JENICĂ CRÎNGANU

ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE

“Dunărea de Jos” Galați

JENICĂ CRÎNGANU

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Conf.dr. JENICĂ CRÎNGANU

ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE
“Dunărea de Jos” Galați, 2006

Referent ştiinţific:

Conf.univ.dr. Petru Vâţă

Universitatea "Dunărea de Jos" Galaţi

C U P R I N S

P R E F A Ț Ă

Lucrarea de față reprezintă o variantă îmbunătățită a cursului publicat anterior de catre autor. Ea prezintă noțiuni fundamentale ale analizei matematice cum ar fi cele de limită, continuitate, diferențiabilitate, integrabilitate, etc.

Acest material reprezintă rodul activității universitare din ultimii ani, cursuri ținute la diferite facultăți ale Universității “Dunărea de Jos” din Galați, de către autor.

Pentru o mai bună înțelegere a chestiunilor teoretice, cartea are numeroase observații, exemple, probleme propuse spre rezolvare şi probleme rezolvate.

Prezentul curs se adresează studenților din anul I ai facultăților cu profil tehnic şi universitar, profesorilor din licee care îşi pregătesc examenele de definitivare sau grad, cât şi tuturor celor care doresc să învețe şi să aprofundeze matematica modernă a zilelor noastre.

Tuturor cititorilor mei, studenți, profesori de matematica, ingineri, interesați de rezolvarea unor probleme matematice, autorul le urează lectură interesantă şi să găsească în paginile lucrării ceea îşi doresc.

În încheiere, țin să exprim mulțumiri domnilor conf.dr. Petru Vâță şi conf.dr. Ion Mirică, pentru răbdarea şi atenția cu care au citit întregul manuscris, făcând observații utile, de care am ținut seama în redactarea finală a lucrării.

Autorul rămâne îndatorat tuturor acelora care îi vor trimite sugestii, alte puncte de vedere sau vor avea amabilitatea de a-i semnala eventualele erori structurate în lucrare.

Galați, septembrie, 2006 **J. Crînganu**

Referenți ştiințifici :

Conf. univ. dr. Petru Vâță

Conf. univ. dr. Ion Mirică

Universitatea “Dunărea de Jos” Galați

CAPITOLUL 1

MULȚIMI. RELAȚII. FUNCȚII

Fie X, Y două mulțimi nevide şi $X \times Y = \{ (x,y): x\in X,\ y\in Y \}$, produsul lor cartezian.

Definiția 1.1. Se numeşte relație binară între elementele mulțimilor X şi Y tripletul $\rho = (X,Y,G_\rho)$, unde $G_\rho \subset X \times Y$ se numeşte graficul relației ρ.

Dacă $(x,y) \in G_\rho$ spunem că x este în relația ρ cu y şi scriem $x\rho y$.

Se numeşte domeniu al relației ρ multimea

$D(\rho) = \{ x\in X : (\exists) y\in Y$ astfel încât $(x,y)\in G_\rho \}$.

Se numeşte codomeniu al relației ρ mulțimea

$Im(\rho) = \{ y\in Y : (\exists) x\in X$ astfel încât $(x,y)\in G_\rho \}$.

Dacă $X = Y$ atunci ρ se numeşte relație binară pe X (sau relație pe X).

Dintre relațiile definite între elementele aceleiaşi mulțimi se disting relațiile de echivalența şi de ordine.

Definiția 1.2. Fie $X \neq \emptyset$. O relație ρ pe X se numeşte relație de echivalență dacă

(E_1) ρ este reflexivă: $(\forall)\ x\in X \Rightarrow x\rho x$;

(E_2) ρ este simetrică: $(\forall)\ x, y\in X$ astfel încât $x\rho y \Rightarrow y\rho x$;

(E_3) ρ este tranzitivă: $(\forall)\ x, y, z \in X$ astfel încât $x\rho y$ şi $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Dacă $x\in X$ definim

$C_x = \{ y\in X : y\rho x \}$ – clasa de echivalență a lui x.

Din definiție rezultă imediat următoarele proprietăți ale claselor de echivalență:

1. $(\forall)x\in X \Rightarrow C_x \neq \emptyset$;

2. dacă $x, y\in X$, $x \not\rho y \Rightarrow C_x \cap C_y = \emptyset$;

3. $x\rho y \Leftrightarrow C_x = C_y$;

4. $\bigcup_{x\in X} C_x = X$.

Mulțimea notată $X/\rho = \{ C_x : x \in X \}$ se numeşte mulțimea claselor de echivalență.

Definiția 1.3. O relație ρ pe X, notată "$\leq$" se numeşte relație de ordine pe X dacă

(O_1) "$\leq$" este reflexivă: $(\forall)\ x \in X \Rightarrow x \leq x$;

(O_2) "$\leq$" este antisimetrică: $(\forall)\ x,y \in X$ astfel încât $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$;

(O_3) "$\leq$" este tranzitivă: $(\forall)\ x,y,z \in X$ astfel încât $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Perechea $(X, \leq)$ se numeşte mulțime ordonată.

Dacă $(\forall)\ x,y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$, relația de ordine se numeşte relație de ordine totală, iar $(X, \leq)$ mulțime total ordonată.

Exemple.

1. Dacă $X \neq \emptyset$ atunci relația de incluziune este o relație de ordine pe mulțimea părților lui X, mulțime notată cu P(X).
2. $(N^*, \mid)$ ("$\mid$" relația de divizibilitate) este ordonată dar nu este total ordonată.

Definiția 1.4. Fie $(X , \leq)$ o mulțime ordonată şi $A \subset X$, nevidă.

Un element $m \in X$ se numeşte minorant pentru A dacă $m \leq x$, $(\forall) x \in A$.

Un element $M \in X$ se numeşte majorant pentru A dacă $x \leq M$, $(\forall) x \in A$.

Dacă $m \in X$ este minorant şi $m \in A$ atunci m se numeşte cel mai mic element al mulțimii A şi se notează $m = \min A$.

Dacă $M \in X$ este majorant şi $M \in A$ atunci M se numeşte cel mai mare element al mulțimii A şi se notează $M = \max A$.

Observație. Dacă A are un cel mai mic (respectiv cel mai mare) element, din proprietatea de antisimetrie rezultă că acesta este unic.

Dacă submulțimea $A \subset X$ are minoranți (respectiv majoranți) spunem că A este minorată sau mărginită inferior (respectiv majorată sau mărginită superior). Mulțimea A se numeşte mărginită dacă este minorată şi majorată.

Definiția 1.5. Dacă A admite minoranți (respectiv majoranți) şi mulțimea minoranților (respectiv a majoranților) lui A are un cel mai mic (respectiv cel mai mare) element, acesta se numeşte margine inferioară sau infimum (respectiv margine superioară sau supremum) şi se notează infA (respectiv supA).

Observații.

1. Dacă există infA (respectiv supA), din proprietatea de antisimetrie rezultă că acesta este unic.

2. Dacă A are un cel mai mic (respectiv cel mai mare) element atunci există infA = minA (respectiv supA = maxA).

Mulțimea numerelor reale

Pornind de la mulțimea numerelor naturale **N** = { 0,1,2,…} se poate face o construcție riguroasă a mulțimilor **Z** şi **Q** (vezi [7]):

Z = { 0,±1, ±2,…} - mulțimea numerelor întregi.

Q = { $\frac{m}{n}$: m,n∈**Z**, n ≠ 0 } - mulțimea numerelor raționale.

Pentru mulțimea numerelor reale, notată cu **R** vom prezenta o construcție axiomatică.

Definiția 1.6. Numim mulțimea numerelor reale o mulțime **R** înzestrată cu două operații algebrice:

"+" – adunarea, $(x,y) \to x + y \in$ **R**;

"•" – înmulțirea, $(x,y) \to xy \in$ **R**;

şi cu o relație de ordine totală "≤" care satisfac următoarele grupe de axiome

I (**R**,+,·) este corp comutativ, adică

1) (∀) x,y,z∈**R** ⇒ (x+y)+z = x+(y+z);

2) (∀) x,y∈**R** ⇒ x+ y = y+ x;

3) (∃) 0∈**R** astfel încât 0+ x = x, (∀)x∈**R**;

4) (∀) x∈**R**, (∃)x' = -x∈**R** astfel încât x+ (-x) = 0;

5) (∀) x,y,z∈**R** ⇒ (xy)z = x(yz);

6) $(\forall)\ x,y\in \mathbf{R} \Rightarrow xy = yx$.

7) $(\exists)\ 1\in \mathbf{R}$, $1 \neq 0$ astfel încât $1\cdot x = x$, $(\forall)x\in \mathbf{R}$;

8) $(\forall)\ x\in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, $(\exists)x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$;

9) $(\forall)\ x,y,z\in \mathbf{R} \Rightarrow x(y+z) = xy+ xz$.

II $(\mathbf{R}, \leq)$ este total ordonată şi relația “≤” este compatibilă cu structura de corp, adică:

10) $(\forall)\ x\in \mathbf{R} \Rightarrow x \leq x$;

11) $(\forall)\ x,y\in \mathbf{R}$ astfel încât $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$;

12) $(\forall)\ x,y,z\in \mathbf{R}$ astfel încât $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

13) $(\forall)\ x,y\in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$;

14) $(\forall)\ x,y,z\in \mathbf{R}$ cu $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;

15) $(\forall)\ x,y,z\in \mathbf{R}$ cu $x \leq y$ şi $0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$.

III Axioma de completitudine a lui Cantor-Dedekind:

Pentru orice submulțime $A \subset \mathbf{R}$, nevidă şi majorată există margine superioară, $\sup A\in \mathbf{R}$.

Observații.

1. Pentru $(\forall)x,y\in \mathbf{R}$ definim $x-y = x+(-y)$ iar dacă, în plus, $y \neq 0$ atunci $\frac{x}{y} = xy^{-1}$.

2. Din axiomele lui **R**, cum $1\in \mathbf{R}$ rezultă că şi elementele $2=1+1$, $3=(1+1)+1,\ldots$ vor aparține lui **R**. Aceste elemente le vom numi numere naturale iar mulțimea lor o vom nota cu **N**.

Dacă $n\in \mathbf{N}$ atunci $-n\in \mathbf{R}$ şi mulțimea elementelor $0,1,-1,2,-2,\ldots$ o vom nota cu **Z** şi se numeşte mulțimea numerelor întregi.

Dacă $x,y\in \mathbf{Z}$, $y \neq 0$, atunci $xy^{-1}\in \mathbf{R}$ iar mulțimea elementelor de forma xy^{-1} cu $x,y\in \mathbf{Z}$, $y \neq 0$ o vom numi mulțimea numerelor raționale şi o vom nota cu **Q**.

Să observăm că **N** Ì **Z** Ì **Q** Ì **R**.

3. Relației de ordine “≤” i se poate ataşa relația “<”, numită de ordine strictă şi definită astfel: $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ şi $x \neq y$, $(\forall)x,y\in \mathbf{R}$.

De asemenea, dacă $x < y$(respectiv $x \leq y$), mai scriem $y > x$ (respectiv $y\geq x$).

Numerele reale x pentru care $x \geq 0$(respectiv $x > 0$) se vor numi numere pozitive(respectiv strict pozitive), iar numerele reale x pentru care $x \leq 0$ (respectiv $x < 0$), se vor numi numere negative (respectiv strict negative).

Vom nota prin

$\mathbf{R}_+$ - mulțimea numerelor reale pozitive;

$\mathbf{R}_+^*$ - mulțimea numerelor reale strict pozitive;

$\mathbf{R}_-$ - mulțimea numerelor reale negative;

$\mathbf{R}_-^*$ - mulțimea numerelor reale strict negative.

Atunci $\mathbf{R} = \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}_- = \{0\}$.

Dacă a, b$\in$**R**, a < b definim mulțimile

$(a,b) = \{ x\in \mathbf{R} : a < x < b \}$;

$[a,b] = \{ x\in \mathbf{R} : a \leq x \leq b \}$;

$[a,b) = \{ x\in \mathbf{R} : a \leq x < b \}$;

$(a,b] = \{ x\in \mathbf{R} : a < x \leq b \}$, numite şi intervale mărginite.

Prin definiție $(a,a) = [a,a) = (a,a] = \emptyset$, $[a,a] = \{a\}$.

Pe **R** se mai definesc şi următoarele tipuri de intervale nemărginite:

$(-\infty,a) = \{ x\in \mathbf{R} : x < a\}$, $(-\infty,a] = \{ x\in \mathbf{R} : x \leq a\}$;

$(a,\infty) = \{ x\in \mathbf{R} : x > a\}$, $[a,\infty) = \{ x\in \mathbf{R} : x \geq a\}$.

O mulțime $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ se numeşte interval dacă pentru $(\forall)$ a,b$\in$**I** şi $a\leq c \leq b \Rightarrow c \in \mathbf{I}$.

Pentru orice număr real x definim modulul sau valoarea absolută a lui x, notat |x|, prin

$$|x| = \begin{cases} x, \text{daca } x \geq 0 \\ -x, \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Din axioma lui Cantor-Dedekind şi definiția marginii superioare (respectiv inferioare) obținem urmatoarele două teoreme:

Teorema1.1. Fie $A \subset \mathbf{R}$ nevidă şi mărginită.

Atunci $(\exists)$ M = supA $\in$ **R** şi este caracterizat astfel :

i) $x \leq M$, $(\forall)$ $x\in A$;

ii) $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $x_\varepsilon \in A$ asfel încât $x_\varepsilon > M-\varepsilon$.

Teorema1.2. Fie $A \subset \mathbf{R}$ nevidă şi minorată.

Atunci $(\exists)$ $m = \inf A \in \mathbf{R}$ şi este caracterizat astfel:

i) $m \le x$, $(\forall)$ $x \in A$;

ii) $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Următoarea teoremă este cunoscută şi sub numele de proprietatea lui Arhimede:

Teorema1.3. Dacă $x > 0$ şi $y > 0$ atunci există $n \in \mathbf{N}^*$ asfel încât $nx > y$.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd ca $nx \le y$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$.

Fie $A=\{nx\text{: } n \in \mathbf{N}^*\}$. Atunci A este nevidă şi majorată şi din teorema 1.1 există $M = \sup A \in \mathbf{R}$. Pentru $\varepsilon = x > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M-x < x_\varepsilon \le M$.

Cum $x_\varepsilon \in A$, există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x_\varepsilon = n_0 x$ şi atunci vom avea $M-x < n_0 x \le M$, de unde $M < (n_0+1)x \in A$, care contrazice faptul că $M = \sup A$. ■

Observație. Mulțimea numerelor reale se mai numeşte şi dreapta reală, deoarece se poate stabili o corespondenta bijectivă (bijecția lui Descartes) între elementele lui **R** şi mulțimea punctelor de pe o dreaptă.

Fie $A \subset \mathbf{R}$ nevidă.

Dacă A nu admite majoranți, prin definiție $\sup A = +\infty$.

Dacă A nu admite minoranți, prin definiție $\inf A = -\infty$.

Definim $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi vom numi aceasta mulțime dreapta reală încheiată (sau mulțimea extinsă a numerelor reale).

Relația de ordine uzuală din **R** se extinde pe $\overline{R}$ prin convențiile

$$-\infty < +\infty\ ,\quad -\infty < x\ ,\quad x < +\infty,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

In felul acesta $\overline{R}$ devine total ordonată şi orice submulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ are atât supremum cât si infimum.

Operațiile algebrice ale mulțimii **R** se extind la $\overline{R}$ fără a fi însă peste tot definite.

Astfel se definesc:

$$\infty + x = x + \infty = \infty,\ (\forall)x \in \overline{R},\ x \ne -\infty;$$

$$-\infty + x = x + (-\infty) = -\infty,\ (\forall)\ x \in \overline{R},\ x \neq +\infty;$$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, \text{daca } x > 0 \\ -\infty, \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Nu sunt definite operațiile:

$$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty^0,\ \text{etc}\ldots$$

Dacă $a,b \in \overline{R}, a < b$ se definesc în $\overline{R}$ următoarele tipuri de intervale:

$(a,b) = \{ x \in \overline{R} : a < x < b \}$;

$[a,b] = \{ x \in \overline{R} : a \leq x \leq b \}$;

$[a,b) = \{ x \in \overline{R} : a \leq x < b \}$;

$(a,b] = \{ x \in \overline{R} : a < x \leq b \}$.

Funcții

Fie X şi Y două mulțimi nevide.

Definiția 1.7. Se numeşte funcție de la X la Y o relație $f = (X, Y, G_f)$ cu proprietățile

i) $D(f) = X$;

ii) $(\forall)\ x \in X$ si $(\forall)\ (x,y_1),\ (x, y_2) \in G_f \Rightarrow y_1 = y_2$ (deci oricărui element $x \in X$ i se asociază un unic element $y \in Y$ astfel încât $(x,y) \in G_f$) .

Pentru o funcție se folsesc notațiile :

$f : X \rightarrow Y$ sau $x \rightarrow f(x),\ x \in X$.

Mulțimea X se numeşte mulțime de definiție a funcției f, Y codomeniu (sau domeniul valorilor) iar $G_f \subset X \times Y$ se numeşte graficul funcției f.

Observație. În locul termenului de funcție se mai folosesc şi termenii de aplicație, transformare, operație, operator sau reprezentare.

Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție, $A \subset X$, $B \subset Y$.

Mulțimea $f(A) = \{ f(x) : x \in A\} \subset Y$ se numeşte imaginea directă a lui A prin funcția f iar mulțimea $f^{-1}(B) = \{ x\in X : f(x) \in B\}$ se va numi imaginea inversă a lui B prin funcția f.

O funcție $f : X \to Y$ se numeşte injectivă dacă pentru $(\forall)x_1,x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

O funcție $f : X \to Y$ se numeşte surjectivă dacă pentru $(\forall)y\in Y$, $(\exists)x\in X$ astfel încât $f(x) = y$ (sau echivalent $\mathrm{Im} f = Y$).

O funcție $f : X \to Y$ se numeşte bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă.

Dacă $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ definim funcția compusă $h : X \to Z$, $h = g \circ f$, unde $h(x) = g(f(x))$, $(\forall)\ x\in X$.

Fie $1_X : X \to X$ funcția identică pe X, $1_X(x) = x$, oricare ar fi $x\in X$ şi $1_Y : Y\to Y$ funcția identică pe Y.

O funcție $f : X \to Y$ se numeşte inversabilă dacă $(\exists)\ g : Y \to X$ astfel încât $f \circ g = 1_Y$ şi $g \circ f = 1_X$.

Se arată că funcția g, în ipoteza că există, este unică şi prin definiție g se numeşte inversa funcției f şi se notează $g = f^{-1}$.

Teorema 1.4. O funcție $f : X \to Y$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

CAPITOLUL 2

SPAȚII METRICE. ŞIRURI ÎN SPAȚII METRICE

2.1. Spații metrice. Definiție. Exemple

Definiția 2.1.1. Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $d : X \times X \to R$ se numeşte metrică (sau distanța) pe X dacă:

(M_1) $d(x,y) \geq 0$, $(\forall)x,y \in X$ si $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M_2) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall)\ x, y \in X$;

(M_3) $d(x,z) \leq d(x,y)+ d(y,z)$, $(\forall)\ x,y,z \in X$.

Observații.

1. Elementele unui spațiu metric se numesc puncte.

2. Inegalitatea (M_3) se mai numeşte şi inegalitatea triunghiului.

3. Pe orice mulțime $X \neq \emptyset$ se poate defini o structură de spațiu metric.In acest sens fie $d : X \times X \to R$, $d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x \neq y \\ 0, \text{ daca } x = y. \end{cases}$

4. Pe aceeaşi mulțime se pot defini mai multe metrici deci mai multe structuri de spațiu metric.

5. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $n \geq 3$, se arată prin inducție matematică că $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2)+ d(x_2, x_3)+\ldots+ d(x_{n-1}, x_n)$.

Exemple.

1. $X=R$, $d:R\times R\to R$, $d(x,y)=|x-y|$, $(\forall)x,y\in R$, numită şi distanța euclidiană. Să observăm că $d(x,y)$ reprezintă distanța obişnuită (în sensul geometriei euclidiene) între două puncte M şi N de pe axa reală, de coordonate x si respectiv y.

2. $X=R^n, n\geq 1$, $d:R^n\times R^n\to R$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, $(\forall)x,y\in R^n$, $x=(x_1,x_2,\ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$, numită şi distanța euclidiană. Să observăm că, dacă n = 2 atunci $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ reprezintă distanța obişnuită (în sensul geometriei euclidiene) dintre două puncte din plan $M(x_1, x_2)$ şi $N(y_1, y_2)$.

Pe R^n se pot defini şi alte distanțe, de exemplu:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|.$$

O clasă importantă de spații metrice sunt spațiile vectoriale normate.

Definiția 2.1.2. Fie X/K (K = R sau C) spațiu vectorial.

Se numeşte norma pe X o funcție reală notată $\|\cdot\| : X \to R$ cu proprietățile:

(N_1) $\|x\| \geq 0$, $(\forall)\ x \in X$ şi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$, $(\forall)\ \lambda \in K$, $(\forall)\ x \in X$;

(N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\ x, y \in X$.

Un spațiu vectorial înzestrat cu o normă se numeşte spațiu vectorial normat.

Observație.

Un spațiu vectorial normat este un spațiu metric cu distanța indusă de norma astfel: $d(x,y) = \|x-y\|$, $(\forall)\ x, y \in X$.

Exemple.

1. $X = R$, $\|x\| = |x|$, $(\forall)\ x \in R$;

2. $X = R^n$, $n \geq 1$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $(\forall)\ x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Astfel (R^n, $\|.\|$) este un spațiu vectorial normat. Pe R^n se pot defini şi alte norme, de exemplu:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|.$$

Să observăm că, pentru n = 1,

$$\|x\|_1 = \|x\|_2 = \|x\| = |x|, \ (\forall)\ x \in R.$$

2.2. Şiruri în spații metrice

Definiția 2.2.1. Fie (X,d) spațiu metric, $x \in X$ si $r > 0$.

Mulțimea notată $B(x,r) = \{ y \in X: d(y,x) < r \}$ se numeşte bilă (sau sferă) deschisă de centru x si raza r, iar $B[x,r] = \{ y \in X : d(y,x) \leq r \}$ bilă (sau sferă) închisă de centru x şi rază r.

Exemple.

1. $X = R$, $d(y,x) = |x-y|$,

$B(x,r) = \{y \in R : |y-x| < r\} = (x-r, x + r)$, deci bila deschisă este intervalul deschis $(x - r, x + r)$ centrat în x.

Evident $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

2. $X = R^2$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $(\forall)x,y \in R^2$, $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$,

$B(x,r) = \{y \in R^2 : d(y,x) < r\} = \{y \in R^2 : \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r\} = \{y = (y_1,y_2) \in R^2 : (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < r^2\}$ =interiorul cercului de centru $C(x_1,x_2)$ şi rază r.

O proprietate importantă a spațiilor metrice este aceea de separabilitate, adică $(\forall)$ $x,y \in X$, $x \neq y$, $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

Într-adevăr, fie $x,y \in X, x \neq y$, $d = d(x,y) > 0$ şi $r = \frac{d}{3}$. Atunci $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$.

Dacă $(\exists)$ $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, atunci

$$0 < d(x,y) = d \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r = 2\frac{d}{3}, \text{ contradicție.}$$

Definiția 2.2.2. O mulțime $A \subset X$ se numeşte mărginită dacă $(\exists)$ $x \in X$ şi $r > 0$ astfel încât $A \subset B(x, r)$.

O mulțime $V \subset X$ se numeşte vecinătate pentru $x \in X$ dacă $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset V$. Fie $\vartheta(x) = \{ V \subset X : V$ vecinătate pentru $x \}$ = mulțimea vecinătăților lui x.

Definiția 2.2.3. Fie (X,d) spațiu metric. Se numeşte şir de puncte în spațiul metric X o funcție $f : N \to X$ .Valorile acestei funcții le notăm cu $x_n = f(n) \in X$ şi pentru un şir mai folosim notația $(x_n)_{n \in N}$ sau (x_n).

Dacă (x_n) este un şir în spaţiul metric (X,d) si $k_o<k_1<...<k_n<...$ este un şir strict crescător de numere naturale atunci şirul (y_n) , unde $y_n = x_{k_n}$ se numeşte subşir al şirului (x_n) şi scriem $(x_{k_n}) \subset (x_n)$.

Observaţie. Cum (k_n) este strict crescător rezultă că $k_n \geq n$, $(\forall)\ n \in N$.

Definiţia 2.2.4. Un şir $(x_n) \subset X$ este convergent către $x\in X$ şi scriem $x_n \to x$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă $(\forall) V\in \vartheta(x)$, $(\exists)\ n_V\in N$ astfel încât $x_n\in V$, $(\forall)\ n \geq n_V$.

În caz contrar şirul (x_n) este divergent.

Observaţie. Dacă $(x_n) \subset X$ este un şir convergent către $x\in X$ atunci în orice vecinătate V a lui x se află toţi termenii şirului (deci o infinitate) exceptând un număr finit.

Propoziţia 2.2.1. Fie (X,d) un spaţiu metric, $(x_n) \subset X$ si $x\in X$.Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

2. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, $d(x_n,x) < \varepsilon$;

3. şirul de numere reale $(d(x_n,x))_{n\in N}$ este convergent către zero.

Demonstraţie.

1. Þ **2.** Fie $\varepsilon > 0$ si $V_\varepsilon = B(x, \varepsilon) \in \vartheta(x)$. Din 1) $(\exists)\ n = n_\varepsilon\in N$ astfel încât $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in V_\varepsilon = B(x, \varepsilon)$, sau echivalent $d(x_n,x)< \varepsilon$.

2. Þ **1.** Fie $V \in \vartheta(x)$; atunci $(\exists) r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset V$ şi folosind 2) $(\exists)\ n = n_V\in N$ astfel încât $(\forall)\ n \geq n_V$, $d(x_n,x) < r$, sau echivalent $x_n\in B(x,r) \subset V$ $(\forall) n\geq n_V$.

2. Û **3.** evident. ■

Definiţia 2.2.5. Un şir (x_n) din spaţiul metric (X,d) se numeşte şir Cauchy (sau fundamental) dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon\in N$ astfel încât $(\forall) m,n\geq n_\varepsilon$, $d(x_m,x_n) < \varepsilon$, sau echivalent (luând $m = n+p$, cu $p\in N$):

$(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)\ p \geq 1$, $d(x_{n+p},x_n) < \varepsilon$.

Teorema 2.2.1. Fie (X,d) un spațiu metric. Atunci:

1. Dacă un şir este convergent, limita este unică.

2. Orice şir convergent este şir Cauchy.

3. Orice şir Cauchy este mărginit.

4. Orice subşir al unui şir convergent este convergent către aceeasi limită.

Demonstrație.

1. Fie $(x_n) \subset X$. Presupunem prin absurd că $(\exists)$ x, y $\in$ X, $x \neq y$ astfel încât $x_n \to x$, $x_n \to y$. Cum X este separat $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$. Cum $x_n \to x$, $(\exists)$ $n_1 \in N$ astfel încât $x_n \in B(x, r)$, $(\forall)$ $n \geq n_1$.Cum $x_n \to y$, $(\exists)$ $n_2 \in N$ astfel încât $x_n \in B(y,r)$, $(\forall)$ $n \geq n_2$.

Pentru $n \geq \max(n_1,n_2)$ avem $x_n \in B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$, contradicție.

2. Fie $(x_n) \subset X$, $x_n \to x \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât

$(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon, d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pentru m, $n \geq n_\varepsilon$, $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci (x_n) este şir Cauchy.

3. Fie $(x_n) \subset X$ şir Cauchy şi $\varepsilon = 1$. Atunci $(\exists)$ $n_0 \in$ N astfel încât $(\forall)$ m, $n \geq n_0$ $d(x_m,x_n) < 1$.Pentru $n = n_0$ obținem $d(x_m,x_{n_0}) < 1$, $(\forall)$ $m \geq n_0$,adică $x_m \in B(x_{n_0},1)$, $(\forall)$ $m \geq n_0$.

Luând $r = \max \{1,d(x_{n_0},x_0),...,d(x_{n_0}, x_{n_0-1})\}$, rezultă $x_n \in B(x_{n_0},r)$, $(\forall)$ $n \in$ N, deci (x_n) este şir marginit. În particular, dacă (x_n)este convergent atunci (x_n) este mărginit.

4. Fie $(x_n) \subset X$, $x_n \to x$ şi $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ un subşir al său.

Pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in$ N astfel încât $d(x_n, x) < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$. Cum $k_n \geq n$, $(\forall)$ $n \in$ N rezultă că $d(x_{k_n},x) < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, adică $x_{k_n} \to x$. ■

2.3 Şiruri în spații metrice particulare

Proprietățile generale ale şirurilor în spații metrice rămân valabile şi în spațiile metrice particulare R, R^k, $k \geq 2$.

În aceste spații, pe lângă proprietățile generale şirurile au şi proprietăți specifice.

A. Şiruri de numere reale

Fie spațiul metric X = R şi d(x, y) = |x - y|, distanța euclidiană.

Conform definiției 2.2.2 o mulțime $V \subset R$ este vecinătate pentru $x \in R$ dacă $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât $B(x,r) = (x-r,x+r) \subset V$.

Din propoziția 2.2.1 un şir de numere reale $(x_n) \subset R$ este convergent către $x \in R \Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in$ N astfel încât $| x_n - x | < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$.

Conform definiției 2.2.5 un şir $(x_n) \subset R$ este şir Cauchy dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) m,n \geq n_\varepsilon$, $| x_m - x_n | < \varepsilon$, sau echivalent (luând m = n+p, cu $p \in N$) : $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in$ N astfel încât $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, $(\forall)$ $p \geq 1$, $| x_{n+p} - x_n | < \varepsilon$.

Definiția 2.3.1. Un şir $(x_n) \subset R$ se numeşte monoton crescător (respectiv descrescător) dacă $x_{n+1} \geq x_n$ (respectiv $\leq$), $(\forall)$ $n \in N$. Un şir $(x_n) \subset R$ se numeşte monoton dacă este monoton crescător sau monoton descrescător.

Dacă inegalitățile sunt stricte, (x_n) se numeşte strict crescător (respectiv strict descrescător).

Definiția 2.3.2. Un şir $(x_n) \subset R$ este marginit inferior (respectiv superior) dacă mulțimea termenilor săi este minorată (respectiv majorată), adică dacă $(\exists)$ $\alpha \in$ R (respectiv $\beta \in$ R) astfel încât $x_n \geq \alpha$ (respectiv $x_n \leq \beta$), $(\forall)$ $n \in N$.

Un şir $(x_n) \subset R$ este mărginit dacă este mărginit inferior şi superior, adică dacă $(\exists)$ α, $\beta \in$ R astfel $\alpha \leq x_n \leq \beta$, $(\forall)$ $n \in$ N, sau echivalent: $(\exists)$ $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $(\forall)$ $n \in$ N.

Un şir $(x_n) \subset R$ este nemărginit dacă nu este mărginit.

Prezentăm în continuare câteva rezultate cunoscute referitoare la convergența şirurilor:

Teorema 2.3.1. Fie (x_n), (y_n) două şiruri de numere reale astfel încât $x_n \to x \in R$, $y_n \to y \in R$. Atunci şirurile $(x_n + y_n)$, (λx_n), cu $\lambda \in$ **R**, $(x_n y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, cu $y_n \neq 0$, sunt convergente şi

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda x$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, daca $y \neq 0$.

Teorema 2.3.2. (Teorema cleştelui). Dacă (x_n), (y_n), (z_n) sunt trei şiruri de numere reale astfel încât $x_n \leq y_n \leq z_n$, $(\forall)$ $n \in N$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x \in R$, atunci (y_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Teorema 2.3.3. (Cesàro). Orice şir mărginit de numere reale are cel puțin un subşir convergent.

Teorema 2.3.4. (Weierstrass).

1. Orice şir de numere reale monoton crescător şi mărginit superior este convergent iar limita sa este marginea superioară a mulțimii termenilor săi.

2. Orice şir de numere reale monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent iar limita sa este marginea inferioară a mulțimii termenilor săi.

În continuare vom arăta că noțiunile de şir numeric convergent şi şir Cauchy sunt echivalente.

Teorema 2.3.5. (Cauchy). Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.

Demonstrație.

i) Fie $(x_n) \subset R$, $x_n \to x \in R$. Vom arata ca (x_n) este sir Cauchy.

Fie $\varepsilon > 0$; cum $x_n \to x$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in N$ astfel incat $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, $| x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2}$ şi atunci pentru $m,n \geq n_\varepsilon$ vom avea $| x_m - x_n | = | x_m - x + x - x_n | \leq | x_m - x | + | x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci (x_n) este sir Cauchy.

ii) Reciproc, să presupunem că (x_n) este şir Cauchy şi vom arăta că $(\exists) x \in R$ astfel încat $x_n \to x$.

Cum (x_n) este sir Cauchy, din teorema 2.2.1 (x_n) este mărginit şi din teorema 2.3.3 şirul (x_n) conține un subşir convergent (x_{k_n}); fie $x \in R$, limita sa.

Vom arăta ca $x_n \to x$.

Fie $\varepsilon > 0$; cum $x_{k_n} \to x$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in N$ astfel încât $| x_{k_n} - x | < \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$.

Pentru $n \geq n_\varepsilon$, cum $k_n \geq n \geq n_\varepsilon$ vom avea

$$| x_n - x | = | x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x | \leq | x_n - x_{k_n} | + | x_{k_n} - x | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şi demonstrația este încheiată. ■

Exemplu. Fie sirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+1)}$, $x \in R$. Vom arăta că (x_n) este şir Cauchy, deci convergent.

Fie $\varepsilon > 0$, $n, p \in N$. Vom avea:

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{daca } n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Fie $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$ şi atunci $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $p \geq 1$ vom avea $\left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$, deci (x_n) este şir Cauchy.

Şiruri cu limita + ¥ sau - ¥

Definiția 2.3.3. O mulțime $V \subset \overline{R}$ se numeşte vecinătate pentru $+\infty$ dacă $(\exists) a \in R$ astfel încât $(a,+\infty) \subset V$.

O mulțime $V \subset \overline{R}$ se numeşte vecinătate pentru $-\infty$ dacă $(\exists)\ a \in R$ astfel încât $(-\infty, a) \subset V$.

Definiția 2.3.4. Un şir $(x_n) \subset R$ are limita $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, dacă $(\forall)\ V \in \vartheta(+\infty)$, $(\exists)\ n_v \in N$ astfel încât $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geq n_v$.

Analog definim şiruri cu limita $-\infty$.

Observație. Luând vecinătăți pentru $+\infty$ de forma $(\varepsilon,+\infty)$, cu $\varepsilon > 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

Analog $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

Prezentăm în continuare câteva rezultate referitoare la şirurile cu limita $+\infty$ sau $-\infty$.

Teorema 2.3.6.

1. Dacă $(a_n) \subset R$ este un şir cu limita $+\infty$ iar (x_n) este astfel încât $a_n \leq x_n$, $(\forall)\ n \in N$, atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Dacă $(b_n) \subset R$ este un şir cu limita $-\infty$ iar (x_n) este astfel încât $x_n \leq b_n$, $(\forall)\ n \in N$, atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Teorema 2.3.7.

1. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{R} \setminus \{-\infty\}$ atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{R} \setminus \{+\infty\}$ atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y > 0$ atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$.

4. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y < 0$ atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = -\infty$.

Teorema 2.3.8.

1. Dacă (x_n) este un şir crescător şi nemărginit superior atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Dacă (x_n) este un şir descrescător şi nemărginit inferior atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Observație. Din teroremele 2.3.4 şi 2.3.8 rezultă că orice şir monoton de numere reale are limită în $\overline{R}$.

Limită superioară şi limită inferioară

Fie (x_n) un şir de numere reale şi $A_n = \{x_n, x_{n+1},\ldots\}$, $n\in N$.
Să observăm că $A_n \supset A_{n+1}$, $(\forall)$ $n\in N$.

Fie $y_n = \sup A_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$, $z_n = \inf A_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$.

Se observă că şirul (y_n) este descrescător în timp ce şirul (z_n) este crescător şi atunci (y_n) şi (z_n) au limită în $\overline{R}$.

Definitia 2.3.5.

1. Elementul $y\in \overline{R}$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ se numeşte limită superioară a şirului (x_n) şi se notează $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ sau $y = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2. Elementul $z\in \overline{R}$, $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ se numeşte limită inferioară a şirului (x_n) şi se notează $z = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ sau $z = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Observație. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\limits_{n\in N} y_n$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \inf_{n\in N} \sup_{k\geq n} x_k \text{ şi analog}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \sup_{n\in N} \inf_{k\geq n} x_k .$$

Exemplu. Fie şirul cu termenul general $x_n = \cos\frac{n\pi}{2}$.

Atunci $z_n = \inf\{\cos\frac{k\pi}{2} : k \ge n\} = -1$, $(\forall)\ n \in N$ şi $y_n = \sup\{\cos\frac{k\pi}{2} : k \ge n\} = 1$, $(\forall)\ n \in N$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = 1$.

Observație. Cum $z_n \le y_n$, $(\forall)\ n\in N$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$.

Teorema 2.3.9. Un şir $(x_n) \subset R$ are limită în $\overline{R}$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$.

În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$.

Demonstrație.

1. Presupunem că (x_n) are limită în $\overline{R}$ şi fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deosebim cazurile:

a) $x\in R$; atunci pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)\ n \ge n_\varepsilon \Rightarrow$ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $x_n < x + \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ n \ge n_\varepsilon$.

De aici rezultă că $y_{n_\varepsilon} = \sup\{x_n : n \ge n_\varepsilon\} \le x + \frac{\varepsilon}{2}$ şi cum (y_n) este descrescător, pentru $(\forall)\ n \ge n_\varepsilon$, $y_n \le y_{n_\varepsilon} \le x + \frac{\varepsilon}{2}$.

Trecând la limită cu $n \to \infty$ obținem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \le x + \frac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon, \text{ deci } \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n < x + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar rezultă că $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le x$.

Analog se arată că $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \ge x$ şi cum $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ va rezulta că $x = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, $(\forall)\ n \ge n_\varepsilon$.

De aici rezultă că

$z_{n_\varepsilon} = \inf\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1}, \ldots\} \ge \varepsilon$ şi cum (z_n) este crescător $z_n \ge z_{n_\varepsilon} \ge \varepsilon$, $(\forall)\ n \ge n_\varepsilon$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = +\infty$.

Cum $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, rezultă că $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi deci $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

c) Cazul $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ se tratează analog.

2. Reciproc, presupunem că $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x$ şi vom arăta că $(\exists)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Deosebim cazurile:

a) $x\in R$; în acest caz avem $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ şi deci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n'_\varepsilon \in N$ astfel încât $|y_n-x| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n'_\varepsilon$.

Cum $x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k = y_n$, rezultă că

$$x_n < x + \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n'_e\ . \tag{2.1}$$

Pe de altă parte, cum $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} z_n = x$, deci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n''_\varepsilon \in N$ astfel încât $|z_n-x| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n''_\varepsilon$.

Cum $x_n \geq z_n$, $(\forall)\ n \in N$, rezultă că

$$x_n > x - \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n''_\varepsilon\ . \tag{2.2}$$

Pentru $n \geq n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, din (2.1) şi (2.2) vom avea $|x_n-x| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b) $x = +\infty$; atunci din $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$ rezulta ca pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $z_n > \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

Cum $x_n \geq z_n, (\forall) n \in \mathbb{N}$ rezulta ca $x_n > \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

c) Cazul $x = -\infty$ se trateaza analog. ■

Definitia 2.3.6. Fie (x_n) un sir de numere reale.Un punct $x\in \bar{R}$ se numeste punct limita pentru sirul (x_n) daca in orice vecinatate V a lui x se afla o infinitate de termeni ai sirului (x_n).

Fie $A = \{x \in \bar{R} : x$ punct limita pentru sirul $(x_n)\}$.

Observatie. Din definiție rezultă imediat că $x \in \bar{R}$ este punct limita pentru şirul (x_n) dacă şi numai dacă exista un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$.

Exemplu. Fie $x_n = \cos\frac{n\pi}{3}, (\forall)\ n \in N$. Atunci $A = \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$.

Observație. Dacă (x_n) este un şir de numere reale se arată că $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$.

Teorema 2.3.10. Fie (x_n) un şir de numere reale strict pozitive. Atunci

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Demonstrație. Inegalitatea din mijloc este evidentă. O vom demonstra pe prima, iar a treia se demonstrază analog.

Fie $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}, \beta = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Vom arăta că $\alpha \le \beta$. Dacă $\alpha = 0$, inegalitatea este evidentă.

Să presupunem deci $\alpha > 0$ şi fie $\varepsilon > 0$ astfel încât $\alpha - \varepsilon > 0$.

Cum $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sup\limits_{n\in N} \inf\limits_{k\ge n} \frac{x_{k+1}}{x_k} > \alpha - \varepsilon$, există un rang $n_0 \in N$ astfel încât $\inf\limits_{k\ge n_0} \frac{x_{k+1}}{x_k} > \alpha - \varepsilon$, de unde rezultă că

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} > \alpha - \varepsilon, (\forall) k \ge n_0 \tag{2.3}$$

Fie $n \ge n_0$; vom avea $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} \cdot x_{n_0}$ şi folosind (2.3) rezultă

$$x_n > (\alpha - \varepsilon)^{n-n_0} \cdot x_{n_0}, (\forall) n \ge n_0,$$

sau echivalent $x_n > (\alpha - \varepsilon)^n \cdot a$, unde $a = (\alpha - \varepsilon)^{-n_0} x_{n_0} > 0$.

Obținem atunci $\sqrt[n]{x_n} > (\alpha - \varepsilon)\sqrt[n]{a}, (\forall) n \ge n_0$ şi prin trecerea la limită inferioară $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \ge \liminf\limits_{n\to\infty} (\alpha - \varepsilon)\sqrt[n]{a} = \alpha - \varepsilon$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar rezultă $\beta \ge \alpha$ şi demonstația este încheiată. ■

Observație. Din teoremele 2.3.9. si 2.3.10. rezultă că dacă (x_n) este un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=L$,unde $0 \leq L \leq +\infty$ atunci $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=L$.

B. Şiruri în spațiul metric R^k , $k \geq 2$

Fie spațiul metric R^k cu distanța euclidiană

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2},(\forall)x,y\in R^k,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_k),\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_k).$$

Dacă (x_n) este un şir in R^k atunci termenul său general x_n este de forma $x_n=\left(x_n^1,x_n^2,\ldots,x_n^k\right)\in R^k$, deci unui şir (x_n) din R^k îi corespunde k şiruri de numere reale $\left(x_n^1\right)$,$\left(x_n^2\right)$,...,$\left(x_n^k\right)$ numite şiruri componente. Conform propoziției 2.2.1. un şir (x_n) din R^k este convergent către $x\in R^k$ dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon\in N$ astfel încât $\| x_n - x\| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

Un şir (x_n) din R^k este şir Cauchy (sau fundamental) dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon\in N$ astfel încât $(\forall)$ m, $n \geq n_\varepsilon$ avem $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$.

Teorema 2.3.11. Un şir (x_n) din R^k, $x_n=\left(x_n^1,x_n^2,\ldots,x_n^k\right)$ este convergent în R^k dacă şi numai dacă şirurile componente $\left(x_n^1\right)$, $\left(x_n^2\right)$, ..., $\left(x_n^k\right)$ sunt convergente în R.

Demonstrație." ⇒ " Presupunem că (x_n) este convergent în R^k şi fie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in R^k, x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_k\right)$.Vom arăta că $x_n^i\to x_i,(\forall)i=\overline{1,k}$.

Fie $i\in\overline{1,k}$ si $\varepsilon>0$; cum $x_n\to x,(\exists)n_\varepsilon\in N$ astfel încât $\| x_n-x \|<\varepsilon,(\forall)n\geq n_\varepsilon$.

Cum $| x_n^i-x_i |\leq\| x_n-x \|,(\forall)n\in N$ rezultă că $(\forall)n\geq n_\varepsilon, | x_n^i-x_i| \leq \| x_n-x\|<\varepsilon$, adică $x_n^i\to x_i$.

" ⇐ " Presupunem că $x_n^i\to x_i\in R,(\forall)i=\overline{1,k}$ şi vom arăta că $x_n\to x$, unde $x = (x_1,x_2,\ldots,x_k)\in R^k$.

Fie $\varepsilon > 0$; cum $x_n^i \to x_i$, $(\exists) n_\varepsilon^i \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon^i$, $\left| x_n^i - x_i \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$.

Luând $n_\varepsilon = \max\left\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2, ..., n_\varepsilon^k\right\}$ rezultă că $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$ vom avea

$$\| x_n - x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(x_n^i - x_i\right)^2} < \sqrt{k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon, \text{ deci } x_n \to x. \qquad \blacksquare$$

Observație. Din această teorema rezultă că în cazul convergenței avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1, \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2, ..., \lim\limits_{n\to\infty} x_n^k\right)$.

Exemplu. Fie $(x_n) \subset R^2$, $x_n = \left(\sqrt[n]{n}, \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right), n \geq 2$.

Avem $x_n = \left(x_n^1, x_n^2\right)$, unde $x_n^1 = \sqrt[n]{n}$, $x_n^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ rezultă că $\left(x_n^1\right)$ este convergent.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$ rezultă că $\left(x_n^2\right)$ este convergent.

În concluzie (x_n) este convergent în R^2 şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(1, \frac{1}{e}\right)$.

Observație. Raționând asemănător ca în demonstrația teoremei 2.3.11. se arată că un şir (x_n) din R^k, $x_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k\right)$ este şir Cauchy în R^k dacă şi numai dacă şirurile $\left(x_n^1\right)$, $\left(x_n^2\right), ..., \left(x_n^k\right)$ sunt şiruri Cauchy în R.

2.4. Spații metrice complete

Fie (X,d) un spațiu metric. Din teorema 2.2.1. rezultă că, dacă (x_n) este un şir de puncte din X, convergent, atunci el este şir Cauchy. Reciproca nu este în general adevărată.

Exemplu. Fie X = (0,1], d(x,y) = |x-y|, $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Cum (x_n) este convergent în R rezultă că (x_n) este şir Cauchy în R, deci în X.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \notin X$ rezultă că (x_n) nu este convergent în X.

Definiția 2.4.1. Un spațiu metric (X,d) în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte spațiu metric complet.

Definiția 2.4.2. Un spațiu vectorial normat şi complet se numeşte spațiu Banach.

Observație. Folosind teorema lui Cauchy rezultă că R, R^k, $k \geq 2$ sunt spații Banach relativ la distanța euclidiană.

Definiția 2.4.3. Fie (X,d) un spațiu metric. O funcție $f : X \to X$ se numeşte contracție dacă există $\alpha \in [0,1)$ astfel încât $d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, $(\forall)\ x,y \in X$.

Teorema 2.4.1. (Principiul contracției sau teorema de punct fix a lui Banach). Fie (X,d) un spațiu metric complet şi $f : X \to X$ o contracție. Atunci f are un unic punct fix, adică $(\exists)\ \xi \in X$, unic, astfel încât $f(\xi) = \xi$.

Demonstrație. Unicitatea. Presupunem prin absurd că există $\xi_1,\xi_2 \in X$, $\xi_1 \neq \xi_2$ astfel încât $f(\xi_1) = \xi_1$ şi $f(\xi_2) = \xi_2$. Atunci $0 < d(\xi_1, \xi_2) = d(f(\xi_1),f(\xi_2)) \leq$ $\leq d(\xi_1, \xi_2)$, de unde rezultă $\alpha \geq 1$, contradicție.

Existența. Fie $x_0 \in X$, fixat şi construim şirul (x_n) astfel :

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}), \ldots$$

Şirul (x_n) se mai numeşte şi şirul aproximațiilor succesive.

Vom arăta că şirul (x_n) este şir Cauchy.

Fie $d = d(x_1, x_0)$. Observăm că:

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0,x_1) = \alpha d;$$

$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1,x_2) \leq \alpha^2 d.$$

Prin inducție se arată că:

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \alpha^n d,\ (\forall)\ n \in N.$$

Pentru $n \in N$ şi $p \geq 1$ avem

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leq$$

$$\leq \alpha^n d + \alpha^{n+1}d + \ldots + \alpha^{n+p-1}d = \alpha^n d\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d\,. \qquad (2.4)$$

Dacă d = 0 rezultă $x_1 = x_0$, deci $f(x_0) = x_0$ şi demonstrația este încheiată cu $\xi = x_0$.

Dacă d > 0 , cum $\alpha \in [0,1)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ şi atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\alpha^n < \frac{1-\alpha}{d}\varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$.

Folosind (2.4) rezultă că $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)\ p \geq 1$ avem $d(x_n,x_{n+p}) < \varepsilon$, deci (x_n) este şir Cauchy. Cum (X,d) este complet $(\exists)\ \xi \in X$ astfel încât $x_n \to \xi$.

Vom arăta că $f(\xi) = \xi$. Evident avem

$$d(\xi,f(\xi)) \leq d(\xi,x_{n+1}) + d(x_{n+1},f(\xi)) = d(\xi,x_{n+1}) + d(f(x_n),f(\xi)) \leq d(\xi,x_{n+1}) + \alpha d(x_n,\xi)$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,\xi) = 0$, prin trecere la limită cu $n \to \infty$ obținem $d(\xi,f(\xi)) = 0$, adică $f(\xi) = \xi$. ■

2.5. Elemente de topologie în spații metrice

Fie (X,d) un spațiu metric.

Definiția 2.5.1. O mulțime nevidă $D \subset X$ se numeşte deschisă dacă D este vecinătate pentru orice punct al său, adică dacă pentru $(\forall)x \in D$, $(\exists)\ r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset D$. Prin definiție Ø este o mulțime deschisă.

O mulțime $F \subset X$ se numeşte închisă dacă $CF = X\backslash F$ este deschisă.

Exemple.

1. Dacă (X,d) este un spațiu metric atunci Ø şi X sunt şi deschise şi închise.

2. Dacă (X,d) este un spațiu metric atunci orice bila deschisa este o multime deschisa si orice bila inchisa este o multime inchisa.

Intr-adevar, fie $D = B(x,r)$, $x \in X$, $r > 0$ şi $y \in D$.

Fie $0 < r_1 < r - d(y,x)$. Atunci $B(y,r_1) \subset D$, deoarece daca $z \in B(y,r_1) \Rightarrow d(z,y) < r_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r_1 + d(y,x) < r$, deci $z \in B(x,r) = D$.

Analog se arată că B[x,r] este o mulțime închisă .

În particular, dacă X = R, d – distanța euclidiana, atunci orice interval de forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ este multime deschisa si orice interval de forma $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ este o mulțime închisă.

3. Dacă X = R cu metrica euclidiana, intervalele de forma [a,b], $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ sunt multimi inchise.

4. Mulțimea $A = \{x\in R : 1 < x \le 2\}$ nu este nici închisă nici deschisă.

5. Mulțimea $A = \{(x,y)\in R^2 : 1< x < 3, -1 < y < 1\}$ este deschisă iar $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - y^2 \ge 1\}$ este închisă.

Teorema 2.5.1. Fie (X,d) spațiu metric. Atunci

1. O reuniune oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisa iar o intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

2. O reuniune finita de multimi inchise este o multime inchisa iar o intersectie oarecare de multimi inchise este o multime inchisa.

Demonstrație. 1. Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de submulțimi deschise ale lui X şi $D = \bigcup_{i\in I} D_i$.

Dacă $D = \emptyset$ atunci D este deschisa.

Dacă $D \ne \emptyset$, fie $x\in D$; atunci $(\exists)\ i_0 \in I$ astfel incat $x \in D_{i_0}$ şi conform definitiei $(\exists)\ r > 0$ astfel incat $B(x,r) \subset D_{i_0} \subset D$, deci D este deschisă.

Fie $D_1, D_2,\dots, D_n$, $n\in N^*$, mulțimi deschise ale lui X şi $D = \bigcap_{i=1}^{n} D_i$.

Dacă $D = \emptyset$ atunci D este deschisă.

Dacă $D \ne \emptyset$, fie $x\in D$; atunci $x\in D_i$, $(\forall)\ I = \overline{1,n}$ şi conform definitiei $(\exists) r_i > 0$, $i=\overline{1,n}$ astfel încat $B(x,r_i) \subset D_i$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$. Fie $r = \min_{i=\overline{1,n}} r_i$. Atunci $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset D_i$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, de unde $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} D_i = D$, deci D este deschisa.

2. Rezultă imediat din 1) folosind formulele lui de Morgan. ■

Observații. 1. Dacă (X,d) este un spațiu metric, submulțimile lui X formate dintr-un singur element sunt mulțimi închise şi folosind teorema 2.5.1 rezultă că mulțimile finite sunt închise, fiind o reuniune finită de mulțimi închise.

2. O intersectie oarecare de multimi deschise nu este in general o multime deschisa.In acest sens fie X = R cu metrica euclidiana si $D_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in N^*$.

Evident D_n este deschisa $(\forall)$ $n \in N^*$ si $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{0\}$, care nu este deschisa.

3. Fie (X,d) spatiu metric si $\tau_d = \{D \subset X\colon D \text{ multime deschisa}\} \subset P(X)$.

Atunci τ_d are urmatoarele proprietați (ce rezulta din teorema 2.5.1):

(T_1) $X, \emptyset \in \tau_d$;

(T_2) Orice reuniune de multimi din τ_d apartine lui τ_d;

(T_3) Orice intersectie finita de multimi din τ_d apartine lui τ_d.

Spunem in acest caz ca τ_d este o topologie pe X numita topologia indusa de metrica d iar perechea (X, τ_d) se numeste spatiu topologic. In particular daca $X = R^n$, $n \geq 1$ si d este distanta euclidiana atunci topologia indusa de d o vom nota cu τ_0 si o vom numi topologia uzuala sau naturala a lui R^n.

In continuare, ori de cate ori vom vorbi de R^n fara a face vreo mentiune speciala il vom considera inzestrat cu topologia naturala.

Fie (X,d) spatiu metric si $A \subset X$, nevidă.

Definiția 2.5.2. Un punct $x \in A$ se numeste punct interior multimii A daca $(\exists)$ $V \in \vartheta(x)$ astfel incat $V \subset A$, sau echivalent $(\exists)$ $r > 0$ astfel incat $B(x,r) \subset A$.

Notam cu $\overset{0}{A}$ (sau IntA) = $\{x \in A\colon x \text{ punct interior multimii } A\}$ si o numim interiorul lui A.

Definiția 2.5.3. Un punct $x \in X$ se numeşte punct de aderență pentru mulțimea A dacă $(\forall) V \in \vartheta(x)$, $A \cap V \neq \emptyset$, sau echivalent $(\forall) r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Notăm cu $\bar{A} = \{x \in X\colon x \text{ punct de aderență pentru } A\}$ şi o numim aderență sau închiderea lui A.

Definiția 2.5.4. Un punct $x\in X$ se numeşte punct de acumulare pentru A daca $(\forall)\ V\in\vartheta(x)$, $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\emptyset$, sau echivalent $(\forall)\ r>0$, $A\cap(B(x,r)\setminus\{x\})\neq\emptyset$.

Notăm cu $A' = \{x\in X : x$ punct de acumulare pentru $A\}$ si o numim multimea derivata a lui A.

Un punct $x\in A$ care nu este punct de acumulare pentru A se numeste izolat pentru A. Notam cu $IzA = \{x\in A : x$ punct izolat pentru $A\}$ si o numim multimea punctelor izolate ale lui A.

Se observa ca un punct $x\in A$ este izolat daca si numai daca $(\exists)V\in\vartheta(x)$ astfel incat $A\cap V=\{x\}$.

