)_n$ cu elemente din X există un punct $x \in X$ cu proprietatea că $x_n \xrightarrow[n]{} x$.

Toate exemplele de spaţii metrice pe care le-am prezentat sunt exemple de spaţii metrice complete. Există şi spaţii metrice care nu sunt complete. Vom da mai târziu un astfel de exemplu.

În continuare vom trece la unul din cele mai importante exemple de spaţii metrice: **spaţiile normate**.

În cele ce urmează vom folosi următoarea notaţie: dacă $|| \ ||:X\to\mathbb{R}_+$ (unde X este o mulţime nevidă) vom scrie pentru orice $x \in X$ valoarea lui $|| \ ||$ în x astfel: $||x||$ (în loc de $||x||$).

De asemenea, vom nota prin K corpul numerelor reale sau complexe.

Definiţie. Fie X un spaţiu vectorial peste K. O aplicaţie $|| \ ||:X\to\mathbb{R}_+$ se numeşte **normă pe X** dacă au loc următoarele proprietăţi:

(a) $||x||=0\Leftrightarrow x=0_X$;

(b) $||\alpha x||=|\alpha| \ ||x||$

(c) $||x+y||\leq ||x||+||y||$

Aici x, y sunt elemente în X şi α este în K. Am notat prin 0_x elementul nul al spaţiului vectorial X.

Un cuplu $(X, || \ ||)$ unde $|| \ ||$ este o normă pe X se numeşte **spaţiu normat**.

Legătura între teoria spaţiilor normate şi teoria spaţiilor metrice este dată de următoarea:

Teoremă. Orice spaţiu normat devine spaţiu metric în mod canonic. Mai precis:

Fie $(X,|| \ ||)$ un spaţiu normat. Definim aplicaţia $d_{|| \ ||}:X \times X \to \mathbb{R}_+$, dată prin:

$$d_{|| \ ||}(x,y) = ||x - y||.$$

Atunci $d_{|| \ ||}$ este o metrică pe X, numită **metrica asociată normei** $|| \ ||$.

Înseamnă că putem privi spaţiile normate ca pe nişte cazuri particulare de spaţii metrice. Toate problemele care apar în contextul spaţiilor metrice pot fi atacate în cadrul mai particular al spaţiilor normate.

În cele ce urmează ne vom referi la un spaţiu normat $(X,|| \ ||)$ subînţelegând structura sa de spaţiu metric echipat cu distanţa canonică generată de norma $|| \ ||$.

Definiţie. Un spaţiu normat care, privit ca spaţiu metric,este complet, se numeşte spaţiu Banach.

Există şi spaţii normate care nu sunt spaţii Banach. În acest fel se pun deci în evidenţă spaţii metrice care nu sunt complete.

Exemplu de spaţiu normat care nu este spaţiu Banach.

Vom nota prin fc_0 mulţimea tuturor şirurilor $x=(x_n)_n$ de elemente din K care au următoarea proprietate: numai un număr finit de elemente x_n sunt nenule.

Deci, pentru fiecare $x=(x_n)_n\in fc_0$ există câte un număr natural $n(x)$ cu proprietatea că $x_n=0$ pentru orice $n \geq n(x)$.

Evident fc_0 este un spaţiu vectorial, subspaţiu al spaţiului vectorial s al tuturor şirurilor scalare (pe s avem operaţiile naturale).

Spaţiul fc_0 devine spaţiu normat cu norma dată prin:

$$|| x ||= \sup_n | x_n |.$$

Se poate arăta că $(fc_0,|| \ ||)$ **nu** este spaţiu Banach.

Exemple de spaţii Banach

$\boxed{1°.}$ Cel mai important exemplu de spaţiu normat este spaţiul vectorial

K^n ($n \geq 1$) echipat cu o normă oarecare. De notat că toate normele posibile pe K^n sunt echivalente, în sensul că generează aceeaşi topologie (nu intrăm în amănunte).

Normele clasice pe K^n sunt normele $\|\ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pe care le definim în cele ce urmează.

a) Fie un număr real $p \geq 1$. Pentru orice $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ definim

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

În cazul $K=\mathbb{R}$ şi $p=2$, $\|\ \|_2$ se numeşte **norma euclidiană pe $\mathbb{R}^n$**.

Dacă $n = 1$ şi $K = \mathbb{C}$ avem $\|z\|_p = |z|$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Dacă $p=2$, $n=2$ şi $K = \mathbb{R}$ avem $\| x = (x_1, x_2) \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Regăsim lungimea obişnuită a vectorilor din plan (avem şi $\| x = (x_1, x_2) \|_2 = | z = x_1 + \mathrm{i}\, x_2 |$)

în acest caz).

b) Pe K^n avem şi norma $\|\ \|_\infty$ dată prin $\| x \|_\infty = \max_{i=1}^{n} | x_i |$.

Exemplele de mai sus accentuează **analogia dintre modul şi normă**, **norma constituind o generalizare a modulului** şi formali-zând definiţia noţiunii intuititve de lungime a unui vector.

Se poate arăta faptul următor: **convergenţa în K^n**, echipat cu norma $\|\ \|_p$, $1 \leq p+\infty$, **coincide cu convergenţa pe componente**. Mai precis: fie $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ un şir în K^n şi fie $x \in K^n$. În mod explicit, pentru fiecare i avem $x^i=(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ şi, de asemenea, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Fixăm arbitrar $1 \leq p \leq \infty$. Atunci $x^i \xrightarrow[i]{} x$ în (K^n, $\|\ \|_p$) (cu alte cuvinte $\| x^i - x \|_p \xrightarrow[i]{} 0$) dacă şi numai dacă $x_t^i \xrightarrow[i]{} x_t$, pentru toţi $t = 1, 2, \ldots, n$.

$\boxed{2°.}$ Putem prezenta nişte structuri similare cu cele de la 1° pe spaţii de şiruri.

Reamintim că am notat prin s spaţiul tuturor şirurilor scalare

$x=(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $x_n \in K$, echipat cu operaţiile naturale de spaţiu vectorial peste K: dacă $x = (x_n)_n \in s$ şi $y = (y_n)_n \in s$ avem $x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar dacă $\alpha \in K$ avem $\alpha x=(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Putem organiza ca spaţii Banach anumite subspaţii ale lui s după

cum urmează:

2°. a) Spaţiul $m=\{x=(x_n)_n \in s \mid (x_n)_n$ este şir mărginit$\}$, cu norma:

$$\| x \|_\infty = \sup_n | x_n |.$$

Uneori se mai notează $m=l^\infty$.

Spaţiul m are următoarele subspaţii clasice care se organizează ca spaţii Banach cu norma de pe m:

-- spaţiul $c=\{x=(x_n)_n \in s \mid (x_n)_n$ este convergent$\}$ cu norma $\|\ \|_\infty$ de mai sus.

-- spaţiul $c_0=\{x=(x_n)_n \mid x_n \to 0\}$ cu norma $\|\ \|_\infty$ de mai sus.

2°. b) Considerăm un număr $1 \le p < \infty$. Acest număr generează spaţiul vectorial $l^p = \{x= (x_n)_n \in s \mid$ seria $\sum_n |x_n|^p$ este convergentă$\}$ cu norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avem incluziunile:

$$l^{p'} \subset l^{p''} \subset c_0 \subset c \subset l^\infty = m$$

pentru orice $1 \le p' < p'' < \infty$.

$\boxed{3°.}$ Vom prezenta şi câteva spaţii de funcţii. Fie T o mulţime nevidă.

Considerăm spaţiul vectorial $\mathcal{B}(T) = \{f : T \to K \mid f$ este mărginită$\}$, echipat cu operaţiile naturale de adunare şi înmulţire cu scalari. Atunci spaţiul $\mathcal{B}(T)$ devine spaţiu Banach cu **norma convergenţei uniforme** dată prin

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$$

(uneori se scrie $\|f\| = \sup\limits_{t\in T} |f(t)|$.

În cazul special când $T = [a, b]$, unde $-\infty < a < b < \infty$, vom considera următoarele subspaţii ale lui $\mathcal{B}([a,b])$:

a) $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to K \mid f$ este continuă$\}$. (Se ştie că orice funcţie continuă $f : [a, b] \to K$ este mărginită). Atunci $\mathcal{C}([a, b])$ echipat cu norma din $\mathcal{B}([a,b])$, dată prin $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [a,b]\}$ este spaţiu Banach.

b) Un subspaţiu al lui $\mathcal{C}([a,b])$ este $\mathcal{D}([a,b]) = \{f : [a, b] \to K \mid f$ este derivabilă cu derivata continuă$\}$. Pe acest spaţiu se consideră norma

$$|||f||| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

şi atunci se poate arăta că $\mathcal{D}([a,b]), |||\ |||)$ este spaţiu Banach.

Remarcă. Spaţiul normat $(\mathcal{D}([a,b]), \|\ \|)$ unde $\|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ **nu** este Banach.

Observaţie generală privind construcţia de subspaţii metrice şi normate.

În toate exemplele construite prin trecere de la spaţii mai mari la spaţii mai mici am folosit următoarele scheme generale:

1°. Dacă (X,d) este un spaţiu metric şi $\emptyset \ne A \subset X$, obţinem spaţiul metric (A, d_A) unde $d_A(x, y) = d(x, y)$ pentru orice $x, y \in A$.

2°. Dacă $(X, \|\ \ \|)$ este un spaţiu normat şi $Y \subset X$ este un subspaţiu vectorial, obţinem spaţiul normat $(Y, |||\ \ |||)$ unde $|||\, x\, ||| = \|\, x\, \|$ pentru orice $x \in Y$.

Test de autoevaluare 8

1. Fie X o mulţime nevidă şi d, δ două distanţe (metrici) pe X. Se presupune că există două numere strict pozitive a şi b cu proprietatea următoare: pentru orice x şi y în X avem

$$a\, d\,(x,y) \le \delta\,(x, y) \le b\, d\,(x,y)$$

(se spune că distanţele d şi δ sunt **echivalente.**)

Fie şi $(x_n)_n$ un şir de elemente din X, precum şi x un element din X.

Arătaţi că avem următoarea echivalenţă:

$$x_n \xrightarrow[n]{} x \text{ în spaţiul metric } (X, d)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_n \xrightarrow[n]{} x \text{ în spaţiul metric } (X, \delta)$$

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Arătaţi că fc_0 nu este spaţiu normat (definiţia lui fc_0 apare imediat după definiţia noţiunii de spaţiu normat).

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 224 a acestei unităţi de învăţare.

2.3. Limită şi continuitate (reluare)

Cea mai importantă idee din analiză este **ideea de limită**. Am putea-o rezuma astfel: ne putem apropia oricât de mult, fără ca să fim siguri că atingem.

Punct de acumulare

Vom considera un spaţiu metric (X,d), o mulţime nevidă $A \subset X$ şi un element $x \in X$.

Definiţie. Se spune că a este **punct de acumulare pentru *A*** dacă are următoarea proprietate:
pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x \in A$, $x \neq a$ cu proprietatea că $d(x,a) < \varepsilon$.

Mulţimea $A' = \{x \in X \mid x$ este punct de acumulare pentru $A\}$ se mai numeşte şi **mulţimea derivată a lui *A***.
Putem rescrie definiţia astfel:

$$A \in A' \Leftrightarrow \ldots\ \varepsilon > 0, \quad (B(a, \varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} \neq 0$$

Teoremă. (Caracterizarea cu şiruri a punctelor de acumulare).

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1°. $a \in A'$

2°. Există un şir $(x_n)_n \subset A$ cu proprietăţile: $x_n \neq a$ pentru orice n şi $x_n \xrightarrow[n]{} a$.

De exemplu, în $\mathbb{R}$ cu metrica obişnuită, dacă A este un interval nedegenerat, punctele interioare şi extremităţile sunt puncte de acumulare pentru A. În $\overline{\mathbb{R}}$ cu metrica obişnuită punctul ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru orice mulţime $A \subset \mathbb{R}$ care este nemărginită superior (respectiv inferior). În $\mathbb{C}$ cu metrica dată de $|\ |$ (adică $d(x,y) = |x - y|$) considerăm un punct a şi $r > 0$. Luând $A = B(a, r) \setminus \{a\}$, avem $a \in A'$.

Limita unei funcţii într-un punct

Fie (X,d) şi (Y,s) două spaţii metrice şi $\varnothing \neq A \subset X$. Fie $a \in A'$, $a \in X$ şi fie $f : A \to Y$. În fine, fie şi $l \in Y$.

Definiţie. Spunem că ***f* are limită în punctul *a*** şi **limita este egală cu *l*** (în scris $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ sau $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, $x \neq a$, cu $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ avem $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Uneori mai spunem că ***f* (*x*) tinde către *l* când x tinde către a**.

În contextul de mai sus se spune că ***f* are limită în *a*** dacă există $l \in Y$ aşa ca $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$. Elementul l se numeşte **limita lui *f* în *a***.

Teoremă. (*H*eine). Definiţia cu şiruri a limitei.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

2) Pentru orice şir $(x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ cu proprietatea $x_n \to a$ avem $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Continuitate

Fie (X,d) şi (Y, ρ) spaţii metrice şi $a \in A \subset X$. Fie şi $f : A \to Y$.

Definiţie. Se spune că f **este continuă în *a*** dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ astfel încât $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ avem $\rho(f(x), f(a)) \le \varepsilon$.

Dacă f este continuă în orice $x \in A$ se spune că f este o **funcţie continuă**.

Teoremă. (Definiţia cu şiruri a continuităţii).

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este continuă în a.

2) Pentru orice $(x_n)_n \subset A$ cu proprietatea $x_n \to a$ avem

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a).$$

După cum se vede, între noţiunile de limită şi continuitate este o mare legătură. Avem următoarea

Teoremă. (Legătura între limită şi continuitate)

Se presupune că $a \in A \cap A'$. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1°. f este continuă în a.

2°. Funcţia f are limită în a şi limita este egală cu $f(a)$.

Observaţie. În punctele $a \in A \setminus A'$ (numite *puncte izolate ale lui A*) funcţia f este automat continuă.

Exemplele care urmează vor clarifica noţiunile de limită şi continuitate.

Exemple

$\boxed{1°}$. Funcţia $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = 1$ pentru orice x din R are limită în orice punct $x_0 \in \mathrm{R}$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$. Această funcţie este continuă.

$\boxed{2°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ are limită în punctul $x_0=0$ şi anume $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Funcţia f **nu** este continuă în $x_0=0$ deoarece $f(0) = 0 \ne \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$\boxed{3°.}$ Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathrm{R}$, dată prin $f(x) = \dfrac{1}{x}$, are limită în $x_0 = 0$ şi avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

$\boxed{4°.}$ Funcţia $f : \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$, dată prin $f(x) = \dfrac{1}{x}$, **nu** are limită în $x_0=0$ deoarece limitele laterale diferă în 0:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty.$$

5°. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$ nu are limite laterale în x_0=0, deci nu are limită în x_0=0.

De exemplu, luând $x_0=\frac{1}{n\pi}$, avem $x_n\downarrow 0$ şi $f(x_n)\xrightarrow[n]{}0$. Luând apoi $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, avem $y_n\downarrow 0$ şi $f(y_n)\xrightarrow[n]{}1$. Deci nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$.

6°. Funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dată prin $f(z)=z^2$+i z, este continuă (eventual, verificare cu şiruri).

7°. Funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$ **nu** are limită în (0,0).

Într-adevăr, dacă luăm şirul $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n]{}(0,0)$ avem:

$$f(x_n,y_n)=\frac{1}{2}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{2}.$$

Dacă luăm şirul $(x'_n,y'_n)=\left(0,\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n]{}(0,0)$, avem:

$$f(x'_n,y'_n)=0\xrightarrow[n]{}(0,0).$$

8°. Funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ are limită în punctul ∞. Anume, vom arăta că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^{-2}$.

Într-adevăr, pentru orice x > 1 avem:

$$f(x)=\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\left(-\frac{x+1}{2}\right)}\right]^{\left(-\frac{2}{x+1}\right)x}.$$

Deoarece $\frac{2}{x+1}\neq 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=0$, vom avea $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\left(-\frac{2}{x+1}\right)}=e$.

Apoi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^{-2}$.

Test de autoevaluare 9

1. Arătaţi că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Arătaţi că funcţia $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

este continuă (adică este continuă în toate punctele).

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 225 a acestei unităţi de învăţare.

2.4. Derivabilitate

2.4.1. Derivarea funcţiilor vectoriale de variabilă reală

Fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, ca de obicei şi X un spaţiu vectorial peste K, normat cu norma $\| \ \|$.

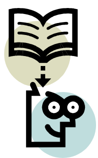
Vom considera o mulţime nevidă $A \subset K$, un punct $t_0 \in A \cap A'$ şi o funcţie $f : A \to X$.

Definiţie. Se spune că funcţia f este derivabilă în punctul t_0 dacă există în X limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \overset{D}{=} f'(t_0).$$

În aceste condiţii elementul $f'(t_0)$ se numeşte **derivata lui *f* în t_0** (uneori se mai notează $f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$.

Observaţii. 1°. În cazul special când $X = \mathbb{R}$ se poate da o definiţie mai generală, în următorul sens.



Spunem că ***f* are derivată în t_0** dacă există

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \overset{D}{=} f'(t_0)$$

în $\overline{\mathbb{R}}$ (i.e. $f'(t_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ poate fi şi ∞ sau $-\infty$). Atunci, faptul că f este derivabilă în t_0 revine la faptul că f are derivată $f'(t_0)$ în t_0 şi $f'(t_0)$ este finită.

2°. De obicei, în cazul $K = \mathbb{R}$, se consideră că A este un interval. Dacă t_0 este punct interior intervalului A avem derivata obişnuită. Dacă t_0 nu este extremitate stângă (respectiv dreaptă) pentru A rezultă că t_0 este şi punct de acumulare pentru $A \cap (-\infty, t_0]$ (respectiv $A \cap [t_0, \infty)$) şi putem defini **derivata la stânga** (respectiv **dreapta**) a lui f în t_0 (dacă există), anume:

$$f'_s(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \frac{1}{t - t_0} f(t) - f(t_0)$$

respectiv

$$f'_d(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{1}{t - t_0} f(t) - f(t_0)$$

3°. De cele mai multe ori, în cele ce urmează vom considera situaţia când t_0 **este interior mulţimii *A*** (i.e. există $\varepsilon > 0$ aşa ca $B(t_0, \varepsilon) \subset A$).

Definiţie. Vom considera o mulţime $A \subset K$ şi vom presupune că A este **deschisă** (i.e. pentru orice $t \in A$ există $\varepsilon_t > 0$ aşa ca $B(t, \varepsilon_t) \subset A$. În acest caz se vede imediat că $A \subset A'$.
Se spune că funcţia $f : A \to X$ este **derivabilă** dacă este derivabilă în orice punct $t \in A$.

