

LIVIU ORNEA

O INTRODUCERE

ÎN

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ

Introducere

Mulțumiri. Le sînt îndatorat colegilor și studenților care au citit părți din manuscris, în diferite etape ale scrierii lui, au corectat greșeli și mi-au făcut observații extrem de utile, mi-au furnizat informații istorice sau bibliografice. Îi menționez aici, în ordine alfabetică; Ion Dincă, Dragoș Frățilă, Alin Gălățan, Cristian Găvruș, Cătălin Gherghe, Adriana Năstase, Mihaela Pilca, George Popescu. Tuturor, calde mulțumiri.

Cuprins

Introducere	2
Partea 1. Curbe și suprafețe în \mathbb{R}^3	7
Capitolul 1. Proprietăți locale ale curbelor	8
1. Parametrizarea canonică	8
2. Invarianti euclidieni locali	12
3. Curbe plane	24
Capitolul 2. Proprietăți globale ale curbelor	31
1. Teorema de clasificare	31
2. Teorema indicelui	34
3. Inegalitatea izoperimetrică	37
Capitolul 3. Proprietăți locale ale suprafețelor	40
1. Definiții. Exemple	40
2. Planul tangent. Funcții diferențiabile	44
3. Parametrizări speciale	50
4. Prima formă fundamentală	52
5. A doua formă fundamentală. Curbură	56
6. Curbe pe suprafețe. Geodezice	72
7. Derivata covariantă	78
8. Teorema fundamentală a teoriei suprafețelor	82
Capitolul 4. Proprietăți globale ale suprafețelor	86
1. De la local la global. O caracterizare a sferei	86
2. Suprafețe orientabile	87
3. Teorema Gauss-Bonnet	92
Partea a 2-a. Varietăți diferențiabile abstracte	101
Capitolul 5. Varietăți diferențiabile	102
1. Definiții. Exemple	102
2. Structuri diferențiabile	105
3. Aplicații și funcții diferențiabile	112
4. Grupuri Lie	115
5. Partiția unității	115

6. Construcții: acțiuni de grupuri, spații de acoperire	118
7. Orientare	123
Capitolul 6. Vectori tangenți și cotangenți	125
1. Spațiul tangent	125
2. Diferențiala unei aplicații într-un punct	130
3. Spațiul cotangent	133
4. Fibratul tangent și fibratul cotangent	134
Capitolul 7. Imersii. Submersii. Subvarietăți	137
1. Definiții. Exemple	137
2. Teorema rangului	138
3. Teorema valorii regulate. Noi exemple	140
4. Teorema de scufundare a lui Whitney	142
Capitolul 8. Câmpuri vectoriale și tensoriale	145
1. Câmpuri vectoriale. Croșetul a două câmpuri	145
2. Câmpuri invariante pe grupuri Lie. Algebra Lie a unui grup Lie.	150
3. Grupul local cu un parametru asociat unui câmp vectorial	152
4. Subgrupuri cu un parametru ale unui grup Lie. Aplicația exponențială	157
5. Derivata Lie pe direcția unui câmp vectorial	162
6. Teoreme de îndreptare a câmpurilor de vectori	164
7. Distribuții. Teorema lui Frobenius	165
8. Tensori și câmpuri de tensori	169
Capitolul 9. Forme diferențiale. Integrare	176
1. Tensori alternați	176
2. Forme diferențiale	180
3. Derivata Lie a formelor diferențiale.	187
4. Integrare pe varietăți. Formula lui Stokes	194
Capitolul 10. Fibrări vectoriale	203
1. Definiții. Exemple	203
2. Secțiuni	205
3. Reducerea grupului structural	206
4. Operații cu fibrări	208
Capitolul 11. Conexiuni lineare în fibrări vectoriale	213
1. Definiție. Existență. Formule locale	213
2. Tensorul de curbură	216
3. Conexiuni induse în fibrări vectoriale	218
4. Transport paralel de-a lungul curbelor	220
5. Conexiuni lineare în fibratul tangent	225
Capitolul 12. Spații Riemann	232
1. Definiții. Exemple.	232
2. Conexiunea Levi-Civita	238

3. Curbură riemanniană	243
4. Geodezice	254
Bibliografie	267

Partea 1

Curbe și suprafețe în \mathbb{R}^3

CAPITOLUL 1

Proprietăți locale ale curbelor

1. Parametrizarea canonică

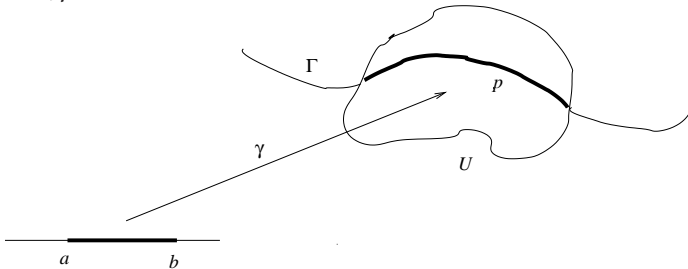
Capitolul acesta este dedicat studiului celor mai simple obiecte ale geometriei diferențiale. Definiția pe care o vom da „curbei“ (și, mai apoi, „suprafeței“ și „varietății“) trebuie să permită utilizarea tehnicilor de analiză matematică. Ne interesează aici, ca și în restul cărții, să găsim proprietăți care să identifice o curbă printre alte obiecte cu structură diferențiabilă (așa numiți *invarianți diferențiali*) și proprietăți geometrice care să distingă, de exemplu, un cerc de o elipsă sau de o elice (așa numiți *invarianți metrici*). De fapt, ceea ce urmărim este să dăm un sens precis noțiunilor intuitive de „curbură“ și „torsione“. Ne vor preocupa atât proprietățile locale, cât și cele globale. Vom arăta că, în unele cazuri, informații de natură locală conduc la concluzii globale.

Prin \mathbb{R}^n (spațiul euclidian n -dimensional) vom nota spațiul afin \mathbb{R}^n dotat cu produsul scalar canonic notat $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Când spunem „vector din \mathbb{R}^n “ înțelegem de fapt vector din \mathbb{R}^n , legat în 0. În primele două capitole ne vom mărgini la studiul unor submulțimi ale spațiului euclidian 3-dimensional.

Să precizăm că, în tot ce urmează, în lipsa unei alte mențiuni explicite, „diferențiabil“ înseamnă „de clasă \mathcal{C}^∞ “.

Definiția 1.1.1. O submulțime $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ se numește *curbă diferențiabilă* (pe scurt, curbă) dacă pentru orice punct $p \in \Gamma$ există o vecinătate deschisă U a sa în \mathbb{R}^3 și o aplicație diferențiabilă $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ astfel încât:

- i) γ e homeomorfism între (a, b) și $U \cap \Gamma$;
- ii) $d_t \gamma \neq 0$ în orice $t \in (a, b)$.



O pereche (U, γ) ca în definiție se numește *parametrizare (locală)* pentru Γ . Este clar că mulțimile de tipul $U \cap \Gamma$ sînt deschise în topologia relativă a lui Γ și formează o acoperire a sa. Condiția i) spune că, local, o curbă se poate deforma la un interval deschis. Aici cuvîntul *local* e esențial: gîndiți-vă la un cerc; acesta nu se poate deforma continuu la un interval. În consecința, un cerc și, mai general, orice curbă închisă

care se poate deforma la un cerc vor fi descrise cu cel puțin două parametrizări locale. Vom vedea că, surprinzător poate, orice curbă conexă se poate descrie folosind una sau două parametrizări.

Dacă notăm (x^1, x^2, x^3) coordonatele în \mathbb{R}^3 , atunci o aplicație diferențiabilă $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ se scrie explicit sub forma $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ cu x^i funcții reale diferențiabile de o variabilă reală. Condiția ii) cere ca, în orice $t_0 \in (a, b)$, cel puțin o derivată $\frac{dx^i}{dt}|_{t_0} \neq 0$; altfel spus: $(\frac{dx^1}{dt}|_{t_0})^2 + (\frac{dx^2}{dt}|_{t_0})^2 + (\frac{dx^3}{dt}|_{t_0})^2 \neq 0$. Observați că această condiție pare foarte restrictivă: din moment ce existența derivatelor funcțiilor coordonate asigură existența unui vector tangent în fiecare punct, se exclud din discuție curbele „cu colțuri“. De fapt, dacă există doar o mulțime finită de colțuri, studiul încă poate fi făcut pe fiecare porțiune dintre două ruperi consecutive. Asemenea curbe se numesc *diferențiabile pe porțiuni*.

Pentru a simplifica expunerea, vom discuta mai întâi despre *curbe parametrizate*, adică pur și simplu despre aplicații diferențiabile $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. La acestea se referă studiul local al curbelor.

Exemplul 1.1.2. Cercul $C := S^1(r) = \{(x^1, x^2, 0); (x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2\}$ se poate acoperi cu două parametrizări locale:

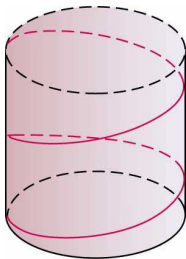
$$\begin{aligned}\gamma_1 : (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \gamma_1(t) &= (r \cos t, r \sin t, 0), \\ \gamma_2 : (\pi, 3\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \gamma_2(t) &= (r \cos t, r \sin t, 0).\end{aligned}$$

Se observă că punctul neacoperit de prima parametrizare se află în imaginea celei de-a doua.

Exemplul 1.1.3. *Elicea circulară* este curba descrisă de parametrizarea (unică):

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b > 0, t \in \mathbb{R}.$$

Imaginea ei e situată pe cilindrul circular drept $(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2$, $2\pi b$ (*pasul* elicei) fiind distanța măsurată pe o generatoare între două intersecții consecutive cu elicea.

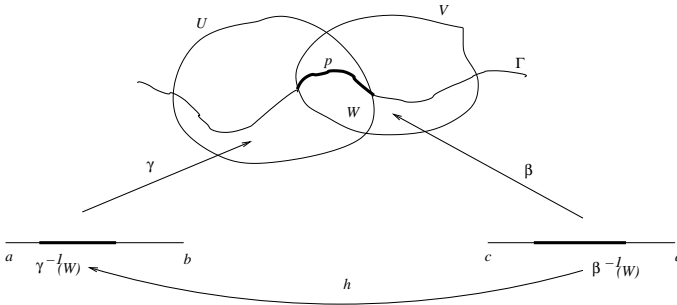


Elicea circulară.

Ce se întâmplă când un punct al lui Γ se află în imaginea a două parametrizări, fie ele $\gamma(t)$ și $\beta(s)$? În primul rând, cum γ și β sînt homeomorfisme pe cîte o submulțime a lui Γ , se poate exprima t ca funcție continuă de s și reciproc (scrierea unui parametru în funcție de celălalt se numește *schimbare de coordonate*). Mai mult însă, folosind cea de-a doua condiție din definiție putem demonstra că orice schimbare de coordonate e un difeomorfism:

Propoziția 1.1.4. Fie $\gamma : (a, b) \rightarrow U \cap \Gamma$ și $\beta : (c, d) \rightarrow V \cap \Gamma$ două parametrizări în jurul lui $p \in W = U \cap V \cap \Gamma$. Atunci $h = \gamma^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \gamma^{-1}(W)$ e difeomorfism.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că schimbarea de coordonate $t = t(s)$, $s \in \beta^{-1}(W)$ e difeomorfism (știind că e homeomorfism).



Demonstrația constă într-o aplicare aproape directă a teoremei funcției inverse.

Fie $s_0 \in \beta^{-1}(W)$, $t_0 = h(s_0)$, deci $\beta(s_0) = \gamma(t_0)$. Cum $d_t \gamma \neq 0$ în orice $t \in (a, b)$, putem presupune (după o eventuală rotație a axelor de coordonate) că $\frac{dx^1}{dt} \Big|_{t_0} \neq 0$. Fie acum $F : (a, b) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dată prin:

$$F(t, (\theta, \tau)) = (x^1(t), x^2(t) + \theta, x^3(t) + \tau).$$

Evident F e diferentiabilă și restricția sa la $(a, b) \times \{(0, 0)\}$ coincide cu γ . Determinantul său iacobian în t_0 este:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx^1}{dt} \Big|_{t_0} & \frac{dx^2}{dt} \Big|_{t_0} & \frac{dx^3}{dt} \Big|_{t_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{dx^1}{dt} \Big|_{t_0} \neq 0.$$

Conform Teoremei funcției inverse, există o vecinătate \tilde{U} a lui $F(t_0, (0, 0)) = \gamma(t_0)$ în \mathbb{R}^3 pe care F^{-1} există și e diferentiabilă. Pe de altă parte, cum β e continuă, găsim o vecinătate \tilde{I} a lui s_0 , $\tilde{I} \subset (c, d)$ astfel încît $\beta(\tilde{I}) \subset \tilde{U}$. În fine, vedem că $h|_{\tilde{I}} = F^{-1} \circ \beta|_{\tilde{I}}$ e diferentiabilă ca o compunere de aplicații diferentiabile, ceea ce încheie demonstrația. ■

Sîntem, astfel, îndreptățiți să numim *reparametrizare* a unei porțiuni de curbă $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ orice difeomorfism $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$. De exemplu, difeomorfismul $t \mapsto b + a - t$ este o reparametrizare numită *schimbare de orientare* pentru că are ca efect parcurgerea în sens invers a curbei. În general, despre o reparametrizare h care verifică $\frac{dh}{dt} > 0$ (respectiv < 0) se spune că păstrează (respectiv schimbă) orientarea. E, de asemenea, natural să ne punem problema găsirii, dacă există, a unor parametrizări simple care să ușureze calculele.

Pentru o curbă parametrizată γ , vectorul $\frac{d\gamma}{dt}$ se numește *vector tangent* sau *vector viteză*. Dacă în t_0 componentele lui sînt $(\frac{dx^1}{dt} \Big|_{t_0}, \frac{dx^2}{dt} \Big|_{t_0}, \frac{dx^3}{dt} \Big|_{t_0})$, atunci ecuațiile

tangentei la $\text{Im } \gamma$ în $\gamma(t_0)$ sînt:

$$(1.1) \quad \frac{x^1 - x^1(t_0)}{\frac{dx^1}{dt} |_{t_0}} = \frac{x^2 - x^2(t_0)}{\frac{dx^2}{dt} |_{t_0}} = \frac{x^3 - x^3(t_0)}{\frac{dx^3}{dt} |_{t_0}}.$$

Condiția ii) din definiție asigură existența vectorului tangent de-a lungul curbei. Dacă imaginăm curba ca traiectorie a unui mobil, atunci lungimea acestui vector reprezintă viteza instantanee de deplasare. Aceasta motivează (din punctul de vedere al fizicii; o justificare matematică găsiți în cărțile de analiză) calculul lungimii $s(t)$ a unui arc de curbă prin formula:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{d\tau} \right\| d\tau, \quad t_0 \in I = (a, b).$$

Formula de schimbare de variabilă ne spune că lungimea arcului de curbă e independentă de parametrizare. Se obține în felul acesta o funcție diferențiabilă $s: I \rightarrow \bar{I} = s(I)$ numită *funcția lungime de arc*. Evident s e diferențiabilă și $\frac{ds}{dt} > 0$, deci inversabilă.

Notăm h inversa ei și \bar{t} parametrul pe \bar{I} . Atunci $\frac{dh}{d\bar{t}} = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^{-1} > 0$, deci h e o reparametrizare care păstrează orientarea curbei. Fie $\bar{\gamma} = \gamma \circ h$. Conform regulii de derivare a funcțiilor compuse avem:

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dh}{d\bar{t}},$$

astfel că

$$\left\| \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}} \right\| = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dh}{d\bar{t}} \right| = 1.$$

Am demonstrat astfel un rezultat extrem de important din punct de vedere teoretic:

Propoziția 1.1.5. *Orice curbă parametrizată se poate reparametriza astfel ca lungimea vectorului tangent să fie 1.*

În această parametrizare, lungimea parcursă pe curbă între \bar{t} și \bar{t}_1 este chiar $\bar{t}_1 - \bar{t}$, adică parametrul reprezintă lungimea arcului. De aceea o numim *parametrizare prin lungime de arc* (se mai numește *canonică* sau *naturală*). Printr-un abuz de notație tradițional vom nota cu s parametrul canonic.

Elicea din Exemplul 1.2 nu e parametrizată canonic: $\frac{d\gamma}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b)$ și $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Acesta e, însă, un caz fericit: e ușor să reparametrizăm canonic punând $s = t(a^2 + b^2)^{-1/2}$. În general e foarte greu să realizăm practic o parametrizare canonică. Două dificultăți pot apărea. De multe ori e foarte greu să calculăm integrala care dă lungimea arcului; de exemplu, lungimea arcului elipsei, o curbă foarte simplă, conduce la o integrală eliptică, necalculabilă prin cuadraturi. Pe de altă parte, chiar dacă am calculat integrala, inversarea funcției lungime de arc nu este totdeauna la îndemînă. Cu toate acestea putem considera întotdeauna că avem de-a face cu arce de curbă parametrizate canonic, presupunerea aceasta fiind extrem de utilă în demonstrarea unor rezultate locale.

Am indicat o construcție pentru parametrizarea canonică. Nu rezultă defel că ar fi unica posibilă. Mai precis, pornind de la orice parametrizare locală se poate ajunge la una canonică. Prin ce diferă doi parametri canonici? Răspunsul e conținut în:

Lema 1.1.6. Dacă $\gamma_i : I_i \rightarrow U_i \cap \Gamma$, $i = 1, 2$ sînt două parametrizări canonice astfel încît $U_1 \cap U_2 \cap \Gamma \neq \emptyset$, atunci pe fiecare componentă conexă lui $U_1 \cap U_2 \cap \Gamma$ avem $s_1 - s_2 = \text{const}$.

Demonstrație. Fie $h : \gamma_1^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \Gamma) \rightarrow \gamma_2^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \Gamma)$, $h = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$. h exprimă schimbarea de coordonată $s_2 = s_2(s_1)$. Ca să demonstrăm enunțul e suficient să arătăm că $\frac{ds_2}{ds_1} = \pm 1$, apoi să integrăm (nu uitați că scrierea $\frac{ds_2}{ds_1}$ e doar un substitut pentru $\frac{dh}{ds_1}$). Avem $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ și aplicînd regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{d\gamma_1}{ds_1} = \frac{d(\gamma_2 \circ h)}{ds_1} = \frac{d\gamma_2}{ds_2} \cdot \frac{dh}{ds_1}.$$

Luînd aici norma găsim:

$$\left\| \frac{d\gamma_1}{ds_1} \right\| = \left\| \frac{d\gamma_2}{ds_2} \right\| \cdot \left| \frac{dh}{ds_1} \right|.$$

Cum ambele parametrizări sînt canonice, $\left\| \frac{d\gamma_1}{ds_1} \right\| = 1$, $\left\| \frac{d\gamma_2}{ds_2} \right\| = 1$. Atunci $\left| \frac{dh}{ds_1} \right| = 1$ ceea ce încheie demonstrația. Bineînțeles, semnul constant pe fiecare componentă conexă e pozitiv sau negativ după cum h păstrează sau schimbă orientarea pe curbă. ■

Observația 1.1.7. Se observă cu ușurință că, *mutatis mutandis*, tot ce am făcut pînă aici, în particular existența și proprietățile parametrizării canonice, are loc și pentru curbe din spațiul euclidian \mathbb{R}^n .

2. Invarianți euclidieni locali

Fie $\gamma : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de curbă *regulată* parametrizat canonic. Vom construi un reper triortonormat solidar cu curba (adică avînd originea mobilă pe curbă). Schimbările direcțiilor axelor sale vor codifica proprietățile geometrice ale curbei.

Fie $\mathbf{t}(s)$ vectorul tangent la curbă. E unitar pentru că parametrizarea e canonică. Acesta va fi primul versor al reperului. Fie acum

$$k(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right\|$$

funcția *curbură*. Denumirea e motivată de:

Observația 1.2.1. $k \equiv 0$ pe $[s_0, s_1]$ dacă și numai dacă $\gamma|_{[s_0, s_1]}$ e o porțiune de dreaptă.

Demonstrația e imediată (integrați $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$).

Exemplul 1.2.2. Pentru un cerc de rază r curbura este $1/r$. Curbura elicei din Exemplul 1.2 (cu $a^2 + b^2 = 1$ ca să avem parametrizare canonică) este 1.

Exercițiul 1.2.3. Arătați că funcția curbură e invariantă la schimbări de orientare și la izometriile lui \mathbb{R}^3 .

Deoarece $\mathbf{t}(s)$ e unitar, derivînd în $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ obținem $\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{t}(s) \right\rangle = 0$, deci $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ face parte din planul normal la $\mathbf{t}(s)$ în $\gamma(s)$.

Observația 1.2.4. Ecuația planului normal la $\text{Im } \gamma$ în $\gamma(s_0)$ este:

$$(1.2) \quad (x^1 - x^1(s_0)) \frac{dx^1}{ds} \Big|_{s_0} + (x^2 - x^2(s_0)) \frac{dx^2}{ds} \Big|_{s_0} + (x^3 - x^3(s_0)) \frac{dx^3}{ds} \Big|_{s_0} = 0.$$

Într-un punct s în care $k(s) \neq 0$ putem pune

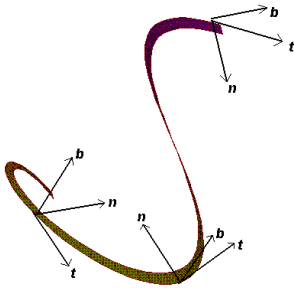
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s),$$

unde am notat $\mathbf{n}(s)$ versorul unitar al lui $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$. $\mathbf{n}(s)$ se numește vector *normal principal*. Acesta va fi al doilea versor al reperului. Subliniem că într-un punct în care curbura se anulează nu avem nici un criteriu de a alege un vector anume din planul normal. Al treilea versor al triedrului se construiește acum în mod natural prin produs vectorial. Punem

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

și-l numim vector *binormal*.

Definiția 1.2.5. Triedrul ortonormat $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ asociat curbei într-un punct în care curbura e nenulă se numește *triedrul (reperul) lui Frenet*¹.



Triedrul lui Frenet în trei puncte ale unei curbe spațiale.

Planul $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ se numește *osculator*², planul $\{\mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ se numește *normal*, iar planul $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ se numește *rectifiant*³.

Ecuția vectorială (parametrică) a planului osculator este:

$$\mathbf{r}(s, \alpha, \beta) = \gamma(s) + \alpha\mathbf{t}(s) + \beta\mathbf{n}(s),$$

unde $\mathbf{r}(s)$ este vectorul de poziție al unui punct generic din planul osculator, iar α, β sînt parametri reali independenți.

Exercițiul 1.2.6. Planul osculator este independent de parametrizare. Deduceți de aici că și direcția vectorului binormal și, în consecință, planul rectifiant, sînt independente de parametrizare.

Exercițiul 1.2.7. Scrieți ecuațiile planelor normal și rectifiant în reperul canonic al lui \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 1.2.8. O curbă regulată $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ este plană dacă și numai dacă e conținută în planul osculator.

¹După numele lui Jean Frédéric Frenet (1816–1900), matematician, astronom și meteorolog francez. Formulele de derivare care vor apărea imediat au fost publicate în teza sa de doctorat din 1847. În 1851, au fost redescoperite, independent, de Joseph Alfred Serret (1819–1885).

²Cuvîntul vine de la latinescul *osculare*, a săruta. Planul osculator într-un punct este cel care are contact de ordin maximal cu curba în acel punct, lucru care va fi mai clar după Exercițiul 1.2.16.

³Denumirea se va clarifica după parcurgerea secțiunii 6. Anticipînd, să spunem că pe suprafața care înfășoară planele rectifiante, curba noastră devine geodezică, adică „dreaptă“, fiind astfel „îndreptată“, sau rectifiată.

Indicație: Dacă γ e plană, atunci, modulo o rotație în \mathbb{R}^3 , putem presupune $\text{Im } \gamma \subset \{x^3 = 0\}$. Acum ecuația planului osculator devine $x^3 = 0$, deci coincide cu planul curbei. Reciproca e evidentă.

Pentru a studia variația axelor reperului Frenet va trebui să calculăm derivatele funcțiilor \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} . Vom folosi următorul rezultat ajutător:

Lema 1.2.9. Fie $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, funcții diferențiabile astfel încît $\{e_i(s)\}$ e o bază ortonormată în orice punct din I . Atunci există o matrice antisimetrică de funcții diferențiabile $(a_i^j)_{i,j=1,2,3}$ cu proprietatea că $\frac{de_i}{ds} = a_i^j e_j$ (cu sumare după indicele j ⁴).

Demonstrație. $\{\frac{de_i}{ds}\}$ e un sistem de vectori în \mathbb{R}^3 , deci există o unică matrice (a_i^j) astfel încît $\frac{de_i}{ds} = a_i^j e_j$. Rămîne de văzut antisimetria. Aceasta rezultă din derivarea relației $\langle e_i(s), e_j(s) \rangle = \delta_{ij}$:

$$\langle \frac{de_i}{ds}, e_j(s) \rangle + \langle e_i, \frac{de_j}{ds} \rangle = 0,$$

de unde

$$\langle a_i^k e_k, e_j \rangle + \langle e_i, a_j^k e_k \rangle = 0,$$

ceea ce implică $a_i^j + a_j^i = 0$. ■

Aplicînd acest rezultat pentru $e_1 = \mathbf{t}$, $e_2 = \mathbf{n}$, $e_3 = \mathbf{b}$, găsim $a_1^2 = k$, $a_1^3 = 0$. În ce privește a_2^3 , o vom nota $\tau(s)$ și o vom numi *torsiune*. Putem acum formula:

Propoziția 1.2.10. Versorii reperului Frenet verifică următoarele relații de derivare (numite ale lui Frenet) :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Denumirea de torsiune este explicată de:

Propoziția 1.2.11. Următoarele afirmații sînt echivalente:

- (i) $\tau(s) = 0$ pe I ;
- (ii) γ reprezintă o curbă plană;
- (iii) vectorul $\mathbf{b}(s)$ e constant.

Demonstrație. Echivalența lui (i) cu (iii) rezultă direct din a treia formulă Frenet. Pentru a dovedi că (iii) implică (ii) fixăm $s_0 \in I$ și arătăm că $\gamma(s) - \gamma(s_0) \perp \mathbf{b}$. Pentru asta calculăm derivata funcției $f(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{b}(s) \rangle$. Avem $f'(s) = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, ceea ce implică $f(s) = \text{const.}$ și cum $f(s_0) = 0$ avem $f \equiv 0$ pe I . Reciproc, dacă γ e plană,

⁴Am folosit aici, și o vom folosi de acum încolo repetat, *convenția de sumare a lui Einstein*: indicii care se repetă într-o formulă sus și jos sînt indici de sumare. Deci $a_i^j e_j$ înseamnă $\sum_{j=1}^3 a_i^j e_j$.

imaginea ei e situată neapărat în planul osculator, vezi Exercițiul 1.2.8. Astfel, planul osculator e fix (coincide cu planul curbei) și vectorul său normal e constant. ■

Ca și pentru curbura, propunem:

Exercițiul 1.2.12. Arătați că funcția torsiune e invariantă la schimbări de orientare și la izometriile lui \mathbb{R}^3 .

Putem acum să dăm o nouă interpretare a curburii. Presupunând curba γ regulată și parametrizată canonic, fie $\theta(s)$ unghiul dintre tangentele $\mathbf{t}(s)$ și $\mathbf{t}(s_0)$, cu $s_0 \in (a, b)$ fixat. Avem evident:

$$\sin \theta(s) = \|\mathbf{t}(s) \times \mathbf{t}(s_0)\| = \|\mathbf{t}(s) \times (\mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s_0))\|,$$

deci obținem, folosind prima formulă Frenet:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\sin \theta(s)}{|s - s_0|} &= \|\mathbf{t}(s_0) \times \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s_0)}{|s - s_0|}\| \\ &= \|\mathbf{t}(s_0) \times k(s_0)\mathbf{n}(s_0)\| = k(s_0)\|\mathbf{b}(s_0)\| = k(s_0). \end{aligned}$$

Cum, pe de altă parte, $\theta(s) \rightarrow 0$ când $s \rightarrow s_0$, avem:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\sin \theta(s)}{|s - s_0|} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\sin \theta(s)}{\theta(s)} \cdot \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\theta(s)}{|s - s_0|} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\theta(s)}{|s - s_0|},$$

astfel că am demonstrat:

Propoziția 1.2.13. *Curbura unui arc de curbă parametrizată, regulată este dată de formula:*

$$k(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\theta(s)}{|s - s_0|},$$

$\theta(s)$ fiind unghiul dintre tangentele în punctele $\gamma(s)$ și $\gamma(s_0)$.

Exercițiul 1.2.14. Formulați și demonstrați o interpretare analoagă a torsiunii folosind unghiul dintre două binormale apropiate.

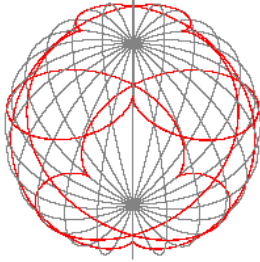
Formulele lui Frenet scrise în parametrizarea canonică nu permit, în general, calcule explicite. Dar furnizează rezultate calitative. Un exemplu este:

Propoziția 1.2.15. *Fie γ o curbă parametrizată, regulată și cu torsiunea nicăieri nulă. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

- (i) *Direcțiile tangente fac unghi constant cu o direcție fixă.*
- (ii) *$k/\tau = ct.$*
- (iii) *Direcțiile normale sînt paralele cu un plan fix.*
- (iv) *Direcțiile binormale fac unghi constant cu o direcție fixă.*

Demonstrație. Putem presupune curba parametrizată canonic. Fie \mathbf{a} versorul direcției fixe din enunț. Avem $\langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle = \cos \theta$, cu θ un unghi constant. Derivînd aici și folosind prima formulă Frenet găsim $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, deci (i) \Rightarrow (iii). Așadar \mathbf{a} aparține planului rectificanț și se descompune după \mathbf{t} și \mathbf{b} ca: $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta$. Derivînd și această relație, din prima și a treia formulă Frenet rezultă $k/\tau = \operatorname{tg} \theta$, deci (i) \Rightarrow (ii). Celelalte implicații se demonstrează similar. ■

O curbă cu proprietățile de mai sus se numește *elice*. Elicea circulară este doar un caz particular. Un alt exemplu de elice, cu curbura și torsiune neconstante, este: $\gamma(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t \in \mathbb{R}$.



Un exemplu: elicea sferică.

Exercițiile care urmează furnizează alte interpretări geometrice pentru planele triedrului Frenet, pentru curbură și torsiune.

Exercițiul 1.2.16. (Forma canonică locală a unui arc de curbă.) Să se scrie ecuațiile unui arc de curbă regulată într-o vecinătate a unui punct s_0 , raportate la axele triedrului Frenet în $\gamma(s_0)$.

Soluție. Presupunem γ parametrizată canonic. Mai mult, putem presupune $s_0 = 0$. Dezvoltăm funcția γ în serie Taylor în jurul lui 0. Avem:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + R, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^3} = 0$$

Dar $\gamma'(0) = \mathbf{t}$, $\gamma''(0) = k\mathbf{n}$, $\gamma'''(0) = k'\mathbf{n} + k(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})$ (cu toate funcțiile din membrul drept calculate în 0). În consecință:

$$\gamma(s) - \gamma(0) = \left(s - \frac{s^3}{6}k^2\right)\mathbf{t} + \left(k\frac{s^2}{2} + k'\frac{s^3}{6}\right)\mathbf{n} + k\tau\frac{s^3}{6}\mathbf{b} + R.$$

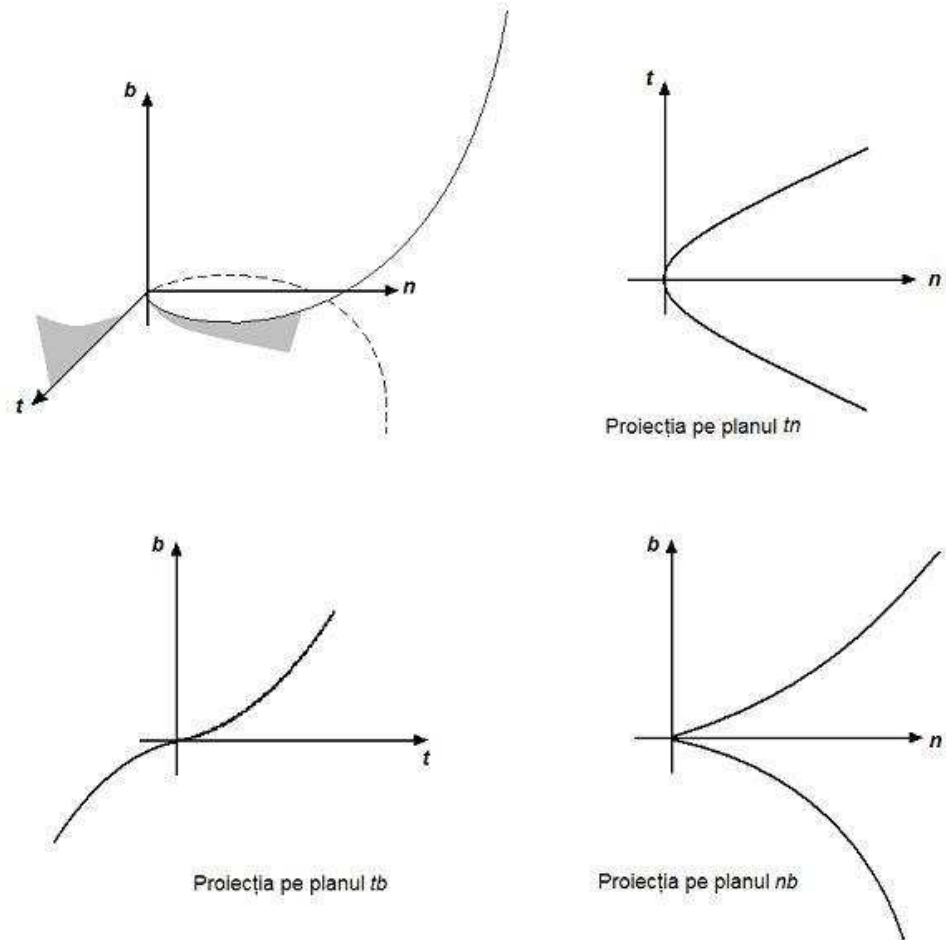
Facem acum o translație a reperului din \mathbb{R}^3 astfel încât $\gamma(0) = 0$. Dacă notăm x, y, z coordonatele în reperul Frenet, atunci coordonatele lui $\gamma(s)$ în reperul Frenet în punctul $\gamma(0)$ sînt:

$$(1.4) \quad x(s) = s - \frac{1}{6}k^2s^3 + R_x,$$

$$(1.5) \quad y(s) = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}k's^3 + R_y,$$

$$(1.6) \quad z(s) = \frac{1}{6}k\tau s^3 + R_z.$$

cu R_x, R_y, R_z de același ordin de mărime cu s^3 .



Exercițiul 1.2.17. Planul osculator în s_0 e poziția limită a planului determinat de t și $\gamma(s_0 + h)$ când $h \rightarrow 0$. Să se deducă de aici că planul osculator în s_0 e poziția limită și pentru planul determinat de punctele $\gamma(s_0), \gamma(s_0 + h_1), \gamma(s_0 + h_2)$ când h_1, h_2 tind la 0.

Soluție. Luând $s_0 = 0$ și $\gamma(0) = 0$, un plan care trece prin t are, în reperul Frenet, ecuația $z = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sau $y = 0$. Aceasta din urmă este ecuația planului rectificanț și iese din discuție (motivați!). Dacă $z = ay$ trece prin $\gamma(h)$ atunci:

$$a = \frac{z}{y} = \frac{\frac{k\tau h^3}{6} + \dots}{\frac{kh^2}{2} + \frac{k'h^3}{6} + \dots},$$

deci $a \rightarrow 0$ când $h \rightarrow 0$. A doua caracterizare se obține din prima observînd că, atunci când $h_1 \rightarrow 0$, coarda determinată de $\gamma(s_0)$ și $\gamma(s_0 + h_1)$ tinde la tangenta în s_0 .

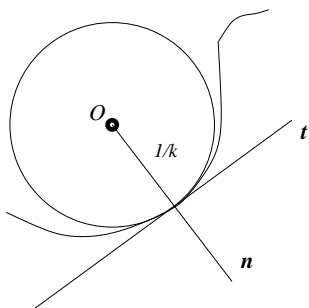
Rezultă de aici că, dintre toate planele tangente la curbă, planul osculator este cel care o aproximează cel mai bine. Astfel, curbura măsoară tendința curbei de a se depărta de tangență

în acest plan, de a se îndoi. Analog, torsiunea măsoară tendința curbei de a ieși din planul osculator.

Exercițiul 1.2.18. Fie $k(s_0) \neq 0$. Să se arate că în planul osculator în punctul $\gamma(s_0)$ există un unic cerc care are un contact de ordinul 3 cu curba (intersectează curba în trei puncte confundate). Cercul acesta se numește *cerc osculator* sau *de curbură*; raza sa este $1/k(s_0)$ și se numește *raza de curbură*.

Soluție. Ca mai sus, presupunem $s_0 = 0$ și $\gamma(s_0) = 0$. Considerăm \mathbb{R}^3 raportat la reperul Frenet în punctul $\gamma(0)$. Cercul căutat trebuie să fie, în planul osculator, tangent curbei în $\gamma(0)$, deci va avea centrul pe direcția normală principală la curbă. Ecuatiile unui cerc din planul osculator în $\gamma(0)$ sînt:

$$\begin{cases} x^2 + (y-r)^2 &= r^2, \\ z &= 0. \end{cases}$$



Cercul osculator al unei curbe plane.

Punctele de intersecție cu curba sînt soluțiile ecuației:

$$x(s)^2 + (y(s) - r)^2 = r^2$$

Înlocuim aici $x(s), y(s)$ din forma canonică locală:

$$(s + O(2))^2 + (k \frac{s^2}{2} - r + O(2))^2 = r^2.$$

Obținem, neglijînd termenii de grad mai mare sau egal cu trei:

$$s^2(1 - rk) + O(2) = 0$$

Avem contact de ordinul trei dacă și numai dacă $1 - rk = 0$. În concluzie, cercul cerut există și are raza egală cu inversul curburii în punctul considerat.

Exercițiul 1.2.19. Cercul osculator în s_0 e poziția limită a cercului determinat de punctele $\gamma(s_0), \gamma(s_0 + h_1), \gamma(s_0 + h_2)$ cînd h_1, h_2 tind la 0.

Exercițiul 1.2.20. Formulați și demonstrați un rezultat asemănător pentru torsiune folosind planul rectificanț.

Propoziția 1.2.10 admite o reciprocă cunoscută sub numele de *Teorema fundamentală a teoriei curbilor* care spune, în esență, că există un unic (pînă la izometrie al spațiului) arc de curbă cu curbură și torsiunea prestabilite. Mai precis:

Teorema 1.2.21. Fie $I \subset \mathbb{R}$ și $k: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții diferentiabile. Atunci există curbe parametrizate canonic $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ pentru care funcțiile curbură și torsiune sînt k , respectiv τ . Mai mult, imaginile a oricare două astfel de curbe diferă printr-o izometrie a lui \mathbb{R}^3 .

Demonstrație. Vom împărți demonstrația în trei pași.

Pașul 1. Considerăm sistemul de ecuații diferențiale liniare (1.3) cu necunoscutele t ,

n, b. Conform teoremei de existență și unicitate pentru sisteme de ecuații diferențiale (vezi, de exemplu, [Ha]) avem soluție unică de îndată ce fixăm un triplet $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ drept condiție inițială într-un punct $s_0 \in I$. Trebuie acum să arătăm că dacă $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ e ortonormat, atunci și $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ e ortonormat (cu alte cuvinte, trebuie arătat că soluția problemei de ecuații diferențiale e soluție și pentru problema de geometrie de la care am plecat). Pentru aceasta reluăm notațiile $e_1 = \mathbf{t}$, $e_2 = \mathbf{n}$ și $e_3 = \mathbf{b}$. Punem $e_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Trebuie văzut că $e_{ij}(s) = \delta_{ij}$. Avem

$$(1.7) \quad \frac{de_{ij}}{ds} = a_i^k e_{kj} + a_j^k e_{ik}$$

Cu condiția inițială $e_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$, sistemul (1.7) are soluție unică. Deoarece $e_{ij}(s) = \delta_{ij}$ verifică sistemul (pentru că matricea (a_i^k) e antisimetrică), aceasta e unica soluție.

Pasul 2. Constă în integrarea ecuației $\frac{d\gamma}{ds} = \mathbf{t}(s)$ cu $\mathbf{t}(s)$ soluție găsită la Pasul 1. Avem :

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\sigma) d\sigma + \gamma(s_0),$$

astfel că vectorul tangent la γ este chiar $\mathbf{t}(s)$. Cum acesta e unitar, γ e parametrizată canonic. Se verifică imediat că τ și k sînt, respectiv, torsiunea și curbura lui γ .

Pasul 3. Unicitatea pînă la deplasări în \mathbb{R}^3 rezultă în felul următor. Să considerăm $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, cu $k_1(s) = k_2(s)$, $\tau_1(s) = \tau_2(s)$. Fie $\mathcal{E}_{i0} = \{\mathbf{t}_{i0}, \mathbf{n}_{i0}, \mathbf{b}_{i0}\}$ triedrele Frenet corespunzătoare în punctul s_0 . Cum acestea sînt ortonormate, există o izometrie F a lui \mathbb{R}^3 care păstrează orientarea și satisface: $F(\gamma_1(s_0)) = \gamma_2(s_0)$ și $F(\mathcal{E}_{10}) = \mathcal{E}_{20}$. Deoarece sistemul Frenet (1.3) e liniar, $F(\mathcal{E}_1(s))$ și $\mathcal{E}_2(s)$ sînt soluții ale sale cu aceeași condiție inițială \mathcal{E}_{20} . Din unicitatea soluției rezultă $\mathcal{E}_2(s) = F(\mathcal{E}_1(s))$ deci $\gamma_2(s) = F(\gamma_1(s))$. ■

De exemplu, folosind acest rezultat se poate demonstra:

Exercițiul 1.2.22. O curbă regulată plană cu curbura constantă este un arc de cerc.

Un alt exemplu de aplicare a formulelor lui Frenet și a Teoremei fundamentale avem în:

Exemplul 1.2.23. Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă regulată, cu curbura și torsiunea nicăieri nule. γ se numește *curbă Bertrand* dacă există o curbă $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ astfel încît normalele la γ și γ_1 în fiecare $t \in I$ să fie coliniare. În acest caz cele două curbe se numesc *vecine Bertrand*. Atunci:

1. $\gamma_1(t) = \gamma(t) + r\mathbf{n}(t)$ cu $r = \text{const.}$.
2. γ e curbă Bertrand dacă și numai dacă există constantele reale A și B astfel încît

$$(1.8) \quad Ak(t) + B\tau(t) = 1.$$

3. Dacă γ are cel puțin două vecine Bertrand, atunci e elice circulară și are o infinitate de vecine Bertrand.

Într-adevăr, conform definiției, γ e curbă Bertrand dacă și numai dacă există γ_1 cu

$$(1.9) \quad \gamma_1(t) = \gamma(t) + r(t)\mathbf{n}(t).$$

Fie s (respectiv s_1) parametrul canonic pe γ (respectiv γ_1). În general, $s \neq s_1$. Derivăm (1.9) în raport cu s și găsim:

$$(1.10) \quad \gamma'_1 = [1 - r(s)k(s)]\mathbf{t}(s) + r'(s)\mathbf{n}(s) + r(s)\tau(s)\mathbf{b}(s).$$

Cum \mathbf{n} e normal și la γ_1 , $\langle \gamma'_1, \mathbf{n} \rangle = 0$. Deci, ecuația anterioară implică $r' = 0$, adică 1. Pentru 2., derivăm în raport cu s funcția $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \rangle$. Rezultă:

$$\langle k\mathbf{n}, \mathbf{t}_1 \rangle + \langle \mathbf{t}, k_1 \frac{ds_1}{ds} \mathbf{n}_1 \rangle = 0,$$

deci $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \rangle = \text{const}$. Cum \mathbf{t} și \mathbf{t}_1 sînt unitari, putem scrie $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \rangle = \cos \theta$, cu $\theta = \text{const}$. Revenind în relația (1.10) scrisă sub forma:

$$\frac{ds_1}{ds} \mathbf{t}_1 = [1 - rk(s)]\mathbf{t}(s) + r\tau(s)\mathbf{b}(s),$$

vedem că \mathbf{t}_1 aparține planului rectificanț al lui γ . Făcînd, pe rînd, produsul scalar cu \mathbf{t} și \mathbf{b} obținem:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{ds} \cos \theta &= 1 - rk(s), \\ \frac{ds_1}{ds} \sin \theta &= r\tau(s). \end{aligned}$$

De aici decurge (1.8) cu $A = r$ și $B = r \operatorname{ctg} \theta$.

Reciproc, definim $\gamma_1 = \gamma + A\mathbf{n}$ cu A dat de (1.8). Trebuie arătat că normalele lui γ și γ_1 sînt coliniare. Avem:

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = (1 - Ak)\mathbf{t} + A\tau\mathbf{b} = \tau(B\mathbf{t} + A\mathbf{b}),$$

deci un vector tangent unitar la γ_1 (egal cu \mathbf{t}_1 pînă la semn) va fi

$$\mathbf{t}_1 = (A^2 + B^2)^{-1/2}(B\mathbf{t} + A\mathbf{b}).$$

Atunci:

$$k_1 \mathbf{n}_1 = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = (A^2 + B^2)^{-1/2}(Bk - A\tau) \frac{ds}{ds_1} \mathbf{n},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru a demonstra 3. observăm întîi că o elice circulară, de ecuație ($a \cos s, a \sin s, bs$) cu $a^2 + b^2 = 1$, $a, b > 0$, avînd $k = a$, $\tau = b$ este o curbă Bertrand și are o infinitate de vecine Bertrand (scrieți explicit ecuațiile lor). Pe de altă parte, conform Teoremei fundamentale, elicea circulară este singura curbă cu curbura și torsiunea constante. Dar dacă γ admite vecinele Bertrand diferite γ_1 și γ_2 , atunci putem asocia sistemul $A_1 k(t) + B_1 \tau(t) = 1$, $A_2 k(t) + B_2 \tau(t) = 1$. E un sistem liniar, cu coeficienți constanți al cărui determinant nu poate fi nul (motivați!). Rezultă curbura și torsiunea lui γ constante, ca soluții ale sistemului. Deci γ e elice circulară.

Exercițiul 1.2.24. 1) Produsul torsiunilor a două curbe Bertrand e constant.

2) Orice curbă care nu e elice circulară și are curbura constantă pozitivă are o vecină Bertrand, cu aceeași curbură. Fiecare dintre cele două curbe e locul centrelor de curbură ale celeilalte.

Deoarece, așa cum spuneam mai sus, cele mai multe curbe care apar în aplicații nu sînt parametrizate canonic și reparametrizarea e, cel mai adesea, anevoioasă, e util să avem și expresiile curburii și torsiunii într-o parametrizare oarecare.

Propoziția 1.2.25. *Într-o parametrizare oarecare avem:*

$$(1.11) \quad k(t) = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3},$$

$$(1.12) \quad \tau(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

unde am notat $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$, $\gamma'' = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$, $\gamma''' = \frac{d^3\gamma}{dt^3}$.

Demonstrație. Notînd cu s parametrul canonic pe γ avem $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\gamma}{dt}\|$. Atunci $\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. Derivăm în raport cu s și obținem:

$$\begin{aligned} k\mathbf{n} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^2} \\ &= \frac{\gamma''}{\|\gamma'\|^2} - \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^2} \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Să presupunem $k \neq 0$. Înmulțim vectorial la stînga cu \mathbf{t} egalitatea anterioară și (deoarece $v \times v = 0$ pentru orice vector v) găsim:

$$k\mathbf{b} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma'\|^3}.$$

Cum \mathbf{b} e unitar și $k > 0$, luînd aici norma rezultă prima formulă din enunț. În plus, vedem că \mathbf{b} e la fel orientat cu $\gamma' \times \gamma''$, deci expresia sa într-o parametrizare arbitrară este:

$$(1.13) \quad \mathbf{b} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}.$$

Să mai observăm că dacă într-un punct curbura se anulează, atunci γ'' e colinar cu γ' și produsul lor vectorial e nul, rezultat consistent cu formula pe care am găsit-o.

Pentru expresia torsiunii plecăm cu a treia formulă Frenet în care exprimăm derivata lui \mathbf{b} în raport cu s prin intermediul derivatei în raport cu t , folosind formula (1.13):

$$\begin{aligned} -\tau\mathbf{n} &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'\|} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \\ &= \frac{1}{\|\gamma'\|} \left[\frac{\gamma' \times \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} + (\gamma' \times \gamma'') \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \right]. \end{aligned}$$

Înmulțim la stînga cu \mathbf{b} relația găsită. Rezultă:

$$\tau\mathbf{t} = \frac{1}{\|\gamma'\|} \cdot \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times (\gamma' \times \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.$$

Acum folosim o formulă binecunoscută care exprimă neasociativitatea produsului vectorial:

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

Luînd $u = \gamma' \times \gamma''$, $v = \gamma'$, $w = \gamma'''$ și ținînd seama că produsul vectorial a doi vectori e perpendicular pe fiecare dintre ei, avem:

$$(\gamma' \times \gamma'') \times (\gamma' \times \gamma''') = \langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle \gamma' = \det(\gamma', \gamma'', \gamma''') \gamma'$$

ceea ce, ținînd seama că $t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$, încheie demonstrația. ■

Exemplul 1.2.26. Fie curba

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Avem:

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t),$$

deci $\|\gamma'(t)\| = e^t \sqrt{3}$. Pentru lungimea arcului obținem:

$$s(t) = \int_0^t e^\tau \sqrt{3} d\tau = \sqrt{3}(e^t - 1),$$

cu inversa $h(s) = \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. Deci expresia curbei în parametrizarea prin lungimea arcului este:

$$\gamma(s) = \left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cos \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right).$$

Acesta este unul dintre cazurile fericite cînd putem parametriza explicit prin lungime de arc, dar nu vom continua calculele în această parametrizare ci vom reveni la cea arbitrară, în t , pentru a calcula curbura și torsiunea. Pentru derivatele a doua și a treia găsim:

$$\gamma''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t),$$

$$\gamma'''(t) = (-2e^t(\cos t + \sin t), 2e^t(\cos t - \sin t), e^t).$$

Pentru produsul vectorial $\gamma' \times \gamma''$ obținem:

$$\gamma' \times \gamma'' = (e^{2t}(\sin t - \cos t), -e^{2t}(\cos t + \sin t), 2e^{2t}).$$

Astfel $\|\gamma' \times \gamma''\| = e^{2t} \sqrt{6}$ și, conform cu (1.11), curbura este:

$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t}.$$

În fine,

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \\ -2e^t(\cos t + \sin t) & 2e^t(\cos t - \sin t) & e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t},$$

ceea ce, cu formula (1.12), conduce la:

$$\tau(t) = \frac{1}{3} e^{-t}.$$

Să observăm că, deși curbura și torsiunea lui γ sînt neconstante, raportul lor este constant: $\frac{k}{\tau} = \sqrt{2}$. Deci γ este o elice (Propoziția 1.2.15). Deoarece $(x^1)^2 + (x^2)^2 = e^{2t} = (x^3)^2$, imaginea curbei stă pe un con cu vîrfurile în origine și cu înălțimea Ox^3 , anume pe pînza corespunzătoare lui $x^3 > 0$. Să găsim versorul direcției fixe, fie el $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ cu care γ' face unghi constant. Cerem ca produsul scalar dintre \mathbf{a} și versorul $\frac{1}{3}((\cos t - \sin t), (\sin t + \cos t), 1)$ al direcției tangente să fie constant. Obținem ecuația:

$$\alpha(\cos t - \sin t) + \beta(\sin t + \cos t) + \gamma = \text{const.}$$

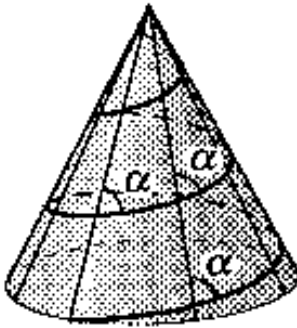
Deci derivata funcției

$$f(t) = (\beta + \alpha) \cos t + (\beta - \alpha) \sin t + \gamma$$

trebuie să fie identic nulă. Așadar ecuația:

$$(\beta + \alpha) \sin t - (\beta - \alpha) \cos t = 0$$

trebuie să fie identic satisfăcută. Cum $\cos t$, $\sin t$ sînt liniar independente peste \mathbb{R} , obținem $\beta + \alpha = 0$ și $\beta - \alpha = 0$, adică $\alpha = \beta = 0$. Atunci $\gamma = 1$ și $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Rezultă de aici și că elicea conică taie generatoarele conului sub un unghi constant.



Exercițiul 1.2.27. Să se calculeze curbura și torsiunea curbei (situată pe un cilindru eliptic): $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$, $a, b, c, > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 1.2.28. Găsiți curbura și torsiunea unei curbe de forma $(t, f(t), g(t))$, cu f, g diferențiabile. Aplicație pentru curba dată ca intersecție a suprafețelor $x^3 = 3a^2y$ și $2xz = a^2$.

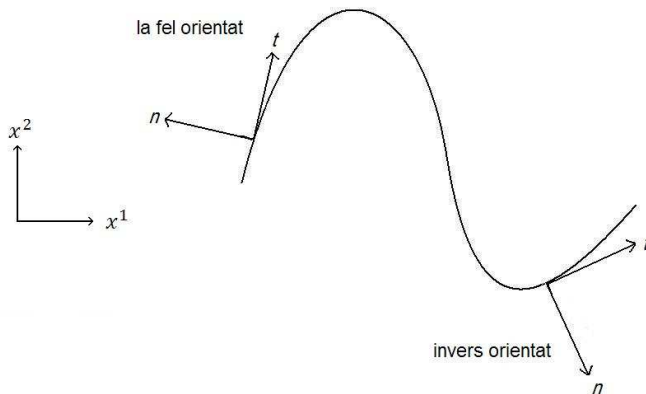
Exercițiul 1.2.29. Prin fiecare punct P al curbei $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2})$ se duce, în direcția pozitivă a normalei principale în P , un segment de lungime egală cu de patru ori curbura lui γ în P . Să se arate că ecuația planului osculator la curba descrisă de capătul segmentului este $x^2 = 1$.

Observația 1.2.30. În cazul unei curbe din \mathbb{R}^n (vezi Observația 1.1.7) un „reper Frenet“ se poate atașa astfel: se presupune că vectorii $\{\frac{d\gamma}{ds}, \dots, \frac{d^{n-1}\gamma}{ds^{n-1}}\}$ sînt independenți (este generalizarea condiției din \mathbb{R}^3 de neanulare a celei de-a doua derivate) și se ortonormează cu procedeul Gram-Schmidt. Apoi, derivînd relațiile de ortonormalitate dintre vectorii obținuți se obțin analogele formulelor Frenet și n funcții k_1, \dots, k_n numite „curburi“. Detalii se găsesc în [1a1], pag.30.

3. Curbe plane

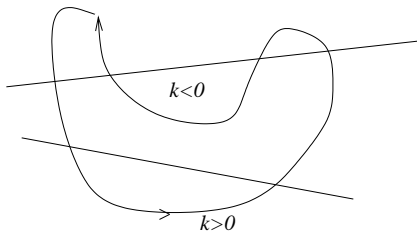
Să presupunem acum că $\Gamma = \text{Im } \gamma$ e situată într-un plan. După o eventuală izometrie a lui \mathbb{R}^3 putem considera că acest plan este $x^1 O x^2$ identificat cu \mathbb{R}^2 . Presupunem curba parametrizată canonic. Știm deja că planul curbei coincide cu planul osculator (acolo unde acesta e definit). Rezultă că în punctele în care triedrul Frenet există, el poate fi înlocuit de un reper format de doar doi vectori ortonormați în \mathbb{R}^2 . Pentru curbele plane e util să deosebim între cele convexe și cele concave. Distanția se face cu ajutorul curburii care acum capătă semn (curbura fără semn nu poate distinge un arc de parabolă de simetricul său față de tangenta prin vîrf; ori aceste arce sînt direct izometrice în \mathbb{R}^3 dar nu în \mathbb{R}^2). Pentru aceasta vom modifica întîi definiția vectorului normal principal. Direcția lui \mathbf{n} fiind cunoscută (cea a lui $d^2\gamma/ds^2$) vom stabili sensul astfel ca reperul Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ să fie la fel orientat cu reperul canonic $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Cu această alegere definim funcția curbura prin ecuația

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$



Exercițiul 1.3.1. Să se arate că $|\kappa|$ este curbura lui Γ văzută ca o curbă în spațiu.

Indicație: Folosiți cercul osculator.



Semnul curburii este legat de convexitate. Pe o curbă convexă, curbura are semn constant.

E ușor de arătat că a doua (și ultima în acest caz) formulă Frenet este:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Forma canonică locală a unei curbe plane se va reduce acum la primele două ecuații în care, de altfel, nu apare torsiunea. Doar că acum, κ notează curbura cu semn (de altfel, ecuațiile care urmează se pot deduce și direct din formulele Frenet pentru curbe plane).

$$(1.14) \quad x(s) = s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3 + R_x,$$

$$(1.15) \quad y(s) = \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3 + R_y.$$

Folosind aceste noi ecuații putem da o interpretare simplă a modulului curburii curbelor plane:

Exercițiul 1.3.2. Fie T dreapta tangentă în $p = \gamma(s_0)$ la γ . Fie L o paralelă la $\mathbf{n}(s_0)$ la distanță d de p . Fie h lungimea segmentului determinat pe L de γ și intersecția cu T . Atunci:

$$|\kappa(s_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{d^2}.$$

Soluție: Presupunem $s_0 = 0$, $\gamma(0) = 0$. Alegem un sistem de coordonate cu originea O în p și cu axele orientate, respectiv, după $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$. Atunci ecuațiile canonice locale ale lui γ vor fi, pînă la termeni de ordinul al doilea inclusiv:

$$x(s) = s + R_x, \quad y(s) = \pm \frac{\kappa s^2}{2} + R_y$$

cu R_x, R_y tinzînd la zero odată cu s^2 și semnul lui y depinzînd de orientare. Atunci:

$$|\kappa(0)| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2|y(s)|}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2h}{d^2}.$$

La fel cum am găsit expresia curburii și torsiunii curbelor strîmbe într-o parametrizare oarecare, putem găsi expresia curburii pentru o curbă plană:

Propoziția 1.3.3. Într-o parametrizare oarecare curbura unei curbe plane e dată de relația:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{(x^1)'(x^2)'' - (x^1)''(x^2)'}{((x^1)^2 + (x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstrație. Cheia demonstrației este determinarea vectorului normal unitar. Fie s parametrul canonic pe γ . Avem $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\gamma}{dt}\|$, deci $\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = (\|\gamma'\|)^{-1}((x^1)'\mathbf{e}_1 + (x^2)'\mathbf{e}_2)$.

Fie $\mathbf{n} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, cu a, b funcții diferențiabile de t și $a^2 + b^2 = 1$. Trebuie să avem $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$, de unde:

$$a(x^1)' + b(x^2)' = 0.$$

Obținem $(a, b) = \varepsilon \|\gamma'\|^{-1}(-(x^2)', (x^1)')$ cu $\varepsilon = \pm 1$ determinat de condiția ca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ să fie pozitiv orientat. Deci impunem condiția:

$$\varepsilon \begin{vmatrix} (x^1)' & (x^2)' \\ -(x^2)' & (x^1)' \end{vmatrix} > 0.$$

Rezultă $\varepsilon = 1$, adică $\mathbf{n} = \|\gamma'\|^{-1}(-(x^2)'\mathbf{e}_1 + (x^1)'\mathbf{e}_2)$. Pe de altă parte, din prima formulă Frenet rezultă:

$$\kappa \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma''}{\|\gamma'\|^2} - \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^3} \cdot \mathbf{t}.$$

Facem produsul scalar cu $\mathbf{n} = \|\gamma'\|^{-1}(-(x^2)'e_1 + (x^1)'e_2)$ și obținem:

$$\kappa = \|\gamma'\|^{-2} \langle \gamma'', \mathbf{n} \rangle = \|\gamma'\|^{-3} \cdot (-(x^1)''(x^2)' + (x^2)''(x^1)'),$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

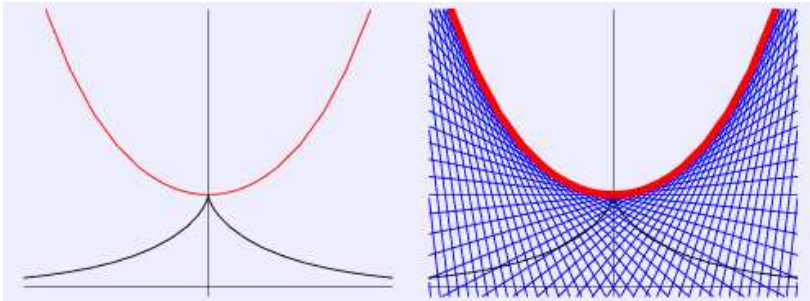
Exercițiul 1.3.4. Să se calculeze curbura *tractricei*:

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2})$$

și a *catenarei* (sau *lănțișorului*; este poziția de echilibru a unui fir greu și omogen, flexibil și inextensibil, ale cărui capete sînt fixate în două puncte):

$$\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, t).$$

Să se arate că segmentul de pe tangenta la tractrice determinat de punctul de contact și intersecția cu Ox^2 are lungime constantă. Să se arate că tangentele catenarei sînt normalele tractricei. Ne vom reîntîlni cu aceste curbe în Capitolul 2 cînd vom studia suprafețele generate de rotirea lor în jurul axei verticale.



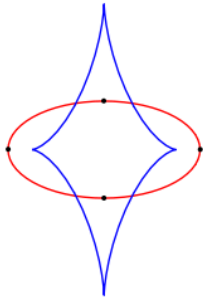
Tractricea și evoluta sa – catenara.

O curbă care înfășoară normalele alteia se numește *evoluta* celei de-a doua (înfășurătoarea unei familii de drepte este o curbă care, în fiecare punct al ei, e tangenta unei unice drepte din familie). Deci ecuația evolutei lui γ este $\gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$, adică evoluta unei curbe plane e locul centrelor cercurilor osculatoare. Reciproc, față de evoluta sa, γ se numește involută. În exercițiul anterior am văzut că evoluta plană tractricei e catenara.

Exercițiul 1.3.5. Arătați că evoluta elipsei $(a \cos t, b \sin t)$ e *astroida* de ecuație

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right).$$

Arătați că, în general, astroida $(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ e locul unui punct fix de pe un cerc de rază $a/4$ care se rotește fără frecare în interiorul unui cerc de rază a . Arătați că segmentul de tangentă la astroidă dintre axele de coordonate are lungime constantă. Astroida e o curbă care a apărut în cercetările legate de roți dințate, dar evoluta elipsei fusese determinată, cu mijloace exclusiv sintetice, încă de Apollonius.



Evoluta elipsei e o astroidă.

Exercițiul 1.3.6. Arătați că tangentele la elicea $(\cos t, \sin t, t)$ intersectează planul $x^1 O x^2$ după o involută a cercului unitate.

Exercițiul 1.3.7. Să se arate că locul geometric al unui punct fix de pe un cerc de rază a care se rostogolește fără frecare pe o dreaptă este curba de ecuații:

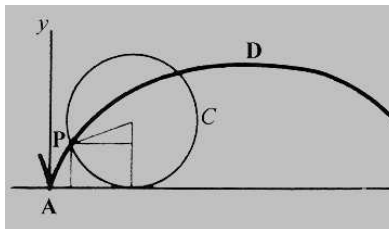
$$x^1(t) = a(t - \sin t), \quad x^2(t) = a(1 - \cos t).$$

Curba aceasta se numește *cicloidă* și are proprietăți geometrice și mecanice foarte interesante.

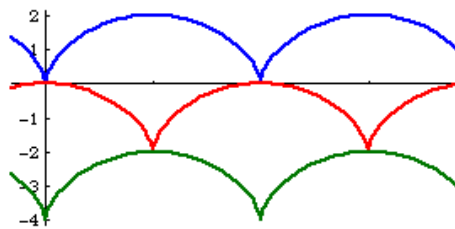
Se poate arăta că evoluta cicloidei e tot o cicloidă. Într-adevăr: $\gamma'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$, $\gamma''(t) = (a \sin t, a \cos t)$ și curbura rezultă $\kappa = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}$. Cum $\mathbf{n} = \frac{1}{2a \sin \frac{t}{2}}(-a \sin t, a(1 - \cos t))$, rezultă pentru evolută ecuația:

$$\gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} = (a(t + \sin t), a(\cos t - 1)).$$

Dar aceasta e o curbă congruentă cu γ , modulo translația la stânga cu πa și în jos cu $2a$, adică vectorul de translație e $(-\pi a, -2a)$.



Cicloida ca loc geometric.



Evoluta cicloidei e tot o cicloidă.

Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli și Christian Huygens au arătat, separat, că cicloida este soluția problemelor tautocroniei (sau izocroniei) și a brahisticroniei.

Problema tautocroniei cere să se găsească acea curbă care unește A și B în așa fel încât, din orice punct al ei ar porni un corp de masă fixă, să ajungă în B în același timp. Pornind de la această proprietate și de la faptul că evoluta cicloidei e tot o cicloidă, Huygens a proiectat un pendul cicloidal: firul greu e forțat să oscileze între două arce de cicloidă tangente într-un capăt. Frecvența acestui pendul nu va mai depinde de amplitudinea oscilației, astfel că un pendul de acest tip poate indica ora locului unde a fost potrivit inițial oriunde pe glob (să zicem la Greenwich), chiar pe mare, indiferent de condițiile atmosferice. Cu ajutorul lui se poate determina longitudinea în grade (față de meridianul Greenwich) unui punct de pe glob după formula (ora locală - ora Greenwich) $\times 15^\circ/h$.

Iată cum se poate arăta că arcul de cicloidă $(A + a(t - \sin t), B - a(1 - \cos t))$ – simetricul față de Ox^1 al celui de mai sus – satisface problema tautocroniei: energia cinetică e legată de energia potențială prin relația $v^2 = 2g(y_2 - y_1)$ (aici g e accelerația gravitațională și, pentru simplitate, notăm $x = x^1, y = x^2$). Cum timpul e distanța raportată la viteză, iar distanța se obține integrând lungimea vectorului tangent, timpul se calculează integrând ecuația $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y - y_0)}}$. Cum

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ și } dx = \frac{dx}{du} du = a(1 - \cos u) du, \quad dy = \frac{dy}{du} du = a \sin u, \text{ avem de calculat}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_{u_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos u)}{2ag(\cos u_0 - \cos u)}} du = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{u_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos u}{\cos u_0 - \cos u}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{u_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{u}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{u_0}{2} - \cos^2 \frac{u}{2}}} du = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (\text{cu substituția } z = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\cos \frac{u_0}{2}}) \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin z \Big|_0^1 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \end{aligned}$$

deci timpul de parcurs nu depinde de punctul intermediar de pornire.

Pentru detalii (și nu numai) se pot consulta articolele: H. Geiges, *Christian Huygens and contact geometry*, arXiv:math.HO/0501255 și Jeff Brooks, Satha Push, *The cycloidal pendulum*, The Amer. Math. Monthly, 109 (2002), 463–465.

Problema brahistocroniei cere să se unească două puncte A și B într-un plan vertical printr-o curbă în așa fel ca un corp de masă fixă care alunecă numai sub acțiunea gravitației să ajungă în timpul cel mai scurt din A în B . De rezolvarea ei se leagă nașterea a ceea ce azi numim calcul variațional. Problema este mai grea pentru că presupune găsirea unei curbe (cilcoida, în speță) cu o anume proprietate de minimalitate între *toate* curbele unesc două puncte.

Fie Γ o curbă plană și $\sigma: \Gamma \rightarrow S^1$ aplicația $\sigma(\gamma(s)) = \mathbf{t}(s)$ (s e parametrul canonic). Cum vectorul tangent e același în orice parametrizare canonică σ e bine definită, continuă și diferențiabilă. Fie $\alpha(s) \in [0, 2\pi)$ unghiul orientat (în sens trigonometric) dintre x^1 și $\sigma(s)$. $\alpha(s)$ e unghiul dintre axa absciselor și raza vectoare prin origine paralelă cu tangenta în $\gamma(s)$. Din păcate α nu e nici măcar continuă (e suficient să vedeți ce se întâmplă la trecerea printr-un punct în care tangenta e paralelă cu Ox^1 : de o parte a punctului α tinde la zero, de cealaltă se apropie de 2π). Totuși, putem demonstra:

Lema 1.3.8. *Pe orice subinterval închis $[a, b] \subset I$ există funcții continue $\theta(s)$ care satisfac relația $\theta(s) = \alpha(s) + 2m(s)\pi$, cu $m(s) \in \mathbb{Z}$. O asemenea funcție e complet determinată de alegerea arbitrară a lui $m(a)$. Două asemenea funcții diferă prin $2\pi h$, cu h constantă întreagă.*

Demonstrație. Funcția $\mathbf{t}(s)$ e uniform continuă pe $[a, b]$. Atunci există $\delta > 0$ astfel ca $|s - s'| < \delta$ să implice că $\mathbf{t}(s')$ aparține semicercului deschis cu centrul în $\mathbf{t}(s)$ (unde am notat la fel tangenta unitară la curbă și raza vectoare paralelă cu ea în cercul unitate centrat în origine). Alegem acum o diviziune $a < s_1 < \dots < s_n < b$ a intervalului $[a, b]$ de normă strict inferioară lui δ . Definim $\theta(a)$ fixînd în mod arbitrar un $m(a)$ întreg. Există o unică funcție $\theta(s)$ pe $[a, s_1]$, continuă, de formă $\alpha(s) + 2m(s)\pi$ și astfel încît $|\theta(s) - \theta(a)| < \pi/2$. Această din urmă condiție poate fi îndeplinită datorită felului în care a fost aleasă diviziunea. Pe de altă parte, dacă ar mai exista o funcție $\hat{\theta}$ cu aceleași

proprietăți am avea:

$$|\theta(s) - \tilde{\theta}(s)| < |\theta(s) - \theta(a)| + |\tilde{\theta}(s) - \theta(a)| < \pi$$

astfel că cele două valori $\theta(s), \tilde{\theta}(s)$ nu pot măsura același unghi $\alpha(s)$. Așadar există o unică funcție $\theta(s)$ ca mai sus. Continuitatea ei este clară. Cunoaștem acum valoarea $m(s_1)$. Cu ea reluăm construcția pe intervalul $[s_1, s_2]$ și așa mai departe. A rezultat că θ poate fi definită într-un număr finit de pași. Dacă $\theta(s)$ și $\tilde{\theta}(s)$ sînt două astfel de funcții, diferența lor e o funcție continuă cu valori întregi, deci constantă. Acum soluția e completă. ■

De fapt, e adevărat mai mult:

Lema 1.3.9. *Funcția unghiulară θ construită anterior e diferențiabilă pe întreg intervalul de definiție. Demonstrație.* Funcția θ verifică ecuațiile:

$$\frac{dx^1}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dx^2}{ds} = \sin \theta$$

de unde

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{(x^2)'}{(x^1)'}$$

deci este local derivabilă. Din formulele lui Frenet rezultă acum

$$(1.16) \quad \kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$$

Considerăm acum curba dată γ și-i calculăm curbura cu relația din Propoziția 1.3.3 (în care nu intervine funcția unghiulară). Construim un nou arc de curbă γ_1 astfel: determinăm întâi o funcție unghiulară diferențiabilă prin formula

$$\theta_1(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s \kappa(s) ds.$$

Integrarea e posibilă pentru că funcția k e continuă. Punem apoi:

$$y^1(s) = x^1(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \theta_1(s) ds,$$

$$y^2(s) = x^2(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \theta_1(s) ds.$$

Prin construcție, curba $(y^1(s), y^2(s))$ are funcția unghiulară diferențiabilă și are aceeași curbura ca și γ . Pe de altă parte, din *Teorema fundamentală a teoriei curbelor*, avînd aceeași curbura și intersectîndu-se în s_0 , γ și γ_1 coincid. ■

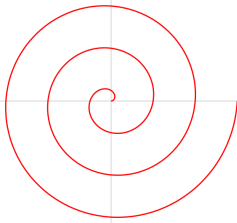
Exercițiul 1.3.10. Găsiți parametrizarea unei curbe plane cu $\kappa = 1/\sqrt{s}$.

Exercițiul 1.3.11. Uneori e convenabil să reprezentăm o curbă plană în coordonate polare (r, φ) , unde r e distanța de la originea reperului $x^1 O x^2$ la punctul de pe curbă și φ e unghiul orientat dintre Ox^1 și raza vectoare.

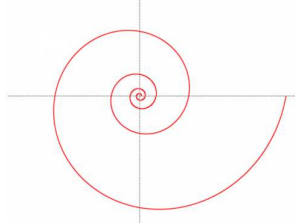
- (1) Arătați că dacă γ e definită de ecuația $r = r(\varphi)$, atunci lungimea arcului între φ_1 și φ_2 este $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$ și $\kappa = \frac{2r' - r r'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$.

- (2) Calculați curbura *spiralei lui Arhimede*, dată în coordonate polare prin $r(\varphi) = a\varphi$, $a = \text{const.}$
- (3) *Spirala logaritmică* este curba descrisă în coordonate polare de ecuațiile: $r(t) = e^t$, $\varphi(t) = at$, $a = \text{const.}$ Arătați că lungimea ei în intervalul $(-\infty, t]$ e proporțională cu raza $r(t)$, iar vectorul de poziție face unghi constant cu vectorul tangent. În plus, spirala logaritmică e congruentă cu evoluta și cu evolventa sa.

Spirale logaritmice aproximative apar în natură: brațele unor galaxii spirale, secțiuni într-un nautilus, unele plaje oceanice. Vedeți imagini, de exemplu la: <http://scienceblogs.com/chaoticutopia/upload/2006/11/spiral.jpg>



Spirala lui Arhimede



Spirala logaritmică

CAPITOLUL 2

Proprietăți globale ale curbelor

Scopul acestei secțiuni este să arate cum se pot utiliza invarianții locali pentru a trage concluzii globale, de natură topologică. Vom prezenta doar câteva asemenea rezultate care se încadrează în linia generală cărții. Cititorul interesat poate găsi și alte rezultate în excelenta monografie [Ca] sau în [Ia1], [Kl], [Va], [Sp] etc.

1. Teorema de clasificare

Prezentăm acum clasificarea curbelor pînă la difeomorfisme. Demonstrația (datată lui J. Milnor, cf [Mi]) e surprinzător de elementară: în afara unor fapte standard de topologie generală vom folosi doar existența parametrizării prin lungime de arc.

Teorema 2.1.1. *O curbă diferențiabilă Γ care e conexă e difeomorfă cu:*

- i) \mathbb{R} dacă e necompactă;*
- ii) cercul S^1 dacă e compactă.*

În particular, orice curbă necompactă se acoperă cu o unică parametrizare, orice curbă compactă se acoperă cu două parametrizări.

Demonstrația va folosi următoarele trei leme:

Lema 2.1.2. *Fie Γ_i , $i = 1, 2$, două arce ale lui Γ parametrizate canonic. Atunci $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ are cel mult două componente conexe.*

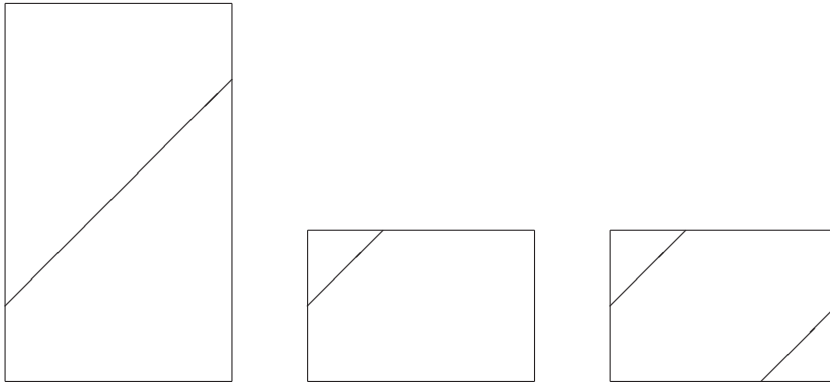
Lema 2.1.3. *Dacă există pe Γ două arce Γ_1, Γ_2 parametrizate canonic, astfel încît $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ și are două componente conexe, atunci Γ e difeomorfă cu un cerc.*

Lema 2.1.4. *Dacă există pe Γ două arce Γ_1, Γ_2 parametrizate canonic, astfel încît $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ și are doar o componentă conexă, atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e un arc care se poate acoperi cu o singură parametrizare canonică.*

Amînăm, pentru moment, demonstrația lemelor și dăm

Demonstrația Teoremei Fie $\gamma : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ o parametrizare oarecare a unui arc din Γ , maximală (în sensul că nu poate fi prelungită peste capetele lui I). E suficient să arătăm că dacă Γ nu e difeomorfă cu S^1 , atunci γ e surjectivă (adică parametrizarea γ acoperă întreaga mulțime Γ). Dacă, prin absurd, $\Gamma_1 = \gamma(I)$ e strict inclusă în Γ , atunci există un punct limită al lui Γ_1 $p_0 \in \Gamma - \Gamma_1$. Fie Γ_2 o vecinătate deschisă în Γ a lui p_0 . O parametrizăm canonic și rezultă că arcele Γ_1 și Γ_2 satisfac ipoteza din Lema 2.1.4. Atunci reuniunea lor se poate acoperi cu o singură parametrizare care, pe Γ_1 va coincide cu γ ; contradicție cu maximalitatea lui I . □

Vom demonstra acum cele trei leme.



Cele trei posibilități pentru panta 1

Demonstrație Lema 2.1.2 Fie $\gamma_i(s_i)$ parametrizări canonice ale arcelor Γ_i . Pe fiecare componentă conexă C_α a intersecției $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ avem, conform Lema 1.1.6,

$$s_2 = \pm s_1 + c_\alpha.$$

Considerăm funcția liniară $s_2 = s_2(s_1)$ descrisă mai sus. Graficul său

$$\mathcal{G} = \{(s_1, s_2) \in I_1 \times I_2 \ ; \ \gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2)\}$$

e o reuniune de segmente de pantă ± 1 în planul (s_1, s_2) , existînd un singur segment pentru fiecare componentă conexă C_α . Cum orice componentă conexă e o mulțime deschisă în $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, fiecare segment e o mulțime deschisă în planul (s_1, s_2) (care nu-și conține capetele). Pe de altă parte, fiecare asemenea segment e închis în topologia relativă a lui $I_1 \times I_2$ pentru că e definit de egalitatea $F(s_1, s_2) = 0$ cu $F(s_1, s_2) = \gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)$ funcție continuă. În concluzie, capetele segmentelor trebuie să fie situate pe laturile dreptunghiului $I_1 \times I_2$. Deoarece schimbările de coordonate sînt bijecții, două segmente nu pot atinge o aceeași latură. Astfel că sînt posibile doar situațiile din primele trei diagrame de mai sus (și celelalte trei corespunzătoare pantei -1):

Demonstrație Lema 2.1.3 În acest caz \mathcal{G} e format din două segmente (ultima diagramă din 1). Făcînd, eventual, o schimbare de orientare (ca să avem panta $+1$) și o translație putem admite că avem diagrama din 1.

Am pus, aici, $a_2 = d$. Fie $I = I_1 \cup I_2 = (a_1, b_2)$ unde

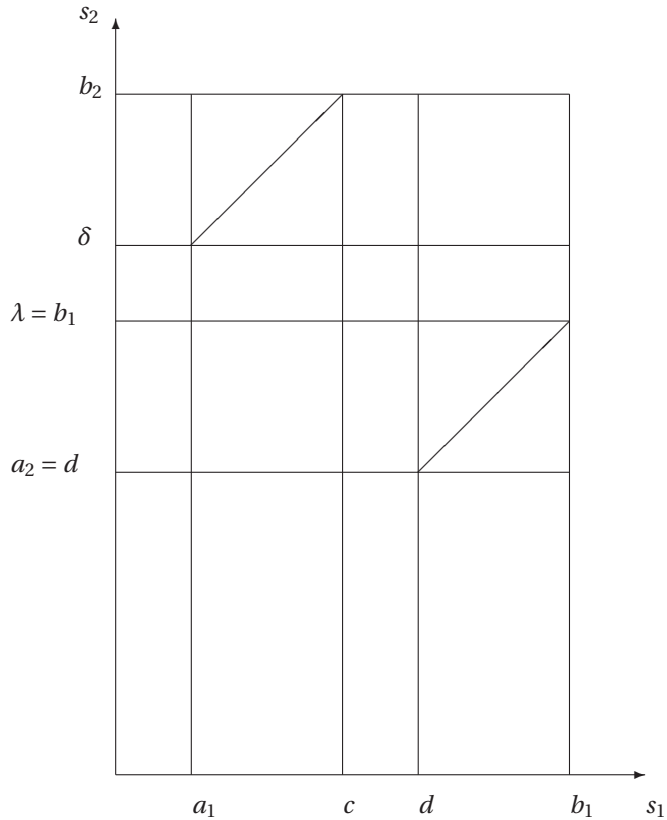
$$(2.1) \quad a_1 < c \leq d = a_2 < b_1 = \lambda \leq \delta < b_2$$

și

$$c - a_1 = b_2 - \delta.$$

Fie s parametrul canonic pe I : $s|_{(a_1, b_1)} = s_1$ și $s|_{(a_2, b_2)} = s_2$. Definim funcția $p: I \rightarrow S^1$ prin

$$p(s) = \left(\cos \frac{s - a_1}{\delta - a_1} 2\pi, \sin \frac{s - a_1}{\delta - a_1} 2\pi \right).$$



Dupa translația în urma căreia $a_2 = d$

Evident p e diferențiabilă. E, în plus, surjectivă: într-adevăr, surjectivitatea e echivalentă cu $0 \leq (s - a_1) / (\delta - a_1) \leq 1$, ceea ce e echivalent cu $a_1 \leq s \leq \delta$. Cum $a_1 - \delta = c - b_2$, rezultă că $p((a_1, \delta]) = p([c, b_2)) = S^1$, adică p acoperă cercul de două ori. Cu ajutorul lui p definim $h : S^1 \rightarrow \Gamma$ prin

$$h(z) = \begin{cases} \gamma_1(z), & \text{dacă există } p^{-1}(z) \in (a_1, b_1) \\ \gamma_2(z), & \text{dacă există } p^{-1}(z) \in (a_2, b_2) \end{cases}$$

Să arătăm că h e bine definită (e necesar pentru că $p^{-1}(z)$ poate avea două elemente, unul în $(a_1, \delta]$, celălalt în $[c, b_2)$). Fie $z \in S^1$ și fie $p^{-1}(z) \cap (a_1, \delta] = \{\sigma_1\}$, $p^{-1}(z) \cap [c, b_2) = \{\sigma_2\}$ Atunci $p(\sigma_1) = p(\sigma_2)$ implică:

$$\frac{\sigma_2 - a_1}{\delta - a_1} 2\pi = \frac{\sigma_1 - a_1}{\delta - a_1} 2\pi + 2m\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

De aici deducem:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + m(\delta - a_1) = \sigma_1 + m(b_2 - c).$$

Ținând cont de inegalitățile (2.1) vedem că m poate lua doar valorile 0 și 1. Atunci:

(1) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \in [c, \delta]$ sau

(2) $\sigma_1 \in (a_1, c)$, $\sigma_2 \in (\delta, b_2)$ și $\sigma_2 = \sigma_1 + (\delta - a_1)$.

După cum se vede, în ambele cazuri relația dintre σ_1 și σ_2 e aceeași cu cea dintre s_1 și s_2 (aici folosim alegerea diagramei cu $a_2 = d$). Deci $\gamma_1(\sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2)$ și h e bine definită.