Definim multimea $FrA = \bar{A}\cap\overline{CA}$, numita si frontiera lui A.

Exemple.

1. Fie $X = R$ şi $A\subset X$, $A = (-\infty,1)\cup(2,3]\cup\{5\}$. Atunci

$\overset{0}{A} = (-\infty,1)\cup(2,3)$, $\bar{A} = (-\infty,1]\cup[2,3]\cup\{5\}$, $A' = (-\infty,1]\cup[2,3]$, $IzA = \{5\}$, $FrA = \{1,2,3,5\}$.

2. $X = R$, $A = (0,1)\cap Q$. Atunci $\overset{0}{A}=\emptyset$, $\bar{A}=[0,1]$, $A'=[0,1]$, $IzA=\emptyset$, $FrA=[0,1]$

3. (X,d) spațiu metric şi $A\subset X$, finită. Atunci

$$\overset{0}{A}=\emptyset,\quad \bar{A}=A,\quad A'=\emptyset,\quad IzA=A,\quad FrA=A.$$

Observație. Din definițiile date rezultă imediat că, dacă (X,d) este un spațiu metric şi $A, B\subset X$ sunt nevide atunci:

1. $\overset{o}{A}\subset A\subset\overline{A}$, $A'\subset\overline{A}$;

2. $A\subset B\Rightarrow \overset{0}{A}\subset\overset{0}{B}$, $\overline{A}\subset\overline{B}$, $A'\subset B'$;

3. $\overset{o}{A}\cup\overset{o}{B}\subset\overbrace{A\cup B}^{o}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $(A\cup B)' = A'\cup B'$;

4. $\overbrace{A\cap B}^{o}=\overset{o}{A}\cap\overset{o}{B}$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

Cum primele două proprietăți sunt evidente, să arătăm de exemplu a doua egalitate de la proprietatea 3); celelalte se demonstrează analog.

Fie $x \in \overline{A \cup B}$; dacă $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ atunci $x \notin \overline{A}$ şi $x \notin \overline{B}$, deci $(\exists) r_1, r_2 > 0$ astfel încât $A \cap B(x,r_1) = \emptyset$, $B \cap B(x,r_2) = \emptyset$.

Luând $r = \min(r_1,r_2) > 0$ obținem

$(A \cup B) \cap B(x,r) = (A \cap B(x,r)) \cup (B \cap B(x,r)) = \emptyset$, care contrazice faptul că $x \in \overline{A \cup B}$.

Reciproc, dacă $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, cum $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, rezultă $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, deci $x \in \overline{A \cup B}$.

Teorema 2.5.2. Fie (X,d) spațiu metric şi $A \subset X$, nevidă. Atunci

1. $C\overset{\circ}{A} = \overline{CA}$ şi $C\overline{A} = \overset{\circ}{CA}$.

2. $\overset{\circ}{A}$ este deschisă şi $\overline{A}$ este închisă.

3. A este deschisă $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

4. A este închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demonstrație.

1. $x \in C\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow (\forall)\ r > 0,\ B(x, r) \not\subset A \Leftrightarrow (\forall)\ r > 0,\ B(x, r) \cap CA \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{CA}$. Analog se arată că $C\overline{A} = \overset{\circ}{CA}$.

2. Fie $x \in \overset{\circ}{A}$; atunci $(\exists)\ r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subset A$. Vom arăta că $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$; fie $y \in B(x,r)$ şi $0 < r_1 < r - d(y,x)$. Atunci $B(y,r_1) \subset B(x,r) \subset A$, deci $y \in \overset{\circ}{A}$. Rezultă deci că $\overset{\circ}{A}$ este deschisă.

Cum $C\overline{A} = \overset{\circ}{CA}$, care este deschisă rezultă că $\overline{A}$ este închisă.

3. **“**Ü**”** evident;

“⇒” Presupunem că A este deschisă şi vom arăta că $A = \overset{\circ}{A}$. Cum $\overset{\circ}{A} \subset A$ este suficient să arătăm că $A \subset \overset{\circ}{A}$. Fie $x \in A$; cum A este deschisă $(\exists)\ r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset A$, adică $x \in \overset{\circ}{A}$.

4. “Ü**”** evident;

“$\Rightarrow$**”** Presupunem că A este închisă şi vom arăta că $A = \overline{A}$. Cum $A \subset \overline{A}$ este suficient să arătăm că $\overline{A} \subset A$. Fie $x \in \overline{A}$; dacă $x \notin A$ rezultă $x \in CA$ şi cum CA este deschisă $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset CA$, deci $B(x,r) \cap A = \emptyset$, care contrazice faptul că $x \in \overline{A}$. ■

Teorema 2.5.3.(de caracterizare a punctelor aderente cu ajutorul şirurilor). Fie (X,d) spațiu metric şi $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Atunci $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ există un şir $(x_n) \subset A$ astfel încât $x_n \to x$.

Demonstrație. Fie $x \in \overline{A}$; atunci $(\forall)$ $n \in N^*$, $A \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$, deci $(\exists)$ $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$, $(\forall)$ $n \in N^*$. Obținem astfel un şir $(x_n) \subset A$ cu $d(x_n,x) < \frac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \in N^*$, adică $x_n \to x$.

Reciproc, dacă $(x_n) \subset A$, $x_n \to x$, atunci $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Astfel $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, adică $x \in \overline{A}$. ■

Ținând cont de definiția punctului de acumulare, analog cu teorema 2.5.3. obținem:

Teorema 2.5.4.(de caracterizare a punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor). Fie (X,d) spațiu metric şi $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Atunci $x \in A' \Leftrightarrow$ există un şir $(x_n) \subset A$, $x_n \neq x$, $(\forall)$ $n \in N$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definiția 2.5.5. Fie (X, d) spațiu metric şi $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. O familie $(D_i)_{i \in I}$ de părți ale lui X se numeşte acoperire a mulțimii A dacă $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$.

Dacă $J \subset I$ şi $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} D_i$ spunem că $(D_i)_{i \in J}$ este o subacoperire a lui $(D_i)_{i \in I}$ pentru A.

Dacă toate mulțimile D_i, $i \in I$, sunt deschise spunem că $(D_i)_{i \in I}$ este o acoperire deschisă.

Definiția 2.5.6. O submulțime K a unui spațiu metric (X,d) se numeşte compactă dacă din orice acoperire deschisă se poate extrage o subacoperire finită.

Exemple. 1. X = R, K = (0,1).Atunci K nu este compactă. Este evident că familia $(I_n)_{n\in N^*}$, unde $I_n = (\frac{1}{n},1)$ formează o acoperire deschisă pentru K.

Daca K ar fi compacta $(\exists)$ $J \subset N^*$ finita astfel incat $K \subset \bigcup_{n\in J} I_n$. Luand m = maxJ rezulta $(0,1) \subset \bigcup_{n\in J} I_n = (\frac{1}{m},1)$ contradictie.

2. (X,d) spatiu metric, $K = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\} \subset X$ finita. Atunci K este compacta. Intr-adevar, fie $(D_i)_{i\in I}$ o acoperire deschisă pentru K, deci $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$.

Cum $x_i\in K$, există $k_i \in I$, astfel încât $x_i \in D_{k_i}$, $i = \overline{1,n}$. Atunci $(D_{k_i})_{i=\overline{1,n}}$ este o subacoperire finită pentru K.

Teorema 2.5.5. Orice submultime compacta a unui spatiu metric este inchisa si marginita.

Demonstratie. Fie $K \subset X$ compactă şi $x\in K$. Evident avem $K \subset \bigcup_{n\in N^*} B(x,n)$, deci $(B(x,n))_{n\geq 1}$ este o acoperire deschisa pentru K. Cum K este compacta exista $J \subset N^*$, finita astfel incat $K \subset \bigcup_{n\in J} B(x,n)$. Fie n_0 = maxJ si atunci vom avea $K \subset B(x,n_0)$, deci K este marginita.

Vom arata in continuare ca multimea K este inchisa sau echivalent $K = \overline{K}$.

Cum $K \subset \overline{K}$ este suficient sa aratam ca $\overline{K} \subset K$. Presupunem prin absurd ca $\overline{K} \not\subset K$, deci exista $x\in \overline{K}$ si $x\notin K$.

Cum $x\notin K$ rezulta ca $(\forall)$ $y\in K$ avem $y \neq x$ şi cum X este separat, pentru $(\forall)$ $y\in K$, $(\exists)$ $r_y > 0$ astfel incat $B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$.

Familia $(B(y, r_y))_{y\in k}$ formeaza o acoperire deschisa pentru K, deci $(\exists)y_1, y_2,\ldots, y_n\in K$ astfel incât $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,r_{y_i})$. Dar $B(x,r_{y_i}) \cap B(y,r_{y_i}) = \emptyset$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$.

Luând $r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} r_{y_i}$ obtinem $B(x,r) \cap B(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, de unde $B(x,r) \cap K = \emptyset$, contradictie. ■

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este in general adevarata. Se poate arata ca, daca X este finit dimensional atunci $K \subset X$ este compacta daca si numai daca K este inchisa si marginita.

Rezulta ca o multime $K \subset R^n$ este compacta daca si numai daca este inchisa si marginita.

Teorema 2.5.6. Fie (X,d) spatiu metric. Atunci $K \subset X$ este compacta daca si numai daca orice sir de puncte (x_n) din K are un subsir convergent la un punct din K.

Demonstrație. Presupunem mai intai ca K este compacta si fie (x_n) un sir de puncte din K.

Presupunem prin absurd ca (x_n) nu contine nici un subsir convergent; deci multimea termenilor sai nu are nici un punct de acumulare.

Atunci pentru orice $x \in K$, $(\exists)\ r_x > 0$ astfel incat $B(x, r_x)$ contine cel mult un numar finit de termeni ai sirului (x_n) (in caz contrar ar exista un subsir al lui (x_n) care sa convearga la x).

Famlia $(B(y, r_y))_{y \in k}$ constituie o acoperire deschisa pentru K si cum K este compacta se poate extrage o subacoperire finita, deci exista $y_1, y_2, \dots, y_m \in K$ si $r_1, r_2, \dots, r_m > 0$ astfel incat $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(y_i, r_i)$. Cum $(x_n) \subset K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(y_i, r_i)$ iar fiecare dintre bilele $B(y_i, r_i)$ contine cel mult un numar finit de termeni ai sirului (x_n) rezultă ca sirul (x_n) are un numar finit de termeni, contradictie.

Pentru a demonstra reciproca acestei teoreme se poate consulta [11]. ■

Teorema 2.5.7. Fie (X,d) spatiu metric, $K \subset X$, compacta si $A \subset K$, inchisa. Atunci A este compacta.

Demonstratie. Fie $(D_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisa a lui A. Cum $X \setminus A$ este deschisa si $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i \cup (X \setminus A)$ rezultă că familia $((D_i)_{i \in I}, X \setminus A)$ este o acoperire deschisa pentru K. Cum K este compacta $(\exists)$ $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ astfel incat $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k} \cup (X \setminus A)$ şi atunci $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k}$ deci $(D_{i_k})_{k \in \overline{1,n}}$ este o subacoperire finita pentru A. ■

Probleme propuse

1. Fie $X = N^*$ şi $d: X \times X \to R$, $d(x,y) = \left| \ln \frac{x}{y} \right|$. Sa se arate ca (X,d) este un spaţiu metric şi să se determine $B(3, \frac{1}{2})$, $B[3, \frac{1}{2}]$.

2. Să se arate că distanţa euclidiana $d: R^n \times R^n \to R$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $(\forall) x,y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ este o distanta pe R^n. Pentru $n = 2$ sa se determine imaginea geometrica a bilei $B((2,-1),3)$ relativ la d si la distanta d_1, unde $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$, $(\forall)$ $x,y \in R^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1,y_2)$.

3. Fie $X = L^\infty = \{(x_n) \subset R : (x_n) \text{ marginit}\}$ şi $d : X \times X \to R$, $d(x,y) = \sup_{n \geq 1} |x_n - y_n|$, $(\forall) x,y \in X$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Sa se arate ca (X,d) este un spatiu metric.

4. Fie (X_1,d_1), (X_2,d_2) spatii metrice, $X = X_1 \times X_2$, $d: X \times X \to R$, $d(x,y) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)}$, $(\forall)$ $x, y \in X$, $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Să se arate că (X,d) este un spatiu metric.

5. Fie d_1, d_2 metrici pe X. Spunem ca d_1 si d_2 sunt echivalente, $d_1 \approx d_2$ daca $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Sa se arate ca $d_1 \approx d_2 \Leftrightarrow (\exists)$ m, M > 0 astfel incat

$$m d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y),\ (\forall)\ x, y \in X.$$

6. Sa se arate ca pe R^n urmatoarele metrici sunt echivalente:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},\ d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ d_2(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|,$$

$(\forall)$ $x, y \in R^n$, $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y = (y_1,y_2, \dots, y_n)$.

Mai mult, orice două metrici pe R^n, sau mai general, pe un spatiu finit dimensional sunt echivalente.

7. Fie(X,d) spatiu metric, (x_n), $(y_n) \subset X$ doua siruri Cauchy. Atunci sirul $(d(x_n,y_n))$ este un sir Cauchy in R_+.

8. Sa se arate ca L^∞ este un spatiu Banach relativ la norma $||x|| = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n|$, $(\forall)$ $x = (x_n)_{n\geq 1}$.

9. Fie (X, d) spatiu metric, $A \subset X$, compacta, $a \in X \setminus A$. Atunci $d(a, A) = \sup\limits_{x\in A} d(a,x) > 0$ si exista $x_0 \in A$ asfel incat $d(a, A) = d(a, x_0)$.

10. Fie sirurile date prin termenul general $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Atunci

a) Şirul (x_n) este strict crescator iar sirul (y_n) este strict descrescator.

b) Sirurile (x_n) si (y_n) sunt convergente la o aceeasi limita. Limita comuna se noteaza cu e. Sa se arate ca $2 < e < 3$.

c) Folosind sirurile (x_n), (y_n) sa se arate ca sirul cu termenul general $z_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n$, este convergent. Limita sa se notează cu c. Sa se arate ca $c \in (0,1)$.

11. Sa se studieze convergenta sirurilor date prin termenul general:

$$\textbf{a) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}; \quad \textbf{b) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}};$$

$$\textbf{c) } x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k, \text{ unde } |q| < 1, |a_k| \leq 2, (\forall)\ k \geq 1.$$

12. Fie $x_0 > 0$ şi $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$, $(\forall)$ $n \geq 1$, unde $a > 0$. Sa se arate ca (x_n) este convergent si are limita $\sqrt{a}$.

13. Fie (x_n), $(y_n) \subset R$ astfel incat (y_n) este strict crescator si divergent .Sa se arate ca daca $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L \in \overline{R}$, atunci exista si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

(Lema lui Stolz-Cesaro)

14. Sa se arate, folosind exercitiul 13, ca daca (x_n) este un sir de numere strict pozitive iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \overline{R}$, atunci exista si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

15. Fie (x_n) un sir de numere reale. Sa se arate ca (x_n) contine cel putin un subsir monoton. Sa se deduca de aici ca multimea punctelor limita a unui sir este nevida.

16. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$, pentru

$$\textbf{a)}\ x_n = \sin\frac{n\pi}{4};\quad \textbf{b)}\ x_n = (-1)^n\frac{n}{2n+1}.$$

17. Daca $(x_n), (y_n) \subset R$ sunt doua siruri marginite, atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n + y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n + \lim\limits_{n\to\infty} \sup y_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n + y_n) \ge \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n + \lim\limits_{n\to\infty} \inf y_n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n y_n) \le (\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} \sup y_n)(x_n \ge 0, y_n \ge 0)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n y_n) \ge (\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} \inf y_n)(x_n \ge 0, y_n \ge 0)$.

18. Sa se arate ca sirul cu termenul general

$x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, (\cos\frac{1}{n})^{n^2}, \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)$, e convergent si sa se determine limita sa.

19. Sa se determine $a > 0$ astfel incat $f : R \to R$, $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$ sa fie o contractie.

20. Fie $f :[a, b] \to [a,b]$ derivabila astfel incat $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \lambda < 1$. Atunci f este o contractie.

21. Sa se arate ca ecuatia $x^3 + 12x - 1= 0$ are o singura radacina pe [0, 1]. Sa se determine aceasta radacina cu aproximație de patru zecimale.

22. Sa se studieze daca urmatoarele submultimi ale lui R^2 sunt marginite, deschise, inchise.

a) $A = [0,1) \times (1,2]$;

b) $A = \{(x,y)\in R^2 : x = y, y\in[1,3]\}$;

c) $A = \{(x,y)\in R^2 : x^2 - y^2 < 1\}$;

d) $A = [1,2) \times (\{\frac{1}{n} : n \ge 1\} \cup (2, 3])$.

Pentru fiecare sa se indice $\overset{o}{A}, \overline{A}, A'$, IzA, FrA..

CAPITOLUL 3

SERII DE NUMERE REALE

3.1. Serii convergente. Serii divergente

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ îi ataşăm şirul $(S_n)_{n\geq 1}$, unde $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2$, ..., $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$,...

În cazul în care şirul (S_n) este convergent şi are limita S se poate scrie $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, deci se dă un sens sumei cu o infinitate de termeni.

Definiția 3.1.1. Se numeste serie de termen general x_n perechea de şiruri $((x)_{n\geq 1},(S_n)_{n\geq 1})$, unde (S_n) se numeşte şirul sumelor parțiale.

O serie se notează formal astfel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n\in N^*} x_n$ sau $x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$

Definiția 3.1.2. O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeşte convergentă, pe scurt (C), dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este convergent.În acest caz $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se numeşte suma seriei şi scriem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S$.

În caz contrar seria se numeşte divergentă, pe scurt (D).Prin natura unei serii înțelegem proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.

Exemple.

1. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, q \in R$, numită şi seria geometrică. În acest caz

$x_n = q^n$ şi $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = q + q^2 + ... + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$, pentru $q \neq 1$ şi

$S_n = n$ pentru $q = 1$.

Rezultă că (S_n) este convergent dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi în acest caz $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$.

Rezultă, deci, că seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă $\Leftrightarrow |q| < 1$ şi în acest caz $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

2. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, numita şi seria armonică.

În acest caz $x_n = \frac{1}{n}$ şi $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Vom arăta că (S_n) nu e şir Cauchy.

Presupunem prin absurd că (S_n) este şir Cauchy, deci $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $((\forall) m, n \geq n_\varepsilon$ avem $|S_m - S_n| < \varepsilon$. Luănd $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $(\forall) m, n \geq n_0$ avem $|S_m - S_n| < \frac{1}{2}$. Pentru $m = 2n_0$ şi $n = n_0$ obținem

$$|S_{2n_0} - S_{n_0}| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + ... + \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{2}.$$

Pe de alta parte, $\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + ... + \frac{1}{2n_0} > n_0 . \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$, contradicție.

În concluzie (S_n) este divergent, deci seria armonică este divergentă.

Proprietați generale ale seriilor

Teorema 3.1.1. Dacă unei serii $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i se elimină sau i se adaugă un număr finit de termeni atunci natura seriei nu se schimbă; în caz de convergență se modifică doar suma.

Demonstrație. Presupunem că eliminăm termenii $x_{i_1}, x_{i_2}, ... x_{i_k}$, unde $i_1 < i_2 < ... < i_k$.

Fie (S_n) şirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi (T_n) şirul sumelor parțiale asociat seriei obținute prin eliminarea termenilor $x_{i_1}, x_{i_2}, ... x_{i_k}$.

Evident, avem $T_n = S_n - s$, $(\forall)$ $n > i_k$ unde $s = x_{i_1} + x_{i_2} + ... x_{i_k}$, de unde rezultă că (T_n) este convergent dacă şi numai dacă (S_n) este convergent şi deci seria $\sum_{n \in N^* \setminus A} x_n$, unde $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ are aceeaşi natură cu seria inițială $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Celălalt caz se tratează analog. ■

Teorema 3.1.2. (Condiția necesară de convergență).

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Fie $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ şi $S = \lim_{n \to \infty} S_n$. Atunci $x_n = S_n - S_{n-1}$, $(\forall) n \geq 2$, de unde $\lim_{n \to \infty} x_n = S - S = 0$. ■

Observații.

1. Reciproca nu este în general adevărată.

În acest sens considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă şi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Dacă pentru o serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ avem că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau nu există, atunci seria este divergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.

În acest caz $x_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \neq 0$**,** deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ este divergenta.

Teorema 3.1.3. (Criteriul lui Cauchy).

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall) p \geq 1$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$

Demonstrație. Fie $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Vom avea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C) \Leftrightarrow (S_n)$ este convergent iar (S_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall) p \geq 1$ avem $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\varepsilon > 0,$ $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall) p \geq 1$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$ ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, x \in R.$ Vom arăta că această serie este convergentă folosind criteriul lui Cauchy.

Fie $\varepsilon > 0, n, p \in N^*$. Vom avea

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

dacă $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, adică $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Fie $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ şi atunci $(\forall)n\geq n_\varepsilon$, $(\forall)p\geq 1$ vom avea $\left|x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{n+p}\right|<\varepsilon$,

deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ este convergenta.

Teorema 3.1.4. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ sunt convergente şi $\alpha,\beta\in R$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}y_n$.

Demonstrație. Rezultă imediat folosind şirurile sumelor parțiale asociate seriilor date. ■

3.2. Serii cu termeni pozitivi

Definiția 3.2.1. O serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ se numeşte cu termeni pozitivi dacă există $n_0\in N^*$ astfel încât $x_n\geq 0,(\forall)n\geq n_0$. De obicei considerăm $n_0=1$, deci $x_n\geq 0,(\forall)n\geq 1$.

Observație. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este cu termeni pozitivi, atunci şirul sumelor parțiale (S_n) este monoton crescător.

Într-adevăr, $S_{n+1}-S_n=x_{n+1}\geq 0$, $(\forall)$ $n\geq 1$.

Teorema 3.2.1. (Criteriul monotoniei). O serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este mărginit superior.

Demonstrație. "$\Rightarrow$" evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că (S_n) este mărginit superior. Cum (S_n) este şi monoton crescător, din teorema lui Weierstrass rezultă că este convergent deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. ■

Să remarcăm faptul că, dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ şi astfel vom scrie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, numită şi seria Riemann (sau seria armonică generalizată).

Vom avea $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ şi $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. Fie $n \in N^*$ şi $m \in N$ astfel încât $2^m \le n < 2^{m+1}$.

Vom avea :

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \ldots + \frac{1}{15^\alpha}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m)^\alpha + 1} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right) < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$$
$$+ 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^\alpha} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$$

deci (S_n) este mărginit superior şi atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta.

Teorema 3.2.2.(Criteriul de comparație de spețа I).

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, unde $0 \le x_n \le y_n, (\forall) n \ge 1$. Atunci:

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Cum $x_n \le y_n, (\forall) n \ge 1$ rezultă

$$S_n \le T_n, (\forall) n \ge 1. \tag{3.1}$$

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci (T_n) este convergent, deci mărginit superior şi din (3.1), rezultă că (S_n) este mărginit superior.

Folosind teorema 3.2.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Prin reducere la absurd, folosind a). ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha < 1$.

Evident avem $x_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \ge \frac{1}{n}, (\forall) n \ge 1$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergenta.

În concluzie seria Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Teorema 3.2.3. (Criteriul de comparație de spețа a-**II**-a).

Fie seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \ \text{cu } x_n > 0, y_n > 0, (\forall) n \ge 1 \text{ şi } \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}, (\forall) n \ge 1. \tag{3.2}$$

Atunci

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Demonstrație. Din (3.2) vom avea

$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{y_2}{y_1}, \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{y_3}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{y_n}{y_{n-1}}, (\forall)\ n \geq 2$. Înmulțind membru cu membru aceste inegalități obținem $\frac{x_n}{x_1} \leq \frac{y_n}{y_1}$, adică $x_n \leq \frac{x_1}{y_1} y_n, (\forall) n \geq 1$. Demonstrația se încheie folosind teorema 3.2.2. ■

Teorema 3.2.4. (Criteriul comparației la limită).

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $x_n, y_n > 0, (\forall) n \geq 1$. Presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. Atunci

a) Dacă $L \in (0, \infty)$ rezultă că cele două serii au aceeaşi natura.

b) Dacă L = 0 şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta, iar dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă.

c) Dacă $L = +\infty$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergentă, iar dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație.

a) Dacă $L \in (0, \infty)$, $(\exists) n_0 \in N$, astfel încât $\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3L}{2}$, $(\forall) n \geq n_0$, sau echivalent $\frac{L}{2} y_n < x_n < \frac{3L}{2} y_n$, $(\forall) n \geq n_0$.

Demonstrația se încheie folosind teorema 3.2.2.

b) Cum L = 0, $(\exists) n_0 \in N$, astfel încât $\frac{x_n}{y_n} \le 1$, $(\exists) n \ge n_0$ sau echivalent $x_n \le y_n$, $(\forall) n \ge n_0$ şi demonstraţia se încheie folosind din nou teorema 3.2.2.

c) Dacă $L = +\infty$, $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\frac{x_n}{y_n} \ge 1$, $(\forall)\ n \ge n_0$ sau echivalent $x_n \ge y_n$, $(\forall) n \ge n_0$ şi demonstraţia se încheie folosind din nou teorema 3.2.2. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ este divergenta şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3n+1}}}{n^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, \infty),$$ rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ este divergenta.

Teorema. 3.2.5. (Criteriul condensării).

Fie (x_n) un şir descrescător de numere pozitive. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeaşi natură.

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi (T_n) şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. Fie $n \in N^*$ şi $m \in N$ astfel încât $2^m \le n < 2^{m+1}$.Atunci

$$S_n = x_1+x_2+\ldots+x_n \le x_1+x_2+\ldots+x_{2^{m+1}-1} =$$
$$= x_1 + (x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6+x_7)+\ldots+(x_{2^m} +\ldots+ x_{2^{m+1}-1}) \le$$
$$\le x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^m x_{2^m} = T_m,$$ adică $S_n \le T_m$. (3.3)

Cum $2^m \le n$ avem

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^m} =$$
$$= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots + (x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}) \ge$$
$$\ge x_1 + x_2 + 2x_{2^2} + 2^2 x_{2^3} + \ldots + 2^{m-1} x_{2^m} \ge \frac{1}{2} T_m,$$ care împreună cu (3.3) conduce la $\frac{1}{2} T_m \le S_n \le T_m$, de unde rezultă imediat concluzia teoremei. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Avem $x_n = \frac{1}{n \ln n}$, deci (x_n) este un şir de numere pozitive monoton descrescător.

Pe de altă parte $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$, care este divergentă , deci seria dată este divergentă.

Teoremă 3.2.6. (Criteriul raportului sau al lui D'Alambert).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_n > 0, (\forall) n \geq 1.$ Atunci

a) Dacă $(\exists)$ k $\in$ [0, 1) şi $n_0 \in N$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq k, (\forall) n \geq n_0$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, (\forall)$ n ≥ n_0, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. a) Fără a restrânge generalitatea putem presupune n_0 = 1 şi atunci

$$x_n \leq k x_{n-1} \leq k^2 x_{n-2} \leq ... \leq k^{n-1} x_1, (\forall) n \geq 1.$$

Cum $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} x_1 = x_1 \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}$, care este convergenta, din teorema 3.2.2. rezultă ca şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

b) Vom avea

$x_n \geq x_{n-1} \geq x_{n-2} \geq \ldots \geq x_{n_0} > 0, (\forall)$ n ≥ n_0, deci $\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0$ şi din teorema 3.1.2 rezultă că seria este divergentă. ■

Consecință. (Criteriul raportului la limită).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n>0$, $(\forall) n \geq 1$. Presupunem că $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. Atunci

a) Dacă L < 1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă L > 1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. **a)** Fie L<k<1;atunci $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq k$, $(\forall) n \geq n_0$ şi folosind teorema 3.2.6 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Din definiția limitei $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, (\forall) n \geq n_0$ şi folosind teorema 3.2.6 rezultă că seria este divergentă. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Atunci $x_n = \frac{n^2}{2^n} > 0, (\forall) n \geq 1$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, deci seria este convergentă.

Teorema 3.2.7.(Criteriul rădăcinii sau al lui Cauchy).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_n > 0, (\forall) n \geq 1$. Atunci

a) Dacă $(\exists) k \in [0,1)$ şi $n_0 \in N$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \leq k, (\forall) n \geq n_0,$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \geq 1, (\forall) n \geq n_0$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

.

Demonstrație. **a)** Vom avea $x_n \le k^n, (\forall) n \ge n_0$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ este convergentă, folosind teorema 3.2.2 rezultă că şi seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ este convergenta, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

b) Vom avea $x_n \ge 1$, $(\forall) n \ge n_0$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n \ne 0$ şi din teorema 3.1.2 rezultă că seria este divergentă. ■

Consecință. (Criteriul rădăcinii la limită).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$, $(\forall) n \ge 1$. Presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$. Atunci

a) Dacă L<1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă L>1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație.

a) Fie L<q<1 şi din definiția limitei $(\exists)\ n_0 \in N$, astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \le q$, $(\forall) n \ge n_0$ şi folosind teorema 3.2.7 rezultă că seria este convergentă.

b) Din definiția limitei $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \ge 1$, $(\forall) n \ge n_0$ şi din teorema 3.2.7 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$. Avem $x_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n > 0$, $(\forall) n \ge 1$ şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

Teorema 3.2.8. (Criteriul lui Raabe-Duhamel).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n > 0,\ (\forall) n \geq 1.$ Atunci

a) Dacă există k>1 şi $n_0 \in N$ astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq k,\ (\forall) n \geq n_0$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in N$, astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1,\ (\forall) n \geq n_0$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație.

a) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $n_0 = 1$ şi atunci $nx_n - nx_{n+1} \geq kx_{n+1},\ (\forall) n \geq 1$, de unde

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \geq kx_2 \\ &2x_2 - 2x_3 \geq kx_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &nx_n - nx_{n+1} \geq kx_{n+1} \end{aligned}$$

Adunând aceste inegalități obținem

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nx_{n+1} \geq k(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1}), \text{ adică}$$

$$S_n - nx_{n+1} \geq k(S_n + x_{n+1} - x_1),\ (\forall) n \geq 1, \text{ de unde}$$

$$S_n(k-1) \leq kx_1 - nx_{n+1} - kx_{n+1} < kx_1,\ (\forall) n \geq 1, \text{ şi atunci } S_n < \frac{kx_1}{k-1},\ (\forall) n \geq 1,$$

adică şirul (S_n) este mărginit superior şi conform teoremei 3.2.1 seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Presupunem din nou n_o=1 şi atunci $nx_n - nx_{n+1} \leq x_{n+1},\ (\forall) n \geq 1$, de unde

$$x_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} x_n,\ (\forall) n \geq 1 \text{ şi } x_n \geq \frac{n-1}{n} x_{n-1} \geq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{n} x_1,\ (\forall) n \geq 1.$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_1$ este divergenta, din teorema 3.2.2 rezulta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta. ∎

Consecinţă. (Criteriul lui Raabe-Duhamel la limită).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n > 0,\ (\forall)n \geq 1$. Presupunem că există $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = L$.

Atunci

a) Dacă L>1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă L<1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstraţie. a) Fie L > k > 1. Din definiţia limitei $(\exists)n_0 \in N$ astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq k,\ (\forall)n \geq n_0$ şi folosind teorema 3.2.8 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

b) Din definiţia limitei $(\exists)\ n_0 \in N$, astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1,\ (\forall)n \geq n_0$ şi folosind teorema 3.2.8 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$.

În acest caz $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)} > 0,\ (\forall)n \geq 1$ şi

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Teorema 3.2.9. (Criteriul logaritmic).

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n > 0,\ (\forall)n \geq 1$. Atunci

a) Dacă $(\exists)k > 1$ şi $n_0 \in N$ astfel încât $\frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln\ n} \geq k,\ (\forall)\ n \geq n_0$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $(\exists)n_0 \in N$, astfel încât $\frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln\ n} \le 1, \ (\forall)\ n \ge n_0$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstratie.

a) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $n_0 = 1$ si atunci $\ln\frac{1}{x_n} \ge k \ln n, \ (\forall)\ n \ge 1$, de unde $\frac{1}{x_n} \ge n^k, \ (\forall) n \ge 1$, sau echivalent $x_n \le \frac{1}{n^k}, \ (\forall) n \ge 1$.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ este convergentă (deoarece k>1), folosind teorema 3.2.2 rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Presupunem din nou $n_0 = 1$ şi atunci $\ln\frac{1}{x_n} \le \ln n, \ (\forall)\ n \ge 1$, de unde $x_n \ge \frac{1}{n}, \ (\forall) n \ge 1$, şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergenta, folosid din nou teorema 3.2.2 rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta. ■

Folosind teorema 3.2.9 şi definiția limitei se obține imediat criteriul logaritmic la limită:

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \ x_n > 0, \ (\forall) n \ge 1$. Presupunem că $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n} = L$. Atunci:

a) Dacă L > 1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă L < 1, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

În acest caz, $x_n = \frac{\ln n}{n^2} > 0, (\forall)\ n \geq 2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n - \ln(\ln n)}{\ln n} = 2 > 1,$

de unde rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

3.3. Serii cu termeni oarecare

Definiția 3.3.1. O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in R$ se numeşte cu termeni oarecare dacă are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

Definiția 3.3.2. O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cu termeni oarecare se numeşte absolut convergentă(pe scurt (AC)), dacă seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cu termeni oarecare se numeşte semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Teorema 3.3.1. O serie absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație. Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă. Din criteriul lui Cauchy, pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)\ p \geq 1$ avem $\left| |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + ... + |x_{n+p}| \right| < \varepsilon$ şi atunci $(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon$ şi folosind din nou criteriul lui Cauchy rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta. ■

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^3+1}}$, $x \in R$. În acest caz $x_n = \frac{\sin nx}{\sqrt{n^3+1}}$ şi $|x_n| = \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n^3+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$, $(\forall) n \ge 1$. Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}(C)$ folosind teorema 3.2.2, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| (C)$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (A.C)$ şi din teorema 3.3.1 rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (C)$.

Teorema 3.3.2. (Criteriul lui Dirichlet).

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cu şirul sumelor parțiale mărginit. Dacă (y_n) este un şir monoton descrescător cu limita zero, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Fie $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ şi M>0 astfel încât $|S_n| \le M$, $(\forall) n \ge 1$.

Pentru $n, p \in N^*$ vom avea:

$$|T_{n+p} - T_n| = |x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + ... x_{n+p}y_{n+p}| =$$

$$= |y_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + y_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + ... + y_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})| =$$

$$= |-y_{n+1}S_n + S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2}) + ... + S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + y_{n+p}S_{n+p}| \le$$

$$\le y_{n+1}|S_n| + |S_{n+1}|(y_{n+1} - y_{n+2}) + ... + |S_{n+p-1}|(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + y_{n+p}|S_{n+p}| \le$$

$$\le My_{n+1} + M(y_{n+1} - y_{n+2}) + ... + M(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + My_{n+p} =$$

$$= 2My_{n+1} + M(y_{n+1} - y_{n+2}) + ... + M(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + My_{n+p} = 2My_{n+1}$$ (am folosit faptul că y_n>0 şi (y_n) monoton descrescător).

Fie $\varepsilon > 0$; cum $y_n \to 0, (\exists)\, n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \ge n_\varepsilon$, avem $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ şi atunci $(\forall) n \ge n_\varepsilon$ şi $(\forall) p \ge 1$, $|T_{n+p} - T_n| \le 2My_{n+1} < \varepsilon$, deci (T_n) este şir Cauchy.

Rezultă, deci, că (T_n) este convergent, adica seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. ■

Teorema 3.3.3. (Criteriul lui Abel).

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă şi (y_n) este un şir monoton şi mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, vom presupune că (y_n) este monoton şi descrescător cu limita $y \in R$. Fie $z_n = y_n - y, (\forall) n \geq 1$; atunci (z_n) este un şir monoton descrescător cu limita zero. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, are şirul sumelor parțiale mărginit, şi folosind criteriul lui Dirichlet rezulta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$ este convergentă

Avem $x_n y_n = x_n(z_n + y) = x_n z_n + y x_n, (\forall) n \geq 1$, şi cum seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n, \sum_{n=1}^{\infty} y x_n$ sunt convergente, rezulta că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. ■

3.4. Serii alternate

Definiția 3.4.1. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeste serie alternată dacă $x_n x_{n+1} < 0$, $(\forall) n \geq 1$.

Observatie. O serie alternată poate fi scrisă în una din următoarele două forme: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n$, sau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$, unde $x_n > 0, (\forall) n \in N^*$.

Teorema 3.4.1. (Criteriul lui Leibniz).

Dacă (x_n) este un şir monoton descrescator cu limita zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ are şirul sumelor parțiale mărginit (S_n=0 pentru n par şi S_n=1 pentru n impar) iar şirul (x_n) este monoton descrescător şi convergent la zero, rezultă, conform criteriului lui Dirichlet, că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ este convergentă. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Seria se scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$, unde $x_n=\frac{1}{n}>0,\ (\forall)n\geq 1$. Cum ($x_n$) este monoton descrescător şi $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ rezultă, conform criteriului lui Leibniz, că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergentă.

Observație. Cum seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă rezultă că seria este semiconvergentă.

Probleme propuse

1. Folosind definiția, să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}nq^n,\ |q|<1$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$; **e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$.

2. Folosind criteriile de convergență, să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n^4+n+1}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$;

f) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k},\ k\in R$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$; **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$; **j)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}, a > 0$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} x^n$, $a, b, x > 0$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^n + 3^n}, a > 0$; **m)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$;

n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^{2n^2}+1}}$; **o)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+x^2}}, x \in R$; **q)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$;

r) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$; **s)** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$;

3. Să se determine valorile parametrului real x pentru care seriile următoare sunt convergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

4. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 5a^{n+1}}{3^n}$, $|a| < 3$ este convergentă şi să se determine suma sa.

5. Folosind, eventual, seriile să se arate că:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, unde k>0, a>1;

b) şirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{2^k}$ este convergent.

6. Să se arate că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă şi are suma e.

7. Să se arate ca, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ converge atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

8. Să se arate că, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\,2}$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ este absolut convergentă.

CAPITOLUL 4

FUNCȚII ÎNTRE SPAȚII METRICE

4.1. Limita unei funcții într-un punct

Fie (X, d_1) , (Y, d_2) două spații metrice.

Dacă $a \in X, b \in Y, r > 0$ vom nota cu $B(a, r)$ şi $B(b, r)$ bilele deschise în X şi respectiv în Y.

Problema limitei într-un punct consta în cercetarea comportării funcției în vecinătatea unui punct fixat, mai precis ce se întâmplă cu valorile funcției atunci când argumentul său se apropie "din ce în ce mai mult" de punctul fixat.

Deoarece comportarea funcției în vecinătatea unui punct fixat se poate pune chiar dacă funcția nu este definită în acel punct, dar trebuie să existe puncte din vecinătatea lui în care funcția să fie definită, punctul dat trebuie să fie de acumulare.

Fie $f : A \subset X \to Y$ şi $a \in A'$.

Definiția 4.1.1. Un punct $L \in Y$ se numeşte limita funcției f în punctul a şi se notează $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ dacă $(\forall) V \in \vartheta(L), (\exists) U \in \vartheta(a)$ astfel încât $(\forall) x \in U \cap A, x \neq a$ rezultă $f(x) \in V$.

Teorema 4.1.1. (de caracterizare a limitei într-un punct).

Fie $f : A \subset X \to Y$, $a \in A'$ şi $L \in Y$. Următoarele afirmații sunt echivalente

a) $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

b) $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall) x \in A, x \neq a$ cu $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $d_2(f(x), L) < \varepsilon$;

c) $(\forall)(x_n) \subset A, x_n \neq a, x_n \to a$ rezultă că $f(x_n) \to L$.

Demonstrație.

a) $\Rightarrow$ **b)** Fie $\varepsilon > 0$ şi $V_\varepsilon = B(L,\varepsilon) \in \vartheta(L)$; atunci $(\exists) U_\varepsilon \in \vartheta(a)$ astfel încât $(\forall) x \in U_\varepsilon \cap A, x \neq a$ rezultă $f(x) \in V_\varepsilon$. Cum $U_\varepsilon \in \vartheta(a), (\exists) \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $B(a,\delta_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$ şi atunci $(\forall) x \in A, x \neq a$ cu $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $x \in B(a,\delta_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$ şi deci $f(x) \in V_\varepsilon = B(L,\varepsilon)$, adică $d_2(f(x),L) < \varepsilon$.

b) $\Rightarrow$ **c)** Fie $(x_n) \subset A, x_n \neq a, x_n \to a$ şi $\varepsilon > 0$; din b) $(\exists) \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall) x \in A, x \neq a$ cu $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x),L) < \varepsilon$.

Cum $x_n \to a, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $d_1(x_n, a) < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n \in B(a,\delta_\varepsilon), (\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi atunci $d_2(f(x_n),L) < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon$, adică $f(x_n) \to L$.

c) $\Rightarrow$ **a)** Presupunem prin absurd că $(\exists) V \in \vartheta(L)$ astfel încât $(\forall) U \in \vartheta(a)$ $(\exists) x_U \in U \cap A, x_U \neq a$ astfel încât $f(x_U) \notin V$. Luând $U_n = B\left(a, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{J}(a), (\forall) n \geq 1$ rezultă că există un şir $(x_n) \subset B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A, x_n \neq a$, deci $x_n \to a$ astfel încât $f(x_n) \notin V, (\forall) n \geq 1$, care contrazice faptul că $f(x_n) \to L$. ■

Observație. Din această teoremă rezultă că, dacă există două şiruri $(x_n), (x'_n) \subset A \setminus \{a\}$, convergente către a astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ sau cel puțin una nu există atunci funcția f nu are limită în punctul a.

Exemplu. Fie funcția $f : R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Fie şirul $(z_n) \subset R^2 \setminus \{(0,0)\}$, $z_n = \left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right) \to (0,0)$, unde $\alpha, \beta \in R$.

Avem $f(z_n) = \dfrac{\frac{\alpha}{n}\frac{\beta}{n}}{\frac{\alpha^2}{n^2} + \frac{\beta^2}{n^2}} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, adică limita şirului $(f(z_n))$ depinde de α şi β. Astfel, spre exemplu fie

$$z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \frac{1}{2};$$

$$z'_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f(z'_n) = \frac{2}{5}, \text{ deci } (\nexists) \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Observație. Din definiția cu şiruri a limitei unei funcții într-un punct şi folosind faptul că limita unui şir de puncte dintr-un spațiu metric este unică, rezultă că dacă $f : A \subset X \to Y$ are limită în $a \in A'$ atunci această limită este unică.

Dacă $X = R, Y = R$ şi $f : A \subset R \to R$, $f = f(x)$, f se numeşte funcție reală.

Dacă $X = R^k$, $k \geq 2$, $Y = R$ şi $f : A \subset R^k \to R$, $f = f(x_1,x_2,...,x_k)$, f se numeşte funcție reală de variabilă vectorială $x = (x_1, x_2,..., x_k)$, sau de k variabile reale x_1, $x_2,...,x_k$.

Dacă $X = R, Y = R^m$, $m \geq 2$ şi $f : A \subset R \to R^m, f = f(x)$, atunci $f(x) \in R^m, (\forall) x \in A$, deci $f(x)$ este de forma $f(x) = (f_1(x), f_2(x),..., f_m(x))$, $(\forall) x \in A$, unde $f_1, f_2,..., f_m : A \to R$.

În acest caz, funcția f este de forma $f = (f_1, f_2,..., f_m)$ şi o numim funcție vectorială de variabilă reală.

Dacă $X = R^k, k \geq 2, Y = R^m, m \geq 2$ şi $f : R^k \to R^m, f = f(x)$ atunci f este de forma $f = (f_1, f_2,..., f_m)$ şi o numim funcție vectorială de variabilă vectorială $x = (x_1, x_2,..., x_k)$ sau de k variabile reale x_1, $x_2,...,x_k$.

Folosind definiția limitei cu şiruri şi teorema de caracterizare a convergenței unui şir în spațiul metric $R^m, m \geq 1$, se obține imediat

Teorema 4.1.2. O funcție $f : A \subset R^k \to R^m, f = (f_1, f_2,..., f_m)$ are limită în $a \in A'$ egală cu $L = (L_1, L_2,..., L_m) \in R^m$ dacă şi numai dacă există simultan $\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i, i = \overline{1,m}$.

În acest caz $\lim_{x\to a} f(x) = \left(\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x),..., \lim_{x\to a} f_m(x)\right)$.

În continuare vom considera funcții cu valori reale $f : A \subset (X,d) \to R$.

Teorema 4.1.3. Fie $f,g : A \subset X \to R$ şi $a \in A'$. Dacă $(\exists)\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \in R$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \in R$ atunci

a) există $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$;

b) există $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = L_1 L_2$;

c) există $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$, dacă $L_2 \neq 0$ şi $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in A$.

Demonstrație. Rezultă imediat folosind definiția cu şiruri a limitei unei funcții într-un punct şi proprietățile cunoscute de la şiruri. ■

Teorema 4.1.4. (Criteriul majorării).

Fie $f,g : A \subset X \to R$, $a \in A'$ şi $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$|f(x) - L| \le g(x), (\forall) x \in V \cap A, x \neq a, \text{ unde } L \in R.$$

Dacă $(\exists)\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ atunci $(\exists)\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Demonstrație. Fie $(x_n) \subset A, x_n \neq a, x_n \to a$. Cum $x_n \to a$, $(\exists) n_0 \in N$, astfel încât $x_n \in V, (\forall) n \ge n_0$ şi atunci $|f(x_n) - L| \le g(x_n), (\forall) n \ge n_0$.

Cum $(\exists)\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ rezultă $g(x_n) \to 0$ şi atunci $f(x_n) \to L$, deci $(\exists)\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. ■

Exemplu. Fie limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

Cum $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2$, $(\forall)(x,y) \neq (0,0)$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$.

În continuare vom considera funcții reale de variabile reale, $f : A \subset R \to R$. Dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $A_1 = A \cap (-\infty, a) = \{x \in A : x < a\}$

atunci vom spune că a este punct de acumulare din stânga pentru A, adică este satisfăcută definiția punctului de acumulare, utilizându-se doar punctele $x \in A$ cu $x < a$.

Analog, dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $A_2 = A \cap (a, \infty) = \{x \in A : x > a\}$, atunci vom spune că a este punct de acumulare din dreapta pentru A.

Definiția 4.1.2. Fie $f : A \subset R \to R$, $a \in A'$, şi $A_1 = A \cap (-\infty, a)$.

Funcția f are limită la stânga în punctul a, egală cu L_s dacă $f\big|_{A_1}$ are limită în punctul a, adică $(\forall) V \in \vartheta(L_s)$, $(\exists) U \in \vartheta(a)$ astfel încât $(\forall) x \in U \cap A_1, x \neq a$, avem $f(x) \in V$.

Vom nota aceasta prin $L_s = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ sau $f(a - 0)$, $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

În mod analog se defineşte limita la dreapta în a care se notează $L_d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ sau f(a + 0), $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Limitele la stânga şi la dreapta într-un punct se numesc limite laterale.

Teorema 4.1.5. Fie $f : A \subset R \to R$ şi $a \in A_1'$.

Atunci $L_s = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir strict crescător $(x_n) \subset A_1$ cu $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to L_s$.

Demonstrație. Presupunem că există $L_s = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Din teorema de caracterizare a limitei într-un punct cu şiruri, rezultă că, în particular, pentru orice şir strict crescător $(x_n) \subset A_1$ cu $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to L_s$.

Reciproc, să presupunem că pentru orice şir strict crescător $(x_n) \subset A_1$ cu $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to L_s$.

Fie $(x_n) \subset A_1$ un şir arbitrar (deci $x_n < a$) cu $x_n \to a$. Atunci $f(x_n) \to L_s$, deoarece în caz contrar extragem un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ strict crescător cu limita a şi atunci $f(x_n) \to L_s$, contradicție. ∎

În mod analog se arată

Teorema 4.1.6. Fie $f : A \subset R \to R$ şi $a \in A_2'$.

Atunci $L_d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir strict descrescător $(x_n) \subset A$ cu $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to L_d$.

Legătura dintre limita unei funcții într-un punct şi limitele laterale în acel punct este dată de:

Teorema 4.1.7. Fie $f : A \subset R \to R$ şi $a \in A_1' \cap A_2'$.

Funcția f are limită în punctul a dacă şi numai dacă există limitele laterale şi acestea sunt egale.

În acest caz L = L_s = L_d.

Demonstrație. Dacă $(\exists) L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ atunci rezultă imediat că $(\exists) L_s = L$ şi L_d = L.

Reciproc, presupunem că $L_s = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L_d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Vom arăta că $(\exists) \lim\limits_{x \to a} f(x) = L = L_d = L_s$.

Fie $\varepsilon > 0$; atunci $(\exists) \delta'_\varepsilon > 0, \delta''_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(\forall) x \in A, x < a \text{ cu } |x - a| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L_s| < \varepsilon \text{ şi}$$

$$(\forall) x \in A, x > a \text{ cu } |x - a| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L_d| < \varepsilon \text{ .}$$

Luând $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$ rezultă că pentru $(\forall) x \in A, x \neq a$ cu $|x - a| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - L_s| < \varepsilon$, unde L_s = L_d, deci $(\exists) \lim\limits_{x \to a} f(x) = L = L_s = L_d$. ■

Observație. Fie $f : A \subset R \to R$ şi $a \in A'$. Dacă $a = \pm\infty$ şi L = $\pm\infty$, pentru a defini $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ folosim aceeaşi definiție 4.1.1 cu remarca că în acest caz considerăm vecinătăți ale punctului $\pm \infty$. Trecând la caracterizarea cu şiruri va rezulta că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dacă şi numai dacă $(\forall)(x_n) \in A, x_n \neq a$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ (în $\overline{R}$) rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ (în $\overline{R}$).

4.2. Funcții continue

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice şi $f : A \subset X \to Y$.

Definiția 4.2.1. Funcția f este continuă în punctul $a \in A$ dacă $(\forall) V \in \vartheta(f(a)), (\exists) U \in \vartheta(a)$ astfel încât $(\forall) x \in U \cap A$ rezultă $f(x) \in V$.

În caz contrar, funcția f este discontinuă în $a \in A$.

Intuitiv, funcția f este continuă în $a \in A$ dacă f(x) este "oricât de aproape" de $f(a)$ de îndată ce x este “suficient de aproape” de a.

Observație. Dacă $a \in A$ este un punct izolat atunci orice funcție $f : A \to Y$ este continuă în punctul a.

Analog cu teorema 4.1.1 obținem

Teorema 4.2.1. (de caracterizare a continuității într-un punct).

Fie $f : A \subset X \to Y$ şi $a \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente

a) f este continuă în a;

b) $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall) x \in A$, cu $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

c) $(\forall)(x_n) \subset A, x_n \to a$ rezultă că $f(x_n) \to f(a)$.

Demonstrație. Analog cu demonstrația teoremei 4.1.1. ■

Observație. Din teoremele 4.1.1 şi 4.2.1 rezultă că dacă $a \in A \cap A'$ atunci $f : A \subset X \to Y$ este continuă în punctul a dacă şi numai dacă $(\exists) \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definiția 4.2.2. Funcția $f : A \subset X \to Y$ este continuă pe A dacă este continuă în toate punctele din A.

Exemplu. Fie $f : R^k \to R$, liniară, adică

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $(\forall) \alpha, \beta \in R$, $x, y \in R^k$.

Se arată că o aplicație liniară f pe R^k este de forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \quad (\forall) x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in R^k, \text{ unde } c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in R^k.$$

Dacă $a \in R^k$, $a = (a_1, a_2, .., a_k)$ este fixat şi $x \in R^k$, $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in R^k$ este arbitrar, atunci:

$$|f(x) - f(a)| = \left|\sum_{i=1}^{k} c_i (x_i - a_i)\right| \le \left(\sum_{i=1}^{k} c_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - a_i)^2\right)^{1/2} = \|c\| \, \|x - a\|.$$

(am considerat pe R^k norma euclidiană).

Va rezulta că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, deci f este continuă în a şi cum a este arbitrar rezultă că f este continuă pe R^k.

În particular, funcțiile proiecție $pr_i : R^k \to R$, $pr_i(x) = x_i$, $(\forall)\, x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in R^k$, $i = \overline{1,k}$, sunt continue pe R^k.

Teorema 4.2.2. O funcție $f : A \subset R^k \to R^m$, $k \ge 1, m \ge 1, f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă funcțiile f_1, f_2,…,f_m sunt continue în a.

Demonstrație. Rezultă din definiția continuității cu şiruri şi teorema de caracterizare a convergenței unui şir în spațiul metric R^m, $m \ge 1$. ■

Observație. Din această teoremă şi exemplul anterior rezultă că o aplicație liniară $f : R^k \to R^m$ este continuă pe R^k.

Teorema 4.2.3. (de caracterizare a continuității pe un spațiu).

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice şi $f : X \to Y$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente

a) f este continuă pe X;

b) $(\forall) D \subset Y$, deschisă $\Rightarrow f^{-1}(D)$ este deschisă în X;

c) $(\forall) F \subset Y$, închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ este închisă în X;

d) $(\forall) A \subset X \quad \Rightarrow \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demonstrație.

a) $\Rightarrow$ **d)** Fie $A \subset X$ şi $y \in f(\overline{A})$, $y = f(x)$, cu $x \in \overline{A}$. Cum $x \in \overline{A}$, $(\exists)(x_n) \subset A$ astfel încât $x_n \to x$.

Cum f este continuă în x, rezultă $f(x_n) \to f(x) = y$, deci $y \in \overline{f(A)}$ şi astfel am arătat că $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

d) $\Rightarrow$ **c)** Fie $F \subset Y$, închisă, adică $F = \overline{F}$ în Y, şi fie $A = f^{-1}(F)$. Conform ipotezei:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F \text{, de unde}$$

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A \text{ ,}$$

şi cum $A \subset \overline{A}$, rezultă $A = \overline{A}$, deci $A = f^{-1}(F)$ este închisă în X.

c) $\Rightarrow$ **b)** Fie $D \subset Y$, deschisă; atunci $F = Y \setminus D$ este închisă.

Conform ipotezei, $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus D)$ este închisă în X, de unde $X \setminus f^{-1}(F) = X \setminus \left[f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)\right] = f^{-1}(D)$, şi cum $f^{-1}(F)$ este închisă, rezultă că $f^{-1}(D)$ este deschisă.

b) $\Rightarrow$ **a)** Fie $a \in X$. Vom arăta că f este continuă în a.

Fie $D = B(f(a), \varepsilon) \subset Y$, deschisă. Conform ipotezei $f^{-1}(D) \subset X$ este deschisă şi cum $a \in f^{-1}(D)$, $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $B(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(D)$, de unde rezultă că $f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(a), \varepsilon)$, adică f este continuă în a. ■

Fie $f : A \setminus \{a\} \subset X \to Y$, unde $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in Y$, atunci funcția $\bar{f} : A \to Y$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\ L & \text{dacă } x = a \end{cases}$$ prelungeşte funcția f şi este continuă în punctul a.

În acest caz, spunem că $\bar{f}$ este prelungirea prin continuitate a lui f.

Exemplu.

Fie $f : R \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, funcția f poate fi prelungită prin continuitate în punctul 0.

Prelungirea ei este funcția $\bar{f}: R \to R$, $\bar{f}(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x=0 \end{cases}$.

Definiția 4.2.3. O aplicație $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ se numeşte izomorfism topologic sau homeomorfism dacă:

a) f este bijectivă;

b) funcțiile f şi f^{-1} sunt continue.