În acest caz funcţia $\dot{f} : A \to X$ definită prin $\dot{f}(t) = f'(t)$ se numeşte **funcţia derivată a lui *f***.

Definiţie. Fie $A \subset K$ o mulţime deschisă şi $f : A \to K$ derivabilă. Fie şi $t_0 \in A$.

Se spune că f este **de două ori derivabilă în t_0** dacă $\dot{f}$ este derivabilă în t_0. În acest caz $(\dot{f})'(t_0) = f''(t_0)$ se numeşte **derivata secundă** (sau **derivata a doua**) a lui f în t_0.

Putem generaliza definiţia de mai sus, definind derivatele de ordin superior.

Anume, definiţia se dă prin recurenţă.

Definiţie. Fie $A \subset K$ deschisă, $t_0 \in A$, $f : A \to X$ şi $n \geq 2$ un număr natural.

Se spune că f **este derivabilă de n ori în t_0** dacă:

a) f este funcţie derivabilă de n –1 ori.

b) Funcţia derivată de ordin n –1 a lui f (notată $f^{(n-1)}$) este derivabilă în t_0.

În acest caz, derivata lui $f^{(n-1)}$ în t_0 (adică vectorul $(f^{(n-1)})'(t_0)$) se notează astfel:

$$\left(f^{(n-1)}\right)'(t_0) \overset{D}{=} f^{(n)}(t_0)$$

În această definiţie $f^{(p)}$ se defineşte şi ea inductiv, anume $f^{(p)}$ este funcţia derivată a lui $f^{(p-1)}$.

Vom da câteva **exemple** (în care A= interval real şi $K = \mathbb{R}$).

$\boxed{1°.}$ Funcţiile elementare sunt derivabile. De exemplu, orice funcţie raţională $f' = \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus B \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi funcţia sa derivată este $f' : \mathbb{R} \setminus B \to \mathbb{R}$, dată prin:

$$f' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Aici P şi Q sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali, iar

$B=\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x)=0\}$ (eventual B=\emptyset).

$\boxed{2°.}$ Funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, este derivabilă pe (–1,1) şi $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, dacă $x \in (-1,1)$. În punctele 1 şi –1 funcţia f nu este derivabilă, dar are derivată şi anume $f'(-1) = f'(1) = \infty$.

$\boxed{3°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

este derivabilă în toate punctele $x \neq 0$ şi acolo $f'(x)=0$.

În funcţie de considerente directe se obţine şi faptul că în 0 funcţia f este discontinuă, deci nu este derivabilă (v. mai departe), dar are derivată: $f'(0)=\infty$.

(Funcţia f se numeşte şi funcţia **signum**. Uneori notăm $f(x) = \text{sgn}(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

$\boxed{4°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$ este derivabilă în toate punctele $x \neq 0$. În punctul x=0, deşi f este continuă, totuşi f nu are derivată (nu are nici măcar derivate laterale).

$\boxed{5°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este derivabilă în toate punctele $x \neq 0$ şi avem $f'(x) = 1$ (dacă $x > 0$), $f'(x) = -1$ (dacă $x < 0$). În 0 funcţia f nu are derivată, dar are derivate laterale diferite, anume $f_s'(0) = -1$ şi $f_d'(0) = 1$.

$\boxed{6°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=|x|^3$ este derivabilă în toate punctele (avem $f'(0)=0$, exerciţiu!).

$\boxed{7°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ este discontinuă în 0 şi nu are derivată în 0.

$\boxed{8°.}$ Funcţiile elementare sunt indefinit derivabile adică sunt derivabile de n ori în orice punct, pentru orice n.

$\boxed{9°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x)=0$ dacă $x=0$ şi $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dacă $x \neq 0$ este indefinit derivabilă. Avem $f^{(n)}(0)=0$ pentru orice n (exerciţiu!)

Subliniem o proprietate importantă.

Teoremă. O funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

2.4.2. Formula lui Taylor

Definiţie. Fie $A \subset K$ o mulţime deschisă şi X un spaţiu normat peste K. Fie şi $n \in \mathbb{N}$.

1°. O funcţie $f : A \to X$ se numeşte **funcţie de clasă C^n** dacă este derivabilă de n ori în toate punctele lui A şi funcţia derivată de ordin n, (anume $f^{(n)} : A \to X$) este continuă.

2°. O funcţie $f : A \to X$ se numeşte funcţie de clasă C^∞ (**funcţie indefinit diferenţiabilă**) dacă este de clasă C^n pentru orice n.

Subliniem, de asemenea, că în cazul când $A \subset K = \mathbb{R}$ este interval, funcţia are derivată în $t_0 \in A$, dacă şi numai dacă există şi sunt egale derivatele laterale: $f'_s(t_0) = f'_d(t_0)$ (deci $= f'(t_0)$).

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în a, $n \geq 1$.

Definiţie. Polinomul lui Taylor de ordin *n* ataşat funcţiei *f* în punctul *a* este polinomul:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Se vede că gradul lui T_n este cel mult n.

Pentru orice $x \in$ I notăm:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Am definit funcţia $R_n : I \to \mathbb{R}$ numită **restul de ordin *n* al formulei lui Taylor** (mai corect, dar mai lung, R_n se numeşte restul formulei lui Taylor de ordin n ataşate funcţiei f în punctul a).

Avem deci egalitatea, valabilă pentru orice x $\in I$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

care se numeşte **formula lui Taylor de ordin *n* ataşată lui *f* în punctul *a***. Dacă $a = 0$, formula mai poartă numele de **formula lui Mac Laurin**.

Funcţia polinomială T_n realizează o bună aproximare a lui *f* în vecinătatea lui *a*, după cum ne arată următoarea

Teoremă. Avem:

$$\lim_{x \to a} \frac{R^n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Cu alte cuvinte, $R_n(x)$ tinde la zero mai repede decât $(x-a)^n$ când *x* tinde la *a*. Putem deci scrie **formula de aproximare**

$$f(x) \approx T_n(x) \text{ când } x \approx a.$$

În condiţii mai restrictive avem formule mai precise pentru restul R_n:

Teoremă (Formula lui Lagrange a restului formulei lui Taylor).

Se presupune că *f* este derivabilă de *n*+1 pe întreg intervalul *I*. Atunci, pentru orice x$\in$ I există un punct ζ cuprins între a şi x astfel încât

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Vedem că această formulă a restului se reţine uşor deoarece ea „continuă” formula polinomului Taylor. Formula lui Taylor devine în acest caz:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

De remarcat că ζ se schimbă odată cu *x* şi cu *n*. Ca o consecinţă a formulei lui Lagrange a restului, vom observa că atunci când *f* este funcţie polinomială de grad cel mult *n*, formula lui Taylor de ordin *n* este „exactă”, cu alte cuvinte restul R_n este funcţia identic nulă. Avem, deci, în acest caz:

$$f = T_n$$

deci avem posibilitatea de a dezvolta polinomul *f* după puterile lui $(x - a)$.

Exemplu. Luăm $f(x) = x^3 + 1$ şi $a = -1$ (aici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bineînţeles, deci $I=\mathbb{R}$):

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f(-1) = 0$$
$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3$$
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(-1) = 6.$$

Avem deci identitatea:

$$x^3+1=3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3 .$$

Pe lângă alte utilizări, formula lui Taylor poate servi şi la calculul unor limite.

Exemplu. Să arătăm că pentru orice număr $\alpha > 0$ avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^a}=\infty$$

(exponenţiala tinde mai repede către ∞ decât orice putere).

Vom lua $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x)=e^x$.

Fie $n\in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, aşa ca $n - 1 \leq \alpha < n$.

Deoarece f este derivabilă de n+2 ori putem scrie formula lui Mac Laurin cu restul Lagrange de ordinul n+1:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{e^{\zeta}}{(n+2)!}x^{n+2}$$

unde ζ este între 0 şi x.

Pentru x>1 vom avea:

$$e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$x^{\alpha}<x^n,$$

deci $\frac{e^x}{x^{\alpha}}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n}=\frac{1}{(n+1)!}x\to\infty$, ceea ce încheie demonstraţia.

Consecinţe. 1°. Pentru orice b >1 şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b^x}{x^{\alpha}}=\infty .$$

(Într-adevăr, cazul $\alpha \leq 0$ este banal. În cazul $\alpha > 0$, reducem la precedenta, luând în considerare schimbarea de variabilă

$$b^x=e^y \Leftrightarrow y=x\ln b \text{ sau } x=\frac{y}{\ln b}=\frac{b^x}{x^{\alpha}}=\frac{e^y}{y^{\alpha}}\cdot(\ln b)^{\alpha} \quad \text{etc.)}$$

2°. Pentru orice $b > 0$, $b \neq 1$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$, α >0, avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_b x}{x^{\alpha}}=0$$

(logaritmul tinde mai lent către infinit decât orice putere).

Cazul când $b\neq$ e se reduce la cazul b = e, deoarece $\log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}$. Pentru b = e scriem $\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$ făcând schimbarea de variabilă $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y \Rightarrow$ $\Rightarrow x^{\alpha} = e^{\alpha y}$ deci $\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\frac{y}{e^{\alpha y}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha y}{e^{\alpha y}}$. Dar $\alpha y\to\infty$ când $x\to\infty$ şi folosim 1°.

2.4.3 Appendix. Interpretarea geometrică şi interpretarea cinematică a derivatei funcţiilor vectoriale

Dacă $I\subset \mathbb{R}$ este un interval şi $n \geq 2$ este un număr natural, vom numi **drum** o funcţie continuă $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (de obicei $I = [a, b]$).

În cele ce urmează vom considera că γ este chiar o funcţie derivabilă.

Interpretarea geometrică a derivatei

Drumul γ se numeşte neted dacă pentru orice $t \in I$ avem $\gamma'(t)\neq 0$.

În legătură cu cele de mai sus facem o observaţie esenţială. Funcţia γ se identifică cu **componentele sale scalare**. Anume, pentru fiecare $t \in I$, avem $\gamma(t)=(\gamma_1(t), \gamma_2(t),\dots ,\gamma_n(t))$. Punem în acest mod în evidenţă funcţiile reale $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots ,n$ numite **componentele reale ale funcţiei γ**. Atunci derivabilitatea lui γ revine la derivabilitatea tuturor funcţiilor γ_i şi avem $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots , \gamma_n'(t))$.

Considerând un drum neted γ şi un punct $t \in I$, **vectorul $\gamma'(t)$ trans-portat cu punctul de aplicaţie în $\gamma(t)$ este aliniat cu tangenta la imaginea lui** γ (care este o curbă în $\mathbb{R}^n$) **în punctul $\gamma(t)$**.

Interpretarea cinematică a derivatei

Considerăm acum că $n = 2$ sau $n = 3$. Avem un **punct mobil** în plan (când $n = 2$) sau în spaţiu (când $n = 3$). Intervalul I este un **interval de timp.** Când parametrul t (timpul) parcurge intervalul de timp I, punctul mobil se mişcă pe o traiectorie a cărei imagine este imaginea lui γ. La fiecare moment $t \in I$, **vectorul $\gamma'(t)$ transportat cu punctul de aplicaţie în $\gamma(t)$ este viteza instantanee la momentul t**.

De asemenea, dacă γ este de două ori derivabilă în t, vectorul $\gamma''(t)$ reprezintă acceleraţia instantanee la momentul t.

Test de autoevaluare 10

1. Să se calculeze *f’* pentru funcţia $f:[0,2\pi]\to \mathrm{R}^2$ definită prin

$$f(t)=((\cos t)^n,(\sin t)^n)$$

unde $n\in \mathrm{N}^*$

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se scrie formula lui Taylor de ordin *n* pentru funcţia $f:\mathrm{R}\setminus\{-1\}\to \mathrm{R}$ definită prin: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 225 a acestei unităţi de învăţare.

2.5. Derivate parţiale şi analiticitate

2.5.1. Derivate parţiale

a) Definiţii

Din nou $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm $A \subset K^n$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. În plus, presupunem că ***a* este interior lui *A***, adică există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$D_1 \times \ldots \times D_{n-1} \times D_n = \prod_{i=1}^{n} D_i \in A$$

unde $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid |x_i - a_i| < \varepsilon\} = (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$, dacă $K = \mathbb{R}$ şi

$D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_i - a_i| < \varepsilon\}$ dacă $K = \mathbb{C}$.

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ putem defini atunci mulţimea

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}$$

şi avem evident $D_i \subset A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(Evident, am „forţat” puţin notaţiile. De exemplu, dacă $i = 1$, avem:

$$A_1 = \{x \in K \mid (x, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in A\}$$

iar dacă $i = n$, avem:

$$A_n = \{x \in K \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) \in A\}$$

Fie acum $f : A \to X$, unde X este un spaţiu normat peste K.

Putem defini pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ funcţiile parţiale $f_{(i)} : A_i \to X$, date prin:

$$f_{(i)}(x) = f \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Definiţie. Se spune că ***f* este parţial derivabilă în raport cu x_i în punctul *a*** dacă $f_{(i)}$ este derivabilă în a_i.

În acest caz notăm $f'_{(i)} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ şi numim pe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ **derivata parţială a lui *f*** în raport cu x_i în a.

Observaţii. 1°. După cum se vede, putem deriva în a_i care este punct de acumulare pentru $A_i \supset D_i$.

2°. Uneori se spune că f **are derivată parţială în raport cu x_i în *a***. Această exprimare lasă loc şi pentru cazul când $f_{(i)}(a_i) = \pm\infty$ în cazul $K = \mathbb{R}$, situaţie pe care nu o vom lua în discuţie.

3°. Se mai folosesc şi notaţiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a) = Df_{x_i}(a) = df_{x_i}(a).$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă, putem considera cazul special când A **este deschisă** şi f are derivată parţială în raport cu x_i în toate punctele lui A. În acest caz putem defini **funcţia derivată parţială în raport cu** x_i, care este funcţia $\dot{f}_{(x_i)} : A \to X$,

$$\dot{f}_{(x_i)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Vom nota (ambiguu, dar sugestiv) funcţia derivată parţială $\dot{f}_{(x_i)}$ prin $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Să presupunem că există funcţia derivată parţială $\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \to X$. Fie $a \in A$. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ are derivată parţială în raport cu x_j în a vom nota această derivată parţială prin $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

*A*dică:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

În cazul special când $i = j$ vom nota derivata parţială de mai sus prin $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$.

Procedeul poate fi continuat. Dacă există funcţia derivată parţială $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: A \to K$ putem încerca dacă există derivata ei

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a)$$

În cazul când $k = j$ vom scrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}(a)$. În cazul când $k = i$ suntem obligaţi să scriem $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_i}(a)$, deoarece scrierea $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$ are semnificaţia (diferită) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(a)$.

Am arătat deci cum putem obţine **derivate parţiale de ordin superior** (de ordin doi, cum sunt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$; de ordin trei, cum sunt $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a)$ etc.)

Se vede că ordinea de derivare este esenţială, ceea ce poate fi demonstrat şi pe exemple.

Totuşi, în anumite cazuri speciale, întâlnite uzual în calcul, ordinea de derivare este neesenţială (putem deriva în orice ordine şi obţinem acelaşi rezultat).

Teoremă. (Criteriul de comutativitate al lui Schwarz).

Se presupune că $A \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$ este astfel încât există **toate** funcţiile derivată parţială mixtă de ordinul al doilea: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \to \mathbb{R}$, $i \neq j$. Fie şi $a \in A$ astfel încât toate funcţiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$ sunt continue în a.

Atunci toate derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $i \neq j$, sunt egale (ordinea de derivare nu contează), mai precis:

$$\text{pentru orice } i \neq j \text{ avem } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Observaţii. 1°. Teorema poate fi dată în condiţii mult mai largi.

2°. Teorema este valabilă pentru derivate parţiale de ordin superior lui 2.

3°. De remarcat că teorema funcţionează pentru $K = \mathbb{R}$ şi $X = \mathbb{R}$.

Înainte de a trece mai departe ne vom referi în mod explicit la calculul derivatelor parţiale.

În cazul general, fie a interior lui $A \subset K^n$ şi $f : A \to X$. A calcula derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ înseamnă a **deriva funcţia *f* considerată ca funcţie de variabila x_i, celelalte variabile fiind fixate**. Mai precis, din definiţia derivatei parţiale, se vede că avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}\left(f_{(i)}(x_i) - f_{(i)}(a_i)\right)$$

adică:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}\left(f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\right)$$

Deci, derivăm funcţia de o variabilă $f_{(i)}$ în punctul a_0.

Adică, derivăm funcţia:

$$t \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

în punctul $t = a_i$.

În cazul $K = \mathbb{R}$ şi $n = 2$, în loc să scriem $f(x_1, x_2)$ vom scrie $f(x, y)$, iar în cazul $K = \mathbb{R}$ şi $n = 3$, în loc să scriem $f(x_1, x_2, x_3)$ vom scrie $f(x, y, z)$ Punctul $a = (a_1, a_2)$ va fi, de regulă, (a, b) (în cazul $K = \mathbb{R}$ şi $n=2$) iar punctul $a = (a_1, a_2, a_3)$ va fi, de regulă, (a, b, c) (în cazul $K = \mathbb{R}$ şi $n = 3$).

Cu aceste notaţii:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \to a} \frac{1}{t - a}\left(f(t, b) - f(a, b)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t \to b} \frac{1}{t-b}\left(f(a,t) - f(a,b)\right)$$

(în cazul $K = \mathbb{R}$, $n = 2$) şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{t \to a} \frac{1}{t-a}\left(f(t,b,c) - f(a,b,c)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{t \to b} \frac{1}{t-b}\left(f(a,t,c) - f(a,b,c)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{t \to c} \frac{1}{t-c}\left(f(a,b,t) - f(a,b,c)\right)$$

(în cazul $K=\mathbb{R}$, n=3).

Exemple. $\boxed{1°.}$ Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 12$$

Într-adevăr, avem funcţia $x \to x^2y$ (y fixat) care, derivată într-un punct oarecare (a, b) dă derivata $2ab$. Luăm $a = 2$, $b = 3$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 4$$

Într-adevăr, avem funcţia $y \to x^2y$ (x fixat) care, derivată într-un punct oarecare (a, b) dă derivata a^2. Luăm $a = 2$.

$\boxed{2°.}$ Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin x$. Atunci, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \cos a$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Referitor la al doilea rezultat: avem funcţia $y \to \sin x$ (x fixat) care este **constantă**, deci derivata ei în orice punct este 0.