Să arătăm acum că h e bijectivă. Deoarece γ_i sînt parametrizări, h e injectivă. În plus e diferențiabilă. Cum S^1 e compact, h aplică homeomorf S^1 pe imaginea $h(S^1)$ și $h(S^1)$ e o mulțime închisă în Γ (aici am folosit următoarele rezultate de topologie generală: (a) o injecție continuă unui compact într-un spațiu separat e homeomorfism pe imagine și (b) un compact într-un spațiu separat e închis). Pe de altă parte $h(S^1) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e deschisă în Γ . Cum Γ e conexă, singurele ei submulțimi închise și deschise sînt \emptyset și Γ . Dar $h(S^1) \neq \emptyset$ ceea ce arată că h e surjecție. În fine, inversa lui h e diferențiabilă și demonstrația e încheiată. \square *Demonstrație Lema 2.1.4* În

acest caz \mathcal{G} are un singur segment, grafic al funcției $s_2 = s_1 + c$. Dar această funcție are sens pentru orice $s_1 \in \mathbb{R}$, astfel că o putem considera ca o reparametrizare a întregului arc Γ_1 . Așadar $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e parametrizat canonic de s_2 . \square

Observația 2.1.5. Întrucît nu utilizează în demonstrație decît proprietățile parametrizării canonice, teorema e adevărată și pentru curbe din \mathbb{R}^n (vezi Observația 1.1.7.)

2. Teorema indicelui

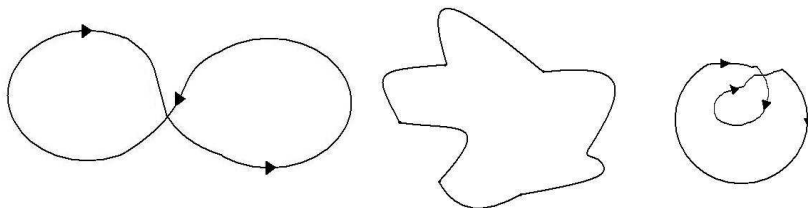
Fie acum Γ imaginea unei curbe închise, conexe. În particular Γ e compactă, deci e difeomorfă cu un cerc. Înseamnă că $\Gamma - \{punct\}$ poate fi acoperită cu o singură parametrizare. Sîntem conduși la următoarea:

Definiția 2.2.1. O curbă închisă e imaginea unei funcții diferențiabile periodice $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dacă o curbă închisă nu are autointersecții (adică γ e injectivă) spunem că ea e *simplă*.

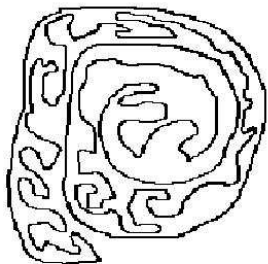
Fie Γ o curbă plană închisă (presupusă parametrizată canonic), l lungimea ei (putem admite că γ e definită pe $[0, l]$) și θ o funcție unghiulară ca cea găsită în Lema 1.3.9. Cum $\gamma(l) = \gamma(0)$, $\theta(l) - \theta(0)$ e un multiplu întreg de 2π , fie el n . Cum orice două funcții unghiulare diferă printr-un multiplu întreg al lui 2π , numărul n nu depinde de alegerea funcției unghiulare. Este bine definit și se numește *indice de rotație*. Intuitiv el indică numărul de rotații (orientate) pe care le face un punct care parcurge o dată curba în jurul unui punct fix din interiorul curbei. Este un invariant topologic (deși acest lucru nu e evident, el fiind definit cu ajutorul unor construcții diferențiabile. Încercați totuși să-l definiți doar pentru curbe continue). De exemplu indicele unui opt este 0, al unui cerc este 1.

Teorema pe care o vom demonstra în continuare îi era cunoscută lui Riemann, dar demonstrația pe care o prezentăm aparține lui H. Hopf (cf. [Ch]).



Curbe cu indice 0, 1, 2

Teorema 2.2.2. *Indicele de rotație al unei curbe plane, simple, închise este ± 1 (în funcție de orientarea curbei).*



O curbă de indice 1...

Demonstrație. Fie $\Lambda = \{(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) \mid 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq l\}$ mulțimea bipunctelor orientate cu capetele pe curbă. Λ se poate reprezenta ca un triunghi Δ în planul $s_1 O s_2$ cu vîrfuri $A(0, 0)$, $B(0, l)$, $C(l, l)$. Fie $\Sigma : \Delta \rightarrow S^1$ aplicația care asociază fiecărui bipunct orientat din Λ capătul vectorului unitar cu originea în $(0, 0)$ paralel cu segmentul determinat de acel bipunct. Restricția lui Σ la latura AC este aplicația tangentă σ (cf. paragrafului despre curbe plane).

Pentru un $p \in \Delta$ fie $\tau(p) \in [0, 2\pi)$ unghiul dintre axa Ox^1 și $O\Sigma(p)$. Ca și în cazul funcției unghiulare α , nici aceasta nu e continuă. Vom arăta și aici că există o funcție diferențiabilă φ care diferă de τ printr-un multiplu întreg de 2π .

Să fixăm un punct m în interiorul lui Δ . E clar că putem folosi argumentele de la construcția funcției unghiulare θ pentru a deduce și aici existența unei funcții φ continue a pe fiecare rază prin m și astfel încît $\varphi(p) \equiv \tau(p) \pmod{2\pi}$.

Fie acum $p_0 \in \Delta$. Pentru a demonstra continuitatea lui φ în p_0 , avem nevoie de niște observații preliminare. Cum $\Sigma((t_1, t_2)) = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|}$, Σ e continuă pe Δ . În particular, e uniform continuă pe segmentul $[mp_0]$ (care e compact în Δ). Deci există un $\eta = \eta(p_0) > 0$ astfel încît pentru $q_0 \in [mp_0]$ și orice $q \in \Delta$ cu distanța $d(q, q_0) < \eta$, punctele $\Sigma(q)$, $\Sigma(q_0)$ nu sînt antipodale. Altfel spus:

$$(2.2) \quad \varphi(q) - \varphi(q_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

Pe de altă parte, tot din continuitatea lui Σ , pentru orice $\epsilon \in (0, \pi/2)$, există o vecinătate U_0 a lui p_0 , $U_0 \subset B(p_0, \eta)$, astfel încît pentru orice $p \in U$ unghiul dintre $O\Sigma(p_0)$ și $O\Sigma(p)$ e strict inferior lui ϵ , adică:

$$(2.3) \quad \varphi(p) - \varphi(p_0) = \epsilon' + 2r(p)\pi, \quad |\epsilon'| < \epsilon$$

cu $r(p) \in \mathbb{Z}$.

Acum, pentru a demonstra continuitatea în p_0 , luăm q_0 arbitrar pe $[mp_0]$ și q pe $[mp]$ astfel încît dreptele q_0q și p_0p să fie paralele. Funcția $\varphi(q) - \varphi(q_0)$ e continuă în q de-a lungul lui $[mp]$ și tinde la 0 cînd q tinde la m . Conform observațiilor anterioare, din $d(q, q_0) < \epsilon$ și (2.2) rezultă $\varphi(q) - \varphi(q_0) < \pi$. Folosind și (2.3) obținem $r(p) = 0$ ceea ce arată că φ e continuă și chiar diferențiabilă deoarece $\varphi \equiv \tau \pmod{2\pi}$.

În notațiile descrise la începutul demonstrației indicele de rotație poate fi calculat cu relația:

$$2n\pi = \int_{AC} d\varphi = \int_{AB} d\varphi + \int_{BC} d\varphi.$$

Pentru calculul ultimilor două integrale alegem un sistem de coordonate convenabil. Anume, unul în care axa Ox^1 să fie tangentă în origine curbei și curba să stea numai în semiplanul superior. Un asemenea sistem de coordonate există pentru că, există un punct $\gamma(s_0)$ cu ordonata minimă și putem presupune $s_0 = 0$. Atunci integrala de-a lungul lui AB reprezintă unghiul cu care se rotește raza OP cînd p parcurge Γ . Deoarece OP nu împunge decît în sus, acest unghi va fi $\pm\pi$. Similar, integrala de-a lungul lui BC măsoară unghiul cu care se rotește raza PO cînd p parcurge o dată curba. PO împunge doar în jos, astfel că valoarea acestei integrale este tot $\pm\pi$. Suma lor este $\pm 2\pi$ și demonstrația e încheiată. ■

Vom utiliza acest rezultat, într-o versiune un pic mai generală, pentru demonstrarea Teoremei Gauss-Bonnet pe suprafețe.

Reamintim, conform (1.16), că avem $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ pentru orice curbă plană. Atunci pentru o curbă închisă (nu neapărat simplă) de lungime l avem

$$2\pi n = \int_0^l d\theta = \int_0^l \kappa(s) ds,$$

și rezultă

Corolarul 2.2.3. Pentru o curbă plană simplă, închisă

$$\int_0^l \kappa(s) ds = \pm 2\pi.$$

Un rezultat neașteptat, recunoașteți! Care nu e adevărat în cazul curbelor cu auto-intersecții. Mai precis, cititorul poate demonstra:

Exercițiul 2.2.4. O curbă plană închisă, cu curbura strict pozitivă și cu cel puțin o autointersecție are indicele mai mare sau egal cu 2.

Exercițiul 2.2.5.

- (1) Arătați că $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$ e o curbă regulată, închisă, cu indice 0.
- (2) Calculați indicele și curbura totală a curbei date în coordonate polare prin $r = \cos 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3. Inegalitatea izoperimetrică

Prezentăm în final un rezultat cu un enunț extrem de simplu și cu o demonstrație foarte ingenioasă. Problema apare încă din antichitate. Se povestește că regina Didona, fugară din Tyrul natal, ar fi ajuns cu oamenii săi pe țărmul actual al Tunisiei. Acolo ar fi cerut îngăduința zeilor să construiască o cetate, viitoarea Cartagină. Aceștia i-au dat voie să folosească atît pămînt cît poate cuprinde cu pielea unui bou. Oamenii ei au tăiat pielea într-o fișie subțire și foarte lungă cu care au delimitat un semicerc la țărmul mării. Știa, deci, că aria maximă la un perimetru dat corespunde cercului. Asta urmează să demonstrăm.

Teorema 2.3.1. *Fie γ o curbă regulată, plană, închisă, simplă, de lungime l . Fie A aria domeniului mărginit de $\text{Im } \gamma$. Atunci*

$$(2.4) \quad 4\pi A \leq l^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă γ este cerc. **Demonstrație.** Fie D domeniul mărginit de γ . Înainte de a face demonstrația propriu-zisă, avem nevoie de o formulă pentru calculul ariei. Vom folosi formula lui Green. Pentru orice două funcții f, g cu derivate parțiale continue pe D , aceasta ne dă:

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} - \frac{\partial g}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \int_{\partial D} \left(f \frac{dx^2}{dt} + g \frac{dx^1}{dt} \right) dt.$$

Punem aici $f = x^1$, $g = -x^2$, integrăm prin părți și obținem:

$$\begin{aligned} 2 \iint_D dx^1 dx^2 &= \int_{\partial D} \left(x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} \right) dt = \int_0^l \frac{d}{dt} \frac{x^2}{x^1} \cdot (x^1)^2 dt \\ &= \frac{x^2}{x^1} \cdot (x^1)^2 \Big|_0^l - 2 \int_0^l x^2 \cdot \frac{dx^1}{dt} dt. \end{aligned}$$

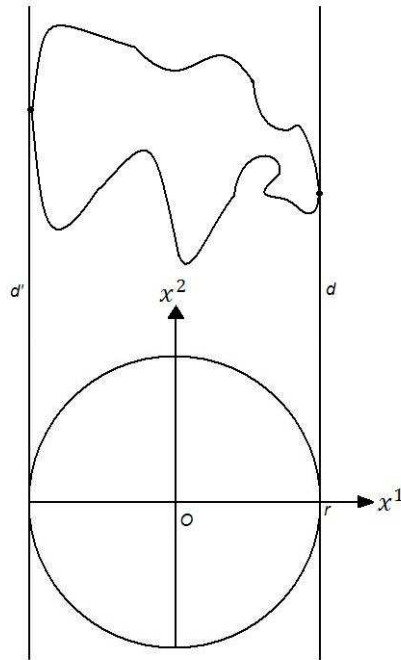
Cum $x^1(0) = x^1(l)$ și $x^2(0) = x^2(l)$, am demonstrat că aria lui D se calculează după formula:

$$(2.5) \quad A = - \int_0^l x^2 \frac{dx^1}{dt} dt = \int_0^l x^1 \frac{dx^2}{dt} dt.$$

Acum încadrăm $\text{Im } \gamma$ între două tangente d, d' paralele, la distanță $2r$, care nu mai intersectează a doua oară curba; e clar că există mai multe direcții d pentru care acest lucru e posibil, deci r depinde de direcția lui d (intuitiv, cu cît există mai multe direcții d ca mai sus, cu atît mai simetrică e curba γ). Considerăm și un cerc de rază r tangent la d și d' care nu taie $\text{Im } \gamma$. Alegem un reper cu originea în centrul cercului și cu axa Ox^1 perpendiculară pe d, d' .

Față de reperul ales, cu presupunerea că $\gamma(0)$ este punctul de tangență cu d , avem pentru γ și cerc parametrizările:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, l] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(s) &= (x^1(s), x^2(s)), \\ c: [0, l] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c(s) &= (x^1(s), y^2(s)). \end{aligned}$$



Aici s este parametrul canonic pe γ , dar nu neapărat pe cerc. Cum aria cercului este πr^2 , formula (2.5) implică

$$\pi r^2 = - \int_0^l y^2 \frac{dx^1}{ds} \cdot ds.$$

Adunînd această relație cu a doua egalitate din (2.5) obținem:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l \left(x^1 \frac{dx^2}{ds} - y^2 \frac{dx^1}{ds} \right) \cdot ds$$

Aplicăm aici inegalitatea $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ și găsim:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{\left(x^1 \frac{dx^2}{ds} - y^2 \frac{dx^1}{ds} \right)^2} \cdot ds.$$

Acum folosim inegalitatea lui Lagrange $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$ și rezultă:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l \sqrt{[(x^1)^2 + (y^2)^2] \cdot \left[\left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 \right]} ds.$$

Dar

$$(2.6) \quad \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 1, \quad (x^1)^2 + (y^2)^2 = r^2$$

pentru că am presupus că s e parametrul canonic pe γ și $(x^1(s), y^2(s))$ parametrizează un cerc de rază r . Deci avem:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l r ds = rl.$$

Cum, pe de altă parte, din inegalitatea mediilor:

$$A + \pi r^2 \geq 2\sqrt{A\pi r^2},$$

obținem $2\sqrt{A\pi r^2} \leq rl$ care, prin ridicare la pătrat, conduce la inegalitatea de demonstrat.

Fie acum γ o curbă închisă, simplă care satisface (2.4) cu egalitate. Atunci avem egalitate și în ultimele inegalitățile care au condus la demonstrație. În particular, avem egalitate în inegalitatea mediilor, deci $A = \pi r^2$ și $l = 2\pi r$, adică, în acest caz, r nu depinde de alegerea direcției lui d . De asemenea, inegalitatea lui Lagrange devine egalitate:

$$\left(x^1 \frac{dx^2}{ds} - y^2 \frac{dx^1}{ds}\right)^2 = [(x^1)^2 + (y^2)^2] \cdot \left[\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2\right].$$

Rezultă:

$$x^1 \frac{dx^1}{ds} + y^2 \frac{dx^2}{ds} = 0.$$

Scriem această relație sub formă de proporție:

$$\frac{x^1}{\frac{dx^2}{ds}} = -\frac{y^2}{\frac{dx^1}{ds}},$$

facem o proporție derivată în care ținem seama de (2.6) și obținem:

$$\frac{x^1}{\frac{dx^2}{ds}} = \frac{\sqrt{(x^1)^2 + (y^2)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2}} = \pm r.$$

De aici rezultă $x^1 = \pm r \frac{dx^2}{ds}$. Să observăm că am ajuns la această relație presupunând, implicit, că $\frac{dx^1}{ds}$ și $\frac{dx^2}{ds}$ sînt diferite de 0. Dar, dacă $\frac{dx^1}{ds}|_{s_0} = 0$, atunci $\frac{dx^2}{ds}|_{s_0} = 1$ și $x^1(s_0) = \pm r$, astfel că $x^1 = \pm r \frac{dx^2}{ds}$ are loc și în s_0 . Analog dacă $\frac{dx^2}{ds}|_{s_0} = 0$.

Cum r nu depinde de direcția lui d , putem schimba între ele axele reperului ceea ce conduce la inversarea rolurilor lui x^1 și x^2 în ultima ecuație diferențială. Deci avem și $x^2 = \pm r \frac{dx^1}{ds}$. Atunci $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$ și demonstrația e completă. ■

CAPITOLUL 3

Proprietăți locale ale suprafețelor

După studiul curbelor din spațiul cu trei dimensiuni (obiecte „1-dimensionale“, pentru că sînt parametrizate cu un singur parametru), pasul imediat următor este studiul suprafețelor: obiecte descrise cu ajutorul a doi parametri independenți. Și aici vom fi interesați de rezolvarea aceluiași probleme: găsirea de invarianți diferențiabili și euclidieni, locali și globali. Dar o teoremă de simplitate a celei de clasificare a curbelor nu există pentru dimensiunea doi.

1. Definiții. Exemple

Definiția 3.1.1. O submulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește *suprafață diferențiabilă* (sau regulată sau, pe scurt, suprafață) dacă pentru orice punct $p \in S$ există o vecinătate deschisă V a sa în \mathbb{R}^3 , o mulțime deschisă U în \mathbb{R}^2 și o aplicație diferențiabilă $h : U \rightarrow V$ astfel încît:

- i) h e homeomorfism între U și $V \cap S$;
- ii) $d_q h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e injectivă (adică matricea sa iacobiană are rang maxim, 2) în orice $q \in U$.

Remarcați paralelismul perfect cu definiția curbei.

Vom nota cu (u^1, u^2) coordonatele în \mathbb{R}^2 și cu $J(h)$ sau $\partial h / \partial (u^1, u^2)$ matricea iacobiană a lui h . De obicei, putem presupune că U e vecinătate a lui $(0,0)$: întotdeauna se poate face o translație în \mathbb{R}^2 care să ducă un punct fixat peste origine. O pereche (U, h) ca în definiție se numește parametrizare; perechea corespunzătoare $(V \cap S, h^{-1})$ se numește *hartă* (de coordonate). E clar că mulțimea tuturor domeniilor de hartă de tipul $V \cap S$ formează o acoperire deschisă a lui S (în topologia relativă). Vom vedea curînd care e semnificația geometrică condițiilor din definiție. Deocamdată să dăm câteva exemple.

Exemplul 3.1.2. Orice plan e o suprafață diferențiabilă. Într-adevăr, fie $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + D = 0$ ecuația implicită a planului π . Cum $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, putem presupune $C \neq 0$ și găsim ecuația echivalentă $x^3 = ax^1 + bx^2 + c$ cu $a = -A/C$ etc. Atunci, pentru fiecare punct p din plan, $U = \mathbb{R}^2$, $h(u^1, u^2) = (u^1, u^2, au^1 + bu^2 + c)$ și $V = \mathbb{R}^3$ satisfac definiția: h e continuă (pentru că e liniară) cu inversa continuă $h^{-1}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2)$, pentru $(x^1, x^2, x^3) \in \pi$; iar $J(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$, cu rangul 2.

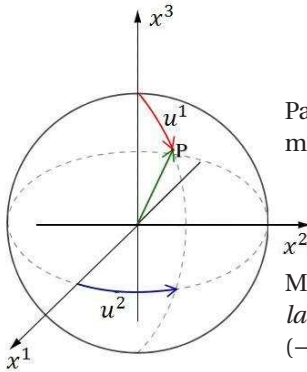
Exemplul 3.1.3. Sfera

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

se poate acoperi cu parametrizări geografice de forma:

$$h(u^1, u^2) = (\sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^1),$$

unde $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Evident h e diferențabilă. Cum $u^1 \in (0, \pi)$, ecuația $\cos u^1 = x^3$ determină u^1 univoc ca $u^1 = \arccos x^3$. Acum, cu u^1 determinat, se găsesc $\sin u^2$ și $\cos u^2$ ca funcții de x^1, x^2 . Rezultă că și u^2 e bine determinat ceea ce arată că h e bijectivă. Formulele găsite dovedesc că e bicontinuă. Condiția a doua se verifică de asemenea prin calcul direct. Imaginea lui h omite un semicerc (inclusiv polii). Pentru a acoperi și acest semicerc se mai consideră o parametrizare de același tip, cu domeniul translatat cu π pe ambele direcții.



Parametrizarea geografică. u^1, u^2 se numesc, respectiv, *zenit*, și *azimut*.

Măsurate în grade, $180^\circ - u^1$ reprezintă *latitudinea*, iar azimutul cu domeniul $(-180^\circ, 180^\circ)$ este *longitudinea*.

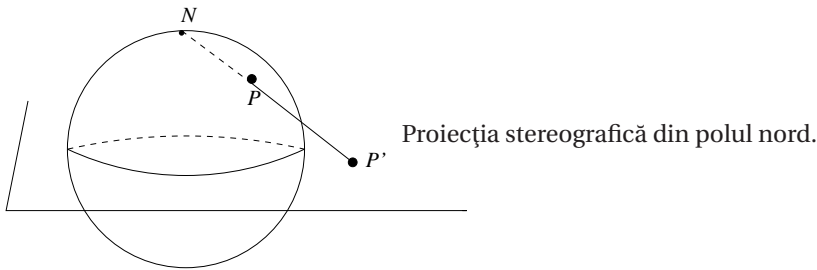
O altă parametrizare utilă a sferei este *proiecția stereografică*. Identificăm \mathbb{R}^2 cu planul orizontal $(u^1, u^2, 0)$. Fie $P(u^1, u^2)$ și $N(0, 0, 1)$ polul nord al sferei. $P' = h(P)$ = intersecția sferei cu dreapta PN . Atunci coordonatele lui P' vor fi

$$\frac{2u^1}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \quad \frac{2u^2}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \quad \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 - 1}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2},$$

iar inversa lui h are expresiile:

$$u^1 = \frac{x^1}{1 - x^3}, \quad u^2 = \frac{x^2}{1 - x^3}.$$

Cum imaginea lui h nu atinge polul nord, e necesară încă o asemenea parametrizare folosind polul sud.



O altă parametrizare a sferei se poate realiza prin proiecții ortogonale pe planele de coordonate. Vor fi necesare 6 hărți.

Nu întâmplător exemplele de parametrizări pe sferă aveau cel puțin două hărți:

Exercițiul 3.1.4. Nici o suprafață compactă nu poate fi acoperită cu mai puțin de două hărți.

Exemplul 3.1.5. Fie U un deschis din \mathbb{R}^2 și $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Atunci graficul său $S = \{x^3 = f(x^1, x^2)\}$ e o suprafață diferențiabilă acoperită cu o singură parametrizare: $h(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$. h e clar diferențiabilă, homeomorfism pe imagine, iar $J(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u^1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial u^2} \end{pmatrix}$, cu rangul 2. Astfel, de exemplu, paraboloidul hiperbolic $x^3 = x^1 x^2$ e o suprafață diferențiabilă. Observați că justificarea din primul exemplu se încadrează tot aici.

Reciproc, se poate demonstra:

Propoziția 3.1.6. Fie p un punct al unei suprafețe S . Atunci există o vecinătate V a lui p în S care e graficul unei funcții diferențiabile de forma: $x^3 = h^3(x^1, x^2)$, $x^2 = h^2(x^1, x^3)$ sau $x^1 = h^1(x^2, x^3)$. Altfel spus: local, orice suprafață se explicitează.

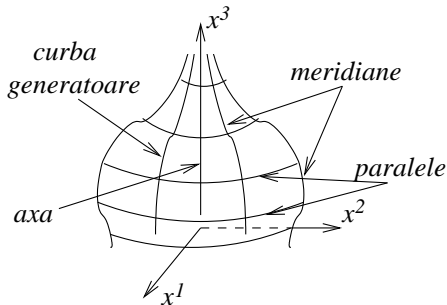
Demonstrație. Fie $h(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$, $(u^1, u^2) \in U$, o parametrizare oarecare în jurul lui p . Conform definiției, cel puțin unul dintre determinanții iacobieni $\partial(x^1, x^2)/\partial(u^1, u^2)$, $\partial(x^2, x^3)/\partial(u^1, u^2)$, $\partial(x^3, x^1)/\partial(u^1, u^2)$ e nenul în $q = h^{-1}(p)$. Putem presupune că $\partial(x^1, x^2)/\partial(u^1, u^2)(q) \neq 0$. Dar acesta este chiar determinantul iacobian în q al funcției diferențiabile $\pi \circ h$ unde π proiecția ortogonală a lui \mathbb{R}^3 pe planul $x^1 O x^2$. Deci există vecinătățile V_1 a lui q și V_2 a lui $\pi \circ h(q)$ între care $\pi \circ h$ e difeomorfism. Cum h e homeomorfism pe imagine, rezultă că $V = h(V_1) \cap S$ e vecinătate a lui p în S și restricția lui π la V e injectivă. De asemenea, există inversa diferențiabilă $(\pi \circ h)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Astfel am obținut u^1, u^2 ca funcții diferențiabile de (x^1, x^2) . Acum compunem $(\pi \circ h)^{-1}$ cu funcția $x^3(u^1, u^2)$. Atunci V e graficul funcției $f(x^1, x^2) = x^3 \circ (\pi \circ h)^{-1}(x^1, x^2)$. ■

Exemplul 3.1.7. Suprafețe de rotație. Fie $(\varphi(u^2), \psi(u^2))$, cu $u^2 \in (a, b)$, un arc de curbă regulată a cărei imagine, considerată în planul $x^1 O x^3$, nu intersectează axa $O x^3$. O rotim în jurul axei $O x^3$; fiecare punct al curbei va descrie un cerc cu centrul pe axa $O x^3$ de rază $\varphi(u^2)$. Obținem suprafața de ecuație:

$$h(u^1, u^2) = (\varphi(u^2) \cos u^1, \varphi(u^2) \sin u^1, \psi(u^2)), \quad (u^1, u^2) \in (0, 2\pi) \times (a, b).$$

Trebuie verificat că aceasta este o parametrizare: succes! Curba inițială se numește generatoare. Curbele $u^1 = \text{const.}$ se numesc meridiane, curbele $u^2 = \text{const.}$ se numesc

cercuri paralele. Această parametrizare nu acoperă un meridian și e nevoie de încă o parametrizare etc.



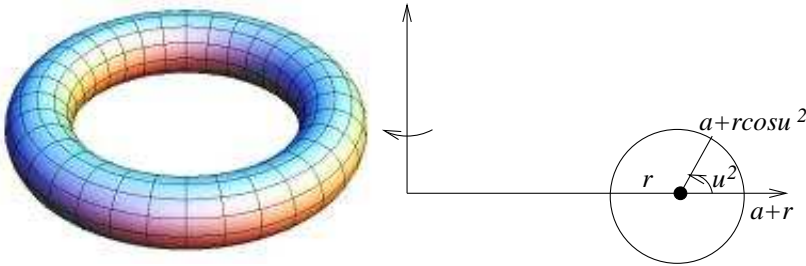
Suprafață de rotație.

Un exemplu banal este cilindrul, generat de rotația unei drepte. Rezultă parametrizarea:

$$h(u^1, u^2) = (r \cos u^1, r \sin u^1, u^2).$$

Sfera din primul exemplu este un caz particular. De asemenea, *torul* obținut prin rotirea unui cerc de rază r în jurul unei drepte din planul său, situate la distanță $a > r$ de centrul cercului. El poate fi acoperit cu (câte?) parametrizări de forma:

$$h(u^1, u^2) = ((r \cos u^2 + a) \cos u^1, (r \cos u^2 + a) \sin u^1, r \sin u^2).$$



Torul ca suprafață de rotație.

Să dăm și un contraexemplu. Conul cu două pînze $(x^3)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ nu e o suprafață diferențiabilă. Punctul problemă, în jurul căruia nu există parametrizare, este vârful O . Dacă $h: U \rightarrow R^3$ e o parametrizare în jurul lui O , fără a restrînge generalitatea putem presupune că U este un disc deschis centrat în origine și $h(0,0) = (0,0,0)$. Cum h este continuă, $h(U)$ este o mulțime conexă care conține O . Pe de altă parte, $U - \{(0,0)\}$ e, încă, o mulțime conexă în timp ce imaginea sa prin h , $h(U) - O$ e neconexă. Aceasta e o contradicție deoarece h e continuă. Pentru a arăta că, așa cum bănuieți, nici conul cu o pînză $x^3 = +\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ nu e suprafață diferențiabilă, aplicăm Propoziția 3.1.6: dacă ar fi, atunci ar exista o vecinătate a vârfului O pe care presupusa suprafață s-ar explicita sub una dintre formele $x^3 = h_3(x^1, x^2)$, $x^2 = h_2(x^1, x^3)$, $x^1 = h_1(x^2, x^3)$. Ultimele două variante se exclud pentru că proiecțiile conului pe planele $x^1 O x^3$ și $x^2 O x^3$ nu sînt bijective. Rămîne prima formă care, pe o vecinătate eventual mai mică, trebuie

să coincidă cu explicitarea din definiție. Dar $\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ nu e diferentiabilă în $(0, 0)$, contradicție.

Propunem cititorului să demonstreze că, la fel ca la curbe, are loc:

Propoziția 3.1.8. Fie $h_1 : U_1 \rightarrow V_1 \cap S$ și $h_2 : U_2 \rightarrow V_2 \cap S$ două parametrizări în jurul lui $p \in W = V_1 \cap V_2 \cap S$. Atunci $h = h_1^{-1} \circ h_2 : h_2^{-1}(W) \rightarrow h_1^{-1}(W)$ e difeomorfism.

Funcția pe care o veți folosi acum pentru aplicarea teoremei funcțiilor implicite este $F(u^1, u^2, t) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2) + t)$.

Pentru a produce noi exemple avem nevoie de:

Definiția 3.1.9. Fie $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție diferentiabilă. Un punct $p \in U$ se numește *critic* pentru f dacă dpf nu are rang maxim. În caz contrar p se numește punct *regulat*. Imaginea unui punct critic se numește *valoare critică*. Un punct $a \in \mathbb{R}^m$ care nu e valoare critică se numește *valoare regulată*.

E clar că dacă f ia valori în \mathbb{R} , un punct e regulat dacă și numai dacă cel puțin o derivată parțială a lui f nu se anulează în el. De exemplu, pentru $f(x^1, x^2, x^3) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1$, 0 e o valoare regulată (verificați).

Următorul rezultat e tot o aplicație directă a teoremei funcțiilor implicite:

Propoziția 3.1.10. Preimagea unei valori regulate a unei funcții $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e o suprafață diferentiabilă.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbb{R}$ o valoare regulată a lui f și $p = (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in S = f^{-1}(a)$. Așa cum am observat, cel puțin o derivată parțială a lui f e nenulă în p . Renumerotînd eventual axele de coordonate, putem presupune $f_3(p) \neq 0$ (vom nota $f_i = \partial f / \partial x^i$). Fie atunci $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2, x^3))$. Evident determinantul iacobian al lui F în p este $\det(J(F)(p)) = f_3(p) \neq 0$. Atunci există o vecinătate deschisă V a lui p și o vecinătate deschisă W a lui $F(p)$ pe care există $F^{-1} : W \rightarrow V$ diferentiabilă. Deci notînd cu (u^1, u^2, t) coordonatele pe W , componentele lui F^{-1} sînt de forma: $(u^1, u^2, \tilde{h}(u^1, u^2, t))$, cu \tilde{h} diferentiabilă. În particular, $x^3 = \tilde{h}(u^1, u^2, a) = h(u^1, u^2)$ cu h diferentiabilă pe proiecția lui V pe planul $x^1 O x^2$. Graficul lui h este $f^{-1}(a) \cap V$. Din Exemplul 3.1.5, un grafic de funcție diferentiabilă este o porțiune de suprafață, adică o parametrizare în jurul lui p . ■

Aplicînd acest rezultat pentru $f(x^1, x^2, x^3) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1$ vedem că hiperboloidul cu două pînze e suprafață diferentiabilă (neconexă) corespunzătoare valorii regulate 0. La fel, hiperboloidul eliptic este preimagea valorii regulate 0 pentru funcția $f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - 1$.

Observația 3.1.11. Nu orice suprafață e preimage de valoare regulată pentru o funcție diferentiabilă. De exemplu 0 nu e valoare regulată pentru $f(x^1, x^2, x^3) = (x^3)^2$, totuși $f^{-1}(0)$ e suprafață diferentiabilă (un plan). Conform, pentru detalii, paragrafului dedicat suprafețelor orientabile și exercițiilor 2.1.13, 2.1.14 din [Or].

2. Planul tangent. Funcții diferentiabile

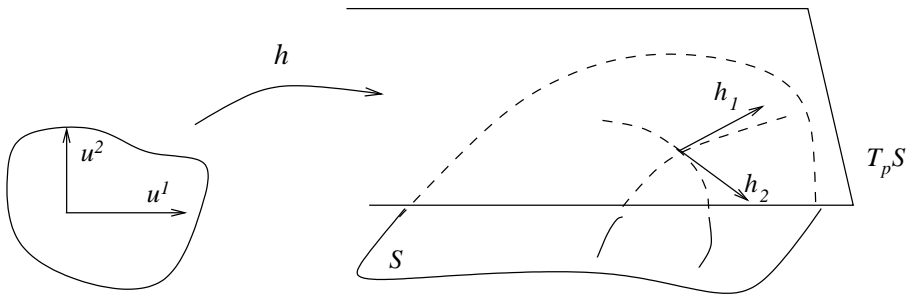
E momentul acum să interpretăm ultima condiție din definiția suprafeței. Fixăm un punct $p \in S$ și o parametrizare $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $q = h^{-1}(p)$. Matricea iacobiană a lui

h în q este

$$J(h)(q) = \left(\frac{\partial h}{\partial u^1} \Big|_q \quad \frac{\partial h}{\partial u^2} \Big|_q \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \Big|_q & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \Big|_q \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \Big|_q & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \Big|_q \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \Big|_q & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \Big|_q \end{pmatrix}.$$

Această matrice are rangul maxim, adică 2, dacă și numai dacă vectorii $h_1(q) = \frac{\partial h}{\partial u^1} \Big|_q$, $h_2(q) = \frac{\partial h}{\partial u^2} \Big|_q$ sînt liniar independenți în \mathbb{R}^3 , caz în care ei generează un plan vectorial $L(h_1(q), h_2(q))$ 2-dimensional, notat în acest context $T_p S$ și numit *planul tangent în p la S* . Cum $T_p S = \{v^1 h_1(q) + v^2 h_2(q) \mid (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2\} = \{J(h)(q) \cdot v \mid v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2\}$, rezultă $T_p S = d_q h(\mathbb{R}^2)$. Chiar dacă ni-l imaginăm legat în punctul p și tangent suprafeței în acest punct, trebuie să-l gîndim ca un plan vectorial. Dependența lui de parametrizarea cu care a fost definit e numai aparentă. Dacă p se află și în imaginea unei alte parametrizări, fie ea \tilde{h} , atunci notînd φ schimbarea de coordonate $h^{-1} \circ \tilde{h}^{-1}$ avem:

$$(3.1) \quad \tilde{h}_i = \frac{\partial(h \circ h^{-1} \circ \tilde{h})}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial \tilde{u}^i} h_k.$$



Planul tangent e generat de h_1 și de h_2 .

Cum din Propoziția 3.1.8 rezultă că φ e difeomorfism, deci matricea $(\partial \varphi^k / \partial \tilde{u}^i)$ e nedegenerată, tragem concluzia că $\{h_1, h_2\}$ și $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}$ generează același subspațiu vectorial în \mathbb{R}^3 .

Exemplul 3.2.1. Fie $p = (x^1, x^2, x^3)$ un punct de pe sfera $S^2(r)$. Pentru a determina planul tangent $T_p S^2(r)$, să considerăm o parametrizare ortogonală în jurul lui p : $h(u^1, u^2) =$

¹Aici și de-acum înainte folosim *convenția de sumare a lui Einstein*: indicii repetați sus și jos sînt de sumare.

$(u^1, u^2, \sqrt{r^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2})$ (am presupus, implicit, că p face parte din emisfera nordică; celelalte cazuri se tratează la fel). Avem

$$h_1 = (1, 0, -\frac{u^1}{\sqrt{r^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}}),$$

$$h_2 = (0, 1, -\frac{u^2}{\sqrt{r^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}}), \text{ deci}$$

$$T_p S^2(r) = L(h_1, h_2) = \{(v^1, v^2, -\frac{v^1 u^1 + v^2 u^2}{\sqrt{r^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}})\}.$$

Evident că pentru orice $v \in T_p S^2(r)$, are loc $\langle v, (u^1, u^2, \sqrt{r^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}) \rangle = 0$, adică planul tangent în orice punct la sferă e perpendicular pe raza în acel punct, în particular $T_p S^2(r)$ coincide cu planul tangent cunoscut din geometria elementară.

Pentru a da planului tangent la o suprafață și o expresie invariantă (independentă de parametrizare) introducem:

Definiția 3.2.2. Un vector din \mathbb{R}^3 tangent în p la o curbă cu imaginea pe S care trece prin p se numește *vector tangent în p la S* .

Acum putem demonstra:

Propoziția 3.2.3. $T_p S$ coincide cu mulțimea vectorilor tangenți în p la S .

Demonstrație. Fie (U, h) o parametrizare în jurul lui p , v un vector tangent în p la S și $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ astfel încât $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ o curbă (nu e unica) la care v e tangent în p . Chestiunea fiind locală, putem presupune că $\gamma(I) \subset h(U)$. Atunci putem considera curba $c = h^{-1} \circ \gamma$ din U , $c(0) = h^{-1}(p) = q$. Atunci $v = d_q h(c'(0))$ deci $v \in T_p S$.

Reciproc, fie $v = d_q h(w) \in T_p S$. Considerăm curba $c(t) = tw + q$ cu t suficient de mic pentru ca $c(t) \in U$. Dacă $\gamma = h \circ c$ atunci e clar că $v = \gamma'(0)$. ■

Astfel, vectorii h_1, h_2 sînt tangenți liniilor de coordonate $u^2 = \text{const.}$, respectiv $u^1 = \text{const.}$ Schimbarea parametrizării duce la schimbarea rețelei de linii de coordonate, dar păstrează planul tangent.

Exemplul 3.2.4. Fie S o suprafață descrisă implicit de ecuația $f(x^1, x^2, x^3) = 0$, cu f diferențiabilă. Pentru $p \in S$ determinăm $T_p S$ folosind Propoziția 3.2.3. Fie $\gamma: (-a, a) \rightarrow S$ astfel încât $\gamma(0) = p$. Dacă $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, atunci $\gamma(t) \in S$ dacă și numai dacă $f(x^1(t), x^2(t), x^3(t)) = 0$. Derivăm această relație în $t = 0$ și obținem:

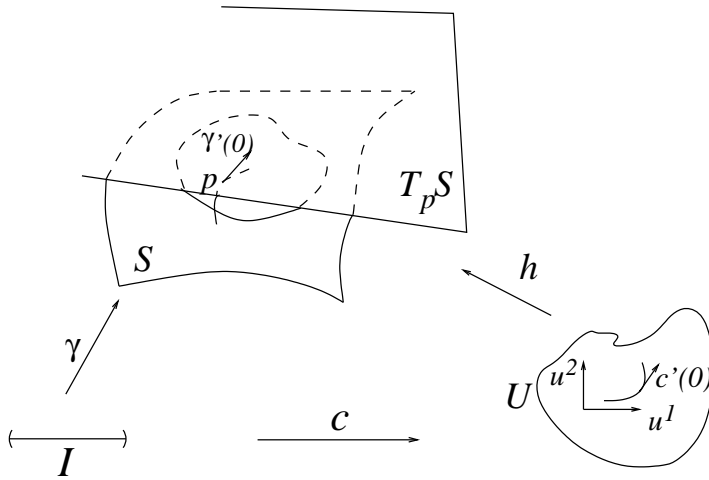
$$\frac{\partial f}{\partial x^1} \Big|_p \cdot \frac{dx^1}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \Big|_p \cdot \frac{dx^2}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial f}{\partial x^3} \Big|_p \cdot \frac{dx^3}{dt} \Big|_0 = 0.$$

Dacă notăm grad f (gradientul lui f) vectorul din \mathbb{R}^3 care are drept componente derivatele parțiale ale lui f^2 , ecuația anterioară se poate scrie:

$$\langle \text{grad } f(p), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Deci grad $f(p)$ este un vector normal la $T_p S$.

²Deși, formal, gradientul unei funcții cu valori reale are aceeași expresie cu matricea diferențialei funcției, obiectele sînt diferite: gradientul este un vector, diferențiala este o aplicație lineară. Dar ele sînt echivalente *via* produsul scalar canonic din \mathbb{R}^n .



Planul tangent în p ca mulțime a vectorilor tangenți la curbe care trec prin p .

De exemplu, pentru elipsoidul dat de $f(x^1, x^2, x^3) = \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} - 1 = 0$, avem $\text{grad } f = 2(\frac{x^1}{a^2}, \frac{x^2}{b^2}, \frac{x^3}{c^2})$, astfel că ecuația planului tangent (vectorial) într-un punct arbitrar al elipsoidului este:

$$\frac{x^1}{a^2} X^1 + \frac{x^2}{b^2} X^2 + \frac{x^3}{c^2} X^3 = 0.$$

În cazul sferei, $a = b = c$ și ecuația planului tangent devine $x^1 X^1 + x^2 X^2 + x^3 X^3 = 0$.

Exercițiul 3.2.5. Arătați că pentru orice funcție diferențiabilă f , planele tangente la suprafața $x^3 = x^1 f(\frac{x^2}{x^1})$ sînt concurente.

Exercițiul 3.2.6. Arătați că planul tangent (afin) în orice punct la un plan este chiar planul respectiv.

Exercițiul 3.2.7. Găsiți ecuația planului tangent într-un punct la o suprafață descrisă ca un grafic: $x^3 = F(x^1, x^2)$. Apoi scrieți ecuația planului tangent într-un punct arbitrar pentru fiecare cuadrică.

Indicație: Aplicați exemplul anterior pentru $f(x^1, x^2, x^3) = F(x^1, x^2) - x^3$.

Acum sîntem în măsură să introducem funcțiile diferențiabile pe suprafețe.

Definiția 3.2.8. Fie S o suprafață diferențiabilă și $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. f e diferențiabilă în p dacă există o parametrizare (U, h) în jurul lui p astfel încît $f \circ h$ să fie diferențiabilă în $h^{-1}(p)$.

Observația 3.2.9. Dacă (\tilde{U}, \tilde{h}) e o altă parametrizare în jurul lui p , atunci $f \circ \tilde{h} = (f \circ h) \circ (h^{-1} \circ \tilde{h})$ e diferențiabilă în $\tilde{h}^{-1}(p)$, din Propoziția 3.1.8. Conchidem că proprietatea de diferențiabilitate a unei funcții, deși definită cu ajutorul unei parametrizări, nu depinde de parametrizare.

În particular, inversa oricărei parametrizări e diferențiabilă. *A posteriori*, putem spune că o suprafață e o submulțime a lui \mathbb{R}^3 local difeomorfă cu \mathbb{R}^2 .

Vom defini acum *diferențiala* unei funcții diferențiabile. Pentru aceasta, să observăm că dacă $v \in T_p S$ și $\gamma, \alpha : I \rightarrow S, \gamma(0) = \alpha(0) = p, \gamma'(0) = \alpha'(0) = v$, atunci $(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \alpha)'(0)$. Putem da:

Definiția 3.2.10. Fie $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în p . Aplicația $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $d_p f(v) = (f \circ \gamma)'(0)$, unde $\gamma : I \rightarrow S, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, se numește diferențiala funcției f în punctul p .

Dacă $h : U \rightarrow S$ e o parametrizare în jurul lui p (cu $h(u_0^1, u_0^2) = p$) și pentru $v \in T_p S$, alegem o traiectorie γ cu imaginea în $h(U)$ (acest lucru e întotdeauna posibil: ceea ce contează e vectorul tangent la curbă în p și acesta poate definit pentru un arc oricît de mic), atunci $\gamma(t) = h(u^1(t), u^2(t))$, $v = \frac{du^1}{dt} \Big|_0 h_1(u_0^1, u_0^2) + \frac{du^2}{dt} \Big|_0 h_2(u_0^1, u_0^2)$ și

$$d_p f(v) = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^1} \Big|_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \frac{du^1}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^2} \Big|_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \frac{du^2}{dt} \Big|_0.$$

Deci, local, acțiunea lui $d_p f$ se exprimă prin aplicarea matricei derivatelor parțiale ale lui f asupra componentelor vectorului v în baza canonică dată de parametrizare:

$$d_p f(v) = \left(\frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^1} \Big|_{(u_0^1, u_0^2)} \quad \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^2} \Big|_{(u_0^1, u_0^2)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \Big|_0 \\ \frac{du^2}{dt} \Big|_0 \end{pmatrix}$$

Am demonstrat, în particular:

Propoziția 3.2.11. $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ e liniară.

Exercițiul 3.2.12. Fie S o suprafață regulată și $p_0 \notin S$. Să se arate că $f : S \rightarrow \mathbb{R}, f(q) = \|q - p_0\|$ e diferențiabilă pe S și să se calculeze $d_q f$. Studiați existența și semnificația punctelor critice ale lui f .

Același exercițiu pentru $F(q) = \|q - p_0\|^2$, p_0 arbitrar în \mathbb{R}^3 .

Indicație: Dacă (U, h) e o parametrizare în jurul lui q cu $q = h(u_0)$, atunci:

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^i} \Big|_{u_0} = \frac{\langle h_i(u_0), q - p_0 \rangle}{\|q - p_0\|}$$

care există și sînt diferențiabile în orice u_0 numai dacă $p_0 \notin S$. Dacă $v = v^1 h_1 + v^2 h_2 \in T_q S$, atunci:

$$d_q f(v) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u^i} \Big|_{u_0} \cdot v^i = \sum_{i=1}^2 \frac{\langle h_i(u_0), q - p_0 \rangle}{\|q - p_0\|} \cdot v^i = \frac{\langle v, q - p_0 \rangle}{\|q - p_0\|}.$$

Analog, pentru F obținem $d_q F(v) = 2\|q, v - p_0\|$. În ambele cazuri, punctele critice, dacă există, sînt cele pentru care segmentul $[p_0 q]$ este perpendicular pe $T_q S$, adică acele puncte de pe S a căror distanță la p_0 atinge un extrem local sau care sînt puncte de inflexiune (pentru a distinge, e nevoie de a doua derivată).

Similar definim diferențiabilitatea aplicațiilor între suprafețe:

Definiția 3.2.13. Fie S_1, S_2 două suprafețe și $f : S_1 \rightarrow S_2$. f e diferențiabilă în $p \in S_1$ dacă există parametrizările (U_1, h_1) în jurul lui p , (U_2, h_2) în jurul lui $f(p)$, astfel încît $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$ să fie diferențiabilă în $h_1^{-1}(p)$.

Exercițiul 3.2.14. Să se arate că definiția nu depinde de alegerea parametrizărilor.

Pentru o astfel de f diferențiala într-un punct va fi $d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$, dată prin $d_p f(v) = (f \circ \gamma)'(0)$, unde $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ (observați că acum $f \circ \gamma$ e o curbă pe S_2).

Exercițiul 3.2.15. Fie $f : S \rightarrow S'$. Să se arate că, dacă notăm $f \circ h = (f^1, f^2, f^3)$, cu $f^i : U \rightarrow S'$, atunci local avem:

$$d_p f(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} |_{(u_0^1, u_0^2)} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} |_{(u_0^1, u_0^2)} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} |_{(u_0^1, u_0^2)} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} |_{(u_0^1, u_0^2)} \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1} |_{(u_0^1, u_0^2)} & \frac{\partial f^3}{\partial u^2} |_{(u_0^1, u_0^2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} |_0 \\ \frac{du^2}{dt} |_0 \end{pmatrix}$$

unde $h(u_0^1, u_0^2) = p$.

Exemplul 3.2.16. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x^1, x^2, x^3) = (ax^1, bx^2, cx^3)$. Atunci restricția ei la sfera de rază 1 are imaginea în elipsoidul $\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} = 1$ și e diferentiabilă.

Exercițiul 3.2.17. Fie S^2 sfera de rază 1 și $f : S^2 \rightarrow S^2$ dată prin $f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, -x^2, -x^3)$. Să se arate că f e diferentiabilă și să se calculeze diferențiala ei în polul nord.

O aplicație diferentiabilă între două suprafețe, bijectivă și cu inversa diferentiabilă se numește *difeomorfism*. Două suprafețe între care există un difeomorfism se numesc difeomorfe. Conform exemplului anterior, sfera și elipsoidul sînt difeomorfe. E clar că o compunere de difeomorfisme e tot un difeomorfism. Se ajunge astfel la împărțirea suprafețelor în clase de echivalență de suprafețe difeomorfe. Evident, diferențiala unui difeomorfism într-un punct este un izomorfism liniar. Cititorul va demonstra că mulțimea difeomorfismelor unei suprafețe formează un grup.

O noțiune mai puțin restrictivă este cea de *difeomorfism local*.

Definiția 3.2.18. O aplicație $f : S_1 \rightarrow S_2$ e *difeomorfism local* în p dacă există o vecinătate U a lui p în S_1 și o vecinătate V a lui $f(p)$ în S_2 astfel încît $f|_U$ să fie difeomorfism între U și V .

Exercițiul 3.2.19. Arătați că $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ e difeomorfism local, dar nu global. Ce semnificație are? Dați exemple de aplicații de la \mathbb{R} la \mathbb{R} și de la \mathbb{R}^2 la \mathbb{R}^2 care sînt difeomorfisme locale, dar nu globale. **Exercițiul 3.2.20.** Arătați că un difeomorfism local bijectiv e difeomorfism.

Aplicînd teorema funcției inverse se obține:

Propoziția 3.2.21. Dacă $f : S_1 \rightarrow S_2$ e diferentiabilă pe $U \subset S_1$, $p \in U$ și $d_p f$ e izomorfism liniar, atunci f e difeomorfism local în p .

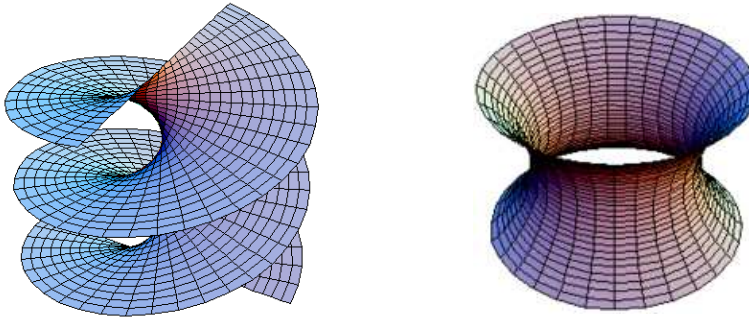
Exemplul 3.2.22. *Elicoidul* este suprafața obținută în felul următor: prin fiecare punct al unei elice de ecuație $(\cos u^1, \sin u^1, au^1)$ se duce o dreaptă paralelă cu planul orizontal $x^1 Ox^2$ și care intersectează axa Ox^3 . Ecuațiile parametrice ale unei asemenea drepte fiind $\frac{x^1}{\cos u^1} = \frac{x^2}{\sin u^1} = \frac{x^3 - au^1}{0} = u^2$, o parametrizare pentru elicoid este:

$$h(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1).$$

Pe de altă parte, *catenoidul* este suprafața obținută prin rotirea lăntșorului; parametrizarea lui este:

$$k(u^1, u^2) = (ach u^2 \cos u^1, ach u^2 \sin u^1, au^2),$$

$u^1 \in (0, 2\pi)$, $u^2 \in \mathbb{R}$. Aplicația $f(h(u^1, u^2)) = k(u^1, u^2)$ e un difeomorfism local între elicoid și catenoid.



Elicoidul (stînga) și catenoidul.

3. Parametrizări speciale

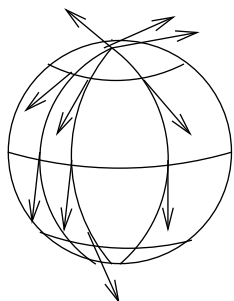
Studiul curbilor a fost simplificat de utilizarea unei parametrizări speciale, cea prin lungimea arcului. Există și pentru suprafețe o parametrizare canonică? Răspunsul este *nu*. În schimb există mai multe tipuri de parametrizări cu proprietăți particulare, utile în rezolvarea unor probleme specifice. Vom arăta în acest paragraf că, în esență, există parametrizări cu liniile de coordonate avînd direcția prescrisă. Pentru a enunța și demonstra acest rezultat avem nevoie întîi de traducerea în limbajul geometriei diferențiale a unor rezultate de ecuații diferențiale.

Definiția 3.3.1. Un *cîmp de vectori tangenți* X pe un deschis V al unei suprafețe S este o asociere în fiecare punct $p \in V$ a unui vector tangent $X(p) \in T_p S$.

X e diferențiabil în $p \in V$ dacă există o parametrizare (U, h) în jurul lui p astfel încît componentele lui X în baza $\{h_1, h_2\}$ să fie funcții diferențiabile.

Observația 3.3.2. În spiritul definiției funcțiilor diferențiabile pe mulțimi închise, vom spune că X e un cîmp de vectori definit pe mulțimea închisă F dacă există o vecinătate deschisă V a lui F și un cîmp de vectori \tilde{X} pe V astfel încît $\tilde{X}|_F = X$. În particular, vectorul tangent la o curbă pe suprafață e un astfel de exemplu, deoarece imaginea unei curbe e închisă în S .

Exemplul 3.3.3. Pe o suprafață de rotație putem obține două cîmpuri de vectori astfel: unul dintre ele asociază în fiecare punct vectorul tangent la cercul paralel prin acel punct, al doilea asociază vectorul tangent la curba generatoare (presupusă în parametrizarea canonică). Pe sferă, acest al doilea cîmp nu va putea fi definit continuu în poli. Se poate corecta construcția: Parametrizăm fiecare semimeridian cu același parametru $t \in (-1, 1)$ și considerăm $Y(p)$ vectorul tangent la semimeridian (din care eliminăm poliul). Fie $X(t) = (1 - t^2)Y(p)$ cînd p e diferit de poli și $X = 0$ în poli. Acum X e definit pe toată sfera, diferențiabil, dar se anulează în poli. Nu e întîmplător: se poate demonstra cu tehnici de topologie algebrică nonexistența unui cîmp continuu și fără zerouri pe sferă.



Cîmp vectorial pe sferă.

Noi vom presupune că toate cîmpurile cu care lucrăm sînt diferențiabile.

Dat un cîmp de vectori X pe V , o curbă α tangentă în fiecare punct cîmpului, $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, se numește *traietorie* a cîmpului. Bineînțeles, am vrea ca prin fiecare punct al lui U să existe o traiectorie a cîmpului. Dar, local, cîmpul X produce un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul I. Într-adevăr, (discuția fiind locală, putem admite că V e situat în imaginea unei parametrizări (U, h)) dacă $X = X^1 h_1 + X^2 h_2$, cu X^i funcții diferențiabile pe U , existența traiectoriei prin $p = h(u_0^1, u_0^2)$ se reduce la existența soluției pentru problema Cauchy:

$$(3.2) \quad \frac{du^i}{dt} = X^i(u^1, u^2), \quad u^i(0) = u_0^i, \quad i = 1, 2.$$

Exercițiul 3.3.4. Arătați că o ecuație implicită de forma

$$a(u^1, u^2) \frac{du^1}{dt} + b(u^1, u^2) \frac{du^2}{dt} = 0$$

determină un cîmp vectorial pe $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aplicînd rezultatele cunoscute de ecuații diferențiale (vezi [Ha] sau [Mir]) obținem pentru cazul nostru:

Teorema 3.3.5. Fie X un cîmp de vectori tangenți la $V \subset S$. Dat $p \in V$ există o traiectorie $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ a lui X cu $\alpha(0) = p$. Dacă $\beta : J \rightarrow V$ e o altă traiectorie prin p , atunci $\alpha(t) = \beta(t)$ pe $I \cap J$.

Teorema curentului local devine:

Teorema 3.3.6. Fie X un cîmp de vectori tangenți la $V \subset S$. Pentru orice $p \in V$ există o vecinătate $W \subset V$, un interval I care-l conține pe 0 și o aplicație $\rho : W \times I \rightarrow V$ diferențiabilă și astfel încît pentru fiecare $q \in W$, $\rho(q, t)$ e traiectoria lui X prin q :

$$\rho(q, 0) = q, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}(q, t) = X(\rho(q, t)).$$

După cum știm, aceste rezultate implică existența *integralelor prime* (funcții constante de-a lungul traiectoriilor unui cîmp). Mai precis:

Teorema 3.3.7. Fie X un cîmp de vectori tangenți la $V \subset S$ și $p \in V$ cu $X(p) \neq 0$. Există o vecinătate $W \subset V$ a lui p și o funcție diferențiabilă $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ constantă de-a lungul fiecărei traiectorii a lui X și cu $d_q f \neq 0$ în orice $q \in W$.

Observația 3.3.8. O funcție e integrală primă dacă și numai dacă fiecare traiectorie a cîmpului e conținută într-o singură mulțime de nivel a funcției. De aceea, în general, nu există integrale prime globale, ci doar locale. De exemplu, cîmpul definit pe întreg

planul prin $du^i/dt = u^i$, $i = 1, 2$ nu admite integrale prime neconstante (pentru că ar fi vorba despre o funcție diferențiabilă, deci continuă, constantă pe orice rază prin origine).

Putem acum formula și demonstra teorema care face obiectul acestui paragraf:

Teorema 3.3.9. *Fie X_1, X_2 două câmpuri tangente pe $V \subset S$ astfel încât $X_1(p), X_2(p)$ sînt independente într-un $p \in V$ fixat. Atunci există o parametrizare (U, h) în jurul lui p astfel încât liniile de coordonate să fie tangente câmpurilor X_1, X_2 : $h_i = a_i X_i$.*

Demonstrație. Observați că nu am cerut ca X_i să fie chiar vectorii tangenți la liniile de coordonate, ci doar multipli ai acestora. Ne mulțumim să aibă aceeași direcție.

Fie V' o vecinătate pe care sînt definite integralele prime f_i ale lui X_i . Cu ele definim $f : V' \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(q) = (f_1(q), f_2(q))$. Dacă $d_p f \neq 0$, din teorema funcției inverse, există $U \subseteq \mathbb{R}^2$, vecinătate deschisă a lui $f(p)$ și $h = f^{-1}$ difeomorfism al lui U pe o vecinătate $W = h(U)$, deci parametrizare. În plus, liniile de coordonate ale lui h sînt chiar $f_i = \text{const.}$, tangente la X_i din însăși definiția integralei prime.

Să arătăm acum că $d_p f \neq 0$. Fie $c_1 = d_p f_1(X_2(p))$, $c_2 = d_p f_2(X_1(p))$. Cum f_i sînt constante pe traiectoriile lui X_i , avem $d_p f_i(X_i(p)) = 0$. Dacă c_1 sau c_2 ar fi 0, atunci f_1 sau f_2 ar fi constantă și pe traiectoriile celuilalt câmp; avînd o integrală primă comună cele două câmpuri ar coincide local, în contradicție cu independența lor liniară. Rezultă că $c_i \neq 0$ și

$$d_p f(X_1(p)) = (0, c_2), \quad d_p f(X_2(p)) = (c_1, 0)$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

4. Prima formă fundamentală

Pînă acum am privit suprafețele numai din punct de vedere diferențiabil. Odată cu acest paragraf introducem și punctul de vedere metric. Discuția va fi locală.

Fie $p \in S$ și (U, h) o parametrizare în jurul său. Lungimea unui vector $v = v^1 h_1 + v^2 h_2$ din $T_p S$ se calculează cu ajutorul produsului scalar din \mathbb{R}^3 după formula:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = (v^1)^2 \langle h_1, h_1 \rangle + v^1 v^2 \langle h_1, h_2 \rangle + (v^2)^2 \langle h_2, h_2 \rangle.$$

Astfel, pentru a calcula lungimea unui vector tangent la suprafață nu folosim „tot” produsul scalar canonic din spațiul ambiant ci ne sînt necesare doar funcțiile $\langle h_i, h_j \rangle$. Această observație aproape banală va conduce la ideea fundamentală a spațiilor riemanniene: pentru a înțelege geometria unui spațiu trebuie doar să știm să măsurăm, iar modalitatea de măsurare poate fi intrinsecă, nu trebuie neapărat indusă de pe un spațiu ambiant.

Revenind, vom nota

$$g_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Datorită proprietăților produsului scalar și ale parametrizării, funcțiile g_{ij} sînt diferențiabile și definesc o matrice simetrică pozitiv definită. Aceasta poartă numele de *prima formă fundamentală* a suprafeței în parametrizarea (U, h) .

Exercițiul 3.4.1. Folosiți formulele (3.1) pentru a dovedi că, la o schimbare de parametrizare, funcțiile g_{ij} se schimbă după formula:

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial \tilde{u}^j} g_{kl},$$

unde $\varphi = h^{-1} \circ \tilde{h}$.

Astfel că prima formă fundamentală, deși definită cu ajutorul unei parametrizări, determină un obiect independent de parametrizare: o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită, adică un produs scalar, pe $T_p S$. Notăm g_p acest produs scalar. Matricea sa în baza $\{h_1, h_2\}$ este (g_{ij}) . Se poate, de asemenea, observa că asocierea $p \mapsto g_p$ este diferențiabilă, deoarece coeficienții g_{ij} sînt diferențiabili, dar nu vom folosi încă acest lucru.

Observația 3.4.2. E clar că $g_{12} = \langle h_1, h_2 \rangle = \cos \alpha \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\|$ măsoară unghiul α al liniilor de coordonate în parametrizarea considerată. În particular, o parametrizare pentru care $g_{12} = 0$ se numește ortogonală.

Exemplul 3.4.3. Pentru o suprafață de rotație (vezi Exemplul 3.1.7), considerînd curba generatoare parametrizată canonic, avem:

$$g_{11} = \varphi^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

iar pentru o suprafață descrisă explicit (vezi Exemplul 3.1.5):

$$g_{11} = 1 + f_1^2, \quad g_{12} = f_1 f_2, \quad g_{22} = 1 + f_2^2.$$

Cu ajutorul primei forme fundamentale se poate calcula lungimea curbelor „mici“ de pe o suprafață. Fie $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu $\text{Im} \gamma \subset S$. Atunci: $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'\| dt$. Dacă imaginea lui γ e inclusă într-un domeniu de hartă $h(U)$, atunci:

$$(3.3) \quad L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

unde $\gamma(t) = h(u^1(t), u^2(t))$.

De asemenea, aria unei porțiuni de suprafață incluse într-un domeniu de hartă $h(U)$ se poate exprima în funcție de coeficienții primei forme fundamentale. Într-adevăr, dacă admitem că aproximăm aria unui paralelogram curbiliniu infinitezimal cu aria paralelogramului subîntins de vectorii tangenți laturilor celui curbiliniu, aria domeniului infinitezimal pe S corespunzător dreptunghiului $D = [u_0^1, u_0^1 + \varepsilon_1] \times [u_0^2, u_0^2 + \varepsilon_2]$ este $\|h_1 \times h_2\|(u_0^1, u_0^2)$. Atunci aria unei regiuni (deschis conex și mărginit) $R \subset h(U)$ va fi definită prin:

$$A(R) = \iint_{h^{-1}(R)} \|h_1 \times h_2\| du^1 du^2.$$

Ținînd seamă de formula

$$\|u \times v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2,$$

avem:

$$\|h_1 \times h_2\| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det(g)}.$$

Deci

$$A(R) = \iint_{h^{-1}(R)} \sqrt{\det(g)}.$$

Dacă o porțiune de suprafață e cuprinsă în intersecția a două domenii de hartă, atunci formula de schimbare de variabilă pentru integrala dublă, laolaltă cu formulele din Exercițiul 3.4.1, arată că definiția ariei nu depinde de parametrizare. Folosind acum o acoperire a oricărei regiuni de pe S cu domenii de hartă se poate construi o teorie coerentă a ariei (conform , de exemplu, [Ca]).

Mai general, dacă $f : h(U) \rightarrow \mathbb{R}$ e diferențiabilă se poate defini integrala lui f pe R prin

$$\iint_R f d\sigma = \iint_{h^{-1}(R)} f \circ h \sqrt{\det(g)} du^1 du^2,$$

unde $d\sigma$ este elementul de suprafață. Din nou definiția nu depinde de parametrizare. Pentru $f = 1$ se regăsește aria lui R .

A apărut mai sus necesitatea considerării vectorului $h_1 \times h_2$, normal la suprafață în punctele în care e definit (și nenul peste tot deoarece h_1, h_2 sînt independenți). Versorul său va fi numit *vector normal unitar*:

$$N = \frac{h_1 \times h_2}{\|h_1 \times h_2\|}.$$

Precizăm că N e asociat unui domeniu de parametrizare și în general, nu poate fi extins prin continuitate la întreaga suprafață.

Demonstrăm în finalul acestui paragraf un rezultat util mai departe:

Propoziția 3.4.4. În jurul oricărui punct al unei suprafețe există parametrizări ortogonale: $g_{12} = 0$.

Demonstrație. E o aplicație directă pentru Teorema 3.3.9. Într-adevăr, fie (U, h) o parametrizare oarecare în jurul lui $p \in S$. Considerăm cîmpurile ortogonale $X_1 = h_1$, $X_2 = -(g_{12}/g_{11})h_1 + h_2$ pe $h(U)$. Evident X_1, X_2 sînt liniar independente în orice punct. Nu mai rămîne decît să le aplicăm teorema citată. ■

Izometrii locale. În context metric, noțiunea de difeomorfism local admite o întărire naturală: izometria locală. Mai precis:

Definiția 3.4.5. Suprafețele S, S' sînt *local izometrice* dacă pentru orice punct $p \in S$ există: o vecinătate V a lui p , deschisă în S , o mulțime V' deschisă în S' și o funcție diferențiabilă, injectivă $F : V \rightarrow V'$ astfel încît lungimea oricărei curbe $\alpha(t)$ din V este egală cu lungimea curbei $F \circ \alpha(t)$ din V' .

Aplicația F din definiție se numește izometrie locală în p . Dacă se poate lua $V = S$, $V' = S'$ și F difeomorfism atunci se obține o izometrie globală și se spune că suprafețele sînt global izometrice. Noțiunea de izometrie locală va fi mai bine lămurită de următoarea teoremă de caracterizare cu ajutorul căreia va fi ușor și să construim exemple.

Teorema 3.4.6. *Suprafețele S, S' sînt local izometrice dacă și numai dacă pentru orice punct $p \in S$ există parametrizările locale (U, h) în jurul lui p și (U, h') pe S' astfel încît*

în orice punct din U coeficienții primelor forme fundamentale să fie egali: $g_{ij}(u^1, u^2) = g'_{ij}(u^1, u^2)$.

Demonstrație. Probăm întâi suficiența condiției. Fie $V = h(U) \cap S$, $V' = h'(U) \cap S'$ și $F : V \rightarrow V'$ definită prin $F = h' \circ h^{-1}$. Cum h, h' sînt parametrizări, F e o bijecție diferențiabilă. Dacă $\alpha : I \rightarrow V$ e o curbă pe V , ea corespunde unei curbei $c : I \rightarrow U$ ($\alpha(t) = h(c(t)) = h(u^1(t), u^2(t))$). Atunci $F \circ \alpha(t) = h'(c(t))$ și, conform formulei (3.3):

$$L(\alpha) = \int_I \sqrt{g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt}} dt,$$

$$L(F \circ \alpha) = \int_I \sqrt{g'_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt}} dt.$$

Rezultă $L(\alpha) = L(F \circ \alpha)$ pentru că $g_{ij} = g'_{ij}$.

Reciproc, fie $F : V \rightarrow V'$ o izometrie locală în p . Considerăm o parametrizare locală (U, h) în jurul lui p astfel încît $h(U) \subset V$. Rezultă imediat că $h' = F \circ h$ e o parametrizare pe S' în jurul lui $F(p)$. Să observăm că dacă o curbă $\alpha(t)$ din V e parametrizată canonic, atunci și $\alpha' = F \circ \alpha$ e parametrizată canonic de același parametru t . Într-adevăr,

$$L(\alpha' |_{[0,t]}) = L(\alpha |_{[0,t]}) = t.$$

Cum orice vector unitar tangent la S în p poate fi considerat vector tangent la o curbă parametrizată canonic, rezultă că $d_p F$ aplică vectori unitari în vectori unitari. Dar orice $v \in T_p S$ de normă $a > 0$ se poate scrie $v = av_0$ cu v_0 unitar. Atunci, deoarece $d_p F$ e liniară:

$$\|d_p F(v)\| = a \|d_p F(v_0)\| = \|v\|,$$

deci $d_p F$ conservă norma. Rezultă, din nou datorită liniarității, că $d_p F$ invariază produsul scalar. Deci diferențiala în orice punct a unei izometrii locale e o aplicație ortogonală între spațiile vectoriale euclidiene $T_p S, T_{F(p)} S'$. Atunci, pentru $p = h(u^1, u^2)$:

$$g'_{ij}(u^1, u^2) = \langle (F \circ h)_i, (F \circ h)_j \rangle = \langle d_p F(h_i), d_p F(h_j) \rangle = \langle h_i, h_j \rangle = g_{ij}(u^1, u^2),$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Exemplul 3.4.7. Planul \mathbb{R}^2 (cu structura euclidiană canonică) și cilindrul sînt suprafețe local izometrice. Pentru verificare e suficient să considerăm parametrizările standard: $h(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$ pe plan, $h'(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$ pe cilindru, ambele avînd prima formă fundamentală $g_{ij} = \delta_{ij}$. Izometria locală dintre aceste suprafețe este $F(u^1, u^2, 0) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$. Se verifică direct că F nu e difeomorfism. Dar, oricum, cilindrul nu este global izometric cu planul (nici homeomorf nu poate fi) pentru că nu e simplu conex. Pe de altă parte, cititorul poate arăta că orice doi cilindri de raze r , respectiv r' sînt local izometrice.

Exercițiul 3.4.8. Găsiți o parametrizare a conului cu o pînză, fără vîrf, în care coeficienții primei forme fundamentale să fie δ_{ij} . Va rezulta o izometrie locală între con și plan (deci și între con și cilindru).

Exercițiul 3.4.9. Verificați că difeomorfismul local găsit în Exemplul 3.2.22 între elicoid și catenoid nu este o izometrie locală. Arătați că $\varphi(v^1, v^2) = (u^1, ach u^2)$ e o schimbare de coordonate

(un difeomorfism), deci $\tilde{h} = h \circ \varphi$ e o altă parametrizare pentru elicoid. Verificați egalitatea coeficienților primelor două forme fundamentale pentru parametrizările k și \tilde{h} și conchideți că elicoidul și catenoidul sînt local izometrice.

Exercițiul 3.4.10. Prin analogie cu noțiunea de izometrie, spunem că un difeomorfism $f : S_1 \rightarrow S_2$ este echiarial dacă aplică orice regiune de pe S_1 într-una de aceeași arie.

Demonstrați că un difeomorfism este echiarial dacă și numai dacă pentru orice parametrizare (U, h) pe S_1 , prima formă fundamentală asociată are același determinant ca și prima formă fundamentală asociată parametrizării $(U, f \circ h)$ pe S_2 .

Dați exemplu de difeomorfism echiarial care nu e izometrie.

Arătați aplicația $f(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$ este un difeomorfism echiarial între sfera de rază 1 (fără poli) și cilindrul circumscris ei (teorema lui Arhimede).

Folosiiți teorema lui Arhimede pentru a calcula aria lunulei sferice de unghi θ (regiunea cuprinsă între 2 arce de meridian care se taie sub unghiul θ). Veți obține 2θ , ceea ce, în particular arată că aria sferei este 4π .

Ca o altă aplicație a teoremei lui Arhimede, folosind și aria lunulei, arătați că aria unui triunghi sferic format de arce de meridian este egală cu *excesul* lui, adică diferența dintre suma unghiurilor interioare și π .

5. A doua formă fundamentală. Curbură

Problema principală a geometriei diferențiale, în măsura în care se deosebește de topologia diferențială, este înțelegerea și, în cazul varietăților abstracte, definirea chiar, a noțiunii de curbură. Într-o primă abordare, curbura pare o proprietate sesizabilă numai „din afară”, privind suprafața din exterior, studiindu-i forma. Așa o vom defini, deși, apoi, Teorema egregium a lui Gauss ne va lămuri că, de fapt, curbura e o proprietate intrinsecă.

Pentru a studia forma unei suprafețe vom adopta un procedeu asemănător celui utilizat în studiul curbelor. Vom atașa fiecărei hărți locale un reper ale cărui variații în direcție vor fi interpretate drept curbură. Fie (U, h) o parametrizare locală pe S . Cum h_1, h_2 sînt liniar independenți pe U , vectorul normal principal $N = (h_1 \times h_2) / \|h_1 \times h_2\|$ e bine definit și $\{h_1, h_2, N\}$ constituie un reper în \mathbb{R}^3 , legat de punctul $q \in h(U)$. În plus, vectorii săi sînt funcții diferențiabile pe U . Vom considera derivatele de ordinul doi h_{ij} și derivatele de ordinul întâi N_i și le vom descompune într-o parte tangentă și una normală la suprafață:

$$(3.4) \quad h_{ij} = \Gamma_{ij}^k h_k + b_{ij} N$$

Reamintim că folosim convenția de sumare a lui Einstein, deci în formula anterioară sumăm după k . Relația (3.4) poartă numele de *formula lui Gauss*. În privința lui N , cum acesta este unitar, avem $\langle N_i, N \rangle = 0$. Atunci N_i sînt vectori tangenți. Notăm $-L_i^j$ componenta lui N_i pe h_j :

$$(3.5) \quad N_i = -L_i^j h_j$$

Aceasta este *formula lui Weingarten*. În continuare ne vom ocupa cu explicitarea funcțiilor (chiar dacă, pentru simplificarea scrierii, nu am precizat argumentele, se înțelege că e vorba de funcții de (u^1, u^2)) care au apărut: $\Gamma_{ij}^k, b_{ij}, L_i^j$.

Deoarece h este de clasă \mathcal{C}^∞ , $h_{ij} = h_{ji}$, astfel că și $b_{ij} = b_{ji}$. b_{ij} definesc o formă biliniară simetrică b pe fiecare spațiu tangent (aceasta rezultă din teoria generală a spațiilor vectoriale finit dimensionale). Mai mult, asocierea aceasta e diferențiabilă în sensul că funcțiile b_{ij} variază diferențiabil cu p (observați analogia cu diferențiabilitatea câmpurilor de vectori). b se numește *forma a doua fundamentală* a suprafeței. Curbura va fi definită cu ajutorul ei. Coeficienții b_{ij} se calculează cu formula:

$$b_{ij} = \langle h_{ij}, N \rangle$$

iar dacă $v = v^i h_i$, $w = w^i h_i$ în $T_p S$, atunci

$$b(v, w) = b_{ij} v^i w^j.$$

Pe de altă parte, derivînd relațiile $\langle h_i, N \rangle = 0$ obținem

$$\langle h_{ij}, N \rangle + \langle h_i, N_j \rangle = 0.$$

Folosind formulele Gauss și Weingarten obținem:

$$(3.6) \quad b_{ij} - L_j^k g_{ik} = 0.$$

Această relație ne spune că funcțiile L_j^k definesc un endomorfism L al lui $T_p S$, echivalent *via* produsul scalar cu forma a doua fundamentală:

$$\langle Lv, w \rangle = b(v, w).$$

Rezultă, în particular, că L este un endomorfism simetric (atunci, într-o bază ortonormată, matricea sa va fi simetrică, dar, în general, matricea (L_i^j) nu e simetrică). Fie (g^{ij}) inversa matricei (g_{ij}) i.e. $g_{ik} g^{kj} = \delta_j^i$. Înmulțind ambii membri ai ecuației (3.6) cu g^{il} avem:

$$b_{ij} g^{il} = L_j^k g_{ki} g^{il} = L_j^k \delta_k^l = L_j^l.$$

Am găsit expresia coeficienților (L_i^j) sub forma:

$$L_i^j = g^{jk} b_{ki}, \text{ sau matricial } L = g^{-1} b.$$

Aici am notat cu același simbol un operator (respectiv formă biliniară) și matricea sa în baza h_1, h_2 .

Operatorul liniar L poartă numele de *operatorul lui Weingarten*. E clar din cele spuse pînă acum că a studia forma a doua fundamentală sau operatorul Weingarten sînt lucruri echivalente. La o altă interpretare o sa ajungem considerînd *aplicația lui Gauss*. Aceasta asociază fiecărui punct $p \in h(U)$ punctul de pe S^2 înțepat de vectorul $N(p)$ văzut cu originea în $(0, 0, 0)$. De aceea se notează simplu N . Diferențiala acestei aplicații va avea matricea $-(L_i^j)$ (pentru că pe coloanele sale trebuie să apară vectorii N_i), astfel că formula lui Weingarten este echivalentă cu $dN = -L$, după identificările de rigoare. În funcție de forma suprafeței în jurul lui p , de curbura ei, aplicația lui Gauss va acoperi o suprafață mai mare sau mai mică din sferă. De aceea în unele texte, mai ales în cele de limbă engleză, L e numit *operatorul formă*.

Exercițiul 3.5.1. Fie S o suprafață dată local ca graficul unei funcții $x^3 = f(x^1, x^2)$. Arătați că, într-un punct în care normala la suprafață verticală (adică paralelă cu axa Ox^3), forma a doua fundamentală coincide cu hesiana lui f .

Rămîne să găsim expresia funcțiilor Γ_{ij}^k . Acestea se numesc *coeficienții lui Christoffel*³ (de a doua specie). Din formula lui Gauss deducem:

$$\langle h_{ij}, h_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

Pentru calculul produselor scalare din membrul stîng pornim de la $g_{il} = \langle h_i, h_l \rangle$ și derivăm:

$$\langle h_{ij}, h_l \rangle + \langle h_i, h_{lj} \rangle = \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}.$$

Scriem acum și relațiile care se obțin din aceasta permutînd circular indicii (i, j, l) :

$$\langle h_{jl}, h_i \rangle + \langle h_j, h_{il} \rangle = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l}$$

$$\langle h_{li}, h_j \rangle + \langle h_l, h_{ji} \rangle = \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}.$$

Adunăm prima cu a treia relație și o scădem pe a doua (ținînd seamă de simetria lui h_{ij}). Obținem:

$$\langle h_{ij}, h_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \right).$$

Înmulțind cu matricea (g^{ij}) rezultă, în fine:

$$(3.7) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \right).$$

În concluzie: derivatele axelor reperului local $\{h_1, h_2, N\}$ se exprimă în funcție de primele două forme fundamentale.

Am atașat astfel unei suprafețe, local, un operator simetric L . Pentru un asemenea operator există o bază ortogonală de vectori proprii în care matricea sa se diagonalizează. Notăm k_1, k_2 valorile proprii ale operatorului Weingarten. Sînt funcții diferențiable pe $h(U)$. Pentru a găsi semnificația lor geometrică va trebui să facem un mic ocol.

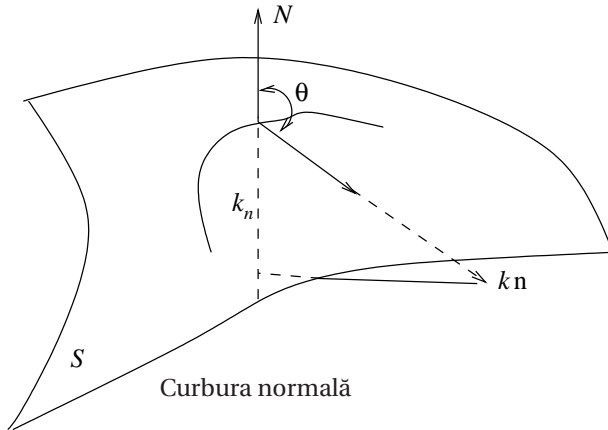
Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă pe S cu $\text{Im}(\gamma) \subset h(U)$, parametrizată canonic cu parametrul s . În general vectorul normal principal $\mathbf{n}(\gamma(s))$ (conform capitolului 1) nu este coliniar cu $N(\gamma(s))$. Tocmai diferența dintre direcțiile lor are semnificație geometrică. Vom numi *curbură normală* k_n a curbei mărimea (cu semn) a proiecției vectorului accelerație $\gamma''(s)$ pe normala la suprafață în punctul considerat. Cum avem $\gamma''(s) = k\mathbf{n}(s)$ și vectorii $\mathbf{n}(s), N(p)$ sînt unitari obținem:

$$k_n(\gamma, p) = \langle \gamma''(s), N(p) \rangle = k(s) \cos(\mathbf{n}(s), N(p)),$$

³Din punct de vedere istoric, lucrurile sînt mai complicate: lucrarea fundamentală lui Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* a apărut în 1827, iar lucrarea lui Christoffel, fără nici o legătură cu teoria suprafețelor, în care apar prima dată coeficienții care azi îi poartă numele, e publicată în 1869. Pentru o tratare istorică a teoriei suprafețelor, cea mai bună referință rămîne [Sp], vol.II.

unde k e curbura curbei în $p = \gamma(s)$. Dar, cum $\gamma(s) = h(u^1(s), u^2(s))$, avem:

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \frac{du^i}{ds} \cdot h_i, \\ \gamma''(s) &= \frac{d^2u^i}{ds^2} \cdot h_i + \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \cdot h_{ij}.\end{aligned}$$



Exprimînd h_{ij} din formula lui Gauss obținem:

$$k_n(\gamma, p) = \left\langle \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} b_{ij} N(p), N(p) \right\rangle = \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} b_{ij} = b(\gamma', \gamma').$$

Din această relație se vede că, de fapt, curbura normală nu depinde de curba γ ci doar de vectorul ei tangent, în sensul că toate curbele care au același vector tangent în p au aceeași curbura normală⁴. Pe de altă parte, dintre toate curbele care au vectorul tangent v în p , numai una este plană: cea de la intersecția suprafeței cu planul (normal la suprafață) determinat de v și $N(p)$, de aici denumirea de „curbură normală”. În concluzie putem obține toate curburile normale în p considerînd intersecțiile cu S ale planelor din fascicolul de suport $N(p)$.

Cum pentru orice vector tangent unitar există o curbă (și nu numai una) la care acesta este tangent, într-o primă instanță putem defini o funcție curbura normală pe mulțimea vectorilor tangenți unitari. Apoi o putem extinde prin liniaritate la tot planul tangent. Astfel ajungem la definiția:

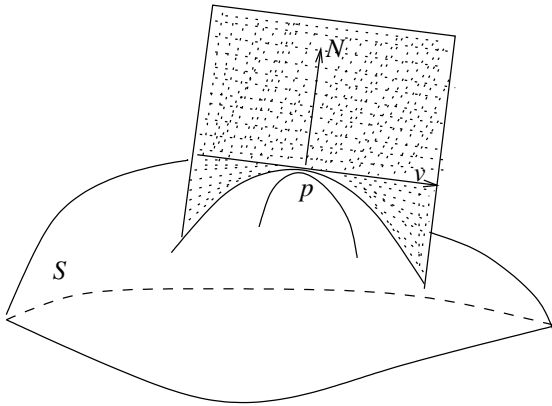
Definiția 3.5.2. Funcția $k_n : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$k_n(v) = \frac{b(v, v)}{g(v, v)}$$

se numește *curbura normală*.

Interpretarea geometrică pe care o anunțasem pentru k_i este furnizată de:

⁴Acest rezultat este cunoscut și sub forma de *Teorema lui Meusnier*.



Toate curbele cu același vector tangent determină o aceeași secțiune normală.

Teorema 3.5.3. (Olinde Rodriguez) Vectorii proprii ai operatorului Weingarten sînt punctele critice ale funcției curburi normale. Valorile proprii asociate k_1, k_2 reprezintă valorile critice ale curburii normale (i.e. maximul și minimul curburii normale restrînse la vectori unitari).