În acest caz, spunem că spațiile X şi Y sunt homeomorfe. O aplicație ce satisface condiția b) se mai numeşte şi bicontinuă.

Să observăm că dacă f este homeomorfism atunci şi f^{-1} este un homeomorfism.

Dacă $f: X \to Y$ este un homeomorfism spunem că spațiile metrice (X,d_1), (Y,d_2) sunt homeomorfe.

Exemplu. Funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^5$ este homeomorfism a lui R pe R.

Definiția 4.2.4. O aplicație $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ se numeşte izometrie dacă

a) f este bijectivă;

b) $d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y)$, $(\forall)\, x,y\in X$.

În acest caz, spunem că spațiile metrice (X,d_1), (Y,d_2) sunt izometrice.

Să observăm că dacă f este izometrie de la X la Y atunci şi f^{-1} este o izometrie de la Y la X.

Exemplu. Fie $a\in R^n$ şi $f:R^n\to R^n$, $f(x)=x+a$.

Este evident faptul că f este o bijecție, iar

$\| f(x)-f(y) \| = \| (x+a)-(y+a) \| = \| x-y \|$, $(\forall) x,y\in R^n$, deci f este o izometrie.

Rezultă că orice translație este o izometrie.

Să observăm, de asemenea, că orice izometrie este un homeomorfism. Într-adevăr, fie $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ izometrie.

Vom arăta că f este continuă. Fie $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$, arbitrar. Vom avea:

$$f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)) = \{x \in X : f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)\} =$$

$$= \{x \in X : d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\} = \{x \in X : d_1(x, x_0) < \varepsilon\} = B(x_0, \varepsilon),$$

deci f este continuă în x_0 şi atunci pe X.

Analog se arată că f^{-1} este continuă.

4.3. Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 4.3.1. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice şi $f : X \to Y$, continuă. Dacă $A \subset X$ este compactă, atunci $f(A)$ este compactă în Y.

Demonstrație. Fie $(D_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă în Y pentru $f(A)$, adică $f(A) \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$, $D_i \subset Y$ deschisă $(\forall)\, i \in I$.

Atunci

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$$

Cum f este continuă, din teorema 4.2.3, $f^{-1}(D_i)$ este deschisă în X, $(\forall) i \in I$ şi cum A este compactă în X, există $J \subset I$, finită astfel încât $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} f^{-1}(D_i)$, de unde

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(D_i)) \subset \bigcup_{i \in J} D_i$$

adică $(D_i)_{i \in J}$ este o subacoperire finită pentru $f(A)$.

Prin urmare, $f(A)$ este compactă în Y. ■

Corolarul 4.3.1. Orice funcție continuă pe un compact dintr-un spațiu metric este mărginită.

Demonstrație. Dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă şi $A \subset X$ este compactă, din teorema 4.3.1 rezultă că f(A) este compactă şi atunci este închisă şi mărginită în Y. ■

Definiția 4.3.1. Fie $f:(X,d)\to R$, $A\subset X$ şi $M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in A} f(x)$. Spunem că:

i) Funcția f îşi atinge marginea inferioară pe A dacă $(\exists)a\in A$ astfel încât $m=f(a)$.

ii) Funcția f îşi atinge marginea superioară pe A dacă $(\exists)b\in A$ astfel încât $M=f(b)$.

iii) Funcția îşi atinge marginile pe A dacă îşi atinge marginea superioară cât şi marginea inferioară.

Teorema 4.3.2. (Weierstrass). Dacă A este o submulțime compactă a spațiului metric (X,d) şi $f:A\to R$ este continuă atunci f este mărginită pe A şi îşi atinge marginile.

Demonstrație. Din corolarul 4.3.1 avem că $f(A)$ este mărginită în R.

Fie $M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$ şi $m=\inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Din definiția marginii inferioare există un şir $(x_n)\subset A$ astfel încât $f(x_n)\to m$ şi cum A este compactă, există un subşir (x_{k_n}) al lui $(x_n)\subset A$, convergent la un punct din A, $x_{k_n}\to a\in$ A.

Cum f este continuă, avem $f(x_{k_n})\to f(a)$ şi cum $f(x_{k_n})\to m$, folosind unicitatea limitei unui şir convergent într-un spațiu metric, rezultă f(a) = m.

Folosind definiția marginii superioare se arată în mod asemănător că $(\exists)b\in A$ astfel încât f(b) = M. ■

Observație. În particular, dacă $X=R$, A = [a, b], $a,b\in R$, $a<b$ se obține teorema lui Weierstrass cunoscută din liceu:

Teorema 4.3.3. Dacă f: [a, b] →R este continuă atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe [a, b].

Definiția 4.3.2. Fie (X,d) spațiu metric. O submulțime $A \subset X$ se numeşte conexă dacă nu există două mulțimi deschise $D_1, D_2 \subset X$ cu proprietățile

i) $D_1 \cap A \neq ø$, $D_1 \cap A \neq ø$;

ii) $A \subset D_1 \cup D_2$;

iii) $D_1 \cap D_2 \cap A = ø$.

În caz contrar, spunem că A este neconexă.

Spunem că spațiul metric (X,d) este conex dacă nu există două mulțimi deschise $D_1, D_2 \subset X$ nevide şi disjunte astfel încât $X = D_1 \cup D_2$.

Exemple.

1. $A \subset R$, A = (-2, 1] ∪ [5, 6) nu este conexă.

2. $A \subset R^2$, $A = \{(x,y) \in R^2 : 1 < x^2 + y^2 < 3\}$ este o mulțime conexă.

Teorema 4.3.4. O submulțime nevidă $A \subset R$ este conexă dacă şi numai dacă A este interval.

Pentru demonstrație se poate consulta [11]. ■

Teorema 4.3.5. Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ spații metrice, $A \subset X$, conexă şi $f : A \to Y$, continuă. Atunci f(A) este conexă în Y.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că $f(A)$ nu este conexă. Atunci există două mulțimi nevide $D_1, D_2 \subset Y$ deschise astfel încât

$D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \varnothing$, $D_1 \cap f(A) \neq \varnothing$, $D_1 \cap f(A) \neq \varnothing$ şi $f(A) \subset D_1 \cap D_2$.

Cum f este continuă, mulțimile $\tilde{D}_1 = f^{-1}(D_1), \tilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în X. În plus, $\tilde{D}_1 \neq \varnothing, \tilde{D}_2 \neq \varnothing$, $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \cap A = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \varnothing$, $\tilde{D}_1 \cap A \neq \varnothing$, $\tilde{D}_2 \cap A \neq \varnothing$, iar $A \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$,ceea ce arată că A este neconexă, absurd.

■

Corolarul 4.3.2. (Teorema valorii intermediare).

Fie (X,d) un spațiu metric, $A \subset X$, conexă, $f : A \to R$, continuă şi $a,b \in A$ astfel încât $f(a) < f(b)$.

Atunci $(\forall)\lambda \in (f(a), f(b))$, $(\exists)c \in A$, astfel încât $f(c) = \lambda$.

Demonstrație. Din teorema 4.3.5 rezultă că $f(A)$ este conexă în R şi din teorema 4.3.4 $f(A)$ este un interval în R.

Cum $f(a), f(b) \in f(A)$ rezultă $(f(a), f(b)) \subset f(A)$ şi demonstrația este încheiată. ■

Teorema 4.3.6. Fie $f, g : (X, d) \to R$, continue şi $\lambda \in R$. Atunci

a) $f + g, fg, \lambda f, \lambda g$ sunt continue pe X;

b) $\frac{f}{g}$ (unde $g(x) \neq 0, (\forall) x \in X$) este continuă pe X;

c) $|f|$ este continuă pe X.

Demonstrație. Rezultă imediat folosind caracterizarea cu şiruri. ■

Teorema 4.3.7. Fie $f : A \subset (X, d) \to R$, continuă în $a \in A$ şi $f(a) \neq 0$. Atunci există o vecinătate V a lui a astfel încât f are semn constant pe $V \cap A$.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea să presupunem că $f(a) > 0$. Fie $\lambda \in R$ astfel încât $f(a) > \lambda > 0$. Atunci $(f(a) - \lambda, f(a) + \lambda) \in \vartheta(f(a))$, în R şi cum f este continuă în a, $(\exists) V \in \mathcal{J}$ (a) astfel încât $(\forall) x \in V \cap A$ avem

$$f(x) \in (f(a) - \lambda, f(a) + \lambda), \text{ de unde } f(x) > f(a) - \lambda > 0,\ (\forall) x \in V \cap A. \quad ■$$

Continuitate laterală

Definiția 4.3.3. Fie $f : D \to R$, $D \subset R$ şi $a \in \text{Int}\, D$.

i) Funcția f este continuă la stânga în a dacă $(\exists) f(a - 0) = f(a)$.

ii) Funcția f este continuă la dreapta în a dacă $(\exists) f(a + 0) = f(a)$.

Folosind teorema de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale (teorema 4.1.7) se obține:

Teorema 4.3.8. Fie $f : D \to R$, $D \subset R$ şi $a \in \text{Int}\, D$.

Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în a.

4.4. Funcții uniform continue

Definiția 4.4.1. O funcție $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ se numeşte uniform continuă pe X dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,(\exists)\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)\ x,y\in X$ cu $d_1(x,y)<\delta_\varepsilon$ rezultă $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Observații. 1. În timp ce noțiunea de continuitate are un caracter local, cea de uniform continuitate are un caracter global, ea definindu-se pe o mulțime.

2. Din definiție rezultă că, dacă există două şiruri $(x_n),(y_n)\subset X$ astfel încât $d_1(x_n,y_n)\to 0$ şi $d_2(f(x_n),f(y_n))\not\to 0$ atunci f nu este uniform continuă

3. Din definiție rezultă că, dacă f este uniform continuă pe *X* atunci f este continuă pe X.

Exemplu. Fie funcția f : (0,1]→R, $f(x)=\frac{1}{x}$.

Luând $x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{1}{2n}, n\ge 1$ avem $|x_n-y_n|\to 0$ şi $|f(x_n)-f(y_n)|=n\to\infty$, deci f nu este uniform continuă pe (0,1]. Să observăm totuşi că f este continuă pe (0,1].

Din acest exemplu rezultă că o funcție continuă nu este în general uniform continuă.

Teorema 4.4.1. (Cantor). Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ spații metrice $A\subset X$, compactă şi $f:A\to Y$ continuă. Atunci f este uniform continuă pe A.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că f nu este uniform continuă, deci $(\exists)\varepsilon_0>0$ asfel încât $(\forall)\delta>0$, $(\exists)x_\delta,y_\delta\in A$ cu $d_1(x_\delta,y_\delta)<\delta$ şi $d_2(f(x_\delta),f(y_\delta))\ge\varepsilon_0$.

Luând $\delta=\frac{1}{n}$, cu $n\ge 1$, rezultă că există două şiruri (x_n), (y_n) din A cu $d_1(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$ şi $d_2(f(x_n),f(y_n))\ge\varepsilon_0$. Cum A este compactă $(\exists)x,y\in A$ şi două subşiruri $(x_{k_n})\subset(x_n)$ şi $(y_{k_n})\subset(y_n)$ astfel încât $x_{k_n}\to x$, $y_{k_n}\to y$. Cum $d_1(x_{k_n},y_{k_n})<\frac{1}{k_n}\to 0$, vom avea $d(x,y)\le d(x,x_{k_n})+d(x_{k_n},y_{k_n})+d(y_{k_n},y)\to 0$, pentru $n\to\infty$, deci $d(x,y)=0$ şi atunci x = y.

Cum f e continuă avem $f(x_{k_n}) \to f(x), f(y_{k_n}) \to f(y)$ şi atunci

$\varepsilon_0 \le d_2(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \le d_2(f(x_{k_n}), f(x)) + d_2(f(y_{k_n}), f(y)) \to 0$, pentru $n \to \infty$, contradicție. ■

Probleme propuse.

1. Să se studieze existența limitelor:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x-2y}{x^2+3y}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$; **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{x^2+y^2}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin x)e^x$; **f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{x+y}$;

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y^2}$; **h)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; **i)** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,+\infty)} \left(1+\frac{x}{y}\right)^y$.

2. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f:R\to R$, $f(x,y) = \begin{cases} x, & x\in Q \\ x^2, & x\in R\setminus Q \end{cases}$;

b) $f:R^2\to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

c) $f:R^2\to R^2$, $f(x) = \left(e^x\sin y, \begin{cases} x+a, & x<0 \\ e^x, & x\ge 0 \end{cases}\right)$, unde $a\in R$.

3. Fie $f:D\subset R\to R$, monotonă. Să se arate că f are limite laterale în toate punctele de acumulare.

4. Fie $f,g:(X,d_1)\to(Y,d_2)$, continue. Să se arate că mulțimea $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ este închisă în X.

5. Fie (X,d) spațiu metric, $A\subset X, A\ne\emptyset$ şi $f:X\to R$, $f(x)=d(x,A)=\inf\limits_{a\in A} d(x,a)$. Să se arate că f este continuă pe X.

6. Fie $f,g:(X,d)\to R$, continue. Să se arate că mulțimea $A=\{x\in X: f(x)<g(x)\}$ este deschisă în X.

7. Să se determine funcțiile continue $f:R\to R$ cu proprietatea:
$f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x, y \in R$.

8. Fie $f:I\to R, I\subset R$, interval, f monotonă şi
$D_f=\{\,x\in I : f \text{ discontinuă în } x\}$. Să se arate că D_f este cel mult numărabilă.

9. Fie $f:R\to R$ continuă şi mărginită. Să se arate că f are cel puțin un punct fix, adică $(\exists)\, x_0\in R$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.

10. Fie spațiul metric (L^∞, d), unde:

$L^\infty=\{\,(x_n)\subset R : (x_n) \text{ mărginit } \}$, şi

$d(x,y)=\sup\limits_{n\in N^*}|\,x_n-y_n|$, $(\forall)\, x,y\in L^\infty$, $x=(x_n), y=(y_n)$.

Să se arate că L^∞ nu este compact.

11. Să se arate că funcția $f:R\to R$, $f(x)=\sin x$ este uniform continuă pe R.

12. Fie (X,d) un spațiu metric şi $x_0\in X$. Să se arate că funcția $f : X \to R$, $f(x)=d(x,x_0)$ este uniform continuă pe X.

13. Să se studieze uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

b) $f:(1,2\,]\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

c) $f:R\to R$, $f(x)=\sin x^2$;

d) $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x}$;

e) $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to R$, $f(x,y)=\dfrac{x+1}{y}$.

14. Fie $a\geq 0$ şi funcția $f:(a,\infty)\to R$, $f(x)=\ln x$.

Să se arate că f este uniform continuă pe (a, ∞) dacă şi numai dacă $a > 0$.

15. Fie $f : R \to R$ continuă şi periodică.

Atunci f este uniform continuă.

16. Fie $f, g : (X, d) \to R$ uniform continue. Atunci :

a) $f + g$ este uniform continuă.

b) dacă f şi g sunt mărginite $\Rightarrow fg$ este uniform continuă.

CAPITOLUL 5

DERIVABILITATEA ŞI DIFERENȚIALITATEA FUNCȚIILOR REALE DE VARIABILĂ REALĂ

5.1. Proprietăți de bază ale derivatei.

Definiția 5.1.1. Fie $f : D \subset R \to R$, $x_0 \in D \cap D'$.

Funcția f are derivată în x_0 dacă există în $\overline{R}$ următoarea limită:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ (sau } \frac{df}{dx}(x_0)\text{)}.$$

Dacă, în plus derivata $f'(x_0)$ este finită, spunem că funcția f este derivabilă în x_0.

Propoziția 5.1.1. Dacă $f : D \subset R \to R$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ atunci f este continuă în x_0.

Demonstrație. Din ipoteză avem că $(\exists) \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$.

Pentru $(\forall) x \in D, x \neq x_0$ avem

$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, de unde rezultă prin trecere la limită: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0. ■

Observație. Reciproca acestei afirmații nu este în general adevărată. În acest sens, fie $f : R \to R$, $f(x) = |x|$. Evident, f este continuă pe R dar nu este derivabilă în x_0=0.

Definiția 5.1.2. Funcția $f: D \subset R \to R$ este derivabilă pe $A \subset D$ dacă este derivabilă în orice punct din A.

În acest caz se poate defini funcția $f': A \to R$, $x \to f'(x)$, numită derivata funcției f.

Definiția 5.1.3. Fie $D \subset R$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru $D_1 = D \cap (-\infty, x_0)$ (respectiv pentru $D_2 = D \cap (x_0, \infty)$).

Funcția f are derivată la stânga (respectiv la dreapta) în x_0, dacă $(\exists) \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \overline{R}$, (respectiv $(\exists) \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \in \overline{R}$).

Numărul $f'_s(x_0) \in \overline{R}$ (respectiv $f'_d(x_0) \in \overline{R}$) se numeşte derivata la stânga (respectiv la dreapta) a lui f în x_0.

Dacă în plus $f'_s(x_0) \in R$ (respectiv $f'_d(x_0) \in R$), spunem că f este derivabilă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0.

Observație. Folosind teorema de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale rezultă că o funcție $f: D \subset R \to R$ este derivabilă în $x_0 \in D$ (care este punct de acumulare atât la stânga cât şi la dreapta lui D) dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0, iar

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0).$$

Reamintim din liceu proprietățile de bază ale funcțiilor derivabile:

Teorema 5.1.1. Fie $I, J \subset R$, intervale, $f: I \to J$, $g: J \to R$. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi g este derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in J$ atunci $g \circ f: I \to R$ este derivabilă în x_0 şi $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

Dacă f este derivabilă pe I şi g este derivabilă pe J atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I şi $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.

Teorema 5.1.2. Fie $I, J \subset R$, intervale şi $f : I \to J$ continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă f^{-1} este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ şi $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Definiția 5.1.4. Fie $f : D \subset R \to R$. Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f dacă $(\exists) V \in \vartheta(x_0)$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$ (respectiv $\leq$), $(\forall) x \in V \cap D$.

Dacă aceste inegalități au loc $(\forall) x \in D$, atunci x_0 se numeşte punct de minim (respectiv de maxim) global.

Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de extrem local dacă este punct de minim local sau de maxim local.

Teorema 5.1.3. (Fermat).

Fie $f : I \subset R \to R$, I interval. Dacă $x_0 \in \overset{o}{I}$ este punct de extrem local pentru f şi f este derivabilă în x_0 atunci $f'(x_0) = 0$.

Definiția 5.1.5. Fie $f : I \subset R \to R$, I interval. Un punct $x_0 \in \overset{o}{I}$ în care f este derivabilă şi $f'(x_0) = 0$ se numeşte punct critic (sau staționar) pentru f.

Observații.

1. Dacă $x_0 \notin \overset{o}{I}$, atunci concluzia teoremei lui Fermat nu este întotdeauna adevărată.

În acest sens, fie funcția $f : [0,1] \to R,\ f(x) = x$. Atunci $x_0 = 0$ este punct de minim pentru f şi $f'(0) \neq 0$.

2. Reciproca teoremei lui Fermat nu este în general adevărată. În acest sens fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^3$. Atunci $f'(0) = 0$ dar $x_0 = 0$ nu este un punct de extrem local.

Teorema 5.1.4. (Teorema lui Rolle).

Fie funcția $f : [a,b] \to R$, unde $a, b \in R, a < b,$ f este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), $f(a) = f(b)$. Atunci $(\exists) c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema 5.1.5. (Teorema lui Cauchy).

Fie $f:[a,b]\to R$ două funcții continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) şi $g'(x)\neq 0$, $(\forall)x\in$ (a,b). Atunci $(\exists)c\in(a,b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema 5.1.6. (Teorema lui Lagrange).

Fie $f:[a,b]\to R$ continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b). Atunci $(\exists)c\in(a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Din teorema lui Lagrange se obțin cu uşurință următoarele două consecințe:

Propoziția 5.1.1. Fie $f:I\subset R\to R$, I interval, f derivabilă pe I.
Atunci:

a) Dacă $f'\geq 0$ pe I rezultă că f este crescătoare pe I;

b) Dacă $f'\leq 0$ pe I rezultă că f este descrescătoare pe I;

c) Dacă $f'=0$ pe I rezultă că f este constantă pe I.

Propoziția 5.1.2. Fie $f:I\subset R\to R$, I interval, f continuă pe I şi $x_0\in I$ astfel încât f este derivabilă pe $I\setminus\{x_0\}$ şi $(\exists)\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ şi este finită.

Atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

Teorema 5.1.7. (Regula lui L'Hospital).

Fie $f,g:(a,b)\to R$ unde $-\infty\leq a<b\leq+\infty$. Presupunem că

i) f,g sunt derivabile pe (a,b) şi $g'\neq 0$ pe (a,b);

ii) $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\overline{R}$;

iii) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}g(x)=0$ (sau $\pm\infty$).

Atunci $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

5.2. Diferențiala unei funcții

Fie $I \subset R$ interval deschis, $f: I \to R$ şi $x_0 \in I$.

Definiția 5.2.1. Funcția f este diferențiabilă în x_0 dacă $(\exists) A \in R$ astfel încât

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \qquad (5.1)$$

Observație. Luând $\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$.

rezultă că (5.1) se scrie echivalent:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), (\forall) x \in I, \qquad (5.2)$$

unde $A \in R$, $\alpha: I \to R$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$.

Teorema 5.2.1. Fie $I \subset R$ interval deschis. Funcția $f: I \to R$ este diferențiabilă în $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă este derivabilă în x_0.

Demonstrație. Presupunem mai întâi că f este diferențiabilă în x_0. Conform definiției $(\exists)\, A \in R$, $\alpha: I \to R$, continuă în x_0, $\alpha(x_0) = 0$ astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), (\forall) x \in I, \text{ de unde}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x),\ (\forall) x \in I,\ x \neq x_0 .$$

Cum $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$, deci f este derivabilă în x_0.

Reciproc, fie f derivabilă în x_0 şi fie $\alpha: I \to R$,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}.$$

Evident avem $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)=0$ şi din definiția lui α avem

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0), (\forall)\, x\in I, \tag{5.3}$$

deci f este diferențiabilă în x_0, iar $A=f'(x_0)$. ■

Observație. Teorema 5.2.1 exprimă faptul că noțiunile de diferențiabilitate şi derivabilitate sunt echivalente.

Definiție. Fie $f: I\subset R\to R$, I interval deschis, f derivabilă în $x_0\in I$.

Funcția $T: R\to R$ definită prin $T(h)=f'(x_0)h$, $(\forall) h\in R$ se numeşte diferențiala funcției f în x_0 şi se notează cu $df(x_0)$, adică $df(x_0)(h)=f'(x_0)h$, $(\forall)\, h\in R$.

Observație. Dacă f este diferențiabilă în x_0, din (5.3) rezultă că, pentru x într-o vecinătate V a lui x_0, avem aproximarea

$$f(x)-f(x_0)\cong f'(x_0)(x-x_0), \tag{5.4}$$

adică creşterea funcției într-o vecinătate a punctului x_0, Δf se poate aproxima printr-o creştere liniară $f'(x_0)\Delta x$.

Notând $x-x_0=h$, relația (5.4) se mai scrie:

$$f(x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\,h=df(x_0)\,h.$$

În cazul particular, în care $f(x)=x$ avem $f'(x_0)=1$ şi atunci $dx(x_0)(h)=h$, $(\forall) h\in R$.

Notând cu dx diferențiala funcției identice, (deci $dx: R\to R$, $dx(h)=h$, $(\forall) h\in R$), obținem $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

Dacă f este derivabilă pe I atunci vom avea $df(x)=f'(x)dx$, $(\forall)\, x\in I$.

5.3. Derivate şi diferențiale de ordin superior

Fie $I\subset R$ un interval deschis, $f: I\to R$ derivabilă pe I şi $f': I\to R$ derivata sa.

Definiția 5.3.1. Funcția f este de două ori derivabilă în x_0 dacă funcția f' este derivabilă în x_0. În acest caz, derivata lui f' în x_0 se mai numeşte derivata a doua a lui f în x_0 şi se notează cu $f''(x_0)$ (sau $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$).

Dacă f' este derivabilă pe I atunci derivata lui f' se numeşte derivata a doua (sau de ordinul doi) a lui f şi se notează cu f''.

Prin recurență se definesc derivatele de ordin superior:

Definiția 5.3.2. Fie $f: I \subset R \to R$, I interval deschis.

Funcția f este de $n(n \geq 2)$ ori derivabilă în x_0 dacă f este de $(n-1)$ ori derivabilă pe o vecinătate V a lui x_0 şi dacă derivata de ordin $(n-1)$, notată prin $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0. În acest caz derivata lui $f^{(n-1)}$ în x_0 se mai numeşte derivata de ordinul n a lui f în x_0 şi se notează cu $f^{(n)}(x_0)$ (sau $\frac{d^nf}{dx^n}(x_0)$).

Funcția f este de n ori derivabilă pe I dacă este de n ori derivabilă în toate punctele din I.

Definiția 5.3.3. Fie $f: I \subset R \to R$, I interval deschis.

Funcția f este de clasă C^n, $(n \geq 1)$ pe I şi scriem $f \in C^n(I)$ dacă f este de n ori derivabilă pe I şi derivata de ordin n este continuă pe I.

Vom nota $C^0(I) = \{f: I \to R, f$ continuă$\}$;

$C^\infty(I) = \{f: I \to R, f$ indefinit derivabilă pe I, adică este derivabilă de n ori pe I, $(\forall) n \in N^*\}$.

Teorema 5.3.1. Fie $I \subset R$ interval deschis, $n \in N^*$, $f, g \in C^n(I)$, $\alpha, \beta \in R$. Atunci $\alpha f + \beta g$, $fg \in C^{(n)}(I)$ şi

i) $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta f^{(n)}$;

ii) $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$.

Formula lui Taylor

Fie $f: I \subset R \to R$, I interval deschis, $x_0 \in$ I, n $\in$ N*, iar funcția f de n ori derivabilă pe I.

Ne propunem să aproximăm valorile funcției f în vecinătatea lui x_0 printr-un polinom de grad n.

Căutăm un polinom $T_n \in R[X]$ de grad n care să aproximeze valorile funcției f într-o vecinătate a lui x_0 şi să verifice în plus condițiile

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0), ...,\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{5.5}$$

Considerăm T_n descompus după puterile lui $(x - x_0)$

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n$$

Folosind relațiile (5.5) vom avea

$$a_0 = f(x_0)\ ,\ a_1 = (x_0)\ ,\ \dots\ ,\ a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Astfel obținem

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \text{ unde } x \in I.$$

Polinomul T_n se numeşte polinom Taylor asociat funcției f în x_0.

Fie $R_n: I \to R$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Funcția R_n se numeşte restul Taylor de ordin n asociat funcției f în x_0.

Obținem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, $(\forall)\ x \in I$, adică

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x),\ (\forall)\ x \in I, \tag{5.6}$$

numită formula lui Taylor cu rest de ordin n asociat funcției f în x_0.

Observație. Cum $\lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0$ rezultă că pentru x într-o vecinătate V a lui x_0 avem aproximarea: $f(x) \cong f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$.

Se poate arăta că $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0$.

Teorema 5.3.2. (Formula lui Taylor cu rest Lagrange).

Fie $I \subset R$ interval deschis, $x_0 \in I$ şi $f : I \to R$ de $(n+1)$ ori derivabilă pe I. Atunci $(\forall) x \in I, x \neq x_0$ există x între x_0 şi x (deci $\xi = (1-\theta)x_0 + \theta x$, cu $\theta \in (0,1)$), astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Demonstrație. Căutăm în (5.6) pe R_n de forma $R_n(x) = (x - x_0)^p k$, unde $p \in N^*$, $k = k(x, x_0)$.

Considerăm funcția $\varphi : I \to R$

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x - t}{1!} f'(t) + \ldots + \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + (x - t)^p k.$$

Evident φ este derivabilă pe I, $\varphi(x_0) = f(x)$, $\varphi(x) = f(x)$ şi din teorema lui Rolle $(\exists)\xi$ între x_0 şi x astfel încât $\varphi'(\xi) = 0$. Dar

$$\varphi'(t) = f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{x - t}{1!} f''(t) - \ldots - \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) +$$

$$+ \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} k =$$

$$= \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} k.$$

Din $\varphi'(\xi) = 0$ rezultă

$$\frac{(x - \xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = p(x - \xi)^{p-1} k.$$

Luând $p = n + 1$ obținem $k = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ şi atunci

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),\ (\forall) x \in I.$$

şi demonstrația este încheiată. ■

Observație. Dacă $x_0 = 0 \in I$, din teorema 5.3.2 rezultă că $(\forall) x \in I, x \neq 0$, $(\exists) x$ între 0 şi x (deci $\xi = \theta x$, cu $\theta \in (0,1)$), astfel încât

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

numită formula Mac-Laurin cu rest de ordin n sub forma Lagrange.

Aplicații.

1. Fie $f:R\to R$, $f(x)=e^x$. Atunci f este indefinit derivabilă pe R şi $f^{(n)}(x)=e^x,(\forall)n\in N,\ (\forall)x\in R$.

Rezultă $f^{(n)}(0)=1,\ (\forall)n\in N$. Să scriem formula Mac-Laurin cu rest de ordin n sub forma Lagrange.

Pentru $(\forall)x\in R$, $x\neq 0$, $(\exists)\theta\in(0,1)$ astfel încât

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\cos x$. Atunci f este indefinit derivabilă pe R şi $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (\forall)n\in N,\ (\forall)x\in R$.

Din formula lui Mac-Laurin cu rest de ordin n sub forma Lagrange pentru $(\forall)x\in R$, $x\neq 0$, $(\exists)\theta\in(0,1)$ astfel încât

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Pentru $n=2k$ obținem:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\left(\xi+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

şi analog pentru n impar.

Extreme locale pentru funcții derivabile

Teorema 5.3.3. (Condiția suficientă de extrem local).

Fie $I\subset R$ interval deschis, $f:I\to R$ de clasă C^n, $(n\geq 1)$ pe I, $x_0\in R$ un punct critic pentru f astfel încât $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Atunci

a) Dacă n este par, rezultă că x_0 este punct de extrem local şi anume:

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ punct de minim local

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ punct de maxim local

b) Dacă n este impar, rezultă că x_0 nu este punct de extrem local.

Demonstrație.

a) Presupunem n par şi $f^{(n)}(x_0) > 0$. Cum $f^{(n)}$ este continuă, $(\exists) V \in \vartheta(x_0), V \subset I$ astfel încât $f^{(n)}(x) > 0$, $(\forall) x \in V$.

Din formula lui Taylor cu rest de ordinul $(n-1)$ sub forma Lagrange, pentru $x \in V, x \neq x_0$, există ξ între x şi x_0 astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

de unde

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),\ (\forall)\ x \in V.$$

Cum n este par avem $\frac{(x - x_0)^n}{n!} \geq 0, (\forall)\ x \in V$ şi cum ξ este între x şi x_0 rezultă $\xi \in V$ şi atunci $f^{(n)}(\xi) > 0$, de unde $f(x) - f(x_0) \geq 0$, $(\forall) x \in V$, adică x_0 este punct de minim local pentru f.

Cazul $f^{(n)}(x_0) < 0$ se tratează analog.

b) Dacă n este impar atunci diferența $f(x) - f(x_0)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate V a lui x_0, deci x_0 nu este punct de extrem local. ■

Exemplu. Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5$. Vom avea:

$f'(x) = 6x^5 - 6x^2$;

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ 6x^2(x^3 - 1) = 0 \ \Rightarrow\ x \in \{0,1\}$, deci $x = 0$ şi $x = 1$ sunt puncte critice.

Caz 1. Fie $x_0 = 0$. Vom avea:

$f''(x) = 30x^4 - 12x \Rightarrow f''(0) = 0$;

$f'''(x)=120x^3-12 \Rightarrow f'''(0)=-12 \neq 0$, deci $n=3$, impar şi $x_0=0$ nu este punct de extrem local.

Caz 2. Fie $x_0=1$.V0m avea:

$$f''(1)=30-12=18>0,\ n=2,\ \text{par.}$$

Rezultă că $x_0=1$ este punct de minim local.

Definiția 5.3.4. Fie $I \subset R$, interval deschis şi $x_0 \in I$ şi $f: I \to R$.

Funcția f este de două ori diferențiabilă în x_0 (respectiv pe I) dacă f este derivabilă pe I şi derivata sa f' este diferențiabilă în x_0 (respectiv pe I).

Diferențiala de ordinul doi a funcției f în x_0 se notează cu $d^2f(x_0)$ şi este definită prin

$$d^2f(x_0)=f''(x_0)(dx)^2=f''(x_0)dx^2.$$

Prin recurență obținem:

Definiția 5.3.5. Fie $I \subset R$, interval deschis, $x_0 \in R$ şi $f: I \to R$. Funcția f este de n $(n \geq 2)$ ori diferențiabilă în x_0 dacă este de $(n-1)$ ori derivabilă pe I şi derivata $f^{(n-1)}$ este diferențiabilă în x_0.

Diferențiala de ordinul n se notează cu $d^nf(x_0)$ şi este definită astfel:

$$d^nf(x_0)=f^{(n)}(x_0)(dx)^n=f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Probleme propuse

1. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: R \to R$,

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},\ \text{unde } n \in N$$

2. Să se arate că punctul c din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f:[a,b] \to R$, $0<a<b$, $f(x)=\ln x$ verifică inegalitățile $\sqrt{ab}<c<\frac{1}{2}(a+b)$.

3. Să se arate că, dacă $a, b > 0$ atunci $a^b + b^a > 1$.

4. Fie $f : R \to R$, $f(x) = e^x \cos x$. Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, unde $n \in N^*$ şi să se aproximeze funcția f printr-un polinom de grad trei în vecinătatea originii.

5. Să se arate că polinomul $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ nu poate avea rădăcini multiple.

6. Să se arate că ecuația $x^n - nx + 1 = 0$, $n \geq 3$ are două rădăcini pozitive α_n, β_n cu proprietățile $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 1$.

7. Să se scrie formula Mac-Laurin cu rest de ordin n sub forma Lagrange pentru funcțiile:

a) $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$;

b) $f : (-1, \infty) \to R$, $f(x) = \ln(1 + x)$;

c) $f : (-1, \infty) \to R$, $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

8. Să se studieze extremele locale ale funcțiilor:

a) $f : R \to R$, $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$;

b) $f : (0, \pi) \to R$, $f(x) = e^{\cos^2 x} \sin x$.

CAPITOLUL 6

DERIVABILITATEA ŞI DIFERENȚIABILITATEA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

6.1. Derivata după o direcție. Derivate parțiale de ordinul întâi.

Fie $A \subset R^n$, $n \geq 2$, deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to R$, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pornind de la definiția derivatei din cazul funcțiilor reale de variabilă reala suntem tentați să definim derivata funcției f în punctul a pornind de la raportul $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pentru $x \neq a$, însă acest raport nu are sens întrucât x-a este un vector şi nu este definită împărțirea unui scalar la un vector.

Dacă am defini derivata funcției f în a prin $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|}$, raportul dat are sens însă nu vom obține o definiție satisfăcătoare deoarece considerând funcția cu valorile $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$, pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, aceasta nu ar avea derivată în origine în sensul menționat.

Vom defini mai întâi derivata după o direcție. Fie r > 0 astfel încât $B(a, r) \subset A$ şi $s \in R^n$ un versor, deci $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots s_n^2} = 1$.

Fie funcția $g : (-r, r) \to R$, $g(t) = f(a + ts)$. Să observăm că, pentru $t \in (-r, r)$ avem $a + ts \in B(a, r) \subset A$, deoarece $\|a + ts - a\| = \|ts\| = |t| \, \|s\| = |t| < r$
şi deci funcția g este bine definită.

Definiția 6.1.1. Funcția f este derivabila în punctul a după versorul s dacă funcția g este derivabilă în t = 0 iar g'(0) se numeşte derivata lui f în punctul a şi se notează prin $\frac{df}{ds}(a)$.

Observație. Conform definiției avem:

$$\frac{df}{ds}(a) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+ts)-f(a)}{t}.$$

Fie B = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza canonică din R^n, e_1 = (1, 0, 0,…, 0), e_2 = (0, 1, 0,…, 0), …, e_n = (0, 0, 0,…, 0,1).

Definiția 6.1.2. Funcția f este derivabilă parțial în punctul a în raport cu variabila x_i, $i \in \overline{1,n}$ dacă f este derivabilă în punctul a după versorul s = e_i.

Numărul $\frac{df}{de_i}(a)$ se numeşte derivata parțială a funcției f în punctul a în raport cu variabila x_i şi se notează prin $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$.

Observăm, deci,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_n)}{t},\ 1\le i\le n.$$

Notând cu $x_i = a_i + t$, pentru $1\le i\le n$, obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_n)}{x_i-a_i}.$$

Caz particular. n = 2, f : A $\subset R^2 \to$ R, f = f(x,y), a = $(x_0, y_0) \in$ A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Definiția 6.1.3. Funcția f este derivabilă parțial în punctul a dacă este derivabilă parțial în a în raport cu toate variabilele $x_1, x_2, x_3,…, x_n$.

În acest caz se poate defini

$\mathrm{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$, numit şi gradientul funcției f în punctul a.

Definiția 6.1.4. Funcția f este derivabilă parțial pe A dacă este derivabilă parțial în toate punctele din A.

În acest caz se pot defini funcțiile

$\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \to R, i \in \overline{1,n}, x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), (\forall) x \in A$, numite şi derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f.

Funcția f este de clasă C^1 pe A şi scriem $f \in C^1(A)$, dacă f admite derivate parțiale de ordinul întâi pe A şi acestea sunt continue pe A.

În capitolul 5 am văzut că, dacă f este derivabilă într-un punct, atunci f este continuă în acel punct. În cazul funcțiilor de mai multe variabile, rezultatul nu mai este adevărat. Dacă o funcție este derivabilă într-un punct după un versor s, nu rezultă neapărat că f este continuă în acest punct. În acest sens considerăm funcția:

$$f: R^2 \to R, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^8}, \text{ daca } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ daca } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Atunci funcția f este derivabilă în origine după orice versor $s \in R^2$, dar f nu este continuă în origine.

Observație. Dacă $g_i(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{g_i(x_i) - g_i(a_i)}{x_i - a_i} = g'_i(a_i), i \in \overline{1,n}.$$

De aici rezultă şi metoda practică de calcul al derivatelor parțiale şi anume o derivată parțială în raport cu una din variabile se obține derivând funcția f în raport cu aceea variabilă conform regulilor de derivare de la funcția reală, de variabilă reală, celelalte variabile considerându-se constante.

Exemplu. Fie funcția $f: D \subset R^2 \to R$, $f(x,y) = x^3y + \ln(x^2+y^2)$.

Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + \frac{2x}{x^2+y^2}, (\forall)(x,y) \in D,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + \frac{2y}{x^2+y^2}, (\forall)(x,y) \in D.$$

Fie $f: A \subset R^n \to R^m$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, unde n,m ≥ 2, A este deschisă şi $a \in A$.

Definiția 6.1.5. Funcția f este derivabilă parțial în punctul a în raport cu variabila x_i, $i \in \overline{1,n}$ dacă toate funcțiile f_1, f_2, …, f_m, sunt derivabile parțial în punctul a in raport cu variabila x_i.

In acest caz

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right), i \in \overline{1,n}.$$

Definiția 6.1.6. Funcția f este derivabilă parțial în punctul a dacă este derivabilă parțial în punctul a în raport cu toate variabilele x_1, x_2,…, x_n.

În acest caz se poate defini matricea notată

$$J_f(a)(\text{sau} f'(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ .... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ... \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_{mxn}(R),$$

numită matricea jacobiană a lui f în punctul a.

Dacă m = n atunci $J_f(a) \in M_n(R)$, iar d = detJ_f(a), se numeşte determinantul funcțional al funcțiilor f_1, f_2, …, f_n, în raport cu variabilele x_1, x_2,…, x_n în punctul a şi se notează:

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1.f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a)(\text{sau} \frac{D(f)}{D(x)}(a)).$$

6.2. Diferențiabilitatea funcțiilor reale de mai multe variabile

Fie $A \subset R^n$, deschisă, $a \in A$ şi $f: A \to R$, f = f(x_1, x_2,…, x_n).

Definiția 6.2.1. Funcția f este diferențiabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară T:$R^n \to R$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \qquad (6.1)$$

Funcția f este diferențiabilă pe A dacă este diferențiabilă în orice punct din A.

Dacă notăm cu $\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{daca } x \neq a \\ 0, & \text{daca } x = a \end{cases}$, atunci (6.1) se scrie echivalent astfel:

$$f(x) = f(a)+T(x-a)+\alpha(x)\|x-a\|, (\forall) x \in A, \qquad (6.2)$$

unde $\alpha : A \to R$ este continuă în a şi α(a) = 0.

Propoziția 6.2.1. Dacă f este diferențiabilă în a atunci aplicația liniară T este unică.

Demonstrație. Presupunem că există T_1, T_2 : $R^n \to R$, liniare, α_1, α_2 continue în a, $\alpha_1(a) = \alpha_2(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a)+T_1(x-a)+\alpha_1(x)\|x-a\|, (\forall) x \in A;$$

$$f(x) = f(a)+T_2(x-a)+\alpha_2(x)\|x-a\|, (\forall) x \in A.$$

Notând T =T_1-T_2, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ şi scăzând cele două relații obținem

$$T(x-a) = \alpha(x)\|x-a\|, (\forall) x \in A.$$

Fie h$\in R^n$, fixat şi t > 0 suficient de mic astfel încât a+th$\in$ A.

Luând x = a+th obținem

$$T(th) = \alpha(a+th)\|th\|, \text{ de unde}$$

$$tT(h) = t\alpha(a+th)\|h\|, \text{ adică } T(h) = \alpha(a+th)\|h\|.$$

Pentru $t \to 0$ obținem T(h) = 0 şi cum h$\in R^n$ este arbitrar luat rezultă T = 0, deci $T_1 = T_2$. ■

Definiția 6.2.2. Aplicația liniară T se numeşte diferențiala funcției f în punctul a şi notează T = df(a).

Observație. Dacă $f: R^n \to R$ este liniară atunci f este diferențiabilă în orice punct $a \in R^n$ şi df(a) = f.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f(x-a)}{\|x-a\|} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f(x) + f(a)}{\|x-a\|} = 0$.

În particular funcțiile proiecție $pr_i : R^n \to R$, $pr_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, $1 \le i \le n$ sunt diferențiabile în $(\forall) a \in R^n$ şi $dpr_i(a) = pr_i$, $i = \overline{1,n}$.

Teorema 6.2.1. Fie $f : A \subset R^n \to R$, diferențiabilă în punctul $a \in A$. Atunci:

a) f este continuă în a;

b) f este derivabilă în a după orice versor $s \in R^n$ şi $\dfrac{df}{ds}(a) = df(a)(s)$.

În particular f este derivabilă parțial în a şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i), (\forall) i = \overline{1,n}$.

Demonstrație. a) Cum f este diferențiabilă în punctul a, conform definiției (vezi 6.2), există $T : R^n \to R$, liniară, T = df(a) şi $\alpha : A \to R$, continuă în a, $\alpha(a) = 0$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \alpha(x)\,\|x-a\|, (\forall)\, x \in A \qquad (6.3)$$

Cum T este liniară, este continuă şi atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, adică f este continuă în a.

b) Dacă $s \in R^n$ este un versor, din (6.3) avem

$$\frac{df}{ds}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a) + T(a+ts-a) + \alpha(a+ts)\|a+ts-a\| - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{T(ts) + \alpha(a+ts)\|ts\|}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tT(s) + |t|\alpha(a+ts)}{t} = \lim_{t \to 0}\left(T(s) + \frac{|t|}{t}\alpha(a+ts)\right) = T(s) = df(a)(s)$$

■

Observație. Cum $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ din (6.3) rezultă că, pentru x într-o vecinătate V a lui a avem aproximarea $f(x) - f(a) \cong T(x-a) = df(a)(x-a)$, deci creşterea funcției f într-o vecinătate a punctului a se poate aproxima printr-o creştere liniară.

Observație. Fie $f:A\subset R^n\to R$, diferențiabilă în $a\in A$. Funcțiile proiecție sunt diferențiabile în a şi $dpr_i(a) = pr_i$, $(\forall)i=\overline{1,n}$. Notăm cu dx_i diferențiala funcției pr_i în a, $dx_i = dpr_i(a)$, $i=\overline{1,n}$.

Pentru $(\forall)h\in R^n$, $h = (h_1, h_2,\dots, h_n)$ vom avea:

$$df(a)(h)=df(a)\left(\sum_{i=1}^{n}h_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}h_idf(a)(e_i)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)pr_i(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dpr_i(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i(h),$$

de unde $df(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i$, care reprezintă expresia diferențialei de ordinul întâi a lui f în a.

Deci $df(a):R^n\to R$ este o aplicație liniară şi

$$df(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i,(\forall)\,h=(h_1,h_2,...,h_n)\in R^n.$$

Din observația anterioară rezultă că pe o vecinătate V a lui a avem aproximarea

$$f(x)\cong f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i).$$

Caz particular. n =2, $f:A\subset R^2\to R$, f = f(x,y), a = $(x_0,y_0)\in A$,

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy.$$

Teorema 6.2.2. (Criteriu de diferențiabilitate).

Fie $A\subset R^n$, deschisă, $a\in A$ şi $f:A\to R$. Dacă f este derivabilă parțial într-o vecinătate V a punctului a iar derivatele parțiale sunt continue în a atunci f este diferențiabilă în a.

Demonstrație. Fie a = $(a_1, a_2\dots, a_n)\in A$, r > 0 astfel încât $B(a,r)\subset A$ şi f este derivabilă parțial pe B(a,r). Pentru $x\in B(a,r)$, vom avea :

$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2,\dots, x_n) - f(a_1, a_2\dots, a_n) = [f(x_1, x_2,\dots, x_n) - f(a_1, x_2,\dots, x_n)] +$
$+ [f(a_1, x_2,\dots, x_n) - f(a_1, a_2\dots, x_n)] +\dots+ [f(a_1, a_2\dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, a_2\dots, a_n)].$

Cum f este derivabilă parțial în raport cu x_1 pe B(a,r), din teorema lui Lagrange aplicată funcției $g_1(t) = f(t, x_2, x_3,\dots, x_n)$ pe intervalul închis determinat de punctele x_1 şi a_1 rezultă că există ξ_1 între x_1 şi a_1 astfel încât

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) - f(a_1, x_2,\dots, x_n) = (x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,...,x_n).$$

Procedând analog cu funcția $g_2(t) = f(a_1, t, x_2,\dots, x_n)$ pe intervalul închis determinat de punctele x_2 şi a_2 rezultă că există ξ_2 între a_2 şi x_2 astfel încât:

$$f(a_1, x_2,\dots, x_n) - f(a_1, a_2,\dots, x_n) = (x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3,...,x_n).$$

Continuând procedeul şi pentru celelalte paranteze rezultă că există ξ_1 între x_1 şi a_1, ξ_2 între a_2 şi x_2, …, ξ_n între a_n şi x_n astfel încât

$$f(x) - f(a) = (x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,...,x_n) + (x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3,...,x_n)+\dots$$

$$+ (x_n-a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,a_2,...,a_{n-1},\xi_n).$$

Fie $T:R^n \to R$, $T(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)x_i$, care evident este liniară şi oricare $x\in B(a,r)$, $x\neq a$, avem

$$\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=\frac{(x_1-a_1)[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,...,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,...,a_n)]}{\|x-a\|}$$

$$+\frac{(x_2-a_2)[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3,...,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,...,a_n)]}{\|x-a\|}+\dots$$

$$\dots+\frac{(x_n-a_n)[\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,a_2,...,\xi_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,a_2,...,a_n)]}{\|x-a\|}.$$

Cum $\frac{|x_i-a_i|}{\|x-a\|}\le 1$, pentru $i=\overline{1,n}$ şi derivatele parțiale ale lui f sunt continue în $a = (a_1, a_2,\dots, a_n)$ rezultă că există limita membrului doi al egalității pentru $x\to a$ şi este egală cu zero. Prin urmare $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0$, deci f este diferențiabilă în punctul a. ■

Observație. Din această teoremă rezultă că, dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferențiabilă pe A.

Exemplu. Fie funcția $f:D\subset R^2 \to R$, f(x,y) = $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ şi $(x_0, y_0) = (2, -1)\in D$.

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}, (\forall)(x,y)\in D;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}, (\forall)(x,y)\in D,$$

deci $f \in C^1(D)$ şi atunci f este diferențiabilă pe D, deci în $(x_0, y_0) = (2, -1)$ şi

$$df(2, -1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)dy = \frac{-1}{5}dx - \frac{2}{5}dy.$$

Dacă $h\in R^2$, $h = (h_1, h_2)$, atunci $df(2, -1)(h_1, h_2) = \frac{-1}{5}h_1 - \frac{2}{5}h_2$.

Presupunem în continuare că f este funcție vectorială, $f:A\subset R^n \to R^m$, $m\geq 2$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, A deschisă şi $a\in A$.

Definiția 6.2.3. Funcția f este diferențiabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară T: $R^n \to R^m$, astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0, \tag{6.4}$$

sau echivalent (vezi cazul m = 1), dacă există T: $R^n \to R^m$, liniară şi $\alpha : A \to R^m$, continuă în punctul a, $\alpha(a) = 0$ astfel încât

$$f(x) = f(a)+T(x-a)+\alpha(x)\|x-a\|, (\forall)x\in A.$$

Ca şi în cazul m = 1 se arată că aplicația liniară T este unică şi prin definiție T se numeşte diferențiala funcției f în punctul a şi se notează T = df(a).

Teorema 6.2.3. Fie $A\subset R^n$, deschisă, $a\in A, f : A \to R^m, f = (f_1, f_2, ..., f_m)$. Atunci funcția f este diferențiabilă în punctul a dacă şi numai dacă funcțiile $f_1, f_2, ..., f_m$ sunt diferențiabile în a şi în acest caz avem

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a)).$$

Demonstrație. Fie T: $R^n \to R^m$ liniară, T = $(T_1, T_2, \ldots, T_m)$, unde T_i: $R^n \to R$ este liniară, $(\forall) i = \overline{1,m}$. Din proprietățile normei euclidiene avem:

$$\frac{|f_i(x) - f_i(a) - T_i(x-a)|}{\|x-a\|} \le \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(a) - T_i(x-a)|}{\|x-a\|},\ (\forall) x \ne a,$$

de unde rezultă teorema. ■

6.3. Diferențiabilitatea funcțiilor compuse

Teorema 6.3.1. Fie $u: A \to B$, unde $A \subset R^n, B \subset R^m$ sunt deschise, u = $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $\varphi: B \to R^p$ (m, n, p ≥ 1), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$.

Dacă u este diferențiabilă în $a \in A$ şi φ este diferențiabilă în $b = u(a) \in B$, atunci f = $\varphi \circ u : A \to R^p$ este diferențiabilă în a şi d f(a) = d $\varphi(b) \circ du(a)$.

Demonstrație. Fie T = du(a) : $R^n \to R^m$, L = d$\varphi(b): R^m \to R^p$. Conform definiției diferențiabilității există funcțiile $\alpha: A \to R^m, \beta: B \to R^p$, continue în a, respectiv b, astfel încât $\alpha(a) = 0, \beta(b) = 0$ şi

$$u(x) = u(a) + T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|, (\forall) x \in A;$$

$$\varphi(y) = \varphi(b) + L(y-b) + \beta(y)\|y-b\|, (\forall) y \in B. \tag{6.5}$$

Luând în (6.5) y = u(x), cu $x \in A$ obținem:

$\varphi(u(x)) = \varphi(u(a)) + L(u(x) - u(a)) + \beta(u(x))\|u(x) - u(a)\|, (\forall) x \in A$, de unde rezultă că

$$f(x) = f(a) + L(T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|) + \beta(u(x))\|T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|\| =$$

$$= f(a) + (L \circ T)(x-a) + \|x-a\|[L(\alpha(x)) + \beta(u(x))\left\|\frac{T(x-a)}{\|x-a\|} + \alpha(x)\right\|], (\forall) x \in A, x \ne a. \tag{6.6}$$

Fie $\gamma: A \to R$,

$$\gamma(x) = \begin{cases} L(\alpha(x)) + \beta(u(x))\left\|\dfrac{T(x-a)}{\|x-a\|} + \alpha(x)\right\|, & \text{daca } x \ne a \\ o, \quad \text{daca } x = a \end{cases}$$

Din (6.6) obținem: $f(x) = f(a) + (L \circ T)(x-a) + \|x-a\| \gamma(x), (\forall) x \in A$.

Vom arăta că $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$.

Cum L este operator liniar, este continuu şi atunci

$$\lim_{x \to a} L(\alpha(x)) = L(\alpha(a)) = L(0) = 0.$$

Cum u este continuă în a şi β în b, rezultă că $\lim\limits_{x \to a} \beta(u(x)) = \beta(u(a)) = \beta(b) = 0$.

Cum T este operator liniar există M > 0, astfel încât $\|T(x)\| \le M\|x\|, (\forall) x \in R^n$,

şi atunci $\left\| \dfrac{T(x-a)}{\|x-a\|} + \alpha(x) \right\| \le \dfrac{\|T(x-a)\|}{\|x-a\|} + \|\alpha(x)\| \le M + \|\alpha(x)\|, (\forall) x \in A, x \ne a$, de unde va

rezulta că

$$\lim_{x \to a} \beta(u(x)) \left\| \frac{T(x-a)}{\|x-a\|} + \alpha(x) \right\| = 0.$$

În concluzie $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0 = \gamma(a)$, deci f este diferențiabilă în a şi

$$df(a) = L \circ T = d\varphi(b) \circ du(a).$$ ■

Observație. Dacă $J_u(a)$, $J\varphi(b)$, $J_f(a)$ sunt matricile jacobiene ale funcțiilor u, φ, f, în a, b şi respectiv a, din relația $df(a) = d\varphi(b) \circ du(a)$ obținem $J_f(a) = J_\varphi(b) \cdot J_u(a)$, de unde rezultă şi formulele pentru calculul derivatelor parțiale ale funcției f:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k}(b) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(a), (\forall) i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,n}.$$

În particular, dacă u este diferențiabilă pe A şi φ este diferențiabilă pe B, atunci f = $\varphi \circ u$ este diferențiabilă pe A şi $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}, (\forall) i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$.

Cazuri particulare.

1. $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y)), n = 2, m = 2, p = 1$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. $f(x,y)=\varphi(u(x,y)), n=2, m=1, p=1;$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\varphi'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}.$$

3. $f(x)=\varphi(u(x),v(x)), n=1, m=2, p=1;$

$$f'(x)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}u'(x)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}v'(x).$$

Teorema 6.3.2. (Teorema de medie).

Fie $A\subset R^n$, deschisă, $f : A \to R$ diferențiabilă pe A şi [a,b] un segment din A ([a,b] = $\{(1-\lambda)a+\lambda b:\ \lambda\in[0,1]\}$). Atunci există $\xi\in(a,b)=\{(1-\lambda)a+\lambda b:\lambda\in(0,1)\}$, astfel încât f(b)-f(a) = df(ξ)(b-a).

Demonstrație. Fie funcția $\varphi:[0,1]\to R$, $\varphi(t)=f(a+t(b-a))$.