$\boxed{3°.}$ Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$. Vom arăta că $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Aici calculăm derivatele conform definiţiei:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{f(x,0)}{x} = \frac{0}{x} \to 0,$$

deci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0.$$

Similar:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

În primele două exemple schema de calcul a fost următoare: am calculat $\frac{\partial f}{\partial x}$ într-un punct curent (*x*,*y*), adică am calculat funcţia derivată parţială $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi apoi i-am calculat valoarea în punctul particular cerut.

Formal: a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=a, y=b}$ etc. A se vedea abuzul de notaţie $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ care confundă (*x, y*) cu variabile de derivare *x*.

în al treilea caz această metodă nu este avantajoasă, expresia funcţiei $\frac{\partial f}{\partial x}$ nefiind simplă.

$\boxed{4°.}$ Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ nu are derivată parţială în punctele (0,*y*) cu $y \neq 0$, în raport cu x. Deci

nu există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ dacă $b \neq 0$.

Într-adevăr:

$$\frac{1}{x-0}(f(x,b) - f(0,b)) = \frac{xb\sin\frac{1}{x}}{x} = b\sin\frac{1}{x}$$

şi nu există $\lim_{x\to 0} b\sin\frac{1}{x}$.

Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ deoarece $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} \equiv 0$.

Similar $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = a\sin\frac{1}{a}$, dacă $a \neq 0$.

$\boxed{5°.}$ Fie $f : \mathbb{R}^3 \setminus A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{z^2}{x+y+z}$, unde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Se vede că $\mathbb{R}^3 \setminus A$ este deschisă (exerciţiu!).

Vom calcula $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)$ într-un punct curent (*a, b, c*)$\in \mathbb{R}^3 \setminus A$, după schema dinainte:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z(x+y+z) - 1\cdot z^2}{(x+y+z)^2} = \frac{2xz + 2yz + z^2}{(x+y+z)^2}.$$

$\boxed{6°.}$ Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y}$, unde:

$$A=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\}.\}$$

Se vede că $\mathbb{R}^2 \setminus A$ este deschisă (exerciţiu!)

Vom calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ unde $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ este arbitrar.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{b(a^2+b)-2a(ab)}{(a^2+b)^2} = \frac{b^2-a^2b}{(a^2+b)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2-x^2y}{(x^2+y)^2}\right)\Bigg|_{x=a,y=b} =$$

$$= \frac{(2y-x^2)(x^2+y)^2-2(x^2+y)(y^2-x^2y)}{(x^2+y)^4}\Bigg|_{x=a,y=b} =$$

$$= \frac{(2y-x^2)(x^2+y)-2(y^2-x^2y)}{(x^2+y)^4}\Bigg|_{x=a,y=b} = \frac{3a^2b-a^4}{(a^2+b)^3}$$

Similar:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{(x^2+y)^2}\right)\Bigg|_{x=a,y=b} = \frac{3a^2b-a^4}{(a^2+b)^3}.$$

Se vede că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$, deoarece condiţiile din criteriul lui Schwarz se îndeplinesc.

b) Exprimarea diferenţelor pentru funcţii de mai multe variabile: extinderea formulei creşterilor finite

Reamintim câteva noţiuni preliminare. Considerăm un spaţiu vectorial X peste $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Fie $x, y \in X$.

Segmentul de extremităţi x şi *y* este mulţimea:

$$[x, y] = (1-t)\,x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset X;$$

putem scrie şi egalitatea:

$$[x,y]=\{ux+vy \mid u\geq 0, v\geq 0, u+v=1\}.$$

O mulţime $A \subset X$ se numeşte **convexă** dacă pentru orice $x, y \in A$ avem $[x, y] \subset A$. De exemplu, discurile sau dreptunghiurile din plan sunt mulţimi convexe.

Teoremă (Formula creşterilor finite pentru funcţii de mai multe variabile). Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ şi $A \subset \mathbb{R}^n$, A deschisă. Se consideră o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există toate funcţiile derivată parţială $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$, i =1,2,... ,n şi sunt continue. Atunci, pentru orice două puncte $a = (a_1,a_2,... ,a_n) \in A$ şi $b = (b_1, b_2, ... , b_n) \in A$ astfel încât $[a, b] \subset A$ există un punct $t \in [a, b]$ astfel încât:

$$f(b)-f(a) = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\cdot(b_i - x_i).$$

Observaţie. 1°. Dacă A este convexă, condiţia $[a, b] \subset A$ se îndeplineşte automat.

2°. Formula de mai sus serveşte la exprimarea diferenţei $f(b) - f(a)$.

Din motive de continuitate a funcţiilor derivată parţială, dacă b este foarte apropiat de a, putem aproxima diferenţa astfel:

$$f(b) - f(a) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i).$$

3.5.2. Extremele funcţiilor de mai multe variabile

a) Vom considera un număr natural $n \geq 1$ şi vom nota din nou cu K pe $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Pentru orice $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ şi orice $r > 0$, vom considera o bilă $B(a, r)$ unde distanţa pe K^n este obţinută cu ajutorul normei $\| \, \|_\infty$.

Fie $A \subset K^n$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$.

Definiţie. Se spune că a este **punct de maxim** (respectiv **minim**) **local** dacă există o bilă $B(a, r)$ cu proprietatea că $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$) pentru orice $x \in B(a, r) \cap A$.
În ambele cazuri vom spune că a este **punct de extrem local pentru *f*** iar valoarea $f(a)$ se numeşte **extrem local pentru *f*** (**maxim**, repectiv **minim local**).

În cele ce urmează vom considera $K = \mathbb{R}$.

Teoremă (Analogul teoremei lui Fermat pentru funcţii de mai multe variabile). Se consideră o mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ şi un punct interior $a \in A$. Fie şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie care are toate derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se presupune că a este punct de extrem local pentru f. Atunci a este **punct critic** (**punct staţionar**) pentru f, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Constatăm deci că punctele de extrem local trebuiesc căutate printre punctele critice (atenţie, pot exista puncte critice care nu sunt puncte de extrem local!). Condiţia precedentă este deci necesară. Vom da condiţii suficiente de extrem local, în cazul $n=2$.

Teoremă (Condiţii suficiente de extremum). Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $(a, b) \in A$. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există şi sunt continue funcţiile derivată parţială de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^{2f}}{\partial y \partial x} : A \to \mathbb{R}$. Mai presupunem că (a, b) este punct critic pentru f.

Notăm $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right)^2$.

1) Dacă $\Delta > 0$, punctul (a, b) este punct de extrem local pentru f, anume:

♦ de minim, dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$;

♦ de maxim, dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$.

2) Dacă $\Delta < 0$, punctul (a, b) nu este punct de extrem local pentru f.

Observaţie. **Î**n cazul Δ =0 nu putem afirma nimic despre punctul (a, b) (critic pentru f).

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + x y + y^2 - x - y$.

Vom calcula extremele locale pentru f, pe baza precedentă.

Întâi căutăm punctele critice. Rezolvăm deci sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

cu soluţia unică $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Acum testăm condiţiile pentru ca $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ să fie punct de extrem local.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1,$$

deci:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)^2 = 4 - 1 = 3 > 0 .$$

Cum $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$, punctul $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ este punct de minim local pentru f.

Minimul local este $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

Observaţie. De fapt, $-\frac{1}{3}$ este un minim global, adică avem:

$$x^2 + xy + y^2 - x - y \geq -\frac{1}{3}$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Vom expune, în continuare, câteva chestiuni legate de **extreme condiţionate şi teoria multiplicatorilor lui Lagrange.**

A. Preliminarii algebrice.

1) Numim **formă pătratică de *k* variabile** o funcţie $P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de forma (scriem $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$):

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} x_i y_j \qquad (1)$$

De exemplu, dacă avem k=3 şi variabila din $\mathbb{R}^3$ este (u, v, w) vom avea:

$$P(u,v,w) = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + a_{13}uw + 2a_{23}vw .$$

De exemplu, dacă $P(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2 + uv + uw + vw$, atunci:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \text{ şi } a_{12} = a_{13} = a_{23} = \frac{1}{2}.$$

O formă pătratică (1) se numeşte **pozitiv definită** dacă $P(x)>0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$, $x \neq 0$ şi **negativ definită** dacă $P(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$, $x \neq 0$ (adică $-P$ este pozitiv definită).

Conform teoremei lui Sylvester, putem decide dacă forma (1) este pozitiv definită astfel:

a) Formăm matricea asociată formei (1), adică matricea:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{k3} \end{pmatrix}$$

cu convenţia că $a_{ij} = a_{ji}$.

b) Calculăm determinanţii din stânga sus, adică determinanţii:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

. . . .

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

c) **Teoremă (Sylvester).** Forma pătratică (1) este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_k > 0$.

2) Putem „reduce” numărul variabilelor unei forme pătratice astfel:

Fie numerele naturale $1 \leq n < p$. Notăm $m = p - n$.

Considerăm forma pătratică:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{k} a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j \tag{2}$$

Admitem că există numerele reale $(u_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ n+1\le j\le p}}$ astfel încât:

$$x_1=\sum_{j=n+1}^{p} u_{1j}x_j\ ,\ \ x_2=\sum_{j=n+1}^{p} u_{2j}x_j\ ,\ \dots\ ,\ x_n=\sum_{j=n+1}^{p} u_{nj}x_j\ . \tag{$*$}$$

Făcând substituţia de mai sus în (2), forma P devine formă pătratică în m variabile (scriem din nou x = (x_1, x_2, ... , x_p), y = (y_1, y_2, ... , y_m)):

$$P(x)=Q(y)=\sum_{i=1}^{m} A_{ii}y_i^2+2\sum_{i<j} A_{ij}y_iy_j\ ,$$

unde am notat:

$$y_1 = x_{n+1},\ \ y_2 = x_{n+2},\ \ \dots,\ \ y_m=x_{n+m} = x_p.$$

Numim pe Q forma pătratică obţinută din (2) prin substituţia ($*$).

B. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange. Se consideră numerele naturale $1 \le n < p$ şi fie $m = p - n$. Fie $G \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă.

Fie $H = (H_1, H_2, \dots , H_n) : G \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^u, unde $1 \le u \le \infty$ (adică funcţiile H_1, H_2, ... , H_n au derivate parţiale de orice ordin $\le u$ continue).

Se presupune că mulţimea $A=\{x\in G \mid H(x)=0\}$ este nevidă.

În plus, considerăm că în orice punct $a \in A$, rangul matricei jacobiene:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_p}(a) \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial H_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial H_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial H_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix},$$

este egal cu n (adică maxim).

În condiţiile de mai sus, enunţăm

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange. Fie $f : G \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1.

Se presupune că $a \in A$ este **punct de extrem local al lui *f*, condiţionat de relaţia *H*(x)=0** (adică este punct local pentru restricţia $f\big|_A$).

Atunci, a este punct critic pentru f, condiţionat de relaţia $H(x)=0$, adică $H(a)=0$ şi există n numere reale λ_1, λ_2, ... , λ_n (numite **multiplicatorii lui Lagrange**) cu proprietatea:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial H_i}{\partial x_1}(a)=0\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial H_i}{\partial x_2}(a)=0\ ,$$

. . . .

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial H_i}{\partial x_p}(a)=0,$$

adică d$\Phi(a)$ = 0, unde:

$$\Phi = f+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i H_i .$$

C. Am văzut că orice punct a de extrem condiţionat este punct critic condiţionat (adică satisface condiţiile teoremei multiplicatorilor).

Cum recunoaştem printre punctele critice condiţionate pe cele care sunt efectiv puncte de extrem condiţionat?

Păstrăm notaţiile de la **B**.

Teoremă. (Condiţii suficiente pentru ca un punct critic condiţionat să fie punct de extrem condiţionat). Fie f :G → R o funcţie de clasă C^2. Fie $a \in G$ punct critic pentru f, condiţionat de relaţia H (x) = 0. Fie λ_1, λ_2, ... , λ_n multiplicatorii lui Lagrange daţi de a şi:

$$\Phi = f+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i H_i$$

„Diferenţiem pe legături”, adică scriem relaţiile:

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j=0, \qquad (**)$$

pentru i =1,2,... ,n.

Din condiţia de rang rezultă (eventual renumerotând) că sistemul $(**)$ este cramerian în necunoscutele dx_1, dx_2, ..., dx_p, adică putem rezolva în raport cu dx_1, dx_2, ..., dx_n cu soluţiile unice:

$$\mathrm{d}x_i=\sum_{j=n+1}^{p}u_{ij}\mathrm{d}x_j , \qquad (***)$$

pentru i =1,2,... ,n.

Considerăm forma pătratică dată de diferenţiala a doua a lui Φ, adică forma pătratică în variabilele formale dx_1, dx_2, ... , dx_p:

$$P(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\ldots,\mathrm{d}x_p)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}(a)(\mathrm{d}x_i)^2+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j .$$

Forma pătratică obţinută din P prin substituţia $(***)$ este:

$$P(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\ldots,\mathrm{d}x_n,\mathrm{d}x_{n+1},\ldots,\mathrm{d}x_{n+m})=Q(\mathrm{d}x_{n+1},\mathrm{d}x_{n+2},\ldots,\mathrm{d}x_p)=$$

$$=\sum_{j=n+1}^{p}Ai_j(\mathrm{d}x_i)^2+2\sum_{n+1\le i<j\le p}Ai_j\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.$$

Se presupune că Q este definită.

Atunci:

-- dacă Q este pozitiv definită, rezultă că a este punct de minim local condiţionat de relaţia H(x)=0;

-- dacă Q este negativ definită, rezultă că a este punct de maxim local condiţionat de relaţia H (x) = 0.

Exemplu. Vom lucra pentru p=3, n=1.

Fie $f : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x, y, z) = yz + zx + xy$.

Se cer punctele de extrem local ale lui f condiţionate de relaţia:

$$xyz=1$$

(adică aici avem $H = H_1 : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$, dată prin $H(x,y,z)=xyz - 1$).

Soluţie. Aici $A = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid xyz=1\}$.

Avem un singur multiplicator λ (pe care îl vom găsi!) şi definim funcţia $\Phi:(0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda H(x, y, z) = yz + zx + xy + \lambda xyz - \lambda.$$

Din teorema multiplicatorilor, rezultă că va trebui să rezolvăm sistemul de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute x, y, z, λ :

$$\begin{cases} H(x,y,z)=0 & \text{adică} \quad xyz-1=0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,z,y) & \text{adică} \quad y+z+\lambda yz=0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,z,y) & \text{adică} \quad z+x+\lambda zx=0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(x,z,y) & \text{adică} \quad x+y+\lambda xy=0 \end{cases}.$$

Înmulţind ecuaţiile 2, 3 şi 4 cu x, y, z respectiv obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} xyz-1=0 \\ xy+zx+\lambda=0 \\ yz+xy+\lambda=0 \\ zx+yz+\lambda=0 \end{cases}$$

şi prin scăderi obţinem sistemul echivalent

$$\begin{cases} xyz=0 \\ x(y-z)=0 \\ y(z-x)=0 \\ z(x-y)=0 \end{cases}.$$

Soluţia unică este dată de $x = y = z = 1$. Obţinem atunci şi $\lambda = -2$.

Aşadar:

$a = (1,1,1)$ = punctul critic condiţionat

$\lambda = -2$ = multiplicatorul lui Lagrange.

Funcţia $\Phi : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ este dată de $\Phi(x,y,z) = yz + xz + xy - 2xyz + 2$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z) = y+z-2yz\,;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z) = z+x-2zx\,;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z) = x + y - 2xy\ ,$$

deci:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(x,y,z)y = 0\ ;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 1 - 2x\text{ , deci } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}(1,1,1) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 1 - 2y\text{ , deci } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}(1,1,1) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1 - 2z\text{ , deci } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(1,1,1) = -1.$$

Aşadar, obţinem forma pătratică:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(1,1,1)(\mathrm{d}x)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(1,1,1)(\mathrm{d}y)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(1,1,1)(\mathrm{d}z)^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}(1,1,1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}(1,1,1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \qquad (1)$$

$$= -2(1,1,1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

„Diferenţiem pe legătura”:

$$xyz - 1 = 0$$

şi obţinem:

$$yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = 0,$$

ceea ce, în punctul (1,1,1) devine:

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

Deducem $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$.

Cu această substituţie, obţinem din forma pătratică (1) forma redusă:

$$-2(\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}z(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) - \mathrm{d}y(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)) = 2(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}z)^2 + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Matricea acestei forme pătratice este $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3$, deci forma este pozitiv definită.

În concluzie, punctul (1,1,1) este punct de minim local pentru *f*, condiţionat de relaţia $xyz = 1$. Valoarea minimă este $f(1,1,1)=3$.

De fapt, putem arăta că (1,1,1) este chiar punct de **minim global condiţionat**:

$$xyz = 1 \Rightarrow yz + zx + xy = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \cdot \frac{xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{3} \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 3\ .$$

Aşadar, avem întotdeauna $yz + zx + xy \geq 3$, dacă $xyz = 1$ şi $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2.5.3. Derivabilitatea în complex. Relaţiile Cauch*y*-Riemann

Fie $A\subset \mathbb{C}$ o mulţime nevidă şi $f : A\rightarrow \mathbb{C}$. Facem următoarele identificări:

a) $A \equiv 'A' = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x+\mathrm{i}\, y \in A\}$

Deci $A \subset \mathbb{C}$ şi $'A' \subset \mathbb{R}^2$. Facem deosebire între $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{C}$.

b) Pentru orice $z = x + \mathrm{i}\, y \in A$, avem $f(z) \in \mathbb{C}$, deci

$$f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(f(z)).$$

În acest fel putem defini funcţiile:

$$\mathrm{Re}\,(f) : A \rightarrow \mathbb{R},\quad \mathrm{Re}(f)(z) \overset{D}{=} \mathrm{Re}(f(z))$$

(partea reală a lui f)

$$\mathrm{Im}\,(f) : A \rightarrow \mathbb{R},\quad \mathrm{Im}(f)(z) \overset{D}{=} \mathrm{Im}(f(z))$$

(partea imaginară a lui f).

Acum identificăm:

$\mathrm{Re}\,(f) \equiv P : 'A' \rightarrow \mathbb{R}$, unde $P(x,y) = \mathrm{Re}(f)\,(z = x + \mathrm{i}y)$,

$\mathrm{Im}\,(f) \equiv Q : 'A' \rightarrow \mathbb{R}$, unde $Q(x,y) = \mathrm{Im}\,(f)\,(z= x + \mathrm{i}y)$.

În definitiv avem identificarea $f \equiv (P, Q)$ în sensul că $f \equiv F$ unde

$$F\ : 'A' \rightarrow \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Acum vom considera că mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ este deschisă.

Fie $z_0 = a + \mathrm{i}\, b \in A$, deci z_0 este punct interior lui A.

Considerăm o funcţie $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ şi identificăm ca mai sus $f \equiv (P, Q)$.