Demonstrație. Vom face un calcul local. În parametrizarea (U, h) în care lucrăm avem:

$$k_n(v) = \frac{b_{ij}v^i v^j}{g_{ij}v^i v^j}.$$

Rezultă că putem considera k_n ca funcție de două argumente, v^1, v^2 (aceasta revine la identificarea lui $T_p S$ cu \mathbb{R}^2 via baza $\{h_1, h_2\}$). Punctele critice ale lui k_n sînt cele în care toate derivatele parțiale se anulează. Un calcul simplu care ține seama că b_{ij}, g_{ij} nu depind de v^l , conduce la:

$$\frac{\partial k_n}{\partial v^l} = 2 \frac{g(v, v) b_{ls} v^s - b(v, v) g_{ls} v^s}{g^2(v, v)} = 2 \frac{1}{g(v, v)} (b_{ls} v^s - k_n(v) g_{ls} v^s).$$

Atunci v e punct critic dacă și numai dacă

$$b_{ls} v^s = k_n(v) g_{ls} v^s.$$

Înmulțind relația aceasta cu g^{lk} și sumînd după l găsim:

$$b_{ls} g^{lk} v^s = k_n(v) v^k.$$

Cum $b_{ls} g^{lk} = L_s^k$, demonstrația e încheiată. ■

Vom numi k_1, k_2 *curburi principale*. Sînt funcții diferențiabile pe suprafață (chiar dacă, de obicei, nu le menționăm argumentul). Ele dau informații despre curbura suprafeței pe două direcții privilegiate.

Exercițiul 3.5.4. Pentru orice curbă sferică închisă, integrala torsiunii este nulă.

Exercițiul 3.5.5. Arătați că dacă într-o parametrizare avem $g_{12} = b_{12} = 0$, atunci $k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, k_2 =$

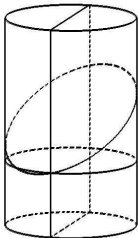
$$\frac{b_{22}}{g_{22}}$$

Exemplul 3.5.6. Folosind Teorema lui Rodriguez putem calcula ușor curburile principale ale sferei, planului și cilindrului.

Într-adevăr, fie p un punct fixat pe o sferă de rază r . Pentru a determina curbura normală $k_n(v)$ în direcția $v \in T_p S^2(r)$, e suficient să considerăm curba plană determinată de intersecția planului normal la sferă prin v cu sfera. Cum acest plan normal trece prin centrul sferei, intersecția este un cerc mare al sferei. Acesta are raza r , deci curbura lui este $\frac{1}{r}$. Cum normala la un meridian este orientată după raza vectorială, deci e coliniară cu normala la suprafață, $\theta = 0$, am găsit $k_n(v) = \frac{1}{r} \cos \theta = \frac{1}{r}$, adică toate curburile normale în p sînt egale, anume cu $\frac{1}{r}$. Atunci și curburile principale în p , care reprezintă maximum și minimum curburilor normale, sînt egale cu $\frac{1}{r}$.

Fie acum un plan fixat. În orice punct al său, orice plan normal îl intersectează după o dreaptă. Cum dreptele au curbură nulă, toate curburile normale ale unui plan, în orice punct, sînt nule. Deci și curburile principale ale planului sînt nule.

În cazul unui cilindru drept de rază r , curbele de la intersecția unui plan normal cu cilindrul pot fi elipse (inclusiv cercul paralel prin punctul considerat) sau dreaptă (generatoarea prin punct). Cum toate elipsele au curbură pozitivă și maximum acestor curbură este cea a cercului paralel, iar curbura generatoarei este zero, am găsit curburile principale $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{r}$.



Secțiuni normale pe cilindru.

Exemplul 3.5.7. Să calculăm coeficienții primei și celei de-a doua forme fundamentale și curburile principale pentru o suprafață de rotație. Fie

$$h(u^1, u^2) = (\varphi(u^2) \cos u^1, \varphi(u^2) \sin u^1, \psi(u^2)),$$

(unde $\varphi > 0$ și u^2 e parametru canonic pe curba generatoare : $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$) o parametrizare locală pentru o suprafață de rotație. Pentru simplitatea scrierii, vom omite

argumentul lui φ . Avem:

$$\begin{aligned} h_1 &= (-\varphi \sin u^1, \varphi \cos u^1, 0), \\ h_2 &= (\varphi' \cos u^1, \varphi' \sin u^1, \psi'), \\ N &= (\psi' \cos u^1, \psi' \sin u^1, -\varphi'), \quad \det(g) = \varphi^2, \\ g_{11} &= \varphi^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1, \\ h_{11} &= (-\varphi \cos u^1, -\varphi \sin u^1, 0), \\ h_{12} &= (-\varphi' \sin u^1, \varphi' \cos u^1, 0), \\ h_{22} &= (\varphi'' \cos u^1, \varphi'' \sin u^1, \psi''), \\ b_{11} &= -\varphi\psi', \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \varphi''\psi' - \varphi'\psi'', \\ L_1^1 &= -\frac{\psi'}{\varphi}, \quad L_1^2 = L_2^1 = 0, \quad L_2^2 = \varphi''\psi' - \varphi'\psi'', \end{aligned}$$

deci $k_1 = -\frac{\psi'}{\varphi}$, $k_2 = \varphi''\psi' - \varphi'\psi''$. În particular, în cazul sferei de rază r , $\varphi(u^2) = r \sin \frac{u^2}{r}$, $\psi(u^2) = r \cos \frac{u^2}{r}$, de unde $k_1 = k_2 = r$.

Exercițiul 3.5.8. Aplicați formulele de mai sus pentru a calcula curburile principale ale torului și ale cuadriceilor de rotație.

Nu e întâmplător faptul că pe sferă curburile principale sînt egale în fiecare punct. Același lucru se întîmplă pe plan (verificați!). În general, un punct al unei suprafețe în care toate curburile normale sînt egale se numește punct *ombilical*. Dar numai sfera și planul au toate punctele de acest fel:

Teorema 3.5.9. *Dacă toate punctele unei suprafețe regulate, conexe S sînt ombilicale, atunci S e o porțiune de sferă sau de plan.*

Demonstrație. Fie $p \in S$ și (U, h) o parametrizare locală în jurul lui p astfel ca $V = \text{Im}(h) \cap S$ să fie conexă. În fiecare $q \in V$ curburile principale sînt egale: $k_1(q) = k_2(q) = k(q)$. Conform Teoremei lui Rodriguez, valorile proprii ale operatorului Weingarten sînt egale. Atunci diferențiala aplicației lui Gauss este, în fiecare punct, proporțională cu operatorul identic: $dN_q = k(q)I$. Avem :

$$N_1 = kh_1, \quad N_2 = kh_2.$$

Derivăm prima ecuație în raport cu u^2 , a doua în raport cu u^1 și ținem seama că derivatele mixte de ordinul 2 sînt egale: $N_{12} = N_{21}$ și $h_{12} = h_{21}$. Scăzînd ecuațiile obținute găsim:

$$\frac{\partial k}{\partial u^2} h_1 = \frac{\partial k}{\partial u^1} h_2$$

și de aici, cum h_1, h_2 sînt liniar independenți:

$$\frac{\partial k}{\partial u^1} = \frac{\partial k}{\partial u^2} = 0.$$

Deci $k = \text{const.}$ pe V .

Dacă $k = 0$, atunci $N_1 = N_2 = 0$, adică $N = N_0 = \text{const.}$ pe V . Rezultă imediat

$$\langle h(u^1, u^2), N_0 \rangle = \text{const.}$$

ceea ce înseamnă că V face parte dintr-un plan.

Dacă $k \neq 0$ pe V , atunci punctul $O = h(u^1, u^2) - \frac{1}{k}N(u^1, u^2)$ e fix și

$$|h(u^1, u^2) - O|^2 = \frac{1}{k^2}$$

adică V este inclusă în sfera de centru O și rază $1/k$.

Aceasta rezolvă problema local. Fie acum r un punct diferit de p . S , fiind conexă (în topologia indusă din \mathbb{R}^3), e și conexă prin arce. Considerăm o curbă care unește p cu r și deoarece imaginea ei e compactă în S , o acoperim cu o mulțime finită de imagini de parametrizare V_i . Acum, dacă o asemenea vecinătate e inclusă într-un plan (respectiv într-o sferă), toate vecinătățile din acoperire trebuie să fie incluse în același plan (respectiv în aceeași sferă). În particular, p și r fac parte din același plan (respectiv în aceeași sferă). Cum r a fost ales arbitrar, demonstrația e completă. ■

Exercițiul 3.5.10. Determinați punctele ombilicale ale elipsoidului.

Cu ajutorul curburilor principale introducem acum cel mai important invariant metric al suprafețelor:

Definiția 3.5.11. *Curbura gaussiană* K a unei suprafețe este produsul curburilor principale: $K = k_1 k_2$.

Deoarece

$$K = k_1 k_2 = \det(L_j^i) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

curbura gaussiană pare să fie sesizabilă doar din exteriorul suprafeței. Că nu este așa ne lămurește următoarea teoremă a lui Gauss:

Teorema 3.5.12. (*Teorema egregium*)⁵ *Curbura gaussiană depinde doar de coeficienții primei forme fundamentale.*

Demonstrație. Ținând seama de formula anterioară va fi suficient să demonstrăm că determinantul formei a doua fundamentale se poate exprima numai în funcție de coeficienții primei forme fundamentale. Demonstrația este tehnică și destul de nenaturală. Dar are avantajul de a fi directă și scurtă. Pornim de la formula lui Gauss pe care o derivăm:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} h_s + \Gamma_{ij}^s h_{sk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} N + b_{ij} N_k.$$

Aici folosim din nou formula lui Gauss pentru exprimarea lui h_{sk} și formula lui Weingarten pentru explicitarea lui N_k . Găsim:

$$(3.8) \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} + \Gamma_{rk}^s \Gamma_{ij}^r - b_{ij} L_k^s \right) h_s + \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s b_{sk} \right) N.$$

Deoarece am presupus că parametrizările sînt de clasă \mathcal{C}^∞ (de fapt, clasa \mathcal{C}^3 ar fi fost de ajuns aici), trebuie să avem:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j}.$$

⁵În latină, egregium = important, distins, deosebit.

Scriem egalitatea aceasta folosind (3.8) și egalăm coeficienții lui h_s , respectiv N (pentru că $\{h_1, h_2, N\}$ sînt liniar independenți în orice punct). Rezultă ecuațiile:

$$(3.9) \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{rk}^s \Gamma_{ij}^r - \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ik}^r = b_{ij} L_k^s - b_{ik} L_j^s,$$

$$(3.10) \quad \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ik}^s b_{sj} - \Gamma_{ij}^s b_{sk}.$$

Notăm, pentru simplitate, membrul stîng al ecuațiilor (3.9) cu R_{ijk}^s . Atunci ecuația (3.9) devine

$$(3.11) \quad R_{ijk}^s = b_{ij} L_k^s - b_{ik} L_j^s$$

care, înmulțită cu g_{sm} (sumare după s) conduce la:

$$g_{sm} R_{ijk}^s = b_{ij} L_k^s g_{sm} - b_{ik} L_j^s g_{sm} = b_{ij} b_{km} - b_{ik} b_{jm}.$$

Aici punem $k = i = 1, j = m = 2$. Rezultă

$$g_{s2} R_{121}^s = (b_{12})^2 - b_{11} b_{22} = -\det(b_{ij}).$$

Cum funcțiile R_{ijk}^s depind doar de coeficienții Christoffel care, la rîndul lor, depind doar de coeficienții primei forme fundamentale, demonstrația e încheiată. ■

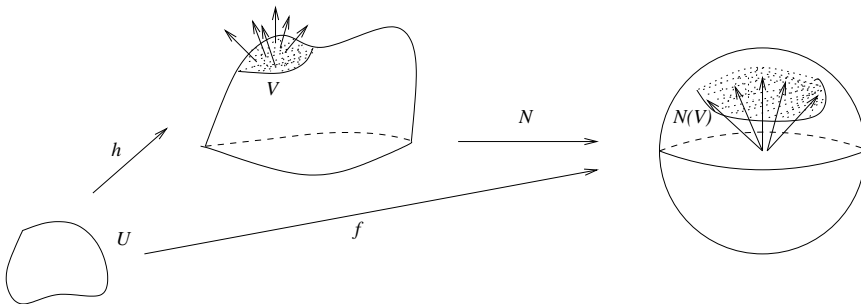
Ținînd seama de Teorema 3.4.6, deducem următoarea consecință importantă:

Corolarul 3.5.13. *Două suprafețe local izometrice au aceeași curbură gaussiană.*

Ecuțiile (3.11) și (3.10) se numesc, respectiv *ecuațiile lui Gauss și Codazzi*.

Conform Teoremei egregium, niște ființe imaginare bidimensionale care ar locui o suprafață și nu ar fi conștiente că în afara lumii lor mai există și altceva (adică nu ar putea să-și privească planeta din exterior) ar fi capabile totuși să determine curbura suprafeței doar prin măsurători pe suprafață. Este o observație fundamentală care l-a condus ulterior pe Riemann la introducerea curburii pentru spațiile abstracte care azi îi poartă numele.

Să dăm acum și o interpretare geometrică curburii gaussiene. Fie $p_0 \in S$ un punct în care $K(p_0) > 0$. Considerăm o parametrizare (U, h) în jurul său astfel ca $h(u_0) = p_0$ și o vecinătate $V \subset h(U) \cap S$ a lui p_0 în S . Fie $N: V \rightarrow S^2$ aplicația lui Gauss. Vom demonstra că raportul dintre aria lui $N(V)$ și cea a lui V tinde la $K(p_0)$ cînd V tinde la p_0 .



Arătăm întâi că, (micșorînd, eventual, deschisul U), $f = N \circ h$ e o parametrizare a porțiunii $N(V) \subset S^2$. Cum h și N sînt diferențiabile, f e diferențiabilă. Deoarece h e homeomorfism între V și $h^{-1}(V)$ iar N nu e decît o translație în \mathbb{R}^3 , f e homeomorfism pe imagine. Rămîne să dovedim că f_1, f_2 sînt independente pe U ; echivalent, $f_1 \times f_2 \neq 0$. Avem:

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 &= N_1 \times N_2 = (-L_1^i h_i) \times (-L_2^j h_j) = L_1^i L_2^j (h_i \times h_j) \\ &= L_1^1 L_2^2 (h_1 \times h_2) + L_1^2 L_2^1 (h_2 \times h_1) = \det(L) h_1 \times h_2 = K(p) h_1 \times h_2. \end{aligned}$$

Cum $K(p_0) > 0$, prin continuitate K rămîne pozitivă pe o vecinătate suficient de mică $V' \subseteq V$ a lui p_0 . Deoarece $h_1 \times h_2 \neq 0$ pe U , avem $f_1 \times f_2 \neq 0$ pe $U' = h^{-1}(V') \subseteq U$. Atunci:

$$A(N(V')) = \iint_{U'} \|f_1 \times f_2\| = \iint_{U'} K \|h_1 \times h_2\| = \iint_{U'} K \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Folosind teorema de medie pentru integrala dublă avem:

$$A(N(V')) = K(u_1) \sqrt{\det(g_{ij}(u_1))} A(U') \text{ pentru un } u_1 \in U'.$$

Similar:

$$A(V') = \iint_{U'} \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\det(g_{ij}(u_2))} A(U') \text{ pentru un } u_2 \in U'.$$

Să observăm că dacă aria lui V' tinde la 0, V' rămînînd tot timpul vecinătate pentru p_0 , atunci u_1 tinde să coincidă cu u_2 și imaginile lor prin h tind să coincidă cu p_0 ; în particular, datorită continuității $K(u_1)$ va tinde la $K(u_0) = K(p_0)$, deci obținem:

$$\lim_{A(V') \rightarrow 0} \frac{A(N(V'))}{A(V')} = K(p_0)$$

ceea ce constituie interpretarea geometrică promisă.

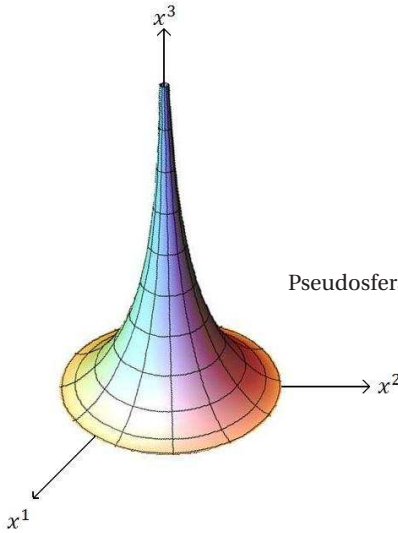
Observația 3.5.14. Argumentul de mai sus funcționează și pentru $K(p_0) < 0$, dar atunci obținem interpretarea geometrică a modulului curburii. În schimb, pentru curbura nulă nu se poate da o astfel de interpretare.

Exercițiul 3.5.15. Pentru suprafața lui Enneper, dată prin:

$$(u^1 - (u^1)^3/3 + u^1(u^2)^2, u^2 - (u^2)^3/3 + (u^1)^2 u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2),$$

arătați că aplicația lui Gauss este bijectivă și că imaginea discului $\{u^1^2 + u^2^2 \leq 3\}$ prin aplicația lui Gauss acoperă mai mult decît o emisferă.

Exercițiul 3.5.16. Folosind Exemplul 3.5.7, arătați că pentru o suprafață de rotație $K = -\frac{\varphi''}{\varphi}$. În particular, demonstrați că: pe pseudosferă (obținută prin rotația tractricei, deci cu parametrizarea $h(u^1, u^2) = (\sin u^2 \cos u^1, \sin u^2 \sin u^1, \cos u^2 + \ln \operatorname{tg} \frac{u^2}{2})$, curbura gaussiană este constantă, egală cu -1 , iar pe sfera de rază r , $K = 1/r^2$.



Pseudosfera. Meridianele (verticale) sînt tractrice.

Observați că pe tor curbura gaussiană nu are semn constant. Determinați punctele în care este pozitivă și interpretați geometric rezultatul.

Exercițiul 3.5.17. Să se calculeze curbura gaussiană pentru o suprafață dată explicit prin $x^3 = f(x^1, x^2)$.

Indicație: Parametrizăm cu $h(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$ și avem:

$$h_1 = (1, 0, f_1), \quad h_2 = (0, 1, f_2), \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}(-f_1, -f_2, 1),$$

$$g_{11} = 1 + f_1^2, \quad g_{12} = f_1 f_2, \quad g_{22} = 1 + f_2^2,$$

$$h_{11} = (0, 0, f_{11}), \quad h_{12} = (0, 0, f_{12}), \quad h_{22} = (0, 0, f_{22}),$$

$$b_{11} = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad b_{12} = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad b_{22} = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

$$\text{Deci } K = \frac{\det(b)}{\det(g)} = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^2}.$$

Aplicați formulele găsite pentru paraboloidul hiperbolic $x^3 = x^1 x^2$ și pentru o porțiune de sferă parametrizată prin proiecții ortogonale $x^3 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. În cazul sferei, comparați curbura gaussiană găsită cu cea calculată în parametrizarea geografică (suprafață de rotație).

Exercițiul 3.5.18. Să se arate că, într-o parametrizare ortogonală, curbura gaussiană se poate calcula cu formula:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) \right].$$

Exercițiul 3.5.19. Fie K curbura gaussiană a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

(i) Arătați că $\iint K d\sigma = 4\pi$.

(ii) Calculînd direct integrala de la punctul i , arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab^2 \cos \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = 2.$$

În funcție de curbura gaussiană, un punct p al unei suprafețe poate fi:

- *eliptic* dacă $K(p) > 0$;
- *hiperbolic* dacă $K(p) < 0$;
- *parabolic* dacă $K(p) = 0$, dar una dintre curburile principale este nenulă;
- *planar* dacă $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

Exemplul 3.5.20. Orice punct al unui plan este planar. Toate punctele unui cilindru sau ale unei porțiuni de con (în afara vârfului) sînt parabolice. Punctele *pseudosferei* (suprafața de rotație generată de rotirea tractricei, conform cu Exercițiul 1.3.4) sînt, toate, hiperbolice. Sfera are toate punctele eliptice și, în general:

Exercițiul 3.5.21. Orice suprafață compactă are puncte eliptice.

Indicație: Fie $p_0 \notin S$. Funcția $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(p) = \|p - p_0\|$ e diferențiabilă. Fiind definită pe o mulțime compactă are puncte de extrem local. Fie q un punct de *maxim* local. Arătați geometric că sfera S' de centru p_0 și rază $f(q)$ este tangentă exterior în q la S . Cum S și S' au aceeași direcție normală, în orice secțiune normală curba de secțiune de pe S e interioară meridianului corespunzător de pe S' , deci are curbura mai mare. Astfel în q toate curburile normale sînt pozitive.

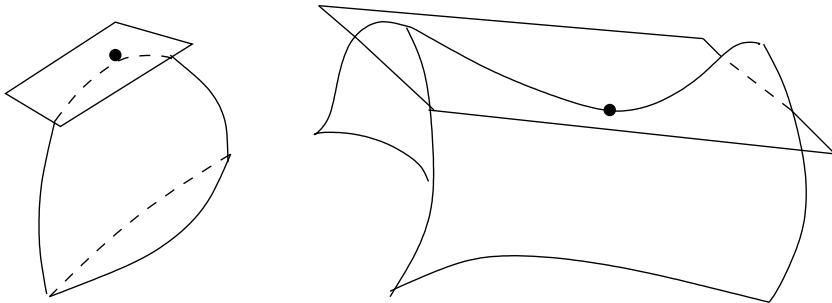
O interpretare geometrică a punctelor eliptice și hiperbolice avem în:

Exercițiul 3.5.22. Fie S o suprafață regulată.

Fie $p \in S$ un punct eliptic. Atunci există o vecinătate a lui p ale cărei puncte sînt, toate, de o aceeași parte a lui $T_p S$.

Fie $p \in S$ un punct hiperbolic. Atunci în orice vecinătate a lui p există puncte de o parte și de alta a lui $T_p S$.

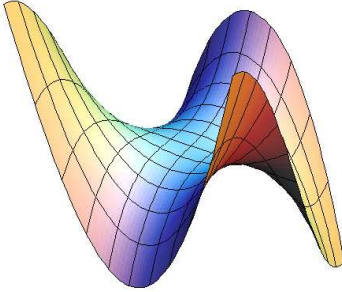
Indicație: Se consideră o parametrizare (U, h) în jurul lui p , și se studiază funcția $f(u^1, u^2) = \langle h(u^1, u^2) - p, N(p) \rangle$ care dă distanța cu semn de la $q = h(u^1, u^2)$ la $T_p S$. Dezvoltînd în serie Taylor $h(u^1, u^2)$, se exprimă f în funcție de coeficienții formei a doua fundamentale.



Stînga: punct eliptic (local, suprafața e de o singură parte a planului tangent). Dreapta: punct hiperbolic (Planul tangent taie suprafața).

Condițiile de mai sus sînt doar necesare, nu și suficiente, după cum dovedesc următoarele două exerciții:

Exercițiul 3.5.23. Studiați punctul $p = (0, 0, 0)$ de pe suprafața $x^3 = (x^1)^3 - 3x^1(x^2)^2$ (șaua maimuței). Arătați că forma a doua fundamentală în p este nulă, deci p este planar, totuși există puncte de ambele părți ale planului tangent în p în orice vecinătate a punctului.



Șaua maimuței. Cu excepția punctului $(0, 0, 0)$, care e planar, toate celelalte puncte au curbură gaussiană negativă:

$$K = -36 \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2}{(1 + 9((u^1)^2 + (u^2)^2))^2}.$$

Exercițiul 3.5.24. Rotiți curba de ecuație $x^3 = (x^1)^3 - 1$, $x^3 \in [-2, 0]$, în jurul axei x^2 . Arătați că punctele generate de rotația punctului $(1, 0)$ sînt parabolice și în orice vecinătate a lor există puncte de ambele părți ale planului tangent. Atenție, parametrizarea nu e canonică, nu puteți folosi direct formulele din Exemplul 3.5.7.

Exercițiul 3.5.25. Să se clasifice suprafețele de rotație cu curbură gaussiană constantă 1, 0 sau -1.

Indicație: E suficient să clasificăm curbele generatoare $\gamma(u^2) = (\varphi(u^2), \psi(u^2))$ cu $\varphi > 0$ și $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Din Exercițiul 3.5.16: $K = -\frac{\varphi''}{\varphi}$. Deci φ e soluție a ecuației diferențiale cu coeficienți constanți:

$$(3.12) \quad \varphi'' + K\varphi = 0,$$

iar ψ e dat de formula:

$$\psi(u^2) = \int_0^{u^2} \sqrt{1 - \varphi'^2(t)} dt,$$

cu u^2 astfel ca radicalul de sub integrală să aibă sens.

Pentru $K = 1$, soluțiile lui (3.12) sînt:

$$\varphi(u^2) = C_1 \cos u^2 + C_2 \sin u^2, \quad C_i = \text{const.}$$

Introducem, în plus, restricția ca suprafața să taie ortogonal planul $x^1 O x^2$, adică $\gamma'(u^2) \perp O x^1$ în punctul de intersecție. Putem presupune $\psi(0) = 0$, atunci condiția de perpendicularitate se reduce la $C_2 = 0$. Punem $C_1 = C$ și găsim soluția generală sub forma:

$$\gamma(u^2) = (C \cos u^2, \int_0^{u^2} \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)} dt), \quad C = \varphi(0).$$

Pentru $C = 1$ se obține sfera de rază 1.

Pentru $K = 0$ se obține $\varphi'' = 0$ deci φ e liniară. Suprafețele de rotație cu curbură gaussiană nulă sînt, deci: cilindri, conuri (mai puțin vîrfurile) și plane.

Pentru $K = -1$, (3.12) furnizează:

$$\varphi(u^2) = C_1 e^{u^2} + C_2 e^{-u^2}, \quad C_i = \text{ct.}$$

Cu aceeași ipoteză suplimentară ca în cazul $K = 1$, forma generală a lui γ e una dintre următoarele trei:

$$\gamma(u^2) = (C \operatorname{ch} u^2, \int_0^{u^2} \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sh}^2(t)} dt,$$

$$\gamma(u^2) = (C \operatorname{sh} u^2, \int_0^{u^2} \sqrt{1 - C^2 \operatorname{ch}^2(t)} dt),$$

$$\gamma(u^2) = (e^{u^2}, \int_0^{u^2} \sqrt{1 - e^{2t}} dt).$$

Deoarece substituția $t = \ln \sin v$ conduce la $\int \sqrt{1 - e^{2t}} dt = \int \cos v \cdot \operatorname{ctg} v dv = \cos v + \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, ultima ecuație găsită e cea a tractricei. Deci suprafața generată, în acest caz, este pseudosfera.

Reamintim că, datorită Teoremei egregium, două suprafețe local izometrice au aceeași curbura gaussiană (Corolarul 3.5.13), deși nu au aceleași curburi principale. Altfel spus, două suprafețe ale căror curburi gaussiene diferă nu sînt local izometrice: o porțiune de sferă nu poate fi niciodată „întinsă” pe un plan. Reciproca nu mai este adevărată: curbura gaussiană nu este suficientă pentru clasificarea metrică a suprafețelor. E adevărat, însă, un rezultat mai slab:

Teorema 3.5.26. *Două suprafețe cu aceeași curbura gaussiană constantă sînt local izometrice.*

Demonstrația acestui rezultat necesită unele pregătiri. Vom reveni asupra lui în finalul discuției despre geodezice.

Recapitulînd: am asociat unei parametrizări un obiect algebric (operatorul Weingarten sau, echivalent, forma a doua fundamentală). Acesta ne-a pus la dispoziție niște invarianți algebrici (valorile sale proprii) care s-au dovedit a avea interpretare geometrică (Teorema lui Rodriguez). Valorile proprii ale unui operator simetric produc doi noi invarianți: produsul lor (determinantul operatorului) și suma lor (urma (matricei) operatorului). Primul dintre aceștia este curbura gaussiană a cărei semnificație geometrică am discutat-o. Ne ocupăm acum, pe scurt, de al doilea.

Definiția 3.5.27. Funcția

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

se numește *curbura medie*.

Exercițiul 3.5.28. Demonstrați următoarea formulă:

$$(3.13) \quad H = \frac{1}{2} \frac{g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{\det(g_{ij})}$$

Exercițiul 3.5.29. Fie S o suprafață dată local ca graficul unei funcții $x^3 = f(x^1, x^2)$. Arătați că, într-un punct în care normala la suprafață verticală, curbura medie este egală cu urma hesianei lui f în acel punct (vezi și Exercițiul 3.5.1).

Curbura medie intervine în probleme de fizică. Se poate demonstra că, dacă se înfășoară suprafața unui corp cu o membrană elastică (de cauciuc), atunci presiunea exercitată de membrană într-un punct p este orientată pe $-N(p)$ și are modulul $H(p)$. În particular, dacă se consideră o membrană de săpun întinsă pe un anumit contur fix, presiunea membranei nu este echilibrată de nici o forță de reacțiune, deci trebuie

să fie nulă. Cu alte cuvinte: suprafața după care se așază un balon de săpun este cea cu $H = 0$. Pe de altă parte, o picătură de lichid trebuie să ia, în absența altor surse de presiune, o formă în care curbura sa medie să fie constantă (pentru că presiunea superficială e aceeași în toate direcțiile). În experimentul lui Plateau se iau două lichide cu aceeași densitate și se lasă o bulă din primul lichid să plutească în echilibru în interiorul celui alt. Se constată că lichidul plutitor ia forma unei sfere. Astfel, o suprafață cu curbura medie constantă ar trebui să fie o sferă. Rezultatul precis este cel al lui H. Hopf: *O suprafață compactă, cu curbura medie constantă, homeomorfă cu o sferă este o sferă*. Demonstrația este mai complicată, necesită cunoștințe de funcții complexe (vezi problema 2.3.6 în [Or]).

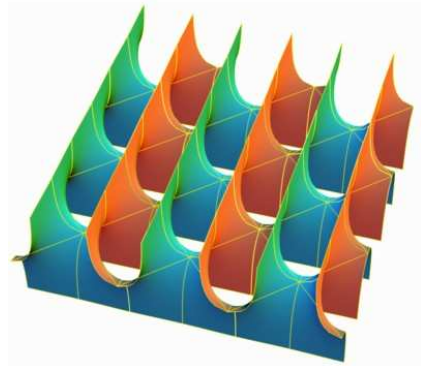
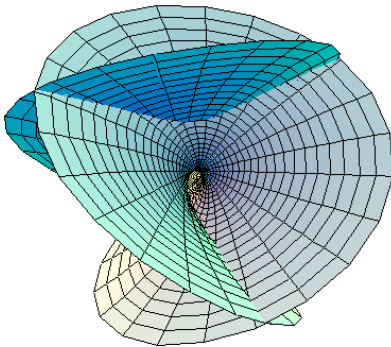
Din cele spuse pînă acum se vede că suprafețele cu curbura medie nulă sînt un obiect interesant de studiu. Asemenea suprafețe se numesc *minimale*.

Exemplul 3.5.30. Prin calcul direct se arată că următoarele suprafețe sînt minimale: elicoidul, catenoidul (vezi Exemplul 3.2.22), suprafața lui Enneper dată prin:

$$(u^1 - (u^1)^3/3 + u^1(u^2)^2, u^2 - (u^2)^3/3 + (u^1)^2 u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2),$$

suprafața lui Scherk, dată prin:

$$x^3 = \ln \frac{\cos x^2}{\cos x^1}, \quad (x^1, x^2) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}).$$



Suprafețele lui Enneper (stînga) și Scherk.

Dăm în continuare motivația denumirii.

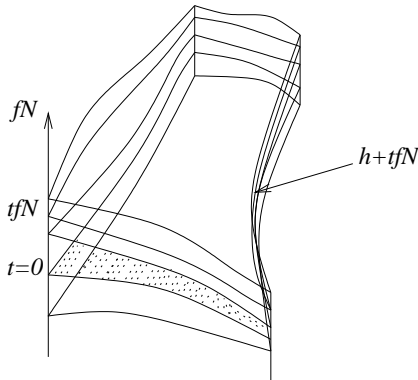
Fie (U, h) o parametrizare locală a unei porțiuni de suprafață și $D \subset U$ o regiune mărginită. Fie $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. O funcție

$$\varphi: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dată prin:

$$\varphi(u^1, u^2, t) = h(u^1, u^2) + t f(u^1, u^2) N(u^1, u^2)$$

se numește *variație normală* a lui $h(\bar{D})$. În general, pentru un t fixat arbitrar, $\varphi^t(u^1, u^2) = \varphi(u^1, u^2, t)$ nu mai este o parametrizare. În schimb, pentru t suficient de mic, este parametrizare (de aceea spunem că reprezintă o variație a suprafeței inițiale φ^0 prin suprafețele φ^t).



O variație normală a unei porțiuni de suprafață.

Într-adevăr, prin calcul direct obținem:

$$\varphi_1^t = h_1 + tfN_1 + tf_1N,$$

$$\varphi_2^t = h_2 + tfN_2 + tf_2N,$$

$$g_{11}^t = g_{11} + 2tf\langle h_1, N_1 \rangle + t^2 f^2 \langle N_1, N_1 \rangle + t^2 f_1^2,$$

$$g_{12}^t = g_{12} + tf(\langle h_1, N_2 \rangle + \langle h_2, N_1 \rangle) + t^2 f^2 \langle N_1, N_2 \rangle + t^2 f_1 f_2,$$

$$g_{22}^t = g_{22} + 2tf\langle h_2, N_2 \rangle + t^2 f^2 \langle N_2, N_2 \rangle + t^2 f_2^2.$$

Înlocuind aici, din formula lui Weingarten, $N_i = -L_i^j h_j$, obținem $\langle h_i, N_j \rangle = -b_{ij}$. Rezultă că, neglijând termenii în t de grad mai mare sau egal cu 2, ultimele trei formule de mai sus devin:

$$g_{11}^t = g_{11} - 2tfb_{11} + O(t^2),$$

$$g_{12}^t = g_{12} - 2tfb_{12} + O(t^2),$$

$$g_{22}^t = g_{22} - 2tfb_{22} + O(t^2).$$

φ^t e parametrizare numai dacă $\varphi_1^t \times \varphi_2^t \neq 0$. Echivalent, dacă $\det(g_{ij}^t) \neq 0$. Calculele de mai sus împreună cu formula 3.13 conduc la:

$$\det(g_{ij}^t) = \det(g_{ij})(1 - 4tfH) + O(t^2),$$

unde în $O(t^2)$ am grupat totii termenii care conțin puteri ale lui t mai mari sau egale cu 2. În concluzie, dacă ε e suficient de mic, $(1 - 4tfH) \neq 0$ și φ^t e încă parametrizare. Aria porțiunii de suprafață $\varphi^t(\bar{D})$ va fi:

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{\det(g_{ij}^t)} du^1 du^2 = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4tfH + O'(t^2)} \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2,$$

unde $O'(t^2) = (\det(g_{ij}))^{-1} O(t^2)$. Rezultă că pentru t mic $A(t)$ e diferentiabilă și

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2fH \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2.$$

Acum putem demonstra:

Propoziția 3.5.31. *O suprafață este minimală dacă și numai dacă $A'(0) = 0$ pentru orice domeniu D și orice variație normală ca mai sus.*

Demonstrație. Dacă $H = 0$ pe S lucrurile sînt clare. Reciproc: dacă, prin absurd, există p cu $H(p) \neq 0$, alegem un domeniu mic D în jurul lui $h^{-1}(p)$ (astfel încît H să nu se anuleze pe $h(D)$) și construim o funcție f care se anulează în afara unei vecinătăți mici a lui $h^{-1}(p)$ și $f(h^{-1}(p)) = H(p)$ (o asemenea f se numește funcție test; existența ei va fi demonstrată în capitolul de varietăți diferențiabile). Atunci $A'(0) < 0$ pentru variația asociată lui f , contradicție. ■

Propoziția aceasta motivează doar parțial denumirea de suprafață minimală: ea arată numai că suprafețele cu curbura medie nulă sînt puncte critice ale funcționalei arie, nu neapărat minime. Dar denumirea a fost propusă de Lagrange (care a determinat la 1760, primul, o asemenea suprafață, anume catenoidul) și tradiția o păstrează (conform [Ca]).

Exercițiul 3.5.32. Să se demonstreze că singura suprafață de rotație minimală este catenoidul.

Indicație: Fie (φ, ψ) curba generatoare, parametrizată canonic. Conform Exemplului 3.13, $k_1 = -\frac{\psi'}{\varphi}$, $k_2 = \varphi''\psi' - \varphi'\psi''$. Deci avem de rezolvat sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \varphi''\psi' - \varphi'\psi'' - \frac{\psi'}{\varphi} = 0, \\ (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1 \end{cases}$$

cu condiția $\varphi > 0$. Dacă $\varphi' = 0$ peste tot, atunci din prima ecuație $\psi' = 0$, iar din a doua $\psi' = \pm 1$, contradicție. Deci există puncte în care $\varphi' \neq 0$. Lucrăm pe un interval deschis I ce conține un asemenea punct. Aici $\varphi' \neq 0$. Înmulțim prima ecuație cu φ' , ținem seama că din derivarea celei de-a doua avem $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$ și obținem ecuația $\varphi'\psi' + \varphi\psi'' = 0$. Dacă $\psi' = 0$ pe I , atunci $k_1 = k_2 = 0$ și $\varphi' = \pm 1$; deci φ e liniară și suprafața e un plan, un con sau un cilindru. Dar numai planul are ambele curburi principale nule. Reținem deci planul ca exemplu (trivial) de suprafață de rotație minimală. Putem presupune că $\psi' > 0$ pe I (micșorînd, eventual, intervalul). Rezultă $\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{\psi''}{\psi'}$, de unde $\log \varphi + \log \psi' = C = \text{const}$. De aici $\varphi\psi' = e^C$. Ridicăm la pătrat, folosim

$(\psi')^2 = 1 - (\varphi')^2$ și găsim $\varphi' = \sqrt{1 - \frac{C^2}{\varphi^2}}$. E o ecuație cu variabile separabile care, prin integrare, dă:

$$\varphi(t) = \sqrt{(t+C)^2 + C_1}, \quad C_1 = \text{const}.$$

Atunci pentru ψ se obține:

$$\psi(t) = \pm \sqrt{k} \ln(t+C + \sqrt{(t+C)^2 + C_1}) + C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Punem $u = t + C$, adică putem lua $C = 0$ în formulele pentru φ și ψ . Acum se vede ușor că schimbarea de variabilă $u^2 = \arccos \sqrt{t^2 + C_1}$ conduce la ecuațiile catenarei.

Exercițiul 3.5.33. Nu există suprafețe minimale compacte.

6. Curbe pe suprafețe. Geodezice

Vom studia acum proprietățile curbelor de pe o suprafață. Vom construi în fiecare punct al curbei un triedru ortonormat (altul decît cel al lui Frenet), variațiile axelor căruia vor reflecta comportarea curbei pe suprafață. Discuția fiind locală, se poate

presupune, fără a restrînge generalitatea, că avem de-a face cu o curbă $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizată canonic cu parametrul s și cu $\text{Im}(\gamma) \subset h(U)$ unde (U, h) e o parametrizare. Atunci avem $\gamma(s) = h(u^1(s), u^2(s))$.

Fie $T(s) = d\gamma/ds$ vectorul tangent (unitar) la γ^6 . Vectorul accelerație, $d^2\gamma/ds^2$, e normal pe T dar nu neapărat orientat după normala la suprafață (conform discuției privind curbura normală). Îl descompunem într-o componentă tangentă la suprafață și una normală la suprafață:

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = tg\left(\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right) + nor\left(\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right).$$

Observăm că:

$$\left\langle tg\left(\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right), T(s) \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, T(s) \right\rangle = 0.$$

Atunci

$$N_g(s) = N(s) \times T(s)$$

e un vector unitar colinar cu $tg(d^2\gamma/ds^2)$. Triedrul $\{T(s), N_g(s), N(s)\}$ astfel introdus poartă numele lui Darboux. Cîmpul vectorial N_g se numește *normala geodezică*. La fel ca în cazul triedrului Frenet, derivînd cele șase relații de ortogonalitate dintre vectorii triedrului, se demonstrează următoarele formule de derivare:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= k_g(s)N_g(s) + k_n(s)N(s) \\ \frac{dN_g}{ds} &= -k_g(s)T(s) + \tau_g(s)N(s) \\ \frac{dN}{ds} &= -k_n(s)T(s) - \tau_g(s)N_g(s) \end{aligned}$$

Aici k_n este curbura normală, iar k_g, τ_g sînt funcții nou introduse, numite respectiv *curbura geodezică* și *torsiunea geodezică*.

Pentru a găsi interpretarea geometrică a curburii geodezice facem întîi un calcul explicit al ei. Cu formula lui Gauss rezultă:

$$\begin{aligned} k_g(s) &= \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, N_g(s) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) h_i + b_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} N(s), N_g(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) h_i, N(s) \times T(s) \right\rangle \\ &= \det \left(T(s), N(s), \left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) h_i \right). \end{aligned}$$

Atunci, cum N e ortogonal și pe T și pe h_i ,

$$k_g(s) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) h_i = \lambda(s)T(s)$$

⁶Preferăm aici notația cu majusculă pentru vectorul tangent, și nu cu minusculă îngroșată ca în capitoul despre curbe, din motive de coerență a notațiilor.

pentru o anumită funcție diferențiabilă λ . Rezultă că

$$\lambda(s) = \langle T(s), \lambda(s)T(s) \rangle = \langle T(s), \frac{d^2\gamma}{ds^2} \rangle = 0$$

pentru că parametrizarea e canonică.

Calculul anterior, laolaltă cu prima formulă de derivare pentru triedrul Darboux demonstrează:

Propoziția 3.6.1. Fie $s_0 \in I$. Următoarele afirmații sînt echivalente:

- 1) $k_g(s_0) = 0$;
- 2) Vectorul normal principal al curbei în s_0 e coliniar cu vectorul normal la suprafață în $\gamma(s_0)$;
- 3) Coordonatele locale ale curbei verifică ecuațiile:

$$(3.14) \quad \frac{d^2 u^i}{ds^2} \Big|_{s_0} + \Gamma_{jk}^i(s_0) \frac{du^j}{ds} \Big|_{s_0} \frac{du^k}{ds} \Big|_{s_0} = 0, \quad i = 1, 2$$

Curbele de-a lungul cărora vectorul normal principal este coliniar cu vectorul normal la suprafață se numesc (linii) *geodezice* și joacă un rol central în geometria diferențială și în teoria relativității. Propoziția anterioară spune ca o geodezică e caracterizată de anularea, de-a lungul ei, a curburii geodezice. Echivalent, geodezicele sînt soluții ale sistemului de (două) ecuații diferențiale ordinare de ordinul 2 (3.14) în care punctul s_0 nu mai este fixat. Aplicînd Teorema de existență și unicitate pentru ecuații diferențiale rezultă:

Propoziția 3.6.2. Fie $p \in S$ și $v \in T_p S$. Atunci există o unică geodezică $\gamma : I \rightarrow S$ astfel încît $\gamma(0) = p$ și $\gamma'(0) = v$.

Observația 3.6.3. 1) Deoarece coeficienții sistemului (3.14) depind doar de prima formă fundamentală, geodezicele sînt intrinsec asociate unei suprafețe. În consecință, geodezicele a două suprafețe local izometrice se corespund prin respectiva izometrie locală.

2) Sistemul (3.14) nu e invariant la schimbări de parametru. E ușor de văzut că doar schimbările afine de parametru îi conservă forma. Deci o geodezică poate fi întotdeauna considerată ca fiind parametrizată proporțional cu lungimea arcului. În particular, *vectorul tangent al unei geodezice are întotdeauna lungime constantă.*

Exemplul 3.6.4. În cazul planului, sistemul (3.14) se reduce la $\frac{d^2 u^i}{ds^2} = 0$: geodezicele planului sînt dreptele.

Deoarece un cilindru e local izometric cu planul, izometria locală fiind desfășurarea cilindrului pe plan, conform observației anterioare 1), geodezicele cilindrului sînt de trei feluri: generatoare, cercuri paralele și elice. Similar se determină geodezicele conului (fără vîrf).

Meridianele unei suprafețe de rotație sînt geodezice deoarece satisfac proprietatea 2) din Propoziția 3.6.1 (dar nu toate cercurile paralele sînt geodezice, ci numai cele generate de punctele de extrem local ale curbei generatoare; în general, geodezicele unei suprafețe de rotație se determină cu metoda lui Clairaut, cf. [Ca]), În particular, meridianele sferei sînt geodezice. Iar cum prin orice punct al sferei există meridiane orientate după orice direcție tangentă, acestea sînt singurele geodezice ale sferei.



Cele trei tipuri de geodezice ale cilindrului.

Exercițiul 3.6.5. Arătați că într-o parametrizare ortogonală, sistemul geodezicelor se reduce la:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 \right] &= 0 \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \frac{1}{2g_{22}} \left[-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

Pentru a demonstra încă o proprietate geometrică importantă a geodezicelor avem nevoie de un rezultat mai tehnic.

Lema 3.6.6. Fie $p \in S$ și C o geodezică prin p . Atunci există o parametrizare în jurul lui p în care coeficienții primei forme fundamentale satisfac $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22}(0, u^2) = 1$. În plus, $C \cap h(U)$ face parte din familia de curbe $u^2 = \text{const}$. O parametrizare de acest fel se numește semigeodezică.

Demonstrație. Fie Γ geodezica (unică) prin p parametrizată canonic și ortogonală la C . Notăm v^1, v^2 parametrul canonic pe C , respectiv Γ . Putem presupune $\Gamma(0) = C(0) = p$. Prin fiecare punct $\Gamma(v^2)$ trece o unică geodezică $\tilde{C}(v^1, v^2)$ ortogonală la Γ . Evident $C = \tilde{C}(v^1, 0)$. Fie acum X câmpul vectorial tangent la \tilde{C} și Y câmpul vectorial ortogonal lui X . Din Teorema 3.3.9 există o parametrizare ale cărei linii de coordonate sînt tangente acestor câmpuri. Parametrizarea e ortogonală pentru că X și Y sînt ortogonale. Pe de altă parte, curbele $v^2 = \text{const}$. sînt geodezice prin construcție și satisfac sistemul (3.14). Pentru $i = 2$ rezultă de aici $\Gamma_{11}^2 = 0$. Atunci din formula coeficienților Christoffel (3.7) avem $\partial g_{11} / \partial v^2 = 0$. Pentru a obține $g_{11} = 1$ nu avem decît să reparametrizăm punînd

$$u^1 = \int \sqrt{g_{11}} dv^1, \quad u^2 = v^2.$$

Pe de altă parte și curba Γ , de ecuație $u^1 = 0$ satisface (3.14) de unde

$$(\partial g_{22} / \partial u^1) |_{u^1=0} = 0$$

și lema e complet demonstrată. ■

Acum putem demonstra:

Propoziția 3.6.7. Lungimea unui arc de geodezică cuprins în imaginea unei parametrizări semigeodezice e mai mică decât lungimea oricărei alte curbe care-i unește capetele.

Demonstrație. Fie $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ o geodezică cu $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ și (U, h) parametrizare semigeodezică furnizată în lemă (asfel ca γ să fie dată de $u^2 = 0$). Fie $\sigma : [0, 1] \rightarrow h(U)$ avînd aceleași capete cu γ . Atunci, deoarece $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ avem:

$$L(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt \geq \int_0^1 du^1 = u^1(1) - u^1(0).$$

Deoarece γ e dată de $u^2 = 0$ lungimea sa va fi:

$$L(\gamma) = \int_0^1 du^1 = u^1(1) - u^1(0),$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Conform acestui rezultat, geodezicele joacă în geometria unei suprafețe rolul dreptelor din geometria euclidiană. Vom vorbi, astfel, despre triunghiuri geodezice etc. Pentru a construi o geometrie coerentă ar trebui, însă, demonstrat că prin orice două puncte trece o geodezică. Încă nu ar fi de ajuns, pentru că nu am avea unicitate: între două puncte antipodale pe sferă există o infinitate de meridiane. Vom reveni asupra acestor chestiuni în capitolul de varietăți riemanniene.

În fine, putem acum da:

Demonstrație. (pentru Teorema 3.5.26) . Vom arăta că, în vecinătatea oricărui punct, curbura gaussiană determină univoc coeficienții primei forme fundamentale.

Fie $p \in S$. Considerăm în jurul său o parametrizare semigeodezică (ortogonală, în particular). Din Exercițiul 3.5.18, în această parametrizare curbura gaussiană se exprimă astfel:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} \sqrt{g_{22}}.$$

Atunci, pentru $K = \text{const.}$, g_{22} e soluția ecuației diferențiale cu coeficienți constanți:

$$\frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} \sqrt{g_{22}} + K \sqrt{g_{22}} = 0.$$

Pentru $K > 0$ aceasta are soluția generală:

$$\sqrt{g_{22}} = c_1(u^2) \cos(\sqrt{K}u^1) + c_2(u^2) \sin(\sqrt{K}u^1)$$

care, laolaltă cu condițiile inițiale impuse, furnizează:

$$g_{22} = \cos^2(\sqrt{K}u^1).$$

Pentru $K < 0$ se obține

$$g_{22} = \text{ch}^2(\sqrt{-K}u^1),$$

iar pentru $K = 0$ găsim $g_{22} = 1$. ■

În ce privește interpretarea geometrică a torsiunii geodezice, din a treia formulă de derivare pentru triedrul Darboux rezultă ușor:

Propoziția 3.6.8. $\tau_g(s_0) = 0$ dacă și numai dacă $\gamma'(s_0)$ e vector principal al operatorului Weingarten.

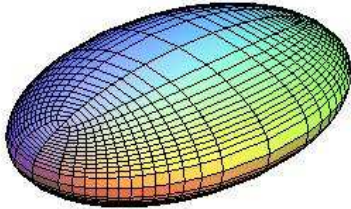
Curbele de-a lungul cărora torsiunea geodezică este nulă se numesc *linii de curbură*. Ele sînt caracterizate de ecuația $L(\gamma'(s)) = k(s)\gamma'(s)$ sau, local:

$$(3.16) \quad L_j^i \frac{du^j}{dt} = k \frac{du^i}{dt}.$$

Deci direcția tangentă într-un punct la o linie de curbură e principală.

Exercițiul 3.6.9. Determinați liniile de curbură ale unei suprafețe de rotație. Aplicație pentru sferă și tor.

Arătați că pe suprafața lui Enneper (Exemplul 3.5.30), liniile de coordonate sînt linii de curbură.



Liniile de curbură ale elipsoidului.

Exercițiul 3.6.10. ([OP].) Arătați că, pentru o geodezică γ , operatorul Weingarten are proprietatea: $L(\gamma') = k\gamma' - \tau\mathbf{b}$, unde k este curbura lui γ , τ e torsiunea ei și \mathbf{b} e vectorul binormal. Deduceți că o geodezică plană este linie de curbură. Folosiți acest fapt pentru a demonstra că dacă toate geodezicele unei suprafețe sînt plane, atunci toate punctele suprafeței sînt ombilicale, deci suprafața e o porțiune de sferă sau de plan.

Următorul rezultat derivă direct din Teorema 3.3.9. Va fi, de asemenea, util mai departe.

Propoziția 3.6.11. În vecinătatea unui punct neombilical există o parametrizare ale cărei linii de coordonate sînt linii de curbură.

Demonstrație. Fie p un punct neombilical pe S și (U, h) o parametrizare oarecare în jurul său. O curbă $h(u^1(t), u^2(t))$ e linie de curbură dacă și numai dacă satisface (3.16) care, scris desfășurat produce următoarele două ecuații:

$$\begin{aligned} L_1^1 \frac{du^1}{dt} + L_2^1 \frac{du^2}{dt} &= k \frac{du^1}{dt}, \\ L_1^2 \frac{du^1}{dt} + L_2^2 \frac{du^2}{dt} &= k \frac{du^2}{dt}. \end{aligned}$$

Eliminăm k între aceste ecuații și obținem ecuația liniilor de curbură sub forma:

$$(3.17) \quad L_1^2 \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 - L_2^1 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 - (L_1^1 - L_2^2) \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} = 0.$$

Dacă reușim să factorizăm această ecuație sub forma

$$(3.18) \quad \left(a \frac{du^1}{dt} + b \frac{du^2}{dt} \right) \left(c \frac{du^1}{dt} + d \frac{du^2}{dt} \right) = 0,$$

cu a, b, c, d funcții diferențiabile de u^1, u^2 , atunci fiecare dintre cei doi factori determină cîte un cîmp vectorial X_1 , respectiv X_2 (vezi Exercițiul 3.3.4) ale cărui traiectorii

sînt linii de curbura. Dacă aceste cîmpuri sînt independente în p (ceea ce revine la $ad - bc \neq 0$ în p , atunci putem aplica Teorema 3.3.9 și demonstrația e încheiată.

Pentru a găsi funcțiile necunoscute a, b, c, d , identificăm coeficienții în ecuațiile (3.17) și (3.18). Rezultă sistemul

$$\begin{aligned} ac &= -L_1^2, \\ ad + bc &= L_1^1 - L_2^2, \\ bd &= L_2^1. \end{aligned}$$

Dacă există, soluția nu e unică. Exprimînd a (respectiv b) în funcție de c (respectiv d) și punînd $x = c/d$, obținem ecuația de gradul al 2-lea

$$L_2^1 x^2 - (L_1^1 - L_2^2)x - L_1^2 = 0$$

care are rădăcini reale distincte dacă și numai dacă

$$(3.19) \quad (L_1^1 - L_2^2)^2 + 4L_1^2 L_2^1 > 0.$$

Pe de altă parte, cum p e neombilical, L are valori proprii distincte în p , deci $\det(L_i^j - \lambda \delta_i^j)$ are rădăcini (reale) distincte în p . Făcînd calculul, vedem că (3.19) este exact discriminantul acestei din urmă ecuații.

Dacă $ac - bd = 0$, atunci $L_1^2 + L_2^1 = 0$, situație care conduce ușor la contradicție cu simetria lui L . ■

Încheiem acest paragraf cu definiția *curbelor asimptotice*: acestea sînt caracterizate de anularea curburii normale de-a lungul lor. $\gamma(t)$ e asimptotică dacă și numai dacă $b(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ sau, local:

$$b_{ij}(t) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Exercițiul 3.6.12. Determinați liniile asimptotice ale paraboloidului hiperbolic $x^3 = x^1 x^2$, ale hiperboloidului cu o pînză $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - 1 = 0$ și ale suprafeței lui Enneper.

Se poate arăta că în vecinătatea unui punct hiperbolic există parametrizări cu linii asimptotice (conform, pentru detalii și alte proprietăți, [Or]).

7. Derivata covariantă

Revenim acum la noțiunea de cîmp vectorial (definită în paragraful *Parametrizări speciale*). Fie $\gamma : I \rightarrow S$ e o curbă diferențibilă și X un cîmp vectorial de-a lungul lui γ , i.e. $X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}S$ (vezi (Observația 3.3.2)). Elementele triedrului Darboux sînt exemple de cîmpuri vectoriale de-a lungul unei curbe. Putem privi un asemenea X ca o funcție definită pe I , depinzînd de argumentul t . Dacă imaginea curbei e cuprinsă în imaginea unei parametrizări (U, h) atunci avem:

$$X(t) = X^i(t) h_i(u^1(t), u^2(t))$$

cu X^i funcții diferențiable.

În general, derivata în raport cu t a unui câmp vectorial nu mai este un vector tangent la S . Într-adevăr, local avem:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX^i}{dt} h_i + X^i \frac{du^j}{dt} h_{ij} = \frac{dX^i}{dt} h_i + X^i \frac{du^j}{dt} (\Gamma_{ij}^k h_k + b_{ij} N).$$

Definiția 3.7.1. Partea tangentă a lui $\frac{dX}{dt}$ se numește *derivata covariantă* a lui X de-a lungul lui γ și se notează $\frac{\nabla X}{dt}$. Este un câmp vectorial de-a lungul lui γ .

Avem:

$$(3.20) \quad \frac{\nabla X}{dt} = \left(\frac{dX^k}{dt} + X^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) h_k.$$

Definiția 3.7.2. Un câmp vectorial se numește *paralel* de-a lungul (pe) γ dacă derivata sa covariantă e identic nulă.

Să observăm că, deoarece vectorii h_k sînt liniar independenți, un câmp vectorial e paralel de-a lungul lui γ dacă și numai dacă

$$(3.21) \quad \frac{dX^k}{dt} + X^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{pentru orice } k = 1, 2.$$

Dacă în formula (3.20) luăm $X = \gamma'(t)$, câmpul vectorial tangent la curbă, găsim:

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) h_k$$

Comparînd cu forma sistemului (3.14) obținem imediat:

Propoziția 3.7.3. γ e geodezică dacă și numai dacă γ' e paralel pe γ .

E motivul pentru care geodezicele se mai numesc și *curbe autoparalele*.

În particular, dacă X e paralel pe geodezica γ , atunci

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), \gamma'(t) \rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, \gamma'(t) \right\rangle = 0,$$

deci produsul scalar dintre el și vectorul tangent la curbă este constant în fiecare punct la curbei. Așadar, paralelismul de-a lungul unei curbe generalizează noțiunea de paralelism din planul euclidian.

Aplicînd sistemului (3.21) teorema de existență și unicitate pentru ecuații diferențiale rezultă:

Propoziția 3.7.4. *Dat* $v \in T_{\gamma(0)} S$, există un unic câmp vectorial paralel pe γ cu $X(0) = v$.

Vom reveni asupra noțiunii de paralelism în capitolele dedicate fibrărilor vectoriale și spațiilor riemanniene.

Dacă X e un câmp unitar, $\|X(t)\| = 1$, atunci $\left\langle \frac{dX}{dt}, X(t) \right\rangle = 0$, deci $\frac{\nabla X}{dt}$ e ortogonal atît pe X cît și pe N . În acest caz

$$\frac{\nabla X}{dt} = \lambda(t)(N(t) \times X(t)).$$

Vom nota (în cele ce urmează, urmăm prezentarea din cartea lui do Carmo) funcția $\lambda(t)$ cu simbolul $\left[\frac{\nabla X}{dt}\right]$ și o vom numi *modulul derivatei covariante*⁷. În particular, pentru o curbă parametrizată canonic,

$$\frac{\nabla \gamma'}{ds} = k_g(s) N_g(s) = k_g(s) (N(s) \times \gamma'(s)).$$

Am obținut o interpretare geometrică a modulului derivatei covariante:

$$\left[\frac{\nabla \gamma'}{ds}\right] = k_g(s).$$

Pentru o curbă plană, curbura reprezenta variația unghiului făcut de vectorul ei tangent cu o direcție fixă. Dreptele erau caracterizate de anularea curburii. Pe o suprafață, rolul dreptelor e jucat de geodezice. Acestea sînt caracterizate de anularea curburii geodezice. Astfel apare natural să încercăm să exprimăm curbura geodezică cu ajutorul variației unghiului făcut de cîmpul vectorial tangent cu o direcție fixă. Dar mai întîi trebuie să definim acest unghi. Cu asta ne vom ocupa în finalul acestui paragraf.

Fie γ o curbă simplă, închisă cu imaginea cuprinsă în imaginea unei parametrizări și $X(t)$, $Y(t)$ două cîmpuri vectoriale unitare pe γ . Vrem să definim unghiul dintre ele ca funcție diferențibilă. Avem nevoie de:

Lema 3.7.5. Fie $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, astfel încît $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$. Fie $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a(t_0) = \cos \varphi_0$, $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Atunci funcția

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - a'b)(\tau) d\tau$$

e derivabilă și $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstrație. Derivabilitatea lui φ e imediată. În continuare e suficient să arătăm că

$$f = (a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 \equiv 0,$$

sau, după dezvoltarea pătratelor:

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi \equiv 1.$$

Pentru aceasta, arătăm că derivata lui $a \cos \varphi + b \sin \varphi$ e identic nulă și folosim faptul că, în t_0 , valoarea funcției este 1. Ținînd cont că $\varphi' = ab' - a'b$ și $aa' + bb' = 0$ avem:

$$\begin{aligned} (a \cos \varphi + b \sin \varphi)' &= a' \cos \varphi - a \varphi' \sin \varphi + b' \sin \varphi + b \varphi' \cos \varphi \\ &= a' \cos \varphi + b' \sin \varphi + (ab' - a'b)(b \cos \varphi - a \sin \varphi) \\ &= (aa' + bb')(a \cos \varphi + b \sin \varphi) = 0. \end{aligned}$$

■

Fie acum \tilde{X} un cîmp vectorial pe γ astfel încît $\{X(t), \tilde{X}(t)\}$ să fie bază ortonormată în $T_{\gamma(t)}S$, la fel orientată cu $\{h_1, h_2\}$. Atunci Y se poate exprima ca:

$$Y(t) = a(t)X(t) + b(t)\tilde{X}(t)$$

⁷Funcția $\gamma(t)$ poate fi negativă: denumirea de modul are, aici, semnificația de cantitate (scalară).

cu a, b derivabile și $a^2 + b^2 = 1$. Dacă fixăm o determinare φ_0 pentru unghiul dintre $X(t_0)$ și $Y(t_0)$, aceasta se extinde la o funcție derivabilă φ conform lemei. Demonstrăm acum:

Lema 3.7.6.

$$\left[\frac{\nabla Y}{dt} \right] - \left[\frac{\nabla X}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Demonstrație. Fie $\tilde{X} = N \times X$, $\tilde{Y} = N \times Y$. Atunci:

$$Y = X \cos \varphi + \tilde{X} \sin \varphi,$$

$$\tilde{Y} = (N \times X) \cos \varphi + (N \times \tilde{X}) \sin \varphi = \tilde{X} \cos \varphi - X \sin \varphi.$$

Cum X, \tilde{X} sînt ortogonali prin construcție, iar $\langle X, dX/dt \rangle = \langle \tilde{X}, d\tilde{X}/dt \rangle = 0$ deoarece X, \tilde{X} sînt unitari, avem succesiv:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\nabla Y}{dt} \right] &= \left\langle \frac{\nabla Y}{dt}, N \times Y \right\rangle = \left\langle \frac{dY}{dt}, \tilde{Y} \right\rangle = \\ &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos^2 \varphi \left\langle \frac{dX}{dt}, \tilde{X} \right\rangle - \sin^2 \varphi \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, X \right\rangle. \end{aligned}$$

Derivînd egalitatea $\langle X, \tilde{X} \rangle = 0$ găsim

$$\left\langle \frac{dX}{dt}, \tilde{X} \right\rangle + \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, X \right\rangle = 0.$$

Înlocuim în formula anterioară și demonstrația e completă. ■

Corolarul 3.7.7. Fie X un câmp unitar paralel pe γ și $Y = \gamma'$. Atunci

$$k_g = \left[\frac{\nabla \gamma'}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}$$

Derivata covariantă va interveni în demonstrația celui mai important rezultat global despre suprafețe, teorema Gauss-Bonnet. Rezultatul de care vom avea nevoie este cuprins în:

Lema 3.7.8. Fie (U, h) o parametrizare ortogonală, X un câmp unitar pe γ și φ unghiul dintre h_1 și X . Atunci:

$$\left[\frac{\nabla X}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \frac{du^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

Demonstrație. Normăm câmpurile h_1, h_2 :

$$e_1 = \frac{h_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad e_2 = \frac{h_2}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Atunci $e_1 \times e_2 = N$ și, conform lemei anterioare,

$$\left[\frac{\nabla X}{dt} \right] = \left[\frac{\nabla e_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}$$

Pe de altă parte:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\nabla e_1}{dt} \right] &= \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial e_1}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial e_1}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}, e_2 \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial e_1}{\partial u^1}, e_2 \right\rangle \frac{du^1}{dt} + \left\langle \frac{\partial e_1}{\partial u^2}, e_2 \right\rangle \frac{du^2}{dt} \\
 &= \left\langle \frac{h_{11}\sqrt{g_{11}} - \frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^1} h_1}{g_{11}}, e_2 \right\rangle \frac{du^1}{dt} \\
 &+ \left\langle \frac{h_{12}\sqrt{g_{11}} - \frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} h_1}{g_{11}}, e_2 \right\rangle \frac{du^2}{dt} \\
 &= \langle h_{11}, h_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{du^1}{dt} + \langle h_{12}, h_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{du^2}{dt}
 \end{aligned}$$

Dar, $\langle h_{11}, h_2 \rangle = \Gamma_{11}^2 g_{22}$, datorită faptului că $\langle h_1, h_2 \rangle = 0$. Pe de altă parte, cu formula (3.7) găsim $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$. Cum $g^{22} = 1/g_{22}$, avem în final

$$\langle h_{11}, h_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}.$$

La fel găsim

$$\langle h_{12}, h_2 \rangle = \langle h_{21}, h_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

8. Teorema fundamentală a teoriei suprafețelor

Vom încheia discuția proprietăților locale ale unei suprafețe diferențiabile cu un rezultat de existență și unicitate locală pentru suprafețe datorat lui Bonnet⁸.

Teorema 3.8.1. *Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ un deschis conex și simplu conex. Fie $g_{ij}, b_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ funcții diferențiabile care satisfac condițiile:*

- 1) Matricea $(g_{ij}(u^1, u^2))$ e simetrică și pozitiv definită pe U .
- 2) Matricea $(b_{ij}(u^1, u^2))$ e simetrică pe U .

3) Sînt verificate ecuațiile Gauss (3.11) și Codazzi (3.10) în care funcțiile Γ_{ij}^k sînt date de formulele (3.7).

Atunci există o parametrizare $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ care definește o suprafață avînd prima și a doua formă fundamentală g_{ij} , respectiv b_{ij} . Această suprafață e unic determinată pînă la o izometrie liniară a lui \mathbb{R}^3 .

Demonstrație. Orice suprafață care satisface condițiile enunțului trebuie, de asemenea, să satisfacă formulele Gauss și Weingarten:

⁸Pierre Ossian Bonnet, 1812–1892, matematician francez cu contribuții importante în geometria diferențială a suprafețelor.

$$(3.22) \quad h_{ij} = \Gamma_{ij}^k h_k + b_{ij} N$$

$$(3.23) \quad N_i = -g^{kj} b_{ji} h_k$$

Vom arăta că, dacă interpretăm ecuațiile de mai sus ca un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1 cu necunoscutele h_i și N , acesta e integrabil. Într-adevăr, sistemul este echivalent cu cel pffaffian

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= dh_i - \left(\Gamma_{ij}^k h_k + b_{ij} N \right) du^j \\ \alpha_2 &= dN + \left(g^{kj} b_{ji} h_k \right) du^i \end{aligned}$$

Conform Teoremei lui Frobenius (vezi [Mir]), condițiile necesare și suficiente de integrabilitate sînt:

$$d\alpha_1 = d\alpha_2 = 0 \quad (\text{mod } \alpha_1, \alpha_2)$$

sau, într-o formă mai familiară:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\Gamma_{ij}^k h_k + b_{ij} N \right) &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\Gamma_{il}^k h_k + b_{il} N \right), \\ \frac{\partial}{\partial u^l} \left(g^{kj} b_{ji} h_k \right) &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left(g^{kj} b_{jl} h_k \right) \end{aligned}$$

care, explicitate (a doua ecuație se dovedește chiar redundantă), conduc la ecuațiile Gauss și Codazzi (vezi demonstrația Teorema egregium). Cum, prin ipoteză, aceste ecuații sînt satisfăcute, sistemul e complet integrabil.

Din teorema de existență și unicitate (vezi, din nou, [Mir]) fixînd condiția inițială h_i^0, N^0 asociată unui punct $(u_0^i) \in U$, există o unică soluție h_i, N care satisface (3.22), (3.23) și

$$h_i(u_0^j) = h_i^0, \quad N(u_0^j) = N^0.$$

Să arătăm acum că soluția găsită are și proprietățile geometrice necesare. Mai precis: dacă

$$(3.24) \quad \langle h_i^0, h_j^0 \rangle = g_{ij}(u_0^k), \quad \langle N^0, h_k^0 \rangle = 0, \quad \|N^0\| = 1, \quad i, j, k = 1, 2$$

atunci sînt verificate relațiile analoage pentru h_i, N . Pentru aceasta introducem funcțiile

$$\varphi_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle, \quad \psi_i = \langle N, h_i \rangle, \quad v = \|N\|^2 - 1$$

despre care arătăm că sînt constante (atenție: indicii lui φ, ψ nu reprezintă derivate parțiale!) Avem (folosind formulele Gauss și Weingarten):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial u^k} &= \Gamma_{ik}^l \varphi_{lj} + \Gamma_{jk}^l \varphi_{li} + b_{ik} \psi_j + b_{jk} \psi_i - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial u^k} &= -g^{jl} b_{lk} \varphi_{ij} + b_{ik} v + \Gamma_{ik}^l \psi_l, \\ \frac{\partial v}{\partial u^k} &= -2g^{jl} b_{lk} \varphi_j \end{aligned}$$

Am obținut un nou sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1. Se verifică direct că acesta admite soluția

$$\varphi_{ij} = g_{ij}, \quad \psi_i = 0, \quad v = 1$$

care satisface condiția inițială (3.24). Din unicitate rezultă că aceasta *este* soluția căutată (remarcați similitudinea cu demonstrația teoremei fundamentale a teoriei curbelor).

Cu h_i găsite anterior, definim acum parametrizarea h prin:

$$h(u^1, u^2) = \int_{(u_0^1, u_0^2)}^{(u^1, u^2)} h_i du^i + h_0$$

unde integrala curbilinie nu depinde de drumul din U între (u_0^1, u_0^2) și (u^1, u^2) pe care este calculată deoarece U e simplu conex. Că h e o parametrizare rezultă din faptul că derivatele sale parțiale sînt exact h_i , soluțiile sistemului (3.22), (3.23), satisfac $\langle h_i, h_j \rangle = g_{ij}$ iar g_{ij} e pozitiv definită prin ipoteză. E, de asemenea, evident, că prima și a doua formă fundamentală a parametrizării (U, h) sînt g_{ij} , b_{ij} .

Fie acum o altă suprafață $\tilde{h}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu aceleași primă și a doua forme fundamentale. Atunci, următoarele două repere carteziene ale lui \mathbb{R}^3 : $\{h(u_0^i); h_1(u_0^i), h_2(u_0^i), N(u_0^i)\}$ și $\{\tilde{h}(u_0^i); \tilde{h}_1(u_0^i), \tilde{h}_2(u_0^i), \tilde{N}(u_0^i)\}$ diferă printr-o izometrie afină. Fie F partea liniară a acestei izometrii. Atunci \tilde{h}_i și $F \circ h_i$ sînt soluții ale aceluiași sistem cu aceleași condiții inițiale. Deci $\tilde{h}_i = F \circ h_i$ pe U . Rezultă că $d\tilde{h} = dF \circ h$ (pentru că F e liniară) sau, echivalent, $\tilde{h} = F \circ h + \text{const.}$ ceea ce încheie demonstrația. ■

Cititorul poate observa similitudinea dintre acest rezultat și analogul său referitor la curbe. Nu doar enunțurile, dar și metodele de demonstrație sînt asemănătoare, cu mențiunea că aici am avut de-a face cu un sistem de ecuații cu derivate parțiale. De altfel, în unele texte, de exemplu în [Ca], cele două sînt demonstrate simultan.

Încheiem capitolul cu câteva exerciții care introduc o clasă particulară de suprafețe:

Exercițiul 3.8.2. O suprafață parametrizată prin: $h(u^1, u^2) = \gamma(u^1) + u^2 w(u^1)$, cu $u^1 \in I$ și $u^2 \in \mathbb{R}$, se numește *suprafață riglată*. E definită de curba generatoare $\gamma(u^1)$ prin punctele căreia trec drepte L paralele cu vectorul $w(u^1)$.

1. Arătați că toate cuadricele riglate sînt suprafețe riglate. În particular, suprafețele riglate pot avea singularități (puncte în care h_1 și h_2 nu sînt independenți).

2. Presupunînd $\|w(u^1)\| = 1$ și $w' \neq 0$ pe I , arătați că punctele singulare ale unei suprafețe riglate se află pe o curbă (numită *de strîngere*) a cărei ecuație este $\beta = \gamma + uw$, cu $u = -\frac{\langle \gamma', w' \rangle}{\|w'\|^2}$.

Determinați această curbă pentru cuadricele riglate.

3. Arătați că, în punctele regulate, curbura gaussiană a unei suprafețe riglate este dată de formula $K = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}$, unde $\lambda = \frac{\det(\gamma', w, w')}{\|w'\|^2}$. Caracterizați punctele pentru care $K = 0$.

4. Arătați că elipsoidul este suprafață riglată cu linia de strîngere axa Ox^3 . Arătați că elipsoidul este singura suprafață riglată minimală, în afara planului.

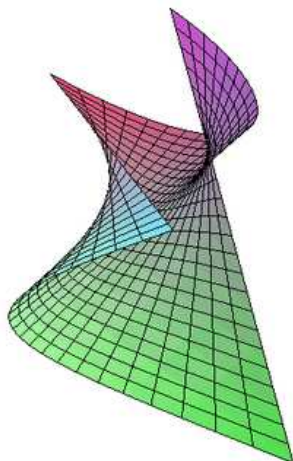
5. Dacă o suprafață conține o familie de linii asimptotice care sînt și geodezice, atunci e riglată.

Exercițiul 3.8.3. O suprafață riglată (cu $\|w(u^1)\| = 1$) care satisface $\det(w, w', \gamma') = 0$ se numește *desfășurabilă*.

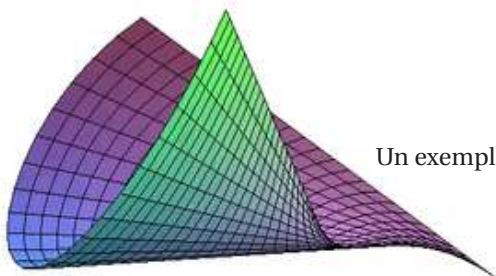
1. Arătați că suprafețele desfășurabile au curbura gaussiană identic nulă. Care dintre curdricile sînt desfășurabile?

2. Fie γ o curbă pe suprafața regulată S . Fie S' suprafața riglată $\gamma(u^1) + u^2 N(u^1)$, unde $N(u^1)$ este restricția normalei unitare ale lui S la $\text{Im } \gamma$. Să se arate că γ e linie de curbura pe S dacă și numai dacă S' e suprafață desfășurabilă.

3. Considerați suprafețele riglate definite de o curbă spațială γ și de vectorul său normal, respectiv binormal. Ce condiții trebuie să satisfacă γ pentru ca aceste suprafețe să fie desfășurabile?



Suprafață riglată cu curba generatoare $\gamma(u^2) = (-u^1, (u^1)^2, (u^1)^3)$ și $w(u^1) = (-(u^1)^2, 1, u^1)$.



Un exemplu de suprafață desfășurabilă.

CAPITOLUL 4

Proprietăți globale ale suprafețelor

1. De la local la global. O caracterizare a sferei

Printre cele mai spectaculoase rezultate de geometrie diferențială sînt cele care trag concluzii de natură globală din ipoteze locale. Un prim exemplu l-am avut în Teorema 3.5.9. Scopul acestui paragraf este să exploateze mai departe acel rezultat. Vom demonstra, urmînd linia din [Ca], o teoremă de caracterizare a sferei:

Teorema 4.1.1. *O suprafață compactă, conexă S cu curbura gaussiană constantă este o sferă.*

Demonstrație. Demonstrația care urmează e datorată lui S.S. Chern. Prima demonstrație a fost dată de H. Liebmann în 1899.

Observăm întii că S , fiind compactă, are cel puțin un punct eliptic; în acest punct $K > 0$, deci K , fiind constantă, e strict pozitivă.

Fie acum k_1, k_2 curburile principale ale lui S . Cu convenția $k_1 \geq k_2$, acestea sînt funcții diferențiabile pe S . Datorită compacității, există un punct p în care k_1 își atinge un maxim local. Cum $k_1 k_2 = K = \text{const.} > 0$, k_2 are în p un minim local. Vom arăta că p e un punct ombilical. În caz contrar, există în jurul său o parametrizare cu linii de curbură (vezi Propoziția 3.6.11). Într-o asemenea parametrizare $g_{12} = 0$, $b_{12} = 0$ și prin calcul direct, curburile principale sînt:

$$(4.1) \quad k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}},$$

iar ecuațiile lui Codazzi devin:

$$(4.2) \quad \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} (k_1 + k_2),$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} (k_1 + k_2).$$

Derivăm prima ecuație din (4.1) în raport cu u^2 , pe a doua în raport cu u^1 și găsim:

$$g_{11} \frac{\partial k_1}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} (k_2 - k_1),$$
$$g_{22} \frac{\partial k_2}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} (k_1 - k_2).$$

Înlocuim aceste expresii în formula curburii gaussiene din (Exercițiul 3.5.18); rezultatul se poate pune sub forma:

$$-2Kg_{11}g_{22} = \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(u^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(u^1)^2} + A \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + B \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

unde A, B sînt funcții diferențiabile ale căror forme exacte nu au importanță pentru discuția noastră. Calculînd și derivatele parțiale de ordinul doi ale curburilor principale în funcție de cele ale coeficienților primei forme fundamentale, formula de mai sus devine:

$$-2Kg_{11}g_{22} = -\frac{2g_{11}}{k_1 - k_2} \frac{\partial^2 k_1}{\partial(u^2)^2} + \frac{2g_{22}}{k_1 - k_2} \frac{\partial^2 k_2}{\partial(u^1)^2} + \alpha \frac{\partial k_1}{\partial u^2} + \beta \frac{\partial k_2}{\partial u^1},$$

unde, ca și pentru A, B , expresiile exacte ale lui α, β sînt irelevante. Evaluăm egalitatea de mai sus în p . Derivatele parțiale ale curburilor principale se anulează în p deoarece acesta e punct de extrem local pentru amîndouă. $\partial^2 k_1 / \partial(u^2)^2(p) < 0$ pentru că p e maxim local al lui k_1 și $\partial^2 k_2 / \partial(u^1)^2(p) > 0$ pentru că p e minim local al lui k_2 . Atunci membrul drept al ultimei egalități e strict pozitiv, în timp ce membrul stîng e negativ. Am ajuns la o contradicție care arată că p e ombilical.

Fie, acum, $q \neq p$. Avem șirul de inegalități:

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p).$$

Cum $k_1(p) = k_2(p)$, rezultă $k_1(q) = k_2(q)$, deci și q e ombilical. Atunci suprafața este o porțiune de sferă. Fiind deschisă (ca reuniune de imagini de parametrizare) în \mathbb{R}^3 e deschisă și în topologia relativă a sferei. Datorită compacității e și închisă în topologia sferei. Cum sfera e conexă, singurele ei submulțimi simultan deschise și închise sînt \emptyset și sfera însăși. Cum suprafața noastră e nevidă, demonstrația e completă. ■

Corolarul 4.1.2. *O suprafață compactă, conexă cu curbura gaussiană strict pozitivă și curbura medie constantă este o sferă.*

Demonstrație. E suficient să observăm că în demonstrația anterioară constanța lui K a intervenit numai prin aceea că a forțat funcția $k_2(k_1)$ să fie descrescătoare. Or, acest lucru e implicat și de ipotezele $K > 0, H = \text{const}$. ■

Alte caracterizări ale sferei se găsesc în [Or].

2. Suprafețe orientabile

Urmărim în paragraful de față să dăm un sens precis noțiunilor de „sus” și „jos” (respectiv interior și exterior) pentru o suprafață închisă. Suprafețele pentru care acest lucru va fi posibil se vor numi *orientabile*.

Fie, pentru început, V un spațiu vectorial real de dimensiune finită n . Prin bază vom înțelege acum bază ordonată (sau reper). Spunem că două baze sînt *la fel orientate* dacă matricea de trecere dintre ele are determinant pozitiv. E clar că relația *a fi la fel orientate* e una de echivalență pe mulțimea bazelor din V . Alegem arbitrar o bază din V . Numim clasa ei de echivalență *orientare pozitivă*. Odată făcută o asemenea alegere, V se zice orientat. De obicei, în \mathbb{R}^n orientarea pozitivă e dată de baza canonică $\{e_1, \dots, e_n\}$.

O orientare a lui \mathbb{R}^2 induce o orientare (un sens de parcurgere) pe curbele plane închise. Iată cum: fie γ o curbă închisă. Conform teoremei lui Jordan sînt bine definite interiorul și exteriorul ei. Atunci în fiecare punct putem vorbi despre normala exterioară. Pe direcția tangentă la curbă în fiecare punct alegem sensul vectorului tangent astfel încît baza $\{T, N\}$ să fie pozitiv orientată.

Aplicăm cele de mai sus pentru spațiul vectorial $T_p S$. O orientare a lui $T_p S$ induce un sens de parcurs pe curbele închise infinitezimale dintr-o vecinătate mică a lui p (deoarece acestea pot fi approximate de curbe din $T_p S$). E posibil ca pe intersecția a două astfel de vecinătăți orientările să concidă?

Fixăm (U, h) o parametrizare în jurul lui p și orientăm $T_p S$ conform bazei $\{h_1, h_2\}$. Dacă (\tilde{U}, \tilde{h}) e o altă parametrizare în jurul lui p , atunci

$$\tilde{h}_i = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} h_k,$$

astfel că cele două baze sînt la fel orientate dacă și numai dacă iacobianul schimbării de coordonate e pozitiv. În consecință vom da:

Definiția 4.2.1. O suprafață e *orientabilă* dacă există o acoperire a sa (un atlas) cu parametrizări cu totu iacobienii schimbărilor de coordonate pozitivi. Alegerea unui astfel de atlas se numește *orientare*.

Observația 4.2.2. Din formula de schimbare de variabilă, se vede că orientabilitatea e invariantă la difeomorfisme. Pe de altă parte, un difeomorfism poate păstra sau nu o orientare fixată.

Exemplul 4.2.3. Suprafețele acoperite cu o singură parametrizare (în particular suprafețele descrise ca grafice) sînt orientabile.

Orice suprafață care se acoperă cu numai două parametrizări e orientabilă. Într-adevăr, dacă schimbarea de coordonate se face cu iacobian negativ, nu avem decît să permutăm u^1, u^2 în una dintre parametrizări. În particular sfera e orientabilă.

Reamintim că fiecărei parametrizări i se asociază vectorul normal unitar:

$$N = \frac{h_1 \times h_2}{\|h_1 \times h_2\|}.$$

Să observăm că deoarece pe intersecția a două parametrizări

$$\tilde{h}_1 \times \tilde{h}_2 = \det \left(\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \right) h_1 \times h_2,$$

vectorul normal unitar e bine definit numai dacă iacobianul schimbării de coordonate e pozitiv (altfel N schimbă semnul, deci se anulează, o contradicție). Mai mult:

Teorema 4.2.4. *O suprafață e orientabilă dacă și numai dacă admite un cîmp de vectori normali unitari continuu, global definit.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din observația anterioară: dacă S e orientabilă, atunci alegînd un atlas cu schimbări de coordonate cu iacobian pozitiv, vectorii normali unitari asociați la parametrizări diferite coincid pe intersecții și se lipsesc dînd naștere unui cîmp de vectori global.