Cum funcția $u:[0,1]\to A, u(t)=a+t(b-a)$ este diferențiabilă pe [0,1] şi f este diferențiabilă pe [a,b], rezultă că φ este diferențiabilă pe [0,1] şi

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(b-a))(b_i-a_i)=df(a+t(b-a))(b-a).$$

Din teorema lui Lagrange există $\tau\in(0,1)$ astfel încât $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$,
sau echivalent f(b) - f(a) = df(a+$\tau(b-a)$)(b-a) şi demonstrația este încheiată luând x = a+$\tau(b-a)\in(a,b)$. ■

Definiția 6.3.1. O funcție f:$A\subset R^n\to R$ se numeşte omogenă dacă există $p\in R$ astfel încât $(\forall)x\in A$ şi t > 0 cu $tx\in A$ avem $f(tx) = t^p f(x)$. Numărul real p se numeşte grad de omogenitate.

Teorema 6.3.3. (Relația lui Euler). Fie $A\subset R^n$ deschisă, f:$A\to R$, diferențiabilă şi omogenă cu grad de omogenitate p. Atunci $\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=pf$.

Demonstrație. Fie funcția cu valorile g(t) = f(tx) = f(tx_1, tx_2,…, tx_n), unde x = (x_1, x_2,…, x_n)$\in A$, este fixat iar $t\in V$, unde $V\in \mathcal{J}(1)$, astfel încât $tx\in A$, $(\forall)t\in V$.

Evident avem g(t) = f(u(t)), unde u: $V\to A$, u =(u_1, u_2,…, u_n), $u_i(t) = tx_i$, $i\in\overline{1,n}$.

Cum f este diferențiabilă pe A iar u este diferențiabilă pe V rezultă că $g = f \circ u$ este diferențiabilă pe V, deci derivabilă pe V şi

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(t)) \frac{\partial u_i}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(t)).$$

Pentru t = 1avem $u_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$, şi atunci

$$g'(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \ . \tag{6.7}$$

Pe de altă parte cum f este omogenă, avem:

$f(tx) = t^p f(x)$, adică $g(t) = t^p g(1)$ şi deci $g'(t) = pt^{p-1}g(1)$, $(\forall)\ t \in V$.

Pentru t =1 obținem g(1) = pf(x), care combinată cu relația (6.7) încheie demonstrația. ■

6.4. Derivate parțiale şi diferențiale de ordin superior

Definiția 6.4.1. Fie $A \subset R^n$, deschisă, $f:A \to R$, derivabilă parțial pe A şi $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, derivatele sale parțiale de ordinul întâi.

Funcția f este de două ori derivabilă parțial în punctul $a \in A$, în raport cu variabilele x_i şi x_j, unde $i,j \in \overline{1,n}$ dacă funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este derivabilă parțial în punctul a în raport cu variabila x_j.

Derivata parțială de ordinul întâi a funcției $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în punctul a în raport cu variabila x_j se numeşte derivata parțială de ordinul doi a funcției f în punctul a şi se notează prin:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ sau } f''_{x_i x_j}(a) \text{ dacă } j \neq i \text{ şi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \text{ sau } f''_{x_i^2}(a) \text{ dacă } j = i.$$

Derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ cu $j \neq i$ se numeşte şi derivată mixtă de ordinul doi în punctul a.

Funcția f este de două ori derivabilă parțial în punctul a dacă toate funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt derivabile parțial în punctul a.

Funcția f este de două ori derivabilă parțial pe A dacă este de două ori derivabilă parțial în toate punctele din A. În acest caz se pot defini funcțiile $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right): A \to R, x \to \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$, $i, j \in \overline{1,n}$ numite şi derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f.

Derivatele $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ cu $j \neq i$ se numesc derivate parțiale mixte de ordinul doi şi se notează prin $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sau $f''_{x_i x_j}$.

Pentru j = i acestea se notează prin $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ sau $f''_{x_i^2}$.

Dacă $f: A \subset R^n \to R$ este de două ori variabilă parțial în punctul a vom nota cu $H(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \in M_n(R)$ şi o vom numi matricea hessiană a funcției f în a.

Exemplu. Fie funcția $f: D \subset R^2 \to R$, f(x,y) = arctg $\frac{y}{x}$. Ne propunem să determinăm H(1,-2).

Funcția f este derivabilă parțial pe D şi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(derivatele parțiale sunt calculate în punctul curent (x,y)).

Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt derivabile parțial pe D şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(derivatele parțiale sunt calculate în punctul curent)

Vom avea $H(1,-2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$.

Derivatele parțiale de ordin superior se vor defini în mod asemănător cu derivatele parțiale de ordinul doi.

Astfel, derivatele parțiale de ordinul trei se vor defini ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale derivatelor parțiale de ordinul doi.

Continuând recurent, vom putea defini derivatele parțiale de ordin $k \geq 2$ ale funcției f ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale derivatelor parțiale de ordin k-1.

De exemplu, dacă $f: D \subset R^3 \to R, f = f(x,y,z)$,

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x \partial y^3 \partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right).$$

De asemenea, spunem că f este derivabilă parțial de ordin k în raport cu variabila x_i, $i \in \overline{1,n}$ dacă toate derivatele parțiale de ordin k-1 sunt derivabile în raport cu variabila x_i.

Derivatele parțiale de ordin superior calculate în raport cu cel puțin două variabile diferite se numesc derivate parțiale mixte.

Definiția 6.4.2. Fie $A\subset R^n$, deschisă şi $f : A \to R$. Funcția f este clasă C^k pe A ($k\geq 2$) şi scriem $f\in C^k(A)$ dacă f este de k ori derivabilă parțial pe A şi derivatele parțiale de ordinul k sunt continue pe A.

Funcția f este de clasă C^∞ pe A, $f\in C^\infty(A)$ dacă $f\in C^k(A),(\forall)k\geq 0$.

În exemplul dat în acest subcapitol ($f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$) am văzut că derivatele parțiale mixte de ordinul doi sunt egale. Acest lucru nu este adevărat întotdeauna. În acest sens considerăm funcția $f : R^2 \to R$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{daca } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{daca } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Printr-un calcul simplu obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},(\forall)(x,y)\neq(0,0);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\,\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},(\forall)(x,y)\neq(0,0).$$

de unde $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x,(\forall)x\neq 0,y\neq 0$.

Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$,

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$,

rezultă că f este derivabilă parțial în (0,0) şi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Vom calcula acum derivatele mixte de ordinul doi în (0,0):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Următorul rezultat furnizează o condiție suficientă care să asigure egalitatea derivatelor parțiale mixte de ordinul doi într-un punct.

Teorema 6.4.1. (teorema lui Schwarz).

Fie $A\subset R^n$, deschisă şi $f:A\to R$. Dacă f are derivate parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i\neq j)$ într-o vecinătate V a lui $a\in A$, şi funcțiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt continue în a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \tag{6.8}$$

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi teorema pentru n = 2.

Fie $f : A\to R$, $A \subset R^2, f = f(x,y), a\in A, a=(x_0,y_0)$ .Fie V = B(a,r) $\in \vartheta(a)$, pe care există funcțiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Pentru $(x,y)\in V$, $x\neq x_0$ şi $y\neq y_0$ considerăm expresia

$$E(x,y) = f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0) \quad . \tag{6.9}$$

Fie $I,J\subset R$ două intervale deschise astfel încât $x_0\in I$, $y_0\in J$ şi $(x,y)\in I \times J \subset B(a,r)$. Fie funcția

$$g : I\to R , g(t) = f(t,y)-f(t,y_0), \tag{6.10}$$

si atunci $E(x,y) = g(x) - g(x_0)$.

Cum f este derivabilă parțial în raport cu x pe V, rezultă că g este derivabila pe I şi din teorema lui Lagrange există ξ între x_0 şi x, astfel încât

$$E(x,y) = g(x) - g(x_0) = (x-x_0)g'(\xi). \tag{6.11}$$

Dar, din (6.10), $g'(\xi)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)$, şi atunci folosind (6.11) obținem:

$$E(x,y) = (x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)\right]. \tag{6.12}$$

Fie funcția $h : J\to R$, $h(\tau)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\tau)$. Din ipoteză h este derivabilă pe J şi din teorema lui Lagrange există η între y_0 şi y astfel încât

$h(y) - h(y_0) = (y-y_0)h'(\eta) = (y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)$, şi atunci din (6.12) obținem:

$$E(x,y) = (x-x_0)(h(y)-h(y_0)) = (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta). \qquad (6.13)$$

Schimbând pe x cu y şi raționând analog găsim că există un punct $\tilde{\xi}$ între x_0 şi x şi un punct $\tilde{\eta}$ între y_0 şi y astfel încât

$$E(x,y) = (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}). \qquad (6.14)$$

Din (6.13) şi (6.14) obținem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$.

Fie un şir de puncte $(x_n,y_n) \in V$ astfel încât $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$, cu $x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$. Atunci există punctele $\xi_n, \tilde{\xi}_n$ între x_0 şi x_n şi punctele $\eta_n, \tilde{\eta}_n$ între y_0 şi y_n astfel încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_n,\eta_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{\xi}_n,\tilde{\eta}_n),\ (\forall) n \in N.$$

Cum $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ rezultă că $\xi_n \to x_0, \tilde{\xi}_n \to x_0, \eta_n \to y_0, \tilde{\eta}_n \to y_0$, deci $(\xi_n,\eta_n) \to (x_0,y_0)$, $(\tilde{\xi}_n,\tilde{\eta}_n) \to (x_0,y_0)$ şi folosind continuitatea funcțiilor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ obținem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).$$

Dacă n>2, fără a restrânge generalitatea putem presupune i<j. Fie $a=(a_1,a_2,\dots a_n) \in A$ şi funcția cu valorile $g(x,y) = f(a_1,\dots a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},y,a_{j+1},\dots,a_n)$ definită pe un deschis ce conține punctul (a_i,a_j).

Folosind prima parte a demonstrației (cazul n=2) vom avea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$, şi demonstrația este încheiată. ■

Corolarul 6.4.1. Fie $A \subset R^n$ deschisă şi $f:A \to R$. Dacă $f \in C^1(A)$ şi derivatele parțiale mixte de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(j \neq i)$ există si sunt continue pe A atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Corolarul 6.4.2. Dacă $f \in C^k(A), k \geq 2$, atunci derivatele parțiale mixte de ordin q$\leq$ k nu depind de ordinea de derivare.

O altă condiție suficientă pentru ca derivatele parțiale mixte de ordinul doi să fie egale este dată de criteriul lui Young.

Teorema 6.4.2. Fie $A \subset R^n$, deschisă şi f : A $\rightarrow R$. Dacă f este derivabilă parțial pe o vecinătate V a punctului a $\in$ A, iar derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ sunt diferențiabile în punctul a atunci există derivatele parțiale mixte de ordinul doi şi sunt egale în a.

Pentru demonstrație se poate consulta [11].

Definiția 6.4.3. Fie $A \subset R^n$ deschisă şi f : A$\rightarrow R$. Funcția f este de k (k≥ 2) ori diferențiabilă într-un punct a$\in$ A dacă f este de k-1 ori derivabilă parțial într-o vecinătate V a lui a, iar toate derivatele parțiale de ordin k-1 ale lui f sunt diferențiabile în a. Funcția f este de k ori diferențiabilă pe A dacă este de k ori diferențiabilă în orice punct a$\in$ A.

Observație. Folosind teorema 6.2.2. rezultă că, dacă f : $A \subset R^n \rightarrow R$ este derivabilă parțial de ordin k pe A şi dacă derivatele parțiale de ordin k sunt continue în a, atunci f este de k ori diferențiabilă în a. În particular, dacă $f \in C^k(A)$ atunci f este de k ori diferențiabilă pe A.

Definiția 6.4.4. Fie $A \subset R^n$, deschisă, f:A$\rightarrow R$, o funcție de k ori diferențiabilă într-un punct a$\in$ A. Numim diferențială de ordinul k a funcției f în punctul a funcția $d^k f(a) : R^n \rightarrow R$ definită prin:

$$d^k f(a)(h) = (h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))^{(k)}, \qquad (6.15)$$

unde ridicarea la puterea simbolică k se face în sensul luării derivatelor.

Astfel $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))^{(k)}$ reprezintă $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$,

$(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))^{(k-1)}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a))$ reprezintă $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-1}\partial x_j}(a)$,

$(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))^{(k-2)}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a))^{(2)}$ reprezintă $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-2}\partial x_j^2}(a)$, etc.

Observații.

1. In cazul k = 2, $d^2f(a)$ este o formă pătratică:

$d^2f(a)(h) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j, (\forall)h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in R^n$, cu matricea asociată $H(a) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{1\le i,j\le n}$, deci tocmai matricea hessiană a lui f în a.

Evident H(a) este o matrice simetrică.

2. Presupunem că f este de k ori diferențiabilă în a. Notând cu dx_i diferențiala funcției pr_i în punctul a, $dx_i = dpr_i(a)$, $i\in \overline{1,n}$, formula 6.15 se mai scrie şi astfel : $d^kf(a)(h) = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i(h)]^{(k)}, (\forall)h \in R^n$, de unde $d^kf(a) = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i]^{(k)}$.

Dacă f este diferențiabilă de k ori pe A, atunci $d^kf = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i]^{(k)}$.

3. Pentru n = 2,

$$f : A \subset R^2 \to R, f = f(x, y), a \in A, a = (x_0, y_0),$$

$$d^kf(a)(h) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2)^{(k)}, (\forall)h = (h_1, h_2) \in R^2,$$

sau $d^kf(a) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy)^{(k)}$.

Pentru k = 2,

$$d^2f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)dy^2.$$

Exemplu. Fie funcția $f : A \subset R^2 \to R$, $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Să calculăm diferențialele de ordinul unu şi doi ale lui f în punctul curent.

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
, de unde
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$df(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\ ,\ (\forall)(x,y)\in A.$$

Dacă $(x_0, y_0) = (1, -1)$ atunci $df(1, -1) = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$. Pentru a determina d^2f vom calcula mai întâi derivatele parțiale de ordinul doi. Vom avea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}.$$

Atunci $d^2f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2$, iar $d^2f(1, -1) = dxdy$.

Teorema 6.4.3.(Formula lui Taylor). Fie $A\subset R^n$, deschisă, $f : A \to R$, o funcție de k+1 ori diferențiabilă pe A, $a\in A$ şi $r > 0$, astfel încât $B(a,r)\subset A$. Atunci, pentru orice punct $x\in B(a,r), x\neq a$ există un punct ξ pe segmentul deschis de extremități a şi x astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}d^kf(a)(x-a) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(\xi)(x-a). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Demonstrație. Fie $s = (s_1, s_2,\ldots, s_n)\in R^n$, un versor. Dacă $t\in(-r,r)$, atunci $x = a + ts \in B(-r,r)\subset A$ şi $x\neq a$, dacă $t\neq 0$. Să considerăm funcția $g:(-r,r)\to R$, $g(t) = f(a+ts) = f(a_1+ ts_1, a_2+ ts_2,\ldots, a_n+ ts_n)$.

Cum f este de k+1 ori diferențiabilă pe A rezultă că g este de k+1 ori diferențiabilă pe (-r, r).

Vom calcula derivatele lui g până la ordinul k+1.

Vom avea

$$g'(t)=s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+ts)+s_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+ts)+\ldots+s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+ts),(\forall)t\in(-r,r);$$

$$g''(t)=s_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+ts)+s_1s_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a+ts)+\ldots+s_1s_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a+ts)+$$

$$\ldots+s_n^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a+ts)=[s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+ts)+\ldots+s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+ts)]^{(2)}=[g'(t)]^{(2)}.$$

Procedând inductiv obținem

$$g^{(m)}(t)=[g'(t)]^{(m)}\text{, pentru m = 1, 2,…, k+1.} \tag{6.17}$$

Din formula lui Mac-Laurin cu rest de ordin k sub forma Lagrange aplicată funcției g găsim că pentru $(\forall)t\in(-r,r),t\neq 0,$ există τ între 0 şi t astfel încât

$$g(t)=g(0)+\frac{t}{1!}g'(0)+\frac{t^2}{2!}g''(0)+\ldots+\frac{t^k}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\tau). \tag{6.18}$$

Cum x = a+ ts $\Leftrightarrow$ x-a = ts, din 6.17 obținem

$$tg'(0)=ts_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\ldots+ts_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+$$

$$\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=df(a)(x-a);$$

$$t^2g''(0)=t^2s_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)+\ldots+t^2s_n^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)=[(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+$$

$$\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)]^{(2)}=d^2f(a)(x-a);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t^kg^k(0)=d^kf(a)(x-a);$$

şi

$$t^{k+1}g^{(k+1)}(\tau)=t^{k+1}[s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\tau s)+\ldots+s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+\tau s)]^{(k+1)}=$$

$$=[ts_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\tau s)+\ldots+ts_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+\tau s)]^{(k+1)}=$$

$$=[(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)+\ldots+(x_n-a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)]^{(k+1)}=d^{k+1}f(\xi)(x-a),$$

unde $\xi=a+\tau s\in(a,x)$.

Înlocuind derivatele găsite în 6.18 şi ținând cont că g(t) = f(x) iar g(0) =f(a), obținem formula (6.16). ■

Observație. Dacă $R_k(t)=\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\tau)$ şi $\widetilde{R}_k(x)=\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(\xi)(x-a)$ sunt resturile de ordin k sub forma Lagrange ale lui g şi respectiv f, atunci, din $\lim\limits_{t\to 0}\frac{R_k(t)}{|t|^k}=0$, rezultă că există $\lim\limits_{x\to a}\frac{\widetilde{R}_k(x)}{\|x-a\|^k}=0$ şi în particular $\lim\limits_{x\to a}\widetilde{R}_k(x)=0$, deci pentru x într-o vecinătate V a lui a avem aproximarea

$$f(x)\cong f(a)+\frac{1}{1!}df(a)(x-a)+...+\frac{1}{k!}d^k f(a)(x-a),$$

deci funcția se aproximează printr-un polinom de gradul k.

În particular, pentru n = 2, f = f(x,y), a = (x_0, y_0) rezultă că pentru (x,y) într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) avem

$$f(x,y)\cong f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=$$
$$=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

aproximarea de ordinul întâi,

$$f(x,y)\cong f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right],$$

aproximarea de ordinul doi.

6.5. Funcții şi sisteme de funcții implicite

Considerăm ecuația F(x,y)=0, unde $F:D\subset R^2\to R$. Ne propunem să rezolvăm această ecuație în raport cu x sau y.

Exemple.

1. Fie ecuația 4x-3y=5, $(x,y)\in R^2$, care este de forma F(x,y)=0, unde F(x,y) = 4x-3y-5. Această ecuație poate fi rezolvată în raport cu y şi are o unică soluție $y=\frac{4x-5}{3}$, deci există o unică funcție $f:R\to R$, astfel încât y = f(x), unde

$f(x) = \frac{4x-5}{3}$, este soluție a ecuației. Analog ecuația poate fi rezolvată în raport cu x.

2. Fie ecuația $x-y^2 = 0$, $(x,y) \in R^2$. Ecuația admite o singură soluție în raport cu x şi anume $x = y^2$, deci există o unică funcție $g : R \to R$, astfel încât $x = g(y)$, unde $g(y) = y^2$, este soluție a ecuației. În raport cu y ecuația admite o infinitate de soluții pe $[0, \infty)$, de exemplu: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in A_1 \\ -\sqrt{x}, x \in A_2 \end{cases}$ unde

$$A_1, A_2 \subset [0, \infty), A_1 \cup A_2 = [0, \infty), A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Dintre acestea doar două sunt continue şi anume

$$f_1(x) = \sqrt{x} \text{ şi } f_2(x) = -\sqrt{x}, \text{ oricare } x \in [0, \infty).$$

3. Ecuația $x^2+y^2+3 = 0$, $(x,y) \in R^2$ nu are nici o soluție în raport cu x sau y.

Fie ecuația

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{6.19}$$

unde $F : A \times B \subset R^n \times R \to R$.

Ecuația (6.19) se scrie echivalent

$$F(x,y) = 0, \text{ unde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Definiția 6.5.1. O funcție $f : A \to B$ se numeşte soluție a ecuației (6.19) pe A dacă

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0, (\forall) (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A, \text{ sau echivalent}$$

$$F(x, f(x)) = 0, (\forall) x \in A.$$

Dacă există o singură funcție $f : A \to B$ care să verifice ecuația (6.19) şi eventual şi alte condiții suplimentare spunem că funcția f este definită de ecuația $F(x,y) = 0$.

Funcțiile definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții definite implicit sau funcții implicite.

Teorema 6.5.1. (Teorema funcțiilor implicite).

Fie $A \subset R^n, n \geq 1, B \subset R$, deschise, (a, b)$\in$A x B şi F:A x B$\to$R astfel încât

1) F(a, b)=0;

2) $(\exists) U \in J(a), U \subset A, V \in J(b), V \subset B$ astfel încât $F \in C^1(U \times V)$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Atunci:

a) ecuația F (x,y) = 0 defineşte funcția y pe o vecinătate a punctului (a,b), adică există o vecinătate $U_0 \in J(a)$, o vecinătate $V_0 \in J(b)$ şi o unică funcție $f: U_0 \to V_0$ cu valorile y = f(x) astfel încât f(a) = b şi F (x, f(x)) = 0, ($\forall$) x$\in U_0$;

b) f$\in C^1(U_0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, (\forall) x \in U_0$;

c) dacă F$\in C^k$ (U x V), k$\geq$2 , atunci f$\in C^k(U_0)$.

Demonstrație.

a) Fără a restrânge generalitatea să presupunem că $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Cum funcția $\frac{\partial F}{\partial y}$ este continuă pe U x V, ($\exists$) $U_1 \in \vartheta(a)$, $U_1 \subset U$, $V_1 \in J(b)$, $V_1 \subset V$ astfel încât $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$, ($\forall$) (x,y)$\in U_1$ x V_1.

Fie $\alpha, \beta \in V_1$ astfel încât $\alpha < b < \beta$ şi $V_0 = (\alpha,\beta) \in \vartheta(b)$.

Funcția $y \to F(a, y)$ se anulează în b, are derivată pozitivă pe V_0 deci este strict crescătoare pe V_0 şi F(a,α) < 0, F(a,β) > 0.

Cum funcția x $\to$ F(x,α) este continuă pe U_1, există o vecinătate $U' \in J(a), U' \subset U_1$ astfel încât F(x,α) < 0, ($\forall$) x$\in U'$.

De asemenea, cum funcția x $\to$ F(x,β) este continuă pe U_1, există o vecinătate $U'' \in \vartheta(a)$, $U'' \subset U_1$ astfel încât F(x,β) > 0, ($\forall$) x$\in U''$.

Fie $U_0 = U' \cap U'' \in \vartheta(a)$ şi vom avea

$$F(x,\alpha) < 0,\ F(x,\beta) > 0,\ (\forall)\ x\in U_0.$$

Fie acum $x'\in U_0$, arbitrar. Cum funcția $y \to F(x',y)$ este continuă pe $[\alpha,\beta]$, strict crescătoare pe $[\alpha,\beta]$ şi $F(x',\alpha) < 0$, $F(x',\beta) > 0$, rezultă că există un unic punct $y'\in(\alpha,\beta)$ astfel încât $F(x',y') = 0$.

Deoarece $x'\in U_0$ a fost ales arbitrar rezultă că pentru orice punct $x\in U_0$, fixat, există un singur punct $y\in V_0$ astfel încât $F(x,y) = 0$.

Definim $f : U_0 \to V_0$, $f(x) = y$ şi atunci f este bine definită şi $F(x, f(x)) = 0$, $(\forall)\ x\in U_0$.

Pentru x = a avem $F(a,b) = 0$ şi cum b este singurul punct din V_0 cu această proprietate deducem $f(a) = b$ şi demonstrația punctului a) este încheiată.

b) Să observăm mai întâi că f este continuă în a. Pentru vecinătatea V_0 aleasă în mod arbitrar, din (a) există o vecinătate $U_0\in \mathcal{J}(a)$ astfel încât pentru orice $x\in U_0$, $f(x)\in V_0$, deci f este continuă în a.

Analog raționăm pentru $x'\in U_0$ şi atunci rezultă că f este continuă pe U_0.

Fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(a_1, a_2, \dots,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},\dots, a_n)\in U_0$, unde $i\in \overline{1,n}$ şi $y = f(a_1, a_2, \dots,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},\dots, a_n)\in V_0$.

Din Teorema lui Lagrange există ξ între a_i şi x_i, η între b şi y astfel încât

$$\begin{aligned}
0 &= F(a_1, a_2, \dots,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},\dots, a_n, y) - F(a_1, a_2,\dots, a_n, b) = \\
&= F(a_1, a_2, \dots,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},\dots, a_n, y) - F(a_1, a_2,\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1},\dots, a_n, y) + \\
&+ F(a_1, a_2,\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1},\dots, a_n, y) - F(a_1, a_2,\dots, a_n, b) = \\
&= \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},\xi,a_{i+1},\dots,a_n,y)(x_i-a_i)+\frac{\partial F}{\partial y}(a_1,a_2,\dots,a_n,\eta)(y-b),
\end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},\xi,a_{i+1},\dots,a_n,y)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y}(a_1,a_2,\dots,a_n,\eta)\,\frac{f(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{x_i-a_i}=0,$$

pentru $x_i \neq a_i$.

Pentru $x_i \to a_i$ avem $\xi_i \to a_i, \eta \to b = f(a)$ şi folosind continuitatea funcțiilor

$\frac{\partial F}{\partial x_i}$ si $\frac{\partial F}{\partial y}$ pe U_0 x V_0, prin trecere la limită cu $x_i \to a_i$ obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a, f(a)) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, f(a))\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \text{ şi cum } \frac{\partial F}{\partial y}(a, f(a)) \neq 0 \text{ rezultă}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = -\frac{F'_{x_i}(a, f(a))}{F'_y(a, f(a))}.$$

Reluând raționamentul cu x în loc de a, unde $x \in U_0$ este arbitrar şi cu $y = f(x) \in V_0$ găsim că există

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \ (\forall)\ x \in U_0,\ i = \overline{1,n}.$$

Cum $F \in C^1(U \times V)$ va rezulta că $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$ sunt continue pe V_0, deci $f \in C^1(U_0)$. Mai mult, folosind teorema 6.2.2 va rezulta că f este diferențiabilă pe U_0.

c) Prin inducție după k. ■

Exemplu. Să se arate că ecuația $x^3 - y^3 + x + y = 10$ defineşte funcția y pe o vecinătate a punctului (2,1). Să se calculeze $y'(2), y''(2)$.

Ecuația este de forma F(x,y) = 0, unde $F: R^2 \to R$, $F(x,y) = x^3 - y^3 + x + y - 10$. Evident $F(2,1)=0$, $F \in C^1(R^2)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + 1$, $(\forall)$ $(x,y) \in R^2$, de unde $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = -2 \neq 0$, deci ipotezele teoremei 6.5.1 sunt îndeplinite. Conform teoremei ecuația F(x,y) = 0 defineşte funcția y pe o vecinătate a punctului (2,1), adică $(\exists)$ $U_0 \in \mathcal{J}(2)$, $U_0 \subset R$, $V_0 \in \mathcal{J}(1)$, $V_0 \subset R$ şi o unică funcție $y : U_0 \to V_0$, cu valorile y = y(x) astfel încât y(2) =1 şi F(x,y(x)) = 0, $(\forall) x \in U_0$, adică

$$x^3 - y^3(x) + x + y(x) = 10,\ (\forall)\ x \in U_0.$$

Din teorema 6.5.1(b) funcția y este derivabilă pe U_0 şi derivând ultima relatie în raport cu x obținem

$$3x^2 - 3y^2(x)\, y'(x) + 1 + y'(x) = 0,\ (\forall)\ x \in U_0. \qquad (6.20)$$

Pentru x = 2 avem y(2) = 1 şi atunci

$$12-3y'(2)+1+y'(2)=0,\ \text{de unde}\ y'(2)=\frac{13}{2}.$$

Derivând din nou în (6.20) în raport cu x obținem

$$6x-6y(x)y'^2(x)-3y^2(x)y''(x)+y''(x)=0, (\forall)x\in U_0.$$

Pentru x = 2 obținem

$$12-6\cdot\frac{169}{4}-3y''(2)+y''(2)=0,\quad \text{de unde}\ y''(2)=-\frac{483}{4}.$$

Sisteme de funcții implicite

Considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0 \end{cases} \tag{6.21}$$

unde $F_1, F_2,\dots,F_m$: A x B $\subset R^n$ x $R^m \to R$, m,n$\in \mathbb{N}^*$.

Dacă $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ şi F = $(F_1, F_2,\dots,F_m)$ atunci sistemul (6.21) se scrie echivalent sub forma unei ecuații vectoriale

$$F(x,y) = 0 \tag{6.22}$$

Definiția 6.5.2. O funcție f : A $\to$ B, f = $(f_1, f_2,\dots,f_m)$ se numeşte soluție a sistemului (6.21) (sau echivalent a ecuației vectoriale (6.22)) pe A dacă

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n,f_1(x_1,x_2,...,x_n),...,f_m(x_1,x_2,...,x_n))=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n,f_1(x_1,x_2,...,x_n),...,f_m(x_1,x_2,...,x_n))=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,x_2,...,x_n,f_1(x_1,x_2,...,x_n),...,f_m(x_1,x_2,...,x_n))=0 \end{cases},\ (\forall)\ x\in A$$

(sau echivalent F(x,f(x))= 0, $(\forall)x\in A$).

În cazul în care sistemul (6.21) are pe mulțimea A o singură soluție f = $(f_1, f_2,\dots,f_m)$ spunem că funțiile $f_1, f_2,\dots,f_m$ constituie un sistem de funcții definite în mod implicit sau un sistem de funcții implicite.

Teorema 6.5.2. Fie sistemul de ecuații (6.21) în următoarele ipoteze:

$A\subset R^n, B\subset R^m$, deschise, F:A x B $\to R^m$, F =$(F_1, F_2,\dots,F_m)$, (a,b)$\in$A x B astfel încât

1. F(a,b) = 0 $(\Leftrightarrow F_1(a,b)=F_2(a,b)=.....=F_m(a,b)=0)$;

2. $(\exists)U\in\vartheta(a)$, $U\subset A$ şi $V\in\vartheta(b)$, $V\subset B$ astfel încât $F\in C^1(U\times V)\ \left(\Leftrightarrow F_1,F_2,\dots,F_m\in C^1(U\times V)\right)$;

3. $\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(y_1,y_2,\dots,y_m)}(a,b)\neq 0$.

Atunci:

a. sistemul (6.21) defineşte funcţiile y_1, $y_2,\dots,y_m$ pe o vecinătate a punctului (a,b), adică există o vecinătate $U_0\in\vartheta(a)$, o vecinătate $V_0\in\vartheta(b)$, şi o unică funcţie $f:U_0\to V_0$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ cu valorile $y=f(x)$ $\left(\Leftrightarrow y_1=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,y_m=f_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$ astfel încât $b=f(a)$ $\left(\Leftrightarrow b_1=f_1(a),\dots,b_m=f_m(a)\right)$ şi $F(x,f(x))=0$, $(\forall)x\in U_0$.

b. $f\in C^1(U_0)$ şi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)=\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(x_i,y_2,\dots,y_m)}(x,f(x))}{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(y_1,y_2,\dots,y_m)}(x,f(x))},(\forall)x\in U_0,i=\overline{1,n}$$

....

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)=\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(y_1,y_2,\dots,y_{m-1},x_i)}(x,f(x))}{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(y_1,y_2,\dots,y_m)}(x,f(x))},\ (\forall)x\in U_0,\ i=\overline{1,n}$$

c. dacă $F\in C^k(U\times V)$, $k\geq 2$, atunci $f\in C^k(U_0)$

Demonstraţie. Prin inducţie după m. ■

Pentru m=1 teorema se reduce la teorema 6.5.1 iar pentru celelalte detalii se pot consulta lucrările [8] sau [11] .

Exemplu. Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}xyu-yv^2+2v^3=0\\4u^2+2v^2-x^3y=0\end{cases}\qquad(6.23)$$

Să se arate că sistemul defineşte funcţiile u şi v pe o vecinătate a punctului $(x_0, y_0, u_0, v_0)=(1,2,0,1)$. Să se calculeze du(1,2), dv(1,2).

Sistemul (6.23) este de forma $\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}$, unde $F_1, F_2: R^4\to R$,

$$F_1(x,y,u,v)=xyu-yv^2+2v^3,\quad F_2(x,y,u,v)=4u^2+2v^2-x^3y.$$

Evident avem $F_1(1,2,0,1) = 0$, $F_2(1,2,0,1) = 0$, $F_1, F_2 \in C^1(R^4)$,

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xy & -2yv+6v^2 \\ 8u & 4v \end{vmatrix} \text{, de unde}$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(1,2,0,1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \,,$$

deci ipotezele teoremei (6.5.2) sunt îndeplinite. Conform teoremei sistemul (6.23) poate fi rezolvat în raport cu u şi v pe o vecinătate a punctului (1,2,0,1), deci pe o vecinătate $U_0 \in \mathcal{J}((1,2))$ avem $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 1$ şi

$$\begin{cases} xyu(x,y) - yv^2(x,y) + 2v^3(x,y) = 0 \\ 4u^2(x,y) + 2v^2(x,y) - x^3y = 0 \end{cases} \text{, } (\forall)\ (x,y) \in U_0 \qquad (6.24)$$

Vom avea

$$du(1,2) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,2)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,2)dy\ ;$$

$$dv(1,2) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,2)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(1,2)dy\ .$$

Derivând în sistemul (6.24) în raport cu x obținem

$$\begin{cases} yu(x,y) + xy\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - 2yv(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + 6v^2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \\ 8u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 4v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - 3x^2y = 0 \end{cases},$$

$(\forall)$ $(x,y) \in U_0$.

Pentru $(x,y) = (1,2)$ obținem $$\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) - 4\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) + 6\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = 0 \\ 4\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) - 6 = 0 \end{cases},$$

de unde $\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -\frac{3}{2}$ şi $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = -\frac{3}{2}$.

Derivând sistemul (6.24) în raport cu y obținem

$$\begin{cases} xu(x,y) + xy\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - v^2(x,y) - 2yv(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + 6v^2(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \\ 8u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 4v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - x^3 = 0 \end{cases} \text{, } (\forall)\ (x,y) \in U_0$$

Pentru (x,y) = (1,2) obținem $\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,2)-1-4\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,2)+6\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,2)=0 \\ 4\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,2)-1=0 \end{cases}$,

de unde $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,2)=\dfrac{1}{4},\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,2)=\dfrac{1}{4}$ şi atunci

$$du(1,2)=-\frac{3}{2}dx+\frac{1}{4}dy,\ dv(1,2)=\frac{3}{2}dx+\frac{1}{4}dy$$

Transformări regulate

Fie $A \subset R^n$, deschisă şi f : A $\to$ R^n, f = (f_1, f_2, …,f_n).

Definiția 6.5.3. Funcția vectorială f este o transformare regulată în punctul $a \in A$ dacă funcțiile f_1, f_2, …,f_n au derivate parțiale continue într-o vecinătate V a lui a şi $\dfrac{D(f_1,f_2,....,f_n)}{D(x_1,x_2,....,x_n)}(a)\neq 0$.

Funcția f este o transformare regulată pe A dacă este o transformare regulată în orice punct din A.

Observație. Cum jacobianul transformării este o funcție continuă rezultă că, dacă f este o transformare regulată într-un punct $a \in A$ atunci f este o transformare regulată într-o întreagă vecinătate a lui a. Mai mult, dacă f este o transformare regulată pe A şi A este conexă atunci det J_f are un semn constant pe A. Folosind teorema 6.5.2 se poate demonstra următorul rezultat (vezi [8]):

Teorema 6.5.3. (teorema de inversiune locală).

Fie $f: A \subset R^n \to R^n$, A deschisă, o transformare regulată într-o vecinătate U a punctului $a \in A$. Atunci există o vecinătate $U_0 \in \vartheta(a)$, $U_0 \subset U$ şi o vecinătate $V_0 \in \vartheta(f(a))$ astfel încât restricția lui f la U_0 este o aplicație bijectivă de la U_0 pe V_0.

Mai mult, dacă g= $(f|_{U_0})^{-1}$ atunci g este o transformare regulată în punctul b = f(a) şi $\dfrac{D(g)}{D(y)}(b)=\dfrac{1}{\dfrac{D(f)}{D(x)}(a)}$.

6.6. Extreme locale pentru funcții reale de mai multe variabile

Definiția 6.6.1. Fie $A \subset R^n$ şi f : A $\to$ R. Un punct a$\in$A se numeşte punct de minim (respectiv maxim) local pentru funcția f dacă există o vecinătate V$\in\vartheta$(a) astfel încât $f(x) \geq f(a)$ (respectiv $\leq$), ($\forall$) x$\in V \cap$ A.

Dacă aceste inegalități au loc ($\forall$) x$\in$A spunem că a este punct de minim (respectiv maxim) global sau absolut.

Un punct a$\in$A se numeşte punct de extrem local pentru f dacă este punct de minim local sau de maxim local pentru f.

Definiția 6.6.2. Fie A$\subset R^n$, deschisă şi f : A $\to$ R. Un punct a$\in$A se numeşte punct critic sau staționar pentru funcția f dacă f este diferențiabilă în a şi df(a)=0.

Teorema 6.6.1. (Teorema lui Fermat). Fie $A \subset R^n$, deschisă şi f:A$\to$R. Dacă a$\in$A este un punct de extrem local pentru f iar f este diferențiabilă în punctul a atunci df(a) = 0, adică a este punct critic.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea să presupunem că a este un punct de minim local pentru f. Atunci ($\exists$) r>0 astfel încât B(a,r)$\subset$A şi f(x)$\geq$f(a), ($\forall$)x$\in$B(a,r). Fie s$\in R^n$ un versor şi funcția g: (-r,r)$\to$R, g(t)=f(a+ts) şi să observăm că g este bine definită deoarece pentru t$\in$(-r,r) rezultă că a+ts$\in$B(a,r) $\subset$A.

Luând x = a + ts $\in$ B(a, r) vom avea g(t)$\geq$g(0), ($\forall$) t$\in$(-r, r) deci t = 0 este punct de minim local pentru g.

Cum f este diferențiabilă în a rezultă că f este derivabilă în a după direcția s deci g este derivabilă în t = 0 şi conform teoremei lui Fermat de la funcțiile reale de variabilă reală rezultă că g'(0) = 0. Dar aceasta implică $\frac{df}{ds}(a) = 0$.

Luând s = e_i, $i = \overline{1,n}$, unde $e_1, e_2, ..., e_n$ sunt versorii bazei canonice obținem

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i = 0 .$$

■

Observație. Din teorema lui Fermat rezultă că mulțimea punctelor de extrem local se află printre mulțimea punctelor critice, adică printre mulțimea soluțiilor sistemului
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. În acest sens fie funcția $f:R^2 \to R$, $f(x,y) = x^2 - 3y^2$. Evident avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, deci df(0,0)=0. Mai mult, $f(x,0)-f(0,0)=x^2>0$, $(\forall)$ $(x,y)\in R^2$, $x \neq 0$, $f(0,y)-f(0,0)= -3y^2<0$, $(\forall)$ $(x,y)\in R^2$, $y \neq 0$, deci diferența f(x,y)-f(0,0) nu are semn constant pe nici o vecinătate a originii şi atunci punctul (0,0) nu este punct de extrem local pentru f.

Vom stabili în continuare o condiție suficientă pentru ca un punct critic să fie punct de extrem local. În acest scop vom stabili mai întâi :

Lema 6.6.1. Fie $\varphi : R^n \to R$ o formă pătratică pozitiv definită, adică $j(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $(\forall)\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $a_{ij} \in R$, $i,j \in \overline{1,n}$ şi $\varphi(x) > 0, (\forall)\, x \in R^n,\ x \neq 0$.

Atunci există o constantă m >0 astfel încât $\varphi(x) \geq m\|x\|^2$, $(\forall) x \in R^n$.

Demonstrație. Fie $S = \{x \in R^n : \|x\|=1\}$.

Cum S este închisă şi mărginită în R^n, este compactă şi din teorema lui Weierstrass, cum φ este continuă pe S este mărginită inferior pe S şi îşi atinge marginea inferioară. Fie $a \in S$ astfel încât $\varphi(a) = m = \inf\{\varphi(x) : x \in S\}$

Cum $a \in S$ avem $a \neq 0$ şi atunci $m = \varphi(a) > 0$ iar pentru orice $y \in S$ avem $\varphi(y) \geq m$. Dacă $x \in R^n$, $x \neq 0$, atunci $y = \dfrac{x}{\|x\|} \in S$ şi deci $\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \geq m$, $(\forall)$ $x \in R^n$, $x \neq 0$ de unde $\varphi(x) \geq m\|x\|^2$, $(\forall)$ $x \in R^n$, $x \neq 0$ şi cum această inegalitate este verificată şi pentru x = 0, demonstrația este încheiată. ■

Teorema 6.6.2. Fie $A \subset R^n$, deschisă, f:A→R,f∈ $C^2(A)$ şi $a \in A$ punct critic pentru f. Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este

a) pozitiv definită atunci a punct de minim local;

b) negativ definită (adică $-d^2f(a)$ este pozitiv definită) atunci a este punct de maxim local.

Demonstrație. Presupunem mai întâi că $d^2f(a)$ este pozitiv definită. Cum $f \in C^2(A)$ rezultă că matricea asociată $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n}$ este simetrică.

Aplicând lema 6.6.1 formei pătratice $d^2f(a)$ rezultă că există m>0 astfel încât

$$d^2f(a)(x) \ge m\,\|x\|^2, (\forall)x \in R^n \text{ şi atunci}$$

$$d^2f(a)(x-a) \ge m\,\|x-a\|^2, (\forall)x \in R^n.$$

Pe de altă parte, cum $f \in C^2(A)$, din formula lui Taylor cu rest de ordin k = 2 sub forma Lagrange, pentru orice $x \in B(a,r) \subset A$, există un punct ξ între a şi x astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(\xi)(x-a).$$

Cum a este punct critic avem df(a) = 0 şi atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f(\xi)(x-a) = \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a) + \frac{1}{2}\left[d^2f(\xi)(x-a) - d^2f(a)(x-a)\right] \ge$$

$$\ge \frac{m}{2}\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\left[d^2f(\xi)(x-a) - d^2f(a)(x-a)\right], \ (\forall)\ x \in B(a,r).$$

Fie $$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{d^2f(\xi)(x-a) - d^2f(a)(x-a)}{\|x-a\|^2} & ,\text{daca } x \ne a, x \in B(a,r) \\ 0 & ,\text{daca } x = a \end{cases}$$

Cum $f \in C^2(A)$ avem $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ şi atunci

$$f(x) - f(a) \ge \frac{m}{2}\|x-a\|^2 + \frac{\alpha(x)}{2}\|x-a\|^2 = \frac{\|x-a\|^2}{2}(m + \alpha(x)),$$

Cum m > 0 şi $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, există $r_1 > 0$, $r_1 < r$ astfel încât

$$m + \alpha(x) > 0, (\forall)x \in B(a,r_1) \subset B(a,r).$$

În concluzie $f(x) - f(a) \geq 0$, $(\forall)$ $x\in B(a,r_1)$, adică a este un punct de minim local.

Dacă $d^2f(a)$ este negativ definită atunci $-d^2f(a)$ este pozitiv definită şi folosim prima parte a demonstrației. ■

Teorema 6.6.3. Fie $A\subset \mathbb{R}^2$, deschisă, $f\in C^2(A)$, $f = f(x,y)$, $a\in A$, $a =(x_0,y_0)$ un punct critic pentru f.

Fie $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0), t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$ (notațiile lui de Monge). Dacă

1) $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ şi $r_0 > 0$ atunci (x_0,y_0) este punct de minim local;

2) $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ şi $r_0 < 0$ atunci (x_0,y_0) este punct de maxim local;

3) $r_0t_0 - s_0^2 < 0$ atunci (x_0,y_0) nu este punct de extrem local.

Demonstrație. Pentru $(x,y)\in A$ avem

$$d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 = (y-y_0)^2\left[r_0\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2 + 2s_0\frac{x-x_0}{y-y_0} + t_0\right], \text{ pentru } y \neq y_0.$$

Dacă notăm cu $u = \frac{x-x_0}{y-y_0}$ atunci se observă că $d^2f(x_0, y_0)$ are un semn constant dacă şi numai dacă trinomul $r_0u^2+2s_0u+t_0$ are rădăcini complexe, adică dacă $r_0t_0 - s_0^2 > 0$.

În acest caz semnul său este dat de semnul lui r_0.

În consecință, $d^2f(a)$ este pozitiv definită dacă $r_0>0$ şi negativ definită dacă $r_0 < 0$.

Conform teoremei 6.6.2, pentru $r_0 > 0$ punctul (x_0,y_0) este punct de minim local iar pentru $r_0 < 0$, punctul (x_0,y_0) este punct de maxim local.

Dacă $r_0t_0 - s_0^2 < 0$ atunci $d^2f(x_0,y_0)$ nu mai păstrează semn constant şi atunci diferența $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a punctului (x_0,y_0), deci (x_0,y_0) nu este punct de extrem. ■

Observație. Dacă $r_0t_0 - s_0^2 = 0$ nu putem preciza dacă punctul (x_0, y_0) este sau nu punct de extrem. În acest caz semnul diferenței $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ depinde de semnul diferențelor de ordin superior.

Exemplu. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:A\subset R^2 \to R,\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

Determinăm mai întâi punctele critice:

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - \dfrac{4}{x} = 0 \\ x + 2y - \dfrac{10}{y} = 0 \end{cases}$, care are soluția $(x_0,y_0) = (1,2)$ deci punctul $(1,2)$ este punct critic. Pentru a vedea dacă este punct de extrem local să calculăm derivatele parțiale de ordinul doi.

Evident avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 1;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{10}{y^2} \Rightarrow t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 2 + \frac{10}{4} = \frac{9}{2}.$$

Prin urmare $r_0t_0 - s_0^2 = 6 \cdot \frac{9}{2} - 1 = 26 > 0$ şi cum $r_0 > 0$ rezultă că $(1,2)$ este punct de minim local.

Teorema 6.6.4. Fie $A \subset R^n$, deschisă, $f : A \to R, f \in C^2(A)$ şi $a \in A$ punct critic pentru f.

Fie $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = a_{ji}, 1 \le i, j \le n$.

Fie $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Atunci:

1) Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, rezultă că punctul a este punct de minim local;

2) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$, rezultă că punctul a este punct de maxim local.

Demonstrație. Se foloseşte următorul rezultat algebric (condițiile lui Sylvester):

Fie φ o formă pătratică a cărei matrice asociată $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ este simetrică.

Fie $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, minorii principali ai matricei. Atunci:

1) Dacă $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0,$ rezultă că φ este pozitiv definită;

2) Dacă $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \cdot \Delta_n > 0,$ rezultă că φ este negativ definită. ■

Exemplu. Să se determine punctele de extrem local ale funcției cu valorile $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16},\ x,y,z > 0$.

Determinăm mai întâi punctele critice:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} = 0 \\ -\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ -\dfrac{y}{z^2} + \dfrac{1}{16} = 0 \end{cases}$$

, care are soluția x = 2, y = 4, z = 8, deci $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 8)$ este punct critic.

Pentru a vedea dacă este punct de extrem local să calculăm derivatele parțiale de ordinul doi.

Evident avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2y}{z^3}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{z^2}$$

şi matricea hessiană devine

$$H(2,4,8)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(2,4,8) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(2,4,8) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(2,4,8) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(2,4,8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{64} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\Delta_1 = \frac{1}{4} > 0,\ \Delta_2 = \frac{3}{256} > 0,\ \Delta_3 = \frac{1}{2\cdot 64^2} > 0,$ deci

$(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 8)$ este punct de minim local.

Extreme condiționate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $f : A \subset R^n \to R,\ \ g_1, g_2, ..., g_k : A \to R,\ k < n$ şi $B \subset A$ mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{6.25}$$

Ne propunem să determinăm extremele funcției f care să verifice în plus condițiile (6.25), numite legături.

Definiția 6.6.2. Un punct $a \in B$ se numeşte punct de extrem local al funcției f cu restricțiile (6.25) sau punct de extrem local condiționat dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{J}(a)$ astfel încât diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant pe $V \cap B$.

Cu alte cuvinte punctul a este punct de extrem condiționat pentru f dacă este punct de extrem pentru restricția lui f la B, deci pentru $f|_B$.

Definiția 6.6.3. Un punct $a \in B$ se numeşte punct critic condiționat pentru f dacă este punct critic pentru $f_{|B}$..

Pentru determinarea extremelor condiționate vom folosi metoda multiplicatorilor a lui Lagrange.

Teorema 6.6.5. (Existența multiplicatorilor lui Lagrange).

Fie $A \subset R^n$, deschisă, f, g_1, g_2, ..., $g_k \in C^1(A)$ şi $a \in A$ punct de extrem local pentru f cu restricțiile (6.25).

Dacă $\frac{D(g_1, g_2, ..., g_k)}{D(x_1, x_2, ..., x_k)}(a) \neq 0$ atunci există k numere reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ astfel încât dacă se consideră funcția $L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_k g_k$, să avem

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \ i = \overline{1,n} \\ g_i(a) = 0, \ i = \overline{1,k} \end{cases}$$, adică punctul a să fie punct critic al funcției L.

Demonstrație. Cum $\frac{D(g_1, g_2, ..., g_k)}{D(x_1, x_2, ..., x_k)}(a) \neq 0$ conform teoremei 6.5.2 sistemul (6.25) poate fi rezolvat în raport cu variabilele x_1, x_2, ..., x_k pe o vecinătate a punctului a = (a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n), deci există o vecinătate U_0 a punctului (a_{k+1}, ..., a_n) în R^{n-k}, o vecinătate V_0 a punctului (a_1, a_2, ..., a_k) în R^k astfel încât $V_0 x U_0 \subset B$ şi sistemul (6.25) are soluție unică (x_1, x_2, ..., x_k) în V_0:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, ..., x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1}, ..., x_n) \\ .... \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, ..., x_n) \end{cases} \tag{6.26}$$

Avem $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, ..., a_n)$, $a_2 = \varphi_2(a_{k+1}, ..., a_n), ..., a_k = \varphi_k(a_{k+1}, ..., a_n)$.

Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ sunt de clasă C^1 pe U_0.

Înlocuind $x_1, x_2, ..., x_k$ din (6.26) în (6.25) obținem:

$$\begin{cases} g_1(\varphi_1(x_{k+1},...,x_n),...,\varphi_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n)=0 \\ g_2(\varphi_1(x_{k+1},...,x_n),...,\varphi_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(\varphi_1(x_{k+1},...,x_n),...,\varphi_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n)=0 \end{cases} \tag{6.27}$$

$(\forall)(x_{k+1},x_{k+2},...,x_n)\in U_0$.

Din (6.27), folosind teorema de derivare a funcțiilor compuse obținem:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial g_m}{\partial x_i}=0,\ m=\overline{1,k},\ i=\overline{k+1,n} \tag{6.28}$$

Considerăm funcția cu valorile

$$F(x_{k+1},...,x_n)=f(\varphi_1(x_{k+1},...,x_n),...,\varphi_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n).$$

Cum punctul a este punct de extrem local pentru f, cu restricțiile (6.25) iar $(\varphi_1(x_{k+1},...,x_n),...,\varphi_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n)\in B$ rezultă că $(a_{k+1},...,a_n)$ este punct de extrem local pentru F.

Folosind teorema lui Fermat rezultă că:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_{k+1},...,a_n)=0,\ (\forall)\,i=\overline{k+1,n}\ \text{, adică}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(a_{k+1},...,a_n)=0\ ,\ i=\overline{k+1,n} \tag{6.29}$$

Întrucât $\dfrac{D(g_1,g_2,...,g_k)}{D(x_1,x_2,...,x_k)}(a)\neq 0$ rezultă că sistemul liniar

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a)\ \alpha_m=-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ ,\ j=\overline{1,k} \tag{6.30}$$

are soluție unică. Fie $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$ această soluție şi $L=f+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m g_m$.

Vom arăta că L satisface concluziile teoremei.

Cum $a\in B$ rezultă că $g_i(a)=0,\ (\forall)\ i=\overline{1,k}$.

Pentru $j \in \overline{1,k}$ vom avea $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_i}(a)$ şi folosind (6.30) obținem (ținând cont că $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ este soluție a sistemului) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(a) = 0,\ (\forall)\ j = \overline{1,k}$.

Pentru $i \in \overline{k+1,n}$, folosind (6.28) vom avea

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a_{k+1}, ..., a_n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{J=1}^{K} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(a_{k+1}, ..., a_n) \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a).$$

Cum $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ este soluțue a sistemului (6.30) va rezulta că $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a_{k+1}, ..., a_n) \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ şi folosind (6.29) obținem $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, (\forall)\ i = \overline{k+1,n}$ şi demonstrația este încheiată. ■

Observație. Teorema 6.6.5 se poate enunța şi astfel: Orice punct de extrem condiționat este punct critic condiționat.

Practic, pentru rezolvarea unei probleme de extrem condiționat se procedează astfel:

1. Se asociază funcția lui Lagrange

$$L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_k g_k \text{ ,cu } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in R,$$

nedeterminați (numiți multiplicatorii lui Lagrange).

2. Se determină punctele critice ale lui L, adică soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, 1 \le i \le n \\ g_i = 0\ ,\ 1 \le i \le k \end{cases}$$

3. Dacă $(a_1, a_2, ... a_n, \lambda_1, ..., \lambda_k)$ este o soluție a acestui sistem atunci punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct critic condiționat al funcției f.

4. Presupunem că f, g_1, g_2, ..., $g_k \in C^2(A)$.

În acest caz $f(x)-f(a)=L(x)-L(a)$, $(\forall)\, x\in B$ şi pentru a studia dacă a este punct de extrem local condiționat vom studia semnul diferenței L(x) - L(a), calculând $d^2L(a)$, în care diferențiem legăturile (6.25) în punctul a. Vom găsi în acest punct dx_1, dx_2, ..., dx_k în funcție de dx_{k+1}, ..., dx_n.

Aplicație. Să se construiască un rezervor în formă de paralelipiped drept, de volum maxim având la dispoziție 48 m^2 de tablă (presupunem rezervorul neacoperit).

Fie x > 0 lungimea, y > 0 lățimea şi z > 0 înălțimea paralelipipedului.

Atunci volumul paralelipipedului este V = xyz şi xy+2xz+2yz = 48.

Problema se reduce la determinarea maximului funcției f cu valorile $f(x,y,z)=xyz,\ x>0, y>0, z>0$, cu legătura $xy+2xz+2yz-48=0 \iff g(x,y,z)=0$, unde $g(x,y,z)=xy+2xz+2yz-48$.

Fie $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=xyz+\lambda(xy+2xz+2yz-48)$.

Determinăm punctele critice ale lui L:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\\ g=0\end{cases} \iff \begin{cases} yz+\lambda y+2\lambda z=0\\ xz+\lambda x+2\lambda z=0\\ xy+2\lambda x+2\lambda y=0\\ xy+2xz+2yz-48=0\end{cases}$$, care admite soluția $x=y=4,\ z=2,\ \lambda=-1$,

deci punctul (4,4,2) este punct critic condiționat.

Pentru $\lambda=-1$, funcția lui Lagrange devine

$$L(x,y,z) = xyz-xy-2xz-2yz+48.$$

Vom calcula $d^2L(4,4,2)$. Evident avem

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=z-1,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=y-2,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=x-2$ şi atunci

$$d^2L(4,4,2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(4,4,2)dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(4,4,2)dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(4,4,2)dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(4,4,2)dxdy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(4,4,2)dxdz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(4,4,2)dydz =$$

$$= 2dxdy + 4dydz + 4dzdx.$$

Din g(x,y,z) = 0 rezultă dg(x,y,z) = 0 şi în particular dg(4,4,2)=0, adică

8dx+8dy+16dz = 0, de unde dx = -dy -2dz.