Teoremă. Se presupune că există funcţiile derivată parţială

$$\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial y} : 'A' \rightarrow \mathbb{R}$$

şi ele sunt continue în punctul (a, b).

Atunci, avem echivalenţa: (f este derivabilă în $z_0=a+\mathrm{i}\, b$)

$$\Leftrightarrow$$

(Avem **relaţiile Cauch*y*-Riemann** $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(a,b) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a,b) \end{array}\right)$.

Observaţii. 1°. Se poate da o condiţie necesară şi suficientă de derivabilitate în complex, în care intervin relaţiile Cauch*y*-Riemann.

2°. Faptul că f este derivabilă în z_0 (sau, cum se mai spune, f este $\mathbb{C}$-derivabilă în z_0) revine la definiţia clasică: există limita:

$$\lim_{x\rightarrow x_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Exemple. $\boxed{1°.}$ Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Vom arăta că f este derivabilă în toate punctele din plan.

$$f(z = x + i\, y) = (x + i\, y)^2 = (x^2 - y^2) + i\, 2\, x\, y.$$

Aşadar, aici avem $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x,y) = x^2 - y^2$, $Q(x,y) = 2xy$

Atunci, în orice punct $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avem:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a,b) = 2a$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a,b) = -2b$$

(evident, funcţiile derivată parţială sunt continue).

$\boxed{2°.}$ Fie s, t numere reale. Considerăm funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dată prin

$$f(z = x + i\, y) = (x^2 + sy^2) + i\, txy.$$

Ne punem problema să studiem derivabilitatea lui f.

Aici avem $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date astfel:

$$P(x,y) = x^2 + sy^2 \ , \ Q(x,y) = txy \ ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a,b) = 2a,\ \frac{\partial P}{\partial y}(a,b) = 2sb;\ \frac{\partial Q}{\partial x}(a,b) = tb,\ \frac{\partial Q}{\partial y}(a,b) = ta\ .$$

Evident, funcţiile derivată parţială sunt continue. Relaţiile Cauchy-Riemann revin la:

$$\begin{cases} 2a = ta \\ tb = -2sb \end{cases}.$$

Avem mai multe cazuri:

a) **Cazul** $a \neq 0$, $b \neq 0$. Sistemul devine:

$$t = 2,\ t = -2\, s,$$

deci soluţia este $s = -1$, $t = 2$.

b) **Cazul** $a = 0$, $b \neq 0$. Sistemul devine

$$0 = 0,\ \ t = -2s,$$

deci soluţia este formată din mulţimea tuturor perechilor (s, t) pentru care $t = -2s$.

c) **Cazul** $a \neq 0$, $b = 0$. Sistemul devine

$$t = 2,\ \ 0 = 0,$$

deci soluţia este formată din mulţimea tuturor perechilor $(s, 2)$, unde $s \in \mathbb{R}$ este arbitrar.

d) **Cazul** $a = 0$, $b = 0$. Sistemul devine

$$0 = 0,\ 0 = 0,$$

deci soluţia este formată din mulţimea tuturor perechilor $(1, t)$ de numere reale.

Concluzie. (vom scrie $z=x+iy\in\mathbb{C}$):

a) f este derivabilă în orice $z_0=a+ib\in\mathbb{C}$ cu $a\neq 0$, $b\neq 0$ dacă şi numai dacă $s=-1$, $t=2$. În acest caz $f(z))=x^2-y^2+i2xy=z^2$.

b) f este derivabilă în orice $z_0=ib$ cu $b\neq 0$ dacă şi numai dacă $t=-2s$. În acest caz $f(z)=x^2+sy^2-isxy$. Aici $s\in\mathbb{R}$ este arbitrar (avem o infinitate de funcţii f).

c) f este derivabilă în orice $z_0=a\in\mathbb{R}$ cu $a\neq 0$ dacă şi numai dacă $t=2$. În acest caz $f(z)=x^2+sy^2+2ixy$. Aici $s\in\mathbb{R}$ este arbitrar (avem o infinitate de funcţii f).

d) f este derivabilă în $z_0=0$ oricare ar fi s şi t (avem o infinitate de funcţii f).

Evident, ştiind că funcţia f este derivabilă în z_0, se pune problema de a calcula $f'(z_0)$.

Teoremă. În condiţiile de la teorema precedentă şi ştiind că f este derivabilă în z_0, avem

$$f'(z_0=a+ib)=\frac{\partial P}{\partial x}(a,b)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(a,b).$$

Să folosim această teoremă în calculul derivatelor la exemplele 1° şi 2° de mai sus.

1°. Avem $f'(z_0)=2a+i2b=2(a+ib)=2z_0$

2°. a) Pentru $a\neq 0$, $b\neq 0$ avem

$$f'(z_0)=2a+i2b=2z_0,$$

b) Pentru $a=0$, $b\neq 0$, avem

$$f'(z_0)=2a+itb=-i2sb=-2isb=-2sz_0=tz_0.$$

c) Pentru $a\neq 0$, $b=0$, avem

$$f'(z_0)=2a+itb=2a=2z_0$$

d) Pentru $a=0$, $b=0$, avem

$$f'(z_0)=0.$$

Regulile obişnuite de derivare se păstrează şi în cazul derivării în complex. Dăm mai jos câteva formule în acest sens fără explicaţii:

$$(uv)'(z_0)=u'(z_0)v(z_0)+u(z_0)v'(z_0)$$

$$(\alpha u)'(z_0)=\alpha u'(z_0) \quad (\text{unde } \alpha\in\mathbb{C})$$

$$(u+v)'(z_0)=u'(z_0)+v'(z_0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(z_0)=\frac{u'(z_0)v(z_0)-u(z_0)v'(z_0)}{v(z_0)^2}$$

$$(f\circ u)'(z_0)=f'(u(z_0))\cdot u'(z_0)$$

2.5.4. Funcţii analitice

Mai întâi, o revedere a câtorva noţiuni referitoare la **serii de numere** (reale sau complexe).

Începem prin a discuta despre seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ (sau $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$).

Vom considera un şir de numere din $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, anume şirul $\left(a_n\right)_{n\geq n_0}$. Aici $n_0 \in \mathbb{N}$ este fixat.

De obicei $n_0 = 0$ sau 1. Numărul a_n se numeşte **termenul de rang *n* al seriei** $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

Pentru fiecare $n \geq n_0$ considerăm **suma parţială de ordin *n* a seriei** $\sum\limits_{n\geq n_0}^{n} a_n$, anume numărul:

$$S_n = \sum_{p=n_0}^{n} a_p .$$

Vom spune că **seria are sumă** dacă există $\lim\limits_{n} S_n = S$. Anume, dacă $K = \mathbb{C}$, avem $S \in \mathbb{C}$, iar dacă $K = \mathbb{R}$, avem $S \in \overline{\mathbb{R}}$. În acest caz numim pe S **suma seriei** $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

Vom spune că **seria este convergentă** dacă are suma S şi $S \in K$ (adică şirul $(S_n)_n$ este **convergent**, deci limita $S \in \mathbb{R}$ în cazul când $K = \mathbb{R}$). Când seria are sumă, notăm de multe ori $S = \sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

Observaţie. După cum se vede, **nu definim** noţiunea de serie, ci discutăm despre seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ ca despre o entitate acceptată intuitiv.

Anume, ideea de serie este legată de dorinţa de a extinde suma la un număr infinit de termeni. În acest sens, „suma” unui şir $\left(a_n\right)_{n\geq n_0}$ este obţinută în mod rezonabil luând sume S_n ca mai sus cu un număr din ce în ce mai mare de termeni şi considerând limita acestui şir ca sumă (când limita există!)

Dacă seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ este astfel încât nu există $\lim\limits_{n} S_n$ vom spune că **seria nu are sumă** sau este **oscilantă**. Dacă seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ nu este convergentă spunem că este **divergentă**.

Aşadar, dacă seria este divergentă, avem următoarele variante:

-- sau are sumă şi suma este egală cu ∞ sau cu $-\infty$ (în cazul $K=\mathbb{R}$);

-- sau este oscilantă.

Dacă seria $\sum_{n\geq n_0} a_n$ este dată, vom scrie uneori mai simplu $\sum_n a_n$ sau numai $\sum a_n$ (deci n_0 este subînţeles). Câteodată notăm seria ca sumă infinită:

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n + \ldots.$$

Proprietăţi.

1°. Dacă $\sum_n a_n$ este convergentă, atunci $\lim_n a_n = 0$ (reciproca este falsă, după cum arată **seria armonică** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, dar $a_n = \frac{1}{n} \to 0$).

2°. O serie $\sum_{n\geq n_0} a_n$ pentru care seria modulelor $\sum_{n\geq n_0} |a_n|$ este convergentă se numeşte **serie absolut convergentă**.

Se arată că orice serie absolut convergentă este convergentă (reciproca este falsă, după cum arată **seria armonică alternată** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, adică seria $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ care este **semiconvergentă**, adică este convergentă şi nu este absolut convergentă).

3°. Dacă seria $\sum_{n\geq n_0} a_n$ este **cu termeni pozitivi** (adică $a_n \geq 0$ pentru orice $n \geq n_0$) atunci ea are sumă. Anume, $(S_n)_n$ este crescător şi suma S este dată astfel:

$$0 \leq S = \sup_n S_n \leq \infty.$$

Convergenţa seriei revine la mărginirea şirului $(S_n)_n$. De aceea, în acest caz, pentru a desemna faptul că seria este convergentă scriem şi $\sum_n a_n < \infty$.

4°. **Pentru serii cu termeni pozitivi** avem următoarele **criterii de convergenţă**:

a) **Criteriul lui d'Alembert (criteriul rădăcinii).** Fie seria $\sum_n a_n$ cu $a_n > 0$.

Dacă $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, seria este convergentă.

Dacă $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, seria este divergentă.

(În cazul când $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nu putem spune nimic; în unele cazuri seria converge în această situaţie (v. seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) iar în alte cazuri seria diverge în această situaţie (v. seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$).

Exemplu de aplicare. Fie $a > 0$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiem natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^\alpha}$.

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to a$. Dacă $a<1$ seria converge, dacă $a>1$ seria diverge. Dacă $a=1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ (**seria armonică generalizată**); converge dacă şi numai dacă $\alpha >1$.

b) **Criteriul lui Cauchy** (**Criteriul rădăcinii**.) Fie seria $\sum_n a_n$ cu $a_n \geq 0$.

Dacă $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ seria este convergentă.

Dacă $\lim_n \sqrt[n]{a_n} > 1$ seria este divergentă.

(În cazul $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$ nu putem spune nimic. A se vedea acelaşi exemplu ca la criteriul lui d'Alembert).

Exemplu de aplicare. Studiem natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Avem $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$

Deci seria este convergentă.

c) **Primul criteriu al comparaţiei**

Fie $\sum_n a_n$ şi $\sum_n b_n$ două serii cu $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Se presupune că $a_n \leq b_n$ pentru orice n.

Dacă $\sum_n b_n$ este convergentă rezultă că $\sum_n a_n$ este convergentă.

Dacă $\sum_n a_n$ este divergentă rezultă că $\sum_n b_n$ este divergentă.

Exemplu de aplicare. Studiem natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Observăm că putem compara cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Anume luăm $a_n = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} = b_n$.

Cum seria $\sum_n b_n$ este convergentă rezultă că şi seria noastră $\sum_n a_n$ este convergentă.

Observaţie. La această serie putem chiar calcula şi suma. Anume, deoarece avem pentru orice n:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

rezultă că $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$. Deci S =1.

d) **Al treilea criteriu al comparaţiei**. Fie seriile $\sum_n a_n$ cu $a_n \geq 0$ şi $\sum_n b_n$ cu $b_n > 0$. Se presupune că $0 < \lim_n \frac{a_n}{b_n} < \infty$. Atunci, seriile $\sum_n a_n$ şi $\sum_n b_n$ au aceeaşi natură (sunt ambele divergente sau ambele convergente).

Exemplu de aplicare. Să studiem natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$.

În primul rând observăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ este convergentă, deoarece $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Apoi, deoarece $\lim_n \frac{1}{n^2+n+1} = 0$, vom avea:

$$\lim_n \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2+n+1}} = 1.$$

Luând în criteriul al treilea al comparaţiei $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$ şi $b_n = \frac{1}{n^2+n+1}$, obţinem că seria noastră $\sum_n a_n$ este convergentă

Observaţie. Putem calcula suma acestor serii. Anume, se poate arăta că suma este $\frac{\pi}{4}$.

Vom încheia această paranteză privind seriile numerice cu prezentarea a două serii extrem de importante, care se întâlnesc mult în aplicaţii (una din ele, anume seria armonică generalizată, a fost deja întâlnită).

Seria armonică generalizată

Fixăm un număr α >0.

Seria $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\alpha}$ se numeşte **serie armonică generalizată** (în cazul α =1 se numeşte **seria armonică**).

Se arată că seria de mai sus este convergentă dacă şi numai dacă α >1.

Euler a arătat că dacă α =2 suma seriei este $\frac{\pi^2}{6}$.

Seria geometrică

Fixăm un număr ρ real sau complex.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ (adică $1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^n+\ldots$) se numeşte **seria geometrică de raţie** ρ.

Se arată că seria de mai sus este convergentă dacă şi numai dacă este absolut convergentă dacă şi numai dacă $|\rho|<1$. În acest caz suma seriei este $\frac{1}{1-\rho}$ (ceea ce se vede uşor, deoarece suma parţială S_n este $\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$).

Aplicaţie. Luăm un număr natural $p \geq 2$ (numit **baza sistemului de numeraţie**}). Se ştie că orice număr natural $N \geq 1$ se scrie unic în forma $N = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_n p + a_0$ cu $a_n \neq 0$ şi $a_i \in A=\{0,1, 2,...,p–1\}$.

Similar, orice număr $x\in(0,1)$ se poate scrie ca **suma unei serii p-adice**:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

unde $a_i \in A$ pentru orice i. Covergenţa seriei este garantată de convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n}$ cu suma 1. (**Indicaţie.** Se va studia seria geometrică de raţie 1/p).

După această paranteză privind seriile numerice vom discuta pe scurt despre **funcţiile analitice**.

În esenţă, o funcţie este analitică dacă „se dezvoltă în serie”. Ideea de dezvoltare în serie este legată de încercarea de a extinde „la infinit” noţiunea de polinom. Cu alte cuvinte, o funcţie analitică se exprimă, cel puţin local, ca un „polinom cu o infinitate de termeni”. Demersul este motivat de faptul că polinoamele sunt funcţiile cele mai accesibile din punctul de vedere al studiului.

În cele ce urmează K este (din nou) corpul numerelor reale sau complexe.

Fie $D \subset K$ o mulţime, $a \in D$ un punct interior lui D şi $f : D \to K$.

Definiţie. Se spune că ***f* este analitică în *a*** dacă există un număr strict pozitiv ε >0 şi un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din K cu următoarele proprietăţi:

(i) $B(a,\varepsilon)\subset D$;

(ii) Pentru orice $x \in B(a,\varepsilon)$ avem f$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Cu alte cuvinte, **funcţia *f* se dezvoltă în serie în jurul punctului a**.

Definiţie. Dacă $D \subset K$ este o mulţime deschisă şi $f : D \to K$ este o funcţie, vom spune că ***F* este analitică** (sau **olomorfă**) dacă este analitică în orice punct din D.

Avem următorul rezultat important care leagă cele două noţiuni.

Teoremă. În condiţiile de la definiţia analiticităţii lui f într-un punct: Dacă f este analitică în a, atunci există un număr $r > 0$ având proprietăţile:

a) $B(a,r)\subset D$

b) $f\big|_{B(a,r)}$ este analitică.

Cu alte cuvinte, mulţimea punctelor de analiticitate ale unei funcţii este deschisă.

Definiţie. Fie $D \subset K$ o mulţime deschisă şi $f : D \to K$. Vom spune că *f* este de clasă C^∞ dacă este de clasă C^n pentru orice *n*.

Cu alte cuvinte, *F* are derivate de orice ordin în orice punct.

Teoremă. Fie $D \subset K$ o mulţime deschisă şi $f : D \to K$ o funcţie analitică. Atunci *f* este de clasă C^∞.

În mod natural, se pune întrebarea în ce măsură reciproca acestei afirmaţii este validă.

Răspunsul la această întrebare este nuanţat, după cum $K=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Pentru a putea preciza răspunsul, vom da următoarea

Definiţie. Fie $D \subset K$ o mulţime deschisă şi $a \in D$, interior. Fie şi $f : D \to K$ de clasă C^∞. **Seria de funcţii** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numeşte **seria Taylor ataşată lui *f* în punctul *a***.

Termenul de **serie de funcţii** din această definiţie este neprecizat. În fapt, avem pentru orice *n* funcţia $u_n : D \to K$, dată prin

$$u_n(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Am considerat seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ care este **o serie de funcţii** în sensul că ea are semnificaţia că putem considera în fiecare punct $x \in D$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

În definiţia precedentă, în loc să scriem $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ am scris în mod abuziv dar sugestiv $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Derivatele succesive se pot calcula în punctul *a*, deoarece *a* este interior lui *A*.

Teoremă. În condiţiile de la definiţia analiticităţii unei funcţii într-un punct: *Dacă f este analitică în a, atunci rezultă că există* $\varepsilon>0$ *aşa ca* $B(a,\varepsilon) \subset D$, $f\big|_{B(a,\varepsilon)}$ *este de clasă* C^∞ *şi* $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ *pentru orice n natural*.

Cu alte cuvinte, dacă *f* este analitică în *a*, atunci există $\varepsilon > 0$ aşa ca *f* să fie suma seriei sale Taylor în punctul *a* pe $B(a,\varepsilon) \subset D$.

În rezumat:

Teoremă. Fie $D \subset K$ şi $a \in D$, *a* interior. Fie şi $f : D \to K$, analitică în *a*. Atunci există $\varepsilon > 0$ aşa ca $B(a,\varepsilon) \subset D$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ pentru orice $x \in B(a,\varepsilon)$ şi, în plus, *f* este analitică pe $B(a,\varepsilon)$ (adică $f\big|_{B(a,\varepsilon)}$ este analitică).

Am văzut că funcţiile analitice sunt de clasă C^{∞}. Teorema care urmează dă condiţii necesare şi suficiente de analiticitate.

Teoremă. Fie $D \subset K$ o mulţime deschisă şi $f : D \to K$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1°. Funcţia f este analitică.

2°. Funcţia f este de clasă C^{∞} şi pentru orice $a \in D$ există un număr $\rho(a) > 0$ aşa ca $B(a, \rho(a)) \subset D$ şi pentru orice $x \in B(a, \rho(a))$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n .$$

Încheiem această parte generală privind funcţiile analitice (valabilă şi în real şi în complex) cu cel mai important exemplu de funcţie analitică.