Pentru suficiență, fie N cîmpul global dat de enunț și \mathcal{A} un atlas cu domeniile de parametrizare conexe. Dacă $(U, h) \in \mathcal{A}$ și $p \in h(U)$, putem presupune $N(p) = h_1 \times$

$h_2 / \|h_1 \times h_2\|$. Într-adevăr,

$$\langle N, \frac{h_1 \times h_2}{\|h_1 \times h_2\|} \rangle(q) = f(q) = \pm 1$$

și f e continuă pentru că N e continuu. Cum U e conex, $f = 1$ sau $f = -1$ pe U și afirmația noastră rezultă (permutînd, eventual, u^1, u^2). Dacă, prin absurd, pe o intersecție $\tilde{U} \cap U$ avem $\det(\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}) < 0$, atunci

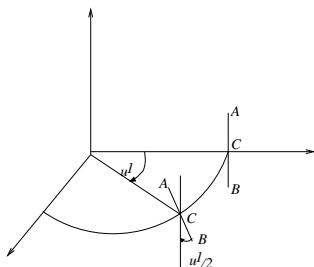
$$\frac{h_1 \times h_2}{\|h_1 \times h_2\|}(p) = N(p) = -\frac{\tilde{h}_1 \times \tilde{h}_2}{\|\tilde{h}_1 \times \tilde{h}_2\|}(p) = -N(p).$$

Rezultă $N(p) = 0$, contradicție. ■

Definiția 4.2.5. Pe o suprafață orientată, o parametrizare (U, h) se numește *compatibilă cu orientarea* dacă

$$N = \frac{h_1 \times h_2}{\|h_1 \times h_2\|}.$$

Exemplul 4.2.6. *Banda lui Möbius* e un exemplu de suprafață neorientabilă. Se obține prin identificarea laturilor opuse ale unui dreptunghi după ce, în prealabil, una dintre ele a fost simetrizată față de mijlocul ei. Pentru a o parametriza considerăm cercul $x^2 + y^2 = 4$ și segmentul deschis AB în planul x^2Ox^3 descris de ecuațiile $x^2 = 2, |x^3| < 1$. Rotim mijlocul C al lui AB în jurul lui Ox^3 și, în același timp, rotim segmentul AB în jurul lui C în planul x^3OC . Mișcarea trebuie astfel făcută încît atunci cînd C a acoperit un unghi u^1 , AB să se fi rotit cu $u^1/2$. Drept rezultat, cînd C revine în poziția inițială, AB s-a rotit cu 180° .



Banda lui Möbius construită prin rotirea segmentului AB în jurul unei axe și a propriului centru.

Parametrii directori ai dreptei AB atunci cînd C are coordonatele $(2 \sin u^1, 2 \cos u^1, 0)$ sînt $(\sin u^1 \sin \frac{u^1}{2}, \cos u^1 \sin \frac{u^1}{2}, \cos \frac{u^1}{2})$, astfel că obținem parametrizarea:

$$h(u^1, u^2) = ((2 - u^2 \sin \frac{u^1}{2}) \sin u^1, (2 - u^2 \sin \frac{u^1}{2}) \cos u^1, u^2 \cos \frac{u^1}{2})$$

cu $(u^1, u^2) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ și u^1 măsurat dinspre axa Ox^2 . Se acoperă astfel toată suprafața în afara punctelor corespunzătoare lui $u^1 = 0$. Pentru a o acoperi complet considerăm și parametrizarea:

$$\tilde{h}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = ((2 - \tilde{u}^2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}^1}{2})) \cos \tilde{u}^1,$$

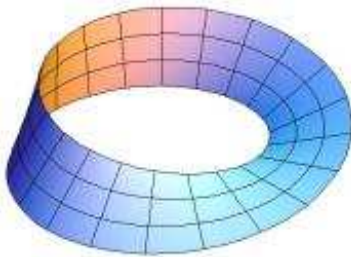
$$(2 - \tilde{u}^2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}^1}{2})) \sin \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{u^1}{2}))$$

unde, acum, \tilde{u}^1 e măsurat dinspre axa Ox^1 și $\tilde{u}^2 = u^2$. A doua parametrizare nu acoperă punctele cu $u^1 = \pi/2$, dar acestea se află în imaginea primeia.

Intersecția celor două hărți este reuniunea mulțimilor S_1, S_2 , unde

$$\begin{aligned} S_1 &= \{h(u^1, u^2); \frac{\pi}{2} < u^1 < 2\pi\} \\ S_2 &= \{h(u^1, u^2); 0 < u^1 < \frac{\pi}{2}\} \end{aligned}$$

Schimbările de coordonate sînt, respectiv, $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1 - \pi/2, u^2)$ în S_1 și $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (3\pi/2 + u^1, -u^2)$ în S_2 . Schimbarea de coordonate se face cu determinant pozitiv în S_1 și cu determinant negativ în S_2 . Aceasta nu este, însă, suficient pentru a conchide că Banda lui Möbius nu e orientabilă: nimic nu ne asigură *a priori* (vezi exercițiul următor) că nu există un alt atlas cu schimbări de coordonate cu determinant pozitiv. Să presupunem că există un câmp diferențiabil de vectori normali unitari $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Putem presupune că (U, h) și (\tilde{U}, \tilde{h}) sînt compatibile cu orientarea. Cum iacobianul schimbării de coordonate va fi -1 în S_1 sau S_2 , rezultă că $N(p) = -N(p)$ dacă p e din acea componentă a intersecției. Dar normala unitară nu se poate anula pentru că suprafața e regulată. La fel se raționează dacă una dintre parametrizări e compatibilă cu orientarea și cealaltă nu, etc. Deci Banda lui Möbius nu e orientabilă.

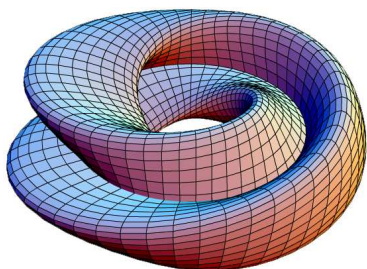


Banda lui Möbius.

Exemplul 4.2.7. Dacă, în exemplul anterior, în loc să rotim un segment, rotim o figură opt, obținem o suprafață neorientabilă numită Sticla lui Klein. O parametrizare a ei este:

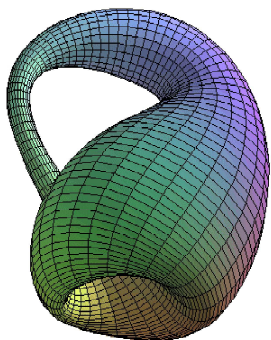
$$\begin{aligned} (a + \cos \frac{u^1}{2} \sin u^2 - \sin \frac{u^1}{2} \sin 2u^2) \cos u^1, (a + \cos \frac{u^1}{2} \sin u^2 - \sin \frac{u^1}{2} \sin 2u^2) \sin u^1, \\ \sin \frac{u^1}{2} \sin u^2 + \cos \frac{u^1}{2} \sin 2u^2. \end{aligned}$$

Imaginea care se obține este o suprafață cu autointersecție:

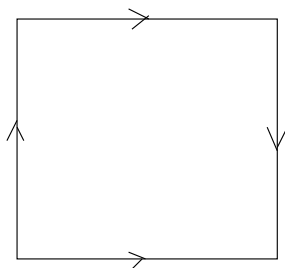


Sticla lui Klein.

Se poate vedea că suprafața anterioară e echivalentă topologic (adică în urma unei deformări continue) cu următoarea (acum se justifică și denumirea):

Sticla lui Klein imersată în \mathbb{R}^3 .

De fapt, din punct de vedere topologic, sticla lui Klein se obține dintr-un pătrat cu laturile opuse identificate conform săgeților de pe desenul de mai jos (e ca și cum am face întâi un tor căruia apoi i-am identifica cele două acpete după o rotație de 180 de grade):



Sticla lui Klein ca obiect topologic.

Exemplul benzii lui Möbius sugerează:

Exercițiul 4.2.8. Dacă o suprafață se acoperă cu două parametrizări a căror intersecție are două componente conexe, cu iacobianul schimbării de coordonate pozitiv pe o componentă, negativ pe cealaltă, atunci suprafața e neorientabilă.

3. Teorema Gauss-Bonnet

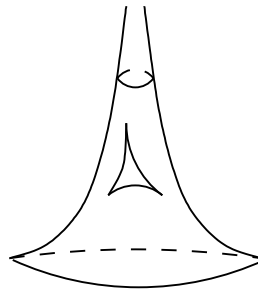
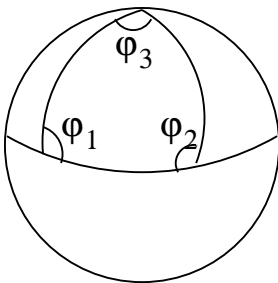
Rezultatul pe care îl demonstrăm în acest paragraf este, fără îndoială, cel mai profund din teoria suprafețelor. El face evidentă legătura dintre geometrie și topologie. Pentru a-l enunța în toată generalitatea va trebui să acceptăm fără demonstrație câteva fapte de topologie algebrică.

Prima versiune apare în memoriul lui Gauss de la 1823-1827 și se referă la triunghiuri cu laturile arce de geodezică de pe o suprafață:

Teorema 4.3.1. Pentru un triunghi geodezic T cu unghiuri interioare $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ excesul $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$ este egal cu aria imaginii triunghiului prin aplicația lui Gauss:

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma$$

În consecință, în geometria euclidiană plană suma unghiurilor unui triunghi este π . În schimb, pe suprafețe de curbură gaussiană nenulă se pot modela geometrii neeuclidiene. De exemplu, pseudosfera (cu $K = -1$) e un model pentru geometria hiperbolică a lui Lobacevski. În general, dacă $K = \text{const.}$, excesul (-defectul triunghiului) este proporțional cu aria triunghiului. (Să ne reamintim că în geometria hiperbolică aria unui triunghi este, prin definiție, defectul său).



Triunghi geodezic pe sferă ($\sum \varphi_i > \pi$) și pe pseudosferă ($\sum \varphi_i < \pi$).

Pe de altă parte, dacă fixăm un punct $p \in S$ și considerăm un triunghi geodezic infinitesimal în jurul său, atunci $K(p)$ este limita raportului dintre excesul triunghiului și aria sa. Cum unghiurile și aria se calculează folosind numai prima primă fundamentală, se obține astfel o nouă demonstrație pentru Teorema egregium. De fapt, aceasta a fost demonstrația inițială a lui Gauss; ulterior a căutat și o demonstrație directă.

Pasul următor a fost făcut de O. Bonnet. El a extins formula la regiuni mărginite de curbe simple închise, nu neapărat geodezice. Dar, pentru început, câteva pregătiri.

Fie S o suprafață diferențiabilă, orientată, fixată.

Definiția 4.3.2. O aplicație continuă $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ se numește *curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni* dacă:

- 1) $\gamma(0) = \gamma(l)$;
- 2) γ e injectivă;
- 3) există o diviziune $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = l$ astfel încât restricția lui γ la orice subinterval $[t_i, t_{i+1}]$ e curbă diferențiabilă.

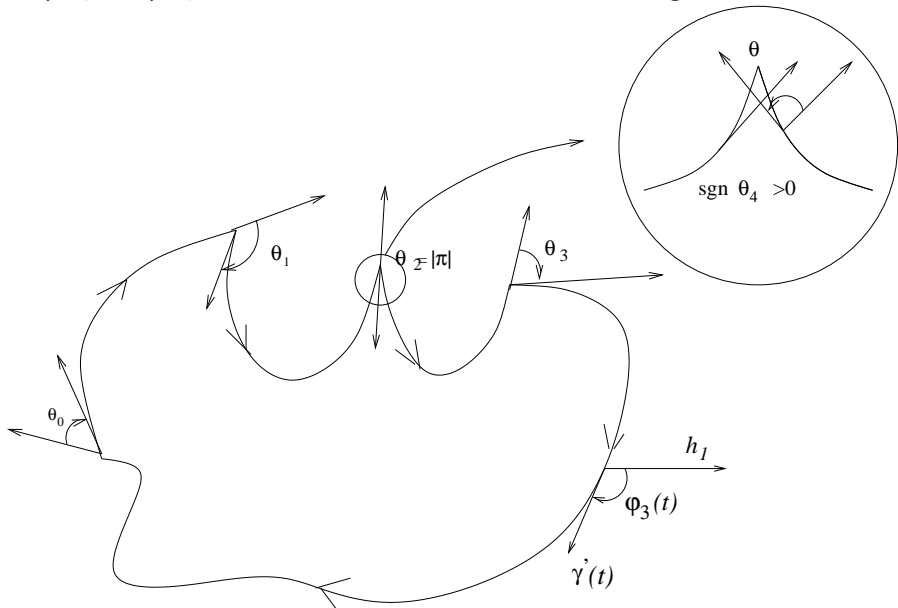
Punctele $\gamma(t_i)$ se numesc *vîrfuri*.

În această secțiune, dacă nu se specifică altceva, γ va fi o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni. Condiția 3) implică existența limitelor laterale

$$\lim_{t \nearrow t_i} \gamma'(t) = \gamma'(t_i - 0) \neq 0,$$

$$\lim_{t \searrow t_i} \gamma'(t) = \gamma'(t_i + 0) \neq 0.$$

Aceasta permite definirea unghiurilor exterioare în vîrfuri. Fie $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$ cea mai mică determinare a unghiului dintre $\gamma'(t_i - 0)$ și $\gamma'(t_i + 0)$. Dacă $\gamma(t_i)$ nu e punct de întoarcere (cusp), semnul lui θ_i e dat de orientarea lui S : $\text{sgn} \theta_i = \text{sgn} \det(\gamma'(t_i - 0), \gamma'(t_i + 0), N)$. Numărul $\theta_i \in (-\pi, \pi)$ se numește *unghi exterior*. Dacă $\gamma(t_i)$ e punct de întoarcere, atunci $|\theta_i| = \pi$ și semnul nu mai poate fi determinat ca mai sus deoarece determinantul în chestiune e nul. În schimb există $\varepsilon' > 0$ astfel încît pentru orice $\varepsilon < \varepsilon'$, $\text{sgn} \det(\gamma'(t_i - \varepsilon), \gamma'(t_i + \varepsilon), N) = \text{const}$. Acest semn se atribuie unghiului.



Determinarea unghiului exterior în puncte unghiulare și a semnelui în punctele de întoarcere.

Fie acum (U, h) o parametrizare compatibilă cu orientarea. Presupunem U homeomorf cu discul unitar deschis din plan. Fie $\gamma : [0, l] \rightarrow h(U)$ netedă pe porțiuni, θ_i unghiurile ei exterioare și $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție diferențiabilă care măsoară unghiul pozitiv orientat între h_1 și $\gamma'(t)$. Următorul rezultat, generalizare a teoremei indicelui pentru curbe plane, e esențial în demonstrația formulei Gauss-Bonnet:

Teorema 4.3.3. (a indicelui) *Dacă $\text{Im } \gamma$ e situată în imaginea unei parametrizări semi-geodezice, atunci are loc relația*

$$\sum_{i=0}^k [\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)] + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

semnul depinzînd de orientarea lui γ .

Demonstrație. Să observăm întii că dacă $h(U)$ e un deschis din plan și curba e diferentiabilă, (fără vîrfuri), atunci enunțul se reduce la Teorema 2.2.2 (a indicelui). E ușor de văzut, urmărind demonstrația, că rezultatul e valabil și pentru curbe plane netede pe porțiuni. Putem admite că am demonstrat teorema noastră în cazul în care S e plan.

Fie acum

$$g_{11}^t = 1, \quad g_{12}^t = 0, \quad g_{22}^t = t + (1-t)g_{22},$$

o familie continuă de prime forme fundamentale corespunzătoare unei familii de parametrizări semigeodezice definite pe U . Expresia exactă a parametrizărilor nu interesează; la drept vorbind, parametrizările nu intră în discuție, ci doar prima formă fundamentală asociată lor. Deoarece $g_{ij}^0 = g_{ij}$, iar $g_{ij}^1 = \delta_{ij}$ este prima formă fundamentală a planului, am realizat în felul acesta o trecere continuă între felul în care se măsoară pe S și pe plan: obiectul măsurat nu se schimbă, ci doar felul în care e măsurat. Cum unghiurile se măsoară numai cu prima formă fundamentală, obținem o funcție continuă

$$f(t) = \sum_{i=0}^k [\varphi_i^t(t_{i+1}) - \varphi_i^t(t_i)] + \sum_{i=0}^k \theta_i^t = 2n(t)\pi,$$

indicele superior t desemnînd valoarea unghiului măsurată cu forma pătratică (g_{ij}^t). Aici $n(t)$ este, ca și în cazul planului, un număr întreg, deoarece, după o rotație completă, tangenta geometrică se suprapune pe cea de plecare. Cum funcția n este continuă și are valori întregi, ea trebuie să fie constantă. Dar $n(1) = \pm 1$, funcție de orientare, conform teoremei indicelui în plan. Astfel, teorema e demonstrată. ■

Observația 4.3.4. Teorema indicelui este adevărată indiferent de parametrizare, dar demonstrația nu mai este elementară. Vezi, de exemplu, [Ca] sau [Ma].

În fine, să dăm:

Definiția 4.3.5. O regiune (deschis conex, reunit cu frontiera sa) R se numește *simplă* dacă e homeomorfă cu un disc și ∂R e o curbă simplă, închisă, diferentiabilă pe porțiuni.

O regiune simplă cu numai trei vîrfuri se numește *triunghi*. Reamintim că în paragraful „Prima formă fundamentală“ am definit elementul de suprafață și integrala unei funcții diferentiabile pe o regiune. Cu aceste pregătiri putem formula:

Teorema 4.3.6. (Gauss-Bonnet, forma locală) Fie (U, h) o parametrizare semigeodezică, cu U homeomorfă cu un disc plan deschis, compatibilă cu orientarea suprafeței orientate S . Fie $R \subset h(U)$ o regiune simplă și $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ parametrizată canonic, pozitiv orientată astfel încît $\partial R = \text{Im } \gamma$. Fie $\gamma(s_i)$ vîrfurile lui γ , θ_i unghiurile exterioare corespunzătoare, $i = 0, k+1$. Atunci are loc formula:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

unde k_g e curbura geodezică a arcelor diferentiabile ale lui γ , K e curbura gaussiană și $d\sigma$ e elementul de suprafață.

Demonstrație. Fie $X = \gamma'(s)$ (pe porțiunile diferențiabile ale curbei). Avem

$$\left[\frac{\nabla X}{ds} \right] = \left[\frac{\nabla \gamma'(s)}{ds} \right] = k_g(s).$$

Atunci Lema 3.7.8 furnizează formula:

$$k_g(s) |_{[s_i, s_{i+1}]} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^2}{ds} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \frac{du^1}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds}$$

unde φ_i este unghiul pozitiv orientat dintre h_1 și $\gamma'(s)$ pe $[s_i, s_{i+1}]$. Deoarece lucrăm într-o parametrizare semigeodezică, $g_{11} = 1$ și formula anterioară se reduce la:

$$k_g(s) |_{[s_i, s_{i+1}]} = \frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^2}{ds} + \frac{d\varphi_i}{ds}.$$

Integrăm și sumăm după i :

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^2}{ds} ds + \sum_0^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi(s_i)).$$

Transformăm integrala din membrul drept cu formula lui Green și obținem:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) = \iint_{h^{-1}(R)} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) du^1 du^2 + \sum_0^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi(s_i)).$$

Pe de altă parte, într-o parametrizare semigeodezică, ortogonală în particular, curbura gaussiană are expresia (vezi Exercițiul 3.5.18):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)$$

pe care o folosim pentru calculul integralei duble. Rezultă (pentru că $\det(g) = g_{22}$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) &= - \iint_{h^{-1}(R)} K \sqrt{g_{22}} du^1 du^2 + \sum_0^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi(s_i)) \\ &= - \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)). \end{aligned}$$

Acum Teorema tangentelor încheie demonstrația. ■

Observația 4.3.7. Dacă în formula Gauss-Bonnet luăm γ cu numai trei vîrfuri și cu porțiunile regulate geodezice, curbura geodezică e nulă de-a lungul acestor porțiuni și obținem demonstrația pentru Teorema 4.3.1.

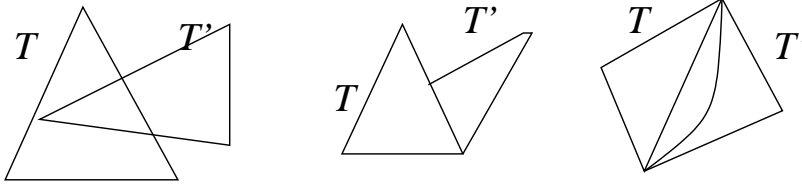
Exercițiul 4.3.8. Dacă S e difeomoră cu o sferă (resp. cu un tor), atunci $\iint_S K d\sigma = 4\pi$ (resp. 0). *Indicație pentru sferă:* Dacă S e difeomoră cu sfera prin difeomorfismul φ , luăm γ imaginea ecuatorului prin φ și S_1, S_2 imaginile emisferelor nordică și sudică. Considerăm γ drept frontieră a lui S_1 și aplică formula Gauss-Bonnet; obținem $\int_{\text{Im}\gamma} k_g = 2\pi - \iint_{S_1} K$, deoarece imaginea ecuatorului e netedă. Luăm acum γ drept frontieră a lui S_2 și ținem seamă că, datorită orientării, va fi parcurs invers. Obținem $-\int_{\text{Im}\gamma} k_g = 2\pi - \int_{S_2} K$, de unde, prin adunare, rezultatul.

Trecem acum la globalizarea teoremei. Vom avea nevoie de unele fapte de topologie algebrică a căror demonstrație depășește cadrul acestui curs. Cititorul interesat poate consulta, de exemplu, cartea [Mas].

Definiția 4.3.9. O regiune se numește *regulată* dacă e compactă și frontiera sa e o reuniune finită, disjunctă de curbe simple, închise, netede pe porțiuni. O suprafață compactă e asimilată cu o regiune regulată cu frontiera vidă.

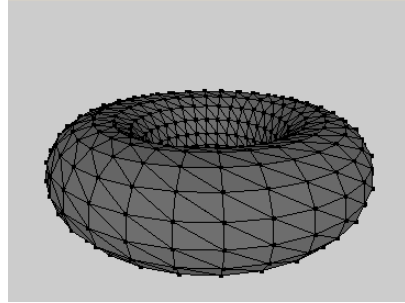
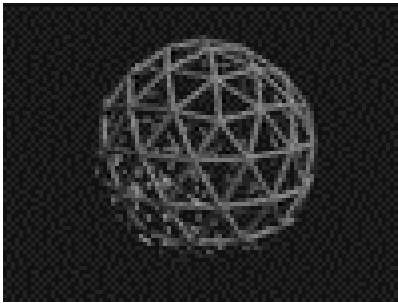
Definiția 4.3.10. Se numește *triangulare* a unei regiuni regulate R e o familie finită $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ de triunghiuri cu proprietățile:

- 1) $\bigcup_i T_i = R$;
- 2) două triunghiuri se pot intersecta cel mult într-un vîrf sau după o latură.



Intersecții nepermise într-o triangulare.

Frontiera fiecărui triunghi al triangulării are o orientare (sens de parcurgere) îndus de orientarea suprafeței. Două triunghiuri care au în comun o latură au orientări compatibile: latura comună este parcursă în sensuri opuse pe cele două triunghiuri.



Triangulări pe sferă și pe tor.

Pentru o triangulare \mathcal{T} vom nota:

- F = numărul de triunghiuri (fețe),
- E = numărul de laturi (de la englezescul „edge“),
- V = numărul de vîrfuri.

Definiția 4.3.11. Numărul

$$\chi(\mathcal{T}) = F - E + V$$

se numește *caracteristica Euler-Poincaré* a triangulării.

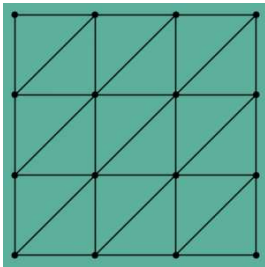
Sînt adevărate următoarele afirmații (conform [Mas]):

Propoziția 4.3.12. Orice regiune regulată a unei suprafețe diferențiabile admite o triangulare (nu unică).

Propoziția 4.3.13. Considerăm un atlas al lui S compatibil cu orientarea. Fie R o regiune regulată. Există o triangulare \mathcal{T} a lui R astfel încât fiecare triunghi să fie inclus într-un domeniu de hartă a atlasului. Numim o astfel de triangulare subordonată atlasului.

Propoziția 4.3.14. Orice două triangulări ale aceleiași regiuni au aceeași caracteristică Euler-Poincaré. Deci e bine definită $\chi(R)$, calculabilă cu ajutorul indiferent cărei triangulări.

Observația 4.3.15. Triangulările pot fi folosite pentru a aproxima suprafețe prin poliedre, caz în care sînt interesante cele cu număr cît mai mare de vîrfuri. Dimpotrivă, atunci cînd vrem să facem anumite calcule, în particular să calculăm caracteristica Euler-Poincaré, devin utile triangulările cu număr cît mai mic de vîrfuri. Dar e o problemă complet netrivială (de combinatorică, în ultimă instanță) determinarea numărului minim de vîrfuri necesar pentru triangularea unei regiuni (suprafețe) date. Iată o triangulare care nu e minimală a trului (văzut ca un pătrat cu laturile opuse identificate):



Cîte fețe are? Numărul minim de fețe are legătură cu numărul Heawood și cu numărul cromatic al suprafeței. Pe tor, numărul minim de fețe e 14 (vezi [Mas]). Puteți construi o astfel de triangulare a torului?

În particular, e bine definită caracteristica Euler-Poincaré a unei suprafețe compacte (regiune regulată cu frontieră vidă). De exemplu, $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$. Dacă R e o regiune simplă, atunci $\chi(R) = 1$.

Mai mult, suprafețele compacte, orientabile sînt complet clasificate din punct de vedere topologic de caracteristica Euler-Poincaré. Mai precis:

Teorema 4.3.16. Fie S o suprafață compactă, conexă, orientabilă. Atunci $\chi(S)$ e un întreg par mai mic decît 2: $\chi(S) \in \{2, 0, -2, -4, \dots\}$. Dacă $\chi(S) = \chi(S')$ atunci S e homeomorfă cu S' .

Observația 4.3.17. Cum orice poliedru convex este homeomorf cu sfera S^2 , caracteristica Euler-Poincaré a lui este 2. Rezultatul, care se poate demonstra elementar, îi era cunoscut lui Euler (de aici denumirea), cu deosebirea că vîrfurile, laturile și fețele luate în considerare erau chiar cele ale poliedrului. Dar e ușor de văzut că rezultatul nu se schimbă dacă triangulăm.

Pentru poliedre, demonstrația se poate face în felul următor. Se demonstrează înții, prin inducție, că numărul Euler al unui figuri plane, închise, convexe este 1 (cea ce corespunde faptului, mai general, amintit deja: caracteristica Euler-Poincaré a unei

regiuni simple și închise e 1). Apoi se arată că există un plan și punct exterior poliedrului din care poliedrul se poate proiecta pe plan într-o figură închisă convexă. Acum se aplică pasul anterior și se ține seama de felul cum se schimbă numerele implicate după proiecție.

În fine, înainte de a enunța teorema centrală, să mai observăm că dacă f e o funcție diferențiabilă pe o regiune R triangulată de triangularea $\{T_a\}$, $a = \overline{1, k}$, subordonată atlasului $\{(U_i, h_i)\}$, $T_a \subset h_{i_a}(U_{i_a})$, atunci, datorită proprietății de aditivitate a integralei duble, avem:

$$\iint_R f d\sigma = \sum_{a=1}^k \iint_{h_{i_a}^{-1}(T_a)} f(u_i^1, u_i^2) \sqrt{\det g_i} du_i^1 du_i^2$$

Acum sîntem în măsură să demonstrăm:

Teorema 4.3.18. (Gauss-Bonnet, forma globală) *Fie S o suprafață orientată și R o regiune regulată a sa avînd frontiera $\partial R = \cup_1^n C_i$, cu C_i curbe închise, simple, diferențiabile pe porțiuni. Considerăm pe fiecare C_i orientarea pozitivă și fie $\theta_1, \dots, \theta_p$ toate unghiurile exterioare pozitiv orientate ale frontierei. Atunci are loc formula:*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R),$$

unde \int_{C_i} notează suma integralelor pe fiecare arc diferențiabil al lui C_i .

Demonstrație. Considerăm un atlas format din parametrizări semigeodezice și o triangulare a lui R subordonată lui. Aplicăm Teorema Gauss-Bonnet, forma locală, pe fiecare triunghi și sumăm. Fiecare latură interioară a triangulării (comună la două triunghiuri) e parcursă de două ori, în sensuri opuse. Astfel că cele două integrale ale curbării geodezice pe o latură interioară se anulează reciproc (k_g nu depinde de sensul de parcurs!). Rămîne

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \theta_{jk} = 2\pi F$$

unde θ_{jk} sînt unghiurile exterioare ale triunghiului T_j . Mai trebuie să calculăm suma unghiurilor exterioare. Pentru aceasta introducem $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ unghiurile interioare ale triunghiurilor. Atunci:

$$(4.5) \quad \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \theta_{jk} = 3\pi F - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \varphi_{jk}.$$

Putem împărți laturile triangulării în două categorii: cele exterioare (acestea se află pe curbele C_i și sînt parcurse o singură dată), în număr de E_e și cele interioare (nu fac parte din frontieră, sînt parcurse de cîte două ori) în număr de E_i . Corespunzător, vorbim despre vîrfuri exterioare (pe frontieră), în număr de V_e și despre vîrfuri interioare, în număr de V_i . Avem

$$V = V_e + V_i, \quad E = E_e + E_i, \quad E_e = V_e,$$

ultima egalitate avînd loc deoarece fiecare C_i e închisă. În plus, se arată ușor, prin inducție, că:

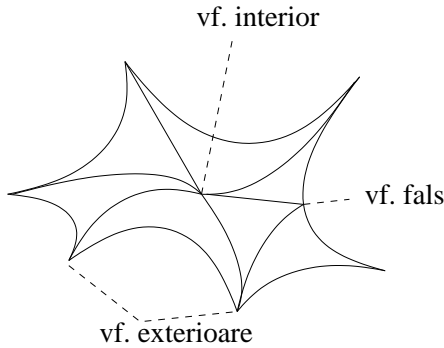
$$3F = 2E_i + E_e$$

Acum (4.5) devine:

$$(4.6) \quad \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \varphi_{jk}.$$

De asemenea, între vîrfurile exterioare distingem două feluri: cele care sînt puncte de nediferențabilitate ale frontierei (am notat cu p numărul lor) și cele „false”, introduse de triangulare (conform figurii de mai jos); notăm numărul lor cu V_{et} :

$$V_e = p + V_{et}$$



În jurul fiecărui vîrf interior suma unghiurilor e 2π , iar în jurul fiecărui vîrf exterior introdus de triangulare suma unghiurilor este π . Atunci (4.6) se scrie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^F \theta_{jk} &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l) \\ &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi E_e - \pi V_{et} - \pi p + \sum_{l=1}^p \theta_l \\ &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - (\pi V_{et} + \pi p) + \sum_{l=1}^p \theta_l \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l \end{aligned}$$

Înlocuind în (4.4), teorema e complet demonstrată. ■

Corolarul 4.3.19. *Dacă R e o regiune simplă, atunci:*

$$\sum_0^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi.$$

Cum orice suprafață compactă e o regiune regulată cu frontiera vidă, avem și

Corolarul 4.3.20. *Fie S o suprafață compactă, orientată. Atunci:*

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi \chi(S)$$

De aici, folosind teorema de clasificare Teorema 4.3.16 urmează:

Corolarul 4.3.21. *O suprafață compactă orientată cu curbura gaussiană strict pozitivă e homeomorfă cu sfera.*

Exercițiul 4.3.22. (i) Arătați că pe sferă nu există 5 puncte care să poată fi unite prin curbe care se taie numai în acele 5 puncte.

(ii) Fie punctele $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ pe sferă. Arătați că nu e posibil să unim fiecare P_i cu fiecare Q_j prin 9 curbe care să nu se taie decât în punctele date.

Propunem, în încheiere, următoarele rezultate sub formă de exerciții (soluțiile se găsesc, de exemplu, în [Or]):

Exercițiul 4.3.23. Fie S o suprafață orientabilă cu curbura gaussiană nepozitivă și γ_1, γ_2 două geodezice care izvorăsc din același punct p . Atunci ele nu se pot întâlni din nou într-un punct q astfel încât să mărginească o regiune simplă. În particular, pe o astfel de suprafață nu există geodezice simple, închise care să mărginească regiuni simple.

Exercițiul 4.3.24. Fie S o suprafață cu curbura gaussiană strict negativă, homeomorfă cu un cilindru. Atunci ea conține cel mult o geodezică închisă simplă.

Exercițiul 4.3.25. (Jacobi) Fie $\gamma: I \rightarrow R^3$ o curbă regulată, simplă, închisă cu curbura nenulă. Fie $\mathbf{n}(I)$ imaginea curbei descrise pe sfera S^2 de vectorul normal unitar al lui γ . Dacă $\mathbf{n}(I)$ e simplă, atunci împarte S^2 în două regiuni de arii egale.

Partea a 2-a

Varietăți diferențiabile abstracte

CAPITOLUL 5

Varietăți diferențiabile

Planul proiectiv real e un mediu excelent pentru geometrie. Totuși el nu este o suprafață a lui \mathbb{R}^3 . Nu e singurul exemplu de obiect geometric „bun“ care nu e scufundat într-un mediu ambiant cu o dimensiune în plus.

Generalizarea teoriei suprafețelor se poate face pe mai multe nivele. În primul rând, se poate renunța la dimensiunea doi: vorbim atunci de *hipersuprafețe* în \mathbb{R}^n . E o generalizare imediată care nu aduce nimic nou din punct de vedere conceptual. Următorul pas este să refacem întreaga teorie metrică a suprafețelor pornind de la un alt produs scalar decât cel indus din spațiul euclidian, un produs scalar pe care ni-l alegem noi. Iar al treilea pas este să renunțăm și la mediul ambiant, să considerăm spații topologice abstracte pe care să le înzestrăm cu o structură diferențiabilă și cu o metrică: este ceea ce ne-a învățat Riemann că e suficient pentru a face geometrie. Acest program, pe care îl vom dezvolta de aici înainte, este destul de lung și necesită introducerea multor noțiuni noi. În acest capitol punem bazele teoriei.

1. Definiții. Exemple

Spații local euclidiene.

Începem prin a reaminti câteva fapte de topologie generală pe care le vom folosi repetat. Pentru chestiuni de topologie generală se poate consulta [Ke].

Fie (M, \mathcal{T}) un spațiu topologic. Aici \mathcal{T} este o familie de submulțimi ale lui M , numite *deschise* și care satisface următoarele condiții:

- (1) \mathcal{T} conține M și \emptyset .
- (2) Pentru orice subfamilie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a lui \mathcal{T} , reuniunea $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ e conținută în \mathcal{T} .
- (3) Intersecția a două mulțimi din \mathcal{T} e conținută în \mathcal{T} .

Complementarele mulțimilor deschise se numesc *închise*.

O mulțime U se numește *vecinătate* a lui x dacă $x \in U$ și există $V \in \mathcal{T}$ cu $x \in V \subseteq U$. Vecinătățile pot să nu fie ele însele deschise, dar orice deschis e o vecinătate a oricărui punct al său.

O subfamilie \mathcal{B} a lui \mathcal{T} cu proprietatea că orice deschis din \mathcal{T} e reuniune de elemente din \mathcal{B} , se numește *bază pentru topologia \mathcal{T}* . E clar că elementele unei baze acoperă M . O caracterizare utilă este:

Propoziția 5.1.1. \mathcal{B} e bază pentru \mathcal{T} dacă și numai dacă pentru orice $U, V \in \mathcal{B}$ și orice $x \in U \cap V$ există $W \in \mathcal{B}$ astfel încât $x \in W$ și $W \subseteq U \cap V$.

Evident, mulțimea tuturor vecinătăților punctelor lui M formează o bază. De exemplu, mulțimea bilelor deschise (a intervalelor deschise) e bază pentru topologia naturală a lui \mathbb{R}^n (a lui \mathbb{R}).

O subfamilie a lui \mathcal{T} se numește *subbază* dacă familia intersecțiilor finite de elemente ale sale formează o bază a lui \mathcal{T} . De exemplu, pentru topologia naturală a lui \mathbb{R} , intervalele de tipul (a, ∞) și $(-\infty, a)$ formează o subbază.

Definiția 5.1.2. Un spațiu topologic se numește:

- *Separat* sau *Hausdorff* dacă orice două puncte diferite admit vecinătăți deschise disjuncte.
- *Paracompact* dacă orice acoperire a sa cu deschiși admite o rafinare (subacoperire) local finită: orice punct stă doar într-un număr finit de mulțimi din subacoperire;
- *Compact* dacă orice acoperire cu deschiși admite o rafinare finită.
- *Local compact* dacă fiecare punct are o vecinătate compactă. Orice spațiu compact e local compact.
- *Conex* dacă nu poate fi acoperit cu doi deschiși netriviali (diferiți de spațiul total și de \emptyset) disjuncti. Echivalent, singurele submulțimi simultan închise și deschise sînt \emptyset și spațiul total. Mulțimile conexe maximale se numesc *componente (conexe)*. Un spațiu conex are o singură componentă. Orice funcție continuă transformă mulțimi conexe în mulțimi conexe.
- *Local conex* dacă are o bază de topologie formată din mulțimi conexe. Conexiunea nu implică conexiunea locală.
- *Conex prin arce* dacă orice două puncte pot fi unite printr-o curbă continuă (a cărei imagine se va numi *drum*).
- *Cu bază numărabilă* dacă topologia sa admite o bază numărabilă. Într-un spațiu separat, local compact și cu bază numărabilă $\{U_i\}$, familia acelor U_i care au închiderea compactă e, de asemenea, o bază (numărabilă) de topologie.

Vom avea nevoie de:

Propoziția 5.1.3. *Un spațiu topologic M local compact, separat, cu bază numărabilă e paracompact. Mai precis: fiecare acoperire cu deschiși admite o rafinare local finită, numărabilă, formată din mulțimi deschise cu închiderea compactă.*

Demonstrație. Fie $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, o bază numărabilă pentru topologia lui M , fiecare U_i avînd închiderea compactă (vezi mai sus). Construim inductiv un șir de mulțimi deschise G_i cu proprietățile:

$$\overline{G_i} \text{ e compactă, } \overline{G_i} \subset G_{i+1}, \quad M = \bigcup_i G_i.$$

Fie $G_1 = U_1$. Presupunem definit

$$G_k = U_1 \cup \dots \cup U_{j_k}.$$

Luăm apoi j_{k+1} cel mai mic număr natural mai mare ca j_k astfel încît:

$$\overline{G_k} \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Definim apoi:

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Se verifică ușor că șirul astfel definit satisface proprietățile cerute.

Pornim acum cu o acoperire arbitrară cu deschiși $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$. Observăm că, deoarece $\overline{G}_i - G_{i-1}$ e compactă și conținută în deschisul $G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$, pentru fiecare $i \geq 3$ există o subacoperire finită a acoperirii deschise $\{U_a \cap (G_{i+1} - \overline{G}_{i-2})\}$ a lui $G_i - G_{i-1}$. De asemenea, din acoperirea deschisă $\{U_a \cap G_3\}$ a compactului \overline{G}_2 se poate extrage o subacoperire finită. La un loc, aceste familii finite furnizează subacoperirea local finită, numărabilă a lui \mathcal{U} . În plus, toate elementele sale au închidere compactă. ■

Cît privește proprietățile de conexiune avem:

Propoziția 5.1.4. *Un spațiu topologic conex prin arce e conex.*

Demonstrație. Rezultă din următoarele observații simple:

- 1) O reuniune de mulțimi conexe nedisjuncte e conexă.
- 2) Orice drum e conex ca imagine continuă a unui interval real.
- 3) Dacă M e conex prin arce și $x \in M$ arbitrar, atunci orice $y \in M$ e unit de x prin drumul $C(x, y)$, deci $M = \bigcup_{y \in M} C(x, y)$, adică M e reuniune de mulțimi conexe nedisjuncte. ■

Reciproca nu e, în general, adevărată:

Exemplul 5.1.5. Fie $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ înzestrat cu topologia indusă de pe plan. Acest spațiu topologic se numește sinusoida topologului. E clar că M e conex, dar nu conex prin arce.

Exercițiul 5.1.6. Să se studieze din punct de vedere topologic (conexiune, conexiune prin arce, separare, compacitate) cuadricele din \mathbb{R}^3 .

Acum putem da:

Definiția 5.1.7. Un spațiu topologic Hausdorff și cu bază numărabilă se numește *local euclidian* (sau *varietate topologică*) de dimensiune m dacă orice punct al său admite o vecinătate homeomorfă cu un deschis din \mathbb{R}^m .

Pentru a preciza dimensiunea, vom scrie uneori M^m . În lipsa unei alte precizări, dimensiunea va fi m .

Observația 5.1.8. La prima vedere, definiția aceasta pare prea restrictivă: de ce nu am lăsat numărul m , dimensiunea, să varieze cu punctul? E doar o generalizare aparentă pentru că *teorema de invarianță a domeniului* a lui Brouwer ne spune că \mathbb{R}^m e homeomorf cu \mathbb{R}^n dacă și numai dacă $m = n$; cf. [Gr].

Un spațiu local euclidian M admite o acoperire cu deschiși homeomorfi cu deschiși din \mathbb{R}^m . O pereche (U, φ) cu $U \subset M$ deschis și $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfism pe imagine se numește *hartă (locală)*. U se numește *domeniu de hartă*.

E clar că orice curbă e un spațiu local euclidian 1-dimensional, orice suprafață e un spațiu local euclidian 2-dimensional. Alte exemple, netriviiale, vor apărea ulterior.

Definiția aceasta are implicații topologice puternice:

Lema 5.1.9. Fie M un spațiu local euclidian și $x \in M$. Atunci orice vecinătate a sa conține o vecinătate homeomorfă cu bila unitate deschisă din \mathbb{R}^m .

Demonstrație. Fie W o vecinătate a lui x , (U, φ) o hartă în jurul lui x . Fie $U' = \text{int}(U) \cap W$. Atunci $\varphi(U')$ e o vecinătate deschisă a lui $y = \varphi(x)$. Asta implică existența unei bile deschise $B(y, \delta) \subset \varphi(U')$. Luăm $W' = \varphi^{-1}(B(y, \delta))$. Cum $B(y, \delta)$ e homeomorf cu $B(y, 1)$, demonstrația e încheiată. ■

Corolarul 5.1.10. Un spațiu local euclidian e local compact, local conex și paracompact.

Observația 5.1.11. Cum orice bilă deschisă din \mathbb{R}^m e homeomorfă cu \mathbb{R}^m (demonstrați!), definiția spațiului local euclidian se poate reformula cerînd ca fiecare punct să aibă o vecinătate homeomorfă cu \mathbb{R}^m .

Pentru spații local euclidiene distincția dintre conexiune și conexiune prin arce nu are loc:

Propoziția 5.1.12. Un spațiu local euclidian e conex dacă și numai dacă e conex prin arce.

Demonstrație. Din Propoziția 5.1.4 mai avem de dovedit necesitatea. Presupunem M conex. Fie $x \in M$ fixat și A mulțimea punctelor care pot fi unite cu x printr-un arc continuu. $x \in A$ deci $A \neq \emptyset$. Vom arăta că A e închisă și deschisă, ceea ce implică $A = M$.

1) A e închisă: Fie $y \in \overline{A}$ și (U, φ) hartă în jurul lui y . Există $\delta > 0$ astfel încît $B(\varphi(y), \delta) \subset \varphi(U)$. Atunci, cum φ e homeomorfism, $\varphi^{-1}(B(\varphi(y), \delta)) \cap A \neq \emptyset$. Fie $y' \in \varphi^{-1}(B(\varphi(y), \delta)) \cap A$. Deoarece $\varphi(y') \in B(\varphi(y), \delta)$ există un drum continuu c' în $B(\varphi(y), \delta)$ care unește $\varphi(y)$ cu $\varphi(y')$. Atunci $c = \varphi^{-1} \circ c'$ unește y' cu y . Pe de altă parte, $y' \in A$; rezultă că există drumul c'' care unește y cu x . Juxtapunînd c și c'' obținem un drum care leagă y de x . Asta arată că $y \in A$, adică $\overline{A} \subset A$ și A e închisă.

2) A e deschisă: Fie $y \in A$ și (U, φ) hartă în jurul lui y . Cu același δ ca mai sus se arată că $\varphi^{-1}(B(\varphi(y), \delta))$ e deschisă și conținută în A . ■

Exercițiul 5.1.13. Orice componentă conexă a unui spațiu local euclidian e submulțime deschisă.

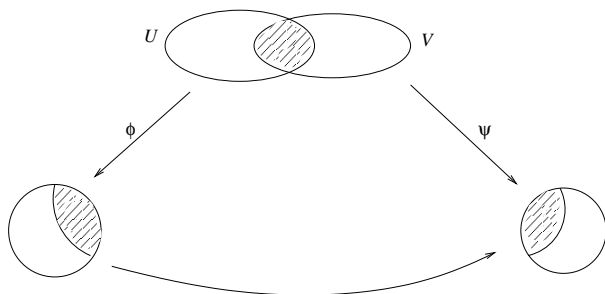
Nu este scopul nostru să dezvoltăm o teorie a spațiilor local euclidiene. Cele prezentate pînă aici ajung pentru înțelegerea noțiunii de varietate diferențiable.

2. Structuri diferențiable

Fie, în continuare, M^m un spațiu local euclidian. Pentru o hartă (U, φ) notăm $x^i = p_i \circ \varphi$, p_i fiind proiecția canonică a lui \mathbb{R}^m pe componenta i a produsului direct. Astfel, fiecărui punct din U i se asociază m numere reale $\{x^i(p)\}$. Funcțiile $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ se numesc *coordonate locale* și sînt continue pe U . Ansamblul lor se numește *sistem de coordonate locale*.

Ce se întîmplă dacă un punct poate fi exprimat cu ajutorul a două sisteme de coordonate locale? Ajungem astfel la problema compatibilității sistemelor de coordonate.

Definiția 5.2.1. Spunem că hărțile (U, φ) , (V, ψ) sînt \mathcal{C}^k -corelate (*compatibile*) dacă $U \cap V = \emptyset$ sau, dacă $U \cap V \neq \emptyset$, atunci $\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ e difeomorfism de clasă \mathcal{C}^k .



Semnificația compatibilității hărților este următoarea: eventualele proprietăți de diferențiabilitate ale unui obiect local definite cu ajutorul coordonatelor locale nu vor depinde de alegerea sistemului de coordonate.

Definiția 5.2.2. Un atlas de clasă \mathcal{C}^k pe M e o familie de hărți \mathcal{C}^k -corelate $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, (cu Λ o mulțime arbitrară de indici), ale căror domenii acoperă M : $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$.

Fie $\mathcal{A}(M)$ mulțimea atlaselor de clasă \mathcal{C}^k . Pentru $a, b \in \mathcal{A}(M)$, $a \cup b$ e o mulțime de hărți care nu sînt neapărat corelate. Dacă $a \cup b \in \mathcal{A}(M)$, atunci spunem că a și b sînt echivalente și scriem $a \sim b$. Este imediat:

Exercițiul 5.2.3. Echivalența atlaselor e o relație de echivalență pe $\mathcal{A}(M)$.

Definiția 5.2.4. O clasă de echivalență de atlase de clasă \mathcal{C}^k se numește *structură diferențiabilă de clasă \mathcal{C}^k* pe M .

Un spațiu local euclidian împreună cu o structură diferențiabilă de clasă \mathcal{C}^k se numește *varietate diferențiabilă de clasă \mathcal{C}^k* , pe scurt *varietate*.¹

Observația 5.2.5. Orice varietate diferențiabilă e paracompactă.

Fie acum $\sigma \in \mathcal{A}(M)$ o structură diferențiabilă (de clasă \mathcal{C}^k , cu k fixat, dar nu vom mai specifica) și fie $A_\sigma = \bigcup_{a \in \sigma} a$.

Lema 5.2.6. $A_\sigma \in \sigma$.

Demonstrație. E clar că reuniunea domeniilor hărților din A_σ acoperă M . Apoi, deoarece hărțile lui σ sînt corelate, hărțile lui A_σ sînt corelate. Deci A_σ e un atlas. Pe de altă parte, $A_\sigma \cup a = A_\sigma$ pentru orice $a \in \sigma$ ceea ce încheie demonstrația. ■

Un element maximal (față de relația de incluziune) al unei clase de echivalență de atlase se numește *atlas maximal*. Fiecare clasă de echivalență poate conține un singur atlas maximal: dacă $a \neq b$ ar fi ambele maximale în clasa σ , atunci $a \cup b$ ar fi încă un atlas care ar conține strict a și b , contradicție. Pe de altă parte A_σ e un atlas maximal în clasa σ . Deci în orice clasă de echivalență de atlase pe M , A_σ este unicul atlas maximal.

Reciproc, fie A un atlas maximal din $\mathcal{A}(M)$ și σ clasa sa de echivalență. Atunci el este maximal și în clasa σ , deci coincide cu atlasul maximal A_σ construit anterior. Am demonstrat:

Propoziția 5.2.7. O structură diferențiabilă este definită de un atlas maximal.

¹Noțiunea este implicită în memoriul lui Riemann din 1854 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; o primă formalizare a ei apare la H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig, 1913, iar prima definiție riguroasă pare să fi fost dată în cartea lui Veblen și Whitehead din 1932: *The foundations of differential geometry*.

În practică, pentru a construi o structură diferențiabilă pe un spațiu local euclidian, se pune în evidență un atlas (preferabil cu cât mai puține hărți) și se consideră clasa sa de echivalență.

Exercițiul 5.2.8. Fie $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlas pe varietatea diferențiabilă M . Atunci $\{U_\alpha\}$ e o bază pentru topologia lui M .

De acum înainte vom lucra numai cu atlase de clasă \mathcal{C}^∞

Exemplul 5.2.9. \mathbb{R}^m are structură canonică de varietate diferențiabilă dată de un atlas cu o singură hartă: $(\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m})$. La fel orice spațiu vectorial finit dimensional, în particular mulțimea $\mathcal{M}(m, n)$ a tuturor matricilor de tip $m \times n$, identificată cu \mathbb{R}^{mn} .

Exemplul 5.2.10. Orice deschis al lui \mathbb{R}^n e varietate diferențiabilă n -dimensională acoperită cu o singură hartă. În particular, $GL(\mathbb{R})$ care e un deschis în \mathbb{R}^{n^2} , e varietate diferențiabilă.

Mai general, fie $M(k, n)$ mulțimea matricelor de tip $k \times n$ de rang k . Mulțimea minorilor unei matrice de tip $k \times n$ e finită și poate fi ordonată. Considerăm de aici înainte o asemenea ordonare A_1, \dots, A_l , $l = C_n^k$ a minorilor de ordin k fixată. Atunci

$$M(k, n) = \bigcup_{i=1}^l \{A \in \mathcal{M}(k, n) \mid \det A_i \neq 0\}$$

e deschisă în $\mathcal{M}(k, n)$, deoarece determinantul e o funcție continuă.

Identificînd o matrice de rank k cu un sistem de k vectori independenți din \mathbb{R}^n (liniile sale), putem privi $M(k, n)$ ca varietatea k -reperelor (ordonate) din \mathbb{R}^n . În această accepțiune ea se notează $V(k, n)$ și se numește *varietatea Stiefel*.

Exemplul 5.2.11. Din Propoziția 3.1.8, orice suprafață diferențiabilă e o varietate diferențiabilă 2-dimensională.

Exemplul 5.2.12. Vom acoperi sfera

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

pe care considerăm topologia indusă de cea canonică a lui \mathbb{R}^{n+1} , cu un atlas format cu două hărți date de *proiecția stereografică* (vezi și Exemplul 3.1.3). Identificăm \mathbb{R}^n cu hiperplanul orizontal $(x^{n+1} = 0)$. Fie P un punct de coordonate (x^i) și $N(0, \dots, 1)$ polul nord al sferei. Fie $U_N = S^n - \{N\}$. Definim $\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ prin $\varphi_N(P) = Q$ unde $\{Q\} = \mathbb{R}^n \cap PN$. Un calcul simplu conduce la următoarele ecuații pentru φ_N și pentru inversa sa:

$$\begin{aligned} \varphi_N(x^1, \dots, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right), \\ \varphi_N^{-1}(u^1, \dots, u^n) &= \left(\frac{2u^1}{1+r}, \dots, \frac{2u^n}{1+r}, \frac{r-1}{1+r} \right), \end{aligned}$$

unde $r = (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2$. Similar definim $U_S = S^n - \{S\}$ și $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n$ prin $\varphi_S(P) = Q$ unde $\{Q\} = \mathbb{R}^n \cap PS$. De data aceasta avem ecuațiile:

$$\begin{aligned}\varphi_S(x^1, \dots, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \right) \\ \varphi_S^{-1}(u^1, \dots, u^n) &= \left(\frac{2u^1}{1+r}, \dots, \frac{2u^n}{1+r}, \frac{1-r}{1+r} \right).\end{aligned}$$

Rezultă imediat că:

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(\frac{u^1}{r}, \dots, \frac{u^n}{r} \right),$$

deci cele două hărți sînt (analitic) corelate și determină o structură diferențiabilă pe sferă.

Un alt atlas pe sferă se obține prin proiecții ortogonale pe planele de coordonate. Vor fi necesare $2(n+1)$ hărți, fie ele $(U_{i\pm}, \varphi_{i\pm})$, $i = 1, \dots, n+1$ definite astfel:

$$\begin{aligned}U_{i+} &= S^n \cap \{x^i > 0\}, & \varphi_{i+}(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}), \\ U_{i-} &= S^n \cap \{x^i < 0\}, & \varphi_{i-}(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).\end{aligned}$$

E clar că $\text{Im}(\varphi_{i\pm}) = D^n$ (discul unitate deschis din \mathbb{R}^n și

$$\varphi_{i\pm}^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1-r}, u^i, \dots, u^n), \quad (u^1, \dots, u^n) \in D^n.$$

Schimbările de coordonate sînt, și în acest caz, analitice (verificați!).

Cele două atlase definite sînt echivalente și generează aceeași structură diferențiabilă pe sferă. Într-adevăr, avem:

$$\varphi_{i\pm} \circ \varphi_N^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(\frac{2u^1}{1+r}, \dots, \frac{2u^{i-1}}{1+r}, \frac{2u^{i+1}}{1+r}, \dots, \frac{r-1}{1+r} \right),$$

dacă $i < n$ etc.

Nu înseamnă că nu există și alte structuri diferențiabile pe S^n , neechivalente cu aceasta (numită canonică), vezi Exemplul 5.6.3.

Exemplul 5.2.13. Spațiul proiectiv. Pe $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ considerăm următoarea relație: $x \sim y$ dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încît $y = \alpha x$ (*i.e.* dacă x și y sînt vectori colineari nenuli). E ușor de văzut că \sim e o relație de echivalență. Notăm

$$P^n\mathbb{R} = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

și-l numim *spațiul proiectiv real n -dimensional*. Fie π proiecția canonică. Un punct din $P^n\mathbb{R}$ reprezintă o dreaptă din $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ care trece prin origine. Dacă $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, vom nota clasa sa cu $[x]$.

Introducem pe $P^n\mathbb{R}$ topologia factor: aceasta e cea mai fină care face proiecția canonică continuă. O mulțime din $P^n\mathbb{R}$ e deschisă dacă și numai dacă preimaginea sa e deschisă în $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ (acesta din urmă avînd topologia indusă de pe \mathbb{R}^{n+1}).

În general, proprietatea unei topologii de a fi Hausdorff nu se transmite prin factorizare. Totuși, în cazul spațiului proiectiv topologia factor e Hausdorff. Într-adevăr, fie $[x_1] \neq [x_2]$. Rezultă că dreptele d_1, d_2 cu direcțiile x_1 și x_2 sînt distincte. Atunci există ε astfel încît conurile deschise $C_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid \overline{(x, x_i)} < \varepsilon\}$, $i = 1, 2$, să fie disjuncte (de exemplu, ε se poate lua o treime din unghiul dintre x_1, x_2). E evident că C_i sînt mulțimi deschise în $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. În plus, ele sînt saturate relativ la relația de echivalență:

un punct stă în C_i odată cu toată clasa sa de echivalență. Atunci $\pi(C_i)$ sînt deschise, disjuncte și conțin x_i , ceea ce trebuia demonstrat.

Spațiul proiectiv e conex ca imagine continuă de spațiu conex. Cititorul poate arăta, ca exercițiu, că este și conex prin arce, deși aceasta va rezulta în urma existenței structurii de varietate.

O altă proprietate topologică importantă este compacitatea. Pentru a o justifica, e utilă o altă construcție a spațiului proiectiv. Considerăm sfera unitate $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ cu topologia indusă. Pe ea introducem relația de echivalență $x \approx y$ dacă și numai dacă $y = \pm x$. Fiecare clasă de echivalență conține doar două puncte (antipodale). Orice dreaptă prin origine taie sfera în două puncte antipodale și, reciproc, două puncte antipodale de pe sferă determină o unică dreaptă prin origine. Atunci, ca mulțimi, $P^n\mathbb{R} = S^n / \approx$. Pe de altă parte, deoarece S^n are topologia indusă de pe $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ea induce pe S^n / \approx aceeași topologie ca cea descrisă anterior. Deci egalitatea dinainte e adevărată la nivel de spații topologice. Acum e clar că spațiul proiectiv e compact ca imagine continuă a unui spațiu compact: sfera.

Putem descrie acum structura de spațiu local euclidian. Fie mulțimile

$$U_i = \{[(x^1, \dots, x^{n+1})] \mid x^i \neq 0\}.$$

$\pi^{-1}(U_i)$ este hiperplanul deschis $x^i \neq 0$ astfel că U_i e o mulțime deschisă în topologia factor. Definim acum aplicațiile de hartă $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ prin

$$\varphi_i([(x^1, \dots, x^{n+1})]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

Acestea sînt bijective, cu inversele:

$$\varphi_i^{-1}((x^1, \dots, x^n)) = [(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n)].$$

Dacă $B = \{\sum (x^j)^2 < \delta\}$ e un disc deschis din \mathbb{R}^n , atunci $\pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(B))$ e conul deschis peste același disc traslatat în $x^i = 1$. Rezultă că φ_i e continuă. Analog se arată că φ_i^{-1} e continuă. În consecință (U_i, φ_i) e o hartă pe $P^n\mathbb{R}$.

Evident $P^n\mathbb{R} = \cup_i U_i$. Pentru a arăta că cele $n+1$ hărți definesc o structură diferențibilă, mai trebuie arătat că sînt corelate. Avem, dacă $i < j$:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-i}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{j-i}}{x^i}, \frac{1}{x^j}, \frac{x^j}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i}\right).$$

Formule analoge se obțin pentru $i > j$. În concluzie $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sînt difeomorfisme analitice, ceea ce arată că $P^n\mathbb{R}$ e o varietate analitică.

Atlasul construit reprezintă acoperirea spațiului proiectiv cu spații affine.

Exercițiul 5.2.14. Arătați că $P^3\mathbb{R}$ este homeomorf cu $SO(3)$, deci are și o structură naturală de grup. Sînt cele două varietăți și difeomorfe?

Un al doilea exemplu de varietate diferențibilă care nu e o submulțime a unui spațiu euclidian este *Varietatea lui Grassmann*, generalizare a spațiului proiectiv:

Exemplul 5.2.15. Varietatea Grassmann. Fie $G(k, n)$ ($k < n$) mulțimea subspațiilor k -dimensionale din \mathbb{R}^n (evident $P^n\mathbb{R} = G(1, n+1)$). Vom construi structura de varietate pe grassmanniană prin analogie cu cea construită pe spațiul proiectiv.

Fie $M(k, n)$ varietatea tuturor matricelor de tip $k \times n$ de rang k (cf. Exemplul 5.2.10 pentru notații). Considerăm următoarea relație pe varietatea $M(k, n)$: $A \sim B$ dacă și

numai dacă există $g \in GL(k, \mathbb{R})$ astfel încât $B = gA$. E imediat că \sim e o relație de echivalență. Deoarece o matrice $A \in M(k, n)$ are rangul k , liniile sale a_1, \dots, a_k reprezintă vectori linear independenți din \mathbb{R}^n și generează un subspațiu k -dimensional, adică un element al lui $G(k, n)$. Atunci liniile lui gA generează același subspațiu: înmulțirea cu g nu face decât să schimbe baza subspațiului. În concluzie

$$G(k, n) = M(k, n) / \sim$$

cu proiecția canonică $\pi : M(k, n) \rightarrow G(k, n)$

$$\pi(A) = \text{subspațiul vectorial generat de } \{a_1, \dots, a_k\}$$

Punem pe $G(k, n)$ topologia factor. Ca și în cazul spațiului proiectiv, se arată că ea e Hausdorff, compactă și conexă.

Fie acum $\pi(A) \in G(k, n)$. Există un minor A_i nenul, $i \in \{1, \dots, l\}$. Fie P_i o matrice de permutare care, înmulțind A la dreapta aduce minorul A_i pe poziția $k \times k$:

$$AP_i = [A_i \tilde{A}_i],$$

unde \tilde{A}_i e o matrice de tip $k \times (n - k)$. Fie

$$U_i = \{S \in G(k, n) \mid S = \pi(A) \text{ cu } A_i \text{ nesingular}\}.$$

U_i e bine definită deoarece în matricea gA , minorul de pe poziția i , $(gA)_i$ este chiar gA_i . Pe de altă parte, U_i e deschisă fiind definită printr-o condiție de neanulare a unei funcții continue (determinantul). Definim acum aplicațiile de hartă: $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ prin:

$$\varphi_i(\pi(A)) = A_i^{-1} \tilde{A}_i.$$

Ca mai sus, se vede că φ_i e bine definită. Dacă $B \in \mathbb{R}^{k(n-k)}$ (privit ca spațiu de matrice) și $g \in GL(k, \mathbb{R})$ atunci $B = g^{-1}(gB)$ astfel că putem lua $g = A_i$, $gB = \tilde{A}_i$ și $A = [g gB]P_i^{-1}$. Deci $\varphi^{-1}(B) = \pi(A)$. Toate operațiile pe care le-am făcut se exprimă cu ajutorul fracțiilor raționale. Rezultă că φ_i sînt homeomorfisme, astfel că (U_i, φ_i) dau o structură de spațiu local euclidian pe $G(k, n)$.

E clar că U_i acoperă grassmanniana pentru că orice matrice de rang k are un minor de ordin k nenul. Dacă $\pi(A) \in U_i \cap U_j$ atunci $A = [A_i \tilde{A}_i]P_i^{-1} = [A_j \tilde{A}_j]P_j^{-1}$. Așadar, pentru $B \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $\varphi_j^{-1}(B) = \pi([g gB]P_j^{-1})$. Prin înmulțire cu P_i această matrice devine $[g gB]P_j^{-1}P_i = [A_i \tilde{A}_i]$. Rezultă schimbarea de coordonate $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(B) = A_i^{-1}A_j$ cu A_j definită mai sus. Din nou operațiile făcute sînt fracții raționale: grassmanniana are structură analitică.

Prezentăm în continuare o construcție alternativă (cf. [GO]) a structurii diferențiabile a grassmannienei. Cititorul se va convinge singur de echivalența celor două. Fixăm $\{e_1, \dots, e_n\}$, baza standard a lui \mathbb{R}^n . Fie $S_{i_1 \dots i_k}$ subspațiul k -dimensional generat de vectorii e_{i_1}, \dots, e_{i_k} . Fie

$$U_{i_1 \dots i_k} = \{S \in G(k, n) \mid S \text{ se proiectează ortogonal surjectiv pe } S_{i_1 \dots i_k}\}.$$

Orice k -plan $S \in U_{i_1 \dots i_k}$ e izomorf prin proiecție ortogonală cu $S_{i_1 \dots i_k}$. Să notăm cu $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_k}\}$ baza lui S care se proiectează ortogonal pe $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$. Avem:

$$f_j = e_{i_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \alpha_j^l e_l$$

și putem defini $\varphi_{i_1 \dots i_k} : U_{i_1 \dots i_k} \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ prin

$$\varphi_{i_1 \dots i_k}(S) = (\alpha_j^l), 1 \leq j \leq k, 1 \leq l \leq n, l \neq i_1, \dots, i_k.$$

E clar că $\varphi_{i_1 \dots i_k}$ sînt bijecții. Acestea vor fi viitoarele hărți. Dar pentru a vorbi despre hărți trebuie să avem o topologie pe grassmanniană. O vom introduce decretînd mulțimile $U_{i_1 \dots i_k}$, înzestrate cu topologia lui $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ prin $\varphi_{i_1 \dots i_k}^{-1}$, bază de topologie. Pentru aceasta e necesar să dovedim că ele acoperă $G(k, n)$. Într-adevăr, fie $S \in G(k, n)$ și $\{g_1, \dots, g_k\}$ o bază a sa. Pornind de la ea, construim una care se proiectează ortogonal pe o subbază $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ ceea ce va arăta că $S \in U_{i_1 \dots i_k}$. Fie

$$g_a = \sum_{j=1}^n \beta_a^j e_j, 1 \leq a \leq k.$$

Matricea (β_a^j) are rangul k : fie $(\beta_a^{i_b})$ un minor (format pe liniile i_1, \dots, i_k) nenul. Notăm $(\tilde{\beta}_{i_b}^a)$ matricea inversă. Atunci vectorii $f_a = \sum_b^n \tilde{\beta}_{i_b}^a g_b$ sînt cei căutați deoarece:

$$\begin{aligned} f_a &= \sum_{b=1}^n \tilde{\beta}_{i_a}^b \left(\sum_{j=1}^n \beta_b^j e_j \right) = \sum_{b=1}^n \tilde{\beta}_{i_a}^b \left(\sum_{c=1}^n \tilde{\beta}_{i_a}^c e_{i_c} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \beta_b^l e_l \right) \\ &= \sum_{b,c=1}^n \tilde{\beta}_{i_a}^b \beta_b^{i_c} e_{i_c} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \left(\sum_{b=1}^n \tilde{\beta}_{i_a}^b \beta_b^l \right) e_l \\ &= e_{i_a} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \alpha_a^l e_l \end{aligned}$$

unde $\alpha_a^l = \sum_b \tilde{\beta}_{i_a}^b \beta_b^l$, $l \neq i_1, \dots, i_k$. În această topologie două k -plane sînt vecine dacă stau în aceeași $U_{i_1 \dots i_k}$ și dacă numerele (α_a^l) sînt, respectiv, apropiate în sensul distanței euclidiene. Topologia astfel definită e Hausdorff pentru că așa este cea euclidiană. Compacitatea, însă, nu mai e ușor de văzut.

Ca mai sus, se observă că aplicațiile de hartă și inversele lor sînt exprimabile prin funcții raționale rezultînd homeomorfisme.

Dacă $S \in U_{i_1 \dots i_k} \cap U_{j_1 \dots j_k}$, atunci există bazele $\{f_a\}$, $\{\tilde{f}_b\}$ astfel încît

$$f_a = e_{i_a} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \alpha_a^l e_l$$

$$\tilde{f}_b = e_{i_b} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_1, \dots, i_k}}^n \tilde{\alpha}_b^l e_l.$$

Schimbarea de coordonate $\varphi_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi_{j_1 \dots j_k}^{-1}$ revine la exprimarea matricei (α_a^l) în funcție de matricea $(\tilde{\alpha}_b^l)$. Acest lucru se poate face cu funcții raționale, asemănător calculului făcut mai sus cînd am arătat că $U_{i_1 \dots i_k}$ acoperă grassmanniana. Rezultă și pe această cale structura analitică și nu e greu de văzut că aceasta coincide cu cea anterioară.

Un pic mai conceptual, construcția anterioară se poate descrie așa ([Na]). Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n și fie $G(k, V)$ grassmanniana tuturor subspațiilor k -dimensionale din V . Fie acum V' un subspațiu de dimensiune $n - k$ și

$$U(V') := \{W \subset V; W \text{ subspațiu și } W \oplus V' = V\}.$$

E clar că

$$G(k, V) = \bigcup_{V' \subset V} U(V').$$

Ca să arătăm că $U(V')$ pot juca rolul domeniilor de hartă, observația cheie e că $U(V')$ este un spațiu afin. Mai precis, dacă notăm $p' : V \rightarrow V/V'$ proiecția canonică, atunci avem

$$U(V') = L(V') := \{\lambda : V/V' \rightarrow V; p' \circ \lambda = \text{Id}\}.$$

Iată cum. Fie $\lambda \in L(V')$. Atunci $\dim \text{Im}(\lambda) = k$ și $\text{Im}(\lambda) \cap V' = \{0\}$. Invers, dat W cu $W \oplus V' = V$ și notînd $\pi_W : V \rightarrow W$ proiecția lui V pe sumandul W , avem $\pi_W(V') = 0$, deci π_W se factorizează la o aplicație lineară $\lambda' : V/V' \rightarrow W$ care se poate extinde la o aplicație lineară $\lambda : V/V' \rightarrow V$. Se vede imediat că $p' \circ \lambda = \text{Id}$.

Pentru a arăta că $L(V')$ e spațiu afin, trebuie să arătăm că, pentru orice $\lambda_0 \in L(V')$ fixat, mulțimea

$$\{\lambda - \lambda_0; \lambda \in L(V')\}$$

e spațiu vectorial. Or, nu e greu de văzut că

$$\{\lambda - \lambda_0; \lambda \in L(V')\} \cong L(V/V', V'),$$

mulțimea endomorfismelor lineare de la $V/V' \cong W$ la V' .

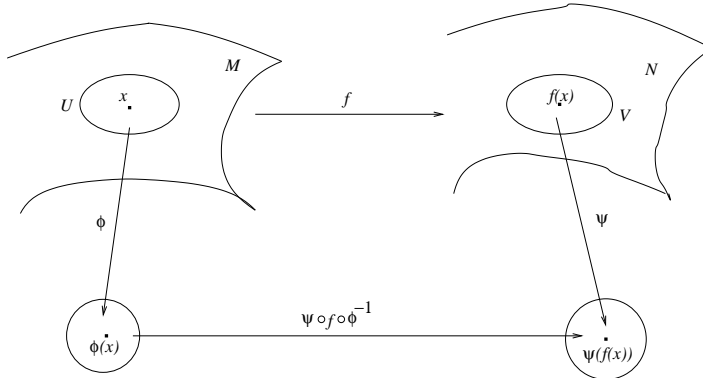
Fixînd acum o bază pentru V' și completînd-o la una a lui V , identificăm $L(V/V', V')$ cu $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ iar pe aceasta din urmă cu mulțimea matricelor de tip $(k(n-k))$ deci cu $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Dacă notăm această identificare cu φ_0 (pentru că depinde și de alegerea lui λ_0), atunci $(U(V'), \varphi_0)$ este o hartă. Compatibilitatea oricărui astfel de două hărți rezultă ușor, la fel faptul că topologia rezultată e separată.

Pentru a construi alte exemple avem nevoie de cîteva pregătiri.

3. Aplicații și funcții diferențiabile

Definiții. Exemple. Ca de obicei cînd se introduce o nouă categorie, după definirea obiectelor (în cazul nostru varietățile), se definesc morfismele. Vom proceda urmărind definițiile analoage de la suprafețe.

Definiția 5.3.1. Fie M, N varietăți diferențiabile. $f : M \rightarrow N$ e diferențiabilă în $x \in M$ dacă există o hartă (U, ϕ) în jurul lui x și o hartă (V, ψ) pe N astfel încît $f|_U (U) \subset V$ și $\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1}$ e diferențiabilă (de clasă \mathcal{C}^∞) în $\phi(x)$.



Dacă f e diferențiabilă în fiecare punct al unui deschis W din M se spune că e diferențiabilă pe W .

f e diferențiabilă pe o mulțime închisă $A \subset M$ dacă e restricția unei funcții diferențiabile pe un deschis $W \supset A$.

Fie acum $(\tilde{U}, \tilde{\phi}), (\tilde{V}, \tilde{\psi})$ hărți pe M în jurul lui x , respectiv pe N . Atunci $\tilde{\psi} \circ f|_{U \cap \tilde{U}} \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f|_{U \cap \tilde{U}} \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$ e diferențiabilă în $\tilde{\phi}(x)$ pentru că schimbările de coordonate sînt difeomorfisme. Am demonstrat, deci, că proprietatea de diferențiabilitate nu depinde de hărțile cu ajutorul cărora este definită.

Cum suprafețele sînt varietăți, exemplele de aplicații diferențiabile din Capitolul 2 sînt exemple și în contextul de acum.

Exercițiul 5.3.2. Să se arate că proiecțiile canonice ale unui produs de varietăți pe factori sînt aplicații diferențiabile.

Definiția 5.3.3. O aplicație diferențiabilă $f : M \rightarrow N$ bijectivă, cu inversa diferențiabilă se numește *difeomorfism*.

Exercițiul 5.3.4. Să se arate că $G(k, n)$ e difeomorfă cu $G(n - k, n)$.

Dacă pentru orice $p \in M$ există o vecinătate deschisă V astfel încît $f(V)$ e deschisă în N și $f|_V$ e difeomorfism, atunci f se numește *difeomorfism local*.

Am văzut deja exemple de difeomorfisme și difeomorfisme locale în secțiunea 2

Exercițiul 5.3.5. Orice homeomorfism local (în particular orice difeomorfism local) e aplicație deschisă: adică $f^{-1}(f(U))$ e deschisă pentru orice U deschis.

Observația 5.3.6. Să notăm M_1, M_2 două copii ale aceleiași mulțimi M înzestrate cu două structuri diferențiabile diferite. Atunci există un difeomorfism între M_1 și M_2 dacă și numai dacă cele două structuri diferențiabile (atlase) sînt compatibile.

Următorul rezultat e imediat:

Lema 5.3.7. Mulțimea $\text{Diff}(M)$ a tuturor difeomorfismelor lui M este grup față de operația de compunere.

Exercițiul 5.3.8. Arătați că mulțimea difeomorfismelor cu suport compact (vezi Definiția 5.5.1) ale lui M formează un subgrup normal al lui $\text{Diff}(M)$.

Am întâlnit deja exemple: aplicațiile de hartă sînt difeomorfisme ale domeniilor lor pe imagine. Un alt exemplu e cuprins în :

Propoziția 5.3.9. Dreapta proiectivă e difeomorfă cu S^1 .

Demonstrație. Fie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ și $f : S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^2$. f e continuă, surjectivă, dar nu injectivă: punctele antipodale au aceeași imagine. Atunci f se factorizează la $\tilde{f} : S^1 \rightarrow P^1\mathbb{R}$, $\tilde{f}(z) = [z^2]$, care este difeomorfismul căutat.

Se vede de aici că $P^n\mathbb{R}$ este compactificarea cu un punct (Alexandrov) a dreptei reale. ■

Exercițiul 5.3.10. $P^2\mathbb{R}$ nu e homeomorf cu S^2 .

Exercițiul 5.3.11. Să se arate că proiecția canonică a sferei pe spațiul proiectiv este diferențiabilă. La fel pentru proiecția canonică a varietății $M(k, n)$ pe grassmanniana $G(k, n)$.

Exercițiul 5.3.12. Fie $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ o aplicație diferențiabilă cu proprietatea că există $d \in \mathbb{Z}$ cu $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (f e omogenă de grad d). Să se arate că $\tilde{f} : P^n\mathbb{R} \rightarrow P^k\mathbb{R}$ prin $\tilde{f}[x] = [f(x)]$ e bine definită și diferențiabilă.

În cazul în care $N = \mathbb{R}$ obținem:

Definiția 5.3.13. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e diferențiabilă în $x \in M$ dacă există harta (U, φ) în jurul lui x astfel încît $f|_U \circ \varphi^{-1}$ să fie diferențiabilă în $\varphi(x)$.

Analog se definesc funcțiile diferențiabile pe deschise respectiv închise din M . Ca mai sus, definiția nu depinde de harta cu care este dată.

Vom păstra denumirea de *funcții diferențiabile* pentru cele cu valori reale și vom numi *morfisme* sau *aplicații diferențiabile* pe cele cu valori într-o varietate oarecare.

Fie $\mathcal{C}^\infty(W)$ mulțimea tuturor funcțiilor diferențiabile pe deschisul $W \subseteq M$. Lăsăm pe seama cititorului demonstrarea următoarei propoziții:

Propoziția 5.3.14. Cu adunarea și înmulțirea funcțiilor, $\mathcal{C}^\infty(W)$ devine inel. $\mathcal{C}^\infty(W)$ e algebră reală față de operațiile de inel și față de înmulțirea cu scalari reali.

Exercițiul 5.3.15. Să se arate că orice izomorfism al lui \mathbb{R}^{n+1} induce, prin trecere la cît, un difeomorfism al lui $P\mathbb{R}^n$. Grupul astfel obținut se notează $PGL(n+1, \mathbb{R})$ și e izomorf cu $GL(n+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$.

Exercițiul 5.3.16. Fie M, N spații local euclidiene (în particular, varietăți) conexe și de aceeași dimensiune. Atunci o bijecție continuă $f : M \rightarrow N$ e homeomorfism.

Într-un anume sens, algebra tuturor funcțiilor diferențiabile pe o varietate identifică unic structura diferențiabilă:

Exercițiul 5.3.17. Fie M, N două varietăți diferențiabile și $f : M \rightarrow N$ continuă. Fie $f^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ definită prin $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Arătați că f e diferențiabilă dacă și numai dacă $f^*(\mathcal{C}^\infty(N)) \subseteq \mathcal{C}^\infty(M)$. Dacă f e homeomorfism, atunci e difeomorfism dacă și numai dacă f^* se restrînge la un izomorfism.

Exercițiul 5.3.18. (Milnor) Fie S mulțimea matricelor simetrice de tip $(n+1) \times (n+1)$, cu urmă 1 și cu proprietatea $A^2 = A$.

(i) Arătați că S e varietate diferențiabilă.

(ii) Fie $f : P^n\mathbb{R} \rightarrow S$, dată prin $P^n\mathbb{R} \ni [x^1, \dots, x^{n+1}] \mapsto (f_{ij}) = \left(\frac{x^i x^j}{\sum (x^k)^2} \right) \in S$. Să se arate că f e difeomorfism.

4. Grupuri Lie

Odată ce avem la dispoziție noțiunea de diferențiabilitate a funcțiilor, putem introduce o clasă foarte importantă de varietăți:

Definiția 5.4.1. Un grup Lie este o varietate G care are și o structură de grup compatibilă cu cea de varietate în sensul că multiplicarea din grup, ca aplicație $G \times G \rightarrow G$, și luarea inversului, ca aplicație $G \rightarrow G$, sînt diferențiabile.

Un grup Lie are două clase distincte de aplicații diferențiabile, translațiile stîngi și translațiile drepte, definite, respectiv, prin: $L_a : G \rightarrow G$, $L_a(b) = ab$ și $R_a : G \rightarrow G$, $R_a(b) = ba$. E evident că $L_a \circ L_b = L_{ab}$ și $R_a \circ R_b = R_{ba}$ și dacă e notează elementul neutru al grupului, avem $L_e = 1_G = R_e$. În plus: $L_{a^{-1}} = L_a^{-1}$, $R_{a^{-1}} = R_a^{-1}$. Așadar:

Propoziția 5.4.2. *Translațiile stîngi (respectiv drepte) formează un subgrup al lui $\text{Diff}(G)$.*

Să mai observăm și că translațiile stîngi comută cu cele drepte.

Exemplul 5.4.3. 1) $(\mathbb{R}^n, +)$. Adunarea vectorilor e dată de formule polinomiale de gradul 1, deci e diferențiabilă. În particular, $(\mathbb{R}, +)$ e grup Lie.

2) Mai general, orice spațiu vectorial e grup Lie față de adunarea vectorilor.

3) Mulțimea vectorilor nenuli din plan (se poate identifica cu \mathbb{C}^*) este grup Lie față de înmulțirea indusă din \mathbb{C} (din nou, formule polinomiale, aici de gradul al II-lea).

4) S^1 cu structura de grup indusă din \mathbb{C}^* .

5) S^3 văzut ca grup al cuaternionilor de normă 1.

6) Produsul a orice două grupuri Lie este un grup Lie față de structura de grup produs. La fel pentru un număr finit de grupuri. În particular, torul $T^n = (S^1)^n$ este un grup Lie.

7) $GL(n) := GL(n, \mathbb{R})$. Operația de grup este multiplicarea matricelor care e dată, în coordonate, prin formule polinomiale. În particular, $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong GL(1, \mathbb{R})$, mulțimea numerelor reale nenule, e grup Lie, de asemenea \mathbb{R}_+ , care e deschis în \mathbb{R}^* . $GL(n, \mathbb{R})$ e un grup necompact, de dimensiune n^2 , neconex: aplicația $\det : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}$ e netedă și aplică $GL(n)$ pe cele două componente conexe ale lui $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Matricele din $GL(n)$ care au determinant pozitiv constituie componenta conexă a identității. Folosind teorema de descompunere polară (pentru orice matrice nedegenerată A există o unică matrice ortogonală R și matricea pozitiv definită S astfel încît $A = RS$, cf. [OT]), se poate arăta că $GL(n)$ are exact două componente conexe, cele descrise mai sus.

Vom reveni mereu asupra grupurilor Lie în secțiunile următoare.

5. Partiția unității

Am introdus structura diferențiabilă numai pe spații topologice cu bază numărabilă de topologie. Reamintim, de asemenea, că spațiile local euclidiene și, în particular, varietățile sînt paracompacte. E momentul să vedem care sînt implicațiile acestei proprietăți. Dăm întîi:

Definiția 5.5.1. O partiție (diferențiabilă) a unității e o familie de funcții diferențiabile pe M $\{f_a\}_{a \in A}$ (A o mulțime arbitrară de indici), cu proprietățile:

1) $f_a(x) \in [0, 1]$ pentru orice $a \in A$.

2) Familia suporturilor $\text{supp}(f_a) \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{\{x \in M; f_a(x) \neq 0\}}$ e local finită.

$$3) \sum_{a \in A} f_a(x) = 1.$$

O partiție a unității e subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ dacă pentru orice $a \in A$ există $\alpha \in \Lambda$ astfel încît $\text{supp } f_a \subset U_\alpha$.

Aici \bar{A} este închiderea topologică a mulțimii A . Să observăm că suma din 3) are sens deoarece pentru orice $x \in M$, $f_i(x) \neq 0$ pentru cel mult un număr finit de indici i , astfel că suma e, de fapt, finită.

Scopul acestui paragraf este demonstrarea existenței partiției unității și schițarea unor aplicații. Rezultatul principal este:

Teorema 5.5.2. *Fie M o varietate diferențiabilă și $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ o acoperire deschisă arbitrară a sa. Există o partiție numărabilă a unității $\{f_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}$ cu suportul fiecărei f_i compact. Dacă nu se impune compacitatea suporturilor, atunci există o partiție a unității $\{f_\alpha\}$ (adică $\text{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$, aceeași mulțime de indici) cu doar cel mult o familie numărabilă dintre f_α neidentice nule.*

Pentru demonstrație avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 5.5.3. (Existența funcțiilor test). *Fie M o varietate diferențiabilă și W o vecinătate deschisă a unui punct x . Există o vecinătate deschisă V a lui x , $\bar{V} \subset W$ și există o funcție diferențiabilă $f: M \rightarrow [0, 1]$ astfel încît $f|_{\bar{V}} = 1$ și $f|_{M \setminus W} = 0$*

Demonstrație. Arătăm întâi cum se poate rezolva problema pe dreapta reală. Date $0 < a < b$, există o funcție indefinit derivabilă care ia valoarea 1 pentru $t \leq |a|$ și se anulează identic pe $t > |b|$. Într-adevăr, plecînd cu

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

despre care se știe că e indefinit derivabilă, construim succesiv

$$g(t) = \frac{h(t)}{h(t) + h(1-t)},$$

apoi, în fine

$$\Psi(t) = g\left(\frac{b+t}{b-a}\right)g\left(\frac{b-t}{b-a}\right).$$

Se verifică ușor că Ψ are proprietățile cerute. Cu ajutorul lui Ψ construim acum o funcție $\mathcal{C}^\infty \Phi$ pe \mathbb{R}^m care ia valoarea 1 pe cubul închis de latură $2a$ centrat în origine:

$$D_a = \{(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m \mid |u^i| < a\}$$

și se anulează în afara cubului deschis D_b . Nu avem decît să punem

$$\Phi = (\Psi \circ pr_1) \cdots (\Psi \circ pr_n)$$

unde pr_i sînt proiecțiile canonice ale lui \mathbb{R}^m pe factori.