În concluzie,

$$d^2L(4,4,2) = -2dy(dy + 2dz) + 4dydz - 4dz(dy + 2dz) = -2dy^2 - 4dydz - 4dz^2 < 0 \ ,$$

deci $d^2L(4,4,2)$ este negativ definită şi atunci punctul (4,4,2) este punct de maxim local.

Probleme propuse

1. Fie funcția $f: R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2}, & \text{daca } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{daca } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Să se arate că funcția f nu este continuă în punctul (0,0) dar este derivabilă în (0,0) după orice versor $s = (s_1, s_2) \in R^2$.

2. Fie funcția $f: R^2 \to R$, f(x,y) = cos(2x+3y).

Să se calculeze $\frac{df}{ds}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, unde $s \in R^2$ este un versor.

3. Fie funcția $f: R^2 \to R$, f(x,y)=$\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{daca } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{daca } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Să se arate că

a) f este continuă şi derivabilă parțial pe R^2;

b) f nu este diferențiabilă în punctul (0, 0).

4. Fie funcția $f: D \subset R^2 \to R$, f(x,y)= $\begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{daca } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{daca } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Să se arate că

a) f este derivabilă parțial pe R^2 iar derivatele parțiale nu sunt continue în punctul (0,0);

b) f este diferențiabilă în punctul (0, 0).

5. Fie funcția $f: D \subset R^2 \to R$, f(x,y) =arctg $\dfrac{x}{y}$.

a) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi;

b) Să se calculeze df(-1,2), df(-1,2)(3,-2), d^2f(-1,2), d^2f(-1,2)(3,-2).

6. Fie funcția $f: D \subset R^3 \to R^2$, $\quad f(x,y,z) = \left(e^{\sqrt{x^2+3y+z}}, \dfrac{3x}{x^2+y^2}\right)$.

Să se determine $J_f(2,-1,0)$.

7. Fie funcția f:R^3\{(a,b,c)}→R,

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$ **, unde a,b,c ∈ R.**

Să se arate că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

8. Fie funcția f:D⊂R^2→R, $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$, unde m,n∈ N^*.

9. Fie funcția $f: R^2 \to R$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & \text{daca } y \neq 0 \\ 0 & , \text{daca } y = 0 \end{cases}$$

Să se arate că $f \in C^1(R^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ dar nu este verificat criteriul lui Schwarz.

10. Fie funcția $u : D \subset R^2 \to R$,

u(x, t) = f(x + at) + g(x - at), a $\in$ R, unde f şi g sunt două funcții de două ori diferențiabile.

Să se arate că $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

11. Fie funcția f :D$\subset R^3 \to R$**,** $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$,unde $\varphi : \Delta \subset R^2 \to R$ este diferențiabilă.

Să se arate că $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{z} + f$.

12. Să se arate că următoarele funcții sunt omogene şi să se verifice relația lui Euler:

a) f:D$\subset R^3 \to R$**,** $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{3y}\right)^{\frac{y}{z}}$;

b)f:D$\subset R^2 \to R$**,** $f(x,y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$**,**unde $n \in N^*$şi φ este o funcție diferențiabilă.

13. Fie funcția f:D$\subset R^2 \to R$**,** $f(x,y) = \varphi\left(x^2 - y^2, \frac{x}{y}\right)$**,**unde $\varphi : \Delta \subset R^2 \to R$, $\varphi \in C^2(\Delta)$**.**

Să se calculeze $df(x,y)$ şi $d^2f(x,y)$,unde $(x,y) \in D$.

14. Fie funcția f:D$\subset R^2 \to R$, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$**.** Să se aproximeze funcția f printr-un polinom de grad doi în vecinătatea punctului (1,-1).

15. Să se studieze extremele locale ale funcțiilor:

a) f :$R^2 \to R$**,** $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{2x+3y}$;

b) f :$R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R$, $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$;

c) f : $(0,\pi)\times(0,\pi) \to R$, $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$;

d) f :D $\subset R^2 \to R$, f(x,y) = x-2y + $\ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

e) f :$R^3 \to R$, $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

16. Să se arate că funcția f :$R^2 \to R$, $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ are o infinitate de puncte de maxim local şi nici un punct de minim local.

17. Să se arate ca ecuația $xe^z = xy + z$ defineşte funcția z pe o vecinătate a punctului (2,1, 0).

Să se calculeze dz(2,1) şi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,1)$.

18. Să se calculeze y',y'', dacă funcția y este definită de ecuația $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

19. Ecuația F(x, x+z, y+z) = 0, unde F:D$\subset R^3 \to R$,F$\in C^2(D)$,defineşte funcția z.

Să se calculeze dz şi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

20. Să se arate că sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ defineşte în mod implicit funcțiile x şi y pe o vecinătate a punctului (1,-1,2).

Să se calculeze x'(2); y'(2); x"(2); y"(2).

21. Dacă funcțiile u şi v sunt definite de sistemul

$\begin{cases} uv = ax + by + cz \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$,a, b, c $\in R$, atunci $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

22. Sistemul $\begin{cases} g(x+u, y-v) = 1 \\ xu + yv = 1 \end{cases}$,unde g:D$\subset R^2 \to R$, g$\in C^1(D)$ defineşte funcțiile u şi v. Să se calculeze du, dv.

23. Să se studieze punctele de extrem local ale funcției z definită de ecuația $x^2+y^2+z^2+2x+y-4z = \frac{15}{4}$.

24. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f:R^3 \to R$, $f(x, y, z) = xy^2z^3$ cu legătura $x + 2y + 3z = a$ $(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$.

25. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : R^3 \to R$,

$$f(x, y, z) = xyz, \text{ cu legăturile } \begin{cases} xy + xz + yz = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}.$$

CAPITOLUL 7

INTEGRALA RIEMANN

7.1. Primitiva unei funcții reale de variabilă reală

Definiția 7.1.1. Fie $I \subset R$ un interval şi funcția $f : I \to R$. Spunem că f admite primitivă pe I dacă există o funcție $F : I \to R$, derivabilă pe I astfel încât $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Funcția F se numeşte primitivă a funcției f.

Proprietăți ale primitivelor

Propoziția 7.1.1. Dacă $F : I \to R$ este o primitivă a funcției f pe I atunci $F + c$, unde $c \in R$, este o primitivă a lui f pe I.

Demonstrație. Fie $c \in R$ şi $G : I \to R$, $G = F + c$.
Vom avea $G' = (F + c)' = F' = f$. ∎

Propoziția 7.1.2. Dacă $F,G : I \to R$ sunt două primitive ale lui f pe I atunci acestea diferă printr-o constantă.

Demonstrație. Cum $F' = G' = f$ rezultă $(F - G)' = F' - G' = 0$, deci $F – G$ este o constantă. ∎

Observație. Dacă I nu este interval, concluzia propoziției 7.1.2 nu este în general adevărată.

În acest sens considerăm funcția

$f : (0,1) \cup (2,3) \to R$, $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in (0,1) \cup (2,3)$ şi

$F, G : (0,1) \cup (2,3) \to R$, $F(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ daca } x \in (0,1) \\ x, \text{ daca } x \in (2,3) \end{cases}$

$$G(x) = \begin{cases} x, \text{ daca } x \in (0,1) \\ x+1, \text{ daca } x \in (2,3) \end{cases}$$

Atunci F, G sunt derivabile pe $(0,1) \cup (2,3)$,

F' = G' = f dar F şi G nu diferă printr-o constantă.

Observație. Din propoziția 7.1.2 rezultă că, dacă $F : I \to R$ este o primitivă a funcției f pe I atunci mulțimea primitivelor funcției f pe I este formată din funcțiile de forma F + c, unde $c \in R$.

Mulțimea $\{F + c: c \in R\}$ a tuturor primitivelor lui f pe I se numeşte integrala nedefinită a lui f pe I şi se notează cu $\int f(x)dx$ (sau $\int fdx$, $\int f$).

Vom scrie $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Propoziția 7.1.3. Dacă f şi g au primitive pe un interval I atunci funcția f+g are primitive pe I şi $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Demonstrație. Fie $F : I \to R$ o primitivă a lui f şi $G : I \to R$ o primitivă a lui g. Atunci vom avea $(F + G)' = F' + G' = f + g$, deci F + G este o primitivă a lui f + g şi demonstrația este încheiată. ■

Propoziția. 7.1.4. Dacă f are primitive pe un interval I şi $\alpha \in R$ atunci αf are primitive pe I iar pentru $\alpha \neq 0$ avem $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

Demonstrație. Fie $F : I \to R$ o primitivă a lui f şi $\alpha \in R$. Vom avea $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$, deci αF este o primitivă a lui αf.

Dacă $\alpha = 0$ atunci $\int \alpha f(x)dx = \int 0dx = C$ iar $\alpha \int f(x)dx = 0$, deci egalitatea nu este adevărată. ■

Propoziția 7.1.5. Dacă f are primitive pe un interval $I \subset R$ atunci f are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. Fie $F : I \to R$ o primitivă a lui f. Atunci F este derivabilă pe I şi din teorema lui Darboux derivata sa F' = f are proprietatea lui Darboux. ■

Propoziția 7.1.6. (de existență a primitivelor). Fie $f : I \rightarrow R$ o funcție continuă. Atunci f are primitive pe I.

Metode de determinare a primitivelor

Propoziția 7.1.7. (metoda integrării prin părți)
Fie $f, g : I \rightarrow R$, derivabile cu derivate continue pe I. Atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Demonstrație. Cum f ' şi g' sunt continue rezultă fg' şi f 'g sunt continue, deci au primitive .
Cum $(fg)' = f'g + fg'$ rezultă că funcția fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$, deci

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C, \text{ de unde}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Propoziția 7.1.8. (prima metodă de schimbare de variabilă).
Fie $I, J \subset R$ intervale şi funcțiile $f : I \rightarrow R$, $\varphi : J \rightarrow I$ cu proprietățile

i) φ este derivabilă pe J;

ii) f are primitive pe I şi $F : I \rightarrow R$ este o primitivă a sa.

Atunci funcția $(f\circ\varphi)\varphi'$ are primitive pe J şi $F\circ\varphi$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Demonstrație. Cum $F\circ\varphi$ este derivabilă pe J şi $(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\varphi' = (f\circ\varphi)\varphi'$ demonstrația este încheiată. $\blacksquare$

Propoziția 7.1.9. (a doua metodă de schimbare de variabilă)
Fie $I, J \subset R$ intervale şi funcțiile $f : I \rightarrow R$, $\varphi: J \rightarrow I$, cu proprietățile:

i) φ este bijectivă, derivabilă cu $\varphi'(t) \neq 0$ $(\forall)$ $t \in J$;

ii) funcția $(f\circ\varphi)\varphi'$ are primitive pe J şi $G : J \rightarrow R$ este o primitivă a sa.

Atunci f are primitive pe I şi $G\circ\varphi^{-1}$ este o primitivă a sa, adică

$$\int f(x)dx = G\circ\varphi^{-1} + C.$$

Demonstrație. Din i) rezultă că φ^{-1} este derivabilă pe I şi cum G este derivabilă pe J rezultă că $G\circ\varphi^{-1}$ este derivabilă pe I şi

$$(G\circ \varphi^{-1})'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (f\circ\varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) =$$

$$= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x),\ (\forall)\ x\in I.$$

În concluzie funcția $G\circ\varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f. ■

7.1.1.Primitivele funcțiilor raționale

Vom da o metodă de calcul a primitivelor de forma $\int f(x)dx$, $x\in I$, unde $I\subset R$ este un interval iar f este o funcție rațională, adică $f = \frac{P}{Q}$, unde $P, Q \in R[X]$, $Q(x) \neq 0$, $(\forall)\ x\in I$.

Dacă grad P$\geq$ grad Q atunci $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, unde $C, R \in R[X]$, grad R < grad Q şi astfel

$$\int f(x)dx = \int C(x)dx + \int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Cum C este un polinom integrala $\int C(x)dx$ se calculează imediat şi atunci integrala $\int f(x)dx$ se reduce la calculul integralei $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

Astfel, este suficient să studiem cazul în care grad P < grad Q.

Definiția. 7.1.2. Se numesc fracții simple funcțiile cu valorile de forma:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^m},\ \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n},\quad \text{unde } x\in I,\ x\neq\alpha,$$

$A, B, C, \alpha, a, b, c \in R$, $m, n \in N^*$, $b^2 - 4ac < 0$.

Conform unui rezultat cunoscut din algebră orice funcție rațională $f = \frac{P}{Q}$, cu grad P < grad Q se descompune în mod unic ca o sumă de fracții simple.

Exemplu.

$$\frac{x^3}{(2x+1)(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2},$$

unde A, B, C, D, E, F, G $\in$ R se determină prin identificarea coeficienților după ce aducem la acelaşi numitor.

Astfel este suficient să calculăm primitivele fracțiilor simple.

Evident avem

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}dx = \begin{cases} A\dfrac{(x-\alpha)^{-m+1}}{-m+1} + C, \text{pentru } m \neq 1 \\ A\ln|x-\alpha| + C, \text{pentru } m = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{B}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \left(C - \frac{bB}{2a}\right)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

Fie $I_n = \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, $J_n = \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$

Evident avem:

$$I_n = \int \frac{(ax^2+bx+c)'}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{(ax^2+bx+c)^{-n+1}}{-n+1} + C, \text{dacă } n \neq 1 \\ \ln|ax^2+bx+c| + C, \text{dacă } n = 1 \end{cases}$$

Pentru J_n avem:

$$J_n = \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)^n}dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n}dx.$$

Folosind schimbarea de variabilă $x = t - \frac{b}{2a}$ integrala J_n se reduce la calculul integralei $T_n = \int \frac{1}{(t^2+\beta^2)^n}dx$, unde $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|} > 0$.

Pentru n = 1 rezultă $T_1 = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta} + C$, iar pentru $n \geq 2$,

$$T_n = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\beta^2+t^2-t^2}{(t^2+\beta^2)^n}dt = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{1}{(t^2+\beta^2)^{n-1}}dt - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{t^2}{(t^2+\beta^2)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}T_{n-1} - \frac{1}{2\beta^2}\int t\left(\frac{(t^2+\beta^2)^{-n+1}}{-n+1}\right)'dt =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} T_{n-1} - \frac{1}{2\beta^2}\left[t\frac{(t^2+\beta^2)^{-n+1}}{-n+1} - \int \frac{(t^2+\beta^2)^{-n+1}}{-n+1} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} T_{n-1} + \frac{1}{2\beta^2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+\beta^2)^{n-1}} - \frac{1}{2\beta^2(n-1)} T_{n-1}, \text{ deci}$$

$$T_n = \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{1}{n-1} \cdot \frac{t}{(t^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} T_{n-1} \right], \ (\forall)\ n \geq 2.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \frac{x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} dx, \ x \in I \subset R \setminus \{\pm 1\}.$$

Din descompunerea în fracții simple

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}, \text{ găsim}$$

$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{7}{8}$, $C = \frac{3}{4}$, $D = \frac{3}{4}$, $E = \frac{1}{4}$, şi atunci

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{7}{8}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{3x+1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{7}{8}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{8}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C.$$

7.1.2. Primitive de funcții iraționale

Vom prezenta câteva tipuri de integrale de funcții iraționale care prin schimbări convenabile de variabilă se reduc la integrale de funcții raționale.

A. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right] dx, \ x \in I$, unde

R este o funcție rațională, $cx + d \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$, $m_i, n_i \in Z$, $n_i > 0$, $(m_i, n_i) = 1$, $i = \overline{1,k}$.

În acest caz efectuăm schimbarea de variabilă dată de $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$,

unde s = c.m.m.m.c. $(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Obținem $x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s} = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \frac{s(ad-bc)t^{s-1}}{(a-ct^s)^2}$

şi atunci integrala se transformă în

$$I = \int R\left(\frac{dt^s - b}{a - ct^s}, t^{\frac{m_1 s}{n_1}}, \ldots, t^{\frac{m_k s}{n_k}}\right)\frac{s(ad - bc)t^{s-1}}{(a - ct^s)^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

unde R_1 este o funcție rațională.

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$, $x > 1$.

Această integrală este de forma:

$I = \int R\left[x, \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx$ şi folosind schimbarea de variabilă dată de $\frac{x+1}{x-1} = t^2$ obținem

$x = \varphi(t)$, unde $\varphi(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ şi $\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}$.

Integrala dată se transformă în

$$J = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt = -4\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt = -2\int\left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t - 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C,$$

de unde $I = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\right| + C.$

B. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$, $x \in \mathbf{I}$, unde R este o funcție rațională şi $ax^2+bx+c \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{I}$.

Această integrală se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională folosind substituțiile lui Euler şi anume:

i) dacă $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$;

ii) dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t(x - x_1) \\ \text{sau} \\ t(x - x_2), \end{cases}$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$;

iii) dacă $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

Sunt cazuri particulare în care se pot folosi şi alte schimbări de variabile care conduc la calcule mai simple şi anume:

Caz 1. Pentru integrala $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$, cu R funcție rațională se poate folosi schimbarea x = a tgt sau x = a sht.

Caz 2. Pentru integrala $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, se poate folosi schimbarea x = a cht.

Caz 3. Pentru integrala $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, se poate folosi schimbarea x = a sint sau x = a cost.

C. $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx,\ x\in$ **I**, $m,n,p\in Q$, numită şi integrală binomă.

Matematicianul rus Cebâşev a arătat că această integrală binomă se poate reduce la o integrală din funcții raționale numai într-unul din următoarele cazuri:

i) Dacă $p\in Z$ se efectuează schimbarea $x = t^s$, unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m şi n;

ii) Dacă $p\notin Z$ dar $\frac{m+1}{n}\in Z$ se efectuează schimbarea dată de $ax^n + b = t^s$, unde s este numitorul lui p;

iii) Dacă $p\notin Z$, $\frac{m+1}{n}\notin Z$ dar $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, se efectuează schimbarea de variabilă dată de $\frac{ax^n+b}{x^n}=t^s$, unde s este numitorul lui p.

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$, x>0

Integrala este de forma:

$I = \int x\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, deci este o integrală binomă cu m = 1, n = $\frac{2}{3}$, p = -$\frac{1}{2}$.

Evident $p\notin Z$ şi $\frac{m+1}{n} = 3 \in Z$, deci suntem în cazul ii) şi efectuăm schimbarea de variabilă dată de $x^{\frac{2}{3}} + 1 = t^2 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = t^2 - 1 \Rightarrow x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dx = \frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2tdt = 3t\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt\,.$$

Integrala dată se transformă în

$$J = \int \left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\; t^{-1}3t\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt \;=\; 3\int\left(t^2-1\right)^2 dt = 3\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt =$$

$$= 3\frac{t^5}{5} - 2t^3 + 3t + C,\ \text{ de unde}$$

$$I = \frac{3}{5}\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{5}{2}} - 2\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}} + 3\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right) + C\,.$$

7.1.3. Primitive de funcții raționale în sinus şi cosinus

Acestea sunt primitive de forma

$\int R(\sin x, \cos x)dx,$ unde R este o funcție rațională şi $x\in I\subset R$.

Efectuăm schimbarea de variabilă dată de $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}t,$ pentru $x\in I\cap(-\pi,\pi)$. Cum $dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$ integrala dată se reduce la $I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$ unde R_1 este o funcție rațională.

În anumite cazuri particulare se pot folosi şi alte schimbări de variabilă care conduc la calcule mai simple şi anume:

i) dacă R este impară în sinus, adică R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx), se efectuează schimbarea de variabilă cosx = t.

ii) dacă R este impară în cosinus, adică R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx), se efectuează schimbarea de variabilă sinx = t.

iii) dacă R este pară în sinus şi cosinus, adică R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx), se efectuează schimbarea de variabilă tgx = t.

Exemple. 1. Să se calculeze integrala

$$I = \int\frac{1}{3+\cos x}dx,\ \ x\in(0,\pi)\,.$$

Folosind schimbarea $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ = t integrala se transformă în

$$J = \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C, \text{ de unde}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

2. Să se calculeze integrala I = $\int \frac{1}{3+\cos x}dx,\ x \in (0, 2\pi)$.

În acest caz nu mai putem folosi schimbarea $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ = t, deoarece pentru x = π nu are sens $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$.

Fie f : (0, 2π) $\to$ R, f(x) = $\frac{1}{3+\cos x}$. Cum f este continuă pe (0, 2π) are primitive pe (0, 2 π).

O primitivă a funcției f pe (0, π) este (conform exemplului 1) funcția G:(0, π) $\to$ R, G(x) = $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ şi atunci o primitivă a funcției f pe (0, 2π) este funcția F:(0, 2π) $\to$ R,

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & \text{pentru } x \in (0, \pi) \\ c_1, & \text{pentru } x = \pi \\ G(x) + c_2, & \text{pentru } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}, \text{ unde } c_1,\ c_2 \in R$$

Din condiția de continuitate şi derivabilitate a lui F în punctul x = π obținem $c_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, c_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ şi atunci I = F(x) + C.

3. Să se calculeze integrala $I_n = \int \cos^n x dx, x \in R, n \in N^*$.

Vom stabili o relație de recurență pentru I_n.

Pentru n = 0 $\Rightarrow I_0 = \int dx = x + C$;

Pentru n = 1 $\Rightarrow I_1 = \int \cos x\, dx = \sin x + C$;

Pentru n ≥ 2 $\Rightarrow I_n = \int \cos^{n-1}x \cdot (\sin x)' dx =$

$$= \cos^{n-1}x \sin x - \int (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)(\sin x)dx =$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x \sin^2 x dx =$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx =$$

$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, de unde

$$I_n = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ (\forall)\ n \geq 2$$

Analog se calculează integrala $I_n = \int \sin^n x dx$.

7.2. Integrala definită

Fie funcția f:[a, b] $\to$ R.

Definiția 7.2.1. Se numeşte diviziune(sau divizare) a compactului [a, b] un sistem de puncte notat $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$.

Punctele x_k, k = $\overline{0,n}$ se numesc punctele diviziunii.

Un sistem de puncte $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, unde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$, se numeşte sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

Fie D([a, b]) mulțimea tuturor diviziunilor compactului [a, b]. Pentru Δ∈ D([a, b]), $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ vom nota cu $\|\Delta\| = \max(x_k - x_{k-1}), k = \overline{1,n}$, norma diviziunii Δ.

Numărul real notat $\sigma_\Delta(f, \xi_k)$ (sau $\sigma_\Delta(f, \xi)$) şi definit astfel

$\sigma_\Delta(f, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ se numeşte suma integrală (sau Riemann) asociată funcției f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Observație. Dacă f ≥ 0 atunci $\sigma_\Delta(f, \xi_k)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_k - x_{k-1}$ şi de înălțime $f(\xi_k)$ $(1 \leq k \leq n)$.

Rezultă că $\sigma_\Delta(f,\xi_k)$ aproximează aria subgraficului lui f, $\Gamma_f = \{(x,y)\in R^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, delimitat de axa Ox, graficul funcției f şi dreptele de ecuații x = a şi x = b. (fig.1).

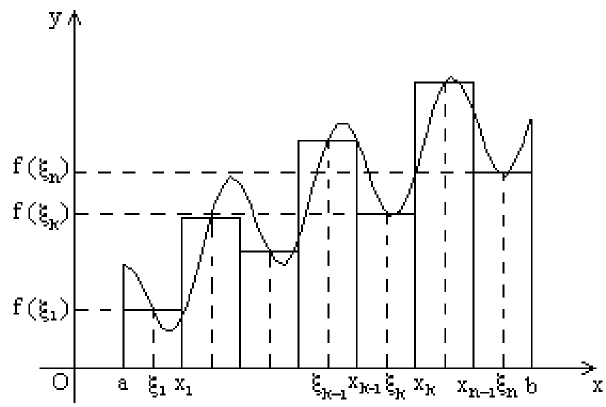

Fig. 1

Dacă funcția f este mărginită vom nota prin $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$,

$M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $k = \overline{1,n}$ şi prin $s_\Delta(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$, $S_\Delta(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$, numite şi sumele Darboux inferioară şi, respectiv, superioară asociate funcției f şi diviziunii Δ.

Să observăm ca $(\forall)\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ şi

$(\forall)\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$ avem $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f,\xi_k) \le S_\Delta(f)$.

Observație. Dacă $f \ge 0$ atunci $s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$)reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_k - x_{k-1}$ şi înălțime m_k (respectiv M_k). Deci $s_\Delta(f)$ (respectiv $S_\Delta(f)$) aproximează prin lipsă (respectiv prin adaos) aria subgraficului funcției f.

Definiția 7.2.2. Funcția f este integrabilă (în sens Riemann) pe [a, b] dacă există $I\in R$ astfel încât $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$

avem $|\sigma_\Delta(f,\xi_k) - I| < \varepsilon$.

Să observăm că numărul real I din definiție, în ipoteza că există, este unic.

Într-adevăr, dacă ar exista două numere reale I_1, I_2 cu proprietatea din definiție atunci pentru orice ε > 0, există $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ ∈ D ([a, b]), $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon$, $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ şi orice

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n} \text{ avem } \left|\sigma_\Delta(f, \xi_k) - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \left|\sigma_\Delta(f, \xi_k) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luând $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$ rezultă că pentru orice diviziune Δ ∈ D ([a, b]), $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice sistem de puncte intermediare ξ avem $\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde

$$\left|I_1 - I_2\right| \le \left|I_1 - \sigma_\Delta(f, \xi)\right| + \left|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon..$$

Cum ε > 0 fost arbitrar rezultă $I_1 = I_2$. ■

Prin definiție numărul real I se numeşte integrala definită a funcției f pe intervalul [a, b] şi se notează $I = \int_a^b f(x)dx$ (sau $\int_a^b f dx$, $\int_a^b f$).

Să reamintim din liceu principalele proprietăți ale funcțiilor integrabile:

Propoziția 7.2.1. O funcție f:[a, b] → R integrabilă pe [a, b] este mărginită pe [a, b].

Propoziția 7.2.2. Funcția f : [a, b] → R este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă (∃) I ∈ R astfel încât (∀) (Δ_n) ⊂ D ([a,b]), $\Delta_n = (a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{p_n}^n = b)$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ şi (∀) $\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$, $k = \overline{1, p_n}$, şirul sumelor Riemann $\left(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k^n)\right)_{n \in N}$ este convergent către I.

Propoziția 7.2.3. Dacă f,g:[a, b] → R sunt integrabile pe [a, b] şi α,β∈R atunci αf + βg este integrabilă pe [a, b] şi $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

Propoziția 7.2.4. Dacă f este integrabilă pe [a, c] şi pe [c, b], unde $c\in(a, b)$ atunci f este integrabilă pe [a, b] şi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Propoziția 7.2.5. Dacă f este integrabilă pe [a, b] şi $f \geq 0$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Consecință. Dacă $f \leq g$ iar f şi g sunt integrabile pe [a, b] atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 7.2.1. (Criteriul Darboux de integrabilitate).

Fie f:[a, b] → R, mărginită. Atunci funcția f este integrabilă dacă şi numai dacă pentru orice ε > 0, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât (∀) $\Delta \in \mathcal{D}$ ([a, b]) cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema 7.2.2. Orice funcție continuă f:[a, b] → R este integrabilă pe [a, b] iar dacă F:[a, b] → R este o primitivă a sa atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \text{(formula lui Leibniz-Newton).}$$

Teorema 7.2.3. Fie f:[a, b] → R, continuă. Atunci (∃) $c\in(a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) \qquad \text{(formula de medie).}$$

Teorema 7.2.4. Dacă f,g:[a, b] → R sunt două funcții derivabile cu derivate continue atunci:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \text{(formula de integrare prin părți).}$$

Teorema 7.2.5. Fie f:[a, b] → R, continuă şi φ:[c, d] → [a, b] bijectivă, derivabilă cu derivată continuă pe [c, d]. Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \text{(formula de schimbare de variabilă).}$$

Aplicație. Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ şi să se calculeze valoarea comună lor.

Folosind schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ pentru a doua integrală obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$. Evident avem

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Pentru $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin x)' dx =$

$$= \cos^{n-1} x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)(\sin x)dx =$$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, de unde deducem

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ (\forall)\ n \geq 2.$$

Pentru $n = 2m$, $m \in N^*$ obținem

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \ldots = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \ldots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $n = 2m+1$, $m \in N$ obținem

$$I_{2m} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} I_{2m-3} = \ldots = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \ldots \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

În concluzie,

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } n = 2m, m \in N^* \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & \text{dacă } n = 2m+1, m \in N \end{cases}$$

Vom deduce de aici formula lui Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Evident avem $I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}$, $(\forall)n \ge 1$, de unde $1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$.

Dar, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a_n}$, unde

$a_n = \left(\frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$.

Obținem deci $1 \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a_n} \le \frac{2n+1}{2n}$, de unde $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \le a_n \le \frac{\pi}{2}$ şi prin trecere la limită obținem formula lui Wallis.

7.3. Aplicații ale integralei definite

Fie $f:[a, b] \to R_+$ o funcție continuă şi
$\Gamma_f = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, subgraficul funcției f.

Vom arăta că Γ_f are arie (într-un sens pe care îl vom preciza ulterior) şi aria $\Gamma_f = \int_a^b f(x)dx$.

Definiția 7.3.1. O mulțime $E \subset R^2$ se numeşte elementară dacă $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, unde D_i sunt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate şi $\overset{o}{D_i} \cap \overset{o}{D_j} = \emptyset$, $(\forall)$ $i \ne j$. Prin definiție aria $E = \sum_{i=1}^{n} \text{aria} D_i$.

Observații. i) Reprezentarea unei mulțimi elementare E sub forma $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ nu este unică;

ii) Aria unei mulțimi elementare E nu depinde de reprezentarea $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$;

iii) Dacă E, F sunt mulțimi elementare cu $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$ atunci

aria$(E \cup F)$ = aria$E$ + aria$F$;

iv) Dacă E, F sunt mulțimi elementare şi $E \subset F$ atunci aria E $\leq$ ariaF şi

aria (F\E) = ariaF – ariaE.

Definiția 7.3.2. Fie $A \subset R^2$ o mulțime mărginită. Mulțimea A are arie dacă există două şiruri $(E_n)_{n\in N}$, $(F_n)_{n\in N}$ de mulțime elementare astfel încât

i) $E_n \subset A \subset F_n$, $(\forall)$ $n \in N$;

ii) Şirurile de numere reale pozitive $(\text{aria } E_n)_{n\in N}$ şi $(\text{aria } F_n)_{n\in N}$ sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} \text{aria} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} \text{aria} F_n$

Prin definiție aria A = $\lim\limits_{n\to\infty} \text{aria} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} \text{aria} F_n$.

Observații. i) Definiția ariei lui A este independentă de alegerea şirurilor (E_n) şi (F_n);

ii) Dacă A, B au arie atunci $A \cup B$, $A \cap B$ şi $A \setminus B$ au arie;

iii) Dacă A, B au arie şi $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \phi$ atunci aria $(A \cup B)$ = ariaA +ariaB;

iv) Există funcții al căror subgrafic nu au arie. În acest sens fie funcția $f:[0, 1] \to R$, f(x) = $\begin{cases} 1, \text{dacă} & x \in [0,1] \cap Q \\ 0, \text{dacă} & x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$

Teorema 7.3.1. Dacă $f:[a, b] \to R_+$ este continuă atunci Γ_f are arie şi aria $\Gamma_f = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstrație. Fie $(\Delta_n) \subset D([a,b])$, $\Delta_n = \left(a = x_0^n < x_1^n < ... < x_{p_n}^n = b\right)$ astfel încât $\|\Delta_n\| \to 0$.

Fie $m_k^n = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}^n, x_k^n]\}$, $M_k^n = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}^n, x_k^n]\}$, $k = \overline{1, p_n}$

Cum f este continuă $(\exists)$ $u_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ şi $v_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ astfel încât

$$m_k^n = f(u_k^n),\ M_k^n = f(v_k^n).$$

Fie $D_k^n = [x_{k-1}^n, x_k^n] \times [0, m_k^n]$,

$G_k^n = [x_{k-1}^n, x_k^n] \times [0, M_k^n], k = \overline{1, p_n}$, dreptunghiurile de bază $x_k^n - x_{k-1}^n$

şi înălțimile m_k^n şi respectiv M_k^n.

Mulțimile elementare $E_n = \bigcup_{k=1}^{p_n} D_k^n$, $F_n = \bigcup_{k=1}^{p_n} G_k^n$ verifică incluziunile

$E_n \subset \Gamma_f \subset F_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$ şi aria E_n = $\sum_{k=1}^{p_n} m_k^n (x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^{p_n} f(u_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sigma_{\Delta_n}(f, u_k^n)$.

Analog aria F_n = $\sigma_{\Delta_n}(f, v_k^n)$.

Cum f este continuă, este integrabilă şi din propoziția 7.2.2,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, u_k^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, v_k^n) = \int_a^b f(x)dx$, de unde va rezulta că

$\lim\limits_{n\to\infty} \text{aria}E_n = \lim\limits_{n\to\infty} \text{aria}F_n = \int_a^b f(x)dx$, deci Γ_f are arie şi aria $\Gamma_f = \int_a^b f(x)dx$. ■

Corolarul 7.3.1. Dacă f,g:[a, b] $\rightarrow$ R sunt două funcții continue astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$ atunci mulțimea $\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, cuprinsă între graficele funcțiilor f, g şi dreptele de ecuații x = a, x = b are arie şi

$$\text{aria}\Gamma_{f,g} = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Exemplu. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabolele de ecuații $y^2 = x$, $y = x^2$

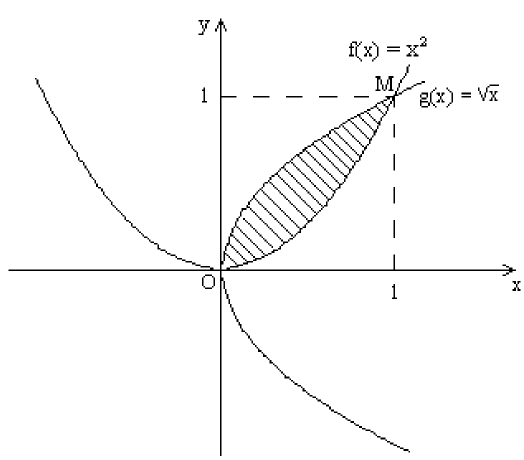

Fig.2

Rezolvând sistemul format de cele două ecuații obținem punctele de intersecție dintre cele două parabole O(0,0), M(1,1).

$$\text{aria}\Gamma_{f,g} = \int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Volumul corpurilor de rotație

Pornind de la volumul cilindrului vom defini ce înseamnă că un corp de rotație (corp obținut prin rotirea subgraficului unei funcții pozitive f în jurul axei Ox) are volum şi vom da o formulă de calcul al volumului unor astfel de corpuri.

Dacă $f:[a, b] \to R$, $f(x) = r > 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ atunci corpul de rotație este un cilindru de rază r şi înălțime b – a. Această mulțime se poate scrie sub forma $C_r = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \le r, a \le x \le b\right\}$.

Volumul acestui cilindru este $\text{vol}C_r = \pi r^2 (b - a)$.

Definiția 7.3.3. Fie $f:[a, b] \to R_+$.

Mulțimea $C_f = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x), a \le x \le b\right\}$ se numeşte corpul de rotație determinat de funcția f sau corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției f în jurul axei Ox.

Vom numi mulțime cilindrică elementară orice mulțime care se obține prin rotirea subgraficului unei funcții constante pe porțiuni în jurul axei Ox.

Definiția 7.3.4. Fie $f:[a, b] \to R_+$ şi C_f corpul de rotație determinat de funcția f. Corpul C_f are volum dacă există două şiruri (E_n) şi (F_n) de mulțimi cilindrice elementare astfel încât

i) $E_n \subset C_f \subset F_n$, $(\forall)\ n \in N$ şi

ii) $\lim_{n\to\infty} \text{vol}E_n = \lim_{n\to\infty} \text{vol}F_n$.

În acest caz volumul lui C_f se defineşte prin

$$\text{vol } C_f = \lim_{n\to\infty} \text{vol}E_n = \lim_{n\to\infty} \text{vol}F_n.$$

Observații. i) Definiția volumului corpului de rotație C_f nu depinde de şirurile (E_n) şi (F_n).

ii) Există funcții al căror corp de rotație nu au volum. În acest sens fie funcția f : [0, 1] $\rightarrow$ R, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{dacă} & x \in [0,1] \cap Q \\ 0, \text{dacă} & x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$

Analog cu teorema 7.3.1 obținem

Teorema 7.3.2. Dacă f:[a, b] $\rightarrow$ R_+ este continuă, atunci corpul de rotație C_f determinat de f are volum şi $\mathrm{vol}C_f = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Demonstrație. Analog cu demonstrația teoremei 7.3.1. ■

Lungimea graficului unei funcții

Fie f:[a, b] $\rightarrow$ R şi $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$.

Definiția 7.3.4. Se numeşte funcție poligonală asociată lui f şi Δ funcția f_Δ:[a, b] $\rightarrow$ R, $f_\Delta(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})$, pentru $x \in [x_{k-1}, x_k], 1 \le k \le n$.

Observație. Funcția f_Δ se obține pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ scriind ecuația dreptei care trece prin punctele din plan $A_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ şi $A_k(x_k, f(x_k))$.

Distanța dintre punctele A_{k-1} şi A_k este

$d(A_{k-1},A_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ şi prin definiție $\lambda(f_\Delta) = \sum_{k=1}^{n} d(A_{k-1}, A_k)$ se numeşte lungimea graficului funcției poligonale f_Δ.

Definiția 7.3.5. Graficul unei funcții continue f:[a, b] $\rightarrow$ R are lungime finită dacă mulțimea $\{\lambda(f_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ este mărginită. În acest caz numărul real pozitiv $\lambda(f) = \sup\{\lambda(f_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ se numeşte lungimea graficului funcției f.

Analog cu teorema 7.3.1 se obține

Teorema 7.3.3. Dacă funcția f:[a, b] $\to$ R este derivabilă cu derivata continuă atunci graficul lui f are lungime finită şi $\lambda(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Aria suprafețelor de rotație

Definiția 7.3.6. Fie funcția f : [a, b] $\to$ R₊.

Mulțimea $S_f = \left\{(x,y,z) \in R^3 : \sqrt{y^2+z^2} = f(x), (\forall) x \in [a,b]\right\}$ se numeşte suprafața de rotație determinată de funcția f sau suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b) \in$ D $([a,b])$.

Fie $S(f_\Delta)$ suprafața de rotație determinată de funcția f_Δ.

Aria laterală a trunchiului de con T_k de raze $f(x_{k-1}), f(x_k)$ şi generatoare $A_{k-1}A_k$ este $\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))d(A_{k-1}A_k)$ şi atunci aria laterală a suprafeței $S(f_\Delta)$ este

$$A(f_\Delta) = \pi\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\ .$$

Definiția 7.3.7. Fie funcția continuă f:[a, b] $\to$ R₊.

Suprafața de rotație S(f) are arie dacă $(\forall)(\Delta_n) \in D([a,b])$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ şirul $(A(f_{\Delta_n}))$ este convergent în R.

În acest caz numărul real pozitiv A(f) = $\lim\limits_{n\to\infty} (A(f_{\Delta_n}))$ se numeşte aria laterală a suprafeței de rotație S(f).

Dacă f:[a, b] $\to$ R₊ este derivabilă cu derivată continuă se arată că suprafața de rotație determinată de f are arie şi A(f) = $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int \ln x dx,\ x>0$;

b) $\int x^2 e^{ax} dx,\ x\in R, a\neq 0$;

c) $\int \sqrt{x^2+1} dx,\ x\in R$;

d) $\int e^{2x}\cos 3x dx,\ x\in R$;

e) $\int \frac{1}{x^2}\ln^3 x dx,\ x>0$;

f) $\int x e^{2x}\sin^2 x dx,\ x\in R.$

2. Să se determine o relație de recurență pentru calculul integralelor:

a) $I_n=\int x^n e^x dx,\ x\in R,\ n\in N;$

b) $I_n=\int \ln^n x dx,\ x>0,\ n\in N;$

c) $I_n=\int tg^n x dx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ n\in N;$

d) $I_n=\int \frac{1}{\sin^n x}dx,\ x\in(0,\pi),\ n\in N.$

3. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}dx,\ x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx,\ x\in R;$

c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-a^2}}dx,\ |x|>a,\ a>0;$

d) $\int x^3\sqrt{x^2+a^2}dx,\ x\in R;$

e) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx,\ x>0;$

f) $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx, x\in(0,1);$

g) $\int x^2\sqrt{-x^2+4x+5}dx,\ x\in(-1,5);$

h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ x\in(-1,1);$

i) $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx,\ x\in R;$

j) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx,\ x>0.$

4. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx,\ x\in(0,\pi);$

b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$

c) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$

d) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx,\ x\in R;$

e) $\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x)}dx,\ x \in (0,\pi)$.

5. Să se calculeze:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{|x-a|+1},\ a \in R$;

b) $\int_0^{\pi} \ln(5+4\cos x)dx$;

c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$.

6. Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx,\ n \in N$. Să se arate că I_n este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_n$.

7. Interiorul elipsei de ecuație $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ este despărțit de hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.

8. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcțiile:

a) $f : [0, 1] \to R,\ f(x) = e^x + e^{-x}$

b) $f : [a, b] \to R,\ f(x)=\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}$, unde $a>0$.

9. Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcții:

a) $f : [0, \frac{1}{2}] \to R,\ f(x) = \ln(1-x^2)$;

b) $f : [0, 1] \to R,\ f(x) = e^{2x}$

10. Să se calculeze ariile suprafețelor de rotație determinate de funcțiile:

a) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to R,\ f(x) = \cos x$;

b) $f : [0, 1]\to R,\ f(x)=\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

CAPITOLUL 8

INTEGRALE IMPROPRII

8.1. Integrale improprii de speța întâi

Fie f : [a, ∞) → R, integrabilă pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞).

Definiția 8.1.1. Funcția f este integrabilă (în sens impropriu) pe [a, ∞) dacă următoarea limită $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$ există şi este finită.

În acest caz integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă şi

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lambda = \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx.$$

În caz contrar integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Analog definim $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, pentru f :(-∞, a] → R.

Pentru f : R → R, integrabilă pe orice compact [a, b] ⊂ R definim $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ (în ipoteza că această limită există).

Prin natura unei integrale improprii $\int_a^\infty f(x)\,dx$ înțelegem proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.

Exemple.1. Fie integrala $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, unde a > 0, α ∈ R.

Fie u > a; vom avea

$$\int_a^u \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\left(u^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}\right), \text{dacă } \alpha \neq 1 \\ \ln\frac{u}{a}, \text{dacă } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{, si}$$

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}a^{-\alpha+1}, \text{daca } \alpha > 1 \\ +\infty, \qquad \text{daca } \alpha \leq 1, \text{ deci} \end{cases}$$

$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

În cazul convergenței $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}a^{-\alpha+1}$.

2. Integrala $\int_0^\infty \cos 2x dx$ este divergentă deoarece

$$\int_0^u \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^u = \frac{1}{2}\sin 2u \text{ şi } \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\sin 2u \text{ nu există.}$$

3. Integrala $\int_{-\infty}^1 e^{-x}dx$ este divergentă deoarece

$$\int_u^1 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_u^1 = -\frac{1}{e}+e^{-u} \text{ şi } \lim_{u\to-\infty}\left(-\frac{1}{e}+e^{-u}\right) = +\infty.$$

Observație. Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă şi f are primitive pe [a, ∞) atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty}F(x) - F(a)$, unde F este o primitivă a lui f.

Teorema 8.1.1. (Criteriul lui Cauchy). Fie f:[a, ∞) → R, integrabilă pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞). O condiție necesară şi suficientă pentru convergența integralei $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este ca (∀) ε > 0 să existe δ_ε > a astfel încât

$(\forall)\ x', x'' > \delta_\varepsilon$ să avem $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| < \varepsilon$.

Demonstrație. Fie funcția F:[a,∞)→R, F(x)= $\int_a^x f(t)\,dt$ şi atunci

$$\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt = F(x'') - F(x').$$

Din criteriul lui Cauchy – Bolzano o condiție necesară şi suficientă ca F să aibă limită finită la + ∞ este ca (∀) ε>0 să exi*ste* $\delta_\varepsilon > a$ *astfel încât*

(") x',x">δ_ε să avem $|F(x'') - F(x')| < \varepsilon$ *şi demonstrația este încheiată.* ■

Definiția 8.1.2. Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se numeşte absolut convergentă dacă integrala $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ este convergentă.

Propoziția 8.1.1. O integrală absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație. Rezultă imediat folosind teorema 2.1.1 şi inegalitatea

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \right| \le \left| \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt \right|.$$ ■

Observație. Dacă α ∈ R, α ≠ 0, atunci integralele $\int_a^\infty f(x)\,dx$ şi $\int_a^\infty (\alpha f)(x)\,dx$ au aceeaşi natură şi în cazul convergenței $\int_a^\infty (\alpha f)(x)\,dx = \alpha\int_a^\infty f(x)\,dx$.

De asemenea, dacă f:[a, ∞) → R, integrabilă pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞) şi a' > a atunci integralele $\int_a^\infty f(x)\,dx$ şi $\int_{a'}^\infty f(x)\,dx$ au aceeaşi natură.

Propoziția 8.1.2. (Criteriul de comparație cu inegalități).

Fie f,g:[a, ∞) → R, integrabile pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞).

Presupunem că 0 ≤ f(x) ≤ g(x), (∀) x ≥ a. Atunci

i) Dacă integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că şi integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă rezultă că şi integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă.

Demonstrație. Fie funcțiile F,G:[a, ∞) → R,

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx, \quad G(u) = \int_a^u g(x)\,dx.$$

Cum f, g ≥ 0 rezultă că F, G sunt monoton crescătoare pe [a, ∞) deci (∃) $\lim\limits_{u\to\infty} F(u)$, $\lim\limits_{u\to\infty} G(u)$ şi cum $f \le g$ vom avea $F \le G$.

i) Dacă integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, conform definiției (∃)$\lim\limits_{u\to\infty} G(u)$ şi este finită. Cum F ≤ G rezultă că şi $\lim\limits_{u\to\infty} F(u)$ este finită, deci integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Prin reducere la absurd, folosind i). ■

Propoziția 8.1.3. (Criteriul comparației la limită).
Fie f,g:[a, ∞) → R₊, integrabile pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞). Presupunem că (∃) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda,\ 0 \le \lambda \le \infty.$ Atunci

i) Dacă $\lambda < \infty$ şi $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă;

ii) Dacă $\lambda > 0$ şi $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă rezultă că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

Demonstrație. i) Fie $\lambda < A < \infty$. Din definiția limitei (∃) δ > a astfel încât $\frac{f(x)}{g(x)} \le A$, $(\forall)\, x \ge \delta$, adică $f(x) \le Ag(x)$, $(\forall)\, x \ge \delta$.

Cum $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că $\int_\delta^\infty g(x)\,dx$ este convergentă şi folosind propoziția 8.1.2 va rezulta că $\int_\delta^\infty f(x)\,dx$ este convergentă şi atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Fie $\lambda > B > 0$. Folosim din nou definiția limitei şi raționăm ca la i). ■

Consecință. Fie f : [a, ∞) → R_+, a > 0, integrabilă pe orice compact [a, u] ⊂ [a, ∞). Presupunem că există $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = \lambda,\ 0 \le \lambda \le \infty$. Atunci

i) Dacă $\lambda > 1$ şi $\lambda < \infty$ rezultă că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lambda \le 1$ şi $\lambda > 0$ rezultă că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

Demonstrația rezultă din propoziția 8.1.3, luând $g(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ şi din exemplul 1.■

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_1^\infty \dfrac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x^7 + x + 1}}$.

Avem $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{2x^7 + x + 1}} \ge 0,\ (\forall)\, x \ge 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < \infty,\ \lambda = \dfrac{4}{3} > 1$ deci integrala este convergentă.

Teorema 8.1.2. (Criteriul lui Dirichlet).

Fie f,g:[a, ∞) → R, f continuă, g monotonă pe [a, ∞) şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Presupunem că funcția F : [a, ∞) → R, F(u) = $\int_a^u f(x)dx$ este mărginită.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Demonstrație. Fie ε > 0 şi M > 0 astfel încât $|F(u)| \le M,\ (\forall)\, u \ge a$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, există δ_ε > a astfel încât $|g(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{4M},\ (\forall)\, x \ge \delta_\varepsilon$.

Fie u', u'' > δ_ε, u' < u''. Din teorema a doua de medie (∃) c∈ (u', u'') astfel încât

$$\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,dx = g(u')\int_{u'}^{c} f(x)\,dx + g(u'')\int_{c}^{u''} f(x)\,dx..$$

Cum $\left|\int_{u'}^{c} f(x)\,dx\right| = |F(c) - F(u')| \le 2M$,

$\left|\int_{c}^{u''} f(x)\,dx\right| = |F(u'') - F(c)| \le 2M$,va rezulta că

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)dx\right| \le \left|g(u')\right| \cdot \left|\int_{u'}^{c} f(x)dx\right| + \left|g(u'')\right| \cdot \left|\int_{c}^{u''} f(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon$$

Folosind teorema 8.1.1. rezultă că integrala $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ este convergentă. ■

Observație. Concluzia teoremei este adevărată şi în cazul în care înlocuim ipoteza "f continuă" cu ipoteza (evident mai slabă) "f integrabilă".

Exemplu. Fie integrala $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Luând f(x) = sinx, g(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ şi aplicând teorema 81.2. rezultă că integrala dată este convergentă.

Teorema 8.1.3. (Criteriul lui Abel). Fie f, g: $[a,\infty) \to R$, g monotonă şi mărginită, f integrabilă pe orice compact [a, u] $\subset$ [a, ∞) şi $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.

Atunci $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Să observăm că există o asemănare între criteriile de convergență de la serii de numere reale şi cele de la integrale improprii. Criteriul integral al lui Cauchy stabileşte o legătură între integralele improprii de speța întâi şi o anumită serie numerică ce poate fi construită cu ajutorul funcției de sub integrală.

Acest criteriu afirmă că, dacă f: $[a,\infty) \to R_+$ este o funcție descrescătoare şi $n_0 \in N$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că $n_0 \ge a$ atunci integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ şi seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ au aceeaşi natură.(vezi [10]).

Propoziția 8.1.4. (formula de integrare prin părți)

Fie f, g: $[a,\infty) \to R$, derivabile cu derivate continue pe $[a,\infty)$. Presupunem că există $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ şi este finită. Atunci, dacă una dintre integralele

$\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$, $\int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că şi cealaltă este convergentă şi

$$\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (8.1)$$

Demonstrație. Fie u > a. Din formula de integrare prin părți pentru integrale definite avem

$$\int_a^u f(x)g'(x)\,dx = f(u)g(u) - f(a)g(a) - \int_a^u f'(x)g(x)\,dx.$$

Să presupunem că $\int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx$ este convergentă. Atunci există $\lim_{u\to\infty}\int_a^u f'(x)g(x)\,dx$ şi este finită şi cum $\lim_{u\to\infty} f(u)g(u)$ există şi este finită rezultă că $\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)g'(x)\,dx$ există şi este finită deci $\int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx$ este convergentă şi prin trecere la limită cu $u\to\infty$ obținem (8.1). ■

Propoziția 8.1.5. (formula de schimbare de variabilă)

Fie $f:[a,\infty)\to R$, continuă, $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,\infty)$, strict crescătoare, derivabilă cu derivata continuă.

Presupunem că $\varphi(\alpha)=a$, $\lim_{\substack{t\to\beta \\ t<\beta}}\varphi(t)=+\infty$. Atunci, dacă una dintre integralele $\int_a^\infty f(x)\,dx, \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ este convergentă rezultă că şi cealaltă este convergentă şi $\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ (β este finit sau infinit).

Demonstrație. În aceeaşi manieră cu demonstrația propoziției 8.1.4. ■

8.2. Integrale improprii de speța a doua

Fie $f:[a,b)\to R$, integrabilă pe orice compact $[a,u]\subset[a,b)$, $b\in R$, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}|f(x)|=+\infty$.

Definiția 8.2.1. Funcția f este integrabilă (în sens impropriu) pe [a, b) dacă $\lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}}\int_a^u f(x)\,dx$ există şi este finită. În acest caz spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă şi $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}}\int_a^u f(x)\,dx$. În caz contrar integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Analog definim $\int_a^b f(x)\,dx$, în cazul $f:(a,b]\to R$.

Dacă $f:[a,b]\setminus\{c\}\to R$, unde $c\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$, f integrabilă pe orice compact $[u,v]\subset[a,b]\setminus\{c\}$, spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă dacă integralele $\int_a^c f(x)\,dx$ şi $\int_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente şi în acest caz

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{u\to c\\ u<c}}\int_a^u f(x)\,dx+\lim_{\substack{u\to c\\ u>c}}\int_u^b f(x)\,dx.$$

Exemple.1. Fie integrala $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx, \alpha\in R$. Să observăm că această integrală este improprie numai pentru $\alpha>0$. În acest caz $f:[a,b)\to R, f(x)=\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)=+\infty$. Pentru $u\in(a,b)$ vom avea

$$\int_a^u \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx=\begin{cases}-\frac{1}{-\alpha+1}(b-x)^{-\alpha+1}\Big|_a^u, & \text{daca } \alpha\neq 1\\ -\ln|b-x|\,\Big|_a^u, & \text{daca } \alpha=1\end{cases}\quad ,\text{si}$$

$$\lim_{\substack{u\to b\\ u<b}}\int_a^u \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{-\alpha+1}, & \text{daca } \alpha<1\\ +\infty, & \text{daca } \alpha\geq 1\end{cases},$$ deci $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ este convergentă pentru $\alpha<1$ şi divergentă pentru $\alpha\geq 1$.

În cazul convergenței avem $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{-\alpha+1}$.

2. Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ este divergentă deoarece $\int_u^1 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_u^1 = -\ln u$ (pentru $u \in (0,1)$) şi $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \int_u^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$.

Observaţie. Dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă şi f are primitive pe [a, b) atunci $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} F(u) - F(a)$, unde $F:[a,b)\to R$ este o primitivă a funcţiei f.

Pornind de la rezultatele obţinute pentru integralele improprii de speţa întâi de forma $\int_a^\infty f(x)\,dx$, unde $f:[a,\infty)\to R$ se obţin rezultate asemănătoare pentru integralele improprii de speţa a doua, de forma $\int_a^b f(x)\,dx$, unde $f:[a,b)\to R$, înlocuind pe $+\infty$ cu b.

Demonstraţiile fiind identice ne vom rezuma doar la prezentarea acestor rezultate.

Teorema 8.2.1. (Criteriul lui Cauchy). Fie $f:[a,b)\to R$, integrabilă pe orice compact $[a,u]\subset[a,b)$. O condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ este ca $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ să existe $\delta_\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon < b-a$ astel încât $(\forall)x', x'' \in (b-\delta_\varepsilon, b)$ să avem $\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dx \right| < \varepsilon$.

Definiţia 8.2.2. Integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ se numeşte absolut convergentă dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\,dx$ este convergentă.

Propoziţia 8.2.1. O integrală absolut convergentă este convergentă.

Propoziția 8.2.2. (Criteriul de comparație cu inegalități).

Fie $f,g:[a,b)\to R$, integrabile pe orice compact, $[a,u]\subset[a,b)$, astfel încât $0\le f(x)\le g(x),(\forall)x\in[a,b)$. Atunci

i) Dacă integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că şi integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă rezultă că şi integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este divergentă.

Propoziția 8.2.3. (Criteriul comparației la limită).