Teoremă. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de elemente din K cu următoarea proprietate: există un număr $\rho > 0$ astfel încât seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge pentru orice $t \in K$ cu $|t| < \rho$. Fie $a \in K$. Definim funcţia $f : B(a,\rho) \to K$ prin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Atunci f este analitică.

Începând din acest moment vom trata separat cazurile real şi complex.

În mod paradoxal, cazul real este mai complicat.

Cazul $K = \mathbb{R}$

Teoremă. Vom considera o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}$ şi un număr $a \in D$. Fie şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{∞}
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este analitică în a;

2) Există un număr $\rho > 0$ aşa ca $(a - \rho , x + \rho) \subset D$ şi, în plus, pentru orice $x \in (a - \rho , x + \rho)$, avem $\lim_n R_n(x) = 0$.

Aici $R_n : (a - \rho , x + \rho) \to \mathbb{R}$ este restul formulei lui Taylor de ordin n ataşate lui f în a.

Cu alte cuvinte, analiticitatea lui f în a este echivalentă cu faptul că putem „prelungi” formula lui Taylor la infinit.

Observaţie. În cazul real există funcţii de clasă C^{∞} care nu sunt analitice.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}.$$

Atunci f este de clasă C^{∞}. Se poate arăta că $f^{(n)}(0) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Totuşi, f nu este analitică (deoarece nu este analitică în 0).

Cazul $K = \mathbb{C}$

În acest caz simpla derivabilitate antrenează cu sine analiticitatea.

Avem următoarea teoremă fundamentală:

Teorema fundamentală a olomorfiei. Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in D \to \mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este analitică (olomorfă);

2) f este derivabilă.

Folosind identificarea funcţiilor complexe cu perechile de funcţii reale, vom obţine şi următoarea caracterizare.

Teoremă. Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in D \to \mathbb{C}$. Considerăm şi identificarea canonică $f \equiv F \equiv (P, Q)$: $'D' \to \mathbb{R}^2$.
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este analitică (olomorfă);

2) Există şi sunt continue funcţiile derivată parţială

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} : 'D' \to \mathbb{R}$$

şi, în plus, ele satisfac relaţiile Cauchy-Riemann peste tot:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Încheiem cu câteva exemple. Seriile respective sunt convergente absolut.

Exemple de funcţii analitice în real

Vom prezenta câteva dezvoltări în serie uzuale. Funcţiile astfel obţinute sunt analitice, conform unui rezultat anterior.

1) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}.$$

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

deci: $$(1-x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \ldots.$$

5) Pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Schimbând pe *x* în – *x* avem:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n}.$$

6) Fie $a \neq b$. Considerăm funcţia $f \in \mathbb{R} \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$,dată prin $f(x) = \frac{1}{x-b}$. Vom vedea că este analitică.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - a| < |b - a|$ avem $\frac{1}{x-b} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-a}{b-a}}$. Scriind

$y = \frac{x-a}{b-a}$, avem $|y| < 1$, deci deoarece

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots y^n \ldots,$$

înlocuim şi avem:

$$f(x) = \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a-b}\left(1 + \frac{x-a}{b-a} + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + \ldots\right) = \sum_{n-a}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{(b-a)^{n+1}},$$

ceea ce se verifică şi observând că $f^{(n)}(a) = -(n!) \cdot \frac{1}{(b-a)^{n+1}}$.

Exemple de funcţii analitice în complex

Vom prezenta exemple de funcţii analitice (olomorfe) care prelun-gesc în complex funcţiile corespunzătoare din real.

1) Funcţia f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin $f(z) = \sum_{n=a}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ prelungeşte funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x$. Vom numi pe *f* **exponenţiala complexă**.

Notăm *f* (z) = exp (z) pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

2) Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

prelungeşte funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ(x) = sin x. Vom numi pe *f* **sinusul complex**.

Notăm *f* (*z*) = sin*z* pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

3) Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

prelungeşte funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ (*x*)=cos x. Vom numi pe *f* **cosinusul complex**.

Notăm *f* (*z*) = (0)*z* pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Observaţie. Putem arăta că pentru orice $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avem:

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Aşadar, făcând identificarea $\exp \equiv (P, Q)$ avem $P, Q : \mathbb{R}^2 = '\mathbb{C}' \to \mathbb{R}$, date prin

$$P(x,y) = e^x \cos y, \qquad Q(x,y) = e^x \sin y.$$

Cititorul va verifica relaţiile Cauchy-Riemann.

Reţinem şi faptul că pentru $\theta \in \mathbb{R}$ avem

$$\exp(i\,\theta) = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Test de autoevaluare 11

1. Să se calculeze

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se dezvolte în serie în jurul punctului $z = i$ funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată prin: $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 225 a acestei unităţi de învăţare.

2.6. Integrale improprii

Ştim să integrăm funcţii definite pe intervale de tipul [a,b] (intervale închise şi mărginite, numite şi **intervale compacte**).

Acum vom considera un **interval necompact** $I \subset \mathbb{R}$ şi o **funcţie continuă** $f : I \to \mathbb{R}$.

Vom da un sens, în anumite cazuri, integralelor lui f pe I. Definiţiile care urmează pot fi date într-un cadru mai general.

Pentru început observăm că I poate avea una din următoarele forme: (a, b), (– ∞, b), (a, ∞), (– ∞, ∞), [a, b), (a, b], [a, ∞), (–∞, b] cu a, b numere reale.

Mai pe scurt, I poate avea una din formele: (a, b), [a, b), (a, b] unde $-\infty \le a < b \le \infty$.

Definirea integralei improprii a lui *f*

A) **Cazul *I* = [*a*, *b*)**

Spunem că f este **integrabilă improprie** dacă există şi este finită $\lim\limits_{\lambda \to b} F(\lambda)$, unde $F : I \to \mathbb{R}$ este dată prin unde $F(\lambda) = \int\limits_a^{\lambda} f(x)dx$.

Dacă $b < \infty$, notăm $\lim\limits_{\lambda \to b} F(\lambda) = \int\limits_a^{b-0} f(x)dx$.

Dacă $b = \infty$, notăm $\lim\limits_{\lambda \to b} F(\lambda) = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

B) **Cazul *I* = (*a*, *b*]**

Spunem că f este **integrabilă improprie** dacă există şi este finită $\lim\limits_{\lambda \to a} F(\lambda)$ unde $F : I \to \mathbb{R}$ este dată prin $F(\lambda) = \int\limits_{\lambda}^{b} f(x)dx$.

Dacă $-\infty < a$, notăm $\lim\limits_{\lambda \to a} F(\lambda) = \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

Dacă $a = -\infty$, notăm $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

C) **Cazul *I* = (*a*, *b*)**

Spunem că f este **integrabilă improprie** dacă există $c \in (a, b)$ astfel încât $f\big|_{(a,c]}$ şi $f\big|_{[c,b)}$ sunt integrabile impropriu.

(Definiţia şi valorile definite mai jos nu depind de c).

Dacă $a = -\infty$ şi $b = \infty$, notăm:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{D}{=} \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

Dacă $a = -\infty$ şi $b < \infty$, notăm:

$$\int_{-\infty}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x \overset{D}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x .$$

Dacă $-\infty < a$ şi $b = \infty$, notăm:

$$\int_{a+0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{D}{=} \int_{a+0}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

Dacă $-\infty < a$ şi $b < \infty$, notăm:

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x \overset{D}{=} \int_{a+0}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x .$$

Valorile numerice definite mai sus se numesc **integrale improprii ale lui *f*** (pe I).

Exemple. $\boxed{1°.}$ Luăm $I = [0,\infty)$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Atunci:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

deoarece:

$$F(\lambda) = \int_{0}^{\lambda} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{2°.}$ Luăm $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Atunci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \pi,$$

deoarece putem lucra cu punctul intermediar c=0:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{am văzut la 1°)}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \left(F(\lambda) = \int_{-\lambda}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = -\operatorname{arctg}\lambda \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{} \frac{\pi}{2} \right)$$

Atunci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \pi$.

$\boxed{3°.}$ Luăm $I = (0,1)$ şi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Atunci:

$$\int_{0+0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2,$$

deoarece:

$$F(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_{\lambda}^{1}=2-2\sqrt{\lambda}\to 2.$$

Alte denumiri. Uneori, în loc să spunem că *f* este integrabilă impropriu, spunem că **integrala este convergentă** sau că **integrala improprie există**.

De exemplu, referindu-ne la ultimul exemplu, putem spune că inte-grala $\int_{0+0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ **este convergentă** sau integrala improprie $\int_{0+0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ **există**.

Definiţie. În acelaşi context general, vom spune că *f* **este absolut integrabilă impropriu** (sau **integrala este absolut convergentă** sau integrala improprie există în mod absolut) dacă $|f|$ este integrabilă impropriu.

Teoremă. Dacă *f* este absolut integrabilă impropriu, atunci *f* este integrabilă impropriu.

(Reciproca este falsă, după cum arată exemplul funcţiei

$$f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\frac{\sin x}{x}).$$

Vom prezenta trei exemple deosebit de importanta de integrale improprii, care intervin în diverse ramuri ale matematicii.

1°. Funcţia *B* a lui Euler

Pentru orice două numere strict pozitive integrala

$$B(a,b)=\int_{0+0}^{1-0}x^{a-1}(1\text{-}x)^{b\text{-}1}\mathrm{d}x$$

este convergentă. Funcţia astfel definită $B:(a,\infty)^2\to\mathbb{R}$ se numeşte **funcţia *B* a lui Euler** (sau **integrala euleriană de prima specie**).

2°. Funcţia Γ a lui Euler

Pentru orice număr strict pozitiv integrala:

$$\Gamma(a)=\int_{0+0}^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x,$$

este convergentă. Funcţia astfel definită $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se numeşte **funcţia Γ a lui Euler** (sau **integrala euleriană de a doua specie**).

Se poate arăta că Γ este de clasă C^{∞} (avem $\Gamma'(a)=\int_{0+0}^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$). De asemenea, pentru orice $a>0$ avem:

$$\Gamma\,(a+1) = a\,\Gamma\,(a),$$

de unde, pentru $n\in\mathbb{N}$ rezultă:

$$\Gamma\,(n+1) = n!.$$

Legătura între funcţiile B şi Γ este dată de celebra **formulă a lui Dirichlet**: pentru orice a, b > 0 avem:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

3°. Integrala lui Poisson

Se arată că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ este convergentă. Valoarea acestei integrale improprii este următoarea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

Această integrală este fundamentală în teoria probabilităţilor. Cu ajutorul ei se defineşte **legea de repartiţie normală**, care are drept funcţie de densitate a probabilităţii funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Graficul lui f este o curbă cunoscută sub numele de „clopotul lui Gauss".

Aici σ, μ sunt doi parametri reali, σ >0. Anume μ este **media** (**valoarea medie**) iar σ^2 este **dispersia** unei variabile aleatoare distribuite normal N (φ, σ^2).

Cu alte cuvinte avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\mu;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sigma^2.$$

Test de autoevaluare 12

1. Să se calculeze:

$$\int_0^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx .$$

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. a) Să se arate că integrala improprie $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ este convergentă.

b) Folosind rezultatul de la a) să se arate că integrala:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

este convergentă.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 226 a acestei unităţi de învăţare.

2.7. Integrale curbilinii

Vom prezenta într-un cadru foarte restrictiv integralele curbilinii de prima şi a doua specie.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Considerăm un drum $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, despre care presupunem că este derivabil cu derivata continuă. Cu alte cuvinte, dacă $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$, atunci fiecare componentă scalară $\gamma_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi funcţia derivată $\gamma_i':[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă.

Fie şi $D\subset\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $\gamma([a,b])\subset D$.

2.7.1. Integrala curbilinie de prima specie

Vom considera şi o funcţie $F: D \to \mathbb{R}$, care este presupusă continuă.

Definiţie. Integrala curbilinie de prima specie a lui *F* pe drumul γ este prin definiţie numărul:

$$\int_\gamma F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}l \overset{D}{=} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

Cu alte cuvinte avem $\int_\gamma F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}l =$

$$= \int_a^b F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t),) \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \ldots + \gamma'_n(t)^2} \, \mathrm{d}t \,.$$

Dacă *n*=2 scriem de obicei $\int_\gamma F(x,y) \mathrm{d}l$, iar dacă *n*=3 scriem de obicei $\int_\gamma F(x,y,z) \mathrm{d}l$.

Interpretarea fizică a integralei de mai sus poate fi următoarea (în cazul *n*=3): un fir material a cărui imagine este imaginea lui γ are în fiecare punct $(x,y,z)=\gamma(t)$ densitatea de masă $F(x,y,z)$. Atunci masa lui totală este $\int_\gamma F(x,y,z) \mathrm{d}l$.

O altă interpretare poate fi următoarea: acelaşi fir material de mai sus este încărcat electric, având în fiecare punct $(x,y,z)=\gamma(t)$ densi-tatea de sarcină electrostatică $F(x,y,z)$. Sarcina electrică totală a firului este atunci $\int_\gamma F(x,y,z) \mathrm{d}l$.

Exemplu. Considerăm drumul $\gamma:[0,1] \to \mathrm{R}^2$ dat prin $\gamma(t)=(t,t^2)$. Vom calcula:

$$\int_\gamma x,y \, \mathrm{d}l \,.$$

Aici $n=2$, $D=\mathrm{R}^2$ şi $F:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $F(x,y)=xy$ şi $\gamma_1:[0,1] \to \mathrm{R}$, $\gamma_1(t)=t$; $\gamma_2:[0,1] \to \mathrm{R}$, $\gamma_2(t)=t^2$.

Avem; $\int_\gamma x,y \, \mathrm{d}l = \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2(t)\sqrt{\gamma'_1(t)^2 \gamma'_2(t)^2} \, \mathrm{d}t =$

$$= \int_0^1 t \cdot t^2 \sqrt{((t)')^2 + ((t^2)')} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 \sqrt{1+4t^2} \, \mathrm{d}t \,.$$

Folosim schimbarea de variabilă $t^2=u$ şi integrala devine (deoarece $(t^2)'=2t$):

$$\int_0^1 u\sqrt{1+4u} \, \mathrm{d}u \,.$$

Facem o nouă schimbare de variabilă şi anume:

$$\sqrt{1+4u}=v \Rightarrow 1+4u=v^2 \Rightarrow u=\frac{v^2-1}{4} \Rightarrow$$

(deoarece $\left(\frac{v^2-1}{4}\right)'=\frac{v}{2}$) integrala devine:

$$\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\frac{v^2-1}{4}\cdot v\cdot\frac{v}{2}\mathrm{d}v=\frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{5}}(v^4-v^2)\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{16}\left(\frac{v^5}{5}-\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{16}\left(\frac{25}{5}-\frac{5}{3}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{24}+\frac{1}{120}.$$

Observaţie. În cazul când $F\equiv 1$, se obţine că:

$$\int_\gamma F(x_1,x_2,\ldots,x_n\mathrm{d}l=\int_\gamma 1\mathrm{d}l=\int_a^b\sqrt{\gamma'_1(t)^2+\gamma'_2(t)^2+\ldots+\gamma'_n(t)^2}\ \mathrm{d}t=$$

= **lungimea drumului** γ.

Exerciţiu. Să se calculeze lungimea lui $\gamma: l(\gamma)=\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\ \mathrm{d}t$.

2.7.2. Integrala curbilinie de a doua specie

Vom considera şi o funcţie vectorială continuă:

$$P=(P_1, P_2, \ldots, P_n): D\to \mathbb{R}^n.$$

Cu alte cuvinte fiecare componentă scalară $P_i: D\to\mathbb{R}$ este continuă.

Definiţie. Integrala curbilinie de a doua specie a funcţiei P pe drumul γ este prin definiţie numărul:

$$\int_\gamma P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1+P_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_2+\ldots+P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n\overset{D}{=}$$

$$\overset{D}{=}\int_a^b[P_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\ldots,\gamma_n(t))\gamma'_1(t)+P_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\ldots,\gamma_n(t))\gamma'_2(t)+$$

$$+\ldots+P_n(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\ldots,\gamma_n(t))\gamma'_n(t)]\mathrm{d}t.$$

Dacă n = 2 notăm componentele scalare P_1 şi P_2 prin P şi Q şi scriem de obicei

$\int_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$. Dacă n =3 notăm componentele scalare P_1, P_2, P_3 prin P, Q, R şi scriem de obicei:

$$\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Interpretarea fizică a integralei de mai sus (în cazul n=3) este următoarea: o forţă variabilă cu punctul de aplicare mobil în D şi reprezentată ca vector în fiecare punct $(x, y, z)\in D$ de vectorul

$$(x,y,z)+(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ \mathrm{R}(x,y,z))=$$

$$=(x+P(x,y,z),\ y+Q(x,y,z),\ z+\mathrm{R}(x,y,z))$$

îşi deplasează punctul de aplicare de-alungul drumului γ. Atunci lucrul mecanic efectuat este $\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$.

Exemplu. Considerăm acelaşi drum γ ca la integrala curbilinie de prima specie, anume $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,t^2)$.

Vom calcula

$$\int_\gamma x,y\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\ .$$

Aici $n=2$, $D=\mathbb{R}^2$, $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $P(x,y)=xy$ şi $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $Q(x,y)=x$.

$$\int_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (\gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma'_1 + \gamma_1(t)\gamma_2(t))\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (t\cdot t^2\cdot 1 + t\cdot 2t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^3+2t)\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + 2\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}.$$

Observaţie. Drumul γ folosit în cele două exemple de mai sus are ca imagine un arc de parabolă. Anume, imaginea sa este graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^2$.

Test de autoevaluare 13

1. Să se calculeze:

$$\int_\gamma x dl$$

unde $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ este dat prin $\gamma(t)=(t,t^2)$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze:

$$\int_\gamma x dx + xy dy$$

$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 227 a acestei unităţi de învăţare.

2.8. Integrale multiple

Calculul integralelor poate fi extins şi pentru funcţii de n variabile, $n \geq 2$. Vom prezenta integralele multiple într-un cadru restrictiv.

Vom considera o mulţime $D \subset \mathbb{R}^n$, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ şi vom calcula **integrala lui *F*, notată**

$$\int\int\ldots\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$$

(în stânga sunt n semne de integrală).

Funcţia f este continuă, iar mulţimea D va fi de anumite tipuri care vor fi prezentate mai jos.

Dacă n = 2 avem **integrale duble** şi vom scrie $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, iar dacă n = 3 avem **integrale triple** şi vom scrie $\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$. În general, avem o integrală multiplă de ordin n.