Revenind pe varietate, fie (U, φ) o hartă în jurul lui x , $U \subset W$. După un eventual difeomorfism în \mathbb{R}^m putem presupune $\varphi(x) = 0$. Alegem $0 < a < b$ astfel ca $D_a \subset \bar{D}_b \subset \varphi(U)$ și definim $V = \varphi^{-1}(D_a)$,

$$f = \begin{cases} \Phi \circ h & \text{pe } U \\ 0 & \text{pe } M - U \end{cases}$$

Aceasta e funcția test căutată. ■

Corolarul 5.5.4. Fie W o vecinătate deschisă a lui $x \in M$ și fie $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$. Atunci există o vecinătate deschisă V a lui x , $V \subset W$ și $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ astfel încît $\tilde{f}|_V = f|_V$.

Demonstrație. Luăm V o vecinătate deschisă a lui x care intră în W împreună cu închiderea sa și pentru care există f^* , funcție test care ia valoarea 1 pe V și se anulează în afara lui W . Atunci

$$\tilde{f} = \begin{cases} f^* f & \text{pe } W \\ 0 & \text{pe } M - W \end{cases}$$

rezolvă problema. ■

Acum putem da demonstrația teoremei:

Demonstrație. Considerăm o acoperire numărabilă cu deschiși $\{G_i\}$ ca cea construită în Propoziția 5.1.3. Convenim ca $G_0 = \emptyset$. Pentru $x \in M$ fie i_x cel mai mare număr natural pentru care $x \in M - \overline{G_{i_x}}$. Alegem un α_x pentru care $x \in U_{\alpha_x}$ și (U, φ) o hartă în jurul lui x cu $U \subset U_{\alpha_x} \cap (G_{i_x+2} - \overline{G_{i_x}})$ și astfel încît $\varphi(U)$ să conțină o vecinătate \overline{D}_b . Fie ψ_x o funcție test cu suportul în U ; aceasta ia valoarea 1 pe un deschis V_x . Pentru fiecare $i \geq 1$ alegem o mulțime finită de puncte x ale căror vecinătăți W_x corespunzătoare acoperă compactul $\overline{G}_i - G_{i-1}$. Obținem o mulțime numărabilă de funcții ψ_i , $i = 1, 2, \dots$ ale căror suporturi formează o familie local finită. Rezultă că e bine definită funcția

$$\psi = \sum_i \psi_i.$$

Avem $\psi(y) > 0$ pe M deci putem pune

$$f_i = \frac{\psi_i}{\psi}.$$

Funcțiile $\{f_i\}$ formează o partiție a unității cu suporturi compacte, subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}$. Pe de altă parte, putem să adăugăm acestor funcții altele astfel încît să avem cîte una asociată fiecărei U_α : dacă pentru un indice α nici o f_i nu are suportul în U_α , punem $f_\alpha = 0$; altfel, f_α e suma tuturor f_i -urilor cu suportul în U_α . Acum suporturile lui f_α nu mai sînt compacte. Dar am cîștigat aceeași mulțime de indici. ■

Partiția unității se folosește de obicei pentru globalizarea unor obiecte locale prin lipire. O aplicație tipică este:

Corolarul 5.5.5. Fie F o mulțime închisă în varietatea M . Orice funcție diferențiabilă pe F se poate prelungi la una diferențiabilă pe M . În particular, există funcții cu valoarea precisă într-un punct.

Demonstrație. Fie f o funcție diferențiabilă pe F . Din definiția diferențiabilității unei funcții pe o mulțime închisă, pentru fiecare $x \in F$ există o vecinătate deschisă V_x și o funcție $f_x \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$ astfel încît $f_x = f$ pe $V_x \cap F$. Considerăm acoperirea deschisă a lui M $\{V_x; x \in F\} \cup (M - F)$ și alegem o rafinare local finită a sa $\{U_i\}$. Acum definim $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ după cum urmează: dacă U_i e conținut în vreun V_x , alegem arbitrar un asemenea V_x și punem $g_i = f_x|_{U_i}$; dacă $U_i \subset M - \cup_x V_x$, lăsăm $g_i = 0$. Fie $\{f_i\}$ o partiție a unității subordonată acoperirii $\{U_i\}$. Definim $\tilde{f} = \sum_i f_i g_i$. Aceasta e extensia căutată. ■

6. Construcții: acțiuni de grupuri, spații de acoperire

Există câteva moduri prin care se pot fabrica varietăți noi.

Dată o varietate M și o bijecție $F : N \rightarrow M$, există o unică structură diferențiabilă pe N astfel încât F să devină difeomorfism. Într-adevăr, N se topologizează cu ajutorul lui F : V e deschis în N dacă și numai dacă $F(V)$ e deschis în M . Acum F e homeomorfism. Apoi, dacă (U_i, φ_i) e un atlas pe M , $(F^{-1}(U_i), \varphi_i \circ F)$ se dovedește ușor a fi un atlas pe N . Față de această structură diferențiabilă F devine difeomorfism. Partea de unicitate a enunțului rezultă din Observația 5.3.6.

Fie M_j , $j = 1, 2$ varietăți cu atlasele $\{(U_{1i}, \varphi_{1i})\}_{i \in A}$, $\{(U_{1k}, \varphi_{1k})\}_{k \in B}$ respectiv. Atunci **produsul direct** $M_1 \times M_2$ are structură unică de varietate în așa fel încât proiecțiile canonice pr_j pe cei doi factori să fie diferențiabile. Topologia lui $M_1 \times M_2$ este cea produs. Atlasul este, de asemenea, cel produs: $(U_{1j} \times U_{2k}, \varphi_{1j} \times \varphi_{2k})$. Lășăm verificările pe seama cititorului. Evident, procedeul se poate generaliza pentru un produs finit de varietăți.

Exemplul 5.6.1. Torul n -dimensional T^n este produsul direct $S^1 \times \dots \times S^1$ (n copii). Cititorul va arăta că T^2 coincide cu torul 2-dimensional construit în capitoul al doilea.

Exercițiul 5.6.2. Proiecțiile canonice ale unei varietăți produs pe fiecare factor sînt aplicații diferențiabile

Exemplul 5.6.3. Același spațiu local euclidian poate suporta structuri diferențiabile diferite, neechivalente, ceea ce înseamnă că există funcții care sînt diferențiabile față de o structură, dar nu sînt diferențiabile față de cealaltă structură. Asemenea structuri diferențiabile neechivalente pe un același spațiu local euclidian se numesc *exotice*. Exemplele nu sînt deloc ușor de construit, iar demonstrațiile folosesc tehnici avansate de topologie. Prezint doar (după [CCL, p.6]) descrierea mulțimilor pe care J. Milnor (*On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64** (1956), 399–405), a construit *sferile exotice* de dimensiune 7 (28 la număr).

Fie sfera S^4 și U_N , U_S mulțimile din Exemplul 5.2.12. Fie varietățile produs (de dimensiune 7) $U_N \times S^3$ și $U_S \times S^3$. Vom defini o aplicație diferențiabilă între cel două cu ajutorul căruia le vom „lipi” (adică vom identifica punctele uneia cu imaginile lor pe cealaltă).

Observăm întâi că $U_N \cap U_S \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, deci elementele intersecției pot fi gîndite drept cuaternioni. De asemenea, gîndim elementele lui S^3 drept cuaternioni unitari. Fixăm un întreg impar k astfel încât k^2 să nu fie de forma $7p + 1$. Acum definim $\tau : (U_N \cap U_S) \times S^3 \rightarrow \tau : (U_N \cap U_S) \times S^3$ prin

$$\tau(u, v) = \left(\frac{u}{\|u\|^2}, \frac{u^h v u^j}{\|u\|} \right), \quad h = \frac{k+1}{2}, \quad j = \frac{1-k}{2},$$

unde multiplicarea și norma sînt în sensul cuaternionilor. Cum norma, multiplicarea și fracțiile respective conduc la formule raționale, τ e diferențiabilă. Pe produsul $(U_N \times S^3) \times (U_S \times S^3)$ definim o relație de echivalență astfel $(u, v) \sim (u'v')$ dacă $(u', v') = \tau(u, v)$. Spațiul cît rezultat se notează Σ^7 și se poate arăta că e homeomorf cu S^7 , dar structura diferențiabilă construită nu este echivalentă cu cea standard a sferei.

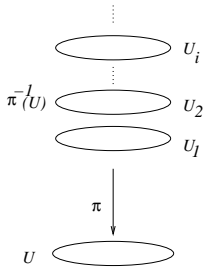
Mai menționăm că, ulterior lui Milnor, s-au descoperit structuri exotice și pe \mathbb{R}^4 (M. Friedmann).

Spații de acoperire.

Definiția 5.6.4. Fie M, B varietăți diferențiabile și $\pi : M \rightarrow B$ o surjecție diferențiabilă. π se numește *aplicație de acoperire* (și M *spațiu de acoperire al lui B*) dacă orice $b \in B$ are o vecinătate deschisă U (zisă, de obicei, „bună”) astfel încît:

- 1) $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, cu U_i deschiși disjuncți. Aici I e o mulțime arbitrară de indici.
- 2) $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ e difeomorfism.

M se numește *spațiu total*, B se numește *bază*.



Spațiu de acoperire: o vecinătate bună.

Observația 5.6.5. Definiția se poate da și în categoria spațiilor topologice. În acest caz π e doar continuă și restricția sa la U_i e homeomorfism.

Exercițiul 5.6.6. O aplicație de acoperire e difeomorfism local. În particular, o aplicație de acoperire e aplicație deschisă. Reciproc, un difeomorfism local cu domeniul compact între varietăți conexe e aplicație de acoperire (aici intervine esențial faptul că varietățile sînt separate și conexe). Dați exemple de difeomorfisme locale care nu sînt aplicații de acoperire. (O posibilitate este restricția aplicației de acoperire a sferei peste proiectiv la sfera din care s-a scos un punct).

Exercițiul 5.6.7. Folosiți faptul că varietățile diferențiabile sînt spații topologice separate, local compacte și local conexe pentru a demonstra că un difeomorfism local între două varietăți conexe e aplicație de acoperire *finită* dacă și numai dacă întoarce compacti în compacti.

Rezultatul din exercițiul anterior poate fi folosit pentru a demonstra un criteriu foarte util dat de R. Palais (cf. [Ba]) pentru a decide dacă o aplicație este sau nu difeomorfism:

Exercițiul 5.6.8. Fie $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cu f_i diferențiabile. Atunci f e difeomorfism dacă și numai dacă:

- (i) $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)$ nu se anulează în nici un punct.
- (ii) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Exemplul 5.6.9. Identitatea oricărei varietăți e aplicație de acoperire.

Dreapta reală este spațiu de acoperire a cercului prin proiecția $t \mapsto \exp 2\pi\sqrt{-1}t$. Făcînd produsul, \mathbb{R}^n e spațiu de acoperire a torului n -dimensional.

Un exemplu de alt tip: sfera e spațiu de acoperire a spațiului proiectiv. Proiecția este aici chiar cea canonică $x \mapsto [x]$.

Exemplele prezentate sînt diferite calitativ: în primele două, deasupra unui punct din bază stă o infinitate de puncte din spațiul total. În ultimul, numai două puncte din spațiul total se proiectează peste unul din bază. Putem demonstra:

Propoziția 5.6.10. Dacă B e varietate diferențiabilă conexă, atunci cardinalul lui $\pi^{-1}(b)$ e constant.

Demonstrație. Fie $b \in B$ și V o vecinătate bună a sa ca în definiție. Atunci $\pi^{-1}(b) \subset \pi^{-1}(V)$ deci, pentru orice i , $\pi^{-1}(b) \cap U_i$ conține un singur punct pentru că V și U_i sînt homeomorfe. Așadar, $\text{card } \pi^{-1}(b) = \text{card } I$ pe V .

Fie acum $b' \neq b$. Cum B e conexă, e și conexă prin arce. Fie c un arc care unește b cu b' . Fiind compact el poate fi acoperit cu un număr finit de vecinătăți nedisjuncte de tipul celei de mai sus. Din aproape în aproape rezultă că $\pi^{-1}(b)$ și $\pi^{-1}(b')$ au același cardinal. ■

Mulțimea $\pi^{-1}(b)$ se numește *fibră deasupra lui b* iar cardinalul său *număr de foi al acoperirii*. De exemplu dreapta acoperă cercul cu o infinitate de foi, sfera acoperă spațiul proiectiv cu două foi. În legătură cu acest enunț se poate demonstra:

Exercițiul 5.6.11. Fie $f: M \rightarrow B$ un homeomorfism local. Dacă M e compact și B separat (sau, mai general, regulat), atunci $f^{-1}(b)$ e o mulțime finită. În particular, o varietate compactă nu poate fi spațiul total decît pentru acoperiri cu un număr finit de foi.

Vom avea nevoie în continuare de:

Definiția 5.6.12. Fie G un grup cu element neutru e și M o varietate diferențiabilă. Se spune că G acționează pe M prin difeomorfisme dacă există un morfism de grupuri $\rho: G \rightarrow \text{Diff}(M)$.

De obicei, pentru $g \in G$, difeomorfismul $\rho(g)$ se notează simplu prin juxtapunere: $\rho(g)(x) \stackrel{\text{not.}}{=} gx$. Dat $x \in M$, mulțimea $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ se numește *orbita* lui x . Orice acțiune de grup pe o varietate induce o relație de echivalență: două puncte sînt echivalente dacă stau într-o aceeași orbită. De aceea e interesant de studiat spațiul orbitelor (mulțimea factor a lui M prin relația de echivalență descrisă) notat M/G . Pentru a obține un obiect geometric bun, vom avea nevoie de unele presupuneri adiționale asupra acțiunii. Ele sînt cuprinse în definițiile:

Definiția 5.6.13. (1) G acționează fără puncte fixe (sau liber) dacă, pentru orice $g \neq e$, $\rho(g)$ nu are puncte fixe.

(2) G acționează total discontinuu dacă orice $x \in M$ are o vecinătate deschisă U astfel încît $g_1U \cap g_2U = \emptyset$ oricare ar fi $g_1 \neq g_2$. Echivalent, $gU \cap U = \emptyset$ pentru orice $g \neq e$.

(3) G acționează separabil dacă pentru orice x, x' neechivalente (nesituate în aceeași orbită) există vecinătățile deschise $U \ni x, U' \ni x'$ astfel încît $gU \cap g'U' = \emptyset$ pentru orice $g, g' \in G$. Echivalent, $gU \cap U' = \emptyset$ pentru orice $g \neq e$.

Exercițiul 5.6.14. 1) O acțiune total discontinuă e fără puncte fixe.

2) Orbitale unei acțiuni total discontinue sînt discrete.

Exemplul 5.6.15. Următoarele acțiuni sînt separabile și total discontinue:

1) \mathbb{Z} pe \mathbb{R}^2 prin $n(x, y) = (x + n, y)$. Spațiul orbitelor se identifică cu un cilindru.

2) \mathbb{Z}^2 pe \mathbb{R}^2 prin $(m, n)(x, y) = (x + m, y + n)$. Spațiul orbitelor se identifică cu un tor 2-dimensional.

3) \mathbb{Z}_2 pe S^n prin $1x = x, (-1)x = -x$. Spațiul factor este spațiul proiectiv.

4) \mathbb{Z} pe \mathbb{R}^2 prin $n(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$. Spațiul factor este o bandă Möbius infinită care se autointersectează dacă e parametrizată ca suprafață în \mathbb{R}^3 . Ea se poate scufunda

doar în \mathbb{R}^4 . Pentru a regăsi banda lui Möbius familiară trebuie să acționăm în același mod cu \mathbb{Z} pe o bandă orizontală deschisă, de exemplu $\mathbb{R} \times (-2, 2)$.

Lășăm verificările în sarcina cititorului.

Exercițiul 5.6.16. Fie $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$. Definim acțiunea lui $(\mathbb{R}, +)$ pe \mathbb{C}^n prin

$$(t, (z^1, \dots, z^n)) \mapsto (e^{id_1 t}, \dots, e^{id_n t}).$$

Găsiți cazuri particulare în care această acțiune nu e liberă. Arătați că dacă d_i sînt prime între ele, atunci acțiunea e liberă. Descrieți, în acest caz, orbitele ei.

Exercițiul 5.6.17. Să se arate că următoarea acțiune a lui $(\mathbb{R}, +)$ pe \mathbb{R}^2 nu e separabilă:

$$t \cdot (x^1, x^2) = (x^1 + tx^2, x^2).$$

Teorema 5.6.18. Fie G un grup care acționează total discontinuu și separabil pe varietatea diferențiabilă M . Atunci:

(i) Spațiul orbitelor e varietate diferențiabilă.

(ii) Surjecția canonică $\pi : M \rightarrow M/G$ e aplicație de acoperire.

Demonstrație. Vom nota, pentru simplitate, $M^* = M/G$ spațiul orbitelor și $x^* = Gx$ elementele sale. Înzeștrăm M^* cu topologia factor. Acum π e continuă.

Să vedem întâi că topologia factor e Hausdorff. Fie $x^* \neq y^*$. Există reprezentanți ai lor neechivalenți $x \neq y$. Cum G acționează separabil, există vecinătățile $U_x \ni x$, $U_y \ni y$ astfel încît $gU_x \cap g'U_y = \emptyset$ pentru orice $g, g' \in G$. Atunci orice element din U_x e neechivalent cu orice element din U_y . În consecință $U_x^* = \pi(U_x)$ și $U_y^* = \pi(U_y)$ sînt vecinătăți disjuncte pentru x^*, y^* .

Introducem acum hărți pe M^* . Vom construi, de fapt, un atlas special pe M care se proiectează într-un atlas pe M^* . Cum G acționează total discontinuu, fiecare punct x are o vecinătate U cu proprietatea $gU \cap U = \emptyset$, $g \in G - \{e\}$. Fie $U^* = \pi(U)$. Atunci $\pi|_U : U \rightarrow U^*$ e bijecție. În plus:

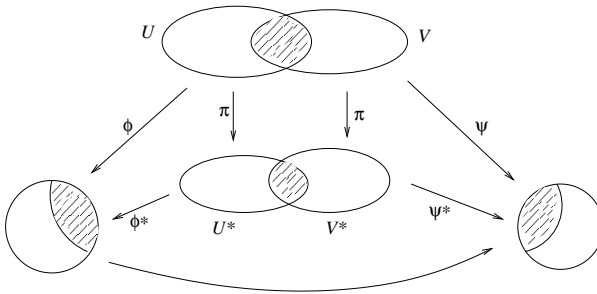
$$(5.1) \quad \pi^{-1}(U^*) = \bigcup_{g \in G} gU$$

Într-adevăr, dacă $x \in \pi^{-1}(U^*)$, atunci $\pi(x) \in U^*$ și cum π e bijecție între U și U^* există $x' \in U$ astfel încît $\pi(x') = \pi(x)$. Rezultă că $x \sim x'$ adică $x = gx'$ și $x \in gU$. Analog se demonstrează incluziunea inversă. Deoarece U e deschisă, toate translatatele gU sînt deschise; conform egalității (5.1), U^* e deschisă. Vom numi U un deschis (vecinătate) bun(ă).

Fie acum (V, φ) o hartă oarecare în jurul lui x . Atunci, pentru o vecinătate bună U a lui x , $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$ e o nouă hartă cu domeniul bun. În acest fel, pornind de la un atlas arbitrar, construim unul, notat tot \mathcal{A} , cu domenii de hartă bune. Pentru fiecare astfel de hartă (U, φ) , fie

$$f^* : U^* \rightarrow f(U), \quad f^* = \varphi \circ \pi|_U^{-1}$$

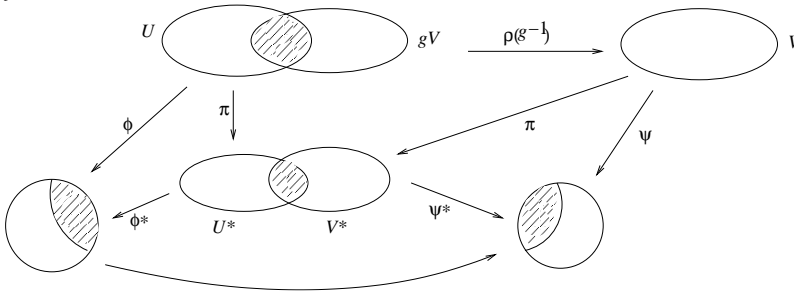
Vom arăta că $\mathcal{A}^* = \{(U^*, \varphi^*)\}$ e un atlas pe M^* . E clar că φ^* sînt homeomorfisme pe imagine. De asemenea, e imediat că mulțimile deschise U^* acoperă M^* . Rămîne de verificat compatibilitatea hărților. Fie (U^*, f^*) și (V^*, ψ^*) astfel încît $U^* \cap V^* \neq \emptyset$. Dacă U și V corespunzător se taie, $U \cap V \neq \emptyset$, atunci, cum se vede și pe figură



e imediat că

$$\psi^* \circ \phi^{*-1} = (\psi \circ \pi|_{U \cap V}^{-1}) \circ (\phi \circ \pi|_{U \cap V}^{-1})^{-1} = \psi \circ \pi|_{U \cap V}^{-1} \circ \pi|_{U \cap V} \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}$$

care e difeomorfism. Dar e posibil ca $U \cap V = \emptyset$. În acest caz, cum $U^* \cap V^* \neq \emptyset$, trebuie să existe elemente din U echivalente cu elemente din V . Deci există $g \in G$ pentru care $U \cap gV \neq \emptyset$. Difeomorfismul $\rho(g^{-1}) : g\tilde{U} \rightarrow U$ unește cele două părți ale diagramei de mai jos



și, la fel ca înainte, e ușor de văzut că:

$$\psi^* \circ \phi^{*-1} = \psi \circ \rho(g^{-1}) \circ \phi^{-1}$$

și deci e difeomorfism (pentru că, *a posteriori*, aplicațiile de hartă sînt difeomorfisme. Astfel, demonstrația e completă. ■

Dacă grupul care acționează e finit verificările se simplifică:

Propoziția 5.6.19. *Un grup G finit care acționează fără puncte fixe pe o varietate diferențiable acționează total discontinuu și separabil.*

Demonstrație. Fie $G = \{e = g_0, g_1, \dots, g_k\}$. Fixăm $x \in M$. Cum M e separată și $g_i x$ distincte, există vecinătățile deschise $U_{ij} \ni g_i x, U_{ji} \ni g_j x$ astfel încît pentru orice $i, j = 0, \dots, k$ să avem $U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$. Fie acum $U = \cap_{i \neq j} g_i^{-1} U_{ij}$; e o vecinătate deschisă a lui x . Deoarece $\rho(g_i)$ sînt difeomorfisme, rezultă că $g_i U \subset U_{ij}, g_j U \subset U_{ji}$ așadar $g_i U \cap g_j U = \emptyset$ și acțiunea e total discontinuă.

Fie acum $x \neq x'$: nu există $g_i \in G$ astfel ca $g_i x = x'$. Atunci $g_i x \neq g_j x'$ și, ca mai sus, există $W_{ij} \ni g_i x, W'_{ji} \ni g_j x'$, vecinătăți deschise disjuncte: $W_{ij} \cap W'_{ji} = \emptyset$. Definim $W = \cap_{i \neq j} g_i^{-1} W_{ij}, W' = \cap_{i \neq j} g_j^{-1} W'_{ji}$. Evident $g_i W \subset W_{ij}, g_j W' \subset W'_{ji}$ astfel că $g_i W \cap g_j W' = \emptyset$ și acțiunea e separabilă. ■

Exercițiul 5.6.20. Privim S^1 ca mulțimea numerelor complexe de modul 1 și fie θ difeomorfismul torului $S^1 \times S^1$ dat prin $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, \bar{z}_2)$. Arătați că $G := \{Id, \theta\}$ e un grup izomorf cu \mathbb{Z}_2 și demonstrați că $(S^1 \times S^1)/G$ e varietate 2-dimensională.

Exercițiul 5.6.21. 1) Să se arate că singurul subgrup netrivial al lui $O(2n+1)$ care acționează liber pe S^{2n} (acțiunea indusă de cea naturală pe \mathbb{R}^{2n+1}) e cel cu două elemente $\{Id, -Id\}$. (Indicație: Folosiți faptul că orice aplicație ortogonală în dimensiune impară are măcar o valoare proprie reală.)

2) Considerăm S^3 ca

$$\{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |z'|^2 = 1\}.$$

Fie p un număr natural și u o rădăcină complexă primitivă de ordinul p a unității. Să se arate că formula

$$(k, (z, z')) \mapsto (u^k z, u^k z')$$

definește o acțiune total discontinuă și separabilă a lui \mathbb{Z}_p pe S^3 . Spațiul factor S^3/\mathbb{Z}_p se numește *spațiu lenticular*. Mai general, se poate considera acțiunea

$$(k, (z, z')) \mapsto (u^k z, u^{kr} z')$$

unde r este un număr natural prim cu p . Spațiul factor se notează $L_{r,p}$. Se poate arăta (dar acesta e un exercițiu mai greu) că $L_{1,5}$ nu e homeomorf cu $L_{2,5}$ și că $L_{2,1}$ este $P^3\mathbb{R}$. Pentru detalii se poate consulta [Wo].

Exercițiul 5.6.22. (Suspensia unui difeomorfism.) Fie M o varietate și $f \in \text{Diff}(M)$. Definim o acțiune a lui \mathbb{Z} pe $\mathbb{R} \times M$ prin formula:

$$(n, (t, x)) \mapsto (t + n, f^n(x)).$$

Să se arate că această acțiune e separabilă și fără puncte fixe. Să se arate că există o surjecție diferențiabilă $\pi : (\mathbb{R} \times M)/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ cu fibra $\pi^{-1}(z)$ difeomorfă cu M .

7. Orientare

În cazul suprafețelor, noțiunea de orientare fusese necesară pentru a le putea distinge pe cele pe care distincția deasupra–dedesubt are sens. Cum suprafețele erau scufundate în \mathbb{R}^3 , orientarea era echivalentă cu existența unui câmp vectorial normal unitar nicăieri nul. Dar Definiția 4.2.1 se poate extinde la cazul varietăților fără nici o problemă:

Definiția 5.7.1. O varietate diferențiabilă este orientabilă dacă există un atlas cu proprietatea că toate schimbările de coordonate se fac cu determinant de același semn.

Alegerea unui asemenea atlas, atunci când există, echivalează cu darea unei orientări pe varietate; atunci varietatea se numește orientată. E clar că o varietate admite numai două orientari. Pe de altă parte, orice varietate care se poate acoperi cu doar două hărți (sfera, de exemplu) e orientabilă.

Exercițiul 5.7.2. Fie M, N două varietăți conexe orientate și f un difeomorfism între ele. Explicați ce înseamnă că f păstrează (schimbă) orientarea și arătați că nu există o a treia posibilitate. Cum intervine aici ipoteza de conexiune?

Exercițiul 5.7.3. Arătați că spațiul proiectiv n -dimensional e orientabil dacă și numai dacă n e impar.

Indicație: Priviți $P^n\mathbb{R}$ ca un cît al sferei S^n prin acțiunea lui \mathbb{Z}_2 . Pe de altă parte, aplicația $f : S^n \rightarrow S^n$, $f(p) = -p$ schimbă sau păstrează orientarea sferei după cum p e par sau impar și e compatibilă cu acțiunea lui \mathbb{Z}_2 .

Exercițiul 5.7.4. Arătați direct că $P^2\mathbb{R}$ conține o bandă Möbius, deci e neorientabil.

Putem folosi acest rezultat pentru a dovedi că $P^2\mathbb{R}$ nu se poate scufunda (noțiunea se va preciza ulterior) ca suprafață în \mathbb{R}^3 , deci reprezintă un prim exemplu de varietate doi-dimensională abstractă (dar se va putea scufunda în \mathbb{R}^4). Într-adevăr, aceasta rezultă din:

Teorema 5.7.5. ([Sa]) *O suprafață regulată compactă în \mathbb{R}^3 e orientabilă.*

Vom reveni asupra noțiunii de orientare în secțiunea dedicată formelor diferențiale.

CAPITOLUL 6

Vectori tangenți și cotangenți

1. Spațiul tangent

Diferențiala într-un punct a unei aplicații între două suprafețe era o aplicație lineară între spațiile tangente respective. Ca să putem extinde această construcție la aplicațiile între varietăți, trebuie întâi să definim vectorii tangenți în așa fel încât spațiul tangent într-un punct să fie linear, de aceeași dimensiune cu varietatea și, dacă varietatea e o suprafață în \mathbb{R}^3 , să regăsim vectorii tangenți cunoscuți.

Reamintim că pentru o suprafață S spațiul tangent $T_p S$ era $d_u h(\mathbb{R}^2)$ unde $h: U \rightarrow S$ era o parametrizare oarecare în jurul lui p și $h(u) = p$. Nu putem generaliza această definiție pentru că diferențialele parametrizărilor noastre (ale inverselor hărților), ar trebui să ia valori chiar în spațiul tangent pe care vrem să-l definim. Pe de altă parte, arătasem că elementele lui $T_p S$ nu sînt altceva decît vectori tangenți la curbe din \mathbb{R}^3 care stau pe S . Nici această definiție nu se poate generaliza direct: nu știm ce este un vector tangent la o curbă pe o varietate! Dar știm că pe o suprafață puteau exista o infinitate de curbe cu același vector viteză în p . E ușor de văzut că relația „a avea același vector tangent în p ” e de echivalență pe mulțimea curbelor care trec prin p . Astfel, un element al lui $T_p S$ poate fi privit ca o clasă de echivalență de curbe prin p . Aceasta va fi definiția potrivită.

Definiția 6.1.1. Se numește *curbă (diferențiabilă)* prin $x \in M$ o aplicație $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = x$, diferențiabilă în sensul diferențiabilității aplicațiilor între varietăți.

Astfel, deoarece $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e varietate acoperită cu o singură hartă $((-\varepsilon, \varepsilon), id)$, pentru orice hartă (U, φ) în jurul lui x , funcția $\varphi \circ \gamma$ e diferențiabilă. Echivalent, componentele ei locale

$$\gamma^i \stackrel{\text{not.}}{=} x^i \circ \gamma$$

sînt funcții diferențiabile de t , cu valori reale.

Notăm $\mathcal{C}(x)$ mulțimea curbelor diferențiabile prin x .

Discuția care urmează e strict locală. De aceea introducem o mulțime de funcții diferențiabile pentru care ne interesează doar comportarea în vecinătatea lui x . Fie \mathcal{F}_x mulțimea funcțiilor diferențiabile pe vecinătăți deschise ale lui x . Dacă $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sînt din \mathcal{F}_x , atunci putem defini

$$f_1 + f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} f_1|_{U_1 \cap U_2} + f_2|_{U_1 \cap U_2},$$

$$f_1 \cdot f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} f_1|_{U_1 \cap U_2} \cdot f_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

Cu aceste operații și cu înmulțirea naturală cu scalari reali, \mathcal{F}_x devine aproape o algebră reală: lipsește doar unicitatea elementului neutru față de adunare. Acum putem da:

Definiția 6.1.2. Vom spune că două curbe γ, γ_1 sînt echivalente și vom scrie $\gamma \sim \gamma_1$ dacă

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ \gamma_1)}{dt} \Big|_{t=0}$$

pentru orice funcție $f \in \mathcal{F}_x$.

Exercițiul 6.1.3. \sim e o relație de echivalență pe $\mathcal{C}(x)$.

Vom nota clasa de echivalență a curbei γ cu $\gamma'(0)$.

Propoziția 6.1.4. Fiecare hartă în jurul lui x produce o identificare a mulțimii factor $\mathcal{C}(x)/\sim$ cu \mathbb{R}^m , $m = \dim M$. În particular, $\mathcal{C}(x)/\sim$ are structură (necanonică) de spațiu vectorial real m -dimensional. Orice două asemenea structuri sînt izomorfe.

Demonstrație. Fie (U, φ) o hartă fixată în jurul lui x . Pentru $\gamma \in \mathcal{C}(x)$ avem:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t=0},$$

unde (u^i) sînt coordonatele pe $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. De aici și din definiția relației de echivalență rezultă că

$$\gamma \sim \gamma_1 \text{ atrage după sine } \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\gamma_1^i}{dt} \Big|_{t=0},$$

deci unei clase $\gamma'(0)$ i se asociază unic m numere reale $(d\gamma^i/dt)|_{t=0}$.

Reciproc, date $(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$, considerăm în $\varphi(U)$ curba $\beta(t) = (v^1 t + u_0^1, \dots, v^m t + u_0^m)$ unde $u_0^i = x^i(x)$ sînt coordonatele lui x în harta fixată. Atunci $\gamma = \varphi^{-1} \circ \beta$ e o curbă diferențiabilă prin x și $(d\gamma^i/dt)|_{t=0} = v^i$.

E clar că cele două asocieri sînt inverse una alteia. Am obținut o bijecție $\Theta_\varphi : \mathcal{C}(x)/\sim \rightarrow \mathbb{R}^m$ indusă de harta (U, φ) . Prin Θ_φ^{-1} structura lineară a lui \mathbb{R}^m se transportă pe $\mathcal{C}(x)/\sim$. Fie acum (V, ψ) o altă hartă în jurul lui x . Atunci $\varphi \circ \psi^{-1}$ e un difeomorfism al lui $\psi(U \cap V)$ pe $\varphi(U \cap V)$ și $F = d_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1})$ e un izomorfism linear al lui \mathbb{R}^m . Atunci $\Theta_\varphi^{-1} \circ F \circ \Theta_\psi$ e un izomorfism între structurile lineare induse pe $\mathcal{C}(x)/\sim$ de cele două hărți. ■

Dacă $(U, \varphi), (\bar{U}, \bar{\varphi})$ sînt două hărți în jurul lui x , relația dintre coordonatele $(d\gamma^i/dt)|_{t=0}$ și $(d\bar{\gamma}^j/dt)|_{t=0}$ rezultă din următorul șir de egalități:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d(\varphi \bar{\varphi}^{-1} \bar{\varphi} \circ \gamma)^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial(\varphi \bar{\varphi}^{-1})^i}{\partial \bar{u}^j} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \frac{d(\bar{\varphi} \circ \gamma)^j}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial(\varphi \bar{\varphi}^{-1})^i}{\partial \bar{u}^j} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \frac{d\bar{\gamma}^j}{dt} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

adică

$$(6.1) \quad \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \cdot \frac{d\bar{\gamma}^j}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Vom arăta în continuare că pe $\mathcal{C}(x)/\sim$ se poate da și o structură vectorială invariabilă, care nu depinde de fixarea vreunei hărți, dar izomorvă cu cele dinainte. Pentru aceasta introducem niște obiecte noi:

Definiția 6.1.5. O derivare în x e o aplicație $v: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- 1) $v(f + ag) = v(f) + av(g)$, $a \in \mathbb{R}$;
- 2) $v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$.

Mulțimea derivărilor în x se notează $\mathcal{D}(x)$.

O consecință imediată a proprietății 2) este:

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + 1 \cdot v(1) = 2v(1)$$

deci $v(1) = 0$. De aici rezultă că pentru orice scalar real a avem:

$$v(a) = v(1 \cdot a) = av(1) = 0,$$

adică orice derivare se anulează pe constantele reale.

Exemplul 6.1.6. Fiecărei hărți (U, φ) i se asociază m derivări (să le spunem elemente)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathbb{R}$$

prin formulele:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)}.$$

Vom nota, uneori, mai simplu

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_x \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f).$$

Subliniem că aceasta e doar o notație: nu este o derivare parțială a lui f în raport cu x^i . Să verificăm proprietățile din definiția derivării:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f + g) &= \frac{\partial((f + g) \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} + \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f) + \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (fg) &= \frac{\partial(fg) \circ \varphi^{-1}}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} = \frac{\partial((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1}))}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot g(x) + \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot f(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f) \cdot g(x) + \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (g) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Putem acum demonstra:

Teorema 6.1.7. Operațiile naturale:

$$\begin{aligned} (v + w)(f) &= v(f) + w(f) \\ (\lambda v)(f) &= \lambda v(f) \end{aligned}$$

definesc pe $\mathcal{D}(x)$ o structură de spațiu vectorial real m -dimensional pentru care mulțimea derivărilor elementare $(\partial/\partial x^i)|_x$ asociate oricărei hărți constituie o bază.

Demonstrație. Se verifică ușor că suma derivărilor și produsul lor cu scalari reali sînt tot derivări. De asemenea, lăsăm pe seama cititorului verificarea axiomelor spațiului vectorial.

Fie (U, φ) o hartă fixată și $(\partial/\partial x^i)|_x$ derivările elementare asociate. Arătăm că sînt linear independente peste \mathbb{R} . Într-adevăr, dacă:

$$a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x = 0, \quad a^i \in \mathbb{R},$$

atunci

$$a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x (f) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}_x.$$

În particular:

$$0 = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x (x^j) = a^i \frac{\partial(x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} |_{\varphi(x)} = a^i \frac{\partial u^j}{\partial u^i} |_{\varphi(x)} = a^i \delta_i^j = a^j.$$

Pentru a arăta că orice derivare se scrie ca o combinație lineară de derivări elementare, avem nevoie de un rezultat de analiză (asemănător formulei lui Taylor) pe care îl formulăm în:

Lema 6.1.8. Pentru orice vecinătate V a lui x , orice $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ și orice hartă (U, φ) în jurul lui x există o vecinătate deschisă $W \subset U \cap V$ a lui x și funcțiile diferențiabile $f_i: W \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, astfel încît:

- 1) $f_i(x) = (\partial/\partial x^i)|_x (f)$ și
- 2) $f = f(x) + [x^i - x^i(x)]f_i$ pe W .

Presupunînd, pentru moment, lema demonstrată putem scrie:

$$v(f) = v(f(x)) + v(x^i - x^i(x))f_i(x) + [x^i - x^i(x)](x)v(f_i).$$

Cum $f(x) \in \mathbb{R}$, $v(f(x)) = 0$. La fel, $v(x^i - x^i(x)) = v(x^i) - v(x^i(x)) = v(x^i)$. Apoi $[x^i - x^i(x)](x) = x^i(x) - x^i(x) = 0$ de unde:

$$v(f) = v(x^i)f_i(x) = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x (f).$$

Adică, renunțînd la argument:

$$v = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x,$$

ceea ce arată că derivările elementare generează $\mathcal{D}(x)$. Să dăm acum demonstrația lemei.

Fie $g = f|_{U \cap V} \circ \varphi^{-1}$, $u_0 = \varphi(x)$, $\delta > 0$ astfel încît $B(u_0, \delta) \subset \varphi(U \cap V)$. Vom demonstra, de fapt, lema pentru funcția g . Fie $g_i: B(u_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(u_0 + t(u - u_0)) dt.$$

Atunci:

$$\begin{aligned}(u^i - u_0^i)g_i(u) &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(u_0 + t(u - u_0))(u^i - u_0^i) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} g(u_0 + t(u - u_0)) dt = g(u) - g(u_0).\end{aligned}$$

Pe de altă parte:

$$g_i(u_0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i} \Big|_{u_0} dt = \frac{\partial g}{\partial u^i} \Big|_{u_0} \int_0^1 dt = \frac{\partial g}{\partial u^i} \Big|_{u_0}.$$

Nu mai avem decît să punem $f_i = g_i \circ \varphi$, $W = \varphi^{-1}(B(u_0, \delta))$ și demonstrația e completă. ■

Observația 6.1.9. În demonstrația lemei anterioare, în locul bilei $B(u_0, \delta)$ se putea folosi orice submulțime convexă a lui $\varphi(U \cap V)$.

Numerele reale

$$v^i \stackrel{\text{not.}}{=} v(x^i)$$

se numesc *componentele* derivării v în harta (U, φ) . Dacă $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ e o altă hartă în jurul lui x , cu coordonate (\bar{x}^i) , atunci pentru orice $f \in \mathcal{F}_x$ avem formulele:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}(f) \Big|_x &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \\ &= \frac{\partial(f \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} = \frac{\partial(f \circ \bar{\varphi}^{-1})}{\partial \bar{u}^j} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

De aici rezultă că cele două baze sînt legate prin relațiile:

$$(6.2) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \Big|_x.$$

Atunci relația dintre componentele derivării v în cele două baze este:

$$(6.3) \quad \bar{v}^j = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot v^i.$$

Observăm, de asemenea, că

$$(6.4) \quad (v + w)^i = v^i + w^i, \quad (av)^i = av^i.$$

Mai avem de făcut un pas: să identificăm spațiile vectoriale $\mathcal{C}(x)/\sim$ și $\mathcal{D}(x)$. La nivel de mulțimi lucrurile sînt clare: dată o derivare v , considerăm componentele sale (v^i) într-o hartă. Lor le asociem clasa de curbe $\gamma'(0)$ cu componente $(d\gamma^i/dt)(0) = v^i$. Formulele (6.1) și (6.3) arată că $\gamma'(0)$ nu depinde de harta cu ajutorul căreia e definită. Reciproc, dată o clasă $\gamma'(0)$, definim vectorul tangent v_γ prin

$$v_\gamma(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

E imediat că într-o hartă (U, φ) componentele lui v_γ sînt $(d\gamma^i/dt)(0)$. Am definit astfel o bijecție $\Phi: \mathcal{D}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x)/\sim$.

Fixăm acum o hartă în jurul lui x . Aceasta induce o structură de spațiu vectorial m dimensional pe $\mathcal{C}(x)/\sim$. Pentru orice derivări v, w , $\Phi(v + w) = \Phi(v) + \Phi(w)$ și

$\Phi(av) = a\Phi(v)$ conform formulelor (6.4). Așadar Φ e izomorfism față de oricare dintre structurile lineare definite pe $\mathcal{C}(x)/\sim$ în Propoziția 6.1.4. Cu această interpretare geometrică în minte putem în sfârșit da:

Definiția 6.1.10. *Spațiul tangent în x la varietatea M este spațiul vectorial m -dimensional $\mathcal{D}(x)$. Îl notăm T_xM . Elementele sale se numesc *vectori tangenți în x la M* .*

Cele de mai sus arată că fiecare hartă furnizează o bază (zisă canonică) a lui T_xM formată din derivări elementare.

Exercițiul 6.1.11. Să se arate că dacă M e o suprafață în \mathbb{R}^3 , T_xM coincide cu cel definit în capitolul al doilea.

Exercițiul 6.1.12. Arătați că spațiul tangent la $P^n\mathbb{R}$ într-un punct $[x]$ se identifică cu mulțimea aplicațiilor lineare de la dreapta $\langle x \rangle$ la subspațiul x^\perp . Generalizare pentru varietatea Grassmann.

Observația 6.1.13. Deoarece \mathbb{R}^n se acoperă cu o singură hartă care produce coordonatele globale (u^1, \dots, u^n) , spațiul tangent $T_z\mathbb{R}^n$ se identifică natural cu \mathbb{R}^n prin aplicația:

$$a^1 \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_z + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial u^n} \Big|_z \mapsto (a^1, \dots, a^n).$$

Exercițiul 6.1.14. Fie curba $\gamma: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, și fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x, y) = 2x + y^2$. Calculați $\gamma'(\pi/4)(f)$.

În încheiere, revenim un pic la mulțimea notată \mathcal{F}_x , a funcțiilor diferențiabile definite pe deschiși care conțin punctul x . Putem scăpa de neplăcerea de a nu avea unicitatea zeroului identificând (f, U) cu (f', U') de îndată ce $f = f'$ pe $U \cap U'$. Clasele de echivalență obținute se numesc *germeni* de funcții diferențiabile în x . Notăm, pentru simplitate, tot cu \mathcal{F}_x această algebră (acum chiar este!). Fie \mathbf{m}_x idealul germenilor care se anulează în x . E clar că $\mathbf{m}_x^2 \subset \mathbf{m}_x$. Următoarea definiție echivalentă a spațiului tangent e extrem de utilă pentru că se poate da (ca definiție) pe alte feluri de varietăți (algebrice, analitice...):

Propoziția 6.1.15. T_xM se identifică natural cu $(\mathbf{m}_x/\mathbf{m}_x^2)^*$, unde dualitatea se referă la structura de spațiu vectorial real.

Pentru demonstrație, un vector tangent v e văzut ca o aplicație lineară pe \mathcal{F}_x . Atunci, pentru orice germene $f \in \mathbf{m}_x$, $v(f^2) = 2f(x)v(f) = 0$, deci v se anulează pe \mathbf{m}_x^2 . Reciproc, un element $\eta \in (\mathbf{m}_x/\mathbf{m}_x^2)^*$ definește un vector tangent v_η în x prin formula $v_\eta(f) = \eta([f - f(x)])$, unde $[g]$ reprezintă clasa în $\mathbf{m}_x^2 \subset \mathbf{m}_x$ a lui g din \mathbf{m}_x . Verificările sînt imediate.

2. Diferențiala unei aplicații într-un punct

Considerăm acum o aplicație diferențiabilă $f: M \rightarrow N$.

Definiția 6.2.1. *Diferențiala lui f în x este aplicația lineară*

$$d_x f: T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$$

definită prin:

$$d_x f(v)(g) = v(g \circ f), \quad \forall v \in T_xM, \forall g \in \mathcal{F}_{f(x)}.$$

Că definiția e bună se verifică imediat:

1) $d_x f(v)$ e într-adevăr un vector tangent: aditivitatea nu pune probleme, iar pentru proprietatea de derivare,

$$\begin{aligned} d_x f(v)(gh) &= v((gh) \circ f) = v((g \circ f)(h \circ f)) \\ &= g(f(x))v(h \circ f) + h(f(x))v(g \circ f) \\ &= g(f(x))d_x f(v)(h) + h(f(x))d_x f(v)(g). \end{aligned}$$

2) $d_x f$ e lineară:

$$\begin{aligned} d_x f(v+w)(g) &= (v+w)(g \circ f) = v(g \circ f) + w(g \circ f) \\ &= d_x f(v)(g) + d_x f(w)(g), \end{aligned}$$

$$d_x f(av)(g) = (av)(g \circ f) = av(g \circ f) = ad_x f(v)(g).$$

Dacă privim vectorii tangenți ca fiind clase de echivalență de curbe, atunci $d_x f$ aplică vectorul $\gamma'(0)$ în vectorul $(f \circ \gamma)'(0)$ (vezi, de asemenea, și discuția locală care urmează). Regăsim astfel acțiunea diferențialei unei aplicații de suprafețe.

Local, dacă considerăm o hartă (U, φ) în jurul lui x și o hartă (V, ψ) în jurul lui $f(x)$ cu coordonate locale (x^1, \dots, x^m) , respectiv (y^1, \dots, y^n) vom avea:

$$d_x f\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x\right) = \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(x)},$$

unde scalarii λ_i^j se determină astfel:

$$\begin{aligned} \lambda_i^j &= d_x f\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x\right)(y^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (y^j \circ f) \frac{\partial (y^j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \\ &= \frac{\partial (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Matricea $(\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j / \partial u^i)$ se numește *matricea iacobiană* sau, pe scurt, *iacobianul* lui f în punctul x relativ la sistemele de coordonate considerate. Dacă $(\bar{U}, \bar{\varphi})$, $(\bar{V}, \bar{\psi})$ sînt alte hărți în jurul lui x , respectiv $f(x)$, vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} &= \frac{\partial (\psi \circ \bar{\psi}^{-1})^j}{\partial v^l} \Big|_{\bar{\psi}(f(x))} \frac{\partial (\bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1})^l}{\partial u^k} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \\ &= \frac{\partial (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})^k}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Deoarece matricele derivatelor parțiale ale schimbărilor de coordonate sînt nedegenerate, putem defini *rangul* aplicației f în x prin formula:

$$\text{rg}(f)_x = \text{rg} \left(\frac{\partial (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^l}{\partial u^k} \Big|_{\varphi(x)} \right).$$

Exercițiul 6.2.2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x^1, x^2, x^3) = (x^1 x^2, x^2, x^3)$. Arătați că f se restrînge la o aplicație $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ al cărei rang calculați-l în fiecare punct al lui S^2 .

O funcție reală de variabilă reală cu derivată identic nulă e constantă. Rezultatul se generalizează în:

Propoziția 6.2.3. Dacă M e conexă și $f : M \rightarrow N$ are diferențiala nulă în orice punct, atunci $f = \text{const.}$

Demonstrație. Fie $y \in N$ arbitrar. Deoarece N e Hausdorff, $\{y\}$ e o mulțime închisă deci $A = f^{-1}(y)$ e închisă în M . Vom arăta că A e și deschisă ceea ce, dată fiind conexiunea lui M , va dovedi că $A = M$.

Fie $x \in A$. Alegem hărți (U, φ) , (V, ψ) în jurul lui x , respectiv y , (cu aceleași notații de mai sus), astfel încât $f(U) \subset V$. Atunci în orice punct $z \in U$ avem (pentru că (U, φ) e hartă și în jurul lui z):

$$0 = d_z f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_z \right) = \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(z)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(z)},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(z)} = 0, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Așadar, funcțiile $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^j$ sînt constante pe $\varphi(U)$ și cum φ, ψ sînt homeomorfisme obținem $f = \text{const.}$ pe U adică $U \subset A$. ■

Exercițiul 6.2.4. Fie $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ diferențiabile. Să se arate că este adevărată regula lanțului pentru derivarea funcțiilor compuse:

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f.$$

Scrieți și forma locală a acestei egalități.

În cazul unei funcții reale $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiala $d_x f$ va acționa între $T_x M$ și \mathbb{R} (vezi Observația 6.1.13). Local, dacă (U, φ) e o hartă în jurul lui x și dacă pe \mathbb{R} considerăm coordonata globală t care produce baza canonică d/dt , avem:

$$\begin{aligned} d_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right) &= \frac{\partial(id \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \\ \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \frac{d}{dt} \Big|_{f(x)} &= \frac{\partial(id \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(x)} \frac{d}{dt} \Big|_{f(x)} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f) \frac{d}{dt} \Big|_{f(x)}. \end{aligned}$$

Folosind din nou Observația 6.1.13, identificăm rezultatul cu numărul real $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f)$. Astfel, în general:

$$d_x f(v) = v(f).$$

Exercițiul 6.2.5. ([Ta]) Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferențiabilă, cu $f(rv) = rf(v)$, pentru orice $r \in \mathbb{R}$ și $v \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că f e lineară. (Indicație: E suficient de văzut că f coincide cu diferențiala ei într-un punct. verificați că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial t} f(tv) = d_{tv} f(v) = f(v)$, deci $d_{tv} f(v)$ nu depinde de t , adică e egal cu $d_0 f(v)$.)

Exercițiul 6.2.6. Fie π_i proiecția canonică a produsului de varietăți $M_1 \times M_2$ pe factorul M_i , $i = 1, 2$ (vezi Exercițiul 5.3.2). Să se arate că, pentru orice $x_i \in M_i$, aplicația $\alpha : T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{x_1} M_1 \oplus T_{x_2} M_2$, dată prin $\alpha(X) = (d_{x_1} \pi_1 X, d_{x_2} \pi_2 X)$ e un izomorfism. Astfel, spațiile tangente $T_{x_i} M_i$ pot fi văzute ca subspații în $T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2)$. Generalizare pentru un produs de m varietăți.

Exercițiul 6.2.7. Fie G un grup Lie, $\mu : G \times G \rightarrow G$ înmulțirea de grup și $i : G \rightarrow G$ luarea inversului în G (ambele sînt aplicații diferențiabile). Ca mai sus, identificăm $T_{(e, e)}(G \times G)$ cu $T_e G \oplus T_e G$. Arătați că $d_{(e, e)} \mu(X, Y) = X + Y$ și $d_e i X = -X$.

Observația 6.2.8. Folosind noțiunea de diferențială, putem arăta că una dintre condițiile din definiția grupului Lie e superfluă. Mai precis, putem arăta că luarea inversului în G este o aplicație diferențiabilă. Într-adevăr fie ecuația $ab = e$. A o rezolva pentru necunoscuta b revine la a considera b ca funcție de a . Dar derivata parțială a funcției ab în raport cu b este $d_b L_a$ care e un izomorfism (am văzut ca L_a e difeomorfism). Atunci, conform teoremei funcțiilor implicite, $b = a^{-1}$ este diferențiabilă.

3. Spațiul cotangent

Definiția 6.3.1. Dualul algebric al spațiului tangent se numește *spațiu cotangent* și se notează $T_x^* M$. Elementele sale se numesc *vectori cotangenți* sau *covectori*.

După cum se știe orice spațiu vectorial *finit dimensional* este izomorf (dar necanonic, e extrem de important!) cu dualul său. Deci $T_x^* M$ este un spațiu vectorial de dimensiune $m = \dim M$. Elementele sale sînt aplicații lineare $\omega : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Așadar, pentru orice aplicație diferențiabilă $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ și orice $x \in M$, $d_x f$ e un vector cotangent. În particular, pentru funcțiile coordonate x^i asociate unei hărți locale (U, φ) avem:

$$d_x x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x (x^i) = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \Big|_{\varphi(x)} = \delta_j^i$$

ceea ce dovedește:

Propoziția 6.3.2. Pentru orice sistem de coordonate locale x^i , diferențialele $\{d_x x^i\}$ formează baza duală bazei $\{(\partial/\partial x^j) \Big|_x\}$.

Rezultă că, local, orice vector cotangent se scrie:

$$\omega = \omega_i d_x x^i,$$

numerele reale ω_i reprezentînd componentele covectorului în harta respectivă. (Atenție: e important să notăm componentele vectorilor cu indici „sus“ și cele ale covectorilor cu indici „jos“; aceasta ușurează calculele cu convenția de sumare a lui Einstein).

Exercițiul 6.3.3. Să se arate că la o schimbare de coordonate, componentele unui vector cotangent se schimbă după formula:

$$\bar{\omega}_i = \frac{\partial(\varphi \circ \bar{\varphi}^{-1})^j}{\partial \bar{u}^i} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \omega_j.$$

Fie, din nou, $f : M \rightarrow N$ cu diferențiala $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. Fiind lineară, aceasta din urmă produce o aplicație duală

$$d_x^* f : T_{f(x)}^* N \rightarrow T_x^* M$$

care acționează după formula:

$$d_x^* f(\omega) = \omega \circ d_x f.$$

În particular, pentru $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ rezultă: $d_x^* f(d_{f(x)} g) = d_x(g \circ f)$.

Observația 6.3.4. Se folosesc uneori notațiile: $f_{*,x}$, F_x^* pentru $d_x f$, respectiv $d_x^* f$.

Observația 6.3.5. Insistăm asupra faptului că spațiile tangent și cotangent într-un punct sînt izomorfe necanonic, fiecare sistem de coordonat fixat în jurul punctului respectiv dînd naștere unui izomorfism, *via* bazele de vectori tangenți, respectiv cotangenți induse. Reamintim însă că în spațiile vectoriale euclidiene se poate lucra cu

baze ortogonale, fiecare asemenea bază inducând același izomorfism în spațiul respectiv și dualul său. Vom reveni asupra acestei observații pe varietăți riemaniene.

4. Fibratul tangent și fibratul cotangent

Vom atașa acum fiecărei varietăți o nouă varietate, de dimensiune dublă, formată prin punerea laolaltă (într-un fel care se va preciza) a tuturor vectorilor tangenți. În afara faptului că se obțin astfel noi exemple de varietăți construcția pe care o vom prezenta e tipică în geometria diferențială și va fi dezvoltată în capitolul dedicat fibrărilor vectoriale.

Fie M o varietate diferențiabilă. Notăm

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

și-l numim *fibratul tangent* sau *fibrarea tangentă*. TM reunește toți vectorii tangenți, dar „ține minte“ pentru fiecare punctul de tangență astfel că este definită o proiecție canonică

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad T_x M \ni v \mapsto x.$$

Propoziția 6.4.1. TM e varietate diferențiabilă $2m$ -dimensională și π e aplicație diferențiabilă.

Demonstrație. Construim întâi topologia pe TM . Fixăm pentru aceasta un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ pe M . Fiecare hartă de pe M furnizează coordonate locale pe domeniul său. Corespunzător, orice vector tangent într-un punct din domeniul hărții se identifică unic prin componentele sale în acea hartă. Astfel, hărțile $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ îi atașăm perechea $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ (viitoare hartă pe TM):

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m,$$

$$\Phi_\alpha(v) = (x, t_\alpha(v)), \quad t_\alpha(v) = (v^1, \dots, v^m), \quad v \in T_x M,$$

v^i fiind componentele lui v în harta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$: $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$. Cu observația de mai sus vedem că Φ_α sînt bijecții. Atunci, prin Φ_α^{-1} , topologia lui $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ se transportă pe $\pi^{-1}(U_\alpha)$ și Φ_α^{-1} devin homeomorfisme. Deoarece mulțimile $\pi^{-1}(U_\alpha)$ acoperă TM (pentru că U_α acoperă M) putem topologiza TM astfel (procedeu e tipic în topologia generală): W e deschisă în TM dacă și numai dacă $W \cap \pi^{-1}(U_\alpha)$ e deschisă pentru orice $\alpha \in A$. Cititorul va verifica singur că aceasta este o topologie. Faptul că ea are bază numărabilă e evident.

Din Exercițiul 5.2.8, știm că $\{U_\alpha\}$ e o bază pentru topologia lui M . Atunci faptul că $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sînt deschise e suficient pentru a trage concluzia că π e continuă. Arătăm acum că topologia construită e Hausdorff. Fie $v \neq w$ în TM . Sînt posibile două situații:

a) $x = \pi(v) \neq \pi(w) = y$. În acest caz există hărțile $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) în jurul lui x , respectiv y astfel încît $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ (pentru că M e Hausdorff). Rezultă $v \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $w \in \pi^{-1}(U_\beta)$ și $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \emptyset$.

b) Dacă $v, w \in T_x M$, atunci componentele lor (v^i) , (w^i) sînt diferite. Deoarece \mathbb{R}^m e Hausdorff, există D_v, D_w , vecinătăți deschise disjuncte pentru (v^i) , (w^i) . Rezultă că pentru orice hartă $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ în x , $\Phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times D_v)$, $\Phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times D_w)$, sînt vecinătăți deschise și disjuncte pentru v, w .

Pînă acum TM e spațiu local euclidian. Demonstrăm în continuare că orice două hărți $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$, $(\pi^{-1}(U_\beta), \Phi_\beta)$ cu $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$ sînt corelate. Evident hărțile în cauză provin din două hărți corelate pe M . Avem

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, (v^1, \dots, v^m)) = (x, t_\alpha \circ t_\beta^{-1}(v^1, \dots, v^m)).$$

Cum $t_\alpha \circ t_\beta^{-1}(v^1, \dots, v^m)$ reprezintă componentele vectorului $t_\beta^{-1}(v^1, \dots, v^m)$ în harta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, corelarea pe TM revine la dependența diferențiabilă a componentelor unui vector tangent într-o hartă de cele în altă hartă. Or, acest lucru e asigurat de formulele (6.3) pe care le putem scrie:

$$(t_\alpha \circ t_\beta^{-1}(v^1, \dots, v^m))^j = v^i \frac{\partial(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^j}{\partial u^i} |_{\varphi_\beta(x)}.$$

Pentru diferențiabilitatea lui π în $v \in T_x M$ considerăm o hartă arbitrară $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ în jurul lui x și harta corespunzătoare $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ în jurul lui v ; trebuie să arătăm că $\varphi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ e diferențiabilă în $\Phi(v)$. Acest lucru e evident deoarece $\varphi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ este compunerea dintre φ și proiecția pe primul factor al produsului $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$, ambele aplicații diferențiabile (vezi Exercițiul 5.6.2). Cu aceasta demonstrația e completă. ■

În acest context, fiecare spațiu tangent $T_x M$ se numește *fibra* fibrării tangente deasupra punctului x .

Exemplul 6.4.2. Atunci cînd are sens, de exemplu pentru varietăți care sînt subvarietăți ale lui \mathbb{R}^n , putem vorbi despre lungimea vectorilor tangenți. Astfel, pentru sfere, putem considera *fibratul tangent al vectorilor unitari*, notat $T_1 S^n$. În particular, $T_1 S^2$ admite o descriere foarte simplă. Fie v un vector tangent unitar la S^2 în punctul x . Cum și x este un vector din \mathbb{R}^3 , putem considera vectorul $w = x \times v$ (ordinea e importantă). Acest w e perpendicular pe x , deci e și el tangent la S^2 în x . În plus, e perpendicular pe v , astfel că $\{x, v, w\}$ formează un reper ortonormat pozitiv orientat în \mathbb{R}^3 . Ascieria dintre v și reper este, în mod evident, bijectivă. Pe de altă parte, există o unică matrice $A \in \text{SO}(3)$ care aplică reperul canonic din \mathbb{R}^3 peste reperul $\{x, v, w\}$. Astfel că avem o identificare F între $T_1 S^2$ și $\text{SO}(3)$, $F(v) = A$. Se poate vedea că această aplicație e un difeomorfism: expresia în coordonate a lui F este dată de funcții raționale. În concluzie, $T_1 S^2$ e difeomorf cu $\text{SO}(3)$ (care, la rîndul lui, e difeomorf cu spațiul proiectiv 3-dimensional).

Exercițiul 6.4.3. Arătați că $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Exercițiul 6.4.4. Arătați că $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, dar $TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}^2$.

Exercițiul 6.4.5. Arătați că fibratele tangente ale unui inel circular deschis ($S^1 \times (0, 1)$) și al benzii lui Möbius deschise sînt difeomorfe cu $S^1 \times \mathbb{R}^3$. Deci există varietăți nedifeomorfe cu fibratele tangente difeomorfe.

Exercițiul 6.4.6. Organizați, după modelul de mai sus, $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ (*fibratul cotangent*) ca varietate diferențiabilă $2m$ -dimensională cu proiecție naturală π^* peste M diferențiabilă.

Pentru o aplicație diferențiabilă $f : M \rightarrow N$, putem acum defini *diferențiala* ei (obiect global, nu mai e legat de un punct) prin:

$$df : TM \rightarrow TN, \quad df(v) = d_x f(v) \text{ dacă } v \in T_x M.$$

Similar vom pune:

$$d^* f : T^* N \rightarrow T^* M, \quad d^* f(\omega) = d_x^* f(\omega) \text{ dacă } \omega \in T_x^* N$$

Accentuăm că df , $d^* f$ nu sînt lineare: numai restricțiile lor la fibrele celor două fibrări sînt. Mai precis, cititorul poate demonstra singur următoarea proprietate:

Propoziția 6.4.7. Fie M_i , $i = 1, 2$ varietăți diferențiabile, $\pi_i : TM_i \rightarrow M_i$ fibrările lor tangente, $f : M_1 \rightarrow M_2$ diferențiabilă. Atunci:

- 1) df și $d^* f$ sînt diferențiabile;
- 2) $\pi_2 \circ df = f \circ \pi_1$, $\pi_1^* \circ d^* f = f \circ \pi_2^*$ (adică df și $d^* f$ păstrează fibrele celor două fibrări);
- 3) $\text{rg } df = \text{rg } d^* f = 2\text{rg } f$.

Observația 6.4.8. Menționăm că se folosesc și notațiile

$$f_* \stackrel{\text{not.}}{=} df, \quad f_{*,x} \stackrel{\text{def.}}{=} df_x.$$

Le vom folosi și noi atunci cînd va fi cazul.

Încheiem paragraful cu următorul rezultat foarte util:

Exercițiul 6.4.9. Fie M_i , $i = 1, 2$ varietăți diferențiabile, p_i proiecțiile canonice ale varietății produs $M_1 \times M_2$ pe factori (vezi Exercițiul 5.3.2).

- 1) Să se arate că $f : N \rightarrow M_1 \times M_2$ e diferențiabilă dacă și numai dacă $p_i \circ f$ sînt diferențiabile.
- 2) Să se arate că se arate că $T_{(x_1, x_2)} M_1 \times M_2$ și $T_{x_1} M_1 \oplus T_{x_2} M_2$ sînt izomorfe prin aplicația $v \mapsto (d_{x_1} p_1(v), d_{x_2} p_2(v))$. În particular, pentru un grup Lie G cu multiplicarea notată μ și luarea inversului notată i , identificați $T_{(e,e)} G \times G$ cu $T_e G \oplus T_e G$ și arătați că dacă $d_{(e,e)} \mu(v, w) = v + w$ (acest lucru va rezulta mai tîrziu) atunci $d_e i(v) = -v$.

3) Fie $x_{0i} \in M_i$ fixate arbitrar. Considerăm incluziunile $i_{x_{01}} : M_2 \rightarrow M_1 \times M_2$, $i_{x_{01}}(x_2) = (x_{01}, x_2)$, respectiv $i_{x_{02}} : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$, $i_{x_{02}}(x_1) = (x_1, x_{02})$. Fie $v \in T_{(x_{01}, x_{02})} M_1 \times M_2$, $v_1 = d_{x_{01}} p_1(v) \in T_{x_{01}} M_1$, $v_2 = d_{x_{02}} p_2(v) \in T_{x_{02}} M_2$. Să se arate că pentru orice $f \in \mathcal{C}^\infty(M_1 \times M_2)$,

$$v(f) = v_1(f \circ i_{x_{02}}) + v_2(f \circ i_{x_{01}}).$$

Exercițiul 6.4.10. Arătați că fibratele tangent și cotangent ale oricărei varietăți sînt orientabile.

Observația 6.4.11. Din punctul de vedere al mecanicii, dacă punctele unei varietăți reprezintă mulțimea pozițiilor posibile ale unui sistem de particule, fibratul tangent reprezintă spațiul stărilor (un element al său descrie poziția și viteza sistemului la un moment dat), iar fibratul cotangent reprezintă spațiul fazelor (un element al său descrie poziția și momentul la un moment dat).

CAPITOLUL 7

Imersii. Submersii. Subvarietăți

În acest paragraf definim subvarietățile unei varietăți diferențiabile. Acestea vor fi submulțimi-imaginale ale unor varietăți prin aplicații diferențiabile cu proprietăți speciale. Începem cu:

1. Definiții. Exemple

Definiția 7.1.1.

- 1) O aplicație diferențiabilă $f : M \rightarrow N$, $m = \dim M \leq n = \dim N$, se numește *imersie* dacă $\text{rg } d_x f = m$ în fiecare $x \in M$ ($d_x f$ e injectivă).
- 2) O imersie injectivă care e homeomorfism pe imagine se numește *scufundare*.
- 3) Dacă M e submulțime a lui N , are structură de varietate diferențiabilă și incluziunea canonică în N e scufundare, atunci M se numește *subvarietate* a lui N . Diferența $\text{codim}(M) = \dim(N) - \dim(M)$ se numește *codimensiunea* lui M .



O imersie neinjectivă a cercului în plan.

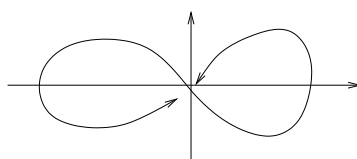


Figura ∞ ca imersie injectivă, dar nu scufundare, a cercului în plan. Imersia este: $(2 \cos(f(t) - \frac{\pi}{2}), \sin 2(f(t) - \frac{\pi}{2}))$ cu $\lim_{-\infty} f(t) = 0$, $\lim_{\infty} f(t) = 2\pi$, $f(0) = \pi$ și f crescătoare.

Propoziția 7.1.2. Orice imersie injectivă a unei varietăți compacte e o scufundare.

Demonstrație. Fie $f : M \rightarrow N$, cu M compactă și $f(M)$ considerată cu topologia de subspace al lui N , deci separată. Cum f e continuă, e suficient să mai arătăm că e aplicație deschisă pe $f(M)$. Ar trebui arătat că f duce deschise din M în deschise din $f(M)$. Dar, cum f e injectivă, e suficient să vedem că aplică închise în închise. Deoarece M e compactă, orice închis e compact și e aplicat prin f (care e continuă) într-un compact din $f(M)$. Pe de altă parte, orice compact dintr-un spațiu Hausdorff e închis. ■

Propoziția anterioară furnizează numeroase exemple de subvarietăți. Anume:

Corolarul 7.1.3. *Imaginea oricărei scufundări e o subvarietate.*

Exercițiul 7.1.4. Fie $f: M \rightarrow N$ diferențiabilă. Să se arate că graficul lui f e subvarietate închisă în $M \times N$ și $M \ni x \mapsto (x, f(x))$ e o scufundare.

Exercițiul 7.1.5. Arătați că $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y, z - 2z^3)$ e o imersie.

Exercițiul 7.1.6. Să se scufunde T^3 în \mathbb{R}^4 și $S^2 \times S^2$ în \mathbb{R}^5 .

Indicație: Considerăm scufundarea standard a lui T^2 în $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ $(\theta, \varphi) \mapsto (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ pe care o „îngroșăm“:

$$(\theta, \varphi, \psi) \mapsto \left(e^{i\theta} \left(1 - \frac{\cos \psi}{2}\right), e^{i\varphi} \left(1 - \frac{\cos \psi}{2}\right) \right).$$

Produsul scufundării standard a lui S^2 în \mathbb{R}^3 cu el însuși furnizează o scufundare a lui $S^2 \times S^2$ în \mathbb{R}^6 . E suficient să observăm că imaginea acestuia e cuprinsă în \mathbb{R}^5 și să facem o proiecție stereografică convenabilă.

Exercițiul 7.1.7. Să se arate că aplicația $\mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$(u, v) \mapsto (u^n, \dots, u^{n-k} v^k, \dots, v^n)$$

definește o imersie a lui $P^1\mathbb{R}$ în $P^n\mathbb{R}$. Este aceasta o scufundare?

Exercițiul 7.1.8. 1) Să se arate că aplicația $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$,

$$v(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx),$$

definește o imersie a lui S^2 în \mathbb{R}^6 . Cum formulele sînt omogene, v induce și o scufundare a lui $P^2\mathbb{R}$ în $P^5\mathbb{R}$.

Indicație: Se va arăta întâi că v e o imersie a lui $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ în \mathbb{R}^6 .

2) Să se arate că v definește un homeomorfism v al lui $P^2\mathbb{R}$ pe $v(S^2)$.

3) Să se arate că $v(S^2)$ e o subvarietate în \mathbb{R}^6 și v e o scufundare a lui $P^2\mathbb{R}$ în \mathbb{R}^6 .

4) Să se arate că $v(S^2) = v(P^2\mathbb{R})$ e inclus în $H \cap S^5$, unde H e un hiperplan afin al lui \mathbb{R}^6 .

Deduceți de aici că există o scufundare a lui $P^2\mathbb{R}$ în \mathbb{R}^5 și chiar în \mathbb{R}^4 . Aceasta din urmă poartă numele de *scufundarea Veronese*.

Indicație: Se observă că $v(P^2\mathbb{R})$ e inclus în S^4 și se face proiecția stereografică dintr-un punct care nu e în imagine. Motivația formulilor de pornire este următoarea: fiecărei drepte v i se asociază operatorul p_v de proiecție ortogonală pe v . Într-o bază ortonormată în care un versor al lui v are coordonatele (x, y, z) , matricea lui p_v este

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}.$$

Asemănător, asociind fiecărui k -plan al lui \mathbb{R}^n , considerat ca spațiu euclidian, operatorul de proiecție ortogonală pe el însuși, se obține o scufundare a grassmannienei k -planelor din \mathbb{R}^n într-un spațiu euclidian.

Exercițiul 7.1.9. Să se arate că S^n nu se poate imersa în \mathbb{R}^n .

Indicație: Dacă există o imersie φ , ea e și submersie, deci aplicație deschisă. Cum S^n e compactă, rezultă că $\varphi(S^n)$ e deschisă și închisă în \mathbb{R}^n care e conex, deci $\varphi(S^n) = \mathbb{R}^n$, contradicție cu faptul că \mathbb{R}^n nu e compact.

2. Teorema rangului

Intuitiv, o subvarietate ar trebui să fie o submulțime a cărei structură de varietate să coincidă local cu cea a varietății ambiante. Că așa stau lucrurile, vedem din următoarea teoremă:

Teorema 7.2.1. (a rangului) *Fie M, N varietăți diferențiabile de dimensiune m , respectiv n și $f : M \rightarrow N$ o aplicație diferențiabilă cu rangul r în fiecare punct al lui M . Atunci, pentru orice $x \in M$ există hărțile (U, φ) în x (V, ψ) în $f(x)$, cu $\varphi(U)$ (respectiv $\psi(V)$) cub centrat în $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$ (respectiv $\psi(f(x)) = 0 \in \mathbb{R}^n$) și în care aplicația $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ se exprimă prin formulele locale:*

$$(7.1) \quad \tilde{f}^a(x^1, \dots, x^m) = \begin{cases} x^a, & \text{dacă } a = 1, \dots, r \\ 0, & \text{dacă } a = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

Demonstrație. E clar că dacă găsim hărți locale în care \tilde{f} satisface relațiile (7.1), atunci micșorînd convenabil domeniile de hartă și componînd cu translații oportune în \mathbb{R}^m și \mathbb{R}^n putem ușor realiza și celelalte condiții impuse în enunț.

Fie, atunci, (U_1, φ_1) , (V_1, ψ_1) hărți arbitrare în x , $f(x)$ supuse doar condiției $f(U_1) \subset V_1$, care induc coordonatele locale (x_1^i) , $i = 1, \dots, m$, respectiv (y_1^a) , $a = 1, \dots, n$. Deci, dacă punem $\tilde{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$, avem $y_1^a = \tilde{f}_1^a(x_1^1, \dots, x_1^m)$. Deoarece rangul lui f este r , renumerotînd, eventual, coordonatele, putem presupune că iacobianul lui \tilde{f}_1 în x are minorul r -dimensional din stînga sus nenul:

$$(7.2) \quad \det \left(\frac{\partial \tilde{f}_1^a}{\partial x_1^i} \right) (x) \neq 0, \quad 1 \leq i, a \leq r.$$

Căutăm întîi o hartă (U, φ) în x , cu coordonate x^1, \dots, x^n în care iacobianul lui $\tilde{f}' = \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$ să aibă forma:

$$(7.3) \quad \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

cu A matrice de tip $(m - r, r)$ oarecare. Nu avem decît să punem

$$(7.4) \quad x^i = \begin{cases} \tilde{f}_1^i(x_1^1, \dots, x_1^m), & \text{dacă } i = 1, \dots, r \\ x_1^i, & \text{dacă } i = r + 1, \dots, m \end{cases}$$

Condiția (7.2) ne asigură că

$$\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_1^k} \right) (x) \neq 0, \quad 1 \leq i, k \leq m.$$

Atunci, conform teoremei funcției inverse, există un difeomorfism local Φ al unei vecinătăți a punctului $\varphi_1(x)$ pe o vecinătate \tilde{U} a punctului $(x^1(x), \dots, x^m(x))$. Punem $\varphi = \Phi \circ \varphi_1$, $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ și obținem harta (U, φ) cu coordonate locale (x^1, \dots, x^m) . Pentru a dovedi că în hărțile (U, φ) , (V_1, ψ_1) , iacobianul lui \tilde{f}' are forma (7.3) mai trebuie verificat doar că $\partial \tilde{f}_1^{r+s} / \partial x^{r+t} = 0$ pentru orice $1 \leq s \leq n - r$, $1 \leq t \leq m - r$. Or, acest lucru rezultă imediat din presupunerea făcută asupra rangului lui f .

Pentru a ajunge la ecuațiile (7.1) facem și o schimbare de coordonate în jurul lui $f(x)$. Anume, punem:

$$(7.5) \quad y^i = \begin{cases} y_1^i, & \text{dacă } i = 1, \dots, r \\ y_1^i - \tilde{f}_1^i(y_1^1, \dots, y_1^r), & \text{dacă } i = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

Se verifică imediat ca (7.5) e o schimbare de coordonate (iacobianul în $f(x)$ e nenul). Ca mai sus, găsim harta (V, ψ) ceea ce încheie demonstrația. ■

Ca o consecință imediată deducem următoarea teoremă de caracterizare locală a imersiilor:

Corolarul 7.2.2. *Fie $f : M \rightarrow N$ o imersie și $x \in M$. Atunci există hărțile (U, φ) în x , (V, ψ) în $f(x)$, cu $f(U) \subset V$ astfel încât f are expresia locală:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0).$$

Cu alte cuvinte, local, o imersie se comportă ca și incluziunea canonică a lui \mathbb{R}^m în \mathbb{R}^{m+s} . În ce privește subvarietățile, deducem imediat următorul rezultat:

Corolarul 7.2.3. *Fie M o subvarietate a lui N . Atunci orice punct $x \in M$ are o hartă (V, ψ) cu coordonate (y^1, \dots, y^n) , cu $\psi(x) = 0$ și $\psi(V) = C(0, \varepsilon)$ (cub de latură ε centrat în origine) astfel că*

$$\psi(V \cap M) = \{\psi(z) \in C(0, \varepsilon) \mid y^{m+1}(z) = \dots = y^n(z) = 0\}.$$

Exercițiul 7.2.4. 1) Să se arate că o suprafață diferențiabilă e subvarietate 2-dimensională a lui \mathbb{R}^3 .

2) Să se arate că S^n e subvarietate n -dimensională a lui \mathbb{R}^{n+1} .

Exercițiul 7.2.5. 1) Să se arate că mulțimea punctelor lui $P^n \mathbb{R}$ cu prima coordonată omogenă nulă e o subvarietate difeomorfă cu $P^{n-1} \mathbb{R}$.

2) Fie $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(t, x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{2tx^1}{t^2 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2tx^n}{t^2 + \|x\|^2}, \frac{-t^2 + \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} \right).$$

Să se arate că, prin trecere la cît, f definește o aplicație netedă p a lui $P^n \mathbb{R}$ în S^n . Care e preimaginea prin p a polului nord (resp. sud)?

3) Folosind proiecția stereografică, să se arate că p induce un difeomorfism al lui $P^n \mathbb{R} - p^{-1}(N)$ pe $S^n - \{N\}$. Ce se poate spune în cazul $n = 1$?

Exercițiul 7.2.6. Să se arate că mulțimea

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = \frac{1}{2}\}$$

e o subvarietate a lui S^3 , difeomorfă cu varietatea produs $S^1 \times S^1$. Dați exemple de subvarietăți ale lui S^n difeomorfe cu $(S^1)^n$.

3. Teorema valorii regulate. Noi exemple

Noțiunea care urmează e generalizarea celei date în capitolul despre suprafețe. Cu ajutorul ei vom putea produce noi exemple de varietăți.

Definiția 7.3.1. Pentru o aplicație diferențiabilă de varietăți $f : M \rightarrow N$, vom spune că $y \in N$ e *valoare regulată* a lui f dacă $d_x f$ e surjecție pentru orice x din preimaginea $f^{-1}(y)$ a lui y . O valoare care nu e regulată se numește *critică* (se poate vedea și Definiția 2.2, caz particular al acesteia).

Dacă $N = \mathbb{R}$, o valoare a e regulată dacă și numai dacă rangul lui $d_x f = 1$ pe preimaginea lui a , deci dacă, local, există cel puțin o derivată parțială care nu se anulează. Pe de altă parte, dacă $\dim M < \dim N$, toate punctele lui N sînt valori critice.

E clar că, în condițiile de mai sus, rangul lui f e constant pe $f^{-1}(y)$. Acum putem deduce din Teorema rangului un rezultat care produce noi exemple de subvarietăți (conform, de asemenea, și Propoziția 2.3 pentru care am dat o demonstrație directă):

Teorema 7.3.2. *Fie y o valoare regulată a lui $f : M \rightarrow N$. Atunci $f^{-1}(y)$ e subvarietate a lui M , de dimensiune $m - n$. În plus, $T_x(f^{-1}(y)) = \text{Ker } d_x f$ pentru orice $x \in f^{-1}(y)$.*

Demonstrație. Că $P := f^{-1}(y)$ e subvarietate rezultă din Teorema rangului.

Pentru a determin apsațiul tangent, observăm că, deoarece f e constantă pe P , $T_x P$ e cuprins în nucleul diferențialei. Pe de altă parte, $d_x f$ e surjectivă, deci

$$\dim \text{Ker}(d_x f) = \dim T_x M - \dim T_{f(x)} N = \dim M - \dim N = \dim P.$$

Rezultă că $T_x P$ e un subspațiu al nucleului de aceeași dimensiune cu acesta; trebuie să coincidă. ■

Observația 7.3.3. Teorema lui Sard (vezi [Mi]); demonstrația depășește cadrul și scopul acestui cârți) spune că *mulțimea valorilor critice e de măsură Lebesgue nulă în N* , astfel că enunțul anterior e justificat: există întotdeauna suficiente valori regulate.

Exemplul 7.3.4. Arătăm că $\text{SL}(n) = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ e subvarietate a lui $\text{GL}(n) = \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Vom arăta că funcția $\det : \text{GL}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ are rang constant 1. Atunci va rezulta că $\text{SL}(n) = \det^{-1}(1)$ e subvarietate de dimensiune $n^2 - 1$. Trebuie verificat că pentru orice matrice nedegenerată A , forma lineară

$$d_A \det : T_A \text{GL}(n) \rightarrow T_{\det(A)} \mathbb{R}$$

are rangul 1. E suficient să găsim o curbă $s(t)$ în $\text{GL}(n)$ cu $s(0) = A$ și $\det(s(t))' \neq 0$. Definim $s(t)$ ca fiind matricea obținută înmulțind prima linie a lui A cu $1 + t$, celelalte elemente rămînînd neschimbate. Evident $s(0) = A$ și $\det(s(t)) = (1 + t) \det(A)$, deci $s(t) \in \text{GL}(n)$ pentru t suficient de mic. În plus, $\det(s(t))' = \det(A) \neq 0$ ceea ce încheie demonstrația.

Exercițiul 7.3.5. Să se arate că grupul $O(n)$ al matricelor ortogonale e subvarietate compactă de dimensiune $n(n - 1)/2$ a varietății tuturor matricelor.

Cu cele de mai sus, vedem că $\text{SL}(n)$ și $O(n)$ sînt grupuri Lie, chiar subgrupuri Lie ale lui $\text{GL}(n)$. În general, este o problemă dificilă de decis dacă un grup Lie este *subgrup Lie* al altuia (adică structura de varietate e cea indusă). Funcționează următoarea teoremă:

Teorema 7.3.6. (Cartan). *Un subgrup care e mulțime închisă într-un grup Lie are o unică structură de subgrup Lie.*

Exercițiul 7.3.7. Dați exemplul de aplicații diferențiabile $f : M \rightarrow N$ și valori critice $y \in N$ ale căror preimagini sînt, totuși, subvarietăți.

Exercițiul 7.3.8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$. Să se determine punctele $A \in \mathbb{R}^2$ pentru care $f^{-1}(f(A))$ e subvarietate a lui \mathbb{R}^2 .

Exercițiul 7.3.9. 1) Fie q o formă pătratică de rang maxim pe \mathbb{R}^4 și $p : \mathbb{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ proiecția canonică. Să se arate că $p(q^{-1}(0))$ e o subvarietate a lui $P^3 \mathbb{R}$, eventual vidă.

2) Dacă q are signatura $(1, 3)$ sau $(3, 1)$ atunci această subvarietate e difeomorfă cu S^2 ; iar dacă q are signatura $(2, 2)$, subvarietatea e difeomorfă cu $P^1 \mathbb{R} \times P^1 \mathbb{R}$, i.e. cu $S^1 \times S^1$.

Indicație: 2) Alegând convenabil baza lui \mathbb{R}^4 , quadrica Q de semnătură $(1,3)$ sau $(3,1)$ este mulțimea punctelor ale căror coordonate omogene verifică

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

Deci ultima coordonată a oricărui punct al quadricii trebuie să fie nenulă. Înseamnă că Q e inclusă în deschisul de coordonate U_4 , difeomorf cu \mathbb{R}^3 prin aplicația

$$[x, y, z, t] \mapsto \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right).$$

E clar că prin această aplicație imaginea quadricii este S^2 . În al doilea caz ecuația quadricii în coordonate omogene devine

$$x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$$

care, după o schimbare de coordonate, se mai poate scrie

$$XY - ZT = 0.$$

Acum putem defini aplicația $f = (f_1, f_2) : Q \rightarrow P^1\mathbb{R} \times P^1\mathbb{R}$ prin

$$f_1((X : Y : Z : T)) = \begin{cases} (X : Z), & \text{pentru } (X, Z) \neq (0, 0) \\ (T : Y), & \text{pentru } (T, Y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$f_2((X : Y : Z : T)) = \begin{cases} (X : T), & \text{pentru } (X, T) \neq (0, 0) \\ (Z : Y), & \text{pentru } (Z, Y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Aplicația e bine definită deoarece $X/Z = T/Y$ și $X/T = Z/Y$.