Fie $f,g:[a,b)\to R_+$, integrabile pe orice compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Presupunem că $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\frac{f(x)}{g(x)}=l\,,0\le l\le\infty.$ Atunci:

i) Dacă $\lambda<\infty$ şi $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lambda>0$ şi $\int_a^b g(x)\,dx$ este divergentă rezultă că $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Consecință. Fie $f:[a,b)\to R_+$, integrabilă pe orice compact $[a,u]\subset[a,b)$. Presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^{\lambda}f(x)=\lambda,\ 0\le\lambda\le\infty$. Atunci:

i) Dacă $\lambda<1$ şi $\lambda<\infty$ rezultă că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lambda\ge1$ şi $\lambda>0$ rezultă că $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Exemplu. Fie integrala $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}\,dx$.

Avem $f:[0,1)\to R_+$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ şi

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Rezultă $\lambda=\frac{1}{3}<1$, $\lambda=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<\infty$ şi conform consecinței integrala dată este convergentă.

Observație. Dacă $f:(a,b]\to R_+$ atunci consecința propoziției 8.2.3 se modifică uşor astfel:

Presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\lambda} f(x)=\lambda,\ 0\le\lambda\le\infty$. Atunci :

i) Dacă $\lambda<1$ şi $\lambda<\infty$ rezultă $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lambda\ge 1$ şi $\lambda>0$ rezultă că $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Teorema 8.2.2. (Criteriul lui Dirichlet). Fie f,g:[a,b) $\to$ R, f continuă, g monotonă şi $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = 0$. Presupunem că funcția F:[a,b) $\to$ R, F(u) = $\int_a^u f(x)dx$ este mărginită. Atunci integrala $\int_a^b f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Teorema 8.2.3. (Criteriul lui Abel). Fie $f,g:[a,b)\to R$, g monotonă şi mărginită, f integrabilă pe orice compact [a,u] $\subset$ [a,b) şi $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă. Atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Propoziția 8.2.4. (formula de integrare prin părți).

Fie $f,g:[a,b)\to R$, derivabile cu derivate continue pe [a, b). Presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)g(x)$ şi este finită. Atunci, dacă una dintre integralele $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$, $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă rezultă că şi cealaltă este convergentă şi $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$.

Propoziția 8.2.5. (formula de schimbare de variabilă).

Fie $f:[a,b)\to R$, continuă, $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,b)$ strict crescătoare, derivabilă cu derivata continuă.

Presupunem că $\varphi(\alpha)=a$ şi $\lim\limits_{\substack{t\to\beta\\ t<\beta}}\varphi(t)=b$. Atunci, dacă una dintre integralele $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ este convergentă rezultă că şi cealaltă este convergentă şi $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, (β poate fi finit sau infinit).

Exemplu. Fie integrala $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Fie $f:(1,2]\to R,\ f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}f(x)=+\infty$ avem o integrală improprie de speța a doua. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}(x-1)^{\frac12}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}(x-1)^{\frac12}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}=1$, rezultă că integrala este convergentă $\left(\lambda=\frac12<1,\lambda=1<+\infty\right)$. Pentru calcul vom folosi schimbarea de variabilă dată de

$$\sqrt{x-1}=t\Rightarrow x-1=t^2\Rightarrow x=t^2+1=\varphi(t),\ \varphi:(0,1]\to(1,2],$$

este strict crescătoare derivabilă cu $\varphi'(t)=2t$, deci continuă, $\lim\limits_{\substack{t\to0\\ t>0}}\varphi(t)=1$.

Conform propoziției 8.2.5,

$$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int_0^1\frac{1}{(t^2+1)\cdot t}\cdot2tdt=2\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt=2\operatorname{arctgt}\Big|_0^1=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Observație. Există integrale improprii care sunt şi de speța întâi şi de speța a doua, de exemplu $\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$. Acestea se vor numi integrale improprii de speța a treia. Integrala dată va fi convergentă dacă $(\exists)\,a>0$ astfel încât integralele $I_1=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$, $I_2=\int_a^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$ sunt convergente. În acest caz

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}=I_1+I_2.$$

8.3. Integralele lui Euler

Pentru $p,q>0$ definim integralele

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\qquad \beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

numite integralele lui Euler (sau funcțiile β, Γ).

Vom arăta că aceste integrale sunt convergente pentru $(\forall)p,q>0$.

Să observăm mai întâi că integrala Γ(p) este o integrală improprie de speța întâi iar pentru $p\in(0,1)$ este şi de speța a doua iar β(p,q) este o integrală improprie de speța a doua pentru $p\in(0,1)$ sau $q\in(0,1)$ (altfel, dacă $p\geq 1$ şi $q\geq 1$ este o integrală definită).

Fie p,q > 0, $I_1=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, $I_2=\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$. Fie $f:[1,\infty)\to R$, $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^2 x^{p-1}e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{p-1}}{e^x}=0$ rezultă că integrala I_2 este convergentă (conform propoziției 8.1.3, $\lambda=2>1$, $\lambda=0<\infty$).

Dacă p ≥ 1 integrala I_1 este o integrală definită, deci convergentă iar dacă $p\in(0,1)$, cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda}x^{p-1}e^{-x}=1>0$, pentru $\lambda=1-p<1$, conform propoziției 8.2.3 rezultă că I_1 este convergentă.

În concluzie Γ(p) = I_1+ I_2 este convergentă.

Arătăm în continuare convergența integralei β(p,q). Vom trata cazul $p\in(0,1)$ sau $q\in(0,1)$.

Fie $f:(0,1)\to R$, $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$.

Dacă $p\in(0,1)$, cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda}x^{p-1}e^{-x}=1>0$, pentru $\lambda=1-p<1$, conform propoziției 8.2.3 rezultă că β(p,q) este convergentă în raport cu limita inferioară.

Dacă $q\in(0,1)$, cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\lambda} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\lambda}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1>0$, pentru $\lambda=1-q<1$, rezultă că β(p,q) este convergentă în raport cu limita superioară.

În concluzie β(p,q) este convergentă.

Propoziția 8.3.1. (proprietăți ale funcțiilor β, Γ).

i) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\ (\forall)p>0$;

ii) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi},(\forall)p\in(0,1)$;

iii) $\beta(p,q)=\beta(q,p),(\forall)p,q>0$;

iv) $\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},(\forall)p,q>0$.

Demonstrație. i) Folosind integrarea prin părți obținem

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^p e^{-x}dx=-\int_0^\infty x^p\left(e^{-x}\right)'dx=-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty px^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p),$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x^p e^{-x}=0$.

Cum $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$ rezultă că pentru n∈**N**,

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\Gamma(n-1+1)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!.$$

iii) Folosind schimbarea de variabilă x = 1-t obținem

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=\beta(q,p). \quad \blacksquare$$

Aplicații.

1. Din (ii), pentru $p=\dfrac{1}{2}$ obținem $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\pi\Rightarrow\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, deci

$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$. Folosind schimbarea de variabilă x = t^2 obținem

$\sqrt{\pi}=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\int_0^\infty te^{-t^2}\cdot 2tdt=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt$, de unde $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Folosind schimbarea de variabilă x = - t din ultima integrală obținem

$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ şi în concluzie $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

2. Să se arate că integrala $\int_0^\infty\dfrac{1}{1+x^6}dx$ este convergentă şi să se calculeze.

Fie $f:[0,\infty)\to R, f(x)=\frac{1}{1+x^6}\geq 0, (\forall)x\geq 0$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} x^6 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^6\frac{1}{1+x^6}=1<\infty$ pentru $\lambda=6>1$, rezultă că integrala dată este convergentă. Vom folosi schimbarea de variabilă dată de x^6 = t, deci $x=t^{\frac{1}{6}}\Rightarrow dx=\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt$ şi integrala devine

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6}dx=\int_0^\infty \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt=\frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{5}{6}}}{1+t}dt.$$

Vom folosi pentru ultima integrală schimbarea dată de

$$\frac{t}{1+t}=y\Rightarrow t=y+ty\Rightarrow t=\frac{y}{1-y}\Rightarrow dt=\frac{1}{(1-y)^2}dy.$$

Obținem astfel

$$I=\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{y}{1-y}}\cdot\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot\frac{1}{(1-y)^2}dy=\frac{1}{6}\int_0^1 y^{-\frac{5}{6}}(1-y)^{-\frac{1}{6}}dy=\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$$

Folosind propoziția 8.3.1. rezultă

$$I=\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)}=\frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{6}\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}}{1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}.$$

3. Să se arate că integrala $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx, n\geq 2$ este convergentă şi să se calculeze.

Fie $f:[0,1)\to R, f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\geq 0, (\forall)x\in[0,1)$.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^\lambda f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^\lambda\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{1+x+\ldots+x^{n-1}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<\infty$, pentru $\lambda=\frac{1}{n}<1$, rezultă că integrala dată este convergentă.

Pentru calculul integralei vom folosi schimbarea de variabilă dată de $x^n=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{n}}\Rightarrow dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$.

Astfel obținem

$$I=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-t}}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Probleme propuse

1) Folosind definiția să se studieze natura integralelor:

a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;   **b)** $\int_{-\infty}^0 \cos 3x dx$;

c) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$;   **d)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+x+1}dx$;

e) $\int_0^2 \frac{dx}{x\ln x}$;   f) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{|x|}}$.

2) Folosind definiția să se arate că următoarele integrale sunt convergente şi să se calculeze:

a) $\int_0^\infty e^{-2x}\cos ax dx$, unde $a\in R^*$;

b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$.

3) Folosind criteriile de convergență să se studieze natura integralelor:

a) $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^5}$;   **b)** $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha}dx, \alpha\in R$;

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;   **d)** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}dx$;

e) $\int_1^\infty \cos x^2 dx$;   **f)** $\int_0^\infty \sin x^2 dx$;

g) $\int_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}dx, \alpha>0$;   **h)** $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a<b$.

4) Să se arate că următoarele integrale sunt convergente şi să se calculeze:

a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx, n \in N, n \geq 2$;

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^6}}$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^6} dx$;

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$;

e) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$;

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\sqrt[3]{\cos x}} dx$.

CAPITOLUL 9

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCȚII

9.1. Şiruri de funcții

Definiția 9.1.1. Se numeşte şir de funcții un şir (f_n), unde $f_n: E \subset R \to R, (\forall) n \in N$, sunt funcții reale.

Dacă $x \in E$, şirul ($f_n(x)$) este un şir de numere reale. Dacă şirul ($f_n(x)$) este convergent spunem că x este punct de convergență pentru şirul (f_n).

Vom nota A = {$x \in E$: ($f_n(x)$) convergent} şi o vom numi mulțimea de convergență a şirului de funcții (f_n).

Definiția 9.1.2. Fie $f_n : E \to R$ un şir de funcții şi $A \subset E$ mulțimea sa de convergență. Şirul (f_n) converge simplu sau punctual pe mulțimea A către funcția $f : A \to R$ şi scriem $f_n \xrightarrow{s} f$ (pe A) (sau $f_n \xrightarrow[A]{S} f$) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), (\forall) x \in A$.

Observație. Conform definiției convergenței unui şir de numere reale, $f_n \xrightarrow{s} f$ pe A dacă şi numai dacă $(\forall) x \in A$ şi $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_{\varepsilon,x} \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_{\varepsilon,x}$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) x \in A$.

Exemplu. Fie $f_n(x) = x^n$, pentru $x \in [0,1]$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, \text{pentru } x \in [0,1) \\ 1, \text{pentru } x = 1 \end{cases}$ rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$ pe [0,1], unde

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{pentru } x \in [0,1) \\ 1, \text{pentru } x = 1 \end{cases}.$$

Observație. Dacă rangul $n_{\varepsilon,x}$ din definiția 9.1.2 este independent de x obținem un alt concept de convergență numit convergență uniformă.

Definiția 9.1.3. Şirul de funcții (f_n) este uniform convergent pe A către funcția f şi scriem $f_n \xrightarrow{u} f$ (pe A) sau ($f_n \xrightarrow[A]{u} f$) dacă $(\forall)\varepsilon > o, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) x \in A$.

Observație. Din această definiție rezultă că, dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ (pe A) atunci $f_n \xrightarrow{s} f$ (pe A).

Exemple. 1. Fie $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, pentru $x \in [0,\infty)$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, (\forall) x \geq 0,$ deci $f_n \xrightarrow{s} f$, pe [0, ∞), unde f(x) = 0, $(\forall) x \in [0,\infty)$.

Pe de altă parte să observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}, \ (\forall) x \in [o,\infty), \ (\forall) n \in N^*.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\dfrac{1}{n} < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi atunci $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n} < \varepsilon, (\forall) x \in [0,\infty)$, deci $f_n \xrightarrow{u} f$, pe [0,∞).

2. Fie $f_n(x) = x^n$, pentru $x \in [0,1]$. După cum am văzut în exemplul 9.1.1., $f_n \xrightarrow{s} f$ pe [0,1], unde $f(x) = \begin{cases} 0, \text{pentru } x \in [0,1) \\ 1, \text{pentru } x = 1 \end{cases}$.

Să arătăm că $f_n \not\xrightarrow{u} f$, pe [0,1]. Într-adevăr, presupunem contrariul, deci $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) x \in [0,1]$.

Luând $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ rezultă că $(\exists) n_0 \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_0$ avem $x^n < \dfrac{1}{2}, (\forall) x \in [0,1)$. Trecând în această inegalitate la limită cu $x \to 1, x < 1$ obținem o contradicție.

Criterii de convergență uniformă

Teorema 9.1.1. Fie $f_n : E \to R$ un şir de funcții. Şirul (f_n) converge uniform pe $A \subset E$ către funcția f dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in A} |\, f_n(x) - f(x) \,|\right] = 0$$

(9.1)

Demonstrație. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A atunci conform definiției, pentru

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N \text{ astfel încât } (\forall) n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |\, f_n(x) - f(x) \,| < \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) x \in A,$$

de unde

$$(\forall) n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in A} |\, f_n(x) - f(x) \,| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ adică } \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in A} |\, f_n(x) - f(x) \,|\right] = 0.$$

Reciproc, dacă (9.1) are loc rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \ge n_\varepsilon$ avem $\sup\limits_{x\in A} |\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$, de unde

$(\forall) x \in A \Rightarrow |\, f_n(x) - f(x) \,| \le \sup\limits_{x\in A} |\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$, adică $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A. ■

Exemplu. Fie $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$, pentru $x \in R$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, (\forall) x \in R$ rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$, pe R, unde $f(x) = 0, (\forall) x \in R$.

Evident f_n este derivabilă şi $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$, deci $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

punctul $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este punct de maxim local şi $x = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este punct de minim local pentru f_n. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, aceste puncte sunt puncte de extrem global.

Cum $f_n\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in R} |\, f_n(x) - 0 \,|\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} = 0, \text{ adică } f_n \xrightarrow{u} 0, \text{ pe R.}$$

Teorema 9.1.2. (Criteriul lui Cauchy). Şirul de funcții (f_n) este uniform convergent pe A dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) m, n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|\, f_m(x) - f_n(x) \,| < \varepsilon, (\forall) x \in A. \qquad (9.2)$$

Demonstrație. Să presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A şi fie $\varepsilon > 0$. Conform definiției $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $|\, f_n(x) - f(x) \,| < \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) x \in A$.

Pentru $m, n \geq n_\varepsilon$ vom avea

$$|\, f_m(x) - f_n(x) \,| \leq |\, f_m(x) - f(x) \,| + |\, f(x) - f_n(x) \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, (\forall) x \in A.,$$

adică (9.2) este îndeplinită.

Reciproc, să presupunem că pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât

$$(\forall) m, n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |\, f_m(x) - f_n(x) \,| < \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) x \in A \qquad (9.3)$$

Atunci, pentru orice $x \in A$, fixat, şirul numeric ($f_n(x)$) este şir Cauchy în R, deci convergent. Fie $f : A \to R$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$; deci $f_n \xrightarrow{s} f$, pe A.

Fixând în (9.3) $n \geq n_\varepsilon$ şi făcând $m \to \infty$ obținem

$$|\, f_n(x) - f(x) \,| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon \text{ şi } (\forall) x \in A, \text{ deci } f_n \xrightarrow{u} f \text{ pe A.}$$ ■

Teorema 9.1.3. (Criteriul majorării). Fie $f, f_n : A \to R$. Dacă există un şir de numere pozitive (a_n), convergent către zero, astfel încât

$$|\, f_n(x) - f(x) \,| \leq a_n, (\forall) n \in N \text{ şi } (\forall) x \in A, \qquad (9.4)$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$; cum $a_n \to 0, (\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $a_n < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi atunci, folosind (9.4) obținem $|\, f_n(x) - f(x) \,| \leq a_n < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)\, x \in A$, adică $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A. ■

Exemplu. Fie $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+1}}$, pentru $x\in R$. Evident avem

$$\left|f_n(x)-0\right|=\left|\frac{\cos nx}{\sqrt{n+1}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n+1}},(\forall)\,n\in N,(\forall)\,x\in R.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ rezultă că $f_n\xrightarrow{u}0$, pe R.

Proprietăți ale şirurilor uniform convergente

În continuare vom arăta că uniform convergența păstrează la limită o serie de proprietăți ale funcțiilor şirului cum ar fi: mărginirea, continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea, etc.

Teorema 9.1.4. (Transfer de mărginire). Fie $f_n:A\to R$ un şir de funcții mărginite pe A şi $f: A\to R$. Dacă $f_n\xrightarrow{u}f$ pe A atunci f este mărginită pe A.

Demonstrație. Cum $f_n\xrightarrow{u}f$ pe A, conform definiției, pentru ε = 1, $(\exists)n_0\in N$ astfel încât $(\forall)n\ge n_0$ avem $\left|f_n(x)-f(x)\right|<1,(\forall)x\in A$ şi în particular, pentru n = n_0 obținem

$$\left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|<1,(\forall)x\in A. \tag{9.5}$$

Cum f_{n_0} este mărginită pe A, $(\exists)M>0$ astfel încât $\left|f_{n_0}(x)\right|\le M,(\forall)\,x\in A$ şi atunci, folosind (9.5) obținem

$\left|f(x)\right|\le\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)\right|<1+M,(\forall)\,x\in A$, adică f este mărginită pe A. ■

Observație. Dacă şirul de funcții (f_n) nu este uniform convergent pe A, concluzia teoremei nu este în general adevărată. În acest sens considerăm şirul de funcții $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx^2}$, pentru $x\in(0,1)$. Avem $f_n\xrightarrow{s}f$ pe (0,1), unde $f(x)=\dfrac{1}{x},(\forall)x\in(0,1)$. Evident avem $\left|f_n(x)\right|\le\dfrac{\sqrt{n}}{2},(\forall)\,x\in(0,1)$, pentru $n\in N$, fixat, deci funcțiile f_n sunt mărginite. Să observăm că f nu este mărginită pe (0,1).

Teorema 9.1.5. (Transfer de continuitate). Fie $f_n : A \to R$ un şir de funcţii continue într-un punct $x_0 \in A$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A atunci funcţia f este continuă în x_0.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A, $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall) x \in A$ avem $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. În particular, pentru $n=n_\varepsilon$ avem $\left| f_{n_\varepsilon}(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, (\forall) x \in A$.

Cum f_{n_ε} este continuă în x_0, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ astfel incât $(\forall) x \in A$ cu $\left| x - x_0 \right| < \delta_\varepsilon$ avem $\left| f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pentru $(\forall) x \in A$ cu $\left| x - x_0 \right| < \delta_\varepsilon$ vom avea

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \left| f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) \right| + \left| f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0) \right| + \left| f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

deci f este continuă în x_0. ■

Observaţie. Din teorema 9.1.5 rezultă că, dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A şi funcţiile f_n sunt continue pe A atunci funcţia f este continuă pe A.

Dacă şirul de funcţii (f_n) nu este uniform convergent, concluzia nu este în general adevărată.

În acest sens considerăm şirul de funcţii $f_n(x) = x^n$, pentru $x \in [0,1]$.

Evident funcţiile f_n sunt continue pe [0,1], $f_n \xrightarrow{s} f$ pe [0,1], unde $f(x) = \begin{cases} 0, \text{daca } x \in [0,1) \\ 1, \text{daca } x = 1 \end{cases}$, dar funcţia f nu este continuă pe [0,1].

Teorema 9.1.6. (Transfer de integrabilitate).

Dacă $f_n : [a,b] \to R$ este un şir de funcţii integrabile pe [a,b] şi $f_n \xrightarrow{u} f$ pe [a,b], atunci f este integrabilă pe [a,b] şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $f_n \xrightarrow{u} f$, $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall) x \in [a,b]$ avem $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. În particular, pentru n = n_ε avem

$$f_{n_\varepsilon}(x)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(x)<f_{n_\varepsilon}(x)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)},(\forall)x\in[a,b] \tag{9.6}$$

Fie $\Delta\in$ D ([a,b]), $\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$.

Cum f_{n_ε} este integrabilă rezultă că f_{n_ε} este mărginită şi fie $M_k^\varepsilon=\sup\{f_{n_\varepsilon}(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $m_k^\varepsilon=\inf\{f_{n_\varepsilon}(x):x\in[x_{k-1},x_k]\},k=\overline{1,n}$.

Din criteriul lui Darboux de integrabilitate $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)\Delta\in$ D $([a,b]),\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta(f_{n_\varepsilon})-s_\Delta(f_{n_\varepsilon})<\frac{\varepsilon}{2}$, adică

$$\sum_{k=1}^{n}\left(M_k^\varepsilon-m_k^\varepsilon\right)(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.7}$$

Cum şirul (f_n) este uniform convergent pe [a,b] către funcția f, din teorema 9.1.4 rezultă că f este mărginită pe [a,b].

Fie $M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\},k=\overline{1,n}$.

Trecând în relația (9.6) la supremum apoi la infimum, pentru $x\in[x_{k-1},x_k]$, obținem $M_k^\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\le M_k\le M_k^\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ şi

$$m_k^\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\le m_k\le m_k^\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Scăzând aceste relații membru cu membru şi înmulțindu-le cu x_k-x_{k-1} obținem

$$(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\le\left(M_k^\varepsilon-m_k^\varepsilon\right)(x_k-x_{k-1})+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_k-x_{k-1}),$$

de unde, prin însumare şi folosind (9.7) rezultă

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}\left(M_k^\varepsilon-m_k^\varepsilon\right)(x_k-x_{k-1})+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=S_\Delta(f_{n_\varepsilon})-s_\Delta(f_{n_\varepsilon})+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

adică f este integrabilă pe [a,b].

Cum $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, (\forall) n \geq n_\varepsilon,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Aplicație. Fie $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ mulțimea numerelor raționale din [0,1] şi sirul de funcții $f_n : [0,1] \to R$, $f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{pentru } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0, \text{pentru } x \notin \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \end{cases}$, $(\forall) n \in N$. Să se arate că şirul de funcții (f_n) nu este uniform convergent pe [0,1].

Să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{pentru } x \in [0,1] \cap Q \\ 0, \text{pentru } x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$, deci $f_n \xrightarrow{s} f$ pe [0,1], unde $f(x) = \begin{cases} 1, \text{pentru } x \in [0,1] \cap Q \\ 0, \text{pentru } x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$. Să presupunem prin absurd că $f_n \xrightarrow{u} f$ pe [0,1].

Atunci conform teoremei 9.1.6 funcția f este integrabilă pe [0,1], contradicție.

Teorema 9.1.7. (Transfer de derivabilitate).

Fie $I \subset R$ un interval mărginit şi $f_n : I \to R$ un şir de funcții derivabile pe I.

Dacă există un punct $x_0 \in I$ astfel încât şirul ($f_n(x_0)$) este convergent şi există o funcție $g : I \to R$ astfel încât $f_n' \xrightarrow{u} g$ pe I, atunci

i) există o funcție $f : I \to R$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pe I;

ii) f este derivabilă pe I şi f ' = g, adică $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Pentru demonstrație se poate consulta [10].

Observații. 1. Dacă pentru un şir de funcții derivabile $f_n : I \to R$, convergent pe I către o funcție f, şirul (f_n') converge către f ' vom spune că şirul (f_n) se poate deriva termen cu termen.

2. Există şiruri de funcții care pot fi derivate termen cu termen fără ca şirul derivatelor să conveargă uniform.

În acest sens considerăm şirul de funcții $f_n(x)=\frac{\ln(1+n^4x^2)}{2n}$, pentru $x\in[0,1]$.

Să observăm că $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0, (\forall)x\in[0,1]$, deci $f_n \xrightarrow{s} 0$ pe [0,1].

Funcțiile f_n sunt derivabile pe [0,1], $f_n'(x)=\frac{n^3x}{1+n^4x^2}$, $(\forall)\,x\in[0,1]$ şi $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=0$, $(\forall)\,x\in[0,1]$, deci $f_n' \xrightarrow{s} 0$ pe [0,1], adică $f_n' \xrightarrow{s} f'$ pe [0,1].

Prin urmare, şirul (f_n) se poate deriva termen cu termen. Să observăm totuşi că şirul (f_n') nu converge uniform la 0.

9.2.Serii de funcții

Definiția 9.2.1. Se numeşte serie de funcții o serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, unde $f_n : E\subset R\to R, (\forall)n\geq 1$.

Fie $S_n : E\to R, S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$, numit şi sirul sumelor parțiale. Fie $A\subset E$ muțimea de convergență a şirului de funcții (S_n), numită şi mulțimea de convergență a seriei de funcții.

Definiția 9.2.2. Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplu sau punctual pe A dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este simplu convergent pe A. Dacă $f=\lim_{n\to\infty} S_n$ atunci f se va numi suma seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenței punctuale şi scriem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ (punctual pe A) sau $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{s}{=} f$.

Definiția 9.2.3. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este uniform convergent pe A. Dacă $S_n \xrightarrow{u} f$ pe A, atunci f se va numi suma seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ în sensul convergenței uniforme şi vom scrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ (uniform pe A) sau $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{=} f$.

Criterii de convergență uniformă

Teorema 9.2.1. (Criteriul lui Cauchy). Fie $f_n : A \subset R \to R$. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe A dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem $\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon, (\forall)\, x \in A$.

Demonstrație. Fie (S_n) şirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Conform teoremei 9.1.2, (S_n) converge uniform pe A dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem

$$\left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon, (\forall)\, x \in A,$$

sau echivalent

$$\left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon, (\forall)\, x \in A,$$

şi demonstrația este încheiată. ■

Teorema 9.2.2. (Criteriul lui Weierstrass). Fie $f_n : A \subset R \to R$. Dacă există o serie numerică convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cu termeni pozitivi astfel încât

$$\left| f_n(x) \right| \leq a_n, \ (\forall)\, n \in N, (\forall)\, x \in A. \tag{9.8}$$

atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe A.

Demonstrație. Fie ε > 0. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, din criteriul lui Cauchy de la serii numerice $(\exists)n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon$, şi folosind (9.8) rezultă că pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem

$$\left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) \right| \le \left| f_{n+1}(x) \right| + \left| f_{n+2}(x) \right| + \ldots + \left| f_{n+p}(x) \right| \le$$
$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon, (\forall) x \in A. \tag{9.9}$$

Conform teoremei 9.2.1 rezultă că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A. Absolut convergenta rezultă din (9.9). ■

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + x^2}}, x \in R$. Observăm că $\left| \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + x^2}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}, (\forall) n \in N^*$ şi $(\forall) x \in R$ iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă. Folosind criteriul lui Weierstrass rezultă că seria dată este uniform convergentă pe R.

Teorema 9.2.3. (Criteriul lui Dirichlet). Fie $f_n, g_n : A \subset R \to R$ două şiruri de funcții astfel încât seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ are şirul sumelor parțiale uniform mărginit iar şirul (g_n) este monoton descrescător şi uniform convergent la 0.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Demonstrație. Cum şirul sumelor parțiale (S_n) asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform mărginit $(\exists) M > 0$ astfel încât $\left| S_n(x) \right| \le M, (\forall) n \in N^*$ şi $(\forall) x \in A$.

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $g_n \xrightarrow{u} 0$ pe A, $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \ge n_\varepsilon$ avem $\left| g_n(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2M}$, $(\forall) x \in A$.

Pentru $n \ge n_\varepsilon, p \ge 1$ şi $x \in A$ vom avea

$$
\begin{aligned}
& \left| f_{n+1}(x)g_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)g_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)g_{n+p}(x) \right| = \\
& = \left| g_{n+1}(x)(S_{n+1}(x)-S_n(x))+g_{n+2}(x)(S_{n+2}(x)-S_{n+1}(x))+\ldots+g_{n+p}(x)(S_{n+p}(x)-S_{n+p-1}(x)) \right| = \\
& = \left| -g_{n+1}(x)S_n(x)+S_{n+1}(x)(g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x))+\ldots+ \right. \\
& \left. +S_{n+p-1}(x)\,(g_{n+p-1}(x)-g_{n+p}(x))+g_{n+p}(x)S_{n+p}(x) \right| \le \\
& \le \left| g_{n+1}(x) \right| \left| S_n(x) \right| + \left| S_{n+1}(x) \right| \left| g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x) \right| + \ldots + \left| S_{n+p-1}(x) \right| \left| g_{n+p-1}(x)-g_{n+p}(x) \right| + \\
& + \left| g_{n+p}(x) \right| \left| S_{n+p}(x) \right| \le M \left| g_{n+1}(x) \right| + M \left| g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x) \right| + \ldots + M \left| g_{n+p-1}(x)-g_{n+p}(x) \right| + \\
& + M \left| g_{n+p}(x) \right| = M\,g_{n+1}(x)+M\,(g_{n+1}(x)-g_{n+2}(x))+\ldots+M\,(g_{n+p-1}(x)-g_{n+p}(x))+M\,g_{n+p}(x) = \\
& = 2M\,g_{n+p}(x) \le 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

ceea ce arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A. ■

Proprietăți ale seriilor uniform convergente

Pornind de la proprietățile şirurilor uniform convergente se obțin cu uşurință următoarele rezultate:

Teorema 9.2.4. Fie $f_n : A \subset R \to R$ un şir de funcții. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe A către f şi f_n sunt funcții mărginite atunci f este mărginită pe A.

Demonstrație. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Cum f_n este mărginită rezultă că S_n este măginită, $(\forall) n \ge 1$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă rezultă că $S_n \xrightarrow{u} f$ pe A şi atunci conform teoremei 9.1.4 rezultă că f este mărginită pe A. ■

Teorema 9.2.5. Fie $f_n : A \subset R \to R$ un şir de funcții astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă la f.

Dacă funcțiile f_n sunt continue într-un punct $x_0 \in A$ (respectiv pe A) atunci f este continuă în x_0 (respectiv pe A).

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 9.1.5. ■

Teorema 9.2.6. Dacă $f_n : [a,b] \to R$ este un şir de funcții integrabile pe [a,b] iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform la f atunci f este integrabilă pe [a,b] şi

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx \tag{9.10}$$

Demonstrație. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$; atunci $S_n \xrightarrow{u} f$ pe A. Cum f_k este integrabilă pe [a,b], $(\forall) k \geq 1$ rezultă că S_n este integrabilă pe [a,b], $(\forall) n \geq 1$ şi conform teoremei 9.1.6 funcția f este integrabilă pe [a,b] şi

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n dx = \int_a^b f dx \text{ sau } \lim_{n \to \infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) dx = \int_a^b f dx .$$

Cum $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f dx$, rezultă imediat (9.10). ■

Observație. În ipotezele teoremei 9.2.6 avem egalitatea (9.10) şi în acest caz spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ poate fi integrată termen cu termen.

Teorema 9.2.7. Fie $I \subset R$ un interval mărginit, $f_n : I \to R$ un şir de funcții derivabile pe **I** încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă la g şi există un punct $x_0 \in I$ astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe **I** către o funcție f derivabilă pe **I** iar f ' = g, adică

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' . \tag{9.11}$$

Demonstrație. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} f_k'$, $(\forall) n \in N^*$. Cum şirul de funcții (S_n) satisface ipotezele teoremei 9.1.7, există o funcție $f : I \to R$ astfel încât $S_n \xrightarrow{u} f$ pe **I**, f este derivabilă pe **I** şi f ' = g, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{=} f \text{ şi } \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \qquad \blacksquare$$

Observație. În ipotezele teoremei 9.2.7 avem egalitatea (9.11) şi în acest caz spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ poate fi derivată termen cu termen.

9.3. Serii de puteri

Definița 9.3.1. Se numeşte serie de puteri o serie de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, unde $f_n(x) = a_n x^n, x \in R, a_n \in R, (\forall) n \in N$ sau $f_n(x) = a_n(x-a)^n$, unde $a \in R$. În continuare considerăm $f_n(x) = a_n x^n$ şi astfel o serie de puteri va fi de forma

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, unde (a_n) este un şir de numere reale.

Numerele a_n se vor numi coeficienții seriei de puteri.

Să observăm că mulțimea de convergență A a unei serii de puteri este nevidă deoarece $0 \in A$.

Exemplu. Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Fie $x_0 \in R$, arbitrar. Considerăm seria numerică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}, \text{ cu termenul general } x_n = \frac{x_0^n}{n!}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x_0|^n} = 0 < 1$, din criteriul raportului rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ este absolut convergentă, deci convergentă.

Cum $x_0 \in R$ este arbitrar rezultă că mulțimea de convergență a seriei este A = R.

Teorema 9.3.1. (Teorema I a lui Abel).

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \in R$. Atunci există $r \in [0,\infty)$ astfel încât

i) Seria este absolut convergentă pe (-r,r);

ii) Seria este divergentă în $(\forall) x$ cu $|x| > r$.

Pentru $(\forall) 0 < r_0 < r$ seria este uniform convergentă pe $[-r_0, r_0]$.

Demonstrație. Dacă seria de puteri este convergentă numai în punctul x = 0, luând r = 0, teorema este demonstrată. Pesupunem că există $x_0 \neq 0$ punct de convergență pentru seria de puteri, adică seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă. Vom arăta că $(\forall)$ x cu $|x| < |x_0|$ rezultă că x este punct de convergență.

Într-adevăr, fie $x \in R$ cu $|x| < |x_0|$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ este convergentă rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n {x_0}^n = 0$ şi atunci şirul $(a_n x_0^n)$ este mărginit, deci $(\exists) M > 0$ astfel încât $|a_n x_0^n| \leq M, (\forall) n \in N$. Vom avea $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, (\forall) n \in N$ şi cum $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ rezultă ca seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă. Folosind criteriul de comparație cu inegalități rezultă ca şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă.

Astfel, dacă $x_0 \neq 0$ este un punct de convergență al seriei atunci orice punct $x \in R$ cu $|x| < |x_0|$ este punct de convergență absolută al seriei. Rezultă că mulțimea de convergență conține întreg intervalul $(-|x_0|, |x_0|)$. De aici deducem că, dacă x_1 este un punct de divergență al seriei, atunci orice punct x cu $|x| > |x_1|$ este punct de divergență al seriei.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct x_0 cu $|x_0| > |x_1|$ în care seria este convergentă, atunci, din prima parte a demonstrației seria ar fi convergentă şi în x_1 (deoarece $|x_1| < |x_0|$), contradicție.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri. Evident avem $0 \in A$, deci $A \neq \varnothing$.

Fie r = sup A şi evident $r > 0$ (deoarece suntem în cazul în care există $x_0 \neq 0$ punct de convergență). Vom arăta că r satisface concluziile teoremei.

i) Fie $x \in (-r, r)$; avem deci $|x| < r$. Fie $x_0 \in R$ astfel încât $|x| < x_0 < r$. Cum x_0 este punct de convergență al seriei, rezultă că seria este absolut convergentă în x, deoarece $|x| < x_0$.

ii) Dacă $r = +\infty$ inegalitatea $|x| > r$ nu are sens, deci în acest caz nu avem ce demonstra.

Să presupunem că $r < +\infty$ şi fie x un punct astfel încât $|x| < r$. Dacă x ar fi punct de convergență atunci orice punct y cu $r < |y| < |x|$ este punct de convergență, care contrazice faptul că r = sup A..

Rămâne să demonstrăm ultima parte a teoremei. Fie $0 < r_0 < r$. Atunci r_0 este punct de absolut convergență al seriei, deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r_0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ este convergentă.

Pentru $x \in [-r_0, r_0]$ avem $|x| \leq r_0$, deci $|a_n x^n| \leq |a_n| r_0^n, (\forall) n \in N$. Folosind criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r_0, r_0]$.

Număr real r se numeşte rază de convergență iar $I = (-r, r)$ se numeşte interval de convergență. ■

Vom da în continuare o metodă de calcul al razei de convergență.

Teorema 9.3.2. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi r raza sa de convergenţă.

Presupunem că există $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci $r = \frac{1}{\rho}$ (cu convenţiile $\rho = 0 \Rightarrow r = +\infty, \rho = +\infty \Rightarrow r = 0$).

Demonstraţie. Fie $x_0 \in R$ şi seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x_0^n \right|$, cu termenul general $x_n = \left| a_n x_0^n \right|$. Evident avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| = \rho \left| x_0 \right|$.

Vom folosi criteriul lui Cauchy de la serii de numere reale. Dacă $\rho = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 0$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n$ este absolut convergentă, $(\forall) x_0$, deci r = + ∞.

Dacă $\rho = +\infty$ şi $x_0 \neq 0$, cum $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \infty$ rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n$ este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, adică r = 0.

Fie $0 < \rho < +\infty$. Dacă $|x_0| < \frac{1}{\rho}$ avem $\rho |x_0| < 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n$ este absolut convergentă. Dacă $|x_0| > \frac{1}{\rho}$, luăm un punct x_1 astfel ca $|x_1| > |x_0| > \frac{1}{\rho}$. Atunci $\rho \left| x_0 \right| > 1$ şi deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x_o^n \right|$ este divergentă. Din prima parte a demonstraţiei teoremei 9.3.1 rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este divergentă. În concluzie $r = \frac{1}{\rho}$. ■

Corolarul 9.3.1. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \geq 0$. Atunci $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Exemplu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$. Avem $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ şi $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$, deci raza de convergență este r = 1 şi intervalul de convergență $I = (-1,1)$.

Pentru x = -1 obținem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă.

Pentru x = 1 obținem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, care conform criteriului lui Leibniz este convergentă.

În concluzie mulțimea de convergeță este A = (-1, 1].

Proprietăți ale seriilor de puteri

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, r raza de convergență, A mulțimea de convergență şi $f : A \to R$, f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, suma seriei de puteri pe mulțimea de convergență.

Dacă $0 < r_0 < r$, conform teoremei 9.3.1 seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe [-r_0, r_0] şi folosind teorema 9.2.5 rezultă că funcția f, suma seriei, este continuă pe [-r_0, r_0]. Cum r_0 este arbitrar în (0,r) rezultă că f este continuă pe (-r,r).

Propoziția 9.3.1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $r > 0$, suma f pe (-r,r), atunci

i) Seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergență r ;

ii) Funcția f este derivabilă pe (-r,r) şi f '= g, unde g(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$,

$(\forall)x \in (-r,r)$, adică f '(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ $(\forall)x \in (-r,r)$.

Spunem că seria de puteri poate fi derivată termen cu termen.

Demonstrație.

i) Rezultă din faptul că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

ii) Rezultă din faptul că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ sunt uniform convergente pe $(\forall)[-r_0,r_0] \subset (-r,r)$ şi din teorema 9.2.7. ■

Corolarul 9.3.1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $r > 0$, suma f pe (-r,r) atunci f este indefinit derivabilă pe (-r,r) şi

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}, (\forall)x \in (-r,r).$$

Propoziția 9.3.2. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $r > 0$ şi suma f pe (-r,r) atunci

i) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are aceeaşi rază de convergență r ;

ii) $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ $(\forall)|x| < r$,

adică seria de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval [0,x], unde $x \in (-r,r)$.

Demonstrație.

i) Rezultă din faptul că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

ii) Rezultă din uniform convergența seriei de puteri pe $(\forall)[-r_0,r_0] \subset (-r,r)$ şi teorema 9.2.6. ■

Propoziția 9.3.3. i) Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență r şi $\lambda \neq 0$ atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) x^n$ are aceeaşi rază de convergență.

ii) Dacă seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ au razele de convergență r_1 şi respectiv r_2 atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ are raza de convergență $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

Demonstrație. Rezultă imediat folosind proprietățile de la operațiile cu serii numerice. ■

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Avem $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, deci r =1 şi $I = (-1,1)$, intervalul de convergență.

Cum pentru x=1 seria este divergentă iar pentru x=-1 este convergentă rezultă că mulțimea de convergență este A=[-1,1).

Fie $f : [-1,1) \to R$ suma seriei pe mulțimea de convergență, deci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, (\forall)\, x \in [-1,1).$$

Conform propoziției (9.3.1) funcția f este derivabilă pe (-1,1) şi

$$f'(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}, (\forall)\, x \in (-1,1), \text{ de unde}$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C,\ (\forall)\, x \in (-1,1), \text{unde } C \in R..$$

Cum f(0) = 0 rezultă C = 0, deci f(x) = -ln (1-x), $(\forall)\, x \in (-1,1)$.

Seria binomială

Fie seria de puteri $1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$, unde $\alpha \in R$. (9.12)

Să observăm că pentru $\alpha \in N$ se obține un polinom de grad α. Vom presupune deci $\alpha \in R \setminus N$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$

rezultă că raza de convergență a seriei este r = 1.

Fie f : (-1, 1) $\to$ R suma seriei.

Conform propoziției (9.3.1) funcția f este derivabilă pe (-1, 1) şi

$$f'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + ..., (\forall)\, x \in (-1,1) \quad (9.13)$$

Înmulțind în (9.13) cu x obținem

$$x f'(x) = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n + ..., (\forall)\, x \in (-1,1) \quad (9.14)$$

Din (9.13) şi (9.14) se obține (1+x) f ’(x) = α f(x), $(\forall)\, x \in (-1,1)$ de unde

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}, (\forall)\, x \in (-1,1) \quad (9.15)$$

(să observăm că $f(x) \neq 0, (\forall) x \in (-1,1)$, deoarece dacă ar exista $x_0 \in (-1,1)$ cu $f(x_0) = 0$ ar rezulta $f^{(k)}(x_0) = 0$, $(\forall) k \in N$ şi atunci f = 0, contradicție, căci f(0) = 1)

Din (9.15) obținem ln f(x) = αln (1+x)+lnc deci

$f(x) = c\ (1+x)^{\alpha}$, $(\forall)\, x \in (-1,1)$ unde c > 0.

Cum f(0) =1 rezultă c =1 şi atunci $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $(\forall)\, x \in (-1,1)$.

Obținem deci

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ..., \quad (\forall)\, x \in (-1,1) \quad (9.16)$$

care generalizează formula binomului lui Newton, adevărată pentru $\alpha \in$ N.

Pentru diferite valori particulare pentru α din (9.16) se obțin sumele unor serii importante.

Pentru α = -1 obținem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ..., (\forall)\, x \in (-1,1), \quad (9.17)$$

de unde

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., (\forall)\, x \in (-1,1). \quad (9.18)$$

Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ obținem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots, \quad (\forall)\, x \in (-1,1), \tag{9.19}$$

Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots, \quad (\forall)\, x \in (-1,1), \tag{9.20}$$

de unde

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \ldots, \quad (\forall)\, x \in (-1,1), \tag{9.21}$$

Prin integrare termen cu termen obținem

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 4}x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} + \ldots, \quad (\forall)\, x \in (-1,1) \tag{9.22}$$

De asemenea din (9.17), înlocuind pe x cu x^2 obținem:

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, (\forall)\, x \in (-1,1)$ şi prin integrare termen cu termen găsim că

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, (\forall)\, x \in (-1,1). \tag{9.23}$$

Serii Taylor

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,r > 0 raza sa de convergență şi f suma sa pe intervalul de convergență, deci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(\forall)\, x \in (-r, r)$.

Din propoziția (9.3.1) rezultă că f este indefinit derivabilă pe (-r, r) şi $f^{(n)}(0) = n! a_n$, $(\forall) n \in N$, deci $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ şi atunci

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,(\forall)\,x\in(-r,r). \qquad (9.24)$$

Să observăm că seria de puteri din (9.24) poate fi asociată oricărei funcții indefinit derivabile în origine.

Definiția 9.3.2. Fie $I\subset R$ un interval astfel încât $o\in \text{Int } I$ şi $f:I\to R$, indefinit derivabilă în x = 0.

Se numeşte serie Taylor ataşată funcției f în x = 0 seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad x\in I \qquad (9.25)$$

Fie $r\geq 0$ raza de convergență a seriei (9.25). Se pune problema în ce condiții suma seriei (9.25) coincide cu funcția inițială f pe intervalul de convergență (-r, r).

Să reamintim formula lui Mac – Laurin de la funcții reale de variabilă reală.

Dacă $I\subset R$ este un inteval deschis astfel încât $0\in I$ şi $f:I\to R$ este o funcție de n ori derivabilă pe I, unde $n\in N^*$ atunci

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x),(\forall)\,x\in I. \qquad (9.26)$$

Dacă f este de (n+1) ori derivabilă pe I atunci restul de ordin n, R_n, se poate scrie sub forma $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, unde ξ este între 0 şi x (forma Lagrange a restului).

Teorema 9.3.3. Fie $I\subset R$ un interval astfel încât $0\in \text{Int } I$, $f:I\to R$, indefinit derivabilă pe I şi A mulțimea de convergență a seriei (9.25).

Atunci suma seriei Taylor ataşată funcției f în x = 0 coincide cu funcția f pe $A\cap I$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,(\forall)\,x\in A\cap I$, unde R_n este restul de ordin n din formula lui Mac-Laurin.

Demonstrație. Fie $S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, pentru $x\in I$ şi atunci, din formula Mac-Laurin avem

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),(\forall)\,x\in I. \qquad (9.27)$$

Să observăm că $S_n(x)$ coincide cu polinomul Taylor

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n.$$

Din (9.27) rezultă imediat că $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, (\forall) x \in A \cap I$. ■

În acest caz spunem că f este dezvoltabilă în serie de puteri pe $A \cap I$ şi $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ..., (\forall) x \in A \cap I,$ se numeşte dezvoltarea în serie de puteri a funcției f pe $A \cap I$.

Corolarul 9.2.3. Dacă $f \in C^\infty(I), 0 \in \text{Int}\, I$ şi există M>0 astfel încât $\left| f^{(n)}(x) \right| \le M, (\forall)\ x \in I, (\forall)\ n \in \mathbb{N}$ atunci f este dezvoltabilă în serie de puteri pe I şi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, (\forall) x \in I.$$

Demonstrație. Fie $x \in I$. Atunci $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, există ξ_n între 0 şi x astfel încât $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n)$.

Conform ipotezei $\left| R_n(x) \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M, (\forall) x \in I, (\forall) n \in \mathbb{N}.$.

Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, (\forall)\, x \in I$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, (\forall) x \in I$ şi aplicăm teorema 9.3.3. ■

Exemple. 1. Fie funcția $f: R \to R$, $f(x) = e^x$. Avem $f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in R$,

$(\forall)\ n \in N$, $f^{(n)}(0) = 1$, $(\forall)\ n \in N$ iar seria Taylor asociată funcției f în x = 0 este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Raza de convergență a acestei serii de puteri este $r = +\infty$ deci intervalul de convergență este $I = (-\infty, +\infty) = R$ şi coincide cu mulțimea de convergență.

Pentru (∀) M>0 avem $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \le e^M$, (∀) x∈(-M, M), (∀) n∈N, şi atunci conform corolarului 9.3.2 funcția f este dezvoltabilă în serie de puteri pe(-M, M), deci pe R şi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, (\forall) x \in R. \tag{9.28}$$

2. Fie funcția f:R→R, f(x)=cos x. Avem $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, (∀) x∈R, (∀) n∈N, $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$, (∀) n∈N şi $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$, (∀) x∈R, (∀) n∈N.

Conform corolarului 9.3.2. funcția f este dezvoltabilă în serie de puteri pe R şi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, (\forall) x \in R. \tag{9.29}$$

Analog obținem:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, (\forall) x \in R. \tag{9.30}$$

Observație. Înlocuind în (9.28) pe x cu ix, unde i∈C, $i^2=-1$ şi apoi cu –ix şi folosind (9.29) şi (9.30) obținem:

$$e^{ix} = 1 + \frac{x}{1!} i + \frac{x^2}{2!} i^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!} i^n + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x, (\forall) x \in R. \tag{9.31}$$

Analog obținem

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{9.32}$$

Din (9.31) şi (9.32) obținem formulele lui Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \ (\forall)\ x \in R.$$

Definiția 9.3.3. Fie $I \subset R$ un interval, $x_0 \in \text{Int } I$, $f : I \to R$, indefinit derivabilă în x_0. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ se numeşte seria Taylor ataşată funcției f în x_0.

Rezultatele stabilite pentru serii Taylor ataşate unei funcții f în punctul x=0 se transferă la seriile Taylor definite mai sus.

Probleme propuse

1. Să se studieze convergența simplă şi uniformă a următoarelor şiruri de funcții pe intervalele indicate:

a) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, $x \in [0, \infty)$;

b) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$, $x \in R$;

c) $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $x \in (0, \infty)$;

d) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{kx}$, $x \in [0, \infty)$;

e) $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}$, $x \in [1, \infty)$;

f) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$, $x \in [-1,1]$.

2. Fie $f_n : R_+ \to R, f_n(x) = \frac{1}{n} \text{arctg } x^n$. Să se arate că (f_n) converge uniform iar $\left(f_n'\right)$ converge neuniform.

3. Fie $f_n : R \to R$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$, unde $\alpha > 2$.

Să se arate că (f_n) este uniform convergent pe R, iar limita sa este o funcție derivabilă cu derivata continuă pe R.

4. Fie $f_n : [0,1] \to R$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

Să se arate că (f_n) converge neuniform pe [0,1], dar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx .$$

5. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+1} \sin^n x$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} \dfrac{1}{n^2}$; **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \dfrac{x}{3^n}$.

6. Să se arate că următoarele serii sunt uniform convergente pe intervalele indicate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$, $x \in (0,\infty)$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{e^{nx}}$, $x \in [0,a]$, unde $a > 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right)$, $x \in [0,a]$, $a \in (0,1)$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2}{1+n^3x^4}$, $x \in R$.

7. Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3+x^3}$ este uniform convergentă pe $[0,a]$, unde $a > 0$ şi $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3+x^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+1}$.

8. Să se arate că seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$ este uniform convergentă pe R iar suma sa este continuă pe R.

9. Să se determine raza de convergență, intervalul de convergență şi mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}x^n$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}x^n$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{n+1}}{n^2}x^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n n!}{n^n}(x+1)^n$.

10. Să se arate că seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\ldots[(3n-1)\cdot 3n]}$ este convergentă pe R iar suma sa f verifică ecuația

$$f''(x)+x\,f(x)=0,\ \forall\ x\in R.$$

11. Să se determine intervalele de convergență şi sumele corespunzătoare pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(n+3)}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

12. Să se arate că următoarele funcții sunt dezvoltabile în serii de puteri şi să se găsească aceste dezvoltări, specificându-se intervalul pe care sunt valabile

a) $f:R\to R,\quad f(x)=\sin^3 x$;

b) $f:(-1,\infty)\to R,\quad f(x)=\ln(1+x)$;

c) $f:R\setminus\{-2,-3\}\to R,\quad f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}$;

d) $f:(-a,\infty)\to R,\quad f(x)=\sqrt{x+a}$.

CAPITOLUL 10

INTEGRALE CU PARAMETRU

Fie $I \subset R$ un interval, $J \subset R$ o mulțime arbitrară de numere reale, $f : I \times J \to R$ o funcție integrabilă în raport cu x pe orice compact din $I, (\forall) t \in J$.

Fie $\alpha, \beta : J \to I$. O integrală de forma

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx, \tag{10.1}$$

se numeşte integrală cu parametru.

Ne interesează să stabilim condițiile în care proprietățile funcției f

(de continuitate, derivabilitate, etc.) se transmit funcției F.

Fie $t_0 \in J'$ (deci punct de acumulare pentru J).

Presupunem că următoarea limită există şi este finită :

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) = \varphi(x), \ (\forall) x \in I. \tag{10.2}$$

Aceasta înseamnă că $(\forall) x \in I$ şi $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $V_{\varepsilon,x} \in \vartheta(t_0)$ astfel încât $(\forall)$ $t \in V_{\varepsilon,x} \cap J$, $t \neq t_0$ avem $|f(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Dacă această vecinătate este independentă de x, adică $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists) V_\varepsilon \in \vartheta(t_0)$ astfel încât $(\forall)$ $t \in V_\varepsilon \cap J, t \neq t_0$ şi $(\forall) x \in I$ avem $|f(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon$, spunem că funcția f tinde uniform în t_0 către funcția φ sau limita (10.2) este uniformă.

Să observăm că, dacă limita (10.2) este uniformă şi $t_n \in J$, $t_n \to t_0$ atunci şirul de funcții (f_n), unde $f_n(x) = f(x, t_n)$, $(\forall)$ $n \ge 1$, converge uniform pe I către φ.

Teorema 10.1. Fie $f: I \times J \to R$, continuă în raport cu x pe I, $(\forall)$ $t \in J$ şi fie $I=[\alpha,\beta]$, $F(t)=\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ şi $t_0 \in J'$. Presupunem că limita (10.2) există şi este uniformă. Atunci φ este continuă pe $[\alpha,\beta]$ şi

$$\lim_{t\to t_0}\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx = \int_\alpha^\beta \lim_{t\to t_0} f(x,t)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx .$$

Demonstrație. Fie $(t_n) \subset J$, $t_n \to t_0$. Din observația de mai sus şirul de funcții (f_n), unde $f_n(x) = f(x,t_n)$, converge uniform pe $[\alpha,\beta]$ către φ.

Cum funcțiile f_n, $n \ge 1$, sunt continue şi $f_n \xrightarrow{u} \varphi$, din proprietatea de transfer de continuitate rezultă că φ este continuă.

Fie $\varepsilon > 0$; cum limita (10.2) este uniformă, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)$ $t \in J$, $t \ne t_0$, $|t-t_0| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $x \in I$ avem $|f(x,t)-\varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$.

Vom avea

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx - \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x,t)-\varphi(x)|\,dx \le \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\,dx = \varepsilon ,$$

$(\forall) t \in J$, $t \ne t_0$, cu $|t-t_0| < \delta_\varepsilon$, şi demonstrația este încheiata. ■

În continuare presupunem că I = [a, b], J = [c, d].

Teorema 10.2. Fie f:[a, b] x [c, d] $\to$R, continuă, $\alpha,\beta : [c,d] \to [a,b]$, continue. Atunci funcția F definită de (4.1) este continuă pe [c, d].

Demonstrație. Fie $t_0 \in [c, d]$, fixat şi $t \in [c, d]$ arbitrar.

Evident avem

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x,t)dx + \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t)dx + \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx \text{ ,de unde} \qquad (10.3)$$

$$|F(t)-F(t_0)| = \left|\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x,t)dx + \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t)dx + \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x,t)dx\right| + \left|\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx\right| + \left|\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} (f(x,t)-f(x,t_0))dx\right| . \qquad (10.4)$$

Cum f este continuă pe [a, b] x [c, d] (=compactă) rezultă că f este mărginită pe [a, b] x [c, d] , deci $(\exists)M>0$ astfel încât

$$|f(x,t)|\le M, (\forall)(x,t)\in[a,b]\times[c,d].$$

Fie $\varepsilon>0$. Cum α şi β sunt continue pe [c,d] există $\delta_\varepsilon^{'}>0$ astfel încât $(\forall)t\in[c,d]$ cu $|t-t_0|<\delta_\varepsilon^{'}$ avem $|\alpha(t)-\alpha(t_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3M}$, $|\beta(t)-\beta(t_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3M}$.