Nu vom da definiţia precisă a integralei multiple, pentru a nu încărca prea mult acest (mic) curs. Să spunem numai că integrala multiplă se defineşte tot cu ajutorul sumelor Riemann, printr-un procedeu de aproximare, luând diviziuni din ce în ce mai fine. Sumele Riemann sunt de forma $\sum f(\zeta_P)\mu(P)$ unde P sunt mulţimile care formează diviziunea lui D, $\zeta_P \in P$ sunt puncte intermediare şi $\mu(P)$ este măsura Jordan n dimensională a mulţimii $P \subset D$ (de exemplu, dacă n = 2, $\mu(P)$ este aria lui P). Calculul măsurii n dimensionale:

$$\mu(D) = \int\int\ldots\int_D 1\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n \ .$$

2.8.1. Integrale multiple pe intervale *n*-dimensionale

Mulţimea D este în acest caz de forma $D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, cu $a_i < b_i$ pentru i =1, 2,... ,n (spunem că D este interval n-dimensional).

Vom reduce calculul integralei multiple a lui f la integrale obişnuite ale unor funcţii de o variabilă. Anume, avem formula de reducere a

integralei multiple la o **integrală iterată**:

$$\int\int\ldots\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\ldots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n \ .$$

Semnificaţia membrului secund este următoarea:

Fixăm în mod arbitrar $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$, ... , $x_{n-1} \in [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Atunci funcţia (de o variabilă) $f_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$ este continuă. Putem calcula:

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)\mathrm{d}t \ ,$$

pe care o scriem sub forma:

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Funcţia astfel definită $F_{n-1} : \prod_{i=1}^{n-1}[a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ este şi ea continuă. Cu ajutorul ei definim funcţia:

$$f_{n-1} : [a_{n-1}, b_{n-1}] \to \mathbb{R},\ f_{n-1}(t) = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, t).$$

Putem calcula: $\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, t)\mathrm{d}t =$

$$= \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Scriem ultimul număr sub forma:

$$\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n .$$

Continuăm procedeul obţinând:

$$\int_{a_{n-2}}^{b_{n-2}} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \mathrm{d}x_{n-2} \overset{D}{=}$$

$$\overset{D}{=} \int_{a_{n-2}}^{b_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-2} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n$$

şi tot aşa mai departe până ce obţinem în final:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \dots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \overset{D}{=}$$

$$\overset{D}{=} \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}x_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_n =$$

$$= \iint_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n .$$

Dacă n=2 avem deci:

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Dacă n = 3 avem:

$$\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}y \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z .$$

Observaţie importantă: ordinea de integrare nu este esenţială. Obţinem acelaşi rezultat integrând în orice ordine.

De exemplu, dacă n=2 avem două variante:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x\int_{a2}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}y\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\mathrm{d}x \overset{D}{=} \int_{a_{21}}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

Dacă n=3 avem şase variante:

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}y\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x\int_{a_3}^{b_3}\mathrm{d}z\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}y\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}y\int_{a_3}^{b_3}\mathrm{d}z\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{a_3}^{b_3}\mathrm{d}z\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\mathrm{d}y = \int_{a_3}^{b_3}\mathrm{d}z\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}y\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

De exemplu, ultima integrală iterată înseamnă

$$\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\,.$$

Exemple. $\boxed{1°.}$ $D=[0,1]\times[0,1]=[a,1]^2$ şi $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+y+1}$.

Integrala „interioară”:

$$\int_0^1 \frac{1}{2x+y+1}\,\mathrm{d}y = \ln(2x+y+1)\Big|_0^1 = \ln(2x+2)-\ln(2x+1)$$

şi deci integrala căutată este

$$\int_0^1 \ln(2x+2)\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 \ln t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^3 \ln t\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\left[(t\ln t - t)\Big|_2^4 - (t\ln t - t)\Big|_1^3\right] = \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}\,.$$

Pentru verificare se poate încerca şi ordinea de integrare alternativă $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \frac{1}{2x+y+1}\,\mathrm{d}x$.

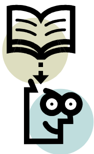
$\boxed{2°.}$ $D=[0,1]\times[-1,1]\times[-1,0]$ şi $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy^2z^2$.

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{0} xy^2z^3\mathrm{d}z$$

$$\int_{-1}^{0} xy^2z^3\mathrm{d}z = xy^2\int_{-1}^{0} z^3\mathrm{d}z = xy^2\,\frac{z^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{xy^2}{4}$$

$$\int_{-1}^{1} -\frac{xy^2}{4}\mathrm{d}y = -\frac{x}{4}\int_{-1}^{1} y^2\mathrm{d}y = -\frac{x}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{x}{6}$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{x}{6}\right) dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{12}.$$

Observaţie. 

În această integrală variabilele sunt „separate” şi se observă că, de fapt, avem:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy dz = \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_{-1}^{-1} y^2 dy\right)\left(\int_{-1}^{0} z^3 dz\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Acest fenomen este general (şi foarte util în calcule). Anume, dacă $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi $f_i : D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ este de forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ va rezulta că:

$$\iiint \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2\right)\ldots\left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n\right)$$

2.8.2. Integrale duble pe domenii simple

Întâi definim **domeniile simple în raport cu axa O*y***.

Fie $a<b$ şi $u,v : [a,b] \to \mathbb{R}$, două funcţii continue, $u \le v$. Pentru orice $x \in [a, b]$ avem deci $u(x) \le v(x)$ şi putem defini mulţimea nevidă

$$D_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) \le y \le v(x)\}.$$

Mulţimea

$$D = \bigcup_{x \in [a,b]} D_x \subset \mathbb{R}^2$$

se numeşte **domeniu simplu în raport cu axa *Oy* generat de funcţiile *u* şi *v***. În figura 3.11 este figurată o mulţime D_x (care este un segment vertical în planul $\mathbb{R}^2$) şi se vede cum se obţine D (care este o mulţime cuprinsă între graficele lui u şi v, haşurată).

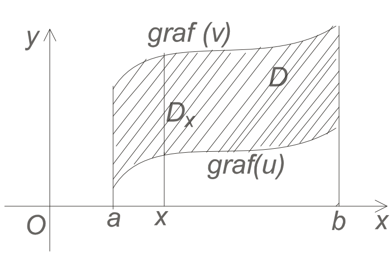


Fig. 3.11

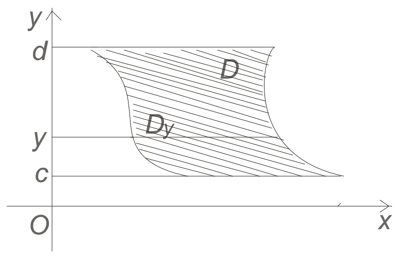


Fig. 3.12

În mod similar putem defini **domeniile simple în raport cu axa *Ox*** (vezi figura 3.12). Avem $c < d$ şi $u,v:[c,d]\to\mathbb{R}$, $u \le v$ două funcţii continue. Pentru fiecare $y \in [c, d]$ definim $D_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(y) \le x \le v(y)\}$ şi atunci $D = \bigcup_{y \in [c,d]} D_y$ este un **domeniu simplu în raport cu axa *Ox* generat de funcţiile *u* şi *v*** (haşurat în figura 3.12).

Intervalele 2-dimensionale sunt cazuri particulare de domenii simple în raport cu ambele axe.

De exemplu, dacă $D=[a,b]\times[c,d]$, rezultă că D este domeniu simplu în raport cu axa Oy generat de funcţiile $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$, $u(x)=c$, $v(x)=d$ (adică u şi v sunt funcţii constante).

Formulele de calcul ale integralelor duble pe astfel de domenii se reduc tot la integrale iterate.

Întâi presupunem că D este domeniu simplu în raport cu Oy generat de u şi v. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \ .$$

Membrul al doilea are următoarea semnificaţie:

Pentru orice $x\in [a,b]$, funcţia $f_x:[u(x),v(x)]\to\mathbb{R}$, $f_x(y)=f(x,y)$ este continuă. Putem calcula:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f_x(y)\mathrm{d}y = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = F(x).$$

Funcţia astfel definită F:[a,b]→R este continuă şi avem:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \ ,$$

adică:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

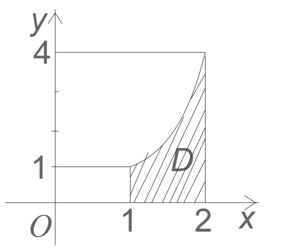
Similar, dacă D este domeniu simplu în raport cu Ox generat de u şi v vom avea

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

Dacă D este domeniu simplu în raport cu ambele axe putem folosi oricare din formule.

Exemple. $\boxed{1°.}$ Fie u,v:[1,2]→R, u(x)=0, v(x)=x^2. Ele generează domeniul simplu în raport cu Oy notat prin D (vezi figura 2.13). Fie $f:D\to\mathbb{R}$, f(x,y)=xy

Fig. 2.13



Aria lui $D=\iint_D 1\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{7}{3}$

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} xy\mathrm{d}y .$$

Avem: $\int_0^{x^2} xy\mathrm{d}y = x\int_0^{x^2} y\mathrm{d}y = x\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{x^2} = \frac{x^5}{2}$.

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{x^5}{2}\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right|_1^2 = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}.$$

$\boxed{2°.}$ $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$= discul centrat în originea axelor de coordonate de rază 1 este un domeniu simplu în raport cu ambele axe (vezi figura 2.14):

-- în raport cu Oy generată de $u,v:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $u(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $v(x)=\sqrt{1-x^2}$;

--în raport cu Ox generat de $u,v:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $u(y) = -\sqrt{1-y^2}$, $v(y)=\sqrt{1-y^2}$

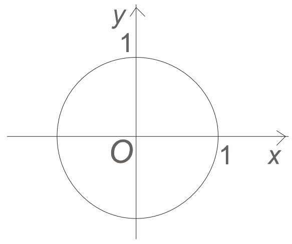


Fig. 2.14

Fie $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2$. Vom calcula:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\mathrm{d}x .$$

Avem: $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}$,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

2.8.3. Integrale multiple calculate cu formula schimbării de variabilă

*F*ie δ, $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ două mulţimi deschise. Presupunem că $\Delta\supset D$.

Fie $T=(T_1,T_2,\ldots,T_n):\delta\to\Delta$ o funcţie de clasă C^1 (adică toate funcţiile $T_i:\delta\to\mathbb{R}$ au toate derivatele parţiale $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}:\delta\to\mathbb{R}$ funcţii continue).

Mai presupunem că există $d\subset\delta$, d interval n-dimensional (în cazul n=2 putem presupune chiar mai general, că d este domeniu simplu în raport cu una din axe), astfel încât T(d)=D.

În plus, admitem că T este injectivă pe **interiorul lui** d={x∈ d | x este interior lui d} şi $J(T)(a)\neq 0$ pentru orice a din interiorul lui d. Aici, $J(T)(a)$ este **jacobianul lui *T*** calculat în a, anume:

$$J(T)(a)=\begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial T_n}{\partial x_2}(a) & & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}.$$

În aceste condiţii, pentru orice funcţie continuă $f:D\to\mathbb{R}$ avem **formula schimbării de variabilă**.

$$\iiint\dots\int_D f(y_1,y_2,\dots,y_n)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\dots\mathrm{d}y_n =$$

$$\iiint\dots\int_d f(T_1(x_1,x_2,\dots,x_n),T_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,T_n(x_1,x_2,\dots,x_n))\cdot|J(T)(x_1,x_2,\dots,x_n)|\,dx_1dx_2\dots dx_n$$

Formula se poate da în condiţii mult mai generale.

1°. În cazul n=2, cea mai folosită transformare T este **transformarea în coordonate polare în plan**, anume $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(\rho,\theta)=\rho\cos\theta$.

Aici $\delta=\Delta=\mathbb{R}^2$ şi $T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, anume:

$$T_1(\rho,\theta)=\rho\cos\theta,\ \ T_2(\rho,\theta)=\rho\sin\theta.$$

Rezultă

$$J(T)(\rho,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\sin\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

Luând $d=[0,r]\times[0,2\pi]$ (unde $r>0$) obţinem:

$T(d)=D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq r\}$ =discul centrat în origine de rază r.

Luând $d=[0,r]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ obţinem:

$T(d)=D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0$ şi $x^2+y^2\leq r\}$ =partea din discul de mai sus aflată în primul cadran.

Avem şi alte variante pentru d.

În ambele situaţii condiţiile din teoremă se îndeplinesc. În figura 2.15 se observă interpretarea **coordonatelor polare** (ρ ,θ) ale unui punct M din plan de coordonate carteziene (x,y), anume x=ρ cos θ , y=ρ sinθ . Aici ρ= distanţa de la originea axelor la M şi θ este unghiul făcut de Ox cu OM.

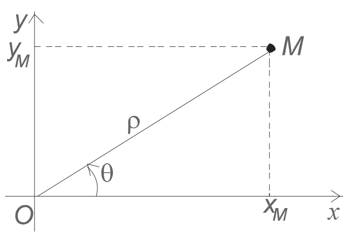


Fig. 2.15.

Deoarece formulele care dau pe *T* au interpretare geometrică pentru $\rho \geq 0$, deci $|J(T)(\rho, \theta)| = |\rho| = \rho$, formula schimbării de variabilă devine în acest caz:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_d f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta .$$

Exemple. $\boxed{1°.}$ Vom relua calculul integralei $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,z) = x^2$.

Avem *D*=*T*(*d*), unde $d = [0,1] \times [0,2\pi]$. Rezultă:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_d f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \iint_d (\rho\cos\theta)^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left.\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}(\pi + 0) = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{2°.}$ Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$. Se vede că *D* este o semicoroană circulară cuprinsă între cercurile centrate în origine de raze 1 şi 2, vezi figura 2. 16.

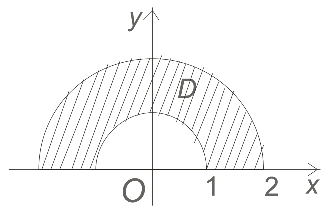


Fig. 2. 16

Avem *D*=*T*(*d*), unde $d = [1,2] \times [0,\pi]$. Vom calcula $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $f : D \to \mathbb{R}$ este dată prin $f(x,y) = x + y$.

Deci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \rho(\cos\theta + \sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \iint_d (\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \iint_D \rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta + \iint_d \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \left(\int_1^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) + \left(\int_1^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi} - \cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{3°.}$ În cazul *n*=3 cea mai folosită tranformare *T* este **transformarea în coordonate plane în spaţiu**, anume $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$T(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta).$$

Prin urmare, aici $\delta=\Delta=\mathbb{R}^3$ şi $T_1,T_2,T_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sunt date prin:

$T_1(\rho,\theta,\varphi)=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $T_2(\rho,\theta,\varphi)=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $T_3(\rho,\theta,\varphi)=\rho\cos\theta$.

Rezultă prin calcul (exerciţiu):

$$J(T)(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\sin\theta.$$

Luând $d=[0,r]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ obţinem:

$T(d)=D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2+z^2\le r^3\}$ = bila centrată în origine de rază $r>0$.

Condiţiile din teorema schimbării de variabilă se îndeplinesc.

Avem şi alte variante pentru *d*.

În figura 2.17. se observă interpretarea **coordonatelor polare** (ρ, θ, φ) ale unui punct *M* din spaţiu de coordonate carteziene (*x,y,z*), anume $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$.

Aici ρ = distanţa de la *O* la *M*, θ este unghiul făcut de semidreapta pozitivă a axei *O*z cu OM şi φ este unghiul făcut de semiaxa pozitivă *Ox* cu proiecţia *OM'* a lui *OM* pe planul *xOy*.

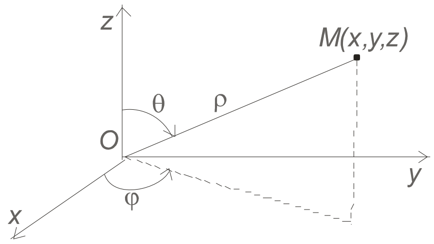


Fig. 2.17.

Avem $\rho\ \ge\ 0$ şi $\sin\theta\ \ge\ 0$ în acest caz, deci când avem interpretare geometrică rezultă $J(T)(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\sin\theta\ge 0$. Formula devine:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\iiint_d f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Exemple. $\boxed{1°.}$ Să calculăm $\iiint_D (x^2+y^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde:

$$D=\{(x,yz)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$

Aici avem deci $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

Este clar că *D*=*T*(*d*), unde $d=[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ deci

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\iiint_d(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta)\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\iiint_d\rho^2\cdot\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi\right)=\frac{4\pi}{5}.$$

$\boxed{2^{\circ}.}$ Să calculăm $\iiint\limits_D x dx dy dz$ unde:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4 \text{ şi } x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$$

(= porţiunea din bila centrată în origine de rază 2 care este în primul octant). Aici $f:D\to\mathbb{R}$ este dată prin $f(x,y,z)$=x.

Avem D=$T(d)$ unde $d=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Integrala căutată este deci:

$$\iiint\limits_d \rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi == \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\right)=\pi.$$

Remarcă finală privitoare la integrale. Putem defini integrale şi pentru funcţii cu valori complexe, dacă părţile reală şi imaginară sunt continue. Anume

$$\int\limits_D f dx=\int\limits_D \mathrm{Re}(f)dx+i\int\limits_D \mathrm{Im}(f)dx\,.$$

Test de autoevaluare 14

1. Să se calculeze:

$$\iint\limits_D xydxdy$$

unde $D=[0,1]\times[2,4]$.

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se calculeze:

$$\iint\limits_D x^2 dxdy$$

unde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$.

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 227 a acestei unităţi de învăţare.

2. 9. Elemente de teoria ecuaţiilor diferenţiale

Problema găsirii anumitor funcţii care să satisfacă unele condiţii este foarte importantă. De cele mai multe ori aceste condiţii se referă la derivata funcţiei necunoscute, sau chiar la derivatele de ordin superior ale acestei funcţii, ţinând seama de interpretările fizice sau geometrice ale derivatei (derivata a doua este legată de acceleraţie).

Ecuaţiile în care necunoscutele sunt funcţii se numesc **ecuaţii funcţionale**}.

Iată un exemplu în acest sens. Căutăm o curbă pentru care panta tangentei în fiecare punct al curbei este proporţională cu ordonata. Dacă curba căutată este graficul unei funcţii derivabile $f: I \to \mathbb{R}$ (unde $I \subset \mathrm{R}$ este un interval), va trebui să avem în fiecare punct $x \in$ I relaţia

$$f'(x) = af(x),$$

unde $a \neq 0$ este constanta de proporţionalitate. În limbaj obişnuit, avem deci ecuaţia diferenţială $y' = ay$.

a) **Teorema de existenţă a lui Peano**.