Exercițiul 7.3.10. Fie $PC[Z]$ un polinom cu coeficienți complecși identificând \mathbb{C} cu \mathbb{R}^2 , putem vedea P ca o aplicație diferențiabilă de la \mathbb{R}^2 la \mathbb{R}^2 . Să se arate că $z \in \mathbb{C}$ e punct critic pentru P dacă și numai dacă $P'(z) = 0$.

Exercițiul 7.3.11. Fie $N \subset M$ o subvarietate și $c : (a, b) \rightarrow N$ o curbă diferențiabilă. Să se arate că $c'(t)$ poate să nu fie tangent în fiecare punct la subvarietate.

În cazul în care $m = \dim M \geq \dim N = n$, o aplicație $f : M \rightarrow N$ cu $\text{rg } f = \dim M$ se numește submersie. Tot din teorema rangului se obține:

Corolarul 7.3.12. Fie $f : M \rightarrow N$ o submersie. Pentru orice $x \in M$ există o hartă (U, φ) în jurul lui x și o hartă (V, ψ) în jurul lui $f(x)$ astfel că expresia locală a lui f este:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

Altfel spus: local, o submersie se comportă ca proiecția canonică a lui \mathbb{R}^m pe primele n coordonate.

Exercițiul 7.3.13. 1) Folosind forma locală a unei submersii deduceți că o submersie e aplicație deschisă.

2) Dacă $m = n$, atunci mulțimea $f^{-1}(y)$, $y \in N$ (numită fibră) e discretă.

3) Sînt aplicațiile de acoperire studiate în paragraful 3.3 submersii?

4. Teorema de scufundare a lui Whitney

Încheiem acest paragraf cu prezentarea unor rezultate generale de scufundare a varietăților compacte în spații euclidiene. Cu precizarea că acestea se pot extinde (nu ușor!) și la cazul necompact, rezultă că, principial, ar fi de ajuns studiul subvarietăților spațiilor euclidiene. Din păcate, așa cum vom vedea, codimensiunea scufundării poate fi foarte mare, ceea ce reduce drastic aplicabilitatea practică a unor asemenea rezultate. Importanța lor conceptuală este, însă, considerabilă.

Teorema 7.4.1. *Orice varietate compactă se scufundă într-un spațiu vectorial.*

Demonstrație. Vom folosi aici rezultatele demonstrate în paragraful 3.2.2 consacrat partiției unității. Fie $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $1 \leq i \leq N$ un atlas finit pe varietatea compactă M . Fie V_i o acoperire a lui M cu $\overline{V}_i \subset U_i$, fie f_i o funcție test cu suportul în U_i și $f_i|_{V_i} = 1$ pentru orice i . Atunci funcția $f_i \varphi_i$, prelungită cu 0 în afara lui U_i furnizează o funcție diferentiabilă $M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$. Punem acum

$$F = (f_1 \varphi_1, \dots, f_N \varphi_N, f_1, \dots, f_N).$$

E clar că $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{N(m+1)}$ e netedă. Este, de asemenea, imersie: cum fiecare $x \in M$ stă într-un V_i , al i -lea bloc al lui $d_x F$ este egal cu $d_x \varphi_i$ care e bijecție deoarece aplicațiile de hartă sînt difeomorfisme locale. Pentru a vedea că F e injectivă, presupunem $F(x) = F(y)$. Atunci, pentru orice i , $f_i(x) = f_i(y)$. Există un i_0 astfel încît $f_{i_0}(x) \neq 0$ (pentru că V_i -urile acoperă M). Atunci $x, y \in U_{i_0}$ și $f_{i_0}(x) \varphi_{i_0}(x) = f_{i_0}(y) \varphi_{i_0}(y)$ de unde $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(y)$, deci $x = y$. Propoziția 7.1.2 încheie demonstrația. ■

Schițăm acum demonstrația pentru:

Corolarul 7.4.2. (Whitney, forma „ușoară“) *Orice varietate compactă n -dimensională se imersează în \mathbb{R}^{2n} și se scufundă în \mathbb{R}^{2n+1} .*

Demonstrație. (după [GP].) Plecăm cu scufundarea F a lui M în \mathbb{R}^N găsită în Propoziția anterioară. Pe aceasta o vom compune cu o proiecție ortogonală p_ν de-a lungul unei direcții convenabile ν din \mathbb{R}^N astfel încît proiecția compusă cu F să fie încă imersie (chiar injectivă dacă vrem să obținem o scufundare). În cazul favorabil, am găsit o imersie (sau scufundare) în $\nu^\perp \equiv \mathbb{R}^{N-1}$. Apoi iterăm procedeul atîta vreme cît putem găsi proiecția necesară.

Considerăm un produs scalar euclidian oarecare pe \mathbb{R}^N . Pentru orice vector unitar $\nu \in S^{N-1}$, fie p_ν proiecția ortogonală pe ν^\perp . Restricția lui p_ν la $F(M)$ e injectivă dacă și numai dacă pentru orice $x \neq y$ din $F(M)$

$$x - y \neq t\nu, \text{ oricare ar fi } t \in \mathbb{R} \quad (\text{verificați!}).$$

Cum alegem ν ? Să presupunem că $p_\nu \circ F$ nu e imersie. Atunci există $x \in M$ și $w \in T_x M$ astfel încît $d_x(p_\nu \circ F)(w) = 0$. Cum p_ν e aplicație lineară, aplicînd regula lanțului rezultă $p_\nu \circ d_x F(w) = 0$. Cu cele de mai sus, rezultă că $d_x F(w) = t\nu$, pentru un $t \in \mathbb{R}$. Dar F e imersie, deci $d_x F(w) \neq 0$, așa că $t \neq 0$. Ca acest lucru să nu se întîmple, ν trebuie ales în așa fel ca ecuația $d_x F(w) = t\nu$ să nu aibă o soluție (x, w) cu $w \neq 0$. Altfel spus, trebuie ca aplicația $g : TM \rightarrow \mathbb{R}^N$ prin $g(x, w) = d_x F(w)$ să nu îl aibă pe ν în imagine (în caz contrar, $g(x, \frac{1}{t}\nu) = d_x F(\frac{1}{t}\nu) = \frac{1}{t} d_x F(w) = \nu$). Dar, atîta timp cît $\dim \mathbb{R}^N = N \geq 2n = \dim TM$, Teorema lui Sard ne asigură că mulțimea valorilor care nu sînt regulate pentru g e de măsură nulă, deci există $\nu \in \mathbb{R}^N$ valoare regulată pentru g . Cum f e imersie, singura posibilitate ca ν să fie valoare regulată e să nu se afle în imaginea lui g .

În concluzie, dacă alegem ν valoare regulată a lui g , atunci $p_\nu \circ F$ e încă imersie și acest lucru e posibil dacă $2n \leq N$.

La fel, ca $p_\nu \circ F$ să fie injectivă, trebuie ca din $p_\nu \circ F(x) = p_\nu \circ F(y)$ să rezulte $x = y$. Dar

$$p_\nu \circ F(x) = p_\nu \circ F(y) \Rightarrow F(x) - F(y) = t\nu, t \in \mathbb{R}.$$

Cum F e injectivă, dacă $t \neq 0$, rezultă $x \neq y$. Din nou, ca acest lucru să nu fie posibil, e suficient ca aplicația diferențiabilă $h : M \times M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ prin $h(x, y, t) = t(F(x) - F(y))$ să nu-l aibă pe v în imagine (altfel, $h(x, y, \frac{1}{t}) = v$). Ca mai sus, deoarece $\dim(M \times M \times \mathbb{R}) = 2n + 1 \leq N = \dim \mathbb{R}^N$, Teorema lui Sard ne asigură că putem găsi un astfel de $v \in \mathbb{R}^N$. ■

CAPITOLUL 8

Câmpuri vectoriale și tensoriale

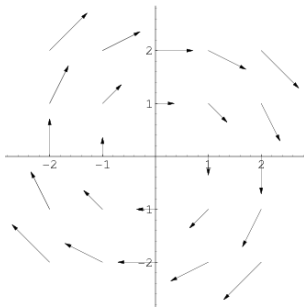
1. Câmpuri vectoriale. Croșetul a două câmpuri

Generalizăm acum Definiția 2.7 la cazul varietăților diferențiabile.

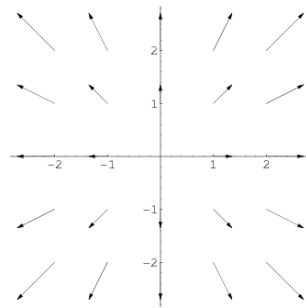
Definiția 8.1.1. i) Un *câmp vectorial* diferențiabil pe deschisul $U \subset M$ este o aplicație diferențiabilă $X : U \rightarrow TM$ astfel încât $\pi \circ X = \text{Id}_U$. Vom nota X_x vectorul tangent valoare a câmpului X în punctul x .

ii) Un *câmp vectorial de-a lungul curbei* $c : [a, b] \rightarrow M$ este o aplicație diferențiabilă $X : [a, b] \rightarrow TM$ astfel încât $\pi \circ X = c$.

Exemplul 8.1.2. Schițăm două câmpuri vectoriale pe \mathbb{R}^2 :



$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$$



$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Deocamdată vom lucra mai mult cu câmpuri vectoriale definite pe deschiși sau chiar pe întreg M . E de remarcat că se pot defini și câmpuri vectoriale pe mulțimi închise din M (un asemenea caz avem în punctul ii) al definiției). Folosind partiția unității se poate arăta:

Propoziția 8.1.3. Orice câmp definit pe un închis se poate prelungi (nu unic!) la un câmp pe M . În particular, fixat $v \in T_x M$, există un câmp X astfel ca $X_x = v$.

Nu vom da aici demonstrația propoziției pentru că ea nu e decât un caz particular al unui enunț mai general despre secțiunile fibrărilor vectoriale; acesta va apărea în capitolul următor. Vom nota $\mathcal{X}(U)$, respectiv $\mathcal{X}(M)$ mulțimea câmpurilor diferențiabile pe U , respectiv M . Ținând seamă de felul cum am construit structura diferențiabilă a fibratului tangent, deducem că un câmp vectorial e diferențiabil pe U dacă și numai dacă pentru orice $x \in U$ există o hartă (V, φ) în jurul lui x și funcțiile diferențiabile

$X^1, \dots, X^m \in \mathcal{C}^\infty(V)$ astfel încît

$$X|_{U \cap V} = X^i|_{U \cap V} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Cum, pe de altă parte, vectorii tangenți acționează în mod natural asupra funcțiilor \mathcal{C}^∞ , obținem următoarea acțiune a cîmpurilor vectoriale asupra funcțiilor: pentru $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ și $X \in \mathcal{X}(U)$:

$$X(f) \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad \text{dată prin } X(f)(x) = X_x(f).$$

Cititorul va verifica singur că această ultimă proprietate poate fi luată, la rîndul ei, drept definiție a unui cîmp vectorial.

Exercițiul 8.1.4. Considerăm o varietate M descrisă ca $f^{-1}(0)$ pentru o funcție diferențiabilă $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Arătați că un cîmp vectorial X pe \mathbb{R}^n e tangent în x la M dacă și numai dacă $X_x(f) = 0$. Aplicație pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ și $X = (x-1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}$.

Propoziția 8.1.5. *Înzestrată cu operațiile naturale (adunare și înmulțire cu funcții diferențiabile), $\mathcal{X}(U)$ are structură de $\mathcal{C}^\infty(U)$ - modul.*

Demonstrația, imediată, rezultă din definiție și din proprietățile vectorilor tangenți. De exemplu, suma $X + Y$ se definește prin acțiunea sa asupra funcțiilor ca $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ etc.

Pe modulul $\mathcal{X}(U)$ se definește o înmulțire specifică, numită *croșet* (unele texte adoptă denumirea de *paranteză Poisson* sau *paranteză Lie* – a doua este cea corectă). Croșetul se notează $[X, Y]$ și se definește prin:

$$(8.1) \quad [X, Y]_x(f) = X_x(Y(f)) - Y_x(X(f)), \quad x \in U, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Cititorul se va convinge singur că formula anterioară definește un cîmp vectorial.

Observația 8.1.6. Croșetul are un caracter local: dacă $V \subset U$ e un deschis, atunci $[X|_V, Y|_V] = [X, Y]|_V$.

Vom vedea deocamdată proprietățile formale ale croșetului, amîinînd pentru mai tîrziu interpretarea geometrică.

E ușor de văzut că, înzestrat cu adunarea și cu croșetul pe post de înmulțire, $\mathcal{X}(U)$ capătă structură de algebră anticomutativă, deoarece, conform definiției, are loc: $[X, Y] + [Y, X] = 0$. Mai mult, algebra nu e nici asociativă, proprietate înlocuită de următoarea identitate care se demonstrează prin calcul direct, (simplu, dar trebuie făcut măcar o dată!):

Propoziția 8.1.7. *Croșetul satisface identitatea lui Jacobi:*

$$(8.2) \quad [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

Definiția 8.1.8. O algebră reală a cărei înmulțire este anticomutativă și satisface identitatea lui Jacobi se numește *algebră Lie*. Înmulțirea unei algebre Lie se mai numește *croșet*.

Exercițiul 8.1.9. Verificați că următoarele mulțimi, cu operațiile indicate, sînt algebre Lie:

1) Orice spațiu vectorial cu înmulțirea banală: $[v, w] = 0$. O asemenea algebră Lie se numește abeliană.

2) Spațiul vectorial $\mathfrak{gl}(n)$ al tuturor matricelor reale $n \times n$ cu croșetul (se mai numește *comutator*) $[A, B] = AB - BA$.

3) \mathbb{R}^3 cu produsul vectorial pe post de înmulțire.

Expresia locală a croșetului. Să vedem acum care este expresia locală a croșetului. Fie $X = X^i \partial / \partial x^i$, $Y = Y^j \partial / \partial x^j$. Atunci pentru orice f diferentiabilă pe respectivul domeniu de coordonate avem:

$$\begin{aligned} [X, Y]_x(f) &= X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) - Y^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x (X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) = \\ &= X^i(x) \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \Big|_x \frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_x \right) - \\ &= Y^j(x) \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \Big|_x \frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_x \right). \end{aligned}$$

Punînd aici, în locul lui f , funcția coordonată x^k găsim:

$$[X, Y]_x^k = X^i(x) \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \Big|_x - Y^j(x) \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \Big|_x,$$

deci avem:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Particularizînd aici $X = \partial / \partial x^i$, $Y = \partial / \partial x^j$, obținem imediat:

Corolarul 8.1.10. Orice două cîmpuri din baza canonică au croșetul nul:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Observația 8.1.11. Se vede astfel că orice două cîmpuri elementare satisfac regula de comutare a derivatelor parțiale prezisă de Teorema lui Hermann Schwarz, iar croșetul a două cîmpuri arbitrare măsoară abaterea lor, privite ca „derivări parțiale”, pe direcții diferite, de la această Teoremă.

În fine, următoarea relație va fi utilă:

Exercițiul 8.1.12. Pentru orice $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ și $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ avem:

$$(8.3) \quad [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Exercițiul 8.1.13. Pe \mathbb{R}^3 se dau cîmpurile vectoriale:

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

1) Să se arate că cele trei cîmpuri sînt linear independente peste \mathbb{R} . Fie E spațiul vectorial real generat de ele. Să se arate că E e închis la croșet.

2) Fie $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ dată prin:

$$\varphi(aX + bY + cZ) = (a, b, c).$$

Să se arate că φ e izomorfism și

$$\varphi([V, W]) = \varphi(V) \times \varphi(W),$$

unde \times notează produsul vectorial din \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 8.1.14. Să se arate că $[X, Y] = 0$ pentru orice Y dacă și numai dacă $X = 0$.

Exercițiul 8.1.15. Fie A o matrice pătrată $n \times n$, cu elemente reale. Ea determină cîmpul vectorial (linear) \mathcal{A} pe \mathbb{R}^n prin $\mathcal{A}_x = A \cdot x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Arătați că $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_x = -(AB - BA) \cdot x$ (croșetul a două cîmpuri lineare e opusul comutatorului matricelor care definesc cîmpurile).

Exercițiul 8.1.16. Determinați $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ care satisface ecuațiile: $[\frac{\partial}{\partial x}, X] = X$ și $[\frac{\partial}{\partial y}, X] = X$.

O interpretare geometrică a croșetului. Fie P un punct dintr-o vecinătate U cu coordonate (x^i) și cîmpurile $X = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $Y = b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ pe U . Fie $t \mapsto x^i(t)$ curba integrală a lui X prin P , astfel încît P corespunde lui $x^i(0)$. Orice alt punct Q de pe curba integrală considerată, suficient de aproape de P , va avea coordonatele legate de cele ale lui P în felul următor:

$$y^i = x^i(t) = x^i(0) + t a^i(x) + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} a^j + \dots,$$

unde am neglijat termenii de ordin superior lui 2. Pentru simplitate, vom scrie formula de mai sus sub forma:

$$y = x + t a(x) + t^2 \frac{a'a}{2}.$$

Imaginăm trecerea de la P la Q ca o deplasare de-a lungul curbei integrale a lui X prin P (altfel spus, în direcția cîmpului X). Din Q , ne deplasăm într-un alt punct apropiat, R , dar pe direcția lui Y , adică pe curba integrală a lui Y prin Q , parametrizată cu parametrul s (nu e nici un motiv ca cele două curbe integrale să fie parametrizate la fel). Ca mai sus, coordonatele lui R vor fi:

$$z = y + s b(y) + s^2 \frac{b'b}{2}.$$

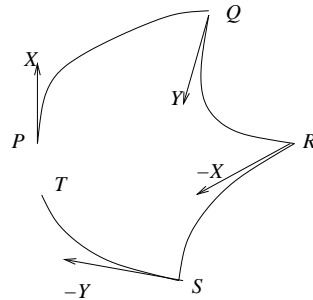
Acum ne întoarcem: mergem din R pe curba integrală a lui $-X$ prin R (care e aceeași cu cea a lui X , dar parcursă invers), parametrizată tot cu t , pînă în S care va avea coordonatele:

$$w = z - t a(z) + t^2 \frac{a'a}{2}.$$

De aici ne deplasăm pe curba integrală a lui $-Y$ prin S pînă în T care va avea coordonatele:

$$u = w - s b(y) + s^2 \frac{b'b}{2}.$$

Întrebarea e dacă T coincide cu P , punctul de plecare, adică dacă paralelogramul infinitesimal se închide sau nu. Pentru a răspunde, trebuie să calculăm coordonatele u în funcție de cele ale lui P . Avem (*atenție*: cînd vom scrie, de exemplu, $b(w)$ vom considera doar cantitățile pînă la ordinul al doilea, adică vom scrie $b(z - t a(z))$):



$$u = w - s b(y) + s^2 \frac{b'b}{2} = z - t a(z) + t^2 \frac{a'a}{2} - s b(z - t a(z)) + s^2 \frac{b'b}{2}.$$

Dezvoltăm în serie Taylor (ca funcție de t) $b(z - ta(z))$ și luăm numai termenii de pînă la ordinul întâi:

$$b(z - ta(z)) = b(z) - tb'(z)a(z) + \dots$$

Înlocuim mai sus și, reluînd de încă două ori procedeul, găsim:

$$\begin{aligned} u &= z - ta(z) + t^2 \frac{a'a}{2} - sb(z) + stb'a + s^2 \frac{b'b}{2} \\ &= y + sb(y) + s^2 \frac{b'b}{2} - ta(y + sb) + t^2 \frac{a'a}{2} - sb(y + sb) + stb'a + s^2 \frac{b'b}{2} \\ &= y - ta(y) - tsa'b + t^2 \frac{a'a}{2} + stb'a \\ &= x + ta + t^2 \frac{a'a}{2} - ta(x + ta) - tsa'b + t^2 \frac{a'a}{2} + stb'a \\ &= x - tsa'b + stb'a. \end{aligned}$$

Revenind la notațiile complete, am arătat că punctul T are coordonatele:

$$u^i = x^i + st \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^j} a^j - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} b^j \right).$$

Recunoaștem în coeficientul lui st componentele locale ale croșetului $[X, Y]$, deci T se află pe curba integrală a cîmpului $[X, Y]$ prin P . Altfel spus, croșetul $[X, Y]$ reprezintă obstrucția la închiderea paralelogramului infinitesimal $PQRT$.

Acțiunea unei aplicații diferențiabile asupra unui cîmp vectorial. Fie acum $f : M \rightarrow N$ o aplicație diferențiabilă. La sfîrșitul paragrafului trecut am definit diferențiala $f_* = df : TM \rightarrow TN$. Este normal să ne întrebăm dacă df nu induce și o acțiune între algebrele Lie ale cîmpurilor de vectori pe M , respectiv N . Cum am putea proceda? Dacă $X \in \mathcal{X}(M)$ și $y \in N$, ar fi natural să punem

$$(8.4) \quad df(X)_y = d_{f^{-1}(y)} f X_{f^{-1}(y)}.$$

Dar o asemenea definiție are sens numai dacă f e difeomorfism. Deci, un difeomorfism induce, într-adevăr o acțiune asupra cîmpurilor de vectori prin formula (8.4). Ținînd seama că un cîmp vectorial acționează asupra funcțiilor, din (8.4) obținem:

$$df(X)(\varphi)(y) = X_{f^{-1}(y)}(\varphi \circ f) = X(\varphi \circ f)(f^{-1}(y)),$$

sau încă, renunțînd la argumentul y :

$$(8.5) \quad df(X)(\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f).$$

În general, atunci cînd f nu e un difeomorfism, avem următoarea noțiune:

Definiția 8.1.17. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație diferențiabilă. Cîmpurile $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$ se numesc f -corelate dacă diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & TM & \xrightarrow{df} & TN \\
 X \uparrow & & & \uparrow Y \\
 & M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

e comutativă.

Observația 8.1.18. Dacă f e difeomorfism, atunci X și $df(X)$ sînt f -corelate.

Exercițiul 8.1.19. (i) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Arătați că $d/dt \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ e f -corelat cu $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$.

(ii) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Arătați că $t \frac{d}{dt}$ nu e f -corelat cu nici un cîmp pe S^1 .

Propoziția 8.1.20. $f: M \rightarrow M'$ o aplicație diferențiabilă, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $X', Y' \in \mathcal{X}(M')$. Dacă X e f -corelat cu X' și Y e f -corelat cu Y' atunci $[X, Y]$ e f -corelat cu $[X', Y']$.

Demonstrație. Vom arăta că $df \circ [X, Y] = [X', Y'] \circ f$. Este o egalitate de cîmpuri vectoriale pe M' , deci, pentru a o proba trebuie văzut că cei doi membri acționează la fel pe funcții din $\mathcal{C}^\infty(M')$. Fie, deci, $x \in M$ și $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M')$. Trebuie demonstrat că

$$df([X, Y])(\varphi) = [X', Y'](\varphi)$$

adică, pentru orice $x \in M$:

$$d_x f([X, Y]_x)(\varphi) = [X', Y']_{f(x)}(\varphi).$$

Nu trebuie decît să aplicăm definițiile:

$$\begin{aligned}
 d_x f([X, Y]_x)(\varphi) &= [X, Y]_x(\varphi \circ f) \\
 &= X_x(Y(\varphi \circ f)) - Y_x(X(\varphi \circ f)) \\
 &= X_x((df \circ Y)(\varphi)) - Y_x((df \circ X)(\varphi)) \\
 &= X_x(Y'(\varphi) \circ f) - Y_x(X'(\varphi) \circ f) \\
 &= df(X_x)(Y'(\varphi)) - df(Y_x)(X'(\varphi)) \\
 &= X'_{f(x)}(Y'(\varphi)) - Y'_{f(x)}(X'(\varphi)) \\
 &= [X', Y']_{f(x)}(\varphi).
 \end{aligned}$$

■

2. Cîmpuri invariante pe grupuri Lie. Algebra Lie a unui grup Lie.

Date un difeomorfism f și un cîmp vectorial X pe o varietate M , putem fabrica imediat cîmpul dfX , definit prin $dfX(x) = d_{f^{-1}(x)} f X_{f^{-1}(x)}$. Dacă acesta coincide cu X , adică $dfX = X$, atunci spunem că X este *invariant față de f* . Nu e obligatoriu ca asemenea cîmpuri să existe pe orice varietate. Dar pe grupuri Lie ele există din belșug și pot fi construite cu ajutorul translațiilor stîngi sau drepte.

Definiția 8.2.1. Un cîmp vectorial pe grupul Lie G se numește *sîng invariant* dacă pentru orice $a, b \in G$ are loc egalitatea

$$d_a L_b X_a = X_{ba}.$$

Asemănător se definesc cîmpurile *drept invariante*.

Se vede din definiție că orice cîmp sîng sîng invariant e L_b -corelat cu el însuși, pentru orice $b \in G$. Atunci, din Propoziția 8.1.20, croșetul $[X, Y]$ a două cîmpuri sîng invariante e L_b corelat cu el însuși:

Propoziția 8.2.2. *Croșetul a două cîmpuri sîng (respectiv drept) invariante este un cîmp sîng (respectiv drept) invariant.*

Corolarul 8.2.3. *Mulțimea $L(G)$ (respectiv $R(G)$) a cîmpurilor sîng (respectiv drept) invariante pe un grup Lie G este o subalgebră Lie reală a lui $\mathcal{X}(G)$.*

Exercițiul 8.2.4. Arătați că $L(G)$ și $R(G)$ sînt izomorfe ca algebre Lie.

Definiția 8.2.5. $L(G)$ se numește *algebra Lie a grupului G* și se mai notează cu \mathfrak{g} .

Această structură de algebră Lie poate fi transportată pe spațiul tangent în origine T_eG . Iată cum: plecînd cu un vector $\xi \in T_eG$, putem defini un cîmp sîng invariant prin formula $X_a^\xi = d_e L_a(\xi)$. Reciproc, dacă $X \in L(G)$, atunci îi asociem vectorul $X_e \in T_eG$. E ușor de văzut că cele două asocieri sînt reciproce, deci T_eG și $L(G)$ sînt în bijecție. Corespondența aceasta e clar izomorfism de spații vectoriale reale. Cu ajutorul ei definim acum o multiplicare de algebră Lie pe T_eG prin

$$[\xi, \eta] = [X^\xi, X^\eta]_e, \quad \xi, \eta \in T_eG.$$

De acum încolo, cînd vorbim de algebra Lie a unui grup Lie, ne referim, fără distincție, la $L(G)$ sau la T_eG cu structura tocmai descrisă.

Exercițiul 8.2.6. Construcția anterioară se poate reface pentru translațiile drepte, obținîndu-se un alt croșet pe T_eG , notat $[\xi, \eta]^R$. Arătați că $[\xi, \eta]^R = -[\xi, \eta]$.

Exemplul 8.2.7. Algebra Lie a lui $GL(n)$ este $\mathfrak{gl}(n)$, algebra tuturor matricelor pătrate $n \times n$ cu croșetul $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$. Într-adevăr, ca spațiu vectorial, $\mathfrak{gl}(n)$ este izomorf cu \mathbb{R}^{n^2} ; cum $GL(n)$ este deschis în $\mathfrak{gl}(n)$, este clar că $L(GL(n)) \cong T_eGL(n) \cong \mathfrak{gl}(n)$ ca spații vectoriale. Rămîne să identificăm croșetul de algebră Lie. Fie $\xi \in L(GL(n))$. Îi atașăm un cîmp pe $GL(n)$ prin $X_A^\xi = A\xi$ (simplă înmulțire de matrice). Ținînd seamă că translațiile sîngi pe $GL(n)$ acționează tot prin înmulțire de matrice, $L_AB = AB$ și sînt, în particular, lineare (deci coincid cu diferențialele lor), avem

$$(d_A L_B)X_A^\xi = BX_A^\xi = BA\xi = X_{BA}^\xi.$$

deci X^ξ e sîng invariant.

Acum vom face un calcul local. Fie x_{ij} coordonatele pe $GL(n, \mathbb{R})$, adică $x_{ij}(A) = a_{ij}$, unde $A = (a_{ij})$. În plus, datorită identificării $\mathfrak{gl}(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, componentele locale ale unui vector tangent $\xi \in T_{I_n}GL(n)$ sînt chiar componentele matricei (ξ_{ij}) , adică $\xi(x_{ij}) = \xi_{ij}$. Atunci

$$[X^\xi, X^\eta](x_{ij})(A) = X_A^\xi(X^\eta(x_{ij})) - X_A^\eta(X^\xi(x_{ij})).$$

Pe de altă parte,

$$X^\xi(x_{ij})(A) = X_A^\xi(x_{ij}) = d_{I_n} L_A(\xi)(x_{ij}) = \xi(x_{ij} \circ L_A)$$

și

$$x_{ij} \circ L_A(B) = x_{ij}(AB) = \sum_k x_{ik}(A)x_{kj}(B), \quad \text{pentru orice } B \in GL(n, \mathbb{R}),$$

deci

$$x_{ij} \circ L_A = \sum_k x_{ik}(A)x_{kj},$$

astfel că

$$X^\xi(x_{ij})(A) = \sum_k x_{ik}(A)\xi(x_{kj}) = \sum_k x_{ik}(A)\xi_{kj} \text{ deci } X^\xi(x_{ij}) = \sum_k x_{ik}\xi_{kj}.$$

Rezultă

$$[X^\xi, X^\eta](x_{ij})(A) = X_A^\xi \left(\sum_k x_{ik}\eta_{kj} \right) - X_A^\eta \left(\sum_k x_{ik}\xi_{kj} \right) = \sum_k \left(X_A^\xi(x_{ik})\eta_{kj} - X_A^\eta(x_{ik})\xi_{kj} \right),$$

deci, în $A = I_n$, obținem

$$[X^\xi, X^\eta]_{I_n}(x_{ij}) = \sum_k (\xi_{ik}\eta_{kj} - \eta_{ik}\xi_{kj}) = x_{ij}(\xi\eta - \eta\xi) = [\xi, \eta]_{ij},$$

și croșetul de algebră Lie pe $L(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ coincide cu comutatorul obișnuit de matrice.

Observația 8.2.8. Dacă G e grupul aditiv subiacent unui spațiu vectorial real V , atunci $T_e V$ se identifică cu V și orice cîmp sîng invariant X^ν , $\nu \in V = T_e V$ e constant, adică $X_\mu^\nu = \nu$. Atunci croșetul de algebră Lie devine trivial (cîmpurile constante au derivată nulă): $[u, v] = 0$ pentru orice $u, v \in V$. În particular, acest lucru e adevărat pentru $(\mathbb{R}^n, +)$.

Exercițiul 8.2.9. O algebră Lie în care croșetul oricăror două elemente e nul se numește *abeliană*. Am văzut că algebra Lie a grupului abelian $(V, +)$ e abeliană. E adevărat, în general, că algebra Lie a unui grup Lie abelian e abeliană?

3. Grupul local cu un parametru asociat unui cîmp vectorial

În capitolul al II-lea, după Definiția 2.7, am explicat care e legătura dintre cîmpuri vectoriale (în \mathbb{R}^2) și ecuații diferențiale, prin intermediul noțiunii de curbă integrală. Reluăm acum această discuție, întregind-o.

Definiția 8.3.1. Fie X un cîmp vectorial pe M . Curba netedă $\sigma : I \rightarrow M$ e *curbă integrală* pentru X dacă

$$(8.6) \quad \sigma'(t) = X_{\sigma(t)}, \quad t \in I.$$

Ne aducem aminte că, prin definiție,

$$\sigma'(t) = d\sigma \left(\frac{d}{ds} \Big|_t \right).$$

Astfel că, fixînd un sistem de coordonate $(U; x^1, \dots, x^m)$ în jurul lui $x \in M$, presupunînd că $0 \in I$ și $\sigma(0) = x$, că $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, condiția (8.6) devine:

$$\frac{d(x^i \circ \sigma)}{ds} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\sigma(t)} = X^i(\sigma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\sigma(t)}.$$

Deci σ e curbă integrală a lui X dacă și numai dacă e satisfăcut sistemul de ecuații diferențiale ordinare:

$$(8.7) \quad \frac{d\sigma^i}{dt} = X^i(\sigma(t)), \quad i = 1, \dots, m, t \in \sigma^{-1}(U),$$

unde $\sigma^i = x^i \circ \sigma$. Pentru a merge mai departe avem nevoie de transcrierea în limbajul varietăților a unor rezultate de ecuații diferențiale, aplicabile sistemului de mai sus. Le vom grupa în două teoreme ale căror demonstrații le vom schița numai (cf. [Wa]).

Teorema 8.3.2. *Fie X câmp diferențiabil pe varietatea M . Pentru orice $x \in M$ există $a(x), b(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ și curba netedă*

$$\sigma_x : (a(x), b(x)) \rightarrow M$$

astfel încît :

- 1) $0 \in (a(x), b(x))$ și $\sigma_x(0) = x$.
- 2) σ_x e curbă integrală a lui X .
- 3) Dacă $\gamma : (c, d) \rightarrow M$ e o altă curbă care satisface proprietățile 1), 2), atunci $(c, d) \subset (a(x), b(x))$ și $\gamma = \sigma|_{(c,d)}$.

Demonstrația este doar o aplicație directă a teoremei de existență și unicitate pentru sistemul de ecuații (8.7) ($\sigma(0) = x$ reprezintă condiția inițială care transformă sistemul într-o problemă Cauchy), a existenței intervalului maximal de definiție etc. (cf [Mi]). Înainte de a continua, avem nevoie de următoarea noțiune fundamentală

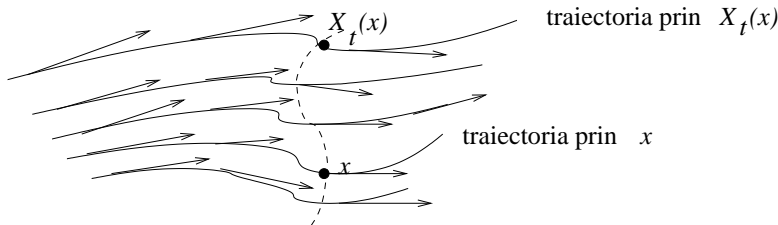
Definiția 8.3.3. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ fie

$$\mathcal{D}_t = \{x \in M \mid t \in (a(x), b(x))\}$$

și aplicația X_t definită pe \mathcal{D}_t prin:

$$X_t(x) = \sigma_x(t).$$

X_t se numește *curentul local* sau *fluxul* lui X ¹.



Exercițiul 8.3.4. 1) Să se calculeze fluxul câmpului $aX + bY + cZ$ din Exercițiul 8.1.13.

2) Să se calculeze fluxul unui câmp fundamental local $\partial/\partial x^i$.

3) Calculați fluxul câmpurilor din Exemplul 8.1.2.

4) Calculați fluxul câmpului $X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$ pe \mathbb{R}^2 .

Proprietățile curentului local sînt cuprinse în :

Teorema 8.3.5.

1) Pentru orice $x \in M$ există o vecinătate deschisă V și un $\varepsilon > 0$ astfel încît aplicația $(t, y) \mapsto X_t(y)$ e definită și de clasă \mathcal{C}^∞ pe $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ cu valori în M .

2) \mathcal{D}_t e mulțime deschisă pentru orice t .

3) $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$.

4) $X_t : \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$ e difeomorfism, cu inversa X_{-t} .

¹Întotdeauna t, s vor fi parametri reali, iar x, y, z puncte de pe varietate; deci nu este pericol de confuzie între X_x , valoarea câmpului X în punctul $x \in M$ și X_t , curentul local al lui X .

5) Pentru orice numere reale s, t , domeniul lui $X_s \circ X_t$ e cuprins (în general strict) în \mathcal{D}_{s+t} . Domeniul lui $X_s \circ X_t$ este exact \mathcal{D}_{s+t} dacă s și t au același semn. Mai mult, pe domeniul lui $X_s \circ X_t$ are loc relația:

$$(8.8) \quad X_s \circ X_t = X_{s+t}.$$

Demonstrație. 1) e consecință a teoremei de dependență diferențiabilă a soluției în raport cu condiția inițială. Demonstrăm acum 5). Fie $t \in (a(x), b(x))$. Atunci $s \mapsto \sigma_x(t+s)$ e tot o curbă integrală a lui X , dar cu condiția inițială $\sigma_x(t)$ și cu interval maximal de definiție $(a(x) - t, b(x) - t)$. Teorema 8.3.2, 3) implică egalitatea

$$(a(x) - t, b(x) - t) = (a(\sigma_x(t)), b(\sigma_x(t)))$$

și, pentru orice s în acest interval:

$$(8.9) \quad \sigma_{\sigma_x(t)}(s) = \sigma_x(t+s).$$

Dacă x e în domeniul lui $X_s \circ X_t$, atunci $t \in (a(x), b(x))$ și $s \in (a(\sigma_x(t)), b(\sigma_x(t)))$, astfel că $s+t \in (a(x), b(x))$. În concluzie $x \in \mathcal{D}_{s+t}$ și (8.8) rezultă din (8.9).

Pe de altă parte, pentru cîmpul $X = \partial/\partial x^1$ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se vede ușor (verificați!) că domeniul lui $X_{-1} \circ X_1$ e strict inclus în \mathcal{D}_0 . Dacă, totuși, $st > 0$ și $x \in \mathcal{D}_{s+t}$, adică $s+t \in (a(x), b(x))$, atunci $t \in (a(x), b(x))$ ceea ce implică $s \in (a(\sigma_x(t)), b(\sigma_x(t)))$. Urmează că x stă în domeniul lui $X_s \circ X_t$.

Proprietățile 2) și 4) sînt triviale dacă $t = 0$. Vom presupune $t > 0$, demonstrația fiind identică în cazul $t < 0$. Fie $x \in \mathcal{D}_t$. Din 1) și din compacitatea intervalului $[0, t]$ rezultă existența unei vecinătăți W a lui $\sigma_x([0, t])$ și a unui $\varepsilon > 0$ astfel încît aplicația $(t, y) \mapsto X_t(y)$ e definită și de clasă \mathcal{C}^∞ pe $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$. Acum alegem un $n \in \mathbf{N}$ destul de mare ca $t/n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fie $\alpha_1 = X_{t/n}|_W$, $W_1 = \alpha_1^{-1}(W)$ și, inductiv,

$$\alpha_i = X_{t/n}|_{W_{i-1}}, \quad W_i = \alpha_i^{-1}(W_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n.$$

E clar că α_i e de clasă \mathcal{C}^∞ pe $W_{i-1} \subset W$. Rezultă că W_n e un deschis care îl conține pe x deoarece

$$X_{t/n} \underbrace{\circ \dots \circ}_{n \text{ ori}} X_{t/n}(x) = \sigma_x(t) \in W$$

Mai mult, conform punctului 5),

$$(8.10) \quad \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n|_{W_n} = X_t|_{W_n},$$

astfel că $W_n \subset \mathcal{D}_t$. În concluzie \mathcal{D}_t e deschisă, adică 2).

Cît privește 4), X_t e bijecție între \mathcal{D}_t și \mathcal{D}_{-t} , cu inversa X_{-t} ; și e \mathcal{C}^∞ conform relației (8.10). ■

Definiția 8.3.6. Un cîmp vectorial X se numește *complet* dacă $\mathcal{D}_t = M$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, i.e. domeniul oricărei curbe integrale σ_x este \mathbb{R} .

Pentru un cîmp complet, transformările $\{X_t\}$ care determină curentul local formează un grup (Teorema 8.3.5) parametrizat după \mathbb{R} . De aceea X_t se mai numește, în acest caz, *grupul local uniparametric generat de X* . Dacă X nu e complet, X_t formează un *pseudogrup local uniparametric*. În general avem:

Definiția 8.3.7. O aplicație $\alpha : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ diferențiabilă se numește *grup local uniparametric* pe M dacă:

- i) pentru orice $t \in \mathbb{R}$, aplicația $\alpha_t : M \rightarrow M$, $\alpha_t(x) = \alpha(t, x)$ este difeomorfism;
- ii) Pentru orice $x \in M$, aplicația $\alpha_x : \mathbb{R} \rightarrow M$, $\alpha_x(t) = \alpha(t, x)$ este de clasă \mathcal{C}^∞ și $\alpha_x(0) = x$;
- iii) Pentru orice $s, t \in \mathbb{R}$, $\alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{s+t}$.

Am văzut că orice câmp generează un pseudogrup de transformări cu un parametru. O reciprocă parțială este, de asemenea, adevărată:

Propoziția 8.3.8. *Orice grup uniparametric de transformări ale lui M determină un câmp vectorial pe M . Transformările din pseudogrupul de transformări generate de acesta sînt restricții ale celor din grupul uniparametric de plecare. În particular, există o bijecție între mulțimea grupurilor locale uniparametrice și mulțimea câmpurilor vectoriale complete.*

Demonstrația este simplă. Nu avem decît să definim $X_y = \alpha'_y(0)$ și să aplicăm, din nou, teorema de dependență diferențiabilă a soluției în raport cu condițiile inițiale.

În cazul generic, un câmp vectorial nu e complet. Pentru a ne convinge e suficient să considerăm $X = \partial/\partial x^1$ pe $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$: intervalul maximal de definiție al unei curbe integrale prin $(a, 0)$ este $(-a, \infty)$. În schimb:

Teorema 8.3.9. *Un câmp vectorial cu suport compact e complet.*

Demonstrație. Acoperim $\text{supp } X$ cu deschisii U_1, \dots, U_r astfel încît curentul local X_t să conțină transformările

$$X_t^i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_i \rightarrow M, \quad i = 1, \dots, r$$

Fie $U_0 = M - \text{supp } X$. U_0 e deschisă și $X|_{U_0} = 0$. Îi asociem

$$X_t^0 : \mathbb{R} \times U_0 \rightarrow M, \quad X_t^0(x) = x.$$

Cum $\{U_i\}$ acoperă M și X_t^i concordă pe intersecțiile $U_i \cap U_j$ am obținut un curent local generat de X . Punînd $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_i$ putem obține aplicația

$$(8.11) \quad \Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M$$

care face parte din curentul local. Acum demonstrația va rezulta din:

Lema 8.3.10. *Dacă curentul local conține un element de forma (8.11) cu $\varepsilon > 0$ atunci X e complet.*

Fie $t \in \mathbb{R}$. Alegem $k \in \mathbb{Z}$ și $r \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ astfel încît $t = r + k\varepsilon/2$. Pentru $x \in M$ definim

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} \underbrace{\Phi_{-\varepsilon/2} \circ \dots \circ \Phi_{-\varepsilon/2}}_{k \text{ ori}} \circ \Phi_r(x), & \text{pentru } k < 0 \\ \Phi_r(x), & \text{pentru } k = 0 \\ \underbrace{\Phi_{\varepsilon/2} \circ \dots \circ \Phi_{\varepsilon/2}}_{k \text{ ori}} \circ \Phi_r(x), & \text{pentru } k > 0 \end{cases}$$

Să arătăm că φ_t e bine definită. Presupunem $t > 0$ (cazul $t < 0$ se tratează similar) și

$$r + k\varepsilon/2 = t = s + q\varepsilon/2,$$

cu $r, s \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Rezultă $r - s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, deci $q - k = -1, 0$ sau 1 . Dacă $q - k = 0$, atunci $r = s$ și totul e în regulă. Fie $q - k = 1$ (cazul celălalt e asemănător). Atunci $r - s = \varepsilon/2$, $\Phi_r = \Phi_{\varepsilon/2} \circ \Phi_s$ și

$$\underbrace{\Phi_{\varepsilon/2} \circ \cdots \circ \Phi_{\varepsilon/2}}_{k \text{ ori}} \circ \Phi_r(x) = \underbrace{\Phi_{\varepsilon/2} \circ \cdots \circ \Phi_{\varepsilon/2}}_{k+1=q \text{ ori}} \circ \Phi_s(x).$$

Acum, după ce am văzut că e bine definită, e imediat că $\Phi_t(x)$ e o curbă integrală prin x pentru orice $x \in M$. Aceasta încheie demonstrația. ■

Corolarul 8.3.11. *Pe o varietate compactă orice cîmp vectorial e complet.*

Propoziția 8.3.12. *Fie f un difeomorfism al lui M și $X \in \mathcal{X}(M)$, X_t curentul său local. Atunci curentul local al lui $df(X)$ este $f \circ X_t \circ f^{-1}$.*

Demonstrație. Se verifică întâi că $f \circ X_t \circ f^{-1}$ este un grup local cu un parametru, deci generează un cîmp vectorial. Îi cercetăm curbele integrale. Fie $x \in M$. Deoarece $X_{f^{-1}(x)}$ e tangent la curba $X_t(f^{-1}(x))$ în $f^{-1}(x)$, vectorul

$$(df(X))_x = df_{f^{-1}(x)} X_{f^{-1}(x)}$$

va fi tangent la curba

$$c(t) = f \circ X_t(f^{-1}(x)) = f \circ X_t \circ f^{-1}(x)$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Corolarul 8.3.13. *Pentru orice t pentru care e definit, $dX_t(X) = X$ (pentru că $X_t = X_t X_t X_t^{-1}$).*

Exemplul 8.3.14. Aplicația

$$\Phi(t, (x^1, x^2)) = (x^1 \cos t - x^2 \sin t, x^1 \sin t + x^2 \cos t)$$

definește un curent global pe \mathbb{R}^2 : orbita unui punct (x^1, x^2) este cercul de rază $\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; altfel spus, acest curent e asociat grupului rotațiilor planului. Cîmpul vectorial asociat se obține derivînd coordonatele cîmpului:

$$X^1 = \frac{d}{dt} \Big|_0 (x^1 \cos t - x^2 \sin t) = -x^2,$$

$$X^2 = \frac{d}{dt} \Big|_0 (x^1 \sin t + x^2 \cos t) = x^1.$$

Avem deci $X = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$.

În schimb, cîmpul vectorial $X = (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ produce curentul local

$$\Phi(t, (x^1, x^2)) = \left(\frac{x^1}{1 - tx^1}, \frac{x^2}{1 - tx^1} \right),$$

deci X nu este complet.

Exercițiul 8.3.15. Cum $GL(n)$ e deschis în $\mathcal{M}(n, n)$, avem $TGL(n) = GL(n) \times \mathcal{M}(n, n)$. Definim cîmpul vectorial pe $GL(n)$ prin $A \mapsto (A, A^2)$. Determinați curentul său local.

Exercițiul 8.3.16. Folosiți curentul local al unui cîmp vectorial (pe care trebuie să îl alegeți) ca să demonstrați că pentru orice $r, r' > 0$ și $x, y \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, există un difeomorfism φ al lui \mathbb{R}^n cu proprietățile: $f(x) = y$ și $f(z) = z$ pentru orice z cu $\|z\| \geq r'$.

Trecînd pe varietăți, arătați că orice $x \in M$ admite o vecinătate V cu proprietatea că pentru orice $y \in V$, există un difeomorfism φ al lui M astfel încît $\varphi(x) = y$.

În particular, dacă M e conexă, deduceți că grupul difeomorfismelor lui M acționează tranzitiv pe M .

Mai mult: dacă $\dim M > 1$, atunci pentru orice k și orice $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)$, puncte din M cu $x_i \neq y_i$, există un difeomorfism ψ al lui M astfel încît $\psi(x_i) = y_i$, pentru orice $i = 1, 2, \dots, k$.

4. Subgrupuri cu un parametru ale unui grup Lie. Aplicația exponențială

Am văzut că oricărui cîmp vectorial pe o varietate i se asociază, cel puțin local, un grup cu 1 parametru. Atunci cînd varietatea e un grup Lie și cîmpul e sîng invariant, obținem informații mult mai precise.

Fie, deci, G un grup Lie. Numim *subgrup cu 1 parametru al lui G* orice omomorfism \mathcal{C}^∞ de grupuri $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$. Iată, în continuare, legătura dintre această definiție și cîmpurile sîng invariante. Fie $\xi \in \mathfrak{g}$ și X^ξ cîmpul sîng invariant asociat (prin $X_a^\xi = d_e L_a(\xi)$). Fie $\gamma^\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ curba integrală (unica!) a lui X^ξ prin e : $\gamma^\xi(0) = e$, $(\gamma^\xi)'(t) = X_{\gamma^\xi(t)}^\xi$.

Propoziția 8.4.1. γ^ξ e un subgrup cu un parametru, adică

$$\gamma^\xi(s+t) = \gamma^\xi(s)\gamma^\xi(t).$$

Într-adevăr, ambii membri ai egalității de demonstrat sînt egali cu $\gamma^\xi(s)$ în $t = 0$ și, deoarece X^ξ e sîng invariant, ambii satisfac aceeași ecuație diferențială: $\sigma'(t) = X_{\sigma(t)}^\xi$. Tot datorită invarianței la translații sîngi rezultă și că domeniul lui γ^ξ e \mathbb{R} , în particular: *cîmpurile sîng invariante sînt complete*.

Definiția 8.4.2. *Aplicația exponențială* $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ e definită prin

$$\exp(\xi) = \gamma^\xi(1).$$

Următoarea propoziție rezumă proprietățile aplicației exponențiale:

Propoziția 8.4.3.

- 1) $\exp(t\xi) = \gamma^\xi(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
- 2) $\exp(t_1 + t_2)\xi = \exp(t_1\xi)\exp(t_2\xi)$ pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
- 3) $\exp(-t\xi) = (\exp(t\xi))^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
- 4) Grupul cu un parametru al lui X^ξ se exprimă cu ajutorul translațiilor drepte prin formula $X_t^\xi = R_{\exp(t\xi)}$.

5) *Aplicația exponențială e \mathcal{C}^∞ și diferențiala ei în $0 \in \mathfrak{g}$ este identitatea. În particular, \exp aplică difeomorf o vecinătate a lui $0 \in \mathfrak{g}$ pe o vecinătate a lui $e \in G$.*

Demonstrație. Arătăm întîi că

$$(8.12) \quad \gamma^\xi(ts) = \gamma^{t\xi}(s).$$

Punînd aici $s = 1$ rezultă 1). Pentru a dovedi (8.12), vom arăta că ambii membri ai egalității, văzuți ca funcții de s , sînt curbe integrale ale lui $X^{t\xi}$ prin e , deci, datorită unicității curbei integrale, trebuie să coincidă. Pentru membrul drept nu e nimic de

demonstrat, pentru cel stîng calculăm derivata:

$$d\gamma^\xi \left(t \frac{d}{ds} \Big|_{st} \right) = t X_{\gamma^\xi(st)}^\xi = t d_e L_{\gamma^\xi(st)} \xi = d_e L_{\gamma^\xi(st)}(t\xi) = X_{\gamma^\xi(st)}^{t\xi}.$$

Acum 2) și 3) rezultă din 1) și din Propoziția 8.4.1. Pentru fluxul lui X^ξ avem:

$$X_t^\xi(a) = a X_t^\xi(e) \text{ (din invarianța la stînga)} = a \gamma^\xi(t).$$

Formula dorită rezultă acum din 1). Pentru 5), identificăm \mathfrak{g} cu $T_e G$, deci $T_0 \mathfrak{g}$ se poate identifica cu \mathfrak{g} (spațiul tangent în orice punct la un spațiu vectorial se identifică cu spațiul vectorial respectiv). Atunci $d \exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Definim acum cîmpul vectorial V pe $G \times \mathfrak{g}$ prin $V_{(a,\xi)} = (X_a^\xi, 0) \in T_a G \times T_\xi \mathfrak{g}$. V e diferențiabil și, conform lui 5), curentul său local e $V_t(a, \xi) = (a \exp(t\xi), \xi)$. Rezultă că V e complet și V_1 e definit și diferențiabil pe $G \times \mathfrak{g}$. Acum, dacă notăm cu π proiecția (diferențiabilă!) a lui $G \times \mathfrak{g}$ pe G , putem scrie $\exp \xi = \pi \circ V_1(e, \xi)$, deci \exp e diferențiabilă. Calculăm acum $d_0 \exp(\xi) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp(s\xi) = (\gamma^\xi)'(0) = X_0^\xi = \xi$, deci $d_0 \exp = 1_{\mathfrak{g}}$. ■

Am văzut că $\exp(t\xi)$ e un subgroup uniparametric pe G . Mai mult: putem arăta că, reciproc, orice subgroup uniparametric e de această formă:

Propoziția 8.4.4. Fie $\gamma(t)$ un subgroup cu un parametru al lui G . Atunci există $\xi \in \mathfrak{g}$ astfel încît $\gamma = \gamma^\xi$.

Demonstrație. Avem $\gamma(0) = e$ pentru că $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ e homomorfism. Vom arăta că $\gamma = \gamma^\xi$ cu $\xi = \gamma'(0)$. Pornim cu relația $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ pe care o derivăm în raport cu s , în $s = 0$:

$$\gamma'(t) = \frac{d}{ds} L_{\gamma(t)} \gamma(s) \Big|_{s=0} = d_e L_{\gamma(t)} \gamma'(0) = X_{\gamma(t)}^\xi,$$

deci $\gamma = \gamma^\xi$, ambele fiind egale cu e la $t = 0$. ■

Exercițiul 8.4.5. Fie G_1, G_2 două grupuri Lie. Arătați că $L(G_1 \times G_2) = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ și aplicația exponențială a produsului este $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\exp_1(\xi_1), \exp_2(\xi_2))$.

Exemplul 8.4.6. Arătăm că exponențiala lui $GL(n)$ coincide cu exponențiala obișnuită a matricelor, ceea ce și justifică denumirea. Pentru orice $A \in L(GL(n)) = \mathfrak{gl}(n)$, aplicația $\gamma^A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$ dată prin

$$\gamma^A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

satisface relațiile

$$\gamma^A(0) = I_n, \quad (\gamma^A)'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i = \gamma^A(t) A,$$

deci γ^A e un subgroup cu un parametru. Atunci, conform celor demonstrate anterior, $\exp(A) = \gamma^A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = e^A$.

Exemplul 8.4.7. Determinăm acum algebrele Lie ale grupurilor $SL(n)$ și $O(n)$. În primul caz, am văzut că $\det : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}$ e o submersie (Exemplul 7.3.4) și $SL(n) = \det^{-1}(1)$.

Rezultă de aici că $T_{I_n} \text{SL}(n) = \text{Ker } d_{I_n} \det$. Pentru calculul derivatei lui \det avem de calculat

$$\frac{d}{d\lambda} \det(I_n + \lambda C)|_{\lambda=0}.$$

Folosind identitatea pentru polinomul caracteristic

$$\det(I_n + \lambda C) = 1 + \lambda \text{tr} C + \dots + \lambda^n \det C,$$

rezultă $\frac{d}{d\lambda} \det(I_n + \lambda C)|_{\lambda=0} = \text{tr} C$. Am obținut:

$$\mathfrak{sl}(n) := T_{I_n} \text{SL}(n) = \{C \in \mathfrak{gl}(n) \mid \text{tr} C = 0\},$$

cu croșetul uzual pe $\mathfrak{gl}(n)$. Să mai observăm că o matrice $n \times n$ de urmă nulă e descrisă de $n^2 - 1$ parametri, deci $\dim \text{SL}(n) = n^2 - 1$.

Grupul ortogonal poate fi și el descris ca preimagine de valoare regulată, anume pentru aplicația $\varphi : \text{GL}(n) \rightarrow \text{S}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid A = A^t\}$, $\varphi(A) = AA^t$. E clar că $O(n) = \varphi^{-1}(I_n)$. Arătăm că I_n e valoare regulată a lui φ . Pentru $A \in O(n)$, avem

$$(d_A \varphi)B = AB^t + BA^t$$

care e surjecție: pentru orice C dat, $B = \frac{1}{2}CA$ satisface $(d_A \varphi)B = C$. Ca mai sus, pentru a determina algebra Lie a lui $O(n)$ determinăm spațiul tangent în I_n , iar acesta este egal cu nucleul diferențialei lui φ : obținem mulțimea matricelor antisimetrice:

$$\mathfrak{o}(n) := T_{I_n} O(n) = \{C \in \mathfrak{gl}(n) \mid C + C^t = 0\}.$$

În particular, rezultă de aici că $\dim O(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Exercițiul 8.4.8. Arătați că grupul special ortogonal $\text{SO}(n) := O(n) \cap \text{SL}(n)$ este un grup Lie conex, de dimensiune $\frac{1}{2}n(n-1)$, care are aceeași algebră Lie ca și $O(n)$.

Exercițiul 8.4.9. Arătați că $\text{SL}(2)$ e difeomorf cu $S^1 \times \mathbb{R}^2$. (Indicație: Notați $a_{11} = x - u$, $a_{12} = v - y$, $a_{21} = v + y$, $a_{22} = x + u$; arătați că e vorba despre o schimbare de variabilă pe mulțimea matricelor $(2, 2)$. Definiți apoi aplicația $S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{SL}(2)$ prin $(\theta, a, b) \mapsto (x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta, u = a, v = b)$ e un difeomorfism.)

Exercițiul 8.4.10. Fie $\varphi : G \rightarrow H$ un morfism (diferențiable) de grupuri Lie. Arătați că $\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi$. Aplicați acest rezultat pentru $G = \text{GL}(n)$, $H = \{-1, 1\}$ și $f = \det$ pentru a obține formula

$$\det e^A = e^{\text{tr} A}, \quad A \in \mathfrak{gl}(n).$$

Exercițiul 8.4.11. Arătați direct că dacă A e o matrice antisimetrică, atunci e^A e ortogonală.

Exercițiul 8.4.12. Arătați că, date matricele A, B , există matricele C și D astfel încât:

$$e^A e^B = e^{A+B} + C[A, B]D,$$

unde $[A, B] = AB - BA$.

Observația 8.4.13. Descriem acum o metodă generală de lucru pe grupuri Lie. Diferențiala în $a \in G$ unei funcții sau aplicații f definite pe G se calculează luând o curbă arbitrară $\sigma(t)$ pe G , cu $\sigma(0) = a$, și evaluând $(f \circ \sigma)'(0)$. Existența subgroupurilor cu un parametru permite folosirea curbelor particulare $\exp(t\xi)$, ceea ce ușurează mult calculele.

Cu ajutorul aplicației exponențiale putem demonstra un rezultat foarte important:

Teorema 8.4.14. *Un homomorfism continuu de grupuri Lie $\varphi : H \rightarrow G$ este \mathcal{C}^∞ .*

Demonstrație. Vom descrie doar pașii demonstrației, fără toate detaliile.

Arătăm întâi că enunțul este adevărat pentru subgrupuri continue cu 1 parametru, adică pentru $H = \mathbb{R}$. Deoarece pe un grup Lie avem la dispoziție translațiile (drepte sau sîngi), care sînt difeomorfisme, e suficient să demonstrăm enunțul local, pe o vecinătate I a lui $0 \in \mathbb{R}$. Vom încerca să exprimăm valorile $\varphi(t)$, pentru t mic, ca niște exp-uri despre care știm că sînt diferențiabile. Alegem o vecinătate V a lui $e \in G$ difeomorfă prin \exp cu o vecinătate U a lui 0 din $\mathfrak{g} = T_e G$. Fie t_0 îndeajuns de mic pentru ca $\varphi(t) \in \exp(U)$ pentru $|t| \leq t_0$. Atunci $\varphi(t_0) = \exp(Y)$, pentru un unic $Y \in U$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t_0/n) = \exp(X)$ (X unic). Cum $\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y)$, dacă $nX \in U$, atunci rezultă $nX = Y$. Pentru $nX \in U$, se arată că dacă $jX \in U$, atunci și $(j+1)X \in U$. Acum, pentru orice t ca mai sus, avem $\varphi(t) = \exp(tY/t_0)$ (aici vedem că avem nevoie să alegem U stelată etc.): într-adevăr, putem aproxima $(t/t_0)Y/0$ cu un șir $(m/n)Y$ și folosim continuitatea lui φ .

Pentru un H arbitrar, h -dimensional, fie X_1, \dots, X_h o bază în $\mathfrak{h} = T_e H$. Pentru fiecare i , aplicația $\exp(tX_i)$ e un morfism continuu de la \mathbb{R} la H ; atunci, conform pasului anterior, este de clasă \mathcal{C}^∞ . Mai mult, este difeomorfism local. În consecință, aplicația $\alpha: \mathbb{R}^h \rightarrow H$, $\alpha(t_1, \dots, t_h) = (\exp(tX_1), \dots, \exp(tX_h))$ e difeomorfism local între o vecinătate cubică din \mathbb{R}^h și o vecinătate U a lui $e \in H$. Acum $\varphi \circ \alpha$ e \mathcal{C}^∞ și, cum α e local inversabilă, rezultă că $\varphi|_U = (\varphi \circ \alpha) \circ \alpha^{-1}$ este \mathcal{C}^∞ . În fine, argumentul deja invocat, compunerea cu translațiile, arată că φ e \mathcal{C}^∞ în orice punct. ■

Reprezentarea adjuncată a unui grup Lie. Fie $I_a: G \rightarrow G$ automorfismul interior care lucrează după formula $I_a(b) = aba^{-1}$.

Definiția 8.4.15. Reprezentarea adjuncată a lui G pe algebra sa Lie este homomorfismul $Ad: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$, dat prin:

$$Ad_a \xi = d_e I_a \xi.$$

E ușor de verificat că, într-adevăr, pentru orice $a \in G$, Ad_a este un izomorfism linear al lui \mathfrak{g} . Se poate vedea și că:

$$(8.13) \quad Ad_a \xi = d_{a^{-1}} L_a \circ d_e R_{a^{-1}} \xi.$$

Notăm diferențiala reprezentării adjuncte cu ad , adică $d(Ad) = ad$. Cum, pentru orice spațiu vectorial V , $\text{GL}(V)$ se identifică cu un deschis al lui \mathbb{R}^{n^2} , spațiul tangent în orice punct la $\text{GL}(V)$ se identifică cu \mathbb{R}^{n^2} , văzută ca mulțimea tuturor matricelor $n \times n$, adică, pentru orice $A \in \text{GL}(V)$, avem $T_A \text{GL}(V) = \text{End}(V)$. Astfel, $ad: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$. Aplicînd Exercițiul 8.4.10, obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{Ad} & \text{GL}(\mathfrak{g}). \end{array}$$

Deoarece am notat Ad_a (în loc de $Ad(a)$), vom nota și ad_ξ (în loc de $ad(\xi)$). Demonstrăm acum:

Propoziția 8.4.16. $ad_\xi \eta = [\xi, \eta]$.

Demonstrație. Cu observația anterioară și cu formula (8.13), folosind interpretarea geometrică a croșetului, avem egalitățile:

$$\begin{aligned}
 [\xi, \eta] &= [X^\xi, X^\eta]_e = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{X_t^\xi(e)} (X_t^\xi)^{-1} X^\eta_{(X_t^\xi)_e} \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{\exp(t\xi)} R_{\exp(-t\xi)} X^\eta \exp(t\xi) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{\exp(t\xi)} R_{\exp(-t\xi)} d_e L_{\exp(t\xi)} \eta \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_e (L_{\exp(t\xi)} \circ R_{\exp(-t\xi)}) \eta \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Ad_{\exp(t\xi)} \eta = ad_\xi \eta.
 \end{aligned}$$

■

Observația 8.4.17. Formula de mai sus e echivalentă cu următoarea: pentru orice două curbe în G , $a(t)$, $b(s)$, cu $a(0) = b(0) = e$ și $a'(0) = \xi$, $b'(0) = \eta$, are loc:

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} a(t)b(s)a(t)^{-1}.$$

Exercițiul 8.4.18. Arătați că pe $GL(n)$, reprezentarea adjuncă este $Ad_B C = BCB^{-1}$

Exercițiul 8.4.19. Arătați că dacă G e comutativ, atunci și algebra sa Lie e comutativă.

Exemplul 8.4.20. Grupul lui Heisenberg $H_3(\mathbb{R})$ este grupul format de matricele: $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

cu $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că este un grup Lie conex, simplu conex, nilpotent, 3-dimensional. Grupul Heisenberg compact este $H_3(\mathbb{R})/H_3(\mathbb{Z})$, unde $H_3(\mathbb{Z})$ este laticea întregă, adică subgrupul lui $H_3(\mathbb{R})$ format cu matrice cu elemente întregi.

Arătați că algebra sa Lie e formată din matrice de forma: $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $x, y, z \in \mathbb{R}$

și o bază de câmpuri stîng invariante este dată de:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad V = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Analog se definește grupul lui Heisenberg $2n + 1$ -dimensional, cu aceleași proprietăți, format cu matrice pătrate $n + 2$ dimensionale de forma $\begin{pmatrix} 1 & X & z \\ 0 & I_n & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $z \in \mathbb{R}$,

$X = (x^1, \dots, x^n)^t$ și $Y = (y^1, \dots, y^n)$. Varianta sa compactă se obține factorizînd la laticea întregă. Algebra sa Lie $\mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{R})$ e formată din matrice de forma: $\begin{pmatrix} 0 & X & z \\ 0 & 0_n & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. O

bază de câmpuri sîng invariante este, ca mai sus:

$$\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i} + x^i \frac{\partial}{\partial z}.$$

Calculați, pentru cazul general, aplicația exponențială a $\exp : \mathfrak{h}_{2n+1}(\mathbb{R}) \rightarrow H_{2n+1}(\mathbb{R})$ și verificați că e difeomorfism (este un rezultat mai general, adevărat pentru aplicația exponențială a oricărei algebre Lie nilpotente pe unicul grup Lie conex și simplu conex asociat ei).

Grupul lui Heisenberg este un obiect foarte important în geometria simplctică și de contact, în geometria sub-riemanniană și în fizica matematică. Vom continua discuția lui, din punctul de vedere al geometriei riemanniene, în Exemplul 12.4.13.

5. Derivata Lie pe direcția unui câmp vectorial

Un câmp vectorial X acționează, prin intermediul curentului său local, asupra funcțiilor reale definite pe M și asupra câmpurilor vectoriale: prin compunere la dreapta, respectiv prin acțiunea lui dX_t (discuția e locală, nu are importanță că se lucrează, de fapt, cu un pseudogrup). Făcînd diferența dintre valoarea funcției (respectiv câmpului) și valoarea funcției (respectiv câmpului) în urma acțiunii curentului local și trecînd cu parametrul t la 0 se obține o nouă funcție (respectiv un nou câmp). Rezultatul acestei operații se numește *derivată Lie* în raport cu (pe direcția) câmpul(ui) X și se notează \mathcal{L}_X . Avem deci:

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ X_t - f).$$

Exercițiul 8.5.1. Să se arate că pentru orice $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ avem:

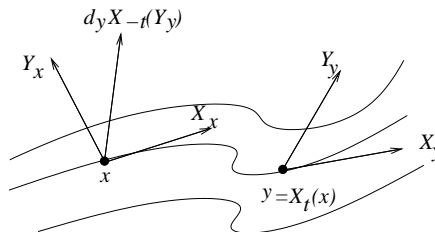
$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X)$$

Exercițiul 8.5.2. Să se arate că $\mathcal{L}_X f = 0$ dacă și numai dacă $f \circ X_t = f$.

Cît privește derivarea Lie a câmpurilor de vectori, conform celor spuse mai sus, definim:

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dX_{-t}(Y) - Y_x).$$

Să precizăm că $dX_{-t}Y$ e doar scrierea prescurtată pentru $(d_{X_t(x)}X_{-t})(Y_{X_t(x)})$. Figura alăturată arată schematic ce se întîmplă:



Acum putem da

Teorema 8.5.3. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Demonstrație. Vom aplica $\mathcal{L}_X Y$ pe o funcție oarecare $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ și vom calcula valoarea rezultatului în $x \in M$. Avem:

$$(8.14) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)(f)(x) &= (\mathcal{L}_X Y)_x(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dX_{-t}(Y)(f) - Y_x(f)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{X_t(x)}(f \circ X_{-t}) - Y_x(f)). \end{aligned}$$

Pentru exprimarea lui $Y_{X_t(x)}(f \circ X_{-t})$, avem nevoie de următorul rezultat (foarte asemănător cu Lema 6.1.8: *pentru orice $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, există $g : [-\varepsilon, \varepsilon] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ netedă, cu următoarele proprietăți:*

$$\begin{aligned} f(t, x) &= f(x) + tg(t, x) \quad \text{unde} \quad f(t, x) = f \circ X_t, \\ g(0, x) &= -X(f)(x). \end{aligned}$$

Într-adevăr, $f(0, x) = f(x)$, deci

$$f(t, x) - f(x) = \int_0^t \frac{\partial f(s, x)}{\partial s} ds,$$

sau, după schimbarea de variabilă $s \mapsto tu$,

$$f(t, x) - f(x) = t \int_0^1 \frac{\partial f(st, x)}{\partial s} ds.$$

Așadar punem

$$g(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial f(st, x)}{\partial s} ds.$$

Pentru calculul lui $g(0, x)$ observăm că

$$g(t, x) = \frac{1}{t} (f(t, x) - f(x)) = \frac{1}{t} (f \circ X_{-t}(x) - f(x)) = \frac{1}{t} (f - f \circ X_t)(X_{-t}(x)),$$

deci, trecînd la limită cu $t \rightarrow 0$, obținem $g(0, x) = -X_x(f)$. Acum putem continua șirul de egalități din ecuația (8.14) (scriind, pentru simplitate, $g_t(x) = g(t, x)$):

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)(f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{X_t(x)}(f + tg_t) - Y_x(f)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{X_t(x)}(f) - Y_x(f)) + \lim_{t \rightarrow 0} Y_{X_t(x)}(g_t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{X_t(x)}(f) - Y_x(f)) - Y_x(X(f)) \\ &= X_x(Y(f)) - Y_x(X(f)) = [X, Y](f)(x), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exercițiul 8.5.4. 1) Să se arate că

$$dX_s([X, Y]) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dX_s(Y) - dX_{s+t}Y).$$

2) Punînd în formula anterioară $s = -t$, arătați că

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} dX_{-t}(Y_{X_t(x)}).$$

3) Folosind punctul 1) arătați că $[X, Y] = 0$ dacă și numai dacă $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$.

4) Dacă $[X, Y] = 0$, atunci curentul local al lui $X + Y$ este $X_t \circ Y_t$.

Exercițiul 8.5.5. Derivînd în raport cu t identitatea:

$$dZ_t([X, Y]) = [dZ_t X, dZ_t Y],$$

regăsiți identitatea lui Jacobi.

Exercițiul 8.5.6. (Interpretarea geometrică a croșetului) Fie curba

$$c(t) = Y_{-\sqrt{t}} X_{-\sqrt{t}} Y_{\sqrt{t}} X_{\sqrt{t}}(x)$$

prin $x \in M$, pentru $t \in [0, \varepsilon)$. Să se arate că:

$$[X, Y]_x(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(c(t)) - f(c(0))).$$

Deci: dacă c e netedă în 0, în membrul drept avem „ $c'(0)(f)$ “. Dar c nu e derivabilă în 0 (de ce?). În consecință, trebuie întii arătat că există limita din dreapta. Revedeți și secțiunea „O interpretare geometrică a croșetului”.

6. Teoreme de îndreptare a cîmpurilor de vectori

Teorema care urmează este una de ecuații diferențiale. Importanța ei teoretică este foarte mare. Noi o vom folosi în demonstrația Teoremei lui Frobenius, din paragraful următor.

Teorema 8.6.1. Fie $x \in M$ și $X \in \mathcal{X}(M)$ cu $X_x \neq 0$. Atunci există un sistem de coordonate (U, φ) cu coordonate locale (x^1, \dots, x^m) pe o vecinătate a lui x astfel încît

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Demonstrație. Pornind cu un sistem arbitrar de coordonate în jurul lui x , putem face translații și rotații în \mathbb{R}^n astfel încît, în harta (V, ψ) rezultată, cu coordonate (y^1, \dots, y^m) , să avem

$$\psi(z) = 0 \quad \text{și} \quad X_x = \frac{\partial}{\partial y^1} |_x.$$

Pe V , $X = X^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ și, cum $X^1(x) = 1$, din continuitate, $X^1 > 0$ pe o vecinătate U' a lui x inclusă în V . Asta înseamnă că fluxul lui X prin orice punct din U' taie transvers hiper suprafața $\psi^{-1}(0, u^2, \dots, u^m)$ pentru orice $(u^2, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ cu proprietatea că $\psi^{-1}(0, u^2, \dots, u^m) \in U'$. Atunci, din Teorema 8.3.5, punctul 1), există un $\varepsilon > 0$ și o vecinătate a originii din \mathbb{R}^{m-1} , W , astfel încît

$$c(t, u^2, \dots, u^m) \stackrel{\text{def.}}{=} X_t(\psi^{-1}(0, a_2, \dots, a_m))$$

e bine definită și netedă pe $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$. Observăm că c are diferențiala nenulă în origine:

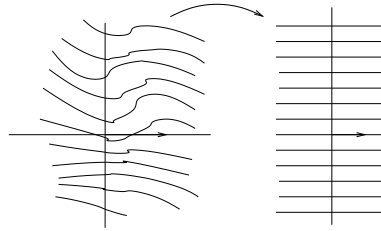
$$dc \left(\frac{\partial}{\partial u^1} |_0 \right) = X_x = \frac{\partial}{\partial y^1} |_x \quad \text{și} \quad dc \left(\frac{\partial}{\partial u^i} |_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} |_x \quad (i \geq 2).$$

Atunci, conform Teoremei funcției inverse, $\varphi = c^{-1}$ e o aplicație de hartă pe o vecinătate convenabilă U a lui x . Dacă x^1, \dots, x^m sînt coordonatele locale induse de φ , avem:

$$dc \left(\frac{\partial}{\partial u^1} |_{(t, u^2, \dots, u^m)} \right) = X_{c(t, u^2, \dots, u^m)},$$

de unde concluzia. ■

Rezultatul anterior spune că, în vecinătatea unui punct nesingular, pînă la un difeomorfism local, toate cîmpurile vectoriale arată la fel.



În general, două cîmpuri vectoriale nu se pot îndrepta simultan, chiar cînd sînt independente într-un punct. Dar comutativitatea lor e o condiție suficientă (aici cititorul și-ar putea aduce aminte de diagonalizarea simultană a endomorfismelor diagonalizabile care comută):

Teorema 8.6.2. Fie $x \in M$, V o vecinătate deschisă a sa și $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(V)$. Dacă aceste cîmpuri comută ($[X_i, X_j] = 0$) și dacă $X_1(x), \dots, X_k(x)$ sînt linear independenți în $T_x M$, atunci există o hartă locală (U, φ) în jurul lui x astfel încît

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Demonstrație. Va fi suficient să facem demonstrația în \mathbb{R}^n (adică vom găsi harta convenabilă în această situație, apoi vom compune cu inversa aplicației care ne-a dus de pe varietate în \mathbb{R}^n). Considerăm deci că $x = 0$ etc. Putem presupune că V e suficient de mică pentru ca pseudogrupurile cu un parametru X_{it} să fie definite, toate, pe V . Fie acum W o vecinătate suficient de mică a lui $0 \in \mathbb{R}^n$ și $\varphi: W \rightarrow V$ prin

$$\varphi(t^1, \dots, t^n) = X_{1t^1} \circ \dots \circ X_{kt^k}(0, \dots, 0, t^{k+1}, \dots, t^n).$$

Rezultă că φ e diferentiabilă și, deoarece fluxurile X_{it} comută, diferențiala ei în 0 are proprietatea:

$$\begin{aligned} d_0\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 X_{it}(X_{1t^1} \circ \dots \circ \widehat{X_{it^i}} \circ \dots \circ X_{kt^k}(0, \dots, 0)) = X_{ix}, \quad 1 \leq i \leq k, \\ d_0\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial t^i}, \quad k+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Harta căutată este φ^{-1} . ■

7. Distribuții. Teorema lui Frobenius

Am văzut că, dat un cîmp vectorial, el se poate integra: prin orice punct al varietății trece o curbă integrală a sa. Dar dacă ne dăm două cîmpuri vectoriale, există o subvarietate 2-dimensională tangentă lor în fiecare punct în care sînt independente? Are vreo importanță dimensiunea 2? Pentru a răspunde, avem nevoie de cîteva noțiuni noi.

Ne vor interesa acum familii de subspații vectoriale ale spațiilor tangente la o varietate dată. Să presupunem că asociem fiecărui punct $x \in M$ un subspațiu vectorial k -dimensional $D_x \subseteq T_x M$ (pentru $k = 1$ avem un cîmp vectorial). O asemenea asociere se numește *distribuție k -dimensională*. Diferențiabilitatea cîmpurilor vectoriale se generalizează ușor:

Definiția 8.7.1. O distribuție e diferențiabilă în x dacă există cîmpurile vectoriale diferențiabile X_1, \dots, X_k definite pe o vecinătate U a lui x care reprezintă o bază a lui D_y în orice $y \in U$. O distribuție e diferențiabilă pe M atunci cînd e diferențiabilă în fiecare punct din M .

Cititorul atent a observat, desigur, că, în termeni mai conceptuali, o distribuție diferențiabilă e o aplicație diferențiabilă de la M în grassmanniana k -planelor spațiului tangent la M .

Nu vom lucra decît cu distribuții diferențiabile, așa că vom spune simplu distribuție.

Noțiunea de curbă integrală capătă acum următoarea extindere:

Definiția 8.7.2. O subvarietate N a lui M se numește *varietate integrală* a distribuției D dacă $T_x N \subseteq D_x$, pentru orice $x \in N$. O varietate integrală de dimensiune k (deci pentru care $T_x N = D_x$) se numește *varietate integrală maximală*. Dacă prin fiecare punct al lui M există o varietate integrală maximală, distribuția se numește *complet integrabilă*.

În acest limbaj, distribuțiile 1-dimensionale (cîmpurile vectoriale) sînt complet integrabile. Dar dacă dimensiunea crește, proprietatea nu mai e adevărată automat. O primă obstrucție avem în:

Propoziția 8.7.3. *O distribuție complet integrabilă D este închisă la croșet: dacă $X, Y \in D$, atunci $[X, Y] \in D$.*

Demonstrație. Chestiunea fiind locală, fixăm $x \in M$ și fie N varietatea integrală maximală prin x . Putem alege o hartă locală (U, φ) în x astfel încît $\varphi(x) = 0$ și $U \cap N$ să fie descris de ecuațiile $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$. Atunci, pentru orice $y \in U \cap N$, D_y e generat de $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$. Așadar, dacă $X, Y \in D$, expresiile lor în coordonate locale (pe $U \cap N$) sînt:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde coeficienții X^i, Y^i verifică:

$$X^i(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) = Y^i(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) = 0 \text{ pentru } i > k.$$

Rezultă de aici că

$$\frac{\partial X^j}{\partial x^i}(0) = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}(0) = 0 \text{ pentru } i \leq k, j > k.$$

Cum $[X, Y] = \sum Z^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ cu $Z^j = \sum_{i=1}^n (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i})$, e clar că $Z^j(x) = 0$ pentru $j > k$, deci $[X, Y](x) \in D_x$. ■

Deoarece vom mai folosi această proprietate, e util s-o numim:

Definiția 8.7.4. O distribuție închisă la croșet se numește *involutivă*.

Teorema care urmează arată că involutivitatea este, de fapt, echivalentă cu completa integrabilitate. Prezentăm aici teorema lui Frobenius în varianta cu cîmpuri vectoriale, urmînd ca, mai încolo, să o exprimăm și cu forme diferențiale, așa cum apare ea, de obicei, în cursurile de ecuații.

Teorema 8.7.5. (Frobenius) *O distribuție involutivă este complet integrabilă.*

Demonstrație. Fie D o distribuție k -dimensională involutivă. E suficient să fixăm $x \in M$ și să construim o varietate integrală maximală prin x . Ideea demonstrației este

să arătăm că involutivitatea asigură existența (locală) a unui sistem de k câmpuri comutative două câte două și care generează D în fiecare punct în care sînt definite. Pe acestea le vom putea îndrepta simultan obținînd ușor varietățile integrale căutate.

Fie U vecinătate de coordonate în jurul lui x și Y_1, \dots, Y_k generatori ai lui D în fiecare punct din U (în particular, pentru că sînt în număr de k , Y_i sînt independenți în fiecare punct din U). Fie $Y_i = \sum_{j=1}^n Y_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ expresiile lor locale. Datorită linear independenței, rezultă că matricea $(Y_i^j)_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n}$ are rangul k . Deci putem presupune, modulo o renumerotare a coordonatelor, că matricea $(Y_i^j)_{i,j=1, \dots, k}$ e inversabilă în orice $y \in U$. Fie atunci \tilde{Y}_i^j componentele matricei inverse lui (Y_i^j) și fie $X_i = \sum_{j=1}^k \tilde{Y}_i^j Y_j$. Introducînd aici expresiile locale ale lui Y_j , găsim

$$(8.15) \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^n Z_i^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

cu Z_i^j funcții diferențiabile pe U . E clar că și X_i sînt independente în fiecare punct y din U , deci formează o bază a lui D_y . Atunci ipoteza de involutivitate spune că trebuie să existe funcțiile f^l pe U astfel încît să avem

$$[X_i, X_j] = \sum f^l X_l \text{ pe } U.$$

Dar cum $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, din (8.15) deducem că $[X_i, X_j]$ e combinație lineară numai de $\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Așadar $f^1 = \dots = f^k = 0$, adică $[X_i, X_j] = 0$ pe U .

Ca în demonstrația la Teorema 8.6.2, construim acum o vecinătate W a lui $0 \in \mathbb{R}^k$ și aplicația $\varphi : W \rightarrow U$ cu proprietatea că

$$d_0 \varphi \left(\frac{\partial}{\partial t^i} \right) = X_i(x).$$

Liniar independența vectorilor $\{X_i(x)\}$ atrage după sine injectivitatea lui $d_0 \varphi : T_0 \mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$. Conform Teoremei rangului, micșorînd, eventual, W , putem presupune că φ e o scufundare, astfel că imaginea sa $N = \varphi(W)$ e o subvarietate k -dimensională a lui M (care trece prin x). Rămîne să dovedim că N e varietate integrală a lui D , adică să vedem că $T_y N = D_y$ pentru orice $y \in U$. Prin construcție $T_x N = D_x$. Pentru $y \in N \setminus \{x\}$, putem scrie (vezi Teorema 8.6.2)

$$y = \varphi(t^1, \dots, t^k) = X_{t^1}^1 \circ \dots \circ X_{t^k}^k(x).$$

Cum comutativitatea câmpurilor X_i revine la comutativitatea curenților lor locali față de compunere, relația de mai sus se poate rescrie, aducînd curențul lui X_i pe prima poziție, sub forma

$$y = X_{t^i}^i \circ X_{t^1}^1 \circ \dots \circ X_{t^{i-1}}^{i-1} \circ X_{t^{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ X_{t^k}^k(x).$$

În ecuația de mai sus variază toți parametrii t^j . Dar putem presupune că i-am fixat pe toți, cu excepția lui t^i , cel de pe prima poziție. Atunci y descrie o curbă (parametrizată după t^i) care trece prin x și, pentru valori mici ale parametrului, rămîne pe N . Această curbă e, prin definiție, o curbă integrală a lui X_i , astfel că $X_i(y)$ e tangent la N (ca vector viteză al curbei). Cum i a fost ales arbitrar, rezultă că $T_y N = D_y$ și demonstrația e

completă. ■

Exercițiul 8.7.6. Arătați că distribuția pe \mathbb{R}^4 generată de cîmpurile $X = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ și $Y = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial w}$ nu are varietăți integrale în nici o dimensiune.

Exercițiul 8.7.7. Prin fiecare punct al unei varietăți trece o singură varietate integrală maximală conexă a unei distribuții integrabile.

Vedem, deci, că existența unei distribuții complet integrabile conferă varietății o anume structură, ne-am putea-o reprezenta cam ca pe o varză. Nu întîmplător varietățile integrale maximale se numesc *foi*, iar familia tuturor foilor se numește *foliație*.

Exemplul 8.7.8. (Structura de contact canonică a lui \mathbb{R}^{2n+1}). Fie \mathbb{R}^{2n+1} cu coordonatele $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z)$. Definim o distribuție D de hiperplane (deci $2n$ -dimensională) generată în fiecare punct de cîmpurile:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Observăm că

$$[X_i, X_{n+j}] = [y^i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y^j}] = -\delta_j^i \frac{\partial}{\partial z},$$

deci $[X_i, X_{n+i}] = -\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$, astfel că D nu e involutivă, deci nu e nici complet integrabilă. Pe de altă parte, e clar că subvarietățile n -dimensionale definite de $x_1 = ct., \dots, x^n = ct., y^1 = ct., \dots, y^l = ct., z = ct.$ sînt tangente cîmpurilor $X_{n+i}, i = l+1, \dots, n$, deci sînt varietăți integrale de dimensiune $n-l$.