Cum f este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ din teorema lui Cantor rezultă că f este uniform continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ şi atunci $(\exists)\delta_\varepsilon^{''}>0$ astfel încât $(\forall)x\in[a,b]$ şi $(\forall)t\in[c,d]$ cu $|t-t_0|<\delta_\varepsilon^{''}$ avem

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|\cdot|\alpha(t_0)-\beta(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Din (10.4) vom avea

$$|F(t)-F(t_0)|\le M|\alpha(t)-\alpha(t_0)|+M|\beta(t)-\beta(t_0)|+\left|\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\varepsilon}{3|\alpha(t_0)-\beta(t_0)|}dx\right|<$$

$<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\dfrac{\varepsilon}{3M}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon, (\forall)t\in[c,d]$, cu $|t-t_0|<\delta_\varepsilon$, unde $\delta_\varepsilon=\min(\delta_\varepsilon^{'},\delta_\varepsilon^{''})$.

Rezultă că F este continuă în t_0 şi cum t_0 este fixat dar arbitrar luat rezultă că F este continuă pe [c,d]. ■

Teorema 10.3. Fie $f:[a,b]\times[c,d]\to R$, continuă, $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$, derivabile.

Presupunem că f admite pe [a, b] x [c, d] derivată parţială în raport cu t, continuă pe $[a,b]\times[c,d]$. Atunci F este derivabilă pe [c,d] şi pentru $(\forall)t\in[c,d]$ avem

$$F'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx+f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t).$$

Demonstraţie. Fie $t_0\in[c,d]$, fixat şi $t\in[c,d]$, $t\ne t_0$.

Folosind descompunerea din (10.3) vom avea

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}dx+\frac{1}{t-t_0}\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}f(x,t)dx-\frac{1}{t-t_0}\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}f(x,t)dx \quad (10.5)$$

Fie funcția $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to R$

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}, t \neq t_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_0), t = t_0 \end{cases}$$

Din ipotezele teoremei rezultă că funcția φ este continuă pe [a, b] x [c, d]. Folosind teorema 10.2 rezultă că funcția $G : [c,d] \to R$, $G(t) = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \varphi(x,t)dx$ este continuă pe [c,d], deci

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \varphi(x,t)dx = \lim_{t \to t_0} G(t) = G(t_0) = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \varphi(x,t_0)dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx .$$

Cum pentru $t \neq t_0$, $\varphi(x,t) = \dfrac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}$, rezultă că există

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx \qquad (10.6)$$

Ne ocupăm în continuare de următoarele două integrale din (10.5).

Din teorema de medie există un punct c_t între $\beta(t_0)$ şi $\beta(t)$ astfel încât $\dfrac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \dfrac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} f(c_t, t)$ şi folosind derivabilitatea funcției β în t_0 şi continuitatea lui f rezultă că există

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \beta'(t_0) f(\beta(t_0), t_0) \qquad (10.7)$$

Raționând analog găsim că

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)dx = \alpha'(t_0) f(\alpha(t_0), t_0) \qquad (10.8)$$

Din (10.6), (10.7), (10.8) rezultă derivabilitatea funcției F şi egalitatea din enunț. ■

Exemplu. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, folosind integrala cu parametru $I(\alpha) = \int_0^\alpha \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$.

Evident avem I = I(1).

Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to R,\ f(x,\alpha) = \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ şi atunci $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x,\alpha)dx$.

Evident f satisface ipotezele teoremei 10.3, deci funcția I este derivabilă pe [0,1] şi $I'(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx+f(\alpha,\alpha)=\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}$.

Calculând prima integrală, obținem

$I'(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\alpha$, de unde, prin integrare obținem

$I(\alpha)=\int I'(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha \ln(1+\alpha^2)+c$.

Cum I(0) = 0 rezultă c = 0, deci

$I(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha \ln(1+\alpha^2)$ şi atunci $I=I(1)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1\cdot\ln 2=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

În continuare considerăm integrale cu parametru pe intervale necompacte.

Fie integrala

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)dx \quad \text{, unde } f:[a,b) \times [c,d]\to\mathbb{R}. \tag{10.9}$$

Presupunem că integrala (10.9) este convergentă, $(\forall)t\in[c,d]$. Ne propunem să dăm condiții de continuitate şi derivabilitate pentru funcția F.

Un rol important în formularea acestor condiții îl are noțiunea de convergență uniformă a unei integrale cu parametru pe un interval necompact.

Convergența integralei (10.9), pentru $(\forall)t\in[c,d]$ revine la următoarea condiție: pentru $(\forall)t\in[c,d]$ şi $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)c_{\varepsilon,t}\in(a,b)$ astfel încât $(\forall)u\in(c_{\varepsilon,t},b)$ avem

$$\left|F(t)-\int_a^u f(x,t)dx\right|<\varepsilon. \tag{10.10}$$

Dacă în formularea de mai sus $c_{\varepsilon,t}$ este independent de t, adică $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)c_\varepsilon\in(a,b)$ astfel încât $(\forall)u\in(c_\varepsilon,b)$ şi $(\forall)t\in[c,d]$ avem (10.10), spunem că integrala (10.9) converge pe [a,b) uniform în raport cu $t\in[c,d]$.

Teorema 10.4. Dacă integrala (10.9) converge uniform pentru $t\in[c,d]$ atunci şirul de funcții

$$F_n(t)=\int_a^{b_n} f(x,t)dx\text{, unde} \tag{10.11}$$

$a<b_n<b,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=b$, converge uniform pe [c,d].

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei $(\exists)\ c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât $(\forall)\ u \in (c_\varepsilon, b)$ şi $(\forall)\ t \in [c,d]$ avem (4.10).

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $(\exists) n_\varepsilon \in N$ astfel încât $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $c_\varepsilon < b_n < b$ şi atunci vom avea $\left| F(t) - \int_a^{b_n} f(x,t)dx \right| < \varepsilon, (\forall) t \in [c,d], (\forall) n \geq n_\varepsilon$, adică

$|F_n(t) - F(t)| < \varepsilon,\ (\forall) n \geq n_\varepsilon, (\forall) t \in [c,d]$, deci $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [c,d]. ■

Teorema 10.5. Dacă $f:[a,b)\times[c,d]\to R$ este continuă şi integrala (10.9) converge uniform pentru t∈[c,d] atunci funcția F definită de (10.9) este continuă pe [c,d].

Demonstrație. Fie $b_n < b, b_n \to b$. Din teorema 10.4 şirul (F_n) definit de (4.11) este uniform convergent pe [c,d] către F.

Din teorema 10.2 aplicată funcției f pe $[a,b_n]\times[c,d]$ şi folosind faptul că f este continuă rezultă că F_n este continuă pe [c,d].

Cum $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [c,d], din teorema 10.1.5 rezultă că funcția F este continuă pe [c,d]. ■

Teorema 10.6. Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to R$. Presupunem că f este continuă pe $[a,b)\times[c,d]$, derivabilă parțial în raport cu t pe [a, b) x [c, d] cu $\frac{\partial f}{\partial t}$ continuă pe $[a,b)\times[c,d]$.

Presupunem că integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ este convergentă pentru $(\forall) t \in [c,d]$, iar integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ este uniform convergentă pentru t∈[c,d].

Atunci F definită de (10.9) este derivabilă pe [c,d] şi

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx, (\forall)\ t \in [c,d].$$

În plus F' este continuă pe [c,d].

Demonstrație. Fie $b_n < b, b_n \to b$. Avem $[a,b_n]\times[c,d] \subset [a,b)\times[c,d]$. Fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)dx$.

Folosind teorema 10.3 rezultă că F_n este derivabilă pe [c,d] şi $F'_n(t) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx, (\forall) t \in [c,d]$.

Cum $\frac{\partial f}{\partial t}$ este continuă pe $[a,b_n]\times[c,d]$, din teorema 10.2 rezultă că F'_n este continuă pe [c,d].

Din convergența integralei $\int_a^b f(x,t)dx$ rezultă $F_n \to F$ pe [c,d].

Din uniform convergența integralei $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt$ rezultă convergența uniformă a şirului (F'_n) pe [c,d].

Conform teoremei 9.1.7 funcția F este derivabilă pe [c,d] şi

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} F'_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx .$$

Continuitatea funcției F' rezultă din teorema de transfer de continuitate de la şiruri de funcții. ■

Vom da în continuare două criterii de convergență uniformă pentru integrale cu parametru pe un interval necompact.

Teorema 10.7. Fie $f : [a,b)\times[c,d] \to R$. Presupunem că integrala

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx \text{ este convergentă, } (\forall) t \in [c,d].$$

O condiție necesară şi suficientă pentru ca integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ să conveargă uniform în raport cu $t \in [c,d]$ este ca $(\forall)\varepsilon > 0$ să existe $c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât $(\forall) u, v \in (c_\varepsilon, b), u < v$ să avem

$$\left| \int_u^v f(x,t)dx \right| < \varepsilon, (\forall) t \in [c,d].$$

Demonstrație. Se foloseşte un raționament asemănător cu cel din demonstrația criteriului lui Cauchy (vezi teorema 8.1.1) ■

Teorema 10.8. Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to R$. Presupunem că integrala $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ este convergentă, $(\forall)t\in[c,d]$ şi există o funcție $\varphi:[a,b)\to R$ astfel încât

i) $|f(x,t)|\le\varphi(x)$, $(\forall)x\in[a,b), (\forall)t\in[c,d]$;

ii) integrala $\int_a^b\varphi(x)dx$ este convergentă.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ converge uniform pe [a,b) în raport cu $t\in[c,d]$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon>0$. Din convergența integralei $\int_a^b\varphi(x)dx$, folosind criteriul lui Cauchy, $(\exists)c_\varepsilon\in(a,b)$ astfel încât $(\forall)u,v\in(c_\varepsilon,b), u<v$ avem $\left|\int_u^v\varphi(x)dx\right|<\varepsilon$.

Pe de altă parte, din i), pentru $(\forall)t\in[c,d]$ vom avea $\left|\int_u^v f(x,t)dx\right|\le\int_u^v|f(x,t)|dx\le\int_u^v\varphi(x)dx<\varepsilon$, şi demonstrația este încheiată folosind teorema 10.7. ■

Teorema 10.9. (Criteriul lui Dirichlet). Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to R$ continuă, $g:[a,b)\times[c,d]\to R$, monoton descrescătoare în raport cu x pe [a,b), $(\forall)t\in[c,d]$.

Presupunem că există M > 0 astfel încât

$\left|\int_a^u f(x,t)dx\right|\le M, (\forall)t\in[c,d], (\forall)u\in[a,b)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} g(x,t)=0$, uniform în raport cu $t\in[c,d]$. Atunci integrala $\int_a^b f(x,t)g(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$.

Demonstrație. Analog cu demonstrația teoremei 10.1.2. ■

Teorema 10.10. (Criteriul lui Abel). Fie $f,g:[a,b)\times[c,d]\to R$, f continuă, g monotonă în raport cu x pe [a,b), $(\forall)t\in[c,d]$ şi există M > 0 astfel încât $|g(x,t)|\le M$, $(\forall)x\in[a,b)$, $(\forall)t\in[c,d]$.

Presupunem că integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t)g(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu $t \in [c,d]$.

Exemple. 1. Să se arate că integrala $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}dx,\ \alpha > 0$ este convergentă şi să se calculeze.

Fie $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\ \alpha x}{x(1+x^2)}dx$, $\alpha > 0$.

Avem $F(\alpha) = \int_0^\infty f(x,\alpha)dx$, unde $f(x,\alpha) = \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}$.

Cum $|\,f(x,\alpha)\,| \le \frac{\alpha x}{x(1+x^2)} = \frac{\alpha}{1+x^2}$, $(\forall)x > 0$, $\alpha > 0$ şi $\int_0^\infty \frac{\alpha}{1+x^2}dx$ este convergentă rezultă, conform propoziţiei 10.1.2, că integrala $\int_0^\infty f(x,\alpha)dx$ este convergentă.

Evident avem $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)}$ şi $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{1+x^2}$, $(\forall)x > 0,\ \alpha > 0$.

Cum $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ este convergentă rezultă că $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$ converge uniform pe $[0, \infty)$ în raport cu $\alpha > 0$. Folosind teorema 10.6 funcţia F este derivabilă şi

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2(\alpha+1)}$$

de unde $F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1) + c$.

Pentru $\alpha \to 0$ avem $F(\alpha) \to 0$, deci c = 0 şi atunci $F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1)$, $(\forall)\alpha > 0$.

2. Să se calculeze integrala $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin^3 x}{x}dx$ şi să se deducă apoi valoarea integralei $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

Avem $F(t)=\int_0^{\infty} f(x,t)dx$, unde $f(x,t)=e^{-tx}\frac{\sin^3 x}{x}$, pentru $x>0$ şi $t\geq 0$.

Se arată imediat că integralele $\int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin^3 x}{x}dx$, $\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=-\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin^3 xdx$ sunt uniform convergente pe $(0,\infty)$ în raport cu $t\in[0,\infty)$ şi atunci F este derivabilă pe $[0,\infty)$ şi $F'(t)=-\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin^3 xdx$.

Calculând ultima integrală obținem

$F'(t)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^2+9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2+1}$, de unde $F(t)=\frac{1}{12}\text{arctg}\frac{t}{3}-\frac{3}{4}\text{arctg}t+c$.

Cum $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$ deducem $c=\frac{\pi}{3}$, deci $F(t)=\frac{1}{12}\text{arctg}\frac{t}{3}-\frac{3}{4}\text{arctg}t+\frac{\pi}{3}$ şi atunci $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx=\frac{\pi}{3}$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze F'(t), unde $F(t)=\int_{at}^{bt} f(x-t,x+t)\,dx$, iar $f:R^2\to R$ este de clasă C^1 pe R^2.

2. Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea sub integrală:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+y\cos x}{a-y\cos x}dx$, $y\in(-1,1)$; **b)** $\int_0^1\frac{\ln(1-y^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $|y|<1$.

3. Fie funcția $\Phi:[a,b]\to R$, continuă şi $\varphi:[a,b]\to R$,

$$\varphi(t)=\frac{1}{k}\int_a^t\Phi(x)\sin k(t-x)dx,\text{ unde } k\in R^*.$$

Să se arate că $\varphi''(t)+k^2\varphi(t)=\Phi(t),(\forall)t\in[a,b]$.

4. Fie g: R $\to$ R, derivabilă, f : R $\to$ R de două ori derivabilă şi

$F(x,y)=\frac{1}{2}[f(x-ay)+f(x+ay)]+\frac{1}{2a}\int_{x-ay}^{x+ay}g(t)dt$, $a\neq 0$. Atunci $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0$.

5. Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea sub integrală:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x)dx, y > 0$; **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln(1 + y \cos x)dx, |y| < 1$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \sin x)}{\sin x} dx$; **d)** $\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, a > 0, b > 0$.

CAPITOLUL 11

INTEGRALE CURBILINII

11.1. Integrale curbilinii de speța întâi

Definiția 11.1.1. Se numeşte drum parametrizat (sau curbă parametrizată, arc de curbă parametrizat) în spațiul R^3 orice funcție continuă $\gamma:[a,b]\to R^3$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$.

Punctele $A(x(a),y(a),z(a)),B(x(b),y(b),z(b))$ se numesc extremitățile curbei γ. Pentru curba γ vom mai folosi notația $\overset{\frown}{AB}$.

Vom nota cu $(\gamma)=\operatorname{Im}\gamma=\left\{(x(t),y(t),z(t))\in R^3 : t\in[a,b]\right\}$, imaginea curbei γ.

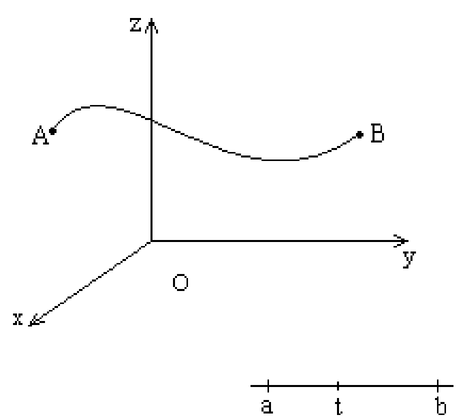

Fig.1

Ecuațiile $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei γ şi scriem

$$(\gamma):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t),t\in[a,b]\\ z=z(t)\end{cases}\qquad(11.1)$$

Dacă $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este o bază ortonormată în reperul cartezian Oxyz, atunci curba γ poate fi dată şi astfel

$$(\gamma): \bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a,b] \tag{11.2}$$

unde $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ este vectorul de poziție al punctului $M(x(t), y(t), z(t))$.

Reprezentarea (11.2) se numeşte ecuația vectorială parametrică a curbei γ.

Dacă $z(t) = 0, (\forall) t \in [a,b]$, curba γ se numeşte curbă plană, deci

$$(\gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b].$$

În ipotezele în care poate fi eliminat parametrul t obținem

$$(\gamma): F(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D \subset R^2, \qquad \text{forma implicită.}$$

Dacă pe D sunt îndeplinite ipotezele teoremei funcțiilor implicite rezultă:

$$(\gamma): y = y(x), \quad x \in J \subset R, \qquad \text{forma explicită.}$$

Fie $(\gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$, o curbă oarecare în spațiu.

Definiția 11.1.2. Curba γ se numeşte netedă (sau regulată) dacă $x, y, z \in C^1([a,b])$ şi $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0, (\forall) t \in [a,b]$, sau echivalent $\bar{r}'(t) \neq \bar{\theta}, (\forall) t \in [a,b]$.

Curba γ se numeşte netedă pe porțiuni dacă este o reuniune finită de arce netede, adică dacă $(\exists) A_1, A_2, ..., A_{n-1} \in (\gamma)$ astfel încât $\overset{\frown}{AA_1}, \overset{\frown}{A_1A_2}, ..., \overset{\frown}{A_{n-1}B}$ să fie netede.

Curba γ se numeşte simplă dacă funcția $t \to \bar{r}(t)$ este injectivă pe $[a.b)$.

Curba γ se numeşte închisă dacă $A = B$, adică $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$.

Fie $\Delta \in D$ ([a,b]), $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ şi

$A_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \in (\gamma), k = \overline{0,n}, A_0 = A, A_n = B$, punctele corespunzătoare de pe curbă.

Punctele $A, A_1, ..., A_{n-1}, B$ determină o linie poligonală ale cărei vârfuri sunt situate pe (γ).

Lungimea acestei linii poligonale este

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}\ .$$

Definiția 11.1.3. Curba γ se numeşte rectificabilă (sau spunem că γ are lungime) dacă mulțimea $\{L_\Delta : \Delta \in D([a,b])\}$ este majorată.

În acest caz numărul notat $L(\gamma) = \sup\limits_{\Delta} L_\Delta$ se numeşte lungimea curbei γ.

Observație. În cazul curbelor plane această definiție coincide cu definiția 7.3.5 dată pentru lungimea graficului unei funcții $f : [a.b] \to R$.

Teorema 11.1.1. Fie γ o curbă netedă dată prin ecuațiile parametrice (11.1). Atunci curba γ este rectificabilă şi

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + z'(t))^2}dt\ . \tag{11.3}$$

Demonstrație. Fie $\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 ... < t_n = b)$.

Atunci $L_\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}$.

Din teorema lui Lagrange aplicată funcțiilor x, y, z pe intervalul $[t_{k-1}, t_k]$ rezultă că există $\xi_k, \eta_k, \tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$ astfel încât:

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\eta_k) + z'^2(\tau_k)}(t_k - t_{k-1})$$

Cum $x, y, z \in C^1([a,b])$, funcțiile x', y', z' sunt continue pe [a,b], deci mărginite şi fie $M > 0$ astfel încât $|x'(t)| \le M,\quad |y'(t)| \le M,\quad |z'(t)| \le M, (\forall) t \in [a,b]$.

Rezultă $L_\Delta \le \sum\limits_{k=1}^{n} M\sqrt{3}(t_k - t_{k-1}) = M\sqrt{3}(b-a)$, deci curba γ este rectificabilă.

Să arătăm în continuare (11.3).

Vom scrie L_Δ astfel:

$$L_\Delta=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'^2(t_k)+y'^2(t_k)+z'^2(t_k)}(t_k-t_{k-1})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\tau_k)}-\sqrt{x'^2(t_k)+y'^2(t_k)+z'^2(t_k)}\right](t_k-t_{k-1})=$$
$$=\sigma_\Delta(\varphi,t_k)+\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\tau_k)}-\sqrt{x'^2(t_k)+y'^2(t_k)+z'^2(t_k)}\right](t_k-t_{k-1})$$

unde $\varphi:[a,b]\to R$, $\varphi(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$ este o funcție continuă pe [a,b].

Fie $I=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$. Vom avea

$$|L_\Delta-I|\le|\sigma_\Delta(\varphi,t_k)-I|+|L_\Delta-\sigma_\Delta(\varphi,t_k)|\le|\sigma_\Delta(\varphi,t_k)-I|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\tau_k)}-\sqrt{x'^2(t_k)+y'^2(t_k)+z'^2(t_k)}\right|(t_k-t_{k-1})$$

Folosind inegalitatea

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right|\le|a-m|+|b-n|+|c-p|,\ (\forall)a,b,c,m,n,p\in R,$$

obținem

$$|L_\Delta-I|\le|\sigma_\Delta(\varphi,t_k)-I|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(|x'(\xi_k)-x'(t_k)|+|y'(\eta_k)-y'(t_k)|+|z'(\tau_k)-z'(t_k)|)(t_k-t_{k-1}).$$

Fie $\varepsilon>0$. Cum φ este continuă pe [a,b] este integrabilă şi atunci $(\exists)\delta'_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)\Delta\in D([a,b])$, $\Delta=(a=t_0<t_1<...<t_n=b)$ cu $\|\Delta\|<\delta'_\varepsilon$ şi $(\forall)c_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=\overline{1,n}$ avem $|\sigma_\Delta(\varphi,c_k)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ şi în particular, pentru $c_k=t_k$, $k=\overline{1,n}$ vom avea

$$|\sigma_\Delta(\varphi,t_k)-I|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{11.4}$$

Cum x',y',z' sunt continue pe [a,b] rezultă că sunt uniform continue şi atunci $(\exists)\delta''_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)t',t''\in[a,b]$ cu $|t'-t''|<\delta''_\varepsilon$ avem

$$|x'(t')-x'(t'')|<\frac{\varepsilon}{6(b-a)},\ |y'(t')-y'(t'')|<\frac{\varepsilon}{6(b-a)},\ |z'(t')-z'(t'')|<\frac{\varepsilon}{6(b-a)} \tag{11.5}$$

Fie $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$ şi $\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Evident avem $|\xi_k - t_k| \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $|\eta_k - t_k| \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $|\tau_k - t_k| \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon, k = \overline{1,n}$ şi folosind condițiile (11.5) vom avea

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(|x'(\xi_k) - x'(t_k)| + |y'(\eta_k) - y'(t_k)| + |z'(\tau_k) - z'(t_k)|\right)(t_k - t_{k-1}) < \\ &< \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{6(b-a)} + \frac{\varepsilon}{6(b-a)} + \frac{\varepsilon}{6(b-a)}\right)(t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{11.6}$$

Folosind (11.4) şi (11.5) obținem

$$|L_\Delta - I| < \varepsilon, (\forall)\, \Delta \in D([a,b]) \text{ cu } \|\Delta\| < \delta_\varepsilon, \text{ deci}$$

$$L(\gamma) = I = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$ ■

Exemplu. Să se calculeze lungimea arcului de elice

$$(\gamma): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, t \in [0,2\pi], \text{ unde } a > 0 \\ z = t \end{cases}$$

Vom avea

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + 1}\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + 1}.\end{aligned}$$

Observație. Fie γ o curbă netedă dată prin ecuațiile parametrice (11.1). Dacă $M(x(t), y(t), z(t)) \in (\gamma)$ cu $t \in [a,b]$ este un punct arbitrar de pe curba γ şi notăm cu $s(t) = L(\overset{\frown}{AM})$, conform teoremei 11.1.1,

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)}\,d\tau.$$

Să observăm că funcția s este crescătoare, derivabilă cu derivata continuă pe [a,b] şi $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}, (\forall) t \in [a,b]$, de unde

$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$, care se mai numeşte şi element de arc.

Vom defini în continuare integrala curbilinie de speța întâi sau în raport cu arcul.

Fie γ o curbă rectificabilă dată prin ecuațiile parametrice (11.1).

Fie funcția $f: D \to R$, unde $D \subset R^3$ astfel încât $(\gamma) \subset D$.

Fie $\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ şi $A_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k)), k = \overline{0,n}$, $A = A_0$, $B = A_n$, punctele corespunzătoare de pe curba γ.

Fie $s_k = L(\overset{\frown}{AA_k}), k = \overline{0,n}$, numită şi coordonata curbilinie a punctului A_k. Să observăm că $s_n = L(\overset{\frown}{AB}) = L(\gamma) = L, s_0 = 0$.

Fie $M_k(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}, k = \overline{1,n}$, unde $\alpha_k = x(\xi_k), \beta_k = y(\xi_k)$, $\gamma_k = z(\xi_k)$, cu $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1,n}$.

Fie $\sigma_k = L(\overset{\frown}{AM_k}), k = \overline{1,n}$, coordonata curbilinie a lui M_k. Astfel un punct oarecare $M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ poate fi precizat fie prin coordonata sa curbilinie σ_k, fie prin coordonatele carteziene $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$.

Evident avem $\sigma_k \in [s_{k-1}, s_k], k = \overline{1,n}$.

Pentru diviziunea $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ a intervalului $[a,b]$ obținem o diviziune $\Delta_s = (0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = L)$ a intervalului $[0, L]$.

Considerăm suma $\sigma_\Delta(f, M_k) = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)(s_k - s_{k-1})$, numită sumă integrală curbilinie a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ_s şi punctelor intermediare M_k (prin $f(M_k)$ înțelegem $f(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$).

Definiția 11.1.4. Funcția f este integrabilă pe γ dacă $(\exists) I \in R$ astfel încât $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall) M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, unde $A_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k)), k = \overline{1,n}$ avem $|\sigma_\Delta(f, M_k) - I| < \varepsilon$.

Observație. Ca şi în cazul integralelor definite (capitolul 7) se arată că numărul real I din definiție, în ipoteza că există, este unic şi prin definiție I se numeşte integrala curbilinie de speța întâi a funcției f pe curba γ şi se notează:

$$I=\int_{\gamma} f(x,y,z)ds \ \left(\text{sau } \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds,\ \int_{\gamma} fds\right)$$

Să observăm că $\int_{\gamma} f(x,y,z)ds=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_{\Delta}(f,M_k)$.

Proprietăți ale integralei curbilinii de speța întâi

Pornind de la proprietățile integralei Riemann, se obțin cu uşurință următoarele proprietăți ale integralei curbilinii de speța întâi.

1. Dacă f şi g sunt integrabile pe γ şi $\alpha,\beta\in R$ atunci $\alpha f+\beta g$ este integrabilă pe γ şi

$$\int_{\gamma}(\alpha f+\beta g)ds=\alpha\int_{\gamma} fds+\beta\int_{\gamma} gds$$

2. Fie $(\gamma)=\overset{\frown}{AB}$ şi $C\in\overset{\frown}{AB}$. Dacă f este integrabilă pe $\overset{\frown}{AC}$ şi pe $\overset{\frown}{CB}$ atunci f este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ şi $\int_{\overset{\frown}{AB}} f\,ds=\int_{\overset{\frown}{AC}} f\,ds+\int_{\overset{\frown}{CB}} f\,ds$.

3. Dacă f este integrabilă pe γ şi $f\ge 0$ atunci $\int_{\gamma} f\,ds\ge 0$.

Consecință. Dacă f, g sunt integrabile pe γ şi $f\le g$ atunci $\int_{\gamma} f\,ds\le\int_{\gamma} g\,ds$.

Vom da în continuare o formulă de calcul al integralelor curbilinii de speța întâi.

Teorema 11.1.2. Fie γ o curbă netedă dată prin ecuațiile parametrice (11.1) şi fie f: D$\to$R, continuă, unde $D\subset R^3$ astfel încât $(\gamma)\subset D$.

Atunci funcția f este integrabilă pe γ şi

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,.$$

Demonstrație. Fie $I = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$,

$\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \Lambda < t_n = b)$, $\xi_k \in [t_{k-1},t_k]$, $k = \overline{1,n}$,

$A_k(x(t_k),y(t_k),z(t_k))$, $k = \overline{0,n}$, $M_k(x(\xi_k),y(\xi_k),z(\xi_k)) \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, $k = \overline{1,n}$,

$s_k = L(\overset{\frown}{AA_k})$.

Avem $\sigma_\Delta(f,M_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k),y(\xi_k),z(\xi_k))(s_k - s_{k-1})$.

Cum funcțiile x', y', z' sunt continue, din teorema de medie $(\exists)\eta_k \in [t_{k-1},t_k]$, $k = \overline{1,n}$ astfel încât

$$s_k - s_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(\zeta)+y'^2(\zeta)+z'^2(\zeta)}\,d\zeta =$$
$$= \sqrt{x'^2(\eta_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\eta_k)}\,(t_k - t_{k-1}).$$

Fie φ: $[a,b]\to R$, $\varphi(t) = f(x(t),y(t),z(t))$, care evident este o funcție continuă. Vom avea

$$\sigma_\Delta(f,M_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\sqrt{x'^2(\eta_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\eta_k)}\,(t_k - t_{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\xi_k)+z'^2(\xi_k)}\,(t_k - t_{k-1}) + \tag{11.7}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\left[\sqrt{x'^2(\eta_k)+y'^2(\eta_k)+z'^2(\eta_k)} - \sqrt{x'^2(\xi_k)+y'^2(\xi_k)+z'^2(\xi_k)}\right](t_k - t_{k-1})$$

Prima sumă din ultimul membru al egalităților (11.7) reprezintă o sumă Riemann corespunzătoare funcției $\varphi\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_k.

Cum funcția $\varphi\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ este continuă, va fi integrabilă pe [a,b] şi atunci, dacă $\Delta_n \in D([a,b])$ este un şir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \to 0$ va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f,\xi_k^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p_n} \varphi(\xi_k^n)\sqrt{x'^2(\xi_k^n)+y'^2(\xi_k^n)+z'^2(\xi_k^n)}\,(t_k^n - t_{k-1}^n) = I\,.$$

Folosind uniform continuitatea funcției $\varphi\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ va rezulta că a doua sumă din ultimul membru al egalităților (11.7) are limita 0 pentru $\|\Delta_n\| \to 0$.

În concluzie, dacă $\Delta_n \in D([a,b])$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, M_k^n) = I$, deci f este integrabilă pe γ şi

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = I = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \qquad \blacksquare$$

Observaţie. În cazul curbelor plane $(\gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ vom avea

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

iar în cazul unei reprezentări explicite (γ): $y = y(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$,

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,.$$

Exemple. 1. Să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,ds, \text{ unde } (\gamma): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, \ t \in [0,\pi].$$

Să observăm că ipotezele teoremei 11.1.2 sunt îndeplinite şi atunci

$$I = \int_0^\pi \frac{1}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^\pi \frac{1}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\mathrm{arctg}\frac{bt}{a}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\mathrm{arctg}\frac{\pi b}{a}.$$

2. Să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma xy\,ds, \text{ unde } (\gamma): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \text{iar } a,b > 0,\ a \ne b.$$

Curba (γ) este un arc de elipsă care se scrie parametric astfel:

$$(\gamma): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{şi atunci:}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t+\frac{a^2+b^2}{2}}\,dt=$$

$$=-\frac{ab}{2(b^2-a^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t+\frac{a^2+b^2}{2}\right)'\left(\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t+\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{ab}{2(b^2-a^2)}\left.\frac{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t+\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left[\left(-\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left(a^3-b^3\right)=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}$$

Aplicații ale integralei curbilinii de speța întâi

1. Lungimea unei curbe rectificabile

În definiția integralei curbilinii de speța întâi, luând f(x,y,z)=1 obținem

$\sigma_\Delta(f,M_k)=\sum_{k=1}^{n}(s_k-s_{k-1})=L(\gamma)$, de unde prin trecere la limită cu $\|\Delta\|\to 0$ obținem $L(\gamma)=\int_\gamma ds$.

2. Aplicații mecanice

Considerăm un fir material de grosime neglijabilă, care este imaginea unei curbe netede γ din R^3. Considerăm firul neomogen, la care densitatea $\mu=\mu(x,y,z)>0$ este o funcție continuă de coordonatele punctului de pe curbă.

Din considerente de mecanică se poate arăta că masa M şi coordonatele centrului de greutate $G(x_G,y_G,z_G)$ sunt date de

$$M=\int_\gamma \mu(x,y,z)ds,\ x_G=\frac{1}{M}\int_\gamma x\mu(x,y,z)ds,$$

$$y_G=\frac{1}{M}\int_\gamma y\mu(x,y,z)ds,\ z_G=\frac{1}{M}\int_\gamma z\mu(x,y,z)ds.$$

Momentele de inerţie ale firului γ faţă de planele de coordonate, axe şi respectiv pol vor fi date de

$$I_{xOy}=\int_\gamma z^2\mu(x,y,z)ds,\ I_{yOz}=\int_\gamma x^2\mu(x,y,z)ds,\ I_{xOz}=\int_\gamma y^2\mu(x,y,z)ds,$$

$$I_{Ox}=\int_\gamma (y^2+z^2)\mu(x,y,z)ds,\ I_{Oy}=\int_\gamma (x^2+z^2)\mu(x,y,z)ds,$$

$$I_{Oz}=\int_\gamma (x^2+y^2)\mu(x,y,z)ds,\ I_O=\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)ds.$$

11.2. Integrale curbilinii de speţa a doua (sau în raport cu coordonatele)

Fie $(\gamma)=\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t),\ t\in[a,b],\\ z=z(t)\end{cases}$ (11.8)

o curbă simplă, rectificabilă, de extremităţi $A(x(a),y(a),z(a))$ şi $B(x(b),y(b),z(b))$.

Fie $\overline{F}:D\to V_3$ o funcţie vectorială de componente P,Q,R: D $\to$ R, unde $D\subset R^3$ astfel încât $(\gamma)\subset D$.

Presupunem că $\overline{F}$ este mărginită pe D, adică P,Q,R sunt mărginite pe D.

Fie $\Delta\in D([a,b])$, $\Delta=(a=t_0<t_1<\Lambda<t_n=b)$ şi punctele corespunzătoare de pe curbă $A_k(x_k,y_k,z_k)$, $k=\overline{0,n}$, A_0 = A, A_n = B, unde $x_k=x(t_k)$, $y_k=y(t_k)$, $z_k=z(t_k)$, $k=\overline{0,n}$.

Fie $M_k(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)\in A_{k-1}A_k$, $k=\overline{1,n}$ unde $\alpha_k=x(\xi_k)$, $\beta_k=y(\xi_k)$, $\gamma_k=z(\xi_k)$, $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$.

Considerăm suma

$$\sigma_\Delta\left(\overline{F}, M_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[P(M_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(M_k)(y_k - y_{k-1}) + R(M_k)(z_k - z_{k-1}) \right],$$

numită sumă integrală curbilinie a funcției $\overline{F}$ corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare M $_k$.

Definiția 11.2.1. Funcția $\overline{F}$ este integrabilă pe curba γ dacă $(\exists) I \in R$ astfel încât $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\Delta \in D([a,b])$, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \Lambda < t_n = b)$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall) M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, unde $A_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k))$, $k = \overline{1,n}$ avem

$$\left| \sigma_\Delta\left(\overline{F}, M_k\right) - I \right| < \varepsilon .$$

Observație. Se arată ca şi în cazul integralei definite (capitolul 7) că numărul real I din definiție, în ipoteză că există, este unic şi prin definiție I se numeşte integrala curbilinie de speța a doua a funcției $\overline{F}$ pe curba γ şi se notează:

$$I = \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \quad \left(\text{sau } \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz\right)$$

Să observăm că $I = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta\left(\overline{F}, M_k\right)$.

Dacă $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$ este vectorul de poziție al punctului curent M (x,y,z) din spațiu şi $d\overline{r} = dx\,\overline{i} + dy\,\overline{j} + dz\,\overline{k}$ atunci $I = \int_\gamma \overline{F}(x,y,z)\,d\overline{r}$ $\left(\text{sau } \int_\gamma \overline{F}\,d\overline{r}\right)$.

Observații. 1. Din punct de vedere fizic I reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $\overline{F}$ de-a lungul arcului $\overset{\frown}{AB}$. Astfel $\int_\gamma \overline{F}(x,y,z)\,d\overline{r}$ se mai numeşte circulația vectorului $\overline{F}$ de-a lungul arcului $\overset{\frown}{AB}$.

2. Dacă curba γ este închisă, adică A = B atunci γ se mai numeşte contur şi integrala se mai notează

$$I = \oint_\gamma \overline{F}(x,y,z)\,d\overline{r} .$$

3. Un punct $M(x(t), y(t), z(t)) \in (\gamma)$ parcurge curba γ într-un sens pe care îl numim direct atunci când t parcurge continuu intervalul [a,b] de la a la b.

Când t parcurge intervalul [a,b] de la b la a, punctul corespunzător M parcurge γ în sens invers.

O curbă γ împreună cu unul din sensurile de parcurgere se numeşte curbă orientată.

Curba γ împreună cu sensul direct de parcurgere se notează cu γ_+ şi în mod asemănător se defineşte γ_-.

Dacă $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ scriem $\gamma_+ = \overset{\frown}{AB}$, $\gamma_- = \overset{\frown}{BA}$.

În plan se consideră de obicei sensul direct cel trigonometric.

Din definiție se observă că, dacă se schimbă sensul de parcurs pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ atunci diferențele $x_k - x_{k-1}$, $y_k - y_{k-1}$, $z_k - z_{k-1}$ îşi schimbă semnul deci:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F}(x, y, z)\, d\bar{r} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \bar{F}(x, y, z)\, d\bar{r}.$$

Alte proprietăți ale integralei curbilinii de speța a doua care se obțin cu uşurință pornind de la proprietățile integralei Riemann sunt date de

Propoziția 11.2.1.

i) Dacă $\bar{F}, \bar{G}$ sunt integrabile pe γ şi α, $\beta \in$ R atunci $\alpha\bar{F} + \beta\bar{G}$ este integrabilă pe γ şi

$$\int_{\gamma} \left(\alpha\bar{F} + \beta\bar{G}\right) d\bar{r} = \alpha \int_{\gamma} \bar{F}\, d\bar{r} + \beta \int_{\gamma} \bar{G}\, d\bar{r};$$

ii) Dacă $C \in \overset{\frown}{AB}$ şi $\bar{F}$ este integrabilă pe arcele $\overset{\frown}{AC}$ şi pe $\overset{\frown}{CB}$ atunci $\bar{F}$ este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ şi

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{\overset{\frown}{AC}} \bar{F}\, d\bar{r} + \int_{\overset{\frown}{CB}} \bar{F}\, d\bar{r}.$$

Vom da în continuare o formulă de calcul pentru integralele curbilinii de speța a doua.

Teorema 11.2.1. Fie γ o curbă netedă dată prin ecuațiile parametrice (11.8) şi fie $\overline{F}: D \to V_3$, $\overline{F} = (P,Q,R)$, continuă, unde $D \subset R^3$ astfel încât $(\gamma) \subset D$.

Atunci funcția $\overline{F}$ este integrabilă pe γ şi

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Demonstrație. Notăm cu I integrala din membrul drept şi fie $\Delta \in D([a,b])$,

$\Delta = (a = t_0 < t_1 < \Lambda < t_n = b), c_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,n}$,

$M_k(x(c_k), y(c_k), z(c_k)) \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, unde $A_k(x_k, y_k, z_k)$,

$x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$, $z_k = z(t_k)$, $k = \overline{0,n}$.

Vom avea

$$\sigma_\Delta(\overline{F}, M_k) = \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(M_k)(y_k - y_{k-1}) + R(M_k)(z_k - z_{k-1})]$$

Cum γ este netedă, funcțiile x, y, z sunt de clasă C^1 pe [a,b] şi din teorema lui Lagrange $(\exists)$ $\xi_k, \eta_k, \tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1,n}$ astfel încât

$$x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$y_k - y_{k-1} = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$z_k - z_{k-1} = z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Obținem astfel

$$\sigma_\Delta(\overline{F}, M_k) = \sum_{k=1}^{n} [P(x(c_k), y(c_k), z(c_k))x'(\xi_k) +$$

$$+ Q(x(c_k), y(c_k), z(c_k))y'(\eta_k) + R(x(c_k), y(c_k), z(c_k))z'(\tau_k)](t_k - t_{k-1})$$

Scriem $\sigma_\Delta(\overline{F}, M_k)$ astfel

$$\sigma_\Delta\left(\bar{F},M_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[P(x(c_k),y(c_k),z(c_k))x'(c_k)+Q(x(c_k),y(c_k),z(c_k))y'(c_k)+\right.$$

$$\left.+R(x(c_k),y(c_k),z(c_k))z'(c_k)\right](t_k-t_{k-1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[P(x(c_k),y(c_k),z(c_k))(x'(\xi_k)-x'(c_k))+\right.$$

$$+Q(x(c_k),y(c_k),z(c_k))(y'(\eta_k)-y'(c_k))+$$

$$\left.+R(x(c_k),y(c_k),z(c_k))(z'(\tau_k)-z'(c_k))\right](t_k-t_{k-1}).$$

şi demonstraţia se continuă în mod asemănător cu demonstraţia teoremei 11.1.2.

■

Exemple. 1. Să se calculeze circulaţia vectorului

$\bar{v}=(2x-y)\bar{i}+z\bar{j}+(x+3z)\bar{k}$ de-a lungul arcului de elice

$$(\gamma):\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=at\end{cases},\ t\in[0,\pi],\ \text{unde } a\in \mathbb{R}^*.$$

Vom avea: $\int_\gamma \bar{v}\,d\bar{r}=\int_\gamma (2x-y)dx+z\,dy+(x+3z)dz=$

$$=\int_0^\pi \left[(2a\cos t-a\sin t)(-a\sin t)+at\,a\cos t+(a\cos t+3a\,t)a\right]dt=$$

$$=a^2\int_0^\pi\left(-2\sin t\cos t+\sin^2 t+t\cos t+\cos t+3t\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(3\pi^2+\pi-4\right).$$

2. Să se calculeze integrala

$I=\int_\gamma \sqrt{1-x^2}dx+x\,dy$, unde (γ): $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, este parcursă în sens direct.

Scriem curba γ sub forma parametrică $(\gamma):\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t,\ t\in[0,\pi]\end{cases}$

Vom avea

$$I=\int_0^\pi\left[\sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)+\cos t(\cos t)\right]dt=$$

$$=\int_0^\pi\left(-\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=\int_0^\pi \cos 2t\,dt=0$$

Integrale curbilinii independente de drum

Fie integrala $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, (11.9)

unde $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ este curbă simplă, netedă, P,Q: D $\to$ R, continue, D $\subset$ R^2, deschisă astfel încât (γ) $\subset$ D.

Ne propunem să găsim condițiile în care integrala (11.9) nu depinde de drum, adică să nu depindă de γ, ci numai de extremitățile A şi B ale curbei.

Teorema 11.2.2. Condiția necesară şi suficientă ca integrala (11.9) să nu depindă de drum în D este ca să existe o funcție F: D $\to$ R, diferențiabilă pe D astfel încât $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,\ (\forall)(x,y) \in D$.

În acest caz expresia diferențială $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ se numeşte diferențială totală exactă iar F primitivă a expresiei diferențiale.

Demonstrație.

Suficiența. Presupunem că există F: D $\to$ R, diferențiabilă pe D astfel încât $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,\ (\forall)(x,y) \in D$.

Fie $(\gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \ t \in [a,b] \end{cases}$, de extremități A($x_1$,$y_2$), B($x_2$,$y_2$),

unde $x_1 = x(a)$, $y_1 = y(a)$, $x_2 = x(b)$, $y_2 = y(b)$.

Vom avea

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t),y(t))dt = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1)$$

Necesitatea. Presupunem că integrala (11.9) este independentă de drum.

Fie A(x_0,y_0) $\in$ D, fixat şi M(x,y) $\in$ D arbitrar.

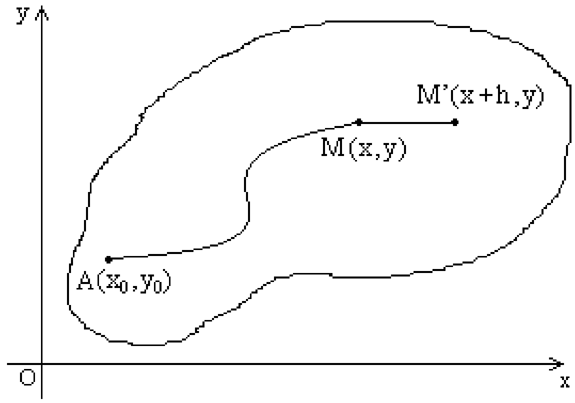

Fig.2

Definim funcția F: D $\to$ R astfel $F(x,y) = \int_{AM} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, $(\forall)(x,y) \in D$.

Fie h$\in$ R cu $|h|$ suficient de mic astfel încât M'(x+h,y)$\in$D (acest lucru este posibil deoarece D este deschisă).

Folosind teorema de medie de la integrala Riemann, există $\theta \in (0,1)$ astfel încât

$$F(x+h,y) - F(x,y) = \int_{AM'} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{AM} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{MM'}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_x^{x+h} P(t,y)\,dt = h\,P(x+\theta h, y).$$

Astfel, pentru h$\neq$0 vom avea

$\dfrac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} = P(x+\theta h, y) \to P(x,y)$, pentru h$\to$0, deci $(\exists)\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$

Analog $(\exists)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ şi atunci F este diferențiabilă în (x,y) şi dF(x,y) = P(x,y)dx+Q(x,y)dy. ■

Observație. O integrală independentă de drum $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ se mai notează şi astfel $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, unde A($x_1$,$y_1$), B($x_2$,$y_2$) sunt extremitățile curbei.

Consecințe:

1. Dacă integrala $\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este independentă de drum atunci $(\exists)$ F: D $\to$R, diferențiabilă pe D astfel încât $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, $(\forall)(x,y) \in D$, adică $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, în D.

În plus, dacă P, Q $\in C^1(D)$ atunci F$\in C^2(D)$ şi cum $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, folosind teorema lui Schwarz rezultă

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (11.10)$$

Dacă D este un interval bidimensional (adică D=I$\times$J, unde I,J$\subset$R sunt intervale) sau mai general, D domeniu simplu conex atunci (11.10) reprezintă o condiție necesară şi suficientă ca integrala (11.9) şi să fie independentă de drum.

2. Dacă integrala (11.9) este independentă de drum şi γ este o curbă simplă, netedă, închisă atunci $\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Într-adevăr, fie A,B$\in(\gamma)$ şi m, n ca în figură:

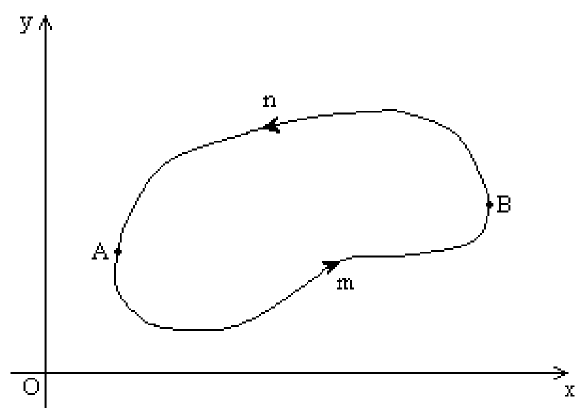

Fig.3

Vom avea:

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{AmB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{BnA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AmB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{\overset{\frown}{AnB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Observație. Se arată că, dacă integrala (11.9) este nulă pe orice curbă închisă situată în D atunci ea este independentă de drum.

Calculul integralelor curbilinii independente de drum

Presupunem că integrala $I = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este independentă de drum, unde $(\gamma) = \overset{\frown}{AB}$, A($x_1$,$y_1$), B($x_2$,$y_2$), P,Q: D $\to$ R, continue, D $\subset$ R^2, (γ) $\subset$ D.

Presupunem că $[AC], [CB] \subset D$, unde C are coordonatele C(x_2,y_1).

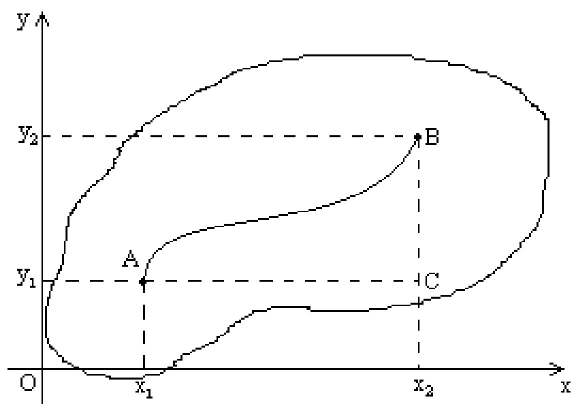

Fig. 4

Vom avea $\overset{\frown}{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = y_1 \end{cases}$, $t \in [x_1, x_2]$, $\overset{\frown}{CB}: \begin{cases} x = x_2 \\ y = t \end{cases}$, $t \in [y_1, y_2]$ şi atunci

$$I = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P(t, y_1)dt + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, t)dt, \qquad \text{deci}$$

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(t,y_1)dt + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,t)dt.$$

Rezultă că o primitivă a expresiei diferențiale $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$, unde $M_0(x_0,y_0) \in D$ este un punct fixat.

Observație. Rezultatele obținute până acum în cazul bidimensional se extind în cazul tridimensional astfel:

Dacă P,Q,R $\in$ $C^1(D)$, unde $D \subset R^3$ este un domeniu simplu conex, $(\gamma) \subset D$, curbă netedă, simplă atunci o condiție necesară şi suficientă ca integrala

$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ să fie independentă de drum este ca

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \text{ în D.}$$

Exemplu. Fie γ o curbă plană simplă, netedă. Să se arate că integrala $\int_\gamma (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy$ este independentă de drum şi să se determine o primitivă a expresiei de sub integrală.

Avem $P(x,y)= 2xy+y^2$, $Q(x,y)= x^2+2xy$, $P,Q \in C^1(R^2)$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2y$, deci integrala dată este independentă de drum şi atunci există $F: R^2 \to R$, diferențiabilă cu $dF(x,y) = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy$.

Funcția F se determină prin

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

unde $(x_0,y_0) \in R^2$ este un punct fixat. Luând $(x_0,y_0)=(0,0)$ obținem:

$$F(x,y) = \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y (x^2 + 2xt)dt = x^2y + xy^2$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int_\gamma x\,ds$, unde $(\gamma): y = \ln x,\ x \in [1,2]$;

b) $\int_\gamma x^2 y\,ds$, unde $(\gamma): |x| + |y| = 1$;

c) $\int_\gamma xy\,ds$, unde $(\gamma): \begin{cases} x = |t| \\ y = \sqrt{1-t^2}, \ t \in [-1,1] \end{cases}$;

d) $\int_\gamma xyz\,ds$, unde $(\gamma) = [AB], A(2,1,-1), B(3,0,2)$;

e) $\int_\gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, unde $(\gamma): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ x = y$.

2. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al firului material omogen

$$(\gamma): \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ x = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0,2\pi], \ a > 0.$$

3. Să se calculeze

a) $\oint_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, unde $(\gamma): x^2 + y^2 = a^2$ şi este parcursă în sens direct ;

b) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, unde $(\gamma): \begin{cases} x = a\cos b \cos t \\ y = a \cos b \sin t, \ t \in [0,2\pi]; \\ z = a \sin b \end{cases}$

c) $\oint_\gamma (x-y)dx - y\,dy$, unde γ este frontiera mulțimii din R^2 mărginită de curbele de ecuații $y = x^2, \ y^2 = x$ şi parcursă în sens invers acelor de ceasornic ;

d) $\oint_\gamma x\,dy + y\,dz + z\,dx$, unde γ este curba obținută prin intersecția suprafeței sferice de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planele de coordonate, situată în primul octant şi parcursă în sens direct.

4. Fie P,Q: $R^2 \to R$, $P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, $Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2}$.

Să se arate că $(\exists)F: R^2 \to R$, diferențiabilă pe R^2 astfel încât $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \ (\forall)(x,y) \in R^2$ şi să se determine F.

5. Să se calculeze $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{2xy\,dx + \left(1-x^2\right)dy}{\left(1-x^2\right)^2 + y^2}$ şi să se determine o primitivă a expresiei de sub integrală.

6. Fie f: D $\to$ R, f$\in C^2(D)$, unde D$\subset R^2$ şi fie $\bar{v} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$.

Să se arate că, dacă γ este o curbă simplă netedă astfel încât $(\gamma) \subset D$ atunci $\int_\gamma \bar{v}\,d\bar{r} = 0$.

7. Fie γ o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni ce limitează un domeniu D. Atunci D are arie şi Aria D $= \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$.

CAPITOLUL 12

INTEGRALE MULTIPLE

12.1. Integrale duble

Fie $f : D \to R$ o funcție mărginită, unde $D \subset R^2$ este un domeniu compact cu frontiera γ= FrD, o curbă pe care o considerăm simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Dacă presupunem $f \geq 0$ atunci graficul său

$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D,\ z = f(xy)\}$ este o suprafață Σ situată deasupra planului x0y şi proiecția ortogonală a ei pe planul x0y este domeniul D. Ne propunem să determinăm volumul cilindrului care se sprijină pe D, are generatoarele paralele cu axa 0z şi este limitat superior de suprafața Σ.

Definiția 12.1.1. Fie $A \subset R^2$. Definim $d(A) = \sup\limits_{P_1,P_2 \in A} d(P_1,P_2)$, numit şi diametrul mulțimii A, unde $d(P_1,P_2)$ reprezintă distanța dintre punctele P_1 şi P_2.

Definița 12.1.2. Spunem că $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ este o diviziune a domeniului D dacă $D_1, D_2, \dots, D_n$ sunt domenii compacte fără puncte interioare comune astfel încât $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$ şi $\gamma_k = FrD_k$, $k = \overline{1,n}$, este o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Vom nota cu $\mathcal{D}(D)$ mulțimea tuturor diviziunilor lui D şi pentru $\Delta \in \mathcal{D}(D)$,

$\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$, vom nota cu $\|\Delta\| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} d(D_k)$, norma diviziunii Δ.

Fie $P_k(\xi_k,\eta_k)\in D_k, k=\overline{1,n}$ şi $\sigma_\Delta(f,P_k)=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\text{aria}D_k$, numită sumă integrală dublă a funcției f, corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor P_k.

Să observăm că D_k are arie, cum $\gamma_k = \text{Fr}D_k$ este o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Fie $m_k = \inf_{D_k} f$, $M_k = \sup_{D_k} f$, $k=\overline{1,n}$ şi

$s_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\text{aria}\,D_k$, $S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\text{aria}\,D_k$, sumele Darboux inferioară, şi respectiv superioară a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ.

Să observăm că $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f,P_k) \le S_\Delta(f)$, $(\forall)\Delta\in \mathcal{D}(D)$, $\Delta=(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ şi $(\forall)\, P_k\,(\xi_k,\eta_k)\in D_k, k=\overline{1,n}$.

Dacă $f \ge 0$ suma $\sigma_\Delta(f, P_k)$ reprezintă volumul corpului obținut prin reuniunea a n cilindri având ca baze pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$, generatoarele paralele cu axa Oz şi înălțimile egale, respectiv, cu $f(P_1)$, $f(P_2)$, …,$f(P_n)$.

Volumul astfel obținut aproximează volumul cilindrului din introducere.

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$, $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă şi respectiv prin adaus volumul cilindrului.