Considerăm o mulţime deschisă $D \subset \mathrm{R}^2$ (adică D este formată numai din puncte interioare) şi o funcţie $F: D \to \mathbb{R}$.

O **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

este o funcţie derivabilă $f: I \to \mathbb{R}$ (unde $I \subset \mathrm{R}$ este un interval deschis) având proprietăţile:

(i) Pentru orice $x \in I$ avem $(x, f(x)) \in D$.

(ii) Pentru orice $x \in I$ avem $f'(x) = F(x, f(x))$.

În exemplul anterior putem lua $D = \mathrm{R}^2$ şi $F: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $F(x, y) = ay$.

În general, nu putem afirma că o ecuaţie diferenţială de tipul (1) are soluţie sau are soluţie unică.

De obicei rezolvarea ecuaţiei (1) se face impunând o cerinţă suplimentară. Cea mai importantă şi mai cunoscută condiţie suplimentară este **condiţia Cauchy** (sau **condiţia iniţială**). Anume, se dau două puncte $x_0 \in \mathrm{R}$, $y_0 \in \mathrm{R}$, astfel încât $(x_0, y_0) \in D$.

Condiţia iniţială Cauchy:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

înseamnă că cerem ca soluţia $f: I \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (1) să satisfacă în plus condiţia că $x_0 \in I$ şi

$$f(x_0) = y_0 \tag{2'}$$

Teorema lui Peano. În condiţiile şi cu notaţiile de mai sus, se mai presupune şi faptul că F este continuă.

Atunci, pentru orice $(x_0, y_0) \in D$, ecuaţia diferenţială (1) admite soluţie f care satisface condiţia Cauchy (2) (sau (2')).

Observaţie. Nu este garantată şi unicitatea soluţiei, având proprietăţile de mai sus. Totuşi, de cele mai multe ori, satisfacerea condiţiei Cauchy implică unicitatea soluţiei.

În continuare, vom folosi următoarea **exprimare**: dacă putem găsi o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1) care satisface condiţia Cauchy (2) (sau (2')) spunem că am rezolvat **problema Cauchy**

$$y'=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0.$$

Dacă, pur şi simplu, găsim o soluţie a ecuaţiei (1), spunem că am rezolvat ecuaţia (1). Dacă putem găsi **toate** soluţiile ecuaţiei (1), spunem că am găsit **soluţia generală** a ecuaţiei (1) (exprimarea este oarecum imprecisă).

În continuare, vom prezenta câteva **tipuri elementare de ecuaţii diferenţiale**, indicând algoritmii de rezolvare.

b) **Ecuaţii cu variabile separabile**

În acest caz $D=U\times V$, unde $U\subset\mathbb{R}$, $V\subset\mathbb{R}$ sunt intervale deschise. Se consideră şi două funcţii continue $a:U\to\mathbb{R}$, $b:V\to\mathbb{R}$. Funcţia $F:D\to\mathbb{R}$ este dată prin $F(x,y)=a(x)b(y)$.

Ecuaţiile cu variabile separabile sunt deci de forma:

$$y'=a(x)b(y). \qquad (3)$$

În continuare vom lua $x_0\in U$, $y_0\in V$ şi vom rezolva problema Cauchy

$$y'=a(x)b(y),\quad y(x_0)=y_0.$$

Vom lucra în ipoteza $b(y_0)\neq 0$. Din motive de continuitate există $\varepsilon>0$ aşa ca $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)\subset V$ şi $b(y)\neq 0$ pentru $y\in(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$.

(Eventual, restrângem pe V şi presupunem $b(y)\neq 0$ pentru $y\in V$).

Algoritm de rezolvare

Pasul 1. Scriem ecuaţia (3) sub forma:

$$\frac{dy}{dx}=a(x)b(y)\Leftrightarrow\frac{dy}{b(y)}=a(x)dx.$$

Pasul 2. Integrăm în egalitatea precedentă:

$$\int\frac{dy}{b(y)}=\int a(x)dx$$

şi scriem $B(y)=A(x)+C$ unde

- $B:(y_0-\varepsilon,\ y+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $y\to\dfrac{1}{b(y)}$ definită pe $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$;
- $A:U\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $x\to a(x)$ definită pe U,
- C este o constantă reală.

Pasul 3. Alegem constanta C aşa ca:

$$B(y_0)=A(x_0)+C,$$

adică:

$$C=B(y_0)-A(x_0).$$

Pasul 4. Cu această constantă C scriem egalitatea:

$$B(y)=A(\text{x})+C,$$

adică:

$$B(y)=A(\text{x})-A(\text{x}_0)+B(y_0).$$

Deoarece, pentru $x=x_0$, ultima egalitate devine:

$$B(y)=B(y_0),$$

rezultă că ecuaţia în y:

$$B(y)=A(\text{x})+C$$

are soluţie unică:

$$y=B^{-1}(A(\text{x})+C),$$

pentru $x\in I$, unde $I\subset U$ este un interval deschis satisfăcând condiţiile:

$$\text{x}_0\in I \text{ şi } A(\text{x})+C\in B((y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon))$$

(respectiv $\text{x}_0\in I$ şi $A(\text{x})+C\in B(V)$, dacă presupunem $\text{b}(y)\neq 0$ pentru orice $y\in V$).

Aceasta, deoarece funcţia B este strict monotonă pe $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$ (respectiv pe V), având derivata nenulă $\dfrac{1}{b(y)}$.

Soluţia căutată este $f:I\to\mathbb{R}$, $f(\text{x})=B^{-1}(A(\text{x})+C)$.

Exemple. $\boxed{1°.}$ Revenim la ecuaţia iniţială. Anume, fie $a\neq 0$. Vom rezolva problema Cauchy:

$$y'=\text{a}y,\ y(1)=1.$$

Deoarece $y_0=y>0$, vom lua aici $V=(0,\infty)\ni 1$ şi $b:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $b(y)=y$ (deci $b(y)\neq 0$ pentru orice $y\in V$). Putem lua $U=\mathbb{R}$ şi $a:U\to\mathbb{R}$, $a(x)\equiv a$.

Urmăm algoritmul:

$$y'=ay\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=ay\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=adx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int adx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ln|y|=ax+C\Rightarrow\ln y=ax+C$$

(deoarece $y\in V=(0,\infty)$).

Pentru $\text{x}=\text{x}_0=1$ şi $y=y_0=1$ obţinem $0=a+C$ deci

$$C=-a\Rightarrow\ln y=ax-a=a(x-1)\Rightarrow y=e^{a(x-1)}.$$

Soluţia este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{a(x-1)}$.

Observaţie. Soluţia generală este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{ax+C}$, unde $C\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2°.}$ Să rezolvăm problema Cauchy:

$$y'=-\frac{2xy^2}{x^2-1},\qquad y(2)=1.$$

*A*ici avem $y'=\left(-\frac{2x}{x^2-1}\right)y^2$ şi $y_0=1>0$, $x_0=2>1$.

Vom lua deci $U=(1,\infty)$ şi $a:U\to\mathbb{R}$, $a(x)=-\frac{2x}{x^2-1}$; $V=(0,\infty)$, $b:V\to\mathbb{R}$, şi $b(y)=y^2$ (deci $b(y)\neq 0$ pentru orice $y\in V$).

$$y'=-\frac{2xy^2}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{x^2-1}\cdot y^2\Leftrightarrow-\frac{dy}{y^2}=\frac{2x}{x^2-1}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int-\frac{dy}{y^2}=\int\frac{2x}{x^2-1}dx\Rightarrow\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+C\Rightarrow\ln(x^2-1)+C,$$

deoarece $x\in U=(1,\infty)$.

Pentru $x_0=2$ şi $y_0=1$ obţinem:

$1=\ln 3+C\Rightarrow C=1-\ln 3$, deci

$$\frac{1}{y}=\ln(x^2-1)+C\Rightarrow y=\frac{1}{\ln(x^2-1)+C}=\frac{1}{\ln(x^2-1)+1-\ln 3}.$$

Trebuie să avem $\ln(x^2-1)+C=A(x)\in(0,\infty)=B(V)$ unde $B:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $B(y)=\frac{1}{y}$.

Deci este necesar ca $\ln(x^2-1)+1-\ln 3>0$, adică

$$\ln(x^2-1)>\ln 3-1=\ln\frac{3}{e}\Rightarrow x^2-1>\frac{3}{e}\Rightarrow x^2>\frac{3}{e}+1\Rightarrow x>\sqrt{\frac{3}{e}+1}$$

căci $x\in U=(1,\infty)$.

Soluţia este $f:\left(\sqrt{\frac{3}{e}+1},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\ln(x^2-1)+1-\ln 3}$.

Observaţie. Condiţia $b(y)\neq 0$ pentru $y\in V$ este foarte importantă. Dacă există $y_0\in V$ cu $b(y_0)=0$ ajungem la situaţii complicate. De exemplu, în acest caz funcţia $s:U\to\mathbb{R}$ dată prin $s(x)\equiv y_0$ este soluţie a ecuaţiei (3) (numită **soluţia staţionară**).

C) Ecuaţii afine (ecuaţii liniare)

Fie $U\subset\mathbb{R}$ un interval deschis şi $a,b:U\to\mathbb{R}$ două funcţii

continue. Vom lua $D=U\times\mathbb{R}$ şi $F:D\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=a(x)y+b(x)$.

Ecuaţiile afine sunt deci de forma

$$y'=a(x)y+b(x)$$

Dacă $b\equiv 0$ se mai numesc şi **ecuaţii liniare de ordinul întâi**. Unii autori numesc ecuaţiile afine ecuaţii liniare de ordinul întâi, denumind **ecuaţii liniare omogene de ordinul întâi** pe cele cu $b\equiv 0$.

Fie $x_0\in U$, $y_0\in\mathbb{R}$.

Algoritm de rezolvare a problemei Cauchy:

$$y'=a(x)y+b(x),\ u(x_0)=y_0.$$

Pasul 1. **Se rezolvă ecuaţia omogenă asociată**

$$y'=a(x)y$$

după procedeul de la ecuaţii cu variabile separabile:

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=a(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int a(x)dx \Rightarrow \ln|y|=A(x)+K,$$

cu $K\in\mathbb{R}$.

Scriem K sub forma $K=\ln C$ (deoarece orice număr real K se poate scrie sub forma $K=\ln C$ cu un anumit $K>0$)

$$\ln|y|=A(x)+\ln C \Rightarrow |y|=Ce^{A(x)} \Rightarrow y=Ce^{A(x)}.$$

Dacă $b(x)\equiv 0$, pentru $x=x_0$ şi $y=y_0$ obţinem $y_0=Ce^{A(x_0)}$, deci $C=y_0e^{-A(x_0)}$.

Soluţia este $f:U\to\mathbb{R}$, $f(x)=y_0e^{-A(x_0)}e^{A(x_0)}$, unde $A:U\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui a.

Dacă b nu este identic nulă, trecem la

Pasul 2. (**Variaţia constantelor**)

Folosim rezolvarea ecuaţiei omogene asociate şi căutăm soluţia sub forma $f:U\to\mathbb{R}$, $f(x)=ce^{A(x_0)}$, unde $C:U\to\mathbb{R}$ este o funcţie necunos-cută (am „considerat constanta C ca variabilă”).

Punând condiţia ca f să verifice ecuaţia obţinem:

$$f'(x)=a(x)f(x)+b(x) \Leftrightarrow C(x)e^{A(x)}a(x)+C'(x)e^{A(x)}=$$
$$=a(x)C(x)e^{A(x)}+b(x) \Leftrightarrow C'(x)=b(x)e^{-A(x)}$$

Deci $C(x)=\int b(x)e^{-A(x)}dx$, adică C este o primitivă a funcţiei continue $x\to b(x)e^{-A(x)}$ pe U. Scriem $C(x)=P(x)+H$ cu $H\in\mathbb{R}$ con-stantă. Determinăm H aşa ca $f(x_0)=y_0$, adică $(P(x_0)+H)e^{A(x_0)}=y_0$ etc.

Exemple. $\boxed{1°.}$ Să rezolvăm problema Cauchy

$$y'=xy+x,\quad y(1)=2.$$

Ecuaţia omogenă este:

$$y'=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=xdx \Leftrightarrow \ln|y|=\frac{x^2}{2}+\ln C \Rightarrow y=Ce^{x^2/2}.$$

Variem constanta C:

$$\Rightarrow Ce^{x^2/2}=x \Rightarrow C'=\frac{x}{e^{x^2/2}} \Rightarrow C(x)=\int\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)'}{e^{\frac{x^2}{2}}}dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}+H;$$

$$y(x)=\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}+H\right)e^{\frac{x^2}{2}}=He^{\frac{x^2}{2}}-1;$$

$$y(1)=2\Leftrightarrow He^{1/2}-1=2\Leftrightarrow H=3e^{-1/2}.$$

Soluţia este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^{\frac{x^2-1}{2}}-1$ (deoarece aici $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a(x)=x$ şi $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b(x)=x$).

$\boxed{2°.}$ Fie $m\in\mathbb{R}$. Să rezolvăm problema Cauchy

$$y'=xy+m,\ y(1)=2.$$

Aici din nou $U=\mathbb{R}$, $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a(x)=x$ şi $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b(x)=m$.

-- Dacă $m = 0$ avem o ecuaţie liniară (omogenă). Am văzut că soluţia este de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}$, cu $C\in\mathbb{R}$.

Pentru x=1 avem $f(x)=Ce^{1/2}=2$ deci $C=2e^{-1/2}$ şi soluţia este

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2e^{\frac{x^2-1}{2}}.$$

-- Dacă $m\neq 0$ variem constanta C:

$$y'=Ce^{\frac{x^2}{2}}+xCe^{\frac{x^2}{2}}=xCe^{\frac{x^2}{2}}+m\Rightarrow C'(x)=me^{-\frac{x^2}{2}}$$

deci $C(x)=m\int e^{-x^2/2}dx$. Scriem $C=P+H$, unde $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $x\to e^{-x^2/2}$ pe $\mathbb{R}$ şi $H\in\mathbb{R}$ care rezultă din f(1)=2.

c) Ecuaţii diferenţiale de ordin superior (sub formă explicită). Ecuaţii liniare de ordinul doi

Vom considera un număr natural $n\geq 2$ şi o mulţime $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, D deschisă. Fie şi $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie.

O soluţie a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{4}$$

este o funcţie de n ori derivabilă $f:I\to\mathbb{R}$ (unde $I\subset\mathbb{R}$ este interval deschis) având proprietatea că pentru orice $x\in I$ avem

$(x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x))\in D$ şi $f^{(n)}(x)=F(x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x))$.

Considerăm şi un punct $(x_0,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})\in D$. A rezolva **problema Cauchy**

$$\begin{cases} y^{(n)}=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

înseamnă a găsi o soluţie $f:I\to\mathbb{R}$ a ecuaţiei (1) care satisface în plus condiţiile

$$f(x_0)=y_0,\ f'(x_0)=y_1,\ldots,f^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de un singur tip de ecuaţii de ordinul 2.

Ecuaţii liniare şi omogene de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

Vom considera două numere reale *a* şi *b*. În (4) luăm $D=\mathbb{R}^3$ şi $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dată prin

$$F(x,y,y')=ay'+by$$

Aşadar, luăm în cazul *n*=2 şi dorim să rezolvăm ecuaţiile diferenţiale de ordinul 2 de forma

$$y''=ay'+by \tag{6}$$

numite **ecuaţii diferenţiale lineare şi omogene cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea**.

Vom arăta cum putem determina soluţiile generale ale ecuaţiilor de tip (6) şi cum putem rezolva problema Cauchy :

$$y''=ay'+by;\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1 \tag{7}$$

pentru x_0, y_0, y_1 arbitrare.

Totul se bazează pe ecuaţia algebrică:

$$\lambda^2=a\lambda+b \tag{8}$$

numită **ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (6)**.

Avem **trei situaţii distincte**.

A) Cazul când (8) are două rădăcini reale distincte λ_1 şi λ_2

În acest caz o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei (6) dacă şi numai dacă există două constante reale C_1 şi C_2 cu proprietatea că

$$f(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{9}$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

Se arată că problema Cauchy (7) **are soluţie unică** pentru orice

x_0, y_0, y_1 în $\mathbb{R}$, adică există în mod unic constantele C_1 şi C_2 reale aşa ca $f(x_0)=y_0$ şi $f'(x_0)=y_1$, unde *f* este dat de (9).

Exemplu. Să considerăm problema Cauchy

$$y''=3y'-2y;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2=3\lambda-2$$

cu soluţiile $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

O soluţie oarecare este deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

Avem $f'(x)=C_1e^x+2C_2e^{2x}$.

Rezolvarea problemei Cauchy revine la găsirea constantelor C_1 şi C_2

pentru care:

$$\begin{cases} f(0)=C_1+C_2=1 \\ f'(0)=C_1+2C_2=1 \end{cases},$$

deci $C_1 = 1,\ C_2 = 0$.

Soluţia problemei Cauchy este funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

B) **Cazul când (8) are rădăcină dublă $\lambda_1=\lambda_2=\rho$**

În acest caz o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei (6) dacă şi numai dacă există două constante reale C_1 şi C_2 cu proprietatea că pentru orice $t\in \mathbb{R}$ avem:

$$f(t) = C_1e^{\rho t} + C_2te^{\rho t}.$$

Şi în acest caz problema Cauchy (7) are soluţie unică, în acelaşi sens cu cel de la *A*).

Exemplu. Să rezolvăm problema Cauchy:

$$y'' = 2y' - y;\qquad y(1) = 0,\qquad y'(1) = 1.$$

Ecuaţia caracteristică $\lambda^2=2\lambda-1$ are soluţia dublă $\rho=1$. Deci, o soluţie oarecare este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = C_1e^x + C_2xe^x$.

Soluţia problemei Cauchy rezultă din condiţiile:

$$\begin{cases} f(1) = C_1e + C_2e = 0 \\ f'(1) = C_1e + 2C_2e = 1 \end{cases},$$

Deci $C_1 = -\dfrac{1}{e}$ şi $C_2 = \dfrac{1}{e}$.

Funcţia soluţie este deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1}(x-1)$.

c) **Cazul când (8) are două rădăcini nereale distincte $\alpha=i\beta$, $\alpha+i\beta$, cu $\beta\neq 0$.**

În acest caz o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei (6) dacă şi numai dacă există două constante reale C_1 şi C_2 cu proprietatea că

$f(t) = C_1e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2e^{\alpha t}\sin\beta t$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Şi în acest caz problema Cauchy are soluţie unică.

Exemplu. Să rezolvăm problema Cauchy

$$y'' = 2y' - 2y;\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ecuaţia caracteristică $\lambda^2=2\lambda-2$ are rădăcinile $1-i$ şi $1+i$. Deci o soluţie oarecare este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$.