Pe acest exemplu putem verifica și că unicitatea nu funcționează pentru varietăți integrale de dimensiune mai mică decît a distribuției (vezi Exercițiul 8.7.7). Într-adevăr, pentru $n = 1$ (numim coordonatele x, y, z), distribuția de contact este generată de $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$ și $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, iar subvarietățile C_1, C_2 descrise, respectiv, de ecuațiile:

$$\begin{aligned} C_1 : y &= 3x^2, & z &= -2x^3, \\ C_2 : y &= 4x^2, & z &= -3x^4, \end{aligned}$$

sînt varietăți integrale (1-dimensionale), ambele conținînd originea lui \mathbb{R}^3 . E clar că ambele curbe au aceeași direcție tangentă în origine, anume dreapta de ecuații $y = z = 0$. Denumirea de structură de contact este motivată de o anume interpretare a principiului lui Huygens. Vom reveni asupra acestui exemplu cînd vom vorbi despre forme diferențiale.

Exercițiul 8.7.9. Identificăm \mathbb{R} cu \mathbb{H} prin corespondența $(x, y, z, u) \mapsto q = x + yi + zj + uk$, apoi $\mathbb{R}^{4n} \cong (\mathbb{R}^4)^n$ cu \mathbb{H}^n , spațiul vectorial cuaternionic n -dimensional. Astfel $S^{4n+3} = \{q \in \mathbb{H}^n \text{ mod } \|q\| = 1\}$. Fie N cîmpul vectorial normal unitar (exterior) la sferă: $N(x, y, z, u) = (\sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + z^i \frac{\partial}{\partial z^i} + u^i \frac{\partial}{\partial u^i})$. Fie $X_1 = Ni, X_2 = Nj, X_3 = Nk$ (față de structura de \mathbb{H} -spațiu vectorial a lui \mathbb{H}^n). Arătați că X_i sînt tangente la sferă și generează o distribuție involutivă.

Cîmpuri vectoriale pe sfere. Varietăți paralelizabile. Să observăm că pentru $n = 3$, exercițiul de mai sus spune că pe sfera S^3 există 3 cîmpuri vectoriale care sînt independente în fiecare punct. E clar că acesta e numărul maxim de cîmpuri cu această

proprietate pe S^3 (în general, pe o varietate de dimensiune n pot exista cel mult n cîmpuri independente în fiecare punct). Cu o construcție similară, utilizînd octonionii lui Cayley în locul cuaternionilor, se pot construi (încercați!) 7 cîmpuri independente în fiecare punct al lui S^7 . Cît despre S^1 , vă las să trageți singuri concluzia...

În general, o varietate diferențiabilă de dimensiune n care admite exact n cîmpuri independente în fiecare punct se numește *paralelizabilă*. Cititorul va demonstra fără dificultate:

Propoziția 8.7.10. *Varietatea M e paralelizabilă dacă și numai dacă TM e difeomorf cu produsul $M \times \mathbb{R}^n$.*

Surprinzător, se poate demonstra (dar cu metode care depășesc nivelul acestui text):

Teorema 8.7.11. *Sferele S^1, S^3, S^7 sînt singurele sfere paralelizabile.*

Nu e întîmplător, pentru acest rezultat, că S^1 și S^3 au structură de grup (al unităților din grupurile multiplicative $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectiv $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ (S^7 e grup?). De fapt, are loc următorul rezultat mai general:

Propoziția 8.7.12. *Orice grup Lie e o varietate paralelizabilă.*

Demonstrația este simplă: se pornește cu o bază de vectori tangenți în origine. Fiecare vector din bază generează, prin translații la stînga, un cîmp stîng invariant. Cum translațiile stîngi sînt difeomorfisme, diferențialele lor sînt izomorfisme lineare, deci păstrează linear independența.

Nu numai că, în general, nu există foarte multe cîmpuri care să fie independente peste tot (cu cît sînt mai multe, cu atît este fibratul tangent mai aproape de a fi un produs), dar se poate să nu existe nici unul care să nu se anuleze nicăieri: cu mijloace de topologie algebrică se poate dovedi:

Teorema 8.7.13. *S^n admite un cîmp vectorial nicăieri nul dacă și numai dacă $n = 2k + 1$.*

Ceea ce, pentru $n = 2$, spune că *oricum ne-am pieptăna, tot ne alegem cu un vîrtej*.

Exercițiul 8.7.14. Pe sfera $S^{2n-1} = \{(z^j = x^j + iy^j) \mid \sum z^j \bar{z}^j = 1\} \subset \mathbb{C}^n$, fie cîmpul vectorial $\xi = \sum (x^j \partial y^j - y^j \partial x^j)$. Arătați că ξ nu se anulează nicăieri și distribuția ortogonală lui ξ (pe sferă) e neintegrabilă.

8. Tensori și cîmpuri de tensori

Tensorii sînt obiectele specifice geometriei diferențiale clasice și mecanicii. Nu cu multă vreme în urmă, erau definiți ca „obiecte care la o schimbare de reper se schimbă după legea...“. Astăzi i-am putea defini rapid ca elemente ale unui produs tensorial de r spații tangente și s spații cotangente într-un același punct. Dar ar fi să ne bazăm prea mult pe cunoștințele de algebră (multi)lineară ale cititorului... Preferăm o cale mediană.

Puțină algebră multilineară. Fie V_1, \dots, V_k, W spații vectoriale. O aplicație $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ se numește *multilineară* dacă e lineară în fiecare variabilă: pentru orice $i = 1, 2, \dots, k$ are loc relația

$$f(v_1, \dots, a_i v_i + a'_i v'_i, \dots, v_k) = a_i f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + a'_i f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Ați întâlnit exemple de aplicații bilineare – produsul scalar ($V_1 = V_2, W = \mathbb{R}$), produsul vectorial în \mathbb{R}^3 ($V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^3$) – atunci cînd ați studiat spațiile vectoriale euclidiene. De asemenea, determinantul este un exemplu tipic de aplicație multilineară.

Fie acum V un spațiu vectorial real finit-dimensional².

Definiția 8.8.1. Se numește *tensor covariant de ordinul k* (sau *k -tensor covariant*) pe V o aplicație k -lineară $T: \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$.

Prin convenție, un 0-tensor e un număr real.

Notăm $T^{0,k}(V)$ mulțimea k -tensorilor covarianți pe V (deci $T^{0,0}(V) = \mathbb{R}$) și definim pe ea o structură de spațiu vectorial cu operațiile naturale:

$$\begin{aligned}(T + T')(v_1, \dots, v_k) &= T(v_1, \dots, v_k) + T'(v_1, \dots, v_k), \\ (aT)(v_1, \dots, v_k) &= aT(v_1, \dots, v_k), \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

E clar, conform definiției de mai sus, că aplicațiile lineare sînt 1-tensori covarianți (deci $T^{0,1}(V)$ se identifică natural cu dualul V^*), formele bilineare, în particular produsele scalare (nu neapărat pozitiv definite), sînt 2-tensori covarianți. Forma a doua fundamentală unei suprafețe definește, pe fiecare plan tangent, un tensor covariant de ordinul al 2-lea.

Să observăm că e întotdeauna posibil să obținem k -tensori covarianți plecînd cu aplicații lineare. Iată cum: fie $\alpha, \beta \in V^*$. Să definim $\alpha \otimes \beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (Simbolul \otimes se citește *produs tensorial*) prin

$$\alpha \otimes \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2).$$

E ușor de verificat că $\alpha \otimes \beta \in T^{0,2}(V)$. La fel, făcînd produsul tensorial al k aplicații lineare (1-tensori covarianți) vom obține un k -tensor covariant. Dar, atenție!, nu este defel adevărat că orice k -tensor covariant e de acest tip: verificați, de exemplu, că 2-tensorul covariant pe \mathbb{R}^f dat prin $f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ nu se poate scrie ca produs $\alpha(v_1)\beta(v_2)$.

Construcția anterioară se generalizează ușor. Fie $T \in T^{0,k}(V)$ și $S \in T^{0,m}(V)$. Definim $T \otimes S \in T^{0,k+m}(V)$ prin

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+m}).$$

Verificarea faptului că $S \otimes T$ e, într-adevăr, multilineară e trivială. La fel ca mai sus, nu este adevărat că orice k -tensor e produs tensorial de doi (nici mai mulți) tensori de ordine mai mici.

Cititorul (conștiincios) va proba singur următoarele proprietăți elementare ale produsului tensorial:

- (1) Bilinearitate: $(a_1 S_1 + a_2 S_2) \otimes T = a_1 S_1 \otimes T + a_2 S_2 \otimes T, S \otimes (a_1 T_1 + a_2 T_2) = a_1 S \otimes T_1 + a_2 S \otimes T_2.$
- (2) Asociativitate: $(S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R).$

²Dar multe dintre noțiunile pe care le definim funcționează și în dimensiune infinită. De asemenea, se poate lucra și peste \mathbb{C} sau peste un alt corp.

Așa cum ne-am obișnuit cînd lucrăm pe spații finit dimensionale, exprimăm acum totul într-o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V . Să numim scalarii

$$T_{i_1 \dots i_k} := T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

componentele lui $T \in T^{0,k}(V)$ în baza fixată \mathcal{B} . Dacă $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ e altă bază și $e'_i = a_i^j e_j$ (folosim convenția de sumare a lui Einstein, de aici încolo se va vedea cît de utilă e), atunci pentru componentele tensorului avem imediat

$$(8.16) \quad T'_{i_1 \dots i_k} = a_{i_1}^{j_1} \cdots a_{i_k}^{j_k} T_{j_1 \dots j_k}.$$

În relația de mai sus, facem k sumări, după indicii j_1, \dots, j_k . Proprietatea aceasta era luată, de multe ori, drept definiție a tensorilor.

Să notăm cu $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ baza duală lui \mathcal{B} . Avem

$$T(v_1, \dots, v_k) = T(v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, v_k^{i_k} e_{i_k}) = v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} T_{i_1 \dots i_k}.$$

Pe de altă parte, folosind baza duală, putem scrie $v_1^{i_1} = e^{i_1}(v_1), \dots, v_k^{i_k} = e^{i_k}(v_k)$, astfel că relația anterioară ne dă

$$T(v_1, \dots, v_k) = T_{i_1 \dots i_k} e^{i_1}(v_1) \cdots e^{i_k}(v_k).$$

Recunoaștem în partea dreaptă a egalității produsul tensorial al unor elemente din baza duală (de fapt, e vorba de o suma de produse tensoriale). Așa că, renunțînd la argumentele v_i , putem scrie

$$T = T_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Am dovedit, așadar, că produsele tensoriale $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$ generează $T^{0,k}(V)$. Tentația e mare să dovedim și că sînt linear independente, pentru a forma o bază. Într-adevăr, dacă

$$a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} = 0,$$

aplicăm ambii membri ai egalității de mai sus pe $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ și obținem $a_{j_1 \dots j_k} = 0$. Cum indicii j_1, \dots, j_k sînt arbitrari, linear independența e dovedită. Am demonstrat:

Propoziția 8.8.2. *Fie V un spațiu vectorial n -dimensional și $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ o bază în V^* . Atunci mulțimea k -tensorilor covarianți $\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ formează o bază în $T^{0,k}(V)$ care are, deci, dimensiunea n^k .*

Repetînd construcțiile anterioare pentru spațiul dual V^* (unde ținem seamă că orice spațiu vectorial finit dimensional e reflexiv, adică $(V^*)^* = V$), obținem p -tensorii contravarianți, aplicații multilinare $\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \rightarrow \mathbb{R}$. Notăm mulțimea lor cu $T^{p,0}(V)$.

Exact ca mai sus se demonstrează:

Propoziția 8.8.3. *Fie V un spațiu vectorial n -dimensional și $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V . Atunci mulțimea p -tensorilor contravarianți $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n\}$ formează o bază în $T^{p,0}(V)$ care are, deci, dimensiunea n^p .*

Mai avem de făcut un pas. Putem combina cele două tipuri de tensori, contravarianți și covarianți. Vom numi *tensor de p ori contravariant și de k ori covariant*, pe

scurt (p, k) -tensor (adoptăm convenția din [KO]: scriem întâi indicele de contravarianță), o aplicație multilineară:

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}.$$

Vom nota $T^{p,k}(V)$ mulțimea tuturor (p, k) -tensorilor pe V . Am întâlnit deja tensori de tip $(1, 1)$ în partea dedicată suprafețelor: operatorul lui Weingarten definește un astfel de tensor pe fiecare spațiu tangent. Combinînd cele două propoziții de mai sus, ajungem la următoarea descriere locală a (p, k) -tensorilor:

Propoziția 8.8.4. *Fie V un spațiu vectorial n -dimensional și $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V , $\{e^1, \dots, e^n\}$ baza ei duală. Atunci mulțimea (p, k) -tensorilor contravarianți $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, 1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n\}$ formează o bază în $T^{p,k}(V)$.*

Componentele unui tensor $T \in T^{p,k}(V)$ în această bază se notează $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_p}$, deci avem

$$T = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_p} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

Dacă $\{\bar{e}_i\}$ este o altă bază în V și $\bar{e}_i = a_i^k e_k$, atunci, pentru baza duală $\{\bar{e}^j\}$ avem $\bar{e}^j = \bar{a}_k^j e^k$, unde (\bar{a}_k^j) notează matricea inversă a lui (a_i^j) . Obținem imediat

$$(8.17) \quad \begin{aligned} \bar{T}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_p} &= T(\bar{e}^{j_1}, \dots, \bar{e}^{j_p}, \bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_k}) = T(\bar{a}_{r_1}^{j_1} e^{r_1}, \dots, \bar{a}_{r_p}^{j_p} e^{r_p}, a_{s_1}^{i_1} e_{s_1}, \dots, a_{s_k}^{i_k} e_{s_k}) \\ &= \bar{a}_{r_1}^{j_1} \cdots \bar{a}_{r_p}^{j_p} a_{s_1}^{i_1} \cdots a_{s_k}^{i_k} T_{s_1 \dots s_p}^{r_1 \dots r_p}. \end{aligned}$$

Este clar din cele de mai sus că putem considera și suma directă

$$T = \bigoplus_{p=0, k=0}^{\infty} T^{p,k}(V),$$

obținînd astfel o algebră asociativă.

Exemplul 8.8.5. Există un izomorfism canonic între $T^{1,1}(V)$ și $\text{End}(V)$. Într-adevăr, lui $T: V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ i se asociază endomorfismul $f: V \rightarrow V$ dat prin $\varphi(f(v)) = T(v, \varphi)$ pentru orice $v \in V$, $\varphi \in V^*$. Se verifică ușor că asocierea aceasta e un izomorfism. Mai general, la fel se arată că $T^{1,p}(V)$ e canonic izomorf cu spațiul aplicațiilor p -lineare de la V în V .

Contractia tensorială. Următoarea operație este specifică algebrei tensorilor. Fie $p \geq 1$ și $k \geq 1$, fie i și j doi indici care satisfac $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq k$. Definim întâi contracția C_i^j pe elemente omogene:

$$C_i^j: T^{p,k}(V) \rightarrow T^{p-1, k-1}(V),$$

prin:

$$C_i^j(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^p) = \varphi^j(v_i) v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v}_i \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\varphi^j} \otimes \cdots \otimes \varphi^p,$$

apoi extindem prin linearitate.

Pentru a vedea care sînt componentele tensorului contractat, observăm că

$$C_i^j(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p}) = \delta_i^j e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e}_i \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e}^j \otimes \cdots \otimes e^{j_p},$$

deci:

$$C_i^j(T)_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{p-1}} = \sum_{s=1}^n T_{i_1 \dots s \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots s \dots j_{p-1}},$$

unde indicele s se află: sus – pe poziția j , iar jos – pe poziția i . Altfel spus, pentru a găsi componentele tensorului contractat, se egalează indicii de covarianță și contravarianță de pe pozițiile indicate și se sumează.

De exemplu, pentru un tensor de tip $(1, 1)$, avem o singură contracție posibilă, C_1^1 , al cărei rezultat este un scalar de componente $T_1^1 + \dots + T_n^n$.

Tensori și cîmpuri de tensori pe varietăți. Fie acum M o varietate diferențibilă și $x \in M$. Aplicînd construcțiile de mai sus pentru $V = T_x M$, deci $V^* = T_x^* M$, obținem spațiul vectorial $T_x^{p,k} M$ al tensorilor de tip (p, k) în punctul x . Fiecare hartă în jurul lui x furnizează un sistem de coordonate (x^1, \dots, x^n) și baza canonică corespunzătoare a lui $T_x^{p,k} M$.

În rezumat, un (p, k) -tensor în x este o aplicație multilineară

$$t : \underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_p \times \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

care se descompune în baza canonică asociată unei hărți de coordonate după cum urmează:

$$t = t_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_x \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \Big|_x \otimes dx^{i_1} \Big|_x \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_x.$$

E clar acum că un tensor de tip $(0, 1)$ este un vector cotangent, iar un tensor de tip $(1, 0)$ este un vector tangent.

Fie (U, φ) , $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ două hărți în x . Folosind formulele de schimbare pentru bazele canonice din $T_x M$, $T_x^* M$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \Big|_x = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_x, \quad dx^j \Big|_x = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^r} \Big|_x dx^r \Big|_x,$$

și formula (8.17), obținem formula de schimbare a componentelor unui tensor de tip (p, k) :

$$\bar{t}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_p} = t_{s_1 \dots s_k}^{r_1 \dots r_p} \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{r_1}} \Big|_x \otimes \dots \otimes \frac{\partial \bar{x}^{j_p}}{\partial x^{r_p}} \Big|_x \otimes \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \Big|_x \otimes \dots \otimes \frac{\partial x^{s_k}}{\partial \bar{x}^{i_k}} \Big|_x.$$

Pe modelul fibrărilor tangentă și cotangentă, definim acum *fibrarea tensorilor de tip* (p, k) . Punem deci

$$T^{p,k} M = \bigcup_{x \in M} T_x^{k,p} M$$

și notăm cu π proiecția naturală a lui $T^{p,k} M$ pe M . Astfel, fibrarea tangentă, respectiv cotangentă, devin cazuri particulare ale fibrării tensoriale, respectiv $TM = T^{1,0} M$, $T^* M = T^{0,1} M$. Ca și în aceste cazuri particulare, $T^{p,k} M$ are structură naturală de varietate diferențibilă în așa fel încît π să devină submersie. Anume, fiecare atlas pe M induce unul pe $T^{p,k} M$: pentru o hartă (U, φ) în x , definim $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n^{p+k}}$ prin $\Phi(t) = (y, t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k})$, unde $t \in T^{p,k} M$, $y \in U$ și $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$ sînt componentele lui t în baza canonică asociată hărții (U, φ) . În continuare, demonstrația e doar o rescriere a celei de la fibrarea tangentă.

Generalizarea cîmpurilor vectoriale este acum naturală:

Definiția 8.8.6. Un cîmp tensorial de tip (p, k) pe deschisul $U \subseteq M$ este o aplicație diferențiabilă $T : U \rightarrow T^{p,k}M$ cu proprietatea că $\pi \circ T = 1_U$.

Vom nota cu $\mathcal{T}^{p,k}M$ mulțimea cîmpurilor tensoriale de tip (p, k) pe M . Astfel, cîmpurile vectoriale sînt cîmpuri tensoriale de tip $(1, 0)$ și $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}^{1,0}M$.

Cîpurile tensoriale de tip $(0, 1)$ se vor numi *1-forme* și mulțimea lor se va nota $\Omega^1(M)$. Ca și $\mathcal{X}(M)$, și $\Omega^1(M)$ este un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modul.

Pentru simplificarea notațiilor, valoarea în x a cîmpului tensorial T se notează T_x (în loc de $T(x)$).

Următorul rezultat, fundamental, furnizează o caracterizare a cîmpurilor tensoriale (prezintă demonstrația după [KO]):

Propoziția 8.8.7. Un cîmp tensorial de tip (p, k) poate fi văzut ca o aplicație

$$T : \underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_p \times \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

$\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineară. În particular, $\mathcal{T}^{p,k}M$ este un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modul.

Demonstrație. Fie $T \in \mathcal{T}^{p,k}M$. Îi asociem aplicația

$$\tilde{T} : \underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_p \times \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

dată prin

$$(8.18) \quad \tilde{T}(\eta_1, \dots, \eta_p, X_1, \dots, X_k)(x) = T_x(\eta_{1x}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, X_{kx}).$$

Avem:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\eta_1, \dots, f_i \eta_i + g_i \sigma_i, \dots, \eta_p, X_1, \dots, f_j X_j + g_j Y_j, \dots, X_k) = \\ \text{(datorită } \mathbb{R}\text{-linearității lui } T_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_x(\eta_{1x}, \dots, f_i(x)\eta_{ix} + g_i(x)\sigma_{ix}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, f_j(x)X_{jx} + g_j(x)Y_{jx}, \dots, X_{kx}) = \\ f_i(x)f_j(x)T_x(\eta_{1x}, \dots, \eta_{ix}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, X_{jx}, \dots, X_{kx}) + \\ f_i(x)g_j(x)T_x(\eta_{1x}, \dots, \eta_{ix}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, Y_{jx}, \dots, X_{kx}) + \\ g_i(x)f_j(x)T_x(\eta_{1x}, \dots, \sigma_{ix}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, X_{jx}, \dots, X_{kx}) + \\ g_i(x)g_j(x)T_x(\eta_{1x}, \dots, \sigma_{ix}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, Y_{jx}, \dots, X_{kx}), \end{aligned}$$

ceea ce dovedește că \tilde{T} e $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineară.

Reciproc, dată o astfel de \tilde{T} , vrem să definim cîmpul tensorial din care provine. Ca să citim (8.18) de la dreapta la stînga, avem nevoie ca, date valorile $\eta_{1x}, \dots, \eta_{px} \in T_x^*M$ și $X_{1x}, \dots, X_{kx} \in T_xM$, să le putem extinde la niște cîmpuri vectoriale pe M cu exact aceste valori în punctul x . Acest lucru e posibil (am văzut că există funcții cu valori prestabilite într-un punct), dar extensiile nu sînt unice. E deci nevoie să arătăm că:

(*) valoarea $\tilde{T}(\eta_1, \dots, \eta_p, X_1, \dots, X_k)(x) = T_x(\eta_{1x}, \dots, \eta_{px}, X_{1x}, \dots, X_{kx})$ depinde numai de valorile argumentelor η_i, X_j în x .

Dovedim în continuare afirmația (*). Va fi suficient să considerăm că \tilde{T} are un singur argument, de exemplu $\tilde{T} : V^* \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$. Fie deci $\eta \in \Omega^1(M)$. Datorită linearității, va fi de ajuns să demonstrăm că dacă $\eta_x = 0$, atunci și $\tilde{T}(\eta)(x) = 0$. Cum chestiunea e locală, alegem o hartă (U, φ) în jurul lui x , astfel încît pe U avem $\eta = a_i dx^i$ pentru niște funcții

a_i diferentiabile pe U și cu $a_i(x) = 0$. Alegem acum o funcție test f care ia valoarea 1 pe o vecinătate $V \subset U$ și se anulează pe complementara lui U (cf. Lema 5.5.3). Cu ea prelungim 1-formele dx^i din baza canonică, definite doar pe U , la niște 1-forme η_i definite pe întreg M : punem $\eta_i = f dx^i$ pe U și $\eta_i = 0$ în rest. La fel prelungim funcțiile locale a_i la funcțiile diferentiabile \bar{a}_i egale cu $f a_i$ pe U și nule în rest. Acum avem:

$$\eta = \bar{a}_i \eta_i + (1 - f^2) \eta.$$

Rezultă, din \mathcal{C}^∞ -linearitate:

$$\tilde{T}(\eta)(x) = \bar{a}_i(x) \tilde{T}(\eta)(x) + (1 - f^2)(x) (\tilde{T}(\eta)(x)) = 0,$$

și demonstrația e completă. ■

Acțiunea unui difeomorfism asupra unui câmp tensorial. Știind cum acționează un difeomorfism asupra secțiunilor fibratului tangent și asupra secțiunilor fibratului cotangent, putem combina cele două acțiuni. Astfel, vom avea, pe rînd:

- Pentru un câmp tensorial T de tip $(0, k)$:

$$(8.19) \quad (df(T)(X_1, \dots, X_k))_{f(x)} = T_{f(x)}(d_x f X_{1x}, \dots, d_x f X_{kx}).$$

- Pentru un câmp tensorial S de tip $(p, 0)$:

$$(8.20) \quad (f^* S)(\varphi_1, \dots, \varphi_p)_x = S_x((f^* \varphi_1)_x, \dots, (f^* \varphi_p)_x).$$

- Pentru un câmp tensorial R de tip (p, k) , notăm fR câmpul tensorial:

$$(8.21) \quad \begin{aligned} & (fR)(X_1, \dots, X_k, \varphi_1, \dots, \varphi_p)_x \\ &= R(d_{f(x)} f^{-1} X_{1f(x)}, \dots, d_{f(x)} f^{-1} X_{kf(x)}, (f^* \varphi_1)_x, \dots, (f^* \varphi_p)_x). \end{aligned}$$

Definiția de mai sus e echivalentă cu următoarea: Pe elemente decompozabile punem:

$$f(X_1 \otimes \dots \otimes X_p \otimes \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k) = (df X_1) \otimes \dots \otimes (df X_p) \otimes (f^* \varphi_1) \otimes \dots \otimes (f^* \varphi_k),$$

apoi extindem prin linearitate.

Exercițiul 8.8.8. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, y)$, și câmpul tensorial $R = x \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy + \frac{\partial}{\partial y} \otimes dy$. Calculați fR .

Observația 8.8.9. Conținutul tensorial se extinde în mod natural de la tensori pe varietăți la câmpuri tensoriale. Astfel, pentru un câmp tensorial T de tip (p, k) , vom pune $(C_i^j T)_x = C_i^j(T_x)$.

CAPITOLUL 9

Forme diferențiale. Integrare

1. Tensori alternați

Dintre (cîmpurile de) tensori, cei covarianți (de tip $(0, r)$) alternați joacă un rol aparte. Construcția care urmează furnizează cadrul necesar pentru generalizarea pe varietăți a obiectelor clasice din calculul vectorial, anume *gradient*, *divergență*, *rotor* și a teoremelor de integrare de tip Green, Gauss, Stokes.

Definiția 9.1.1. Un tensor α de tip $(0, r)$ se numește *alternat*, sau *total antisimetric*, dacă pentru orice permutare $\sigma \in S_r$ are loc:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_r).$$

Se verifică ușor că mulțimea tensorilor alternați din $T^{0,r}(V)$ este un subspațiu vectorial. Îl vom nota $\Lambda^r(V^*)$. În acest context, r se mai numește *gradul tensorului alternat*.

Exercițiul 9.1.2. Dacă T e un r -tensor alternat și v_1, \dots, v_r sînt dependenți, atunci $T(v_1, \dots, v_r) = 0$.

Pe de altă parte, se vede imediat că produsul tensorial nu păstrează alternarea: dacă $\alpha_i \in \Lambda^{r_i}(V^*)$, $i = 1, 2$, atunci $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ nu e neapărat alternat. Dar oricărui tensor covariant putem să-i atașăm unul alternat prin procedeul numit *de alternare*, sau antisimetrizare. Fie $\mathcal{A} : T^{0,r}(V) \rightarrow \Lambda^r(V^*)$, dată prin:

$$(9.1) \quad \mathcal{A}(\alpha)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}).$$

Exercițiul 9.1.3. Verificați că $\mathcal{A}(\alpha)$ este, într-adevăr, alternat și că, dacă α e alternat, atunci $\mathcal{A}(\alpha) = \alpha$.

Alternarea produsului tensorial se numește *produs exterior* și se notează $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Avem deci:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 \otimes \alpha_2).$$

Observația 9.1.4. Unii autori (de exemplu Abraham, Marsden & Ratiu, vezi [MR]) definesc produsul exterior cu un factor $\frac{r_1!r_2!}{(r_1+r_2)!}$. Convenția cu care lucrăm respectă cartea lui Kobayashi & Nomizu.

De exemplu:

- Dacă α și β sînt unu-forme, avem:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)).$$

- Dacă $\alpha \in \Lambda^2(V^*)$ și $\beta \in \Lambda^1(V^*)$, atunci:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}(\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)).$$

Propoziția 9.1.5. *Produsul exterior are următoarele proprietăți:*

1) *Asocativitate:* $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$. Nu vom mai ține deci seama de paranteze și vom scrie $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.

2) *Bilinearitate:*

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta = a_1(\alpha_1 \wedge \beta) + a_2(\alpha_2 \wedge \beta),$$

$$\alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) = b_1(\alpha \wedge \beta_1) + b_2(\alpha \wedge \beta_2).$$

3) *Anticomutativitate:* dacă $\alpha_i \in \Lambda^{r_i}(V^*)$, $i = 1, 2$, atunci

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = (-1)^{r_1 r_2} \alpha_2 \wedge \alpha_1.$$

Cititorul va face singur demonstrația care constă în calcule elementare de algebră lineară.

Observația 9.1.6. 1) Din proprietatea de anticomutativitate rezultă că pentru orice vector covariant $\alpha \in V^*$, avem $\alpha \wedge \alpha = 0$.

2) De îndată ce unul dintre factori e de grad par, produsul exterior e comutativ.

Punctul 1) al observației anterioare demonstrează:

Propoziția 9.1.7. *Dacă $\{e^1, \dots, e^n\}$ este o bază în V^* , atunci*

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$$

formează o bază în $\Lambda^r(V^)$, așadar $\dim \Lambda^r(V^*) = C_n^r$.*

Astfel, orice $\alpha \in \Lambda^r(V^*)$ se scrie $\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \alpha_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$.

Din proprietatea de alternare rezultă, în particular, antisimetria în orice pereche de indici a componentelor lui α : $\alpha_{\dots i \dots j \dots} = -\alpha_{\dots j \dots i \dots}$.

Exemplul 9.1.8. Din Propoziția 9.1.7 rezultă:

$$\dim \Lambda^n(V^*) = 1 \quad \text{dacă } \dim V = n.$$

Dar un exemplu de n -tensor alternat pe $V = \mathbb{R}^n$ este determinantul: $\det(v_1, \dots, v_n)$ este chiar determinantul matricei care are pe coloane componentele vectorilor v_i în baza canonică. Rezultă acum că, pe \mathbb{R}^n , orice n -tensor alternat este un multiplu al determinantului.

Vom nota, de asemenea, $\Lambda(V^*) = \oplus \Lambda^r(V^*)$. O vom numi *algebra exterioară* a lui V (este o algebră reală graduată (înmulțirea este produsul exterior), dar în acest curs încerc să evit noțiuni mai avansate de algebră).

Acțiunea unei aplicații lineare asupra tensorilor alternați. Construcția care urmează e deosebit de importantă. Fie $A : V \rightarrow W$ o aplicație lineară. I se asociază *transpusa*, aici notată A^* , între spațiile duale, acționînd prin: $A^* : W^* \rightarrow V^*$, $A^*(\varphi) = \varphi \circ A$. Această acțiune se extinde în mod natural asupra algebrei exterioare: e de ajuns să definim $A^* : \Lambda^k(W^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ prin:

$$(A^* \alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Av_1, \dots, Av_k).$$

Linearitatea lui A^* e imediată, de asemenea, proprietatea:

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = A^*\alpha \wedge A^*\beta.$$

Pe de altă parte, e clar că, dacă $\dim V = n$, atunci $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$. Atunci, dacă A e izomorfism, ea întoarce orice element $\alpha \in \Lambda^n(V^*)$ într-un multiplu al său: $A^*\alpha = a \cdot \alpha$. Putem determina constanta a ? Răspunsul e dat de:

Teorema 9.1.9. (a determinantului.) *Fie $A \in GL(V)$. Atunci $A^*\alpha = \det(A)\alpha$. În particular, pentru orice 1-tensori covarianți $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, avem:*

$$A^*\alpha_1 \wedge \dots \wedge A^*\alpha_n = \det(A)\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n.$$

Demonstrație. Conform exemplului anterior, determinantul este un n -tensor alternat pe \mathbb{R}^n . Cum V e izomorf (necanonic) cu \mathbb{R}^n , alegem un asemenea izomorfism $B: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ și întoarcem determinantul de pe \mathbb{R}^n pe V . Obținem $B^*\det \in \Lambda^n(V^*)$. Aceștia îi aplicăm A^* și avem:

$$A^*(B^*\det) = \lambda B^*\det.$$

Acum, prin B^{-1} , ne întoarcem pe \mathbb{R}^n (unde știm că trebuie să obținem un multiplu al determinantului). Deoarece $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1}$, găsim:

$$(B^*)^{-1}A^*B^*\det = \lambda(B^*)^{-1}B^*\det = \lambda(BB^{-1})^*\det = \lambda\det.$$

Dar $(B^*)^{-1}A^*B^* = (BAB^{-1})^*$, deci avem:

$$(BAB^{-1})^*\det = \lambda\det.$$

Evaluăm egalitatea aceasta pe baza canonică a lui \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \lambda \det(e_1, \dots, e_n) &= \lambda, \\ (BAB^{-1})^*\det(e_1, \dots, e_n) &= \det(BAB^{-1}e_1, \dots, BAB^{-1}e_n) \\ &= \det(BAB^{-1}) = \det(A), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Exercițiul 9.1.10. Fie $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ și $v_1, \dots, v_r \in V$. Atunci:

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_r)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \det[\varphi_i(v_j)].$$

Cum $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, e imediat că $\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$ are exact două componente conexe. Conform Teoremei determinantului, alegerea uneia dintre ele echivalează cu alegerea unei familii de baze ordonate între care orice schimbare se face cu determinant pozitiv. Am obținut:

Corolarul 9.1.11. *Fiecare dintre cele două componente conexe ale lui $\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$ induce o orientare pe V . A orienta V revine la a alege un n -tensor alternat nenul (situat în una dintre cele două componente conexe).*

Exemplul 9.1.12. Așa cum am discutat despre $\Lambda^k(V^*)$ (care ne interesează pentru că ne conduce către formele diferențiale), putem discuta $\Lambda^k(V)$ care este tot o algebră

exterioră. Ca mai sus, e ușor de văzut că dacă $\{w_i\}$ sînt combinații lineare de $\{v_j\}$, $w_i = t_i^j v_j$, atunci are loc formula:

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_k = \det(t_i^j) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Algebra $\Lambda^k(V)$ e legată de varietatea $G(k, n)$ în mod foarte natural: pentru orice $S \in G(k, n)$, alegerea unei baze $\{v_i\}$ conduce la multivectorul $\xi := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k(V)$. Formula (determinantului) de mai sus arată că schimbarea bazei modifică multivectorul ξ prin înmulțire cu un scalar nenul. Deci lui S i se pot asocia coordonatele lui ξ definite pînă la multiplicare (e o generalizare clară a coordonatelor omogene din spațiul proiectiv). Acestea se numesc coordonate plückeriene ale lui S .

Îată o exemplificare pentru $G(2, 4)$ (cf. [CCL]). Fixăm baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ în \mathbb{R}^4 . Pentru un S 2-dimensional din \mathbb{R}^4 , fixăm, de asemenea, o bază $\{v, w\}$ și avem descompunerile:

$$v = \sum v^i e_i, \quad w = \sum w^i e_i.$$

Acum

$$\xi = v \wedge w = \sum_{i < k} p^{ik} e_i \wedge e_k.$$

Coordonatele p^{ik} se determină ușor, folosind linearitatea și proprietățile produsului exterior ($e_i \wedge e_i = 0$, $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$) și rezultă

$$p^{ik} = v^i w^k - v^k w^i.$$

Scalarii $\{p^{ik}, i < k\}$, unici pînă la un factor nenul, sînt coordonatele plückeriene ale lui S .

Dar, deoarece $\xi \wedge \xi = 0$, trebuie să avem

$$(p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23}) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 0,$$

deci

$$(9.2) \quad p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23} = 0.$$

Ecuția aceasta fiind de gradul al doilea, rezultă că între cele 6 coordonate, numai 4 sînt independente. Regăsim faptul cunoscut că $\dim G(2, 4) = 4$.

Reciproc, dacă ne dăm 6 scalari, nu toți nuli, care satisfac (9.2) putem recompuce multivectorul ξ , deci elementul $S \in G(2, 4)$. Astfel, $G(2, 4)$ apare ca o cuadrică a lui $P^3\mathbb{R}$.

Observăm acum că sistemul

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= p^{12}, & x_1 - y_1 &= p^{34} \\ x_2 + y_2 &= p^{13}, & x_2 - y_2 &= p^{42} \\ x_3 + y_3 &= p^{14}, & x_3 - y_3 &= p^{23}, \end{aligned}$$

are soluții deoarece, în necunoscutele $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, 3$, are determinantul $(-2)^3$. În plus, ecuația (9.2) ne spune că soluțiile satisfac relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Cum p^{ik} sînt determinate pînă la un factor nenul, putem presupune că avem chiar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1,$$

astfel că tripletele (x_i) și (y_i) reprezintă puncte pe sfera S^2 . În consecință, am definit o surjecție

$$\pi : S^2 \times S^2 \rightarrow G(2, 4).$$

Mai mult, cum $\pi(x, y) = \pi(-x, -y)$, surjecția aceasta e o aplicație de acoperire cu 2 foi a lui $G(2, 4)$. Dar $S^2 \times S^2$ e simplu conexă, astfel că e chiar acoperirea universală a lui $G(2, 4)$. De unde deducem că *grupul fundamental* $\pi_1(G(2, 4))$ este \mathbb{Z}_2 .

2. Forme diferențiale

Trecînd acum pe varietăți, $V = T_x M$ și considerăm $\Lambda^r(T_x^* M)$.

Formele diferențiale de grad r sînt cîmpuri tensoriale pe M ale căror valori în fiecare punct sînt $(0, r)$ -tensori alternați. Din Propoziția 8.8.7, o r -formă diferențială este o aplicație multilineară și alternată

$$\alpha : \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Evident, $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$. Propoziția 9.1.7 ne spune că, local, o r -formă se scrie:

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

cu $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ funcții antisimetrice în fiecare pereche de indici.

Mulțimea tuturor r -formelor diferențiale pe M se notează $\Omega^r(T^* M)$ și este un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modul. La fel ca pentru tensorii alternați, putem forma și modulul graduat $\Omega(M) = \oplus \Omega^r(T^* M)$.

Observația 9.2.1. Pe o varietate n -dimensională orice $n + i$ -formă diferențială este nulă, deci suma directă anterioară e finită.

Acțiunea unei aplicații diferențiale asupra formelor diferențiale. Fie acum $f : M \rightarrow N$. Am văzut cum acționează f , prin diferențiala ei, a asupra cîmpurilor de vectori. Acțiunea era bine definită numai pentru difeomorfisme. În schimb, asupra formelor diferențiale, f acționează natural prin *image inversă* (pull-back în textele englezești), asociînd unei r -forme pe N una pe M . Pentru $\alpha \in \Omega^r(N)$, definim $f^* \alpha \in \Omega^r(M)$ prin:

$$(f^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_r) = \alpha_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_r)).$$

Putem scrie, formal, $(f^* \alpha)(X_1, \dots, X_r) = \alpha(df(X_1), \dots, df(X_r))$, dar numai dacă înțelegem că, de fapt, egalitatea e punctuală, df neacționînd bine pe cîmpuri vectoriale dacă f nu e difeomorfism.

Prin calcul direct se verifică:

Propoziția 9.2.2. $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ este morfism de algebre:

$$f^*(a\alpha + b\beta) = af^*\alpha + bf^*\beta,$$

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Exercițiul 9.2.3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dat prin $f(x, y, z) = (x + y, xz)$. Fie formele diferențiale pe \mathbb{R}^2 :

$$\alpha = e^v du + udv, \quad \beta = vdu \wedge dv.$$

Calculați $\alpha \wedge \beta$, $f^* \alpha$, $f^* \beta$ și verificați că $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta$.

Exemplul 9.2.4. (1-forma canonică pe T^*M .) Fibratul cotangent al oricărei varietăți e înzestrat cu o 1-formă global definită, canonică (depinde, așadar, nu mai de structura diferențiabilă a varietății). Definiția a fost dată de Poincaré și este esențială pentru formalizarea mecanicii analitice și a geometriei simplectice.

Fie $\pi : TM \rightarrow M$ proiecția canonică. Așadar, π asociază unei 1-forme α pe M , care e un element al lui T^*M , punctul în care e considerată acea 1-formă. Imaginea inversă a lui π acționează așa: $\pi^* : T^*M \rightarrow T^*(T^*M)$. Definim $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ prin $\lambda(\alpha) := \pi^*\alpha$. Punctual, forma canonică lucrează astfel:

$$\lambda_{\alpha_x}(v) = \alpha_x(d_{\alpha_x}\pi(v)), \quad x \in M, \alpha_x \in T_x^*M, v \in T_{\alpha_x}(T^*M).$$

Exercițiul 9.2.5. Arătați că dacă $f : M \rightarrow N$, atunci $f^*\lambda_N = \lambda_M$, unde λ_M, λ_N sînt formele canonice din exemplul precedent.

O formă diferențială de grad maxim pe M și nicăieri nulă se numește *formă volum*. Din Corolarul 9.1.11 obținem direct:

Propoziția 9.2.6. *O varietate e orientabilă (vezi Secțiunea 7) dacă și numai dacă admite o formă volum.*

Aplicație. *Forme stîng invariante pe grupuri Lie.* O r -formă diferențială α pe un grup Lie G se numește *stîng invariantă* dacă $L_a^*\alpha = \alpha$ pentru orice $a \in G$. Explicit, avem $(L_a^*\alpha)_b = \alpha_b$, adică:

$$\alpha_b(d_{a^{-1}b}X_1, \dots, d_{a^{-1}b}X_r) = \alpha_b(X_1, \dots, X_r).$$

Vom nota mulțimea formelor stîng invariante de grad r cu $\Omega_{inv}^r(G)$ (se mai numesc forme Maurer-Cartan; definiția a fost introdusă de Élie Cartan). Proprietatea a doua din Propoziția anterioară demonstrează că $\Omega_{inv}^*(G)$ e închisă la produs exterior, deci e o subalgebră a lui $\Omega^*(M)$.

Ca și cîmpurile stîng invariante, formele stîng invariante pot fi generate pornind de la o bază în spațiul tensorilor alternați pe T_eG pe care o transportăm în orice punct prin translații paralele. În particular, pentru 1-forme stîng invariante are loc: $\Omega_{inv}^1(G) \cong T_e^*G \cong \mathfrak{g}^*$ (dual de spațiu vectorial real). Rezultă atunci că pentru orice $X \in L(G)$ și orice $\alpha \in \Omega_{inv}^1(G)$, avem $\alpha(X) = \alpha_e(X_e) = \text{const}$. Acum putem demonstra un rezultat foarte important despre grupuri Lie:

Propoziția 9.2.7. *Fie $\{X_1, \dots, X_n\}$ o bază de cîmpuri stîng invariante. Atunci $[X_i, X_j] = c_{ijk}X_k$ cu $c_{ijk} = \text{const}$. și care verifică următoarele proprietăți:*

$$c_{ijk} + c_{jki} = 0,$$

$$\sum_s (c_{ijs}c_{skt} + c_{jks}c_{sit} + c_{kis}c_{sjt}) = 0.$$

Într-adevăr, cum $L(G)$ e subalgebră Lie, e clar că $[X_i, X_j] = c_{ijk}X_k$, pentru niște funcții c_{ijk} . Faptul că ele sînt, de fapt, constante rezultă prin aplicarea 1-formelor stîng invariante duale lui $\{X_i\}$. Prima relație de mai sus exprimă anticomutativitatea croșetului, a doua nu e altceva decît identitatea lui Jacobi.

$\{c_{ijk}\}$ se numesc *constantele de structură* ale grupului G față de baza $\{X_i\}$. Cunoașterea lor echivalează cu cunoașterea întregii algebre Lie a grupului.

Diferențiala exterioară. Caracteristica principală a formelor diferențiale este că pot fi derivate, operatorul linear pe care-l vom defini fiind de pătrat nul și reducându-se la diferențiala obișnuită pe funcții. Vom defini acest operator local, folosind expresia în coordonate a unei forme diferențiale, apoi vom arăta că definiția nu depinde de alegerea coordonatelor și că operatorul astfel definit verifică niște proprietăți care-l identifică.

Fie α o r -formă diferențială care, în harta locală (U, φ) se scrie $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$. Pentru simplitate, vom nota $I = (i_1 \dots i_r)$ și $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$. Astfel, $\alpha = \alpha_I dx^I$. Prin definiție, punem:

$$(9.3) \quad d(\alpha_I dx^I) = (d\alpha_I) \wedge dx^I.$$

Așadar, $d : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$. Înainte de a dovedi independența definiției de coordonate, demonstrăm trei proprietăți esențiale, cuprinse în:

Propoziția 9.2.8. *Operatorul definit de (9.3) satisface egalitățile:*

- (i) $d(\alpha_1 + \alpha_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2$.
- (ii) $d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge d\alpha_2$, unde $r_1 = \deg \alpha_1$.
- (iii) $d(d\alpha) = 0$.

Demonstrație. Prima egalitate, linearitatea, este evidentă, pentru că se reduce la linearitatea diferențialei funcțiilor.

Acum, pentru a demonstra a doua egalitate, o folosim pe prima: putem presupune că $\alpha_1 = a_1 dx^I$, $\alpha_2 = a_2 dx^J$ (aici a_1, a_2 sînt funcții). Atunci $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = a_1 a_2 dx^I \wedge dx^J$. Urmează:

$$\begin{aligned} d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= d(a_1 a_2) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (a_2 da_1 + a_1 da_2) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= a_2 da_1 \wedge dx^I \wedge dx^J + a_1 da_2 \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (da_1 \wedge dx^I) \wedge (a_2 dx^J) + (-1)^{r_1} a_1 dx^I \wedge da_2 \wedge dx^J \\ &= d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge d\alpha_2. \end{aligned}$$

Pentru a treia egalitate, o folosim din nou pe prima și luăm $\alpha = adx^I$. E clar în primul rînd că:

$$d(dx^I) = d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) = \sum_j (-1)^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{i_j}) \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0.$$

Atunci, din nou din a doua egalitate, rezultă:

$$d(d\alpha) = d(da \wedge dx^I) = d(da) \wedge dx^I - da \wedge d(dx^I) = d(da) \wedge dx^I.$$

Deci e suficient să arătăm că d are pătrat nul pe funcții. Aici folosim expresia locală a diferențialei funcțiilor:

$$d(da) = d\left(\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

pentru că derivatele parțiale de ordinul al doilea sînt simetrice în i, j , pe cînd $dx^i \wedge dx^j$ sînt antisimetrice. ■

Acum putem demonstra că cele trei egalități din propoziție identifică operatorul de derivare:

Propoziția 9.2.9. *Doi operatori care satisfac egalitățile din Propoziția 9.2.8 și coincid pe funcții sînt egali.*

Demonstrație. Fie d' un alt operator care satisface egalitățile din Propoziția 9.2.8 și astfel încît $df = d'f$ pentru orice $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Va fi suficient să demonstrăm că $d\alpha = d'\alpha$ pentru $\alpha = fdx^I$. Avem:

$$\begin{aligned} d'(fdx^I) &= (d'f) \wedge dx^I + fd'(dx^I) && \text{din (ii)} \\ &= (df) \wedge dx^I + fd'(dx^I) && \text{pentru că } df = d'f \\ &= d\alpha + f d'(dx^I). \end{aligned}$$

Rămîne să arătăm că $d'(dx^I) = 0$. Dar, datorită egalității pe funcții, $dx^i = d'x^i$ și avem:

$$\begin{aligned} d'(dx^I) &= d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) = d'(d'x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_r}) \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} d'x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d'(d'x^{i_j}) \wedge \cdots \wedge d'x^{i_r} = 0. \end{aligned}$$

■

Datorită unicității operatorilor locali cu proprietățile de mai sus, rezultă că definiția nu depinde de harta în care a fost dată. Putem deci formula:

Teorema 9.2.10. *Există un unic operator $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ care satisface (i), (ii), (iii) din Propoziția 9.2.8 și coincide cu df pe $\Omega^0(M)$.*

Observația 9.2.11. În analiza clasică în \mathbb{R}^3 se definesc operatorii *gradient*, *divergență* și *rotor* care au semnificație fizică. Astfel, dacă f e o funcție diferențiabilă pe \mathbb{R}^3 și $X = (X^1, X^2, X^3)$ e un câmp vectorial, atunci:

$$\begin{aligned} \nabla f &\stackrel{\text{not.}}{=} \text{grad } f \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), \\ \text{div } X &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^2} + \frac{\partial X^3}{\partial x^3}, \\ \text{rot } X &= \left(\left(\frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \right), \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \right), \left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Formal, folosind produsele scalar și vectorial din \mathbb{R}^3 , se poate scrie $\text{div } X = \nabla \cdot X$ și $\text{rot} = \nabla \times X$. Se verifică ușor formulele

$$(9.4) \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0, \quad \text{rot} \circ \text{grad} = 0.$$

Să considerăm acum următoarele izomorfisme:

$$(1) \quad \chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1\mathbb{R}^3, \text{ prin } \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto dx^i. \text{ Deci lui } X \text{ îi corespunde 1-forma } X^1 dx^1 + X^2 dx^2 + X^3 dx^3.$$

- (2) $\chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^2\mathbb{R}^3$, prin $X \mapsto \omega_X$, unde $\omega_X(Y, Z) = X \cdot (X \times Z)$ (altfel spus, $\omega(Y, Z) = \det(X, Y, Z)$).
- (3) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3)$, prin $f \mapsto f \text{ vol}$, unde 3-forma vol e definită prin $\text{vol}(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$.

Cu aceste identificări, se poate verifica imediat că formulele (9.4) se reduc la una singură, și anume la $d \circ d = 0$. Nu e un fapt banal: formulele clasice păreau să depindă de proprietăți specifice lui \mathbb{R}^3 , cum ar fi existența produsului vectorial, în timp ce $d \circ d = 0$ e o proprietate a structurii diferențiabile.

Observația 9.2.12. Cum $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ este operator linear, studiul nucleului și al imaginii sale este foarte important.

Formele din nucleul lui d se numesc *închise*. Deci α e închisă dacă și numai dacă $d\alpha = 0$.

Formele din imaginea lui d se numesc *exacte*. Astfel α e exactă dacă și numai dacă există β cu $\alpha = d\beta$.

Cum $dd = 0$, e clar că orice formă exactă e închisă, astfel că se pot considera \mathbb{R} -modulele

$$H^r(M) = \frac{\text{Ker}(d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M))}{\text{Im}(d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M))},$$

numite *module de coomologie de Rham*. Cum pe o varietate n -dimensională orice formă de grad strict mai mare ca n e nulă, rezultă că $H^{n+i}(M) = 0$ pentru orice i .

Se poate arăta că modulele acestea sînt libere. Dimensiunea reală a lui $H^k(M)$ se numește *numărul Betti de ordinul k* al lui M . Cu ajutorul numerelor Betti se poate introduce suma lor alternată, notată $\chi(M)$: deci:

$$\chi(M) = b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) + \cdots + (-1)^n b_n(M).$$

Este generalizarea caracteristicii Euler a poliedrelor și suprafețelor (vezi paragraful dedicat Teoremei Gauss–Bonnet) și se numește *caracteristica Euler–Poincaré*. Legătura ei cu invariantul definit anterior, cu ajutorul triangulărilor, nu poate fi explicată în cadrul acestui curs; se poate consulta [Gr].

Teorema lui de Rham, care se demonstrează în cadrul topologiei algebrice, afirmă că modulele de coomologie (deci și $\chi(M)$) sînt invariante topologice: altfel spus, două varietăți care nu au aceleași module de coomologie nu pot fi homeomorfe (cititorul interesat poate consulta, de exemplu, monografia [BT]). Este remarcabil că niște invariante topologice pot fi calculați cu ajutorul unor obiecte diferențiabile!

Că modulele de coomologie nu sînt, în general, triviale rezultă din faptul că nu orice formă închisă e exactă. De exemplu, pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, 1-forma $\alpha = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ e închisă, dar nu e exactă (demonstrați).

Vom vedea, însă, că toate modulele de coomologie ale lui \mathbb{R}^n sînt triviale, ceea ce revine la a demonstra că orice formă închisă pe \mathbb{R}^n este exactă (lema lui Poincaré). În consecință, vedem că, pe orice varietate, orice formă închisă este *local* exactă.

Revenind, observăm că diferențiala funcțiilor are o expresie foarte simplă: pentru $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ și $X \in \mathcal{X}(M)$, avem $df(X) = X(f)$. Cum formele diferențiale sînt aplicații multilinare alternate pe $\mathcal{X}(M)$, e util să avem și o formulă asemănătoare pentru diferențiala exterioră a funcțiilor de orice grad.

Propoziția 9.2.13. Pentru orice r -formă α are loc formula:

$$(9.5) \quad \begin{aligned} (r+1)d\alpha(X_0, \dots, X_r) &= \sum_i (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r)) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r), \end{aligned}$$

unde $\hat{}$ marchează lipsa argumentului respectiv.

Demonstrația este un simplu exercițiu: datorită linearității, este suficient să verificăm formula luând $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Acum formula se simplifică deoarece croșetele cîmpurilor din baza canonică se anulează. Apoi, datorită proprietăților lui d , e suficient să luăm $\alpha = adx^I$. Cu aceste alegeri, verificările sînt imediate.

De exemplu, pentru $\alpha \in \Omega^1(M)$ avem:

$$2d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Corolarul 9.2.14. Fie α o 1-formă care nu se anulează în nici un punct al varietății și satisfacă $d\alpha = 0$. Atunci nucleul ei, $\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{X}(M) \mid \alpha(X) = 0\}$, e o foliație.

Într-adevăr, se vede ușor că \mathcal{D} e distribuție, iar formula dinainte asigură involutivitatea ei.

Exercițiul 9.2.15. Arătați că, mai general, nucleul unei 1-forme α e o foliație dacă și numai dacă $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

O proprietate extrem de importantă, care se demonstrează cel mai ușor tot local, ca și cea dinainte, este următoarea:

Propoziția 9.2.16. Diferențiala exterioară comută cu imaginea inversă:

$$d(f^* \alpha) = f^*(d\alpha).$$

Demonstrație. Datorită linearității, e suficient să facem demonstrația pentru monoame de felul $\alpha = adx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Avem

$$f^* \alpha = (a \circ f)(f^* dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^* dx^{i_k}).$$

Dar, pentru orice $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $dg \in \Omega^1(M)$ și $f^*(dg) = d(g \circ f)$ (vezi § Spațiul cotangent). Așadar, $f^*(dx^i) = d(x^i \circ f)$. Rezultă, folosind și $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$:

$$\begin{aligned} d(f^* \alpha) &= d\{(a \circ f)d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ f)\} \\ &= d(a \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ f), \end{aligned}$$

termenii de tipul $d(d(x^{i_1} \circ f))$ fiind nuli datorită proprietății $d^2 = 0$. Pe de altă parte, din aceleași motive ca mai sus:

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= f^*(da \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = (f^* da) \wedge f^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dx^{i_k}) \\ &= d((a \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ f)), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Exercițiul 9.2.17. Dacă α, β sînt închise, atunci și $\alpha \wedge \beta$ e închisă. Dacă α e închisă și β exactă, atunci $\alpha \wedge \beta$ e exactă.

Exercițiul 9.2.18. Am văzut în Exemplul 9.2.4 că pe T^*M există o 1-formă canonică λ . Arătați că $d\lambda$ este o 2-formă nedegenerată (ceea ce înseamnă că T^*M are, în mod canonic, o structură simplctică).

Aplicație. *Forme stîng invariante pe grupuri Lie. (Continuare).* Fie acum $\alpha \in \Omega_{inv}^1(G)$ și $X, Y \in L(G)$. Atunci, deoarece $\alpha(X) = \text{const.}$, $\alpha(Y) = \text{const.}$, obținem $d\alpha(X, Y) = -\frac{1}{2}\alpha([X, Y])$.

Ca urmare, dacă $\{X_1, \dots, X_n\}$ e o bază de cîmpuri stîng invariante, cu constantele de structură asociate $\{c_{ijk}\}$, iar $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e baza duală de 1-forme stîng invariante, atunci avem:

$$d\alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{j < k} c_{jki} \alpha_k \wedge \alpha_j.$$

Produsul interior. Produsul exterior este o operație internă pe mulțimea formelor diferențiale. Există însă și o operație externă, între cîmpuri vectoriale și forme.

Definiția 9.2.19. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ și $\alpha \in \Omega^r(M)$. Forma diferențială $i_X \alpha \in \Omega^{r-1}(M)$, definită prin:

$$i_X \alpha(X_1, \dots, X_{r-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{r-1}),$$

se numește *produsul interior al lui X cu α* .

Așadar, produsul interior fixează primul argument al formei diferențiale. Acțiunea sa asupra produsului exterior este următoarea:

$$(9.6) \quad i_X(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = i_X \alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge i_X \alpha_2.$$

Pentru demonstrație, observăm întii că, deoarece produsul interior este $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear ($i_X(a\alpha + b\beta) = ai_X\alpha + bi_X\beta$) și $i_{fX+gY}\alpha = fi_X\alpha + gi_Y\alpha$, e suficient să verificăm (9.6) pe forme decompozabile de forma $\alpha_1 = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r_1}}$ și $\alpha_2 = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r_2}}$. Pe de altă parte, e ușor de văzut că:

$$i_X(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) = \sum_k (-1)^{k+1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge i_X dx^k \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Verificarea se face luînd $X = \frac{\partial}{\partial x^s}$, cu $s \in \{i_1, \dots, i_r\}$. Restul verificărilor sînt acum imediate. Direct din definiție rezultă comutarea acțiunii unui difeomorfism (prin imagine inversă) cu produsul interior:

Propoziția 9.2.20. *Fie f un difeomorfism și α o r -formă. Atunci are loc relația:*

$$i_X(f^* \alpha) = f^*(i_{dfX} \alpha).$$

Local, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $\alpha = a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, avem:

$$i_X \alpha = X^i \alpha_{ii_2 \dots i_r} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Observația 9.2.21. Alte notații foarte folosite pentru produsul interior sînt: $X \rfloor \alpha$ (cîmpul intră în formă) și $i(X)\alpha$. De asemenea, de multe ori, în loc de i_X apare ι_X .

Exercițiul 9.2.22. Pentru $X = \frac{\partial}{\partial x} + (\sin z - \cos x) \frac{\partial}{\partial y} - x^2 y \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ și $\alpha = y^2 dx \wedge dz + \log(xy) dx \wedge dy + \text{tg} x dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, calculați $d\alpha$ și $i_X \alpha$.

Exercițiul 9.2.23. Fie μ o formă volum pe M . Arătați că aplicația $\mathcal{X}(M) \ni X \mapsto i_X \mu \in \Omega^{n-1}(M)$ e izomorfism de module.

3. Derivata Lie a formelor diferențiale.

În secțiunea 5 am definit derivata Lie a funcțiilor și a câmpurilor vectoriale pe direcția unui câmp X . Ea măsoară variația funcției, respectiv, câmpului, sub acțiunea fluxului X_t . Reamintim că aveam formulele:

$$(9.7) \quad \mathcal{L}_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ X_t - f) = X(f).$$

$$(9.8) \quad (\mathcal{L}_X Y)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dX_{-t}(Y) - Y_x).$$

Similar, folosind acțiunea fluxului prin imagine inversă, pentru o r -formă α , definim:

$$(9.9) \quad (\mathcal{L}_X \alpha)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (X_t^* \alpha_{X_t(x)} - \alpha_x).$$

După cum se vede, $\mathcal{L}_X \alpha$ este o r -formă care verifică relația:

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_x = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X_t^* \alpha_{X_t(x)}).$$

Următoarea propoziție listează proprietățile derivatei Lie a formelor diferențiale:

Propoziția 9.3.1. Pentru orice câmp vectorial X :

(1) $\mathcal{L}_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ e o derivare:

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta.$$

(2) Derivata Lie comută cu diferențiala exterioară: $d\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X d$.

(3) Formula lui Cartan¹: $\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$.

(4)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_r) &= \mathcal{L}_X(\alpha(X_1, \dots, X_r)) \\ &\quad - \sum_i \alpha(X_1, \dots, X_{i-1}, \mathcal{L}_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_r), \end{aligned}$$

sau, echivalent:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_r) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_r)) \\ &\quad - \sum_i \alpha(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_r). \end{aligned}$$

(5) $i_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$.

(6) $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}$.

¹Formula magică, după cum o numesc mulți autori. Într-adevăr, formula aceasta este esențială pentru întreaga geometrie simplctică, anume geometria unei 2-forme închise și de rang maxim.

Demonstrație. Pentru prima proprietate, folosim $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ și definiția. Pentru simplitate, nu mai indicăm punctul în care calculăm derivatele:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (X_t^*(\alpha \wedge \beta) - \alpha \wedge \beta) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (X_t^*\alpha \wedge X_t^*\beta + X_t^*\alpha \wedge \beta - X_t^*\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \beta) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (X_t^*\alpha - \alpha) \wedge \beta + \lim_{t \rightarrow 0} X_t^*\alpha \wedge \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (X_t^*\beta - \beta) \\ &= \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta,\end{aligned}$$

unde, pentru ultima egalitate, am ținut seama că $X_0 = Id$.

Pentru comutarea lui \mathcal{L} cu d , demonstrăm întâi că relația are loc pe funcții. Avem, folosind definiția și comutarea lui d cu imaginea inversă (Propoziția 9.2.16):

$$\mathcal{L}_X(df) = \frac{d}{dt} \Big|_0 X_t^*(df) = \frac{d}{dt} \Big|_0 d(X_t^*f) = d \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 (X_t^*f) \right) = d\mathcal{L}_Xf.$$

Fie acum $\alpha \in \Omega^r(M)$. Derivata Lie și diferențiala exterioară sînt operatori locali, deci e suficient să lucrăm pe un sistem de coordonate locale în care putem lua $\alpha = a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = a_I dx^I$ și $d\alpha = da_I \wedge dx^I$. Așadar:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(d\alpha) &= \mathcal{L}_X(da_I \wedge dx^I) = \mathcal{L}_X(da_I) \wedge dx^I + da_I \wedge \mathcal{L}_X(dx^I) \\ &= d(\mathcal{L}_X a_I) \wedge dx^I + da_I \wedge \sum_{k=1}^r dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_X(dx^{i_k}) \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= d(\mathcal{L}_X a_I) \wedge dx^I + da_I \wedge \sum_{k=1}^r dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(\mathcal{L}_X x^{i_k}) \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \cdot \mathcal{L}_X x^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\end{aligned}$$

$$dx^I + a_I \mathcal{L}_X(dx^I)$$

Pe de altă parte:

$$\begin{aligned}d(\mathcal{L}_X\alpha) &= d((\mathcal{L}_X a_I) dx^I + a_I \mathcal{L}_X(dx^I)) = \\ &= d(\mathcal{L}_X a_I) \wedge dx^I + da_I \wedge \mathcal{L}_X(dx^I) + a_I d(\mathcal{L}_X dx^I),\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația deoarece $d(\mathcal{L}_X dx^I) = 0$, conform calculului anterior.

Pentru formula lui Cartan, observăm că, la fel ca și \mathcal{L}_X , membrul drept e o derivare:

$$\begin{aligned}(di_X + i_X d)(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= d(i_X \alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge i_X \alpha_2) + i_X(d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge d\alpha_2) \\ &= d(i_X \alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1-1} i_X \alpha_1 \wedge d\alpha_2 + (-1)^{r_1} (d\alpha_1 \wedge i_X \alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge d(i_X \alpha_2)) \\ &\quad + i_X(d\alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{r_1+1} d\alpha_1 \wedge i_X \alpha_2 + (-1)^{r_1} (i_X \alpha_1 \wedge d\alpha_2 + (-1)^{r_1} \alpha_1 \wedge i_X(d\alpha_2)) \\ &= (di_X + i_X d)(\alpha_1) \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge (di_X + i_X d)(\alpha_2).\end{aligned}$$

În plus, e evident că, deoarece $dd = 0$, membrul drept comută cu d :

$$d(di_X + i_X d) = ddi_X + di_X d = di_X d + i_X dd = (di_X + i_X d)d.$$

Observăm apoi că, pe funcții, egalitatea se verifică:

$$(di_X + i_X d)f = i_X(df) = df(X) = \mathcal{L}_X(f).$$

Acum demonstrația continuă ca și cea dinainte, folosind expresia locală a unei r -forme.

Expresia (4) pentru derivata Lie se obține în felul următor, folosind definiția:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_X \alpha)_x(X_{1x}, \dots, X_{rx}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((X_t^* \alpha)_x(X_{1x}, \dots, X_{rx}) - \alpha_x(X_{1x}, \dots, X_{rx}) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\alpha_{X_t(x)}(dX_t(X_{1x}), \dots, dX_t(X_{rx})) - \alpha_{X_t(x)}(X_{1X_t(x)}, \dots, X_{rX_t(x)}) \right) \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\alpha_{X_t(x)}(X_{1X_t(x)}, \dots, X_{rX_t(x)}) - \alpha_x(X_{1x}, \dots, X_{rx}) \right) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha)(X_1, \dots, X_r)_x \quad (\text{e a doua limită dinainte}) \\ &- \sum_k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\alpha_{X_t(x)}(dX_t(X_{1X_t(x)}), \dots, dX_t(X_{(i-1)X_t(x)}), \right. \\ &\quad \left. X_{iX_t(x)} - dX_t(X_{iX_t(x)}), X_{(i+1)X_t(x)}, \dots, X_{rX_t(x)}) \right) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha)(X_1, \dots, X_r)_x - \sum_k \lim_{t \rightarrow 0} \left(\alpha_{X_t(x)}(dX_t(X_{1X_t(x)}), \dots, dX_t(X_{(i-1)X_t(x)}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{t}(X_{iX_t(x)} - dX_t(X_{iX_t(x)})), X_{(i+1)X_t(x)}, \dots, X_{rX_t(x)}) \right) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha)(X_1, \dots, X_r)_x - \sum_i \left(\alpha(X_1, \dots, X_{i-1}, \mathcal{L}_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_r)_x \right). \end{aligned}$$

Acum, folosind această formulă, relația (5) e aproape imediată:

$$\begin{aligned} & ((\mathcal{L}_X i_Y)(\alpha))(X_1, \dots, X_{r-1}) = (\mathcal{L}_X(i_Y \alpha))(X_1, \dots, X_{r-1}) \\ &= X(\alpha(Y, X_1, \dots, X_r) - \sum \alpha(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_{r-1})) \\ &((i_Y \mathcal{L}_X)(\alpha))(X_1, \dots, X_{r-1}) = (\mathcal{L}_X \alpha)(Y, X_1, \dots, X_{r-1}) \\ &= X(\alpha(Y, X_1, \dots, X_r) - \alpha([X, Y], X_1, \dots, X_{r-1}) \\ &- \sum \alpha(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_{r-1})), \quad \text{deci:} \\ &((\mathcal{L}_X i_Y)(\alpha)) - ((i_Y \mathcal{L}_X)(\alpha)) = i_{[X, Y]} \alpha. \end{aligned}$$

În fine, relația (6) rezultă ușor folosind formula lui Cartan și relația (5). ■

Observația 9.3.2. Aplicată pe cîmpuri vectoriale, relația (6) nu e altceva decît identitatea lui Jacobi.

Exercițiul 9.3.3. Arătați că, local, expresia derivatei Lie este:

$$\mathcal{L}_X \alpha = X^l \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \alpha_{l i_2 \dots i_r} \frac{\partial X^l}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Exercițiul 9.3.4. Folosiți formula invariantă a derivatei Lie ca să demonstrați că, pentru orice difeomorfism $f: M \rightarrow M'$ și orice $\alpha \in \Omega^r(M')$, are loc formula:

$$\mathcal{L}_{df(f)X} f^* \alpha = f^* \mathcal{L}_X \alpha.$$

Exercițiul 9.3.5. (Lema lui Cartan) Fie $k \leq n = \dim M$ și $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-forme independente în fiecare punct. Fie $\theta_1, \dots, \theta_k$ 1-forme care satisfac $\sum_{i=1}^k \theta_i \wedge \omega_i = 0$. Atunci există funcțiile diferențiabile A_{ij} , cu $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, k$, astfel încât $\theta_i = \sum_{j=1}^k A_{ij} \omega_j$.

Exercițiul 9.3.6. (Forme de contact) O 1-formă α pe o varietate $2n+1$ -dimensională se numește *de contact* dacă $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ e formă volum. Arătați că nucleul unei forme de contact e o distribuție neintegrabilă ale cărei varietăți integrale au dimensiune maximă $n+1$. Arătați că există un unic câmp vectorial R (numit *câmp Reeb* sau *characteristic*) cu proprietățile $i_R \alpha = 1$ și $i_R d\alpha = 0$. Deduceți de aici și formulele: $\mathcal{L}_R \alpha = 0$, $\mathcal{L}_R d\alpha = 0$, $\mathcal{L}_{fR} \alpha = df$, $\mathcal{L}_{fR} d\alpha = 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Arătați, prin inducție, că există un sistem local de coordonate în care α se scrie

$$\alpha = dx^1 + x^2 dx^3 + \dots + x^{2s} dx^{2s+1}.$$

Reciproc, orice formă care admite astfel de exprimări locale e de contact.

Arătați că, pe sfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, restricția formei

$$\alpha = x^2 dx^1 - x^1 dx^2 + \dots + x^{2n+2} dx^{2n+1} - x^{2n+1} dx^{2n+2}$$

e de contact.

Mai general, fie $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ și N o varietate paralelizabilă de dimensiune n și $\omega_1, \dots, \omega_n$ o bază de 1-forme globale pe N . Atunci varietatea produs $S^{n-1} \times N$ admite forma de contact

$$\alpha = x^1 \omega_1 + \dots + x^n \omega_n.$$

Exercițiul 9.3.7. Fie M_i varietăți diferențiabile, M_1 conexă, și fie $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ proiecția naturală. Arătați că o r -formă α pe $M_1 \times M_2$ e imaginea inversă a unei r -forme de pe M_2 , $\alpha = \pi_2^* \alpha_2$, dacă și numai dacă $i_X \alpha = 0$ și $\mathcal{L}_X \alpha = 0$ pentru $X \in \mathcal{X}(M_1 \times M_2)$ pentru care $d_{(x_1, x_2)} \pi_2 X_{(x_1, x_2)} = 0$.

Observația 9.3.8. Deoarece avem definită derivata Lie pentru câmpuri și pentru 1-forme, putem să îi extindem acțiunea asupra câmpurilor tensoriale de tip (p, k) în felul următor. Începem prin a defini acțiunea lui X asupra unui câmp decompozabil $T = X_1 \otimes \dots \otimes X_k \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ (vezi subsecțiunea 8) prin:

$$(9.10) \quad \mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} dX_{-t}(X_1 \otimes \dots \otimes X_k) \otimes X_t^*(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p),$$

apoi extindem prin linearitate.

Rezultă că și derivata Lie a câmpurilor tensoriale e o derivare. În plus, ea comută cu contracția tensorială (demonstrați!). De asemenea, toate formulele demonstrate anterior (care nu implică derivata exterioară) se extind la câmpuri tensoriale.

Ce semnificație are anularea derivatei Lie pe direcția unui câmp vectorial? Avem răspunsul în:

Propoziția 9.3.9. Fie T un câmp tensorial și $X \in \mathcal{X}(M)$. Atunci $\mathcal{L}_X T = 0$ dacă și numai dacă T e invariant în raport cu grupul local uniparametric generat de X .

Demonstrație. Dacă, pentru orice t , avem $X_t^* T = T$ (notăm, formal, cu X_t^* acțiunea lui X_t asupra lui T , dar știm că ea are loc diferit pe componentele covariante și pe cele contravariante), atunci din (9.10) rezultă $\mathcal{L}_X T = 0$.

Pentru reciprocă, observăm întâi că:

$$X_t^*(\mathcal{L}_X T) = \frac{d}{ds} \Big|_t (X_s^* T).$$

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} X_t^*(\mathcal{L}_X T) &= X_t^*(\mathcal{L}_{dX_t(X)} T) && \text{fluxul lui } X \text{ invariază } X \\ &= \mathcal{L}_X(X_t^* T) && \text{din Exercițiul 9.3.4} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (X_s^*(X_t^* T) - X_t^* T) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (X_{s+t}^* T - X_t^* T) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_t (X_s^* T). \end{aligned}$$

Așadar, dacă $\mathcal{L}_X T = 0$, rezultă că $X_t^* T$ e constantă în raport cu t . Deci $X_t^* T = X_0^* T = T$.

■

Divergența unui câmp vectorial. Fie M o varietate orientată de o formă volum μ . Cum derivata Lie nu schimbă gradul formelor, $\mathcal{L}_X \mu$ trebuie să fie tot o formă de grad maxim, deci un multiplu al lui μ . Definim *divergența lui X față de μ* prin egalitatea:

$$\mathcal{L}_X \mu = \operatorname{div}_\mu(X)\mu.$$

Atunci cînd forma volum e fixată, scriem, de obicei, doar $\operatorname{div}(X)$.

Exercițiul 9.3.10. Verificați că, pentru $M = \mathbb{R}^n$ și $\mu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, definiția divergenței se reduce la cea clasică, anume $\operatorname{div} X = \sum \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$.

Din propoziția anterioară, aplicată pentru $T = \mu$, obținem:

Corolarul 9.3.11. $\operatorname{div}(X) = 0$ dacă și numai dacă forma volum e invariantă la acțiunea fluxului lui X .

În general, despre un difeomorfism care invariază o formă volum se spune că păstrează volumul; aceeași terminologie e folosită pentru un câmp vectorial cu divergență nulă.

Exercițiul 9.3.12. Demonstrați următoarele proprietăți ale divergenței:

- (i) $\operatorname{div}_{f\mu}(X) = \operatorname{div}_\mu(X) + \frac{1}{f} X(f)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$.
- (ii) $\operatorname{div}_\mu(gX) = g \operatorname{div}_\mu(X) + X(g)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
- (iii) $\operatorname{div}_\mu([X, Y]) = X(\operatorname{div}_\mu(Y)) - Y(\operatorname{div}_\mu(X))$.

Aplicație: Distribuții și forme diferențiale; Teorema lui Frobenius, varianta cu forme.

Schițăm aici (cf. [Le, §11.3]) interpretarea teoremei lui Frobenius (vezi secțiunea 7) în limbaj de forme diferențiale. Cititorul interesat va completa singur detaliile.

1. Orice distribuție se poate descrie cu ajutorul unor 1-forme. Mai precis: Fie D o distribuție r -dimensională; atunci pentru fiecare punct $x \in M^n$ există o vecinătate deschisă U și 1-formele $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ linear independente pe U astfel încît

$$D_y = \operatorname{Ker} \alpha_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \alpha_{n-r}, \quad \text{pentru orice } y \in U.$$

Se spune că formele cu această proprietate *definesc local* D . Pentru demonstrație, se alege un sistem de câmpuri independente X_1, \dots, X_r care generează D într-o vecinătate a lui x , se completează la o bază de câmpuri X_1, \dots, X_n independente, eventual pe o vecinătate mai mică a lui x (cum anume? acesta e pasul netrivial), apoi se consideră reperul dual $\theta_1, \dots, \theta_n$. Se vede ușor că $v \in D_y$ dacă și numai dacă $\theta_i(v) = 0$, $i = r+1, \dots, n$.

Luăm deci $\alpha_i = \theta_{r+i}$. Observați că enunțul acesta nu e altceva decît versiunea diferențială a faptului că orice subspațiu linear r -dimensional e intersecția a $n-r$ hiperplane, fiecare dintre ele fiind nucleul unei funcționale.

2. Spunem că o p -formă ω definită pe un deschis U anihilează distribuția D pe U dacă $\omega_y(v_1, \dots, v_p) = 0$ pentru orice $y \in U$ și $v_1, \dots, v_p \in D_y$. E ușor de verificat că mulțimea formelor din $\Omega(U)$ care anihilează D pe U formează un ideal $\mathcal{I}_D(U)$. E clar că dacă α_i definesc local D , atunci $d\alpha_i \in \mathcal{I}_D(U)$.

3. Se poate arăta acum, folosind formula $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - \omega(Y(X)) - \omega([X, Y])$, că D e involutivă dacă și numai dacă pentru orice deschis U , dacă $\omega \in \mathcal{I}_D(U) \cap \Omega^1(U)$ atunci și $d\omega \in \mathcal{I}_D(U)$.

Anihilatorul $\mathcal{I}_D(U)$ poate fi descris în termeni de forme care definesc local distribuția: $\omega \in \mathcal{I}_D(U) \cap \Omega^p(M)$ dacă și numai dacă pentru orice $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ care definesc local D avem

$$\omega|_U = \sum_1^{n-r} \alpha_i \wedge \beta_i, \quad \text{pentru niște } \beta_i \in \Omega^{p-1}(U).$$

Suficiența condiției e clară. Mai greu de demonstrat e necesitatea, adică identificarea formelor β_j . Iată pașii care trebuie urmați:

- (1) Alegem formele $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ care definesc local D , le prelungim la un reper de forme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pe o vecinătate $V \subseteq U$. Consideră reperul dual X_1, \dots, X_n astfel încît X_{n-r+1}, \dots, X_n să genereze D pe V .
- (2) Arătăm că $\omega \in \mathcal{I}_D(V) \cap \Omega^p(V)$ dacă și numai dacă $\omega(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) = 0$, cu $n-r+1 \leq i_j \leq n$.
- (3) Putem deci scrie:

$$\begin{aligned} \omega|_V &= \sum_{i_1 < \dots < i_j} \omega_{i_1 \dots i_j}|_V \alpha_{i_1}|_V \wedge \dots \wedge \alpha_{i_j}|_V \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_j} \omega_{i_1 \dots i_j, i_1 \leq n-r}|_V \alpha_{i_1}|_V \wedge \dots \wedge \alpha_{i_j}|_V \\ &\quad (\text{pt. că măcar un indice tebuie să fie } \leq n-r) \\ &= \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i|_V \wedge \sum_{i_2 < \dots < i_j} \omega_{ii_2 \dots i_j}|_V \alpha_{i_2}|_V \wedge \dots \wedge \alpha_{i_j}|_V \end{aligned}$$

și punem $\beta_i|_V := \sum_{i_2 < \dots < i_j} \omega_{ii_2 \dots i_j}|_V \alpha_{i_2}|_V \wedge \dots \wedge \alpha_{i_j}|_V$.

Acoperim U cu mulțimi V pe care am definit formele β și globalizăm folosind o partiție a unității.

Acum rezultă imediat:

4. Distribuția D e involutivă dacă și numai dacă pentru orice mulțime de 1-forme $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ care o definesc local are loc

$$d\alpha_i = \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_i \wedge \gamma_{ik},$$

pentru niște 1-forme γ_{ik} , cu $1 \leq i, k \leq n-r$. În fine, putem demonstra varianta cu forme a teoremei lui Frobenius:

5. Distribuția D e involutivă dacă și numai dacă $\mathcal{I}(D)$ e un ideal diferențial, adică $d\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{I}(D)$.

Necesitatea: Fie ω o 1-formă care anihilează D pe U . Alegem $x \in U$ și o funcție test φ cu suport în U și care ia valoarea 1 într-o vecinătate a lui x . Avem $d(\varphi\omega) = d\varphi \wedge \omega + \varphi d\omega \in \mathcal{S}(D)$ pentru că $d\omega \in \mathcal{S}(D)$. Cum $d(\varphi\omega)_x = (d\omega)_x$, rezultă că și $d\omega$ anihilează D pe U . Acum aplicăm 3.

Suficiența: Alegem $\eta \in \mathcal{S}(D)$. Ca de obicei, putem presupune η omogenă de grad mai mare ca 2 (gradul 1 e conținutul punctului 3.). Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 1-forme care definesc local D pe U . Un calcul direct, folosind rezultatele anterioare conduce la

$$d\eta|_U = d \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \wedge \beta_i = \sum_{i=1}^{n-r} \sum_k \alpha_i \wedge \gamma_{ik} \wedge \beta_i - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \wedge d\beta_i,$$

de unde rezultă că $d\eta$ anihilează și ea D .

Aplicație: Coomologia lui \mathbb{R}^n . Prezentăm în încheiere demonstrația faptului că toate grupurile de coomologie ale lui \mathbb{R}^n sînt nule. Motivul includerii acestei demonstrații aici (deși nu vom merge mai departe cu studiul coomologiei de Rham) este că ea poate fi văzută ca o aplicație a formulei lui Cartan pentru derivata Lie.

Teorema 9.3.13. (Lema lui Poincaré). *Orice formă închisă pe un deschis homeomorf cu o bilă deschisă din \mathbb{R}^n e exactă.*

În particular, orice formă diferențială închisă pe o varietate diferențiabilă este local exactă (adică există un deschis pe care restricția formei este exactă).

Demonstrație. E clar că e suficient să demonstrăm enunțul pentru forme definite pe bila deschisă $B := B^n$. Fie α o astfel de k -formă închisă.

Cheia demonstrației constă în definirea unui așa-numit *operator de omotopie* (vezi [Wa], [BT]) $K : \Omega^k(B) \rightarrow \Omega^{k-1}(B)$ care satisface relația:

$$Kd + dK = 1_{\Omega^k(B)}.$$

E clar că, dacă am construit K , atunci $d\alpha = 0$ atrage după sine:

$$\alpha = d(K\alpha),$$

adică α e exactă.

Pentru construcția lui K , va fi suficient să găsim un câmp vectorial X și un operator $h : \Omega^k(B) \rightarrow \Omega^k(B)$ cu proprietățile:

- $h \circ d = d \circ h$.
- $h \circ \mathcal{L}_X = 1_{\Omega^k(B)}$.

Într-adevăr, formula lui Cartan împreună cu relația a doua produce:

$$h(i_X d + di_X) = 1_{\Omega^k(B)},$$

iar comutarea lui h cu d conduce, mai departe, la:

$$(hi_X)d + d(hi_X) = 1_{\Omega^k(B)}.$$

Vom pune, așadar, $K := h \circ i_X$.

Pe postul lui X se ia câmpul radial $X = u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Operatorul h e definit cu ajutorul integrării (nu ar trebui să surprindă: formal, integrarea e „inversa“ derivării, deci scade gradul formelor). Ca de obicei, dăm întâi definiția pe forme monomiale:

$$h(a_I du^I)(u) = \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tu) dt \right) du^I(u),$$

apoi extindem prin linearitate.

Demonstrăm acum cele două proprietăți ale lui h .