Definiția 12.1.3. Funcția f este integrabilă pe D dacă $(\exists)\, I\in R$ cu proprietatea $\forall\, \varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ astfel încat $(\forall)\Delta\in \mathcal{D}(D)$, $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)$, cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi $(\forall)\, P_k(\xi_k, \eta_k)\in D_k$, $k=\overline{1,n}$ avem $|\sigma_\Delta(f,P_k)-I|<\varepsilon$.

Ca şi în cazul integralei definite se arată că numărul real I din definiție, în ipoteza că există, este unic şi prin definiție I se numeşte integrala dublă a funcției f pe D şi se notează $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ $\left(\text{sau} \iint_D f\,dx\,dy\right)$.

Să observăm că $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_\Delta(f,P_k)$.

Observație. Din definiție rezultă că funcția f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă $(\forall)\Delta_n\in \mathcal{D}(D), \Delta_n=(D_1^n, D_2^n,\ldots,D_{p_n}^n)$ cu $\|\Delta_n\|\to 0$ şi

$(\forall)\ P_k^n(\xi_k^n,\eta_k^n)\in D_k^n,\ k=\overline{1,p_n}$ şirurile $\left(\sigma_{\Delta_n}(f,P_k^n)\right)$ sunt convergente către o aceeaşi limită.

Observație. Dacă f este integrabilă pe D şi f ≥ 0 atunci $\int\int f(x,y)dx\,dy$ reprezintă volumul cilindrului care se sprijină pe D, are generatoarele paralele cu axa Oz şi este limitat superior de suprafața de ecuație z = f(x,y).

Criterii de integrabilitate

Teorema 12.1.1. (Criteriul lui Darboux). Fie $f:D\subset R^2\to R$, mărginită. Atunci funcția f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)\ \Delta\in \mathcal{D}(D)$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că f este integrabilă pe D şi fie $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ şi ε > 0.

Conform definiției $(\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $(\forall)\Delta\in\ \mathcal{D}(D)$, $\Delta = (D_1,D_2,\ldots,D_n)$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi $(\forall)P_k(\xi_k,\eta_k)\in D_k, k=\overline{1,n}$ avem $\left|\sigma_\Delta(f,P_k)-I\right|<\frac{\varepsilon}{3}$, sau echivalent

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma_\Delta(f,P_k)<I+\frac{\varepsilon}{3} \tag{12.1}$$

Trecând în inegalitățile (12.1) la infimum şi apoi la supremum după $P_k\in D_k$, $k\in\overline{1,n}$ şi folosind următoarele relații dintre sumele Riemann şi Darboux:

$s_\Delta(f) = \inf\left\{\sigma_\Delta(f,P_k):P_k\in D_k,k=\overline{1,n}\right\}$, $S_\Delta(f) = \sup\left\{\sigma_\Delta(f,P_k):P_k\in D_k,k=\overline{1,n}\right\}$, obținem

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leq s_\Delta(f)\leq I+\frac{\varepsilon}{3} \text{ şi respectiv } I-\frac{\varepsilon}{3}\leq S_\Delta(f)\leq I+\frac{\varepsilon}{3}, \text{ de unde}$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f)\leq\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon,\ (\forall)\Delta\in\ \mathcal{D}(D) \text{ cu } \|\Delta\|<\delta_\varepsilon.$$

Suficiența. Fie $\underline{I}=\sup\{s_\Delta(f):\Delta\in\mathcal{D}(D)\}$, $\overline{I}=\{\inf S_\Delta(f):\Delta\in\mathcal{D}(D)\}$. Evident avem $s_\Delta(f)\leq\underline{I}\leq\overline{I}\leq S_\Delta(f)$, $(\forall)\Delta\in\ \mathcal{D}(D)$. (12.2)

Fie ε > 0. Conform ipotezei $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\Delta\in$ D(D) cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ şi folosind (12.2) rezultă $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, adică $0 \le \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$.

Cum ε > 0 este arbitrar rezultă $\overline{I} = \underline{I}$. Fie $I = \overline{I} = \underline{I}$. Avem $s_\Delta(f) \le I \le S_\Delta(f)$ şi $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, P_k) \le S_\Delta(f)$, $(\forall)\Delta\in$ D(D), $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ şi $P_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k, k = \overline{1,n}$, de unde $s_\Delta(f) - S_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, P_k) - I \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$, sau $|\sigma_\Delta(f, P_k) - I| \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$.

Dacă $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, rezultă $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ şi atunci $|\sigma_\Delta(f, P_k) - I| < \varepsilon$, $(\forall)P_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k, k = \overline{1,n}$, adică funcția f este integrabilă pe D şi $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = I$.

■

Observație. $\underline{I}$ se numeşte integrala Darboux inferioară iar $\overline{I}$ integrala Darboux superioară. Din teorema 12.1.1 rezultă că o functie mărginită $f : D \subset R^2 \to R$ este integrabilă pe D dacă şi numai dacă integralele Darboux corespunzătoare, $\underline{I}$ şi $\overline{I}$, sunt egale. Valoarea comună a celor două integrale $\overline{I} = \underline{I} = I$ se numeşte integrala lui f pe D.

Teorema 12.1.2. Orice funcție $f : D \to R$, continuă pe compactul $D \subset R^2$, este integrabilă pe D.

Demonstrație. Fie ε > 0. Cum f este continuă pe compactul D, din teorema lui Cantor este uniform continuă şi atunci $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$(\forall)(x', y'), (x'', y'') \in D$ cu $\|(x', y') - (x'', y'')\| = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta_\varepsilon$, avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\, D}.$$

Fie $\Delta\in$ D(D), $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Cum f este continuă şi D_k compactă, $k = \overline{1,n}$, $(\exists)(\xi_k', \eta_k') \in D_k$, $(\xi_k'', \eta_k'') \in D_k$, $k = \overline{1,n}$ astfel încât

$$m_k = \inf_{D_k} f = f(\xi_k', \eta_k'),\ M_k = \sup_{D_k} f = f(\xi_k'', \eta_k''),\ k = \overline{1,n}.$$

Deoarece $\left\| \left(\xi_k^{'}, \eta_k^{'}\right) - \left(\xi_k^{''}, \eta_k^{''}\right) \right\| \leq d\left(D_k\right) \leq \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $(\forall)\, k = \overline{1,n}$ va rezulta că $\left| f\left(\xi_k^{'}, \eta_k^{'}\right) - f\left(\xi_k^{''}, \eta_k^{''}\right) \right| < \dfrac{\varepsilon}{\text{aria}\, D}$, şi atunci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k - m_k\right) \text{aria}\, D_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\xi_k^{''}, \eta_k^{''}\right) - f\left(\xi_k^{'}, \eta_k^{'}\right) \right) \text{aria}\, D_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\text{aria}\, D} \text{aria}\, D_k = \varepsilon, \text{ deci}$$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ şi conform teoremei 12.1.1 funcția f este integrabilă pe D. ■

Proprietăți ale integralei duble

Folosind definiția integrabilității în cazul integralelor duble şi raționând analog ca la integrala definită se pot demonstra următoarele proprietăți:

1. Dacă f,g sunt integrabile pe D şi $\alpha, \beta \in R$ atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi $\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$

(proprietatea de liniaritate).

2. Dacă D = $D_1 \cap D_2$ unde D_1, D_2 sunt domenii compacte fără puncte interioare comune şi f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2 atunci f este integrabilă pe D şi $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$

(proprietatea de aditivitate).

3. Dacă f este integrabilă pe D şi $f \geq 0$ atunci

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq 0.$$

4. Dacă f şi g sunt integrabile pe D şi $f \leq g$ atunci

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy \quad \text{(proprietatea de monotonie).}$$

5. Dacă f este integrabilă pe D atunci $|f|$ este integrabilă pe D şi

$$\left| \int\!\!\int_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \int\!\!\int_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

6. Dacă f este integrabilă pe D, $m = \inf_D f$, $M = \sup_D f$ atunci

$$m \text{ aria} D \le \iint_D f(x,y)dx\,dy \le M \text{ aria} D.$$

7. Dacă D este un domeniu compact din R^2 cu (γ) = FrD, curbă simplă, netedă, sau netedă pe porțiuni atunci

$$\text{aria } D = \iint_D dx\,dy\,.$$

8. Dacă f este continuă pe D atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta) \text{ aria } D \text{ (formula de medie).}$$

Calculul integralei duble

Considerăm mai întâi cazul în care D este un interval bidimensional, adică D = I x J, unde $I = [a,b]$, $J = [c,d]$.

Teorema 12.1.3. Fie $f:[a,b]\times[c,d] \to R$ mărginită şi integrabilă pe $[a,b]\times[c,d]$ astfel încât

i) $(\forall) x \in [a,b]$ există integrala F(x) = $\int_c^d f(x,y)dy$;

ii) F este integrabilă pe [a,b].

Atunci $\iint_D f(x,y)dx\,dx = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$

Demonstrație. Fie $\Delta' \in \mathcal{D}$ ([a,b]), $\Delta' = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ şi

$\Delta'' \in \mathcal{D}$ ([c,d]), Δ'' = (c = $y_0 < y_1 < ... < y_m$ = d).

Cu ajutorul diviziunilor Δ' şi Δ'' definim o diviziune Δ a intervalului bidimensional D = [a,b] x [c,d] în intervale bidimensionale de forma:

$D_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

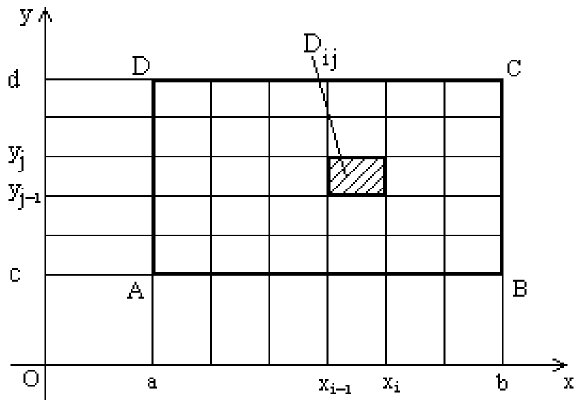

Fig.1

Fie $m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f$, $M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

Vom avea $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \text{aria}\, D_{ij}$, $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} \text{aria}\, D_{ij}$.

Dacă $(x,y) \in D_{ij}$ atunci $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$, de unde

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \qquad (12.3)$$

Sumând în (12.3) după $j = \overline{1,m}$ obținem

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(x,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Cum funcția F este integrabilă pe [a,b], este integrabilă pe orice compact $[x_{i-1},x_i]$, $i = \overline{1,n}$, şi deci vom avea

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Sumând după $i = \overline{1,n}$ obținem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \text{aria}\, D_{ij} \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} \text{aria}\, D_{ij} \text{ ,adică}$$

$$s_\Delta(f) \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le S_\Delta(f).$$

Cum f este integrabilă pe D rezultă că

$$\underline{I} = \bar{I} = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx, \text{ deci } \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \text{ şi}$$

demonstrația este încheiată. ■

Vom da în continuare o formulă de calcul al integralelor duble pentru domenii simple în raport cu una din axe.

Un domeniu $D \subset R^2$ se numeşte simplu în raport cu axa Oy dacă este definit de inegalitățile

$$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$$

unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ sunt funcții continue.

Cu alte cuvinte un domeniu $D \subset R^2$ este simplu în raport cu axa Oy dacă orice paralelă la axa Oy dusă printr-un punct interior din domeniul D intersectează frontiera domeniului în două puncte.

Analog, un domeniu compact $D \subset R^2$ este simplu în raport cu axa Ox dacă este definit de inegalitățile

$$D:\begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases}$$

unde $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to R$ sunt funcții continue.

Teorema 12.1.4. Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact simplu în raport cu axa Oy, adică

$$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases} \tag{12.4}$$

unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ sunt continue.

Fie $f : D \to R$, mărginită şi integrabilă pe D astfel încât

i) $(\forall) x \in [a,b]$ există integrala $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$;

ii) F este integrabilă pe [a,b].

Atunci $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$

Demonstrație. Fie $c = \inf\limits_{[a,b]} \varphi_1$, $d = \sup\limits_{[a,b]} \varphi_2$ şi $D_0 = [a,b] \times [c,d]$. Evident avem $D \subset D_0$ (fig. 2).

Fie funcția $\bar{f} : D_0 \to R$, $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \text{ daca } (x,y) \in D \\ 0, \text{ daca } (x,y) \in D_0 \setminus D. \end{cases}$

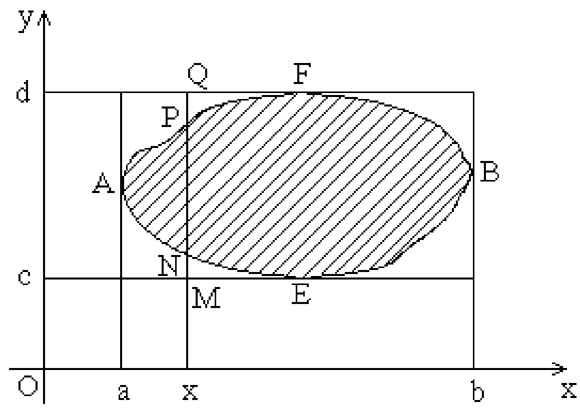

Fig.2

Funcția $\bar{f}$ este integrabilă pe D_0, deoarece f este integrabilă pe D şi $\bar{f} = 0$ pe $D_0 \setminus D$.

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble va rezulta că

$$\iint_{D_0} \bar{f}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} \bar{f}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (12.5)$$

Din teorema 12.1.3 rezultă că

$$\iint_{D_0} \bar{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \bar{f}(x,y)\,dy \right) dx \qquad (12.6)$$

Să observăm că, pentru x∈[a,b], fixat avem

$$\int_c^d \bar{f}(x,y)\,dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \bar{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \left(\text{deoarece } \bar{f}(x,y) = 0 \text{ pentru } (x,y) \in D_0 \setminus D\right). \qquad (12.7)$$

Conform ipotezei ultima integrală din (12.6) există pentru (∀) x∈[a,b].

Cum F este integrabilă pe [a,b], din (12.5), (12.6) şi (12.7) rezultă că $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ şi demonstrația este încheiată. ■

Observații. 1) În particular, dacă f este continuă pe domeniul compact D definit de (12.4) rezultă că f este integrabilă pe D şi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2) Analog, dacă D este simplu în raport cu axa 0x, adică

$$D:\begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases}$$

unde $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to R$ sunt continue şi f : D→R este continuă, atunci f este integrabilă pe D şi $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$.

3) De obicei se scrie

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \text{ şi}$$

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dy .$$

Exemple. 1. Să se calculeze integrala

$I = \iint\limits_D \sqrt{x}(1 - xy)\,dx\,dy$, unde D = [0,1] x [0,2].

Funcția $f(x,y) = \sqrt{x}(1 - xy)$ este continuă pe D, deci integrabilă şi conform teoremei 12.1.3 vom avea:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{x}(1 - xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x}y - x\sqrt{x}\,\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dx = \int_0^1 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

2. Să se calculeze integrala

$I = \iint\limits_D (x - 3y)\,dx\,dy$, unde D este domeniul plan limitat de curbele de ecuații $y = x^2$, $y^2 = x$.

Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe.

Punctele de intersecție dintre cele două parabole sunt O(0, 0) şi A(1, 1).

Scriem domeniul D astfel $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

şi conform teoremei 12.1.4 vom avea:

$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x-3y)dy\right)dx=\int_0^1\left(xy-3\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(x\sqrt{x}-3\frac{x}{2}-x^3+3\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{5}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=-\frac{3}{10}.$$

Dacă îl privim pe D ca domeniu simplu în raport cu axa 0x, adică

$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y^2\le x\le\sqrt{y}\end{cases},\ \text{atunci}$$

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x-3y)dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-3yx\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\left(\frac{y}{2}-3y\sqrt{y}-\frac{y^4}{2}+3y^3\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}-3\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\frac{y^5}{5}+3\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{3}{10}.$$

3. Să se transforme integrala dublă $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ în integrale iterate,

unde $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 9,\ x^2+\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x\ge 0\right\}$.

Domeniul D este mărginit de cercul cu centrul în origine, de rază 3 şi elipsa cu centrul în origine de semiaxe 1 şi 3, situată în semiplanul $x\ge 0$ (fig. 3).

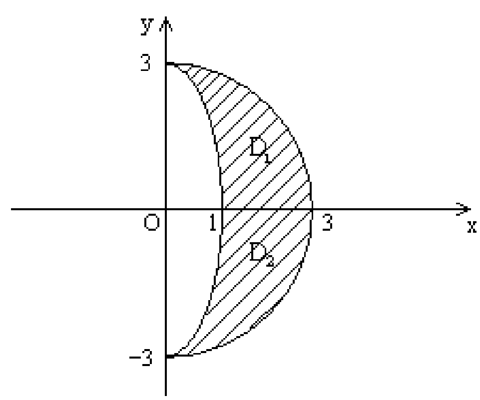

Fig.3

Să observăm că domeniul D nu este simplu în raport cu axa Oy. Pentru a aplica formula de calcul al integralelor duble pe domenii simple în raport cu axa Oy vom descompune domeniul D în domeniile D_1 şi D_2 prin dreapta y=0.

Vom avea $I = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = I_1 + I_2$.

Pentru calculul lui I_1 ținem seama că a = 0, b = 3,

$$\varphi_1(x) = 3\sqrt{1-x^2},\ \text{pentru}\ x \in [0,1]$$

şi $\varphi_1(x) = 0$ pentru $x \in [1,3]$, iar $\varphi_2(x) = \sqrt{9-x^2}$, pentru $x \in [0,3]$. Vom avea deci

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_{3\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Similar

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-3\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

În concluzie

$$I = \int_0^1 dx \int_{3\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy +$$
$$+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-3\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Să observăm că D poate fi privit ca domeniu simplu în raport cu axa Ox, deci poate fi scris astfel

$$D : \begin{cases} -3 \le y \le 3 \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2} \end{cases},\ \text{şi atunci}$$

$$I = \int_{-3}^{3} dy \int_{\frac{1}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Teorema 12.1.5. (formula lui Green). Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact mărginit de curba $\gamma = \mathrm{Fr}\, D$, presupusă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Fie $P, Q : D \to R,\ P, Q \in C^1(D)$. Atunci

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

unde sensul de parcurs pe curba γ este cel direct.

Demonstrație. Vom da o demonstrație pentru cazul în care domeniul D este simplu în raport cu ambele axe.

Pentru cazul general se pot consulta lucrările [8] sau [14].

Fie $D : \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$, unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ sunt continue, deci D este simplu în raport cu axa Oy.

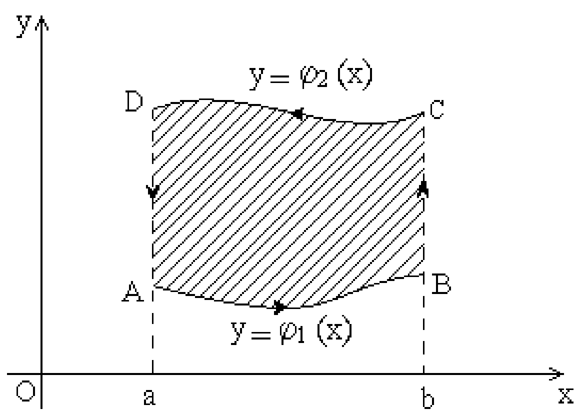

Fig.4

Fie A(a, φ_1(a)), B(b, φ_1(b)), C(b, φ_2(b)), D(a, φ_2(a)).

Vom avea $(\gamma) = \overset{\frown}{AB} \cup [BC] \cup \overset{\frown}{CD} \cup [DA]$ unde:

$$\overset{\frown}{AB} : y = \varphi_1(x), x \in [a,b] \ ,$$

$$[BC] : \begin{cases} x = b \\ y = t, t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)], \end{cases}$$

$$\overset{\frown}{CD} : y = \varphi_2(x),\ x \in [a,b],$$

$$[DA] : \begin{cases} x = a \\ y = t, t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]. \end{cases}$$

Ținând seama de modul de calcul al integralei curbilinii de speța a doua şi de sensul de parcurs pe fiecare arc de curbă obținem:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} P(x,y)dx &= \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + \int_{[BC]} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{CD}} P(x,y)dx + \int_{[DA]} P(x,y)dx = \\ &= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx = \\ &= \int_a^b [P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))]dx \end{aligned} \tag{12.8}$$

(am ținut cont că integralele pe segmentele [BC] şi [DA] sunt egale cu 0 deoarece x este constant pe aceste segmente).

Ținând cont de formula de calcul al unei integrale duble pe un domeniu simplu obținem:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= -\int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx \end{aligned} \tag{12.9}$$

Din (12.8) şi (12.9) rezultă că

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{12.10}$$

Analog obținem
$$\oint_{\gamma} Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \tag{12.11}$$

Din (12.10) şi (12.11), prin adunare, se obține formula lui Green. ■

Aplicație. Luând $P(x,y) = -\frac{y}{2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{2}$ obținem:

$\oint_{\gamma} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \iint_D (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})dxdy = \iint_D dxdy = \text{aria}\, D$, deci aria unui domeniu compact D limitat de o curbă γ simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni este aria $D = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy - ydx$, unde sensul pe curbă este cel direct.

Schimbarea de variabile în integrala dublă

Considerăm integrala dublă $I = \iint_D f(x,y)dxdy$, unde f : D $\to$ R este o funcție continuă, D $\subset$ R^2 un domeniu compact mărginit de o curbă γ presupusă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Considerăm transformarea regulată

$$(T): \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D' \subset R^2, \text{ adică} \qquad (12.12)$$

φ, $\psi \in C^1(D')$, $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0, (\forall)(u,v) \in D'$.

Prin această transformare domeniul D' mărginit de o curbă γ' trece în domeniul D mărginit de curba γ.

Se arată că o transformare regulată este biunivocă, adică fiecărui punct (x,y)$\in$D îi corespunde un unic punct (u,v)$\in$D' şi reciproc; mai mult, prin această transformare D' este un domeniu compact, iar frontiera sa γ' = FrD' este o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni (vezi [7]).

Se poate deomonstra că, dacă $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} > 0, (\forall)(u,v) \in D'$, atunci transformarea (T) este directă, adică, dacă un punct M'(u,v)$\in$(γ') se deplasează în sens direct atunci şi punctul corespunzător M(x,y)$\in$(γ), unde x = φ(u,v), y = ψ(u,v) se deplasează tot în sens direct.

Ne propunem şi calculăm aria domeniului D prin transformarea (T) în ipoteza că această transformare este regulată şi directă, iar funcțiile φ şi ψ admit derivate parțiale mixte de ordinul doi continue pe D'.

Luând în formula lui Green P(x,y) = 0, Q(x,y) = x, obținem $\oint_\gamma xdy = \iint_D dxdy$, unde sensul pe curba γ este cel direct.

Obținem astfel că $\text{Aria}\, D = \oint_\gamma xdy$.

Efectuând schimbarea de variabile dată de (12.12) rezultă:

$$\text{Aria}\,D=\oint_{\gamma}x\,dy=\oint_{\gamma'}\varphi(u,v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right]=\oint_{\gamma'}P(u,v)du+Q(u,v)dv\ ,$$

unde $P(u,v)=\varphi(u,v)\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ şi $Q(u,v)=\varphi(u,v)\dfrac{\partial\psi}{\partial v}$.

Aplicând formula lui Green pentru ultima integrală obținem:

$$\oint_{\gamma'}P(u,v)du+Q(u,v)dv=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)dudv\ .$$

Ținând cont de teorema lui Schwarz vom avea

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\ .$$

În concluzie, $\text{Aria}\,D=\displaystyle\iint_{D'}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}dudv$.

Observație. Dacă $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}<0,\ (\forall)(u,v)\in D'$ atunci γ' este parcursă în sens invers şi analog obținem

$$\text{Aria}\,D=-\iint_{D'}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}dudv\ .$$

În general, dacă (T) este o transformare regulată se obține

$$\text{Aria}\,D=\iint_{D'}\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|dudv\ . \qquad (12.13)$$

Teorema 12.1.6. Fie în planul uO'v un domeniu compact D' cu frontiera γ' o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni şi

$(T):\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{cases}$, $(u,v)\in D'$, o transformare regulată de la planul uO'v la planul xOy astfel încât funcțiile φ şi ψ admit derivate parțiale mixte de ordinul doi continue pe D'.

Dacă D = T(D’), γ = T(γ’) şi f : D$\rightarrow$ R este o funcție continuă atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| dudv\,. \qquad (12.14)$$

Demonstrație. Fie Δ’ = (D’$_1$, D’$_2$, …, D’$_n$) o diviziune a compactului D’. Prin transformarea regulată (T) fiecărui domeniu D’$_k$, $k=\overline{1,n}$ îi corespunde un domeniu $D_k \subset D$. Obținem astfel o diviziune Δ = (D_1, D_2, …, D_n) a domeniului D.

Din (12.13) vom avea $\text{Aria}\, D_k = \iint_{D_k}\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| dudv$, $k=\overline{1,n}$ şi din teorema de medie rezultă că pentru fiecare $k=\overline{1,n}$ există un punct (u_k, v_k)$\in$ D’$_k$ astfel încât

$$\text{Aria}\, D_k = \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|(u_k,v_k)\,\text{aria}\, D'_k\,.$$

Fie $\xi_k = \varphi(u_k,v_k)$, $\eta_k = \psi(u_k,v_k)$, $k=\overline{1,n}$ şi evident $M_k(\xi_k,\eta_k)\in D_k$. Vom avea:

$$\sigma_\Delta(f,M_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\,\text{aria}\, D_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k,v_k),\psi(u_k,v_k))\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|(u_k,v_k)\text{aria}\, D'_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F(u_k,v_k)\,\text{aria}\, D'_k = \sigma_{\Delta'}(F,M'_k), \qquad (12.15)$$

unde $F(u,v) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|$, $M'_k\,(u_k,v_k)$, $k=\overline{1,n}$.

Rezultă că orice sumă Riemann relativ la funcția F, diviziunea Δ’ şi punctele intermediare M’$_k$ este egală cu o sumă Riemann relativ la funcția f, diviziunea Δ şi punctele intermediare M_k.

Din existența celor două integrale şi prin trecere la limită în relația (12.15) obținem (12.14). ■

Observație. În cazul schimbării în coordonate polare, adică $(T): \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho\in[0,R]$, $\theta\in[0,2\pi]$, rezultă $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$ şi atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta\,.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(4+x^2+y^2)^3}$, unde $D: x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$.

Efectuând schimbarea de variabile $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $\rho\in[0,1]$ obținem

$$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho d\rho}{(4+\rho^2)^3}=-\pi\cdot\frac{1}{4}(4+\rho^2)^{-2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{25}\right)=\frac{9\pi}{1600}.$$

Aplicații ale integralei duble

1. Calculul volumelor şi ariilor

Dacă $f : D \subset R^2 \to R$ este o funcție continuă şi pozitivă atunci integrala $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul cilindrului care se sprijină pe D, are generatoarele paralele cu axa Oz şi este limitat superior de suprafața de ecuație $z = f(x,y)$.

Dacă $f(x,y) = 1$, $(\forall)$ $(x,y)\in D$ atunci integrala $\iint\limits_D dxdy$ reprezintă aria bazei cilindrului, adică

Aria D = $\iint\limits_D dxdy$

2. Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane

Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact care este imaginea unei plăci plane la care densitatea $\rho = \rho(x,y) > 0$ este o funcție continuă de coordonatele punctului din domeniu.

Din considerente de mecanică se poate arăta că masa M şi coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ sunt date de

$$M=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy,\quad x_G=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy,\quad y_G=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Dacă placa este omogenă (ρ = const > 0) atunci

$$x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{\text{aria} D}, \quad y_G = \frac{\iint_D y dx dy}{\text{aria} D}.$$

3. Momentele de inerție ale unei plăci plane

Momentele de inerție ale plăcii plane D față de axe şi respectiv pol sunt date de

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \rho(x,y) dx dy, \ I_{Oy} = \iint_D x^2 \rho(x,y) dx dy \text{ şi respectiv}$$

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dx dy.$$

12.2. Integrale de suprafață

Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact.

Definiția 12.2.1. Se numeşte pânză parametrizată sau suprafață parametrizată în spațiul R^3 orice funcție continuă $\Sigma : D \to R^3$,

$$\Sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Vom nota cu $(\Sigma) = \text{Im } \Sigma = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in R^3 : (u,v) \in D\}$, imaginea suprafeței Σ.

Ecuațiile $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale suprafeței Σ şi scriem:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{12.16}$$

Dacă $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este o bază ortonormată în reperul cartezian Oxyz atunci suprafața Σ poate fi dată şi astfel:

$$(\Sigma) \quad : \bar{r} = \bar{r}(u,v), \ (u,v) \in D \tag{12.17}$$

unde $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$, numită şi ecuația vectorială parametrică a suprafeței Σ.

În ipotezele în care pot fi eliminați parametrii u şi v din ecuațiile (12.16) obținem

$$(\Sigma) : F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in V \subset R^3, \quad \text{forma implicită.} \tag{12.18}$$

Dacă pe V sunt îndeplinite ipotezele teoremei funcțiilor implicite, suprafața Σ se scrie echivalent

$$(\Sigma) : z = z(x,y),\ (x,y) \in D_0 \subset R^2, \quad \text{forma explicită.} \tag{12.19}$$

Definiția 12.2.2. Suprafața Σ se numeşte simplă dacă funcția $(u,v) \to \bar{r}(u,v)$ este injectivă.

Suprafața Σ se numeşte netedă (sau regulată) dacă $x,y,z \in C^1(D)$ şi

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \text{ pe } D, \text{ unde} \tag{12.20}$$

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Suprafața Σ se numeşte netedă pe porțiuni dacă există o diviziune $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ a lui D astfel încât suprafețele

$$(\Sigma_k) : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D_k,\ k = \overline{1,n} \\ z = z(u,v) \end{cases} \text{ să fie netede.}$$

Considerăm suprafața Σ simplă, netedă, dată prin ecuațiile parametrice (12.16) şi fie $P_0(u_0,v_0) \in (\Sigma)$ un punct fixat (fig. 5).

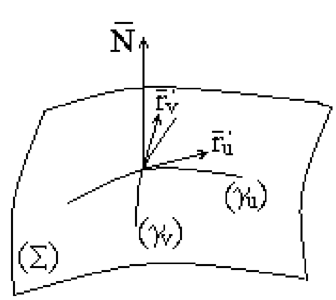

Fig.5

Pentru u = u_0 şi respectiv v = v_0 obținem pe suprafața Σ curbele

$(\gamma_u): \bar{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\bar{i} + y(u, v_0)\bar{j} + z(u, v_0)\bar{k}$,

$(\gamma_v): \bar{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\bar{i} + y(u_0, v)\bar{j} + z(u_0, v)\bar{k}$, numite şi curbe de coordonate.

Vectorii directori ai tangentelor în P_0 la curbele (γ_u) şi (γ_v) vor fi

$$\bar{r}'_u(u_0, v_0) = x'_u(u_0, v_0)\bar{i} + y'_u(u_0, v_0)\bar{j} + z'_u(u_0, v_0)\bar{k} \text{ si}$$

$$\bar{r}_v'(u_0, v_0) = x'_v(u_0, v_0)\bar{i} + y'_v(u_0, v_0)\bar{j} + z'_v(u_0, v_0)\bar{k}.$$

Să observăm că $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, deci condiția de regularitate (12.20) exprimă faptul că $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{\theta}$, adică unghiul dintre curbele de coordonate γ_u şi γ_v este diferit de zero. De asemenea, această condiție asigură existența vectorului $\bar{N}$ normal la suprafața Σ în P_0, $\bar{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$.

Versorul vectorului normal $\bar{N}$ va fi

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|} = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dacă suprafața Σ este dată prin forma implicită (12.18) se arată că $\bar{N} = F'_x\,\bar{i} + F'_y\,\bar{j} + F'_z\,\bar{k}$, iar dacă este dată prin forma explicită (12.19) atunci $\bar{N} = -p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}$, unde p = z'_x, q = z'_y.

Definiția 12.2.3. Fie Σ o suprafață simplă, netedă, dată prin ecuațiile parametrice (12.16). Se numeşte element de arie al suprafeței Σ forma diferențială notată $d\sigma$ şi definită astfel: $d\sigma = \|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\| dudv$.

Observație. Din identitatea lui Lagrange $\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|^2 = \|\bar{r}'_u\|^2 \|\bar{r}'_v\|^2 - (\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v)^2$ şi folosind notațiile $E = \bar{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$, $G = \bar{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$, $F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v + z'_u\, z'_v$ obținem

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Dacă suprafața Σ este dată sub forma explicită (12.19) atunci

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy.$$

Definiția 12.2.4. Suprafața Σ dată prin ecuațiile parametrice (12.16) are arie dacă integrala dublă $\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ există şi este finită. În acest caz, valoarea integralei duble reprezintă aria suprafeței Σ.

Teorema 12.2.1. Dacă suprafața Σ dată prin ecuațiile parametrice (12.16) este simplă, netedă atunci Σ are arie şi $\text{Aria}\,\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ este independentă de reprezentarea parametrică (12.16).

Pentru demonstrație se pot consulta lucrările [8], [14] sau [19]. ■

Integrale de suprafață de speța întâi (sau în raport cu aria)

Fie Σ o suprafață simplă, netedă, dată prin ecuațiile parametrice (12.16), unde $D \subset R^2$ este un domeniu compact limitat de o curbă simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni (deci D are arie).

Fie $f : V \to R$, mărginită, unde $V \subset R^3$ astfel încât $(\Sigma) \subset V$.

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune a compactului D şi $\Delta_\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n)$ diviziunea corespunzătoare a suprafeței Σ, $(\Sigma_k) : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in D_k,\ k = \overline{1,n}. \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Fie $P_k(x_k, y_k, z_k) \in (\Sigma_k)$, $k = \overline{1,n}$ unde $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$, $z_k = z(u_k, v_k)$, $(u_k, v_k) \in D_k$, $k = \overline{1,n}$.

Considerăm suma $\sigma_\Delta(f, P_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\,\text{aria}\,\Sigma_k$.

Definiția 12.2.5. Funcția f este integrabilă pe suprafața Σ dacă $(\exists)$ $I \in R$ astfel încât $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}(D)$, $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $P_k \in (\Sigma_k)$, $k = \overline{1,n}$ avem $|\sigma_\Delta(f, P_k) - I| < \varepsilon$.

Observație. Se arată că numărul real I este unic şi prin definiție I se numeşte integrala de suprafață a funcției F pe Σ şi se notează $I = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma$.

Să observăm că $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_{\Delta}(f,P_k)$.

Teorema 12.2.2. Dacă suprafața Σ este simplă, netedă, iar funcția f este continuă, atunci f este integrabilă pe Σ şi

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv .$$

Demonstrație. Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune a lui D,

$$P_k \in (\Sigma_k): \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D_k, \quad k=\overline{1,n}, \quad P_k(x_k,y_k,z_k) \text{ unde} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k=y(u_k,v_k)$, $z_k = z(u_k, v_k)$, $(u_k, v_k)\in D_k$, $k=\overline{1,n}$.

Din teorema 12.2.1 avem $\text{Aria}\,\Sigma = \iint_{D} \sqrt{EG-F^2}dudv$ şi din teorema de medie $(\exists)$ $(\xi_k, \eta_k)\in D_k$ astfel încât $\iint_{D_k} \sqrt{EG-F^2}dudv = \sqrt{(EG-F^2)(\xi_k,\eta_k)}\,\text{aria}\,D_k$, $\quad k=\overline{1,n}$.

Vom avea:

$$\sigma_{\Delta}(f,P_k) = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\text{aria}\,\Sigma_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k),z(u_k,v_k))\sqrt{(EG-F^2)(\xi_k,\eta_k)}\,\text{aria}\,D_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k,\eta_k),y(\xi_k,\eta_k),z(\xi_k,\eta_k))\sqrt{(EG-F^2)(\xi_k,\eta_k)}\,\text{aria}\,D_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k),z(u_k,v_k)) - f(x(\xi_k,\eta_k),y(\xi_k,\eta_k),z(\xi_k,\eta_k))\right]\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(EG-F^2)(\xi_k,\eta_k)}\,\text{aria}\,D_k .$$

Funcția $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}$ este continuă şi atunci limita primei sume pentru $\|\Delta\|\to 0$ este $\iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$.

Folosind uniform continuitatea lui f rezultă că a doua sumă are limita zero pentru $\|\Delta\|\to 0$ şi demonstrația este încheiată. ■

Observație. În cazul unei reprezentări explicite (Σ) : z = z(x,y) va rezulta că

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy\,.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala $I = \iint_{\Sigma} z d\sigma$,

unde (Σ) : z = $x^2 + y^2$, (x,y)∈D, iar D = $\{(x,y)\in R^2 : x^2 + y^2 \le a^2\}$.

Cum $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, rezultă $I = \iint_{D} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$.

Efectuând schimbarea de variabilă în coordonate polare

$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho\in[0,a],\ \theta\in[0,2\pi]$ obținem

$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+4\rho^2}\rho^3 d\rho = 2\pi\int_0^a \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho$, care se calculează folosind metoda integrării prin părți.

Integrale de suprafață de speța a doua

(sau în raport cu coordonatele)

Fie Σ o suprafață simplă, netedă, definită de ecuațiile parametrice (12.16).

Definiția 12.2.6. Suprafața Σ se numeşte bilateră (sau cu două fețe) pe D dacă versorul normalei $\bar{n}$ este o funcție continuă în fiecare punct M∈(Σ).

Deoarece într-un punct M de pe suprafața Σ putem considera doi versori ai normalei la suprafață şi anume $\bar{n}_1 = \bar{n} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}$, $\bar{n}_2 = -\bar{n} = -\frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}$, o suprafață bilateră împreună cu o alegere, cu o fixare a unuia din cei doi versori ai normalei se numeşte suprafață orientată.

Observație. Nu orice suprafață are două fețe. Există suprafețe cu o singură față, suprafețe pe care, printr-o deplasare continuă normala îşi schimbă direcția în mod continuu şi revine în punctul inițial cu sensul opus sensului inițial. Cel mai simplu exemplu în acest sens este banda lui Mobius.

Pentru a o obține luăm o foaie de hârtie dreptunghiulară ABCD, o răsucim şi o lipim astfel încât A să coincidă cu C şi B cu D (vezi fig. 6).

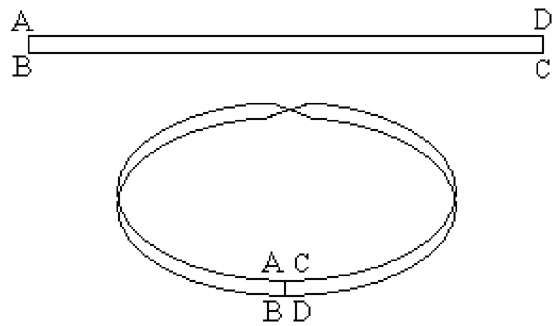

Fig.6

Presupunem că suprafața Σ este orientată şi fie cosα, cosβ, cosγ coordonatele versorului $\bar{n} = \dfrac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\|}$ al normalei la suprafață în punctul $M \in (\Sigma)$, numite şi cosinuşi directori ai normalei la suprafață.

Să observăm că α, β, γ reprezintă unghiurile formate de versorul $\bar{n}$ cu vectorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi respectiv $\bar{k}$.

Vom nota cu Σ_+ fața suprafeței Σ definită de versorul normalei $\bar{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ şi cu Σ_- fața suprafeței Σ definită de $-\bar{n}(-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma)$.

Fie $\bar{v}(P, Q, R)$ un câmp vectorial continuu pe Σ, adică funcțiile $P, Q, R : \Sigma \to R$ sunt continue pe (Σ).

Prin definiție, integrala de suprafață de speța a doua a câmpului vectorial $\bar{v}$ pe suprafața Σ_+, notată cu $\iint_\Sigma \bar{v}\bar{n}\,d\sigma$ se înțelege numărul real definit prin

$$\iint_\Sigma \bar{v}\bar{n}\,d\sigma = \iint_\Sigma [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,d\sigma,$$

unde $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$.

Notând $\cos\alpha\,d\sigma = dydz$, $\cos\beta\,d\sigma = dzdx$, $\cos\gamma\,d\sigma = dxdy$, vom avea

$\iint\limits_{\Sigma} \bar{v}\bar{n}d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$, notație frecventă,

unde Σ_+ este fața suprafeței Σ definită de versorul normalei $\bar{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Observații.

1. $\iint\limits_{\Sigma_-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} \bar{v}\bar{n}d\sigma$;

2. Valoarea integralei $\iint\limits_{\Sigma} \bar{v}\bar{n}d\sigma$ reprezintă fluxul câmpului de vectori $\bar{v}$ prin suprafața Σ.

Exemplu . Să se calculeze integrala

$I = \iint\limits_{\Sigma_+} ydydz + zdzdx + 3xdxdy$, unde Σ_+ este fața exterioară a sferei de ecuație $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a > 0$, situată în primul octant.

Vectorul director al normalei la suprafață într-un punct arbitrar $M(x,y,z) \in (\Sigma)$ are coordonatele F'_x, F'_y, F'_z (unde $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - a^2$), adică $2x$, $2y$, $2z$, iar versorul normalei asociat feței exterioare este:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{x}{a}\bar{i} + \frac{y}{a}\bar{j} + \frac{z}{a}\bar{k}.$$

Rezultă că $I = \frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma} (xy + yz + 3xz)d\sigma$.

O reprezentare parametrică a părții de sferă este

$$(\Sigma): \begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$$

Vom avea:

$$E = x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = a^2\sin^2\varphi$$
$$G = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = a^2 \qquad \text{, de unde} \quad EG - F^2 = a^4\sin^2\varphi \ \text{ şi}$$
$$F = x'_\theta\, x'_\varphi + y'_\theta\, y'_\varphi + z'_\theta\, z'_\varphi = 0$$

$$I = \frac{1}{a}\iint_D (a^2 \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + a^2 \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + 3a^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi =$$
$$= a^3\iint_D (\sin\theta\cos\theta\sin^3\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi + 3\cos\theta\sin^2\varphi\cos\varphi)d\theta d\varphi =$$
$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi + 3\sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = 2a^3.$$

Formula lui Stokes

Fie Σ o suprafață simplă, netedă, orientată, definită de ecuațiile parametrice (12.16), care se sprijină pe conturul închis, simplu şi neted γ (fig.7).

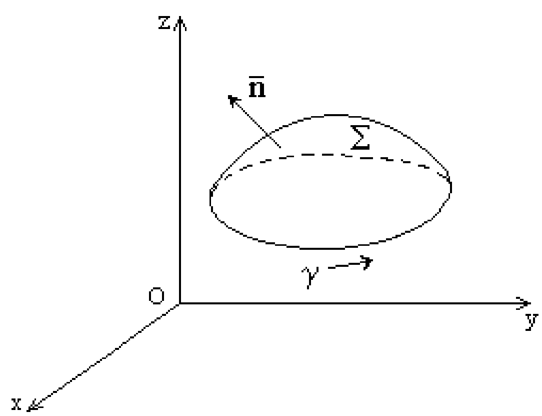

Fig.7

Dacă P, Q, R : V $\to$ R sunt de clasă C^1 pe V, unde $V \subset R^3$ astfel încât $(\Sigma)\subset V$ atunci vom avea:

$$\oint_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$\iint_{\Sigma_+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

unde Σ_+ este fața suprafeței Σ definită de versorul normalei $\bar{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, iar sensul de parcurs pe curba γ este cel asociat feței corespunzătoare (curba γ este parcursă astfel încât un observator ce se deplasează pe γ să lase tot timpul la stânga fața Σ_+).

Pentru demonstrație se pot consulta lucrările [14] sau [19]. ■

Observație. Fie $\overline{v}$ câmpul vectorial definit de funcțiile P, Q, R, adică $\overline{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, $(\forall)$ $(x,y,z) \in V$.

Atunci formula lui Stokes se poate scrie vectorial astfel:

$\oint_{\gamma} \overline{v} d\overline{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$ şi din punct de vedere fizic această formulă exprimă faptul că circulația vectorului $\overline{v}$ pe bordul γ al unei suprafețe Σ este egală cu fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin această suprafață.

12.3. Integrale triple

Acestea se definesc în mod analog cu integralele duble.

Fie $V \subset R^3$ un domeniu compact cu frontiera o suprafață simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Se arată că un astfel de domeniu are volum (vezi [14]).

Spunem că $\Delta = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ este o diviziune a domeniului compact V dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sunt domenii compacte fără puncte interioare comune astfel încât $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$ şi $\Sigma_k = \text{Fr } V_k$, $k = \overline{1,n}$ este o suprafață simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Vom nota cu $\mathcal{D}(V)$ mulțimea tuturor diviziunilor lui V şi pentru $\Delta \in \mathcal{D}(V)$, $\Delta = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ vom nota cu $\|\Delta\| = \max_{k=\overline{1,n}} d(V_k)$, norma diviziunii Δ, unde $d(V_k)$ este diametrul domeniului V_k, $d(V_k) = \sup_{P_1, P_2 \in V_k} \text{dist}(P_1, P_2)$.

Să observăm că V_k are volum, cum Fr V_k este o suprafață simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Fie $f : V \to R$, mărginită, $P_k(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \in V_k$, $k = \overline{1,n}$ şi $\sigma_\Delta(f, P_k) = \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \text{vol} V_k$, suma integrală triplă a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor $P_k \in V_k$.

Fie $m_k = \inf_{V_k} f$, $M_k = \sup_{V_k} f$, $k = \overline{1,n}$ şi $s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{vol} V_k$, $S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mathrm{vol} V_k$ sumele Darboux inferioară şi respectiv superioară a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ.

Să observăm că $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, P_k) \le S_\Delta(f)$, $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}(V)$, $\Delta = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ şi $(\forall)$ $P_k \in V_k$, $k = \overline{1,n}$.

Definiția 12.3.1. Funcția f este integrabilă pe V dacă $(\exists)$ $I \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}(V)$, $\Delta = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $P_k \in V_k$, $k = \overline{1,n}$ avem $|\sigma_\Delta(f, P_k) - I| < \varepsilon$.

Se arată că numărul real I este unic şi prin definiție I se numeşte integrala triplă a funcției f pe domeniul V şi se notează

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \ \left(\text{sau } \iiint_V f dV\right).$$

Să observăm că $\iiint_V f dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, P_k)$.

Ca şi în cazul integralelor duble se arată că o funcție mărginită $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă şi numai dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}(V)$, $\Delta = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $P_k \in V_k$ avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

De asemenea, dacă f este continuă pe V atunci f este integrabilă pe V, iar dacă V este un domeniu simplu în raport cu axa Oz, adică

$V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \end{cases}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact care este proiecția domeniului V în planul xOy şi $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ sunt continue, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Proprietăți asemănătoare cu cele de la integrale duble se obțin şi pentru integralele triple.

Exemplu. Să se calculeze integrala

$I = \iiint_V z\,dxdydz$, unde V este definit de inegalitățile

$$V : x + y + z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz,

$$V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$$, unde D = {(x,y)∈ R^2 : x + y ≤ 1, x ≥ 0, y ≥ 0}.

Vom avea

$$I=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y} zdz=\iint_D \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y} dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D (1-x-y)^2 dxdy=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2+1-2x-2y+2xy)dxdy.$$

Cum D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy, adică $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$

rezultă

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2+1-2x-2y+2xy)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2y+\frac{1}{3}y^3+y-2xy-2\frac{y^2}{2}+2x\frac{y^2}{2})\Bigg|_0^{1-x}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3+1-x-2x(1-x)-(1-x)^2+x(1-x)^2\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^3+\frac{1}{3}-x+x^2-\frac{x^3}{3}+1-x-2x+2x^2-1+2x-x^2+x-2x^2+x^3)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{24}.$$

Schimbarea de variabilă la integrala triplă

Considerăm integrala triplă $I=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, unde f : V → R este o funcție continuă, V ⊂ R^3 este un domeniu compact cu frontiera o suprafață simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Considerăm transformarea regulată

$$T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w),\ (u,v,w)\in V'\\ z=z(u,v,z)\end{cases}$$, adică x,y,z∈ C^1(V'), $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0$ pe V', unde V'⊂ R^3 este un domeniu compact.

În aceste condiții avem:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,z))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw$$ numită formula schimbării de variabile la integrala triplă.

Expresia diferențială notată dv şi definită astfel $dv = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdz$ se numeşte element de volum.

Pentru demonstrație se pot consulta lucrările [14] sau [19].

În cazul coordonatelor sferice transformarea T este

$$(T):\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},\quad \rho\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi],$$ iar jacobianul transformării este $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\varphi$, deci

$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

În cazul coordonatelor cilindrice transformarea T este

$$(T):\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases},\quad \rho\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in[0,h],$$ iar jacobianul transformării este $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$, deci $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdrd\theta dz$.

Formula lui Gauss-Ostrogradski

Fie $V \subset R^3$ un domeniu compact cu frontiera o suprafață Σ, simplă, închisă, bilaterală, netedă sau netedă pe porțiuni şi un câmp de vectori

$\bar{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, de clasă C^1 pe domeniul V.

În aceste condiții avem:

$$\iint_{\Sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$ unde Σ_+ este fața suprafeței Σ definită de versorul normalei $\bar{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, numită şi formula integrală a lui Gauss-Ostrogradski.

Observație. Formula lui Gauss-Ostrogradski se poate scrie vectorial astfel:

$$\iint_{\Sigma} \bar{v}\bar{n}d\sigma = \iiint_{V} \mathrm{div}\bar{v}dxdydz .$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$I = \iint_{\Sigma_+} xdydz + ydzdx + zdxdy$, unde Σ_+ este fața exterioară a suprafeței Σ ce limitează domeniul V definit de inegalitățile : $x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Vom aplica formula lui Gauss cu P = x, Q = y, R = z şi integrala devine

$$I = \iiint_V 3dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz = 3\iint_D 2(2 - x^2 - y^2)dxdy$$

unde $D = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \leq 2\}$.

Trecând la coordonatele polare: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

unde $\rho\in [0,\sqrt{2}]$, $\theta\in [0,2\pi]$, obținem $I = 6\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\rho d\rho = 12\pi$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze:

a) $\iint_D \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} dxdy$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

b) $\iint_D \frac{1}{(1+y)^2} dxdy$, $D: y \leq x,\ xy \geq 1,\ 1 \leq x \leq 2$;

c) $\iint_D (1 - y)dxdy$, $D: x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \leq x^2,\ x \geq 0$;

d) $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$, $D = \Delta OAB$, $A(1,-1)$, $B(1,1)$;

e) $\iint_D \arcsin\sqrt{x + y}dxdy$, D limitat de x + y = 0, x + y = 1, y = 1, y = -1.

2. Folosind coordonatele polare să se calculeze:

a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, unde $a > 0$;

b) $\iint_D ydxdy$, $D: x^2 + y^2 \leq a^2,\ y \geq -x$, unde $a > 0$;

c) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2 \le 2x$.

3. Folosind schimbări de variabile convenabile să se calculeze:

a) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D: 1 \le x+y \le 13,\ \ x \le y \le 5x$;

b) $\iint\limits_D xdxdy,\ \ D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ \ y \ge 0$;

c) $\iint\limits_D ydxdy,\ \ D: 1 \le xy \le 2,\ \ x \le y \le 2x$.

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene $D \subset R^2$, unde D este limitat de curbele de ecuații $x+y=3$, $xy=2$.

5. Direct şi cu formula lui Green să se calculeze $\oint\limits_\gamma (x-y)dx + xdy$, unde γ este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge 0\}$ şi este parcursă în sens direct.

6. Fie suprafața $(\Sigma): \bar{r} = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + v\bar{k},\ u \in [0,a],\ v \in [0,2\pi]$.

Să se determine aria Σ şi să se calculeze integrala $I = \iint\limits_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$.

7. Să se calculeze:

a) $\iint\limits_\Sigma (xy+yz+zx)d\sigma$, unde Σ este porțiunea din suprafața de ecuație $z=\sqrt{x^2+y^2}$, decupată de suprafața de ecuație $x^2+y^2=2ax,\ a>0$;

b) $\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)d\sigma,\ (\Sigma): x^2+y^2+z^2=a^2$;

c) $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)d\sigma$, Σ fiind suprafața cubului definit de

$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

8. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța a doua:

a) $\iint\limits_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$, unde Σ este fața exterioară a tetraedrului limitat de $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

b) $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, unde Σ este fața interioară a conului de ecuație $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le h$;

c) $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$, Σ fiind fața exterioară a elipsoidului de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

9. Folosind formula lui Stokes să se calculeze

$\oint\limits_{\gamma}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, unde $(\gamma):\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ (sensul de parcurs fiind astfel încât domeniul interior să fie lăsat la stânga).

10. Să se calculeze:

a) $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz,\ V: x^2+y^2\le 2z,\ z\le 2$;

b) $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ V: x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0$;

c) $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,\ V: x^2+y^2\le a^2,\ x+y+z\le 2a,\ z\ge 0$;

11. Folosind schimbările de variabile să se calculeze:

a) $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,\ V: x^2+y^2+z^2\le 2z$;

b) $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,\ V: x^2+y^2\le 2z,\ x^2+y^2+z^2\le 8$;

c) $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dx\,dy\,dz,\ V:: x^2+y^2-2x\le 0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le 1$;

d) $\iiint\limits_{V}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dydz,\ V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$

12. Direct şi cu formula lui Gauss-Ostrogradski să se calculeze $\iint\limits_{\Sigma} x^3dy\,dz+x^2ydz\,dx+x^2zdx\,dy$, unde Σ este fața exterioară a suprafeței închise a cilindrului $x^2+y^2=a^2,\ 0\le z\le h$.

13. Să se calculeze volumul şi coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen mărginit de suprafețele de ecuații $y^2+z^2=4ax$, $x^2+y^2=2ax$, unde $a>0$.

BIBLIOGRAFIE

1. **L.Aramă**, **T.Morozan**, *Culegere de probleme de calcul diferențial*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.
2. **I.Colojoară**, *Analiză matematică*, E.D.P. Bucureşti, 1983.
3.**J.Cringanu**, *Analiza matematica*, Editura Fundatiei Universitare „Dunarea de Jos" , Galati, 2006.
4. **B.P.Demidovici**, *Culegere de probleme şi exerciții de analiză matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.
5. **N.Donciu**, **D.Flodor**, *Algebră şi analiză matematică (Culegere de probleme)*, E.D.P. Bucureşti, 1979.
6. **B.Gelbaum**, **J.Olmstead**, *Counterexamples în Analysis*, San Francisco, London, Amsterdam, 1964.
7. **D.I.Ion**, **C.Niță**, *Elemente de aritmetică cu aplicații în tehnici de calcul*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.
8. **M.Niculescu**, *Analiză matematică, vol. I, II*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.
9. **A.Precupanu**, *Funcții reale şi teoria măsurii*, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1972.
10. **A.Precupanu**, *Analiză matematică*, *vol. I, II*, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1987.
11. **A.Precupanu**, *Bazele analizei matematice*, POLIROM, 1998.
12. **S.Rădulescu**, **M.Rădulescu**, *Teoreme şi probleme de Analiză matematică*, E.D.P. Bucureşti, 1982.
13. **R.B.Reisel**, *Elementary theory of Metric Spaces*, Springer – Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
14. **M.Roşculeț**, *Analiză matematică, vol. I, II*, E.D.P. Bucureşti, 1979.
15. **V.Rudin**, *Osnovi matematiceskovo analiza*, Moscova, 1966.
16. **W.Rudin**, *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill, Inc., 1966.
17. **L.Schwartz**, *Cours d'Analyse, vol. I, II*, Herman, Paris, 1967.
18. **Gh.Sirețchi**, *Calcul diferențial şi integral, vol. I, II*, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
19. **O.Stănăşilă**, *Analiză matematică*, E.D.P. Bucureşti, 1981.