Soluţia particulară (soluţia problemei Cauchy) rezultă din condiţiile

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_2e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -C_1e^{\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow C_1 = -e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Funcţia soluţie este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -e^{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cos x$.

Test de autoevaluare 15

1. Să se rezolve problema Caucy:

$$y' = \frac{y}{x^2}, \quad y(2) = 2.$$

Răspunsurile la test se vor da în spaţiul liber din chenar, în continuarea enunţurilor.

2. Să se rezolve problema Caucy:

$$y'' = 4y' - 3y, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 3.$$

Răspunsurile la acest test se găsesc la pagina 227 a acestei unităţi de învăţare.

3.10. Comentarii şi răspunsuri la testele de autoevaluare

Test 1

1. a) Să presupunem că pentru o orice permutare p şirul $(x_{p(n)})_n$ tinde către a_0, luând în particular, permutarea p dată prin $p(n)=n$ pentru orice *n, rezultă că sirul* $(x_{p(n)})_n$ tinde către a_0.

b) Presupunem că x_n are ca limită pe a_0. Să considerăm o permutare $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Fie V o vecinătate a punctului a_0. Putem găsi $n(V)$ cu proprietatea că $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n(V)$. Deoarece p este surjecţie, putem găsi $N(V)$ cu proprietatea $p(A)\supset\{0,1,2,\ldots,n(V)\}$, unde $A=\{0,1,2,\ldots,N(V)\}$.

Atunci, pentru orice $n \geq N(V)+1$ avem $p(n)>n(V)$ (deoarece p este injecţie), ceea ce implică $x_{p(n)} \in V$. Am arătat că $x_{p(n)}$ tinde către a_0.

2. Dacă $|t|>1$, rezultă că $|x_n|=|t|^n \xrightarrow[n]{} \infty$, deci şirul $(x_n)_n$ este divergent, fiind nemărginit.

Dacă $t=1$ avem $x_n=(-1)^n$, deci şirul $(x_n)_n$ este divergent, alternând valorile 1 şi –1.

Dacă $t=-1$ avem $x_n=(-1)^n\cdot(-1)^n=1$ pentru orice *n,* deci şirul $(x_n)_n$ este convergent.

Dacă $t<1$ avem $|x_n|=|t|^n \xrightarrow[n]{} 0$, deci şirul $(x_n)_n$ este convergent către 0.

Test 2

1. Este o serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2}$ din care lipseşte primul termen (egal cu 1). Suma seriei geometrice:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$

este:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Deci suma seriei noastre este 2– 1=1.

(Variantă:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\xrightarrow[n]{}1.$$

2. Numărul studiat este suma seriei zecimale **neperiodice** (cu termeni din ce în ce mai rarefiaţi)

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^7}+\ldots+\frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}+1}}+\ldots,$$

Test 3

1. Evident f este continuă în $x=0$ (este funcţie elementară, deci $\lim_{x\to\infty} f(x)=f(a)$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$).

Pentru funcţia g, avem:

– Dacă $0<x<1$, $g(x)=[x]=0$ deci $\lim_{x\searrow 0} g(x)=0$.

– Dacă $-1<x<0$, $g(x)=[x]=-1$ deci $\lim_{x\nearrow 0} g(x)=-1$.

Prin urmare, g este discontinuă în 0.

2. Avem funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$

Test 4

Avem funcţiile $f,g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x-\sin x$ şi $g(x)=x^3$. Se cere să calculăm

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Evident, $g(x)\neq 0$ pentru $x\neq 0$, deci enunţul are sens.

Aici $I=\mathbb{R}$, $a=0$, $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$ şi $g'(x)=3x^2\neq 0$ pentru $x\neq 0$.

În plus:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

La testul de autoevaluare (3) am calculat

$$\lim_{x\to 0}=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

deci limita cerută este $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

2. Aplicăm formula de derivare:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2},$$

deci:

$$\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\right)' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot(x^2+1)-\left(\ln(x^2+1)\right)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\left(1-\ln(x^2+1)\right)}{(x^2+1)^2}$$

Test 5

1. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x =$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Facemem schimbarea de variabilă

$$\begin{array}{lcl} x^2+1=t & \Rightarrow & x=0,\quad t=1 \\ \quad\Downarrow & & x=1,\quad t=2 \\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & & \end{array}$$

Atunci $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2$.

Integrala propusă este egală cu:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

2. Funcţia care trebuie integrată este continuă pe porţiuni. Cu teoria prezentată, integrala căutată este:

$$\int_{-1}^0 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 1\right) = \frac{-1+\ln 3}{2}$$

cu schimbarea de variabilă $2x+1=t$.

Test 6

1. Avem $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$ şi $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|x^3\right|$. Atunci $f\le g$ (revine la a spune că $|x|^4 \le |x|^3$).

Deoarece $g(x)=-x^3$, dacă $-1\le x\le 0$ şi $g(x)=x^3$, dacă $0<x\le 1$, vom avea:

$$\text{aria}\, S(f,g) = \int_{-1}^1 \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^0 \left(-x^3-x^4\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x^3-x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

2. volum $V(f) = \pi\int_a^b \left(x^n\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_a^b (x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n+1}\left(b^{2n+1}-a^{2n+1}\right).$

Test 7

1. $\left|\frac{3n+1}{n+1}-3\right|=\left|-\frac{2}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}$.

Trebuie să avem

$$\frac{2}{n+1}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow\frac{n+1}{2}>100\Leftrightarrow n+1>200\Leftrightarrow n>199.$$

Aşadar, putem lua $n_0=200$.

2. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Avem $f''(x)=6x\le 6$. Putem lua $M=6$. Trebuie să avem:

$$\frac{6}{12n^2}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow n^2>5\Leftrightarrow n\ge 3.$$

Putem lua $n=3$. Obţinem:

$$T_3(f)=\frac{1}{6}\left(f(0)+f(1)+2\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+2\left(\frac{1}{27}+\frac{8}{27}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{18}\approx 0{,}27$$

Test 8

1. Întâi presupunem că $x_n\xrightarrow[n]{}x$, în (X,d), deci $d(x_n,x)\xrightarrow[n]{}0$. Atunci, pentru orice *n* avem:

$$\delta(x_n,x)\le bd(x_n,x)\xrightarrow[n]{}0,$$

deci $\delta(x_n,x)\xrightarrow[n]{}0$, adică $x_n\xrightarrow[n]{}x$ în (X,δ).

Invers, dacă $x_n\xrightarrow[n]{}x$ în (X,δ), vom folosi inegalitatea:

$$d(x_n,x)\xrightarrow[n]{}\frac{1}{a}\delta(x_n,x).$$

2. Şirurile vor fi numerotate începând cu $n=1$. Şirul $(x_n)_n$ este Cauchy, unde:

$$x_n=\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots,0,\ldots\right),$$

deoarece, pentru $\varepsilon>0$ dat şi $m>n\ge n(\varepsilon)=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ avem:

$$\|x_m-x_n\|=\left\|\left(0,0,\ldots,0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{1}{m},0,0,\ldots\right)\right\|<\varepsilon$$

Dacă ar exista, prin absurd, $\lim_n x_n=x$, unde $x=(a_1,a_2,\ldots,a_p,0,0,\ldots)$, am avea pentru orice $n>p$:

$$\| x_n - x \| = \left\| \left(\frac{1}{1} - a_1, \frac{1}{2} - a_2, \ldots, \frac{1}{p} - a_p, \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right) \right\|,$$

deci

$$\| x_n - x \| \geq \frac{1}{p+1} = \text{ număr fix etc.}$$

Test 9

1. Avem funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$ şi trebuie să arătăm că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sin x$.

Dacă ar exista limite de mai sus şi ar fi egală cu *l*, atunci am avea $\lim\limits_{n} \sin x_n = l$ pentru orice şir $x_n \xrightarrow[n]{} \infty$ (definiţia cu şiruri a limitei).

Pentru $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ avem, însă, $\lim\limits_{n} \sin x_n = 1$ şi pentru $x_n = n\pi$ avem $\lim\limits_{n} \sin x_n = 0$.

Test 10

1. Avem, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$:

$$f'(t) = (-n \sin t (\cos t)^{n-1}, n(\sin t)^{n-1} \cos t).$$

2. Vom scrie

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - (x+1)^{-1}.$$

Atunci:

$$f'(x) = (x+1)^{-2},$$

$$f''(x) = (-2)(x+1)^{-3},$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot (x+1)^{-4},$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n! (x+1)^{-n-1}.$$

Test 11

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \dfrac{a^3}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(a,b) =$$

$$= \left.\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{3a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(a,b) = -3a^3b(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3a^3}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1^3}{(1^2+2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

2. Pentru $z \neq -1$, avem:

$$\frac{z}{z+1} = \frac{z+1-1}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}.$$

Avem (v. testul (10)):

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} n!(z+1)^{-n-1},$$

deci $f^{(n)}(i) = (-1)^{n-1} n!(i+1)^{-n-1}$, deci:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}(i+1)^{-n-1}(z-i)^n.$$

pentru $|z-i| < |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$ (v. şi teoria).

Test 12

Pentru $0 < \lambda < 1$, avem:

$$\int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\lambda} = -2\sqrt{1-\lambda} + 2 \xrightarrow[\lambda\to 1]{} 2,$$

deci $\int_0^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = 2$

2. a) Dacă $1 < \lambda < \infty$, avem:

$$\int_0^{\lambda} e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^{\lambda} = e^{-\lambda} + 1 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 1$$

deci $\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

b) Dacă $1 < \lambda < \infty$, avem:

$$\int_0^{\lambda} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{1} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{\lambda} e^{-x^2}\mathrm{d}x = A + \int_1^{\lambda} e^{-x^2}\mathrm{d}x < A + \int_1^{\lambda} e^{-x}\mathrm{d}x$$

deoarece $x^2 > x$ pentru $x > 1$.

Deoarece $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_1^{\lambda} e^{-x}\mathrm{d}x$ există şi este finită (vezi şi a)), rezultă că există şi este finită $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_1^{\lambda} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ etc.

Test 13

1. $$\int_\gamma x\mathrm{d}l=\int_0^1 t\sqrt{1+(2t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\cdot(1+4t^2)'\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{8}\int_1^5\sqrt{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^5=\frac{1}{12}(5^{3/2}-1),$$

cu schimbarea de variabilă $1+4t^2=u$.

2. $$\int_\gamma x\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\cos t(-\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t)'\,\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}(\cos t)^2\cdot(\cos t)'\mathrm{d}t=\int_1^1 u\mathrm{d}u-\int_1^1 u^2\mathrm{d}u=0,$$

cu schimbarea de varibilă $\cos t=u$

Test 14

1. $$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x\right)\left(\int_2^4 y\mathrm{d}y\right)=\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_2^4\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(16-4)=3.$$

2. Mulţimea D este domeniu simplu în raport cu Oy, generat de funcţiile $u:[0,1]\to\mathbb{R}$, $u(x)=0$ şi $v:[0,1]\to\mathbb{R}$, $v(x)=1-x$ (se determină y din ecuaţia $x+y=1$).

Integrala căutată este deci:

$$\int_0^1\left(\int_{u(x)}^{v(x)}x^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Test 15

1. Avem problema Cauchy:

$$y'=a(x)b(y)=\frac{1}{x^2}y,\quad y(2)=2,$$

unde $a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $a(x)=\dfrac{1}{x^2}$ şi $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b(y)=y$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}y\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2}\Leftrightarrow\ln|y|=-\frac{1}{x}+C.$$

Deoarece $y(2)=2>0$ avem: $|y|=y>0$, deci

$$\ln y=-\frac{1}{x}+C \qquad (1)$$

Din (1): $x=2\Rightarrow y=2$, deci $\ln 2=-\dfrac{1}{2}+C\Rightarrow C=\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Tot din (1) obţinem $y = e^{-\frac{1}{x}+C}$, deci soluţia este:

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}+\ln 2+\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$.

2. Avem ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 = 4\lambda - 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

cu soluţiile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Soluţia generală este dată de

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}.$$

$$y'(x) = Ae^x + 3Be^{3x} \text{ şi atunci:}$$

$$y(0) = A + B = 1,\quad y'(0) = A + 3B = 3,$$

deci $A = 0$, $B = 1$. Soluţie este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x}$.

2.11. Lucrare de verificare pentru studenţi

Indicaţii de redactare. Problemele se vor rezolva în ordinea din textul enunţului. Rezolvările se vor expedia pe adresa tutorelui.

1 punct din oficiu

1 p **1.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul $(x_n)_n$ definit prin:

$$x_n = \frac{(a^2 - 3a + 2)n^3 + n^2 + 1}{an^2 + n + 1}$$

să aibă proprietatea că $\lim\limits_{n} x_n = 1$.

1 p **2.** Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

1 p **3.** Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1 p **4.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

are derivate parţiale în toate punctele $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ şi să se calculeze aceste derivate parţiale

1 p **5.** Să se calculeze:

$$\int_\gamma x^2 \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y \,,$$

unde $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ este definit prin $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

1 p **6.** Să se calculeze:

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

unde $D = [0,1] \times [0,2]$.

1 p **7.** Să se rezolve problema Cauchy:

$$y' = (x+1)y^2, \qquad y(0) = 1.$$

1 p **8.** Fie p un număr prim. Pentru orice număr natural nenul n definim $u_p(n) =$ exponentul lui p în descompunerea unică a lui n în factori primi (de exemplu:

$$u_3(6) = u_3(2 \cdot 3) = 1,\ u_3(9) = u_3(3^2) = 2\,,\ u_3(10) = u_3(2 \cdot 5) = 0\,).$$

Pentru orice număr raţional nenul $x = \dfrac{m}{n}$ definim:

$$v_p(x) = u_p(|\, m\,|) - u_p(|\, n\,|)$$

a) Arătaţi că $v_p(x)$ depinde numai de x şi nu depinde de reprezentarea lui x ca fracţie de forma $x = \dfrac{m}{n}$.

b) Pentru orice două numere raţionale x şi y definim:

$$\delta_p(x,y) = \begin{cases} v_p(x-y), & \text{dacă} \quad x \neq y \\ 0, & \text{dacă} \quad x = y \end{cases}$$

şi fie $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definită prin $d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$. Arătaţi că d_p este o distanţă (numită **distanţa p–adică**).

1 p **9.** Fie a şi b două numere strict pozitive. Arătaţi că funcţia $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $M(x,y) = a\,|\,x\,| + b\,|\,y\,|$, este o normă pe $\mathbb{R}^2$.

2.12. Bibliografie

1. Manualele de matematică în vigoare pentru clasele XI şi XII.
2. L. Aramă, T. Morozan. *Culegere de probleme de analiză matematică pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1996.
3. L. Aramă, T. Morozan. *Culegere de probleme calcul diferenţial şi integral*, vol. I, ed. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.
4. Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, vol. II, 1966 şi vol. III, 1967, Editura Tehnică, Bucureşti.
5. I. Chiţescu, P. Alexandrescu, M. Rădulescu, S. Rădulescu, *Analiză matematică, clasa a XII-a*, Colecţia „Mate 2000”, Editura Paralela 45, Piteşti, 1997.
6. I. Colojoară, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
7. N. Dinculeanu, S. Marcus, M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. I, ed. a V-a, 1980 şi vol. II, ed. a III-a, 1980, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti
8. G. M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. I 1963, vol. II 1964, vol. III 1965, Editura Tehnică, Bucureşti
9. D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

Bibliografie

1. Manualele de matematică în vigoare pentru clasele XI şi XII.
2. L. Aramă, T. Morozan. *Culegere de probleme de analiză matematică pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1996.
3. L. Aramă, T. Morozan. *Culegere de probleme calcul diferenţial şi integral,* vol. I, ed. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.
4. Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral,* vol. II, 1966 şi vol. III, 1967, Editura Tehnică, Bucureşti.
5. I. Chiţescu, P. Alexandrescu, M. Rădulescu, S. Rădulescu, *Analiză matematică, clasa a XII-a*, Colecţia „Mate 2000", Editura Paralela 45, Piteşti, 1997.
6. I. Colojoară, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
7. I. Creangă, C. Reischer, *Algebră liniară*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.
8. N. Dinculeanu, S. Marcus, M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. I, ed. a V-a, 1980 şi vol. II, ed. a III-a, 1980, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti
9. G. M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. I 1963, vol. II 1964, vol. III 1965, Editura Tehnică, Bucureşti
10. **1.** H. Ikramov: *Recueil de problèmes d' algèbre linéaire*. Editions MIR Moscou, 1977.
11. I. D. Ion, N. Radu: *Algebră*, ed. III, Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.
12. I. D. Ion, C. Niţă, D. Popescu, N. Radu: *Probleme de algebră*. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.
13. D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
14. A. Kurosh: *Cours d' Algèbre superieure*, Ed. MIR, Moscou, 1973.
15. C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu: *Bazele algebrei, vol. I* Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1986.
16. C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Brandiburu, D. Joiţa: *Culegere de probleme pentru liceu. Algebra, clasele IX-XII.* Ed. Rotech Pro. Bucureşti, 2004.
17. C. Năstăsescu, M. Ţena, G. Andrei, I. Otărăşanu: *Probleme de structuri algebrice.* Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1988.
18. C. Năstăsescu, M. Ţena, I. Otărăşanu, G. Andrei: *Probleme de algebră pentru clasa a XII-a.* Ed. Rotech Pro. Bucureşti, 1997.
19. C. Niţă, T. Spircu: *Probleme de structuri algebrice.* Ed. Tehnică. Bucureşti, 1974.
20. O. Stănăşilă: *Analiză liniară şi Geometrie*, Ed. All, Bucureşti, 2000.
21. I. Gh. Şabac: *Matematici speciale*, vol. I. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1981.
22. G. Şilov: *Analiză matematică* (spaţii finit dimensionale) Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică. Bucureşti, 1983.
23. B. L. Van der Waerden: *Algebra*, achte Auflage. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New Yok, 1971.
24. V. Voïévodine: *Algèbre linéaire*. Editions MIR. Moscou, 1976.

UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE
AMPOSDRU

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013

Instrumente Structurale
2007-2013

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
UMPFE

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Investeşte în oameni!

Formarea profesională a cadrelor didactice din învăţământul preuniversitar pentru noi oportunităţi de dezvoltare în carieră

MERGI MAI DEPARTE ...

O NOUĂ SPECIALIZARE, ŞANSA TA!

Unitatea de Management al Proiectelor cu Finanţare Externă

Str. Spiru Haret nr. 12, Etaj 2,
Sector 1, Cod poştal 010176,
Bucureşti

Tel: 021 305 59 99
Fax: 021 305 59 89

http://conversii.pmu.ro
e-mail: conversii@pmu.ro

ISBN 973-0-04125-3