Pentru prima dintre ele, facem un calcul direct:

$$\begin{aligned} h(d(a_I u^I))(u) &= h\left(\frac{\partial a_I}{\partial u^j} du^j \wedge du^I\right)(u) = \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial a_I}{\partial u^j} \Big|_{tu} dt\right) du^j \wedge du^I(u) \\ &= d\left(\int_0^1 t^{k-2} f(tu) dt\right) du^I(u) = d(h(a_I du^I))(u). \end{aligned}$$

Pentru a doua, din forma specială a lui X rezultă că

$$\mathcal{L}_X(a_I du^I) = u^j \frac{\partial a_I}{\partial u^j} du^I + a_I u^j \mathcal{L}_X(du^I).$$

Pentru calculul ultimului termen, ținem seama că, în general:

$$\mathcal{L}_Y(du) = i_Y(du) + d(i_Y(du)) = d(i_Y(du)).$$

Pentru $Y = X$, vom avea:

$$\mathcal{L}_{u^j \frac{\partial}{\partial u^j}}(du^i) = d(du^i(u^j \frac{\partial}{\partial u^j})) = d(u^j \delta_j^i) = du^i.$$

Astfel, cum \mathcal{L}_X e derivare, avem:

$$\mathcal{L}_{u^j \frac{\partial}{\partial u^j}}(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) = \left(k a_I + u^j \frac{\partial a_I}{\partial u^j}\right) du^I.$$

Avem deci:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{L}_X(a_I du^I))(u) &= h\left(\left(k a_I + u^j \frac{\partial a_I}{\partial u^j}\right) du^I\right)(u) \\ &= \left(\int_0^1 t^{k-1} \left(k a_I(tu) + u^j(tu) \frac{\partial a_I}{\partial u^j} \Big|_{tu}\right) dt\right) du^I(u) \\ &= \left(\int_0^1 (t^k a_I(tu))' dt\right) du^I = a_I(u) du^I(u). \end{aligned}$$

Acum demonstrația e completă. ■

Corolarul 9.3.14. *Coomologia de Rham a oricărei bile deschise din \mathbb{R}^n (în particular, a lui \mathbb{R}^n) e nulă în orice dimensiune $k \geq 1$.*

4. Integrare pe varietăți. Formula lui Stokes

Definiția integralei unei forme de grad maxim cu suport compact. Vom extinde acum integrarea de la \mathbb{R}^n la varietăți (orientate). Dar nu vom mai integra funcții, ci forme diferențiale (de fapt, și pe \mathbb{R} tot forme se integrează, aceasta e semnificația aceluia dx din scrierea $\int_a^b f(x)dx$ a cărui prezență nu se motivează niciodată în liceu...) Mai mult, deoarece varietatea pe care integrăm nu e neapărat compactă, ne vom limita la forme cu suport compact.

Fie, deci, M o varietate de dimensiune n , orientabilă, pe care am ales o orientare. Reamintim că suportul unei forme ω este mulțimea $\text{sup } \omega = \{x \in M | \omega_x \neq 0\}$, deci, dacă M e compactă, atunci $\text{sup } \omega$, care e închisă, e automat compactă. Vom nota cu $\Omega_0^p(M)$

p -formele cu suport compact pe M . E evident că avem de-a face cu un subspațiu vectorial real al lui $\Omega^p(M)$.

Exercițiul 9.4.1. Dacă $f: M \rightarrow N$ e un difeomorfism și $\omega \in \Omega_0^p(N)$, atunci $f^*\omega \in \Omega_0^p(M)$.

În cazul cel mai simplu, $M = \mathbb{R}^n$, avem un sistem global de coordonate și orice n -formă ω se scrie $\omega = a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Putem deci defini

$$\int \omega := \int a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n,$$

integrarea din dreapta avînd sens deoarece ω are suport compact.

În cazul general, fixăm un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ compatibil cu orientarea (adică toate schimbările de coordonate se fac cu determinant pozitiv) și o partiție a unității $\{f_\alpha\}$ subordonată acoperirii $\{U_i\}$ (vezi Capitolul 5, §5).

Dacă ω_i e o n -formă cu $\text{sup } \omega_i \subset U_i$ compact, putem „muta“ forma ω_i pe \mathbb{R}^n cu ajutorul lui φ_i^{-1} (vom obține o formă cu suport compact în $\varphi_i(U_i)$). Definim, ca mai sus:

$$\int_{U_i} \omega_i := \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* \omega_i (= \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1} \circ a_i) du^1 \dots du^n),$$

unde (u^1, \dots, u^n) sînt coordonatele de pe $\varphi_i(U_i)$.

Acum folosim partiția unității ca să „spargem“ forma ω într-o sumă de forme cu suportul în U_i : scriem

$$\omega = \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha} \right) \omega = \sum_{\alpha} (f_{\alpha} \omega).$$

Cum, din definiția partiției unității, fiecare f_{α} are suportul conținut într-un U_i , rezultă că fiecare formă $f_{\alpha} \omega$ va avea suportul în acel U_i . Deci, conform celor de mai sus, știm ce înseamnă $\int_{U_i} f_{\alpha} \omega$ și putem defini:

$$\int_M f_{\alpha} \omega := \int_{U_i} f_{\alpha} \omega.$$

Dar, ca egalitatea de mai sus să aibă sens, trebuie să ne asigurăm că nu depinde de mulțimea U_i în care se află suportul lui f_{α} (și nici de aplicația de hartă corespunzătoare). Or, dacă $\text{sup}(f_{\alpha} \omega) \subset U_i \cap U_j$ și notăm (u^1, \dots, u^n) , respectiv (v^1, \dots, v^n) coordonatele pe $\varphi_i(U_i)$, respectiv $\varphi_j(U_j)$, atunci avem

$$(\varphi_i^{-1})^*(f_{\alpha} \omega) = a_i(u) du^1 \dots du^n, \quad (\varphi_i^{-1})^*(f_{\alpha} \omega) = a'_j(v) dv^1 \dots dv^n$$

și funcțiile a_i, a'_j sînt legate prin relația

$$a = a' \cdot J,$$

unde J e iacobianul schimbării de coordonate (pozitiv, conform alegerii acoperirii compatibile cu orientarea):

$$J = \det d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \det \frac{\partial(v^1, \dots, v^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)}.$$

Atunci formula de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann ne spune că:

$$\int_{U_i \cap U_j} a'_j(v) dv^1 \dots dv^n = \int_{U_i \cap U_j} a'_j |J| du^1 \dots du^n = \int_{U_i \cap U_j} a_i du^1 \dots du^n,$$

așadar

$$\int_{U_i} f_\alpha \omega = \int_{U_j} f_\alpha \omega.$$

Cu această verificare, putem, în fine, să definim:

$$(9.11) \quad \int_M \omega := \sum_\alpha \int_M f_\alpha \omega,$$

cu observația că suma din dreapta are sens: $\text{sup } \omega$ fiind compact, va fi acoperit de un număr finit de U_i și va intersecta numai un număr finit de $\text{sup } f_\alpha$.

Pentru ca definiția să fie corectă, mai rămîne să demonstrăm că e independentă de partiția unității aleasă, ceea ce rezultă din următorul calcul ($\{g_\beta\}$ e o altă partiție a unității, subordonată aceleiași acoperiri):

$$\sum_\beta \int_M g_\beta \omega = \sum_\beta \sum_\alpha \int_M f_\alpha g_\beta \omega = \sum_\alpha \int_M \sum_\beta g_\beta f_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_M f_\alpha \omega.$$

Definiția 9.4.2. Integrala n -formei cu suport compact ω pe o varietate diferențiabilă M de dimensiune n este scalarul din membrul drept al formulei (9.11).

Observați că nu există, în acest context, decît noțiunea de integrală definită. Pe de altă parte, dacă $\text{sup } \omega$ e cuprins într-o singură vecinătate de coordonate, atunci $\int_M \omega$ se reduce la obișnuita integrală Riemann; noțiunea pe care am introdus-o e deci naturală. **Exercițiul 9.4.3.** Arătați că dacă $\text{sup } \omega_i$ e compact, $i = 1, 2$, atunci și $\text{sup}(\omega_1 + \omega_2)$ e compact. La fel, $\text{sup}(c\omega)$ e compact pentru orice $c \in \mathbb{R}$. Deduceți că $\int_M : \Omega_0^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcțională lineară.

Atragem încă o dată atenția că *pe o varietate n -dimensională putem integra numai n -forme (cu suport compact)*. La rîndul lor, p -formele, cu $p < n$, se pot integra pe orice subvarietate p -dimensională. Iată cum. Fie $h : N \rightarrow M$ o subvarietate p -dimensională a lui M (h poate fi și incluziunea canonică, dar poate fi, mai general, orice scufundare) și fie $\eta \in \Omega_0^p(M)$. Atunci $h^* \eta \in \Omega_0^p(N)$ (demonstrați!). Punem, prin definiție:

$$\int_{h(N)} \eta := \int_N h^* \eta.$$

Vom avea nevoie de această definiție în secțiunea următoare.

Exercițiul 9.4.4. Fie $f : S^1 \rightarrow S^1$, prin $f(z) = z^2$. Fie dt elementul de lungime pe cerc. Arătați că $\int_{S^1} f^*(dt) = 2 \int_{S^1} dt$.

Mai general, dacă $f : M \rightarrow N$ e o acoperire cu k foi și ω o formă de grad maxim pe N , cu suport compact, atunci $\int_M f^* \omega = k \int_N \omega$.

Exercițiul 9.4.5. (Teorema lui Fubini) Fie α, β forme de grad maxim cu suport compact pe M_1 , respectiv M_2 . Fie $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ proiecțiile canonice. Arătați că $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta$ are suport compact în $M_1 \times M_2$ și

$$\int_{M_1 \times M_2} \pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta = \left(\int_{M_1} \alpha \right) \cdot \left(\int_{M_2} \beta \right).$$

Formula schimbării de variabilă capătă, în acest context, următoarea înfățișare:

Teorema 9.4.6. (Schimbarea de variabilă.) Fie M și N varietăți n -dimensionale, orientate și $h : M \rightarrow N$ un difeomorfism care păstrează orientările respective. Fie ω o

n -formă cu suport compact pe N . Atunci

$$\int_M h^* \omega = \int_N \omega.$$

Demonstrație. Conform exercițiului Exercițiul 9.4.1, suportul lui $h^* \omega$ e compact, deci integrala din membrul stîng are sens. Alegem un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ compatibil cu orientarea lui M și $\{f_\alpha\}$ o partiție a unității subordonată lui $\{U_i\}$, ca mai sus. Atunci $\{(h(U_i), \varphi_i \circ h^{-1})\}$ e un atlas pe N , compatibil cu orientarea lui N , iar $\{f_\alpha \circ h^{-1}\}$ e o partiție a unității subordonată acoperirii $\{h(U_i)\}$ (demonstrați!). Acum putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_M f^* \omega &= \sum_\alpha \int_M f_\alpha f^* \omega = \sum_\alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* (f_\alpha f^* \omega) \\ &= \sum_\alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} [(\varphi_i \circ h^{-1}) \circ h \circ \varphi_i^{-1}]^* (\varphi_i^{-1})^* (f_\alpha f^* \omega) \quad (\text{s.v. în } \mathbb{R}^n) \\ &= \sum_\alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} ((\varphi_i^{-1})^* \circ h^*) ((h^{-1})^* (f_\alpha f^* \omega)) \\ &= \sum_\alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (h \circ \varphi_i^{-1})^* (f_\alpha \circ h^{-1}) \omega = \sum_\alpha \int_N (f_\alpha \circ h^{-1}) \omega = \int_N \omega. \end{aligned}$$

■

Exemplul 9.4.7. (1) Odată ce știm să integrăm, putem asocia oricărei forme volum fixate ω o măsură pozitivă μ prin formula $\mu(f) := \int_M f \omega$, pentru orice f diferențiabilă (chiar continuă), cu suport compact.

(2) Dacă M e un grup Lie G , se poate arăta mai mult: există o măsură stîng invariantă, adică una cu proprietatea $\mu(f \circ L_a) = \mu(f)$, pentru orice $a \in G$. Într-adevăr, e suficient să construim o formă volum stîng invariantă. Presupunînd că o avem, fie ea ω , atunci:

$$\mu(f) = \int_G (f \circ L_a) L_a^* \omega = \int_G (f \circ L_a) \omega.$$

Rămîne să explicăm construcția lui μ . Nu avem decît să plecăm cu un tensor alternat $(0, n)$, fie el ω' , pe $T_e G$ și îl prelungim la o formă diferențială stîng invariantă punînd:

$$\omega_a(X_1, \dots, X_n) = \omega'(d_a L_{a^{-1}} X_1, \dots, d_a L_{a^{-1}} X_n).$$

O măsură stîng invariantă pe un grup Lie se numește *măsură Haar*. Se poate arăta și că este unică, dar nu o vom face aici. De asemenea, existența ei se poate arăta și mai general, pe grupuri topologice local compacte.

Formula lui Stokes. În analiza clasică, Teorema fundamentală a lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

are cîteva generalizări importante în două și trei dimensiuni, care se studiază în cadrul teoriei integrării de suprafață și volum.

Anume, dacă D e un domeniu mărginit din \mathbb{R}^2 și ∂D e frontiera sa (cu orientarea indusă) și P, Q sînt funcții diferențiabile pe D , avem formula lui Green:

$$\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dacă acum, D e un domeniu orientat în \mathbb{R}^3 și P, Q, R sînt diferențiabile pe D , avem formula lui Gauss:

$$\int_{\partial D} (Pdydz + Qdzdx + Rdx dy) = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

De asemenea, pentru o suprafață $S \subset \mathbb{R}^3$ cu frontiera o curbă netedă și P, Q, R diferențiabile pe un domeniu care conține S , avem formula lui Stokes clasică:

$$\int_{\partial S} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right].$$

Nu e greu de văzut că toate aceste formule pot fi exprimate unitar, cu ajutorul formelor diferențiale. Pentru formula lui Green (respectiv Stokes clasică), lucrul e transparent: punem $\omega = Pdx + Qdy$ (respectiv $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$) și formula devine

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Aceeași formulă produce și formula lui Gauss, luînd $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

Trecem acum la generalizarea acestor formule pe varietăți de dimensiune arbitrară. Avem nevoie de noțiunea de subvarietate cu bord. Dar, ca să nu complicăm expunerea (nu vom folosi această noțiune decît aici), vom da o definiție *ad-hoc*.

Definiția 9.4.8. O regiune cu bord D a varietății n -dimensionale M e o submulțime cu două tipuri de puncte:

(i) puncte interioare: fiecare are o vecinătate din M conținută în D ;

(ii) puncte frontieră: un asemenea punct x are o vecinătate de coordonate (U, φ) cu $\varphi(x) = 0$ și $U \cap D = \{y \in U \mid \varphi^n(y) \geq 0\}$. Vedem că punctele frontieră sînt caracterizate de sisteme de coordonate modelate pe „semispațiul“ superior, ele corespunzînd punctelor de pe frontiera semispațiului. Notăm cu ∂D mulțimea punctelor frontieră. Demonstrăm acum:

Propoziția 9.4.9. Frontiera unei regiuni cu frontieră D e o subvarietate închisă $(n-1)$ -dimensională. Dacă M e orientabilă, atunci și ∂D e orientabilă.

Demonstrație. Într-adevăr, ∂D e o subvarietate închisă în D , punctele ei fiind definite de egalități: dacă U e o vecinătate cu coordonate (x^i) a lui D , atunci $U \cap \partial D = \{y \in U \mid x^n(y) = 0\}$.

Să presupunem acum că M e orientată și fie $x \in \partial D$. Fie U un deschis de coordonate compatibil cu orientarea lui M , și compatibil cu structura de subvarietate a lui ∂D , în jurul lui x . Știm deci că, dacă (x^1, \dots, x^n) sînt coordonate pe U , atunci (x^1, \dots, x^{n-1}) sînt coordonate pe deschisul $U \cap \partial D$ (corespunzător subvarietății ∂D). Alegem pe acest deschis forma volum

$$(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

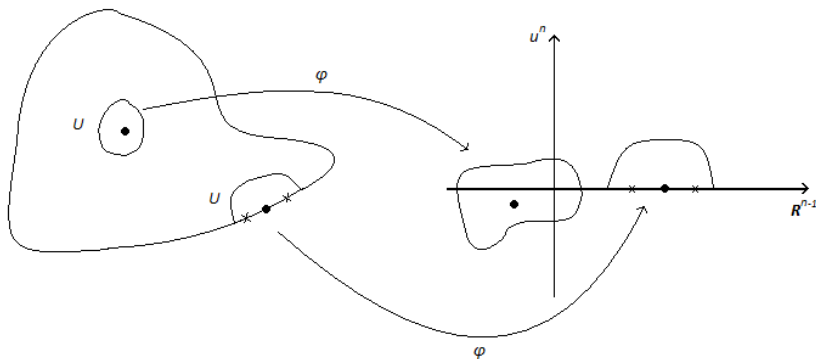
Vom arăta că această alegere e consistentă, adică, la o schimbare de (astfel de) coordonate, iacobianul este pozitiv, ceea ce va însemna că ∂D e orientată de această formă volum.

Dacă V e un alt deschis de coordonate în jurul lui x , cu coordonate (y^i) , avem $\det\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right) > 0$ pentru că M e orientată. Pe de altă parte, prin schimbarea de coordonate considerată, putem scrie $v^n = v^n(u^1, \dots, u^n)$. Când $u^n = 0$ (adică ne aflăm pe frontieră), și $v^n = 0$; iar când $u^n > 0$ (adică sîntem în interiorul lui D), atunci și $v^n > 0$, indiferent de valorile variabilelor u^1, \dots, u^{n-1} . Rezultă de aici că $\frac{\partial v^n}{\partial u^n} > 0$. Atunci, făcînd o schimbare de variabilă, putem presupune că $v^n = u^n$. În acest caz, iacobianul anterior devine

$$0 < \det\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)_{i,j=1,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

deci $\det\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)_{i,j=1,n-1} > 0$, și demonstrația e încheiată. ■

Observația 9.4.10. Orientarea descrisă în propoziția anterioară se numește *orientarea indusă pe bord* (de orientarea interiorului). Ea mai poate fi descrisă și astfel. În orice punct x al bordului, $T_x(\partial D)$ e un hiperplan al lui $T_x D$. Orice vector transvers la acest hiperplan, depinde și de x^n , deci are o componentă pe $\frac{\partial}{\partial x^n}$. Numim vector transvers exterior, unul pentru care această componentă e pozitivă. De exemplu, dacă D este interiorul bilei din \mathbb{R}^3 , atunci bordul său este S^2 și normala exterioară obișnuită e un vector transvers exterior în sensul acestei definiții. Acum spunem că o bază $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ din $T_x(\partial D)$ e pozitiv orientată dacă baza $\{v_1, \dots, v_{n-1}, t\}$ e pozitiv orientată (pe D) pentru orice vector transvers exterior t .



Hărți pe o regiune cu bord

Acum putem demonstra:

Teorema 9.4.11. (Formula lui Stokes). Fie D o regiune cu frontieră în varietatea n -dimensională M și fie ω o $(n-1)$ formă diferențială cu suport compact pe M . Are loc formula:

$$(9.12) \quad \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Dacă $\partial D = \emptyset$, atunci formula devine $\int_D d\omega = 0$.

Demonstrație. Ca și la definirea integralei, fixăm un atlas de coordonate compatibil cu orientarea, fie el $\{(U_i, \varphi_i)\}$, și partiție a unității $\{f_\alpha\}$ subordonată acoperirii (U_i) cu care descompunem forma ω ca $\sum f_\alpha \omega$. Cum operatorii d și f sînt lineari, avem și:

$$\int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(f_\alpha \omega), \quad \int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} (f_\alpha \omega).$$

Reducem astfel problema la una locală: e suficient să demonstrăm că

$$\int_D d(f_\alpha \omega) = \int_{\partial D} (f_\alpha \omega), \quad \text{pentru orice } \alpha.$$

Cu alte cuvinte, e suficient să demonstrăm (9.12) pentru o formă diferențială η de grad $n-1$, cu suport compact conținut într-un deschis de coordonate U (cu coordonate x^1, \dots, x^n), compatibil cu orientarea lui M . Dar atunci e ca și cum am lucra direct în \mathbb{R}^n , adică e suficient să considerăm U deschis în \mathbb{R}^n și η formă cu suport compact în U (deci funcțiile a_j depind acum de $(u = (u^i))$, iar D va fi un domeniu cu frontieră din \mathbb{R}^n . Putem scrie

$$\eta = \sum_j (-1)^{j-1} a_j(u^1, \dots, u^n) du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^j} \wedge \dots \wedge du^n$$

$$d\eta = \left(\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^n.$$

Avem de discutat două cazuri: ∂D intersectează sau nu deschisul U .

Dacă $\partial D \cap U \neq \emptyset$, avem, după definiția bordului:

$$U \cap D = \{u \in U \mid u^n \geq 0\}, \quad U \cap \partial D = \{u \in U \mid u^n = 0\}.$$

Cum funcțiile a_j au suportul în U , le putem prelungi cu 0 în afara lui U . Alegem acum un cub C în semispațiul superior al lui \mathbb{R}^n , plasat cu o față pe frontiera semispațiului și cu 0 în centrul acestei fețe: $\{u \in \mathbb{R}^n \mid |u^i| \leq r, 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq u^n \leq 2r\}$, în așa fel încît $U \cap D$ să fie conținut în întregime în interiorul cubului (revine la a alege r suficient de mare). În particular, funcțiile a_j se anulează pentru orice argument $u^i > r$. Atunci:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \eta &= \int_{U \cap \partial D} \eta = \sum_j (-1)^{j-1} \int_{U \cap \partial D} a_j(u^1, \dots, u^n) du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^j} \wedge \dots \wedge du^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{U \cap \partial D} a_n du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1} \\ &= - \int_{|u^i| \leq r, i=1, \dots, n-1} a_n(u^1, \dots, u^{n-1}, 0) du^1 \dots du^{n-1}, \end{aligned}$$

unde semnul $-$ din ultima egalitate apare datorită felului cum e indusă orientarea pe frontieră.

Similar:

$$\int_D d\eta = \int_{U \cap D} d\eta = \sum_j \int_{U \cap D} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n.$$

Cum, pentru $i \leq n-1$, folosind formula lui Fubini, avem:

$$\begin{aligned} & \int_{U \cap D} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\ &= \int_{\substack{|u^i| \leq r, i \neq j, n \\ 0 \leq u^n \leq 2r}} \left(\int_{-r}^r \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j \right) du^1 \dots \widehat{du^j} \dots du^n = 0, \end{aligned}$$

astfel că singurul sumand eventual nenul este ultimul:

$$\begin{aligned} & \int_{U \cap D} \frac{\partial a_n}{\partial u^n} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\ &= \int_{|u^i| \leq r; i \neq n} (a_n(u^1, \dots, u^{n-1}, r) - a_n(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)) du^1 \dots du^{n-1} \\ &= - \int_{|u^i| \leq r; i \neq n} a_n(u^1, \dots, u^{n-1}, 0) du^1 \dots du^{n-1} \end{aligned}$$

și egalitatea e demonstrată.

Dacă, în schimb, $\partial D \cap U = \emptyset$, atunci $U \subset (M \setminus D)$ sau $U \subset \text{Int}D$. Considerăm acum un cub C ca mai înainte (dar de data aceasta el va conține întreg U) și prelungim la fel, cu 0, funcțiile a_j . Vom avea:

$$\begin{aligned} & \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \dots du^n = \int_C \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \dots du^n \\ &= \int_{|u^i| \leq r, i \neq j} \left(\int_{-r}^r \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j \right) du^1 \dots \widehat{du^j} \dots du^n = 0, \end{aligned}$$

pentru că

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j \\ &= a_j(u^1, \dots, u^{j-1}, r, \dots, u^n) - a_j(u^1, \dots, u^{j-1}, -r, \dots, u^n) = 0. \end{aligned}$$

Cu aceasta, formula lui Stokes este complet demonstrată. ■

Corolarul 9.4.12. Fie M o varietate compactă n -dimensională orientată și ω o $(n-1)$ -formă diferențială. Atunci $\int_M d\omega = 0$.

Exercițiul 9.4.13. Să se arate că pe o varietate compactă, orientabilă, n -dimensională, nu există $(n-1)$ forme cu derivata exterioară nenulă în fiecare punct.

Exercițiul 9.4.14. Pe o varietate compactă de dimensiune $2n$ nu există 2-forme diferențiale exacte și de rang maxim.

Indicație: Dacă $\omega = d\alpha$ e o astfel de formă, atunci ω^n e formă volum, deci $\int_M \omega^n \neq 0$. Dar, din Stokes, $\int_M \omega^n = \int_M d\alpha \wedge \omega^{n-1} = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = 0$, contradicție.

Exercițiul 9.4.15. Fie M o varietate orientată, compactă, cu bord. Să se arate că nu există $f : M \rightarrow \partial M$ astfel încât $f|_{\partial M}$ să fie identitatea. Folosiți acest fapt pentru a demonstra că orice aplicație diferențiabilă $f : B^n \rightarrow B^n$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$, are un punct fix (este o formă slabă a teoremei lui Brouwer).

Indicație: Punem pe ∂M orientarea indusă și alegem o formă volum η (de grad $n - 1$ pe ∂M). Atunci $d\eta = 0$. Dacă prin absurd, există f ca în enunț, atunci $f^*\eta$ e o $n - 1$ formă pe M și $d(f^*\eta) = f^*d\eta = 0$. Acum formula lui Stokes conduce la contradicție. Pentru partea a doua, dacă există f fără puncte fixe, deci $f(p) \neq p$ pentru orice $p \in B^n$, putem face să corespundă oricărui punct $p \in B^n$ punctul de pe $S^{n-1} = \partial B^n$ în care semidreapta $[f(p)p)$ taie frontiera bilei. Se arată că se obține o funcție diferențiabilă care se restrânge la identitate pe frontieră, contradicție.

CAPITOLUL 10

Fibrări vectoriale

În capitolul acesta generalizăm fibrările tensoriale cu care am lucrat pînă acum. Vom da definiția abstractă pentru care cele dinainte reprezintă cazuri particulare.

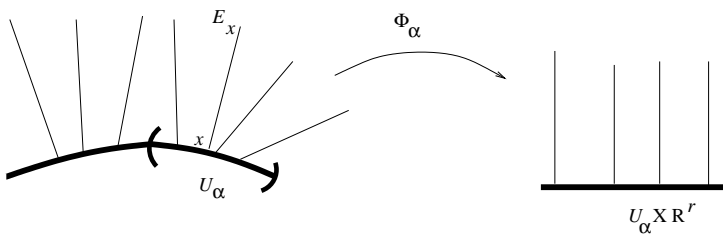
1. Definiții. Exemple

Definiția 10.1.1. O fibrare¹ vectorială (reală) de rang r este o surjecție diferențiable $\pi : E \rightarrow M$ cu proprietățile:

- (1) $E_x := \pi^{-1}(x)$ este spațiu vectorial (real) r -dimensional.
- (2) Pentru orice $x \in M$, există o vecinătate deschisă U a sa și un difeomorfism $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ astfel încît următoarea diagramă să fie comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^r \\
 \searrow \pi & \circlearrowright & \downarrow \text{pr}_1 \\
 & & U_\alpha
 \end{array}$$

unde pr_1 este proiecția pe primul factor. În plus, restricția $\Phi_x : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$ este izomorfism linear.



Trivializare locală. Aici $E_x \cong \mathbb{R}^r$.

În acest context, E , respectiv M , se numesc *spațiul total*, respectiv *bază* fibrării. Spațiul vectorial E_x se numește *fibră*. Perechea (U, Φ) se numește *hartă fibrată*. E clar că M admite o acoperire deschisă cu domenii de hărți fibratate, ca și în cazul varietăților, vorbim despre un *atlas de trivializare* $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$.

Analog se definesc fibrările vectoriale complexe.

De cele mai multe ori, în loc de „fibrare vectorială“, vom spune doar „fibrare“.

¹Se folosește și termenul *fibrat*, ca în „fibratul tangent“.

O fibrare pentru care U poate fi luat întreg M este un produs $M \times \mathbb{R}^r$, de aceea se numește *fibrare triviale*. Astfel, orice hartă fibrată produce o *trivializare locală* a lui E .

Exemplul 10.1.2. Fibrările tensoriale, în particular fibrarea tangentă și cea cotangentă, sînt exemple particulare. De asemenea, fibrarea formelor diferențiale.

Dacă M e paralelizabilă (grup Lie, de exemplu), atunci TM și T^*M sînt fibrări triviale.

Banda lui Möbius infinită este o fibrare vectorială peste S^1 , cu fibra \mathbb{R} . Cilindrii, în schimb, sînt fibrări vectoriale triviale peste S^1 , cu fibra \mathbb{R} .

Pentru două trivializări locale ale căror domenii se intersectează, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, putem considera aplicațiile:

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r.$$

Cum fiecare Φ_α e izomorfism pe fibră, e clar că:

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x) \in \text{GL}(r, \mathbb{R}), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Putem deci defini aplicațiile (numite *funcții de tranziție*):

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(x) = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{R}^r}.$$

Se verifică ușor că funcțiile de tranziție satisfac condițiile (zise de cociclu):

$$(10.1) \quad g_{\alpha\alpha}(x) = Id; \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{pe } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset.$$

Exercițiul 10.1.3. Verificați că $g_{\alpha\beta}(x) = d_{\varphi_\beta(x)}\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ sînt funcțiile de tranziție pentru TM (aici $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e un atlas pe M).

Găsiți funcțiile de tranziție pe T^*M și pe $T^{p,q}M$.

Pentru a continua, avem nevoie de noțiunea de morfism de fibrări (peste aceeași bază):

Definiția 10.1.4. Fie $\pi : E \rightarrow M$ și $\pi' : E' \rightarrow M'$ fibrări vectoriale de rang r, r' . O aplicație diferențiabilă $f : E \rightarrow E'$ se numește *morfism de fibrări* dacă păstrează fibrele (adică $\pi' \circ f = \pi$) și e lineară pe fibre (adică $f|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ e lineară).

Dacă f e difeomorfism și restricția ei la orice fibră e izomorfism linear, atunci f se numește *izomorfism de fibrări*.

Exercițiul 10.1.5. Arătați că izomorfismul de fibrări definește o relație de echivalență pe mulțimea fibrărilor peste o aceeași bază.

Să presupunem acum că pentru aceeași acoperire avem două trivializări: Φ_α și Φ'_α . Atunci există aplicațiile $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R})$, date prin $\lambda_\alpha = \Phi_\alpha \circ (\Phi'_\alpha)^{-1}$. Așadar: $\Phi_\alpha = \lambda_\alpha \circ \Phi'_\alpha$, iar funcțiile de tranziție asociate sînt legate prin relația:

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha g'_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}.$$

În această situație, spunem că cele două pachete de funcții de tranziție sînt echivalente.

Pe de altă parte, e clar că relația aceasta între funcțiile de tranziție se poate scrie și pentru fibrări diferite, dar de același rang: nu intervin în ea decît date de pe bază. Cititorul va demonstra singur:

Lema 10.1.6. Două fibrări vectoriale sînt echivalente dacă și numai dacă există o acoperire de trivializare cu pachete de funcții de tranziție echivalente.

E limpede acum că funcțiile de tranziție identifică o fibrare pînă la izomorfism. Mai precis, dată varietatea M laolaltă cu o acoperire deschisă $\{U_\alpha\}$ și cu un pachet de aplicații $g_{\alpha\beta}$ care satisfac condițiile de cociclu (10.1), construim fibrarea în felul următor. Considerăm pentru început reuniunea disjunctă $\coprod(U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$ pe care o factorizăm la relația de echivalență:

$$(x, v) \sim (x', v') \Leftrightarrow x' = x, v' = g_{\alpha\beta}(x)(v).$$

Definim $E := \coprod(U_\alpha \times \mathbb{R}^r) / \sim$ și $\pi([x, v]) = x$. Se verifică imediat că fibrarea $\pi : E \rightarrow M$ astfel definită are funcțiile de tranziție $\{g_{\alpha\beta}\}$.

E important de notat că această construcție arată cum o fibrare vectorială e perfect de terminată de baza ei, de o acoperire a bazei și de un pachet de funcții care iau valori în grupul de izomorfisme al fibrei; dar fibra însăși nu e dată, ci se construiește.

Încheiem paragraful cu un exemplu foarte important:

Exemplul 10.1.7. Fibratul tautologic. Fie $M = P^n\mathbb{R}$ și $U_{n+1} = \{(d, v) | v \in d\} \subset P^n\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Deci U_{n+1} conține acele perechi de drepte și vectori din \mathbb{R}^{n+1} cu proprietatea că dreapta are direcția vectorului. Altfel spus, U_{n+1} este reuniunea disjunctă a dreptelor din \mathbb{R}^{n+1} . Putem organiza acest spațiu ca fibrare de rang 1 peste spațiul proiectiv, $\pi : U_{n+1} \rightarrow P^n\mathbb{R}$, fibra deasupra unui punct din spațiul proiectiv fiind chiar dreapta reprezentată de acel punct (de aici denumirea de fibrat tautologic).

Orice $v \in U_{n+1}$ se reprezintă sub forma $v = t(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, cu $t \in \mathbb{R}$. Proiecția π lucrează după formula

$$\pi(t(x_0, \dots, x_n)) = [x_0, \dots, x_n].$$

Pentru a construi trivializările locale, folosim atlasul canonic al lui $P^n\mathbb{R}$ (vezi Exemplul 5.2.13). Cum $U_\alpha = \{[x_0, \dots, x_n] | x_\alpha \neq 0\}$, un element din $\pi^{-1}(U_\alpha)$ e de forma $t(x_0, \dots, x_n)$ și se poate scrie *unic* sub forma $t_\alpha(\frac{x_0}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, 1, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_n}{x_\alpha})$. Putem deci defini $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}$ prin

$$\Phi_\alpha(t(x_0, \dots, x_n)) = ([x_0, \dots, x_n], t_\alpha).$$

Se vede imediat că dacă $x_\alpha \neq 0$ și $x_\beta \neq 0$, atunci $t_\alpha = \frac{x_\alpha}{x_\beta} t_\beta$, deci funcțiile de tranziție sînt $g_{\alpha\beta} = \frac{x_\alpha}{x_\beta} \in \text{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

Analog se definește fibratul tautologic peste varietatea Grassmann $G(k, n)$. Aici vom defini spațiul total $U_{k,n}$ ca fiind reuniunea disjunctă a tuturor k -planelor din \mathbb{R}^n . Proiecția va fi $\pi : U_{k,n+1} \rightarrow G(k, n)$, $\pi(v) = V$ dacă $v \in V$ ($\dim V = k$). Evident, $U_{1,n+1} = U_{n+1}$.

Fibrările tautologice se mai numesc *universale* pentru că, așa cum vom vedea, orice fibrat vectorial peste o varietate compactă se poate obține dintr-o fibrare universală printr-o construcție specifică.

2. Secțiuni

Cum baza și spațiul total al unei fibrări sînt varietăți diferențiabile, e legitimă considerarea aplicațiilor de la bază la spațiul total. Dintre acestea, unele au o importanță deosebită:

Definiția 10.2.1. Se numește *secțiune (globală)* a fibrării o aplicație diferențiabilă $s : M \rightarrow E$ cu proprietatea $\pi \circ s = 1_M$.

Dacă s e definită doar pe un deschis U , atunci vorbim despre o *secțiune locală*.

De exemplu, câmpurile vectoriale tangente sînt secțiuni ale lui TM . La fel, orice câmp tensorial de tip (r, s) este o secțiune în fibrarea tensorială respectivă, orice formă diferențiabilă e o secțiune a lui $\Lambda(T^*M)$.

Este clar că mulțimea secțiunilor pe U are o structură de $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modul (demonstrați!). Vom nota acest modul cu $\Gamma(U, E)$ sau cu $\mathcal{C}^\infty(U, E)$. În particular, vedem acum de ce am folosit două notații pentru forme: $\Lambda(T^*(M))$ este spațiul total al fibratului, $\Omega^l(M)$ este modulul secțiunilor.

Secțiuni locale, definite pe deschiși suficient de mici, există întodeauna; pentru un deschis U inclus în unul de trivIALIZARE U_α , folosind difeomorfismul dintre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ și $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, putem defini secțiunile s_i , $i = 1, \dots, r$, prin $s_i(x) = \Phi_\alpha^{-1}(x, e_i)$, unde $\{e_1, \dots, e_r\}$ e baza canonică a lui \mathbb{R}^r . E imediat faptul că $\{s_1, \dots, s_r\}$ sînt independente peste $\mathcal{C}^\infty(U)$. Am demonstrat:

Propoziția 10.2.2. Modulul $\mathcal{C}^\infty(U, E)$ este liber, de rang r peste $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Pe de altă parte, deși secțiunile locale s_i se pot prelungi la M , nimic nu ne asigură că prelungirile vor mai fi independente (în general, vor avea zerouri). Deci $\mathcal{C}^\infty(M, E)$ poate fi infinit dimensional.

Observația 10.2.3. Dacă $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ și $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$, respectiv și $\{s_1^\beta, \dots, s_r^\beta\}$ sînt reperele de secțiuni locale asociate, atunci avem

$$s_i^\beta(x) = \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha(x, e_i) = g_{\alpha\beta}^{-1}(x) s_i^\alpha(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

În consecință, dacă o secțiune $s \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$ se scrie $s = \sum f_i^\alpha s_i^\alpha = \sum f_i^\beta s_i^\beta$, atunci vectorii din \mathbb{R}^r $f^\alpha := (f_i^\alpha)$ și $f^\beta := (f_i^\beta)$ (componentele lui s în cele două repere) sînt legați prin relația:

$$(10.2) \quad f^\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} f^\beta.$$

Atenție: aici, indicii α, β nu sînt de sumare.

Reciproc, dacă plecăm cu o secțiune globală s , ea se poate localiza: pe orice deschis de trivIALIZARE U_α vom avea $s|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^r f_i^\alpha s_i^\alpha$, cu $f_i^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$. Din cele de mai sus, e clar că, dată o acoperire de trivIALIZARE, o familie de vectori (f^α) din \mathbb{R}^r determină o secțiune globală dacă și numai dacă are loc (10.2).

Secțiuni globale, așadar, există de asemenea: acest lucru rezultă folosind teoremele de prelungire cu ajutorul partiției unității. Dar nu știm dacă există secțiuni globale *nenule peste tot*. De ce ne interesează existența lor? Deoarece, cu cît există mai multe secțiuni globale independente în fiecare punct (în particular, nenule peste tot), fibrarea e mai aproape de una trivIALĂ.

Exercițiul 10.2.4. Arătați că M poate fi privită ca o subvarietate a lui E prin intermediul secțiunilor nule $s(x) = 0 \in E_x$, pentru orice $x \in M$.

3. Reducerea grupului structural

Se poate întîmpla ca, pentru o anume acoperire de trivIALIZARE, funcțiile de tranziție să ia valori într-un subgrup strict H al lui $GL(r, \mathbb{R})$: $g_{\alpha\beta}(x) \in H$, pentru orice $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. În acest caz, spunem că *grupul structural al fibrării a fost redus la H* (terminologia e motivată de teoria fibrărilor cu grup structural, în particular a fibrărilor

principale, și de faptul că orice fibrare vectorială e asociată într-un mod care se poate preciza unei fibrări principale. Nu vom aborda fibrările principale; cititorul poate consulta cartea [KN]).

Cazul tipic pentru o asemenea situație este prezentat în:

Teorema 10.3.1. *Grupul structural al oricărui fibrat vectorial real de rang r se poate reduce la $O(r)$.*

Demonstrație. Vom vedea că, de fapt, enunțul e echivalent cu existența unui produs scalar global pe $\mathcal{C}^\infty(M, E)$. Iată cum îl construim.

Fie $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ o acoperire de trivializare fixată. Pe fiecare deschis U_α considerăm reperul de secțiuni locale $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$. Cu ajutorul lui, definim un produs scalar pe $\mathcal{C}^\infty(U, E)$: nu avem decît să decretăm că reperul respectiv e ortonormat. Punem, așadar,

$$\langle s_i^\alpha, s_j^\alpha \rangle_\alpha = \delta_{ij}.$$

Considerăm acum o partiție a unității $\{\rho_\alpha\}$ subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}$ și definim un produs scalar global prin

$$\langle, \rangle = \sum \rho_\alpha \langle, \rangle_\alpha.$$

Simetria și bilinearitatea sînt evidente, pozitiv definirea rezultă din faptul că ρ_α sînt pozitive.

Din Observația 10.2.3 știm că funcțiile de tranziție reprezintă matricele de trecere între reperele de secțiuni $\{s_i^\alpha\}, \{s_i^\beta\}$. Or, acestea fiind ortonormate, matricea de trecere este ortogonală. Obținem $g_{\alpha\beta} \in O(r)$. ■

Definiția 10.3.2. O fibrare se numește *orientabilă* dacă există o acoperire de trivializare cu funcții de tranziție cu determinant pozitiv.

Corolarul 10.3.3. *O fibrare este orientabilă dacă și numai dacă grupul ei structural se poate reduce la $SO(r)$.*

Exercițiul 10.3.4. Dacă M este orientabilă, atunci $TM \rightarrow M$ este orientabilă.

Definiția 10.3.5. Un produs scalar pe fibrarea $TM \rightarrow M$ se numește *metrică Riemann*. O varietate împreună cu o metrică Riemann fixată se numește *spațiu Riemann*.

Teorema anterioară implică:

Propoziția 10.3.6. *Orice varietate diferențiabilă admite metrici Riemann.*

Mai mult, pe o varietate dată există o infinitate de metrici Riemann. Spațiul acestor metrici fiind atît de bogat, este utilă, pe de o parte, căutarea de structuri pe el și, pe de altă parte, căutarea unor metrici Riemann cu proprietăți speciale. Vom reveni asupra acestor chestiuni în capitolele următoare.

Exemplul 10.3.7. Structuri aproape complexe O structură aproape complexă pe un spațiu vectorial V de dimensiune n este un endomorfism J de pătrat -1_V (deci $J^1 = -1_V$). Aplicînd aici determinantul, rezultă $\det(J)^2 = (-1)^n$, deci $n = 2m$. E ușor de văzut că dacă $\{v_1, \dots, v_s\}$ e linear independent, atunci și $\{v_1, Jv_1, \dots, v_s, Jv_s\}$ e linear independent. Rezultă că pe un spațiu vectorial aproape complex se pot considera repere adaptate structurii aproape complexe, de tipul $\{e_1, Je_1, \dots, e_m, Je_m\}$. Matricea de trecere între două astfel de repere are pe diagonală blocuri pătratice 2-dimensionale de

forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, restul elementelor fiind nule. Dacă ne amintim că un număr complex $a + bi$ se reprezintă matriceal ca o matrice 2-dimensională ca mai sus, înțelegem că matricea de trecere stă în $GL(m, \mathbb{C})$ văzut ca subgroup al lui $GL(2m, \mathbb{R})$.

O structură aproape complexă pe o varietate este un câmp tensorial de tip $(1, 1)$ cu proprietatea că, în fiecare punct, $J_x^2 = -1_{T_x M}$ (compunerea J^2 are sens pentru că $T^{1,1}M$ e izomorf cu $\text{End}(TM)$). Fiecare spațiu tangent are, așadar o structură aproape complexă J_x și asocierea $x \mapsto J_x$ e diferențiabilă. În particular, $\dim M = 2m$.

O varietate diferențiabilă împreună cu o structură aproape complexă se numește varietate aproape complexă.

Dacă M admite o structură aproape complexă, atunci putem considera repere locale de câmpuri tangente de forma $\{X_1, JX_1, \dots, X_m, JX_m\}$. Acestea induc trivializări corespunzătoare ale fibrării tangente. Conform observațiilor anterioare, funcțiile de tranziție asociate, care sînt exact schimbările de reper, vor sta în $GL(m, \mathbb{C}) \subset GL(2m, \mathbb{R})$.

Reciproc, dacă funcțiile de tranziție ale lui TM stau în $GL(m, \mathbb{C})$, atunci se trece la o reprezentare reală a acestui grup (adică se alege o scufundare a sa în $GL(2m, \mathbb{R})$). De exemplu, dacă $A + iB \in GL(m, \mathbb{C})$, putem lua reprezentarea sa reală $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Considerăm acum reperele locale de câmp $\{X_1, \dots, X_{2m}\}$ care se schimbă cu asemenea matrice și definim $JX_1 = X_{m+1}, \dots, JX_m = X_{2m}, JX_{m+1} = -X_1, \dots, JX_{2m} = -X_m$. (Remarcați deosebirea față de reperele dinainte; de unde provine diferența?)

În concluzie: *O varietate admite o structură aproape complexă dacă și numai dacă grupul structural al fibrării sale tangente se reduce la $GL(m, \mathbb{C})$.*

Exercițiul 10.3.8. O varietate aproape complexă e orientabilă.

Exercițiul 10.3.9. Folosind expresia locală a unei forme de contact (cf. Exercițiul 9.3.6), arătați că existența unei forme de contact pe o varietate diferențiabilă este echivalentă cu reducerea grupului structural al fibratului tangent la $\{1\} \times U(n)$.

4. Operații cu fibrări

Cum fibrele unei fibrări au structură de spații vectoriale, operațiile algebrice care se pot face pe fibre (sumă directă, produs tensorial, dualizare) produc noi fibrări vectoriale, cu fibrele rezultate în urma operațiilor amintite. Vom descrie aceste noi fibrări, peste aceeași bază inițială, identificînd fibrele lor și funcțiile de tranziție. În afară de aceste operații algebrice, vom mai prezenta preimaginea unui fibrat.

Fie fibrările $\pi_i : E_i \rightarrow M$, (peste aceeași bază), $i = 1, 2$. E clar că putem considera o aceeași acoperire de trivializare pentru amîndouă fibrările (plecăm cu două acoperiri distincte și facem toate intersecțiile posibile), astfel că vom avea funcții de tranziție indexate cu aceiași indici $g_{\alpha\beta}^i$, $i = 1, 2$.

Suma Whitney. Se notează $E_1 \oplus E_2$. Fibrele sînt sumele directe $(E_1 \oplus E_2)_x = (E_1)_x \oplus (E_2)_x$.

Funcțiile de tranziție vor fi $\begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix}$. Deci $\text{rg}(E_1 \oplus E_2) = \text{rg } E_1 + \text{rg } E_2$.

Produsul tensorial. Se notează $E_1 \otimes E_2$. Fibrele sînt sumele directe $(E_1 \otimes E_2)_x = (E_1)_x \otimes (E_2)_x$. Funcțiile de tranziție vor fi $g_{\alpha\beta}^1 \otimes g_{\alpha\beta}^2$. Avem $\text{rg}(E_1 \otimes E_2) = \text{rg } E_1 \cdot \text{rg } E_2$.

Duala unei fibrări se notează E^* sau E^V (vom prefera prima notație). Fibrele sînt dualele fibrelor. Funcțiile de tranziție sînt mai puțin evidente. Pentru a le găsi, fie $\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ o trivializare locală a lui E . Restrînsă la fibra E_x , Φ este un izomorfism între E_x și \mathbb{R}^r . Acesta induce, prin transpunere (deci acționînd în sens invers), un izomorfism între spațiile duale $\Phi^t : (\mathbb{R}^r)^* \rightarrow E_x^*$. Acum putem defini pe E^* trivializarea $\Psi_\alpha : E^*|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{R}^r)^*$, unde $\Psi_\alpha = (\Phi_\alpha^t)^{-1}$. Vom avea deci aceleași hărți de trivializare. Dacă notăm cu $g_{\alpha\beta}^*$ funcțiile de tranziție ale lui E^* , vom avea:

$$g_{\alpha\beta}^* = (\Phi_\alpha^t)^{-1} \circ \Phi_\beta^t = ((\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})^t)^{-1} = (g_{\alpha\beta}^t)^{-1}.$$

Evident $\text{rg} E = \text{rg} E^*$.

Mai general, se poate considera $\text{Hom}(E_1, E_2)$. Funcțiile lui de tranziție vor fi

$$g_{\alpha\beta}(x)(f) = g_{\alpha\beta}^2(x) \circ f \circ (g_{\alpha\beta}^1(x))^{-1}, \quad f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{r_1}, \mathbb{R}^{r_2}).$$

Să observăm și că spațiul secțiunilor lui $\text{Hom}(E_1, E_2)$ este format din toate morfismele de fibrări de la E_1 la E_2 .

E clar că $E^* = \text{Hom}(E, \mathbb{R})$ unde \mathbb{R} e văzut ca fibrat trivial de rang 1 peste M .

Exemplul 10.4.1. T^*M este dualul $(TM)^*$.

Fibrarea tensorilor de tip (p, q) este $\underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_q \otimes \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_p$.

Preimaginea unei fibrări². Aceasta e o construcție specifică, nu intră în categoria anterioară, a operațiilor algebrice.

Fie $\pi : E \rightarrow N$ o fibrare de rang r și $f : M \rightarrow N$ o aplicație diferențiabilă. Definim mulțimea

$$f^*(E) := \{(x, e) \in M \times E \mid f(x) = \pi(e)\},$$

și proiecția naturală $\pi_f(x, e) = x$. Cu acestea, $f^*E \rightarrow M$ devine fibrare vectorială cu fibra $(f^*E)_x = E_{f(x)}$, deci de același rang cu E . Este un fel de schimbare a bazei: prin intermediul lui f , fibrele lui E sînt așezate peste M . Dacă $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ e un atlas de trivializare pe $E \rightarrow N$, atunci $\{(f^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha^f)\}$, cu $\Phi_\alpha^f(x, e) = (x, \Phi_\alpha(e))$, e un atlas de trivializare pe $f^*E \rightarrow M$, cu funcții de tranziții $g_{\alpha\beta}^f = f^*g_{\alpha\beta}$.

Secțiunile lui f^*E sînt aplicații diferențiabile $s : M \rightarrow f^*E$ cu proprietatea că $s(x) \in E_{f(x)}$.

E ușor de văzut că proiecția naturală $f_* : f^*E \rightarrow E$, $f_*(x, e) = e$, este un morfism de fibrări asociat lui f (vezi Definiția 10.1.4).

Exercițiul 10.4.2. Dacă $P \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ și $E \rightarrow N$, atunci $(g \circ f)^*E = f^*(g^*E)$.

Exemplul 10.4.3. Dacă $\gamma : I \rightarrow M$ e o curbă diferențiabilă, atunci putem considera fibratul $\gamma^*(TM) \rightarrow I$. Secțiunile sale sînt aplicații $X : I \rightarrow \gamma^*(TM)$ cu proprietatea $X(t) \in T_{\gamma(x)}M$. Acestea se numesc *cîmpuri tangente de-a lungul curbei* γ , le-am întîlnit în discuția despre suprafețe. Problema era, acolo, că ele nu puteau fi definite corect doar pe imaginea $\gamma(I)$ care nu e deschisă în M . De aici necesitatea prelungirii lor la un deschis (tub) în jurul lui $\gamma(I)$ etc. Considerarea lor ca secțiuni în imaginea inversă rezolvă problema.

²*Pull-back* în engleză: termenul e preluat ca atare și în unele texte românești

Dacă f este incluziunea unei subvarietăți, $i : M \hookrightarrow N$, atunci i^*E se numește *restricția lui E la M* și se notează simplu $E|_M$. În acest caz, spațiul total este o subvarietate a lui E . Acesta este doar un exemplu particular al următoarei definiții:

Definiția 10.4.4. Fie $E \rightarrow M$ o fibrare vectorială. O subvarietate $E' \xrightarrow{j} E$ este o *subfibrare* a lui E dacă:

(i) $E' \cap E_x$ este subspațiu vectorial al lui E_x pentru orice $x \in M$.

(ii) $\pi|_{E'} : E' \rightarrow M$ are structură de fibrare vectorială indusă de aceea a lui E . Mai precis, există trivializări (U_α, Φ_α) , respectiv (U_α, Φ'_α) pentru E și E' care fac diagrama următoare comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^r \\ i \uparrow & & \uparrow id \times j \\ \pi^{-1}(U_\alpha) \cap E' & \xrightarrow{\Phi'_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^{r'} \end{array}$$

unde $\mathbb{R}^{r'} \xrightarrow{j} \mathbb{R}^r$ e incluziunea canonică.

Exemplul 10.4.5. Mulțimea tensorilor *simetrici* de tip $(0, q)$ pe o varietate formează o subfibrare $S^{0,q}M$ a lui $T^{0,q}M$. În particular, o metrică riemanniană e o secțiune pozitiv definită a lui $S^{0,2}M$.

La fel, $\Lambda^q(T^*M)$ e o subfibrare a lui $T^{0,q}M$.

Exemplul 10.4.6. Fie $f : E \rightarrow F$ un morfism de fibrări vectoriale peste aceeași bază M . Definim:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \bigcup_{x \in M} \text{Ker } f|_{E_x}, \\ \text{Im } f &= \bigcup_{x \in M} \text{Im } f|_{E_x}. \end{aligned}$$

Dacă f are rang constant (vezi Definiția 6.2.1 și explicațiile care urmează), de exemplu, dacă e imersie sau submersie, atunci se vede ușor că $\text{Ker } f$ devine o subfibrare a lui E , iar $\text{Im } f$ o subfibrare a lui F .

Exercițiul 10.4.7. În condițiile de mai sus, să se arate că există izomorfismul de fibrări $E \cong \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

În particular, acum putem defini *șiruri exacte* de fibrări. Anume, șirul de morfisme de fibrări (peste aceeași bază)

$$\cdots \rightarrow E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} E_{i+2} \rightarrow \cdots$$

e exact dacă, pentru fiecare i , $\text{Ker } f_{i+1} = \text{Im } f_i$.

Pentru un șir exact scurt

$$0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \rightarrow 0,$$

rezultă că f_1 e injectivă și f_2 surjectivă, deci $\text{Ker } f_2 = \text{Im } f_1$ e subfibrare a lui E_2 .

Exemplul 10.4.8. Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață diferențibilă. Fibratul tangent al lui \mathbb{R}^3 se poate restrînge la S ; notăm restricția cu $T\mathbb{R}^3|_S$ (e un fibrat trivial). În fiecare punct $x \in S$, putem considera spațiul tangent $T_x M$ și vectorul normal unitar N_x . E clar că $T_x M \oplus$

$\langle N_x \rangle = (T\mathbb{R}^3|_S)_x$, deci, dacă notăm cu $T^\perp M$ fibratul de rang 1 a cărui fibră în fiecare punct este direcția normală la S în acel punct, avem un exemplu de sumă Whitney:

$$T\mathbb{R}^3|_S = TM \oplus T^\perp M.$$

Să mai observăm că N este o secțiune a lui $T^\perp M$, deci acest fibrat e trivial dacă și numai dacă S e orientabilă.

În exemplul anterior am văzut că pentru un anume fibrat, TM , am putut găsi un sumand direct astfel încât suma să fie un fibrat trivial. E aproape clar că rezultatul se poate generaliza pentru subvarietăți de codimensiune oarecare ale lui \mathbb{R}^n (vom face acest lucru în capitolul dedicat subvarietăților riemanniene). Pe de altă parte, există și o proprietate mult mai generală, adevărată pentru fibrări cu bază compactă:

Teorema 10.4.9. *Pentru orice fibrat vectorial $E \rightarrow M$, cu M compact, există un fibrat vectorial $F \rightarrow M$ astfel încât suma directă $E \oplus F$ să fie fibrat trivial.*

Demonstrație. Datorită compacității lui M , putem considera de la început un atlas finit de trivializare al lui E , $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$, $\alpha = 1, \dots, N$. Fie N_α fibratul trivial $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, izomorf cu $E|_{U_\alpha}$ prin Φ_α^{-1} . Cum o sumă directă de fibrări triviale e, în continuare, triviale, punem $N := \oplus N_\alpha$.

Fie acum $\{\rho_\alpha\}$ o partiție a unității subordonată acoperirii $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ a lui E . Cu ajutorul ei prelungim diferențiabil aplicațiile Φ_α la E ; fie $\Psi_\alpha : E \rightarrow N_\alpha$ aceste prelungiri (avem $\Psi_\alpha(e) = \rho_\alpha \Phi_\alpha(e)$ pe $E|_{U_\alpha}$ și $\Psi_\alpha = 0$ pe complementara lui deschisului pe care $\rho_\alpha = 1$). Definim

$$\Psi : E \rightarrow N, \quad \Psi(e) = \oplus_{\alpha=1}^N \Psi_\alpha(e) := (\Psi_1(e), \dots, \Psi_N(e)).$$

Evident, $\text{rg } \Psi \geq \text{rg } \Psi_\alpha$. Cum în orice punct $e \in E$ în care $\Psi_\alpha(e) \neq 0$, $\text{rg } \Psi_\alpha = \text{rg } E$, vedem că $\text{rg } \Psi \leq \text{rg } E$. Pe de altă parte, cum orice $e \in E$ stă în cel puțin un $\pi^{-1}(U_\alpha)$, și deci $\Phi_\alpha(e) \neq 0$, deducem $\text{rg } \Psi = \text{rg } E$, în particular rangul lui Ψ e constant și are sens să considerăm nucleul și imaginea lui (ca fibrări). În consecință, $\text{Ker } \Psi = 0$ și deci $E \cong \text{Im } \Psi$.

Pînă acum am scufundat E ca un subfibrat într-un fibrat trivial N (care nu e unic: el depinde de alegerea inițială a atlasului finit de trivializare). Construcția unui complement F e un pic mai delicată. Punctual, fiecare fibră E_x are un complement direct în N_x , dar, cum acesta nu e unic, nu avem o alegere canonică, în așa fel încât să fim asigurați că vom obține un fibrat. Putem însă să dotăm N cu un produs scalar (conform cu Teorema 10.3.1). Acum alegem în fiecare fibră N_x complementul ortogonal $F_x = E_x^\perp$. Cu această alegere, F este fibrat vectorial și teorema e complet demonstrată. ■

Încheiem capitolul cu un rezultat teoretic foarte important care arată cum se poate obține orice fibrat ca preimagine a fibratului universal peste o grassmanniană:

Teorema 10.4.10. *Fie fibratul vectorial $E \rightarrow M$, de rang r , cu baza M compactă. Există un număr întreg $N > 0$ care depinde numai de M , și o aplicație diferențiabilă $f : M \rightarrow G(r, N)$ astfel încât $E \cong f^* U_{r, N}$.*

Demonstrație. Fie $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas finit de trivializare a lui E ($\alpha = 1, \dots, k$) și, pentru fiecare α , un reper de secțiuni $\{s^\alpha, 1, \dots, s_r^\alpha\}$ pe U_α . Ca în demonstrația anterioară, cu o partiție a unității $\{\rho_\alpha\}$ prelungim secțiunile s_i^α la niște secțiuni globale ale lui E

(cu zerouri). Obținem astfel mulțimea de secțiuni $\{\rho_\alpha s_1^\alpha, \dots, \rho_\alpha s_r^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, k}$. Fie $N = rk$ numărul total de secțiuni din mulțime. Cele N secțiuni generează E_x în fiecare $x \in M$.

Fie acum V spațiul vectorial real generat de aceste secțiuni, renumerotate s_1, \dots, s_N . Grassmanniana pe care o căutăm este cea a r -planelor din V , izomorfă (necanonic) cu $G(r, N)$. Evident, pentru fiecare $x \in M$, avem o surjecție lineară $p_x : V \rightarrow E_x$, dată prin $p_x(\sum a_j s_j) = \sum a_j s_j(x)$ (aplicație de evaluare în x). Nucleul său are codimensiune r . Alegem un produs scalar arbitrar pe V , astfel ca pentru fiecare subspațiu să putem considera complementul ortogonal.

Definim $f : M \rightarrow G(N-r, N)$ prin $f(x) = (\text{Ker } p_x)^\perp \cong E_x$. Acum e clar că $f^* U_{N-r, N} \cong E$. Pe de altă parte, $G(r, N) \cong G(N-r, N)$, ceea ce încheie demonstrație. ■

Conexiuni lineare în fibrări vectoriale

E nevoie, uneori, să comparăm vectori tangenți în puncte diferite ale unei varietăți. Cum ei nu sînt elemente ale unui același spațiu vectorial, trebuie găsită o modalitate de a-l aduce pe unul în punctul de aplicație al celuilalt. În \mathbb{R}^n , acest lucru se face foarte simplu: cele două puncte se unesc cu o dreaptă și unul dintre vectori e transportat prin paralelism de-a lungul ei pînă în punctul dorit. Dar pe o varietate arbitrară procedeul nu mai e așa de lesnicios. Problema este definirea transportului prin paralelism de-a lungul unei curbe. Apoi trebuie să vedem în ce măsură depinde acest transport de curba pe care se face. Noțiunea care rezolvă aceste chestiuni este *conexiunea lineară*. O vom defini în general, într-o fibrare vectorială arbitrară¹, apoi o vom specializa la fibratul tangent și la cele tensoriale.

1. Definiție. Existență. Formule locale

Pentru a putea da definiția care ne interesează, avem nevoie să introducem *formele diferențiale cu valori într-un fibrat*. Fie, deci, $E \rightarrow M$ un fibrat vectorial.

Definiția 11.1.1. O *formă diferențială cu valori în E* este o secțiune a fibratului $\Lambda^*(T^*M) \otimes E$. Vom nota $\Omega^*(M, E)$ modulul acestor secțiuni.

O p -formă cu valori în E este, deci, o aplicație multilineară alternată pe $\xi(M)$ cu valori în E :

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(x) \in E_x.$$

Local, dacă (U_α, Φ_α) e o trivializare locală a lui E , cu reper de secțiuni asociate $\{s_1, \dots, s_r\}$, o p -formă ω cu valori în E se scrie, local:

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum_i \omega_i \otimes s_i, \quad \omega_i \in \Omega^p(U_\alpha).$$

În particular, $\Omega^0(M, E) = \Gamma(E)$, adică 0-formele cu valori în E sînt simple secțiuni ale lui E .

Acum putem da:

Definiția 11.1.2. O *conexiune lineară*² în fibrarea $E \rightarrow M$ este un operator diferențial \mathbb{R} -linear de ordinul 1

$$\nabla : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E),$$

cu proprietatea

$$(11.1) \quad \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad \text{pentru orice } f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

¹Denumirea provine tocmai din faptul că ea pune în legătură, conectează, fibre peste puncte diferite.

²De obicei spunem simplu: conexiune.

E clar că (11.1) este, în acest context, *regula lui Leibniz*. Astfel, o conexiune lineară se comportă ca o derivare.

Cum ∇s este o 1-formă cu valori în E , valoarea ei se calculează aplicînd-o pe un câmp vectorial tangent $X \in \xi(M)$. Vom nota

$$\nabla_X s \quad \text{pentru } (\nabla s)(X).$$

$\nabla_X s$ se numește *derivata covariantă a secțiunii s pe direcția lui X* . Vom vedea mai tîrziu că este o generalizare a derivatei covariante de-a lungul unei curbe introduse pe suprafețe. Evident avem

$$(11.2) \quad \nabla_{hX+Y} s = h\nabla_X s + \nabla_Y s, \quad h \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Formula (11.1) devine, pentru derivata covariantă:

$$(11.3) \quad \nabla_X(f s) = X(f)s + f\nabla_X s.$$

Observația 11.1.3. Obținem astfel o definiție echivalentă a conexiunii (de fapt, a derivatei covariante): este un operator $\nabla : \xi(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, cu proprietățile:

(i) Este $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineară în raport cu primul argument (cf. (11.2)).

(ii) Verifică formula lui Leibniz (11.3) (în particular, este \mathbb{R} -lineară) în raport cu al doilea argument.

Exemplul 11.1.4. Fie E un fibrat trivial și $\{s_1, \dots, s_r\}$ o bază *globală* de secțiuni. Putem defini

$$\nabla s_i = 0,$$

folosind regula lui Leibniz: dacă $s = \sum f_i s_i$, avem

$$\nabla s = df_i \otimes s_i.$$

Deci orice fibrat trivial admite conexiuni.

Acum putem demonstra:

Teorema 11.1.5. *Orice fibrat vectorial $E \rightarrow M$ admite conexiuni lineare.*

*Mulțimea tuturor acestor conexiunilor formează un spațiu afin infinit dimensional modelat pe $\Gamma(T^*M \otimes \text{Hom}(E, E))$.*

Demonstrație. Fie $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas de trivializare al lui E . Cum fiecare $E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha$ e fibrat trivial, el admite o conexiune ∇^α (conform cu Exemplul 11.1.4). Alegem acum o partiție a unității $\{\rho_\alpha\}$ subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}$ și definim

$$\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha.$$

Avem de verificat că ∇ satisface regula lui Leibniz. Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \nabla(f s) &= \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha(f s) = \sum \rho_\alpha df \otimes s + \sum \rho_\alpha f \nabla^\alpha s = \\ &= (\sum \rho_\alpha) df \otimes s + f \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha s = df \otimes s + f \nabla s. \end{aligned}$$

Dacă ∇, ∇' sînt două conexiuni în E , atunci

$$(\nabla - \nabla')(f s) = df \otimes s + f \nabla s - (df \otimes s + f \nabla' s) = f(\nabla - \nabla')(s),$$

deci $\nabla - \nabla'$ e $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineară în raport cu $\Gamma(E)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observația 11.1.6. Din a doua afirmație a teoremei rezultă că, dacă se fixează o conexiune ∇ în E , atunci orice altă conexiune ∇' e de forma $\nabla' = \nabla + A$, unde A e o 1-formă pe M cu valori în $\text{Hom}(E, E)$.

Fie acum ∇ o conexiune în fibrarea $E \rightarrow M$. Ca și pentru celelalte obiecte cu care am lucrat, vrem să găsim exprimarea locală a conexiunii. Fie, deci o hartă de trivIALIZARE (U_α, Φ_α) , cu reperul local de secțiuni $s^\alpha := (s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha)$. Aplicînd conexiunea unei secțiuni din reper vom găsi:

$$\nabla s_i^\alpha = \sum_j \theta^{\alpha j}_i \otimes s_j.$$

Aici $\theta^{\alpha j}_i$ sînt 1-forme pe U_α (indicele α nu e de sumare: el marchează dependența de harta de trivIALIZARE). Așadar, local, conexiunea produce o matrice de 1-forme.

Dacă $s = \sum f_i s_i^\alpha$ e o secțiune arbitrară pe U_α , din proprietățile conexiunii obținem:

$$\begin{aligned} \nabla s &= \nabla \left(\sum_i f_i s_i^\alpha \right) = \sum_i (df_i \otimes s_i^\alpha + f_i \nabla s_i^\alpha) \\ &= \sum_i (df_i \otimes s_i^\alpha + f_i \sum_j \theta^{\alpha j}_i \otimes s_j^\alpha) \\ &= \sum_j (df_j + \sum_i \theta^{\alpha j}_i \cdot f_i) \otimes s_j^\alpha. \end{aligned}$$

Așadar, dacă notăm cu θ^α matricea de 1-forme $(\theta^{\alpha j}_i)$ expresia locală a conexiunii este:

$$\nabla|_{U_\alpha} = d + \theta^\alpha \cdot.$$

Definiția 11.1.7. Matricea de 1-forme θ^α se numește 1-forma de conexiune asociată conexiunii în trivIALIZAREA dată.

Astfel, local, conexiunea e unic determinată de forma de conexiune. Sigur că ne putem întreba cînd anume niște forme de conexiune asociate unor deschiși de trivIALIZARE produc o conexiune globală. Căutăm, deci, o condiție de compatibilitate. Considerăm și o a doua trivIALIZARE locală $(U_\beta, \text{Phi}_\beta)$, cu $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, și supraindexăm elementele corespunzătoare cu β . Trecerea între cele două repere de secțiuni se face cu matricea funcțiilor de tranziție $g = g_{\alpha\beta}$ după formulele (vezi Observația 10.2.3:

$$s^\beta = g^{-1} s^\alpha, \quad f^\beta = g^{-1} f^\alpha,$$

unde $f^\alpha \in \mathbb{R}^r$ notează vectorul componentelor unei secțiuni în reperul s^α . Scriem întîi descompunerea lui ∇ în reperul s^β . Vom avea:

$$\begin{aligned} (\nabla s)|_{U_\beta} &= df^\beta + \theta^\beta \cdot f^\beta = d(g^{-1} f^\alpha) + \theta^\beta \cdot (g^{-1} f^\alpha) = \\ &= dg^{-1} f^\alpha + g^{-1} df^\alpha + \theta^\beta \cdot (g^{-1} f^\alpha). \end{aligned}$$

Cum componentele lui $(\nabla s)|_{U_\beta}$ și $(\nabla s)|_{U_\alpha}$ sînt legate tot de matricea funcțiilor de tranziție, $(\nabla s)|_{U_\beta} = g^{-1} (\nabla s)|_{U_\alpha}$, găsim:

$$dg^{-1} f^\alpha + g^{-1} df^\alpha + \theta^\beta \cdot (g^{-1} f^\alpha) = g^{-1} (df^\alpha + \theta^\alpha \cdot f),$$

de unde, după simplificare,

$$(11.4) \quad \theta^\beta = g^{-1} dg + g^{-1} \theta^\alpha g.$$

Am demonstrat:

Propoziția 11.1.8. *Dat un atlas de trivializare $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ cu funcții de tranziție $g_{\alpha\beta}$, 1-formele locale θ^α definesc o conexiune pe $E \rightarrow M$ dacă și numai dacă satisfac relațiile de compatibilitate (11.4) (numite transformări gauge).*

2. Tensorul de curbură

Acțiunea unei conexiuni se poate extinde la p -forme cu valori în E . Astfel, putem defini

$$\nabla : \Omega^p(M, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, E), \quad p \in [1, n-1] \cap \mathbb{Z}$$

prin

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \nabla s.$$

În această formulă, produsul exterior din ultimul termen se face între o formă uzuală (ω) și una cu valori în E . În general, dacă $\omega \in \Omega^p(M)$ și $\eta \otimes s \in \Omega^r(M, E)$, avem $\omega \wedge (\eta \otimes s) = (\omega \wedge \eta) \otimes s$.

E clar că, pentru $p = 0$, punînd $\omega = f$, definiția anterioară se reduce la regula lui Leibniz.

Obținem acum un șir de module și morfisme \mathbb{R} -lineare:

$$\Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(M, E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

Obstrucția ca acest șir să fie un complex este $\nabla^2 := \nabla \circ \nabla$. Deși ∇ nu este $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineară, ∇^2 este, după cum se vede dintr-un calcul elementar:

$$\begin{aligned} \nabla^2(fs) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla s) = \nabla(df \otimes s) + \nabla(f\nabla s) \\ &= d(df) \otimes s + (-1)^1(df) \wedge \nabla s + f\nabla^2 s + (df) \wedge s = f\nabla^2 s. \end{aligned}$$

Așadar $\nabla^2 \in \Lambda^2(T^*M) \otimes \text{Hom}(E, E)$, adică este o 2-formă pe M cu valori în $\text{Hom}(E, E)$.

Definiția 11.2.1. ∇^2 se numește *tensorul de curbură* al conexiunii ∇ .

Denumirea va fi motivată în secțiunea următoare, în care vom vedea cum arată conexiunea și curbura ei în fibrarea tangentă și ne vom convinge că tensorul de curbură generalizează curbura gaussiană a suprafețelor. Deocamdată, să observăm că, fiind o 2-formă, $\nabla^2 s$ se aplică pe două cîmpuri tangente. Vom nota

$$(\nabla^2 s)(X, Y) = \frac{1}{2} R_{XY} s.$$

Pentru R_{XY} se mai folosește și notația $R(X, Y)$. Factorul $\frac{1}{2}$ apare datorită convenției pe care am adoptat-o în definiția produsului exterior.

Local, într-un reper de secțiuni, avem:

$$\nabla s_i^\alpha = \sum_j \theta_i^{\alpha j} \otimes s_j^\alpha,$$

$$\nabla^2 s_i^\alpha = \sum_j d\theta_i^{\alpha j} \otimes s_j^\alpha - \sum_{j,k} \theta_i^{\alpha j} \wedge (\theta_j^{\alpha k} \otimes s_k^\alpha) = \sum_k (d\theta_i^{\alpha j} + \sum_j \theta_j^{\alpha k} \wedge \theta_i^{\alpha j}) \otimes s_k^\alpha.$$

Dacă renunțăm la indici, putem scrie, formal $\nabla^2 = d\theta + \theta \wedge \theta^3$

³Atenție: aici, θ reprezintă matrice de 1-forme: produsul exterior dintre ele nu e nul, ci înseamnă produs de matrice în care produsul obișnuit al elementelor se înlocuiește cu cel exterior.

Definiția 11.2.2. 2–forma locală $\Theta := d\theta + \theta \wedge \theta$ se numește 2–forma de curbură a conexiunii ∇ .

Astfel, o conexiune definește, local, 1–forme de conexiune și 2–forme de curbură.

Observația 11.2.3. Fiind $\mathcal{C}^\infty(M)$ –lineară, e clar că, la o schimbare de reper cu funcții de tranziție g , forma de curbură se transformă după formula $\Theta^\beta = g^{-1}\Theta^\alpha g$.

Definiția 11.2.4. O conexiune cu curbură nulă se numește *plată*.

Denumirea este motivată de exemplul conexiunii $\nabla s = 0$ pe fibrări triviale, așa cum, în particular e fibrarea tangentă a lui \mathbb{R}^n care e prototipul de spațiu plat (vom reveni în secțiunea următoare).

Explicităm acum acțiunea tensorului de curbură văzut ca 2–formă. Facem un calcul local (considerăm fixate trivializarea și reperul de secțiuni locale și nu mai scriem indicele superior):

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= d\theta(X, Y) + (\theta \wedge \theta)(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}(X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y])) + \frac{1}{2}(\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)) \\ &= \frac{1}{2}\{(X(\theta(Y)) - \theta(Y)\theta(X)) - (Y(\theta(X)) - \theta(X)\theta(Y)) - \theta([X, Y])\}.\end{aligned}$$

Pe de altă parte (renunțând și aici la indici), $\nabla_Y s = \theta(Y)s$ și

$$\nabla_X(\nabla_Y s) = X(\theta(Y))s + \theta(Y)\theta(X)s,$$

deci $X(\theta(Y)) - \theta(Y)\theta(X) = \nabla_X \nabla_Y$. Am obținut formula

$$(11.5) \quad 2\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]},$$

adică

$$(11.6) \quad R_{X, Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}.$$

Observația 11.2.5. În unele texte, formula anterioară se ia cu semn schimbat.

Încheiem secțiunea cu o identitate foarte importantă, a cărei demonstrație e aproape banală. Dar pentru a o formula trebuie să extindem comutatorul dintre endomorfisme ale lui E la forme cu valori în $\text{Hom}(E, E)$.

Dacă $\eta_i \in \Omega^{p_i}(M, \text{Hom}(E, E))$, $i = 1, 2$, și η_i^α reprezintă expresiile lor locale, punem

$$[\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha] = \eta_1^\alpha \wedge \eta_2^\alpha - (-1)^{p_1 p_2} \eta_2^\alpha \wedge \eta_1^\alpha.$$

Se verifică ușor că, la o schimbare de reper cu matrice de tranziție g , comutatorul se schimbă după formula

$$[\eta_1^\beta, \eta_2^\beta] = g^{-1}[\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha]g,$$

Deci comutatorul e bine definit global. De asemenea, e ușor de verificat că el verifică identitatea lui Jacobi. Acum putem formula:

Teorema 11.2.6. Identitatea lui Bianchi. Forma de curbură a unei conexiuni satisface ecuația $d\Theta = [\Theta, \theta]$.

Demonstrație. Avem, pe de o parte,

$$d\Theta = d(d\theta + \theta \wedge \theta) = d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta,$$

și, pe de altă parte,

$$\begin{aligned} [\Theta, \theta] &= [d\theta + \theta \wedge \theta, \theta] \\ &= d\theta \wedge \theta + \theta \wedge \theta \wedge \theta - (-1)^{1 \cdot 2} (\theta \wedge d\theta + \theta \wedge \theta \wedge \theta) \\ &= d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Exemplul 11.2.7. ([Ta1]) Fie $M = \mathbb{R}^4$ și $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, deci fibrarea trivială cu fibră \mathbb{R}^4 (care se poate identifica și cu \mathbb{C}^2). O secțiune în E e o funcție $s: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Fie matricele Pauli: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $P_4 = I_2$ din $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$.

Cu ele, construim aplicația $x: \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^2)$, $x = \sum_{i=1}^4 x^i P_i$. Cum $P_i^2 = I_2$ și $P_i P_j = i \varepsilon_{ijk} P_k$, unde (i, j, k) este o permutare a lui $(1, 2, 3)$, de semnătură ε_{ijk} , observăm că $x^2 = -|x|^2 \cdot P_4$.

Să notăm $dx = \sum_{i=1}^4 dx^i P_i$ și $dx^t = \sum_{i=1}^4 dx^i P_i^t$ (t notează adjuncta complexă, adică transpusa conjugată).

De asemenea, fie $\text{im}(P_i) = P_i$ pentru $i = 1, 2, 3$ și $\text{im}(P_4) = 0$.

Acum putem defini derivata covariantă ∇ în E prin:

$$\nabla s = ds + \frac{\text{im}(x dx^t)}{1 + |x|^2} \cdot s.$$

Prin calcul direct se arată că

$$R^\nabla = \frac{\text{im}(dx \wedge dx^t)}{(1 + |x|^2)^2}.$$

3. Conexiuni induse în fibrări vectoriale

Am văzut, în capitoul precedent, că putem face operații cu fibrări vectoriale (sumă directă, produs tensorial, dual, preimagine etc.). Dacă fibrările care intervin în astfel de operații sînt dotate cu conexiuni, atunci și fibrarea rezultată capătă o conexiune definită în mod natural. O vom descrie în fiecare caz, punînd în evidență forma de conexiune și forma de curbură.

Fie $E \rightarrow M$, $E' \rightarrow M$ cu conexiunile ∇, ∇' . Putem considera atlase de trivIALIZARE pe E, E' cu aceleași domenii de hartă, astfel astfel încît și secțiunile din repere au aceleași domenii.

Pe suma directă $E \oplus E'$ definim conexiunea ∇^\oplus corespunzătoare formei de conexiune $\theta + \theta'$. Evident, pentru curbura vom avea $\Theta^\oplus = \Theta + \Theta'$.

Pe produsul tensorial $E \otimes E'$ definiția pe care o dăm trebuie să respecte regula de derivare a produsului (conexiunea inducînd o derivare covariantă). Va fi suficient să definim conexiunea pe monoame $s \otimes s'$, apoi definiția se extinde folosind proprietățile conexiunii. Punem:

$$\nabla^\otimes (s \otimes s') = \nabla s \otimes s' + s \otimes \nabla' s'.$$

Rezultă că, local, formele de conexiune și de curbură corespunzătoare vor fi:

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \theta^\otimes &= \theta \otimes Id + Id \otimes \theta' \\ \Theta^\otimes &= \Theta \otimes Id + Id \otimes \Theta' \end{aligned}$$

Un caz particular este acela în care E și E' sînt fibrări de forme diferențiale cu valori într-un fibrat F . Anume, dacă $E = \Lambda^*(T^*M) \otimes F$ și $E' = \Lambda^*(T^*M) \otimes F'$, atunci între secțiunile lor se poate defini și un produs exterior. Local, pe monoame de forma $\sigma = \omega \otimes s$, $\sigma' = \omega' \otimes s'$, punem

$$(11.8) \quad \sigma \wedge \sigma' = (\omega \wedge \omega') \otimes (s \otimes s').$$

Se vede astfel că, de fapt, sîntem interesați de secțiuni din $\Omega^*(M, F \otimes F')$. Conexiunea ∇^\otimes acționează pe astfel de secțiuni prin formula:

$$\nabla^\otimes(\sigma \wedge \sigma') = \nabla\sigma \wedge \sigma' + (-1)^{\text{gr}\sigma} \sigma \wedge \nabla\sigma'.$$

E clar că dacă σ și σ' sînt secțiuni de grad 0, produsul lor exterior coincide cu cel tensorial și formula aceasta se reduce la cea dinainte.

Se verifică ușor că formula locală dinainte definește o conexiune globală (adică θ^\otimes satisface formulele de transformare (11.4).

Pe fibratul dual E^* , considerăm un reper de secțiuni locale $\{(s^*)^i_\alpha\}$, dual reperului local de pe $E \{s^*_i\}$. Definim

$$(11.9) \quad (\theta^*)^\alpha = -(\theta^\alpha)^t.$$

Să verificăm că θ^* satisface formulele de schimbare (11.4). Dacă $g := g_{\alpha\beta}$ sînt funcțiile de tranziție pe E astfel încît $s^\beta = g^{-1}s^\alpha$, atunci $g^* := (g^t)^{-1}$ sînt funcțiile de tranziție pe E^* și avem $(s^*)^\beta = g^t(s^*)^\alpha$. Vrem să verificăm relația

$$(\theta^*)^\beta = (g^*)^{-1}d g^* + (g^*)^{-1}(\theta^*)^\alpha g^*,$$

care e echivalentă, conform definiției noastre, cu

$$-(\theta^\beta)^t = g^t d(g^t)^{-1} - g^t(\theta^\alpha)^t(g^t)^{-1}.$$

O transpunem și obținem

$$-\theta^\beta = d g^{-1} g - g^{-1} \theta^\alpha g.$$

Dar derivînd $g g^{-1} = Id$, avem $d g \cdot g^{-1} + g \cdot d g^{-1} = 0$, de unde $d g^{-1} = -g^{-1} d g \cdot g^{-1}$, relație cu care formula anterioară se reduce la transformarea gauge pentru θ .

Să observăm că apariția semnului minus în formula lui $d g^{-1}$ motivează, *a posteriori*, definirea formei de conexiune duale ca minus transpusa celei directe: dacă renunțăm la semn, așa cum am fi tentați inițial, nu mai obținem o conexiune.

Scrierea globală a conexiunii duale, acționînd pe $\Omega^*(M, E^*)$ va fi:

$$(\nabla^* u)(s) = d(u(s)) - (-1)^{\text{gr}u} u(\nabla s), \quad u \in \Omega^*(M, E^*), s \in \Omega^*(M, E).$$

Pentru forma de curbură, obținem imediat:

$$\Theta^* = -\Theta^t.$$

Asemănător vom defini conexiunea ∇^{Hom} în $\text{Hom}(E, E')$ prin:

$$(11.10) \quad (\nabla^{\text{Hom}} u)(s) = \nabla'(u(s)) - (-1)^{\text{gr}u} u(\nabla s),$$

astfel ca pentru $E' = M \times \mathbb{R}$, când $\text{Hom}(E, E') \cong E^*$, definiția să se reducă la cea a lui ∇^* . Ca să găsim formele locale de conexiune, respectiv de curbura, ținem seamă de izomorfismul $\text{Hom}(E, E') \cong E^* \otimes E'$ și de definițiile conexiunii din dual și din produsul tensorial. Rezultă:

$$\begin{aligned}\theta^{\text{Hom}} &= -\theta^t \otimes Id + Id \otimes \theta', \\ \Theta^{\text{Hom}} &= Id_{E^*} \otimes \Theta' - \Theta^t \otimes Id_{E'}\end{aligned}$$

Exercițiul 11.3.1. Arătați că identitatea lui Bianchi, $d\Theta = [\Theta, \theta]$, este echivalentă cu $\nabla^{\text{Hom}}\Theta = 0$.

În fine, dacă $f: M \rightarrow N$ și ∇ e o conexiune în $E \rightarrow N$, definim în fibrarea imagine inversă $f^*E \rightarrow M$ o conexiune $f^*\nabla$ care, local, să fie dată de forma de conexiune $f^*\theta$. Deci

$$(f^*\nabla)(s) = ds + f^*\theta \wedge s, \quad s \in \Omega^*(M, f^*E).$$

Să observăm că, pentru orice secțiune $\sigma = \omega \otimes u \in \Gamma(N, E)$, există secțiunea $f^*\sigma \in \Gamma(N, f^*E)$, dată prin $f^*\sigma = (f^*\omega) \otimes (u \circ f)$. Atunci rezultă ușor formulele:

$$\begin{aligned}(f^*\nabla)(f^*\sigma) &= f^*(\nabla\sigma), \\ \Theta^{f^*\nabla} &= f^*\Theta,\end{aligned}$$

unde în membrul stâng $f^*\nabla$ e notație, dar în membrul drept $f^*(\nabla\sigma)$ are semnificația preimaginii secțiunii, așa cum am explicat mai sus.

Vom aplica aceste construcții în secțiunile următoare.

4. Transport paralel de-a lungul curbelor

Avem acum totul pregătit pentru a explica felul în care o conexiune pune în legătură fibrele unei fibrări.

Fie x, y două puncte distincte pe M . Presupunem, pentru început, că ele se află în domeniul U_α ale unei trivializări. Cum M e conexă, fie $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow M$ o curbă diferențiabilă care le unește: $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Fie $s \in \mathcal{C}^\infty(\gamma^*E)$ o secțiune a lui E de-a lungul lui γ . Deci s poate fi văzută ca o funcție definită pe I cu valori în E și cu proprietatea $s(t) \in E_{\gamma(t)}$. Dacă $E \rightarrow M$ e dotată cu o conexiune ∇ , atunci putem defini *derivata covariantă a lui s de-a lungul lui γ* prin formula

$$\frac{\nabla s}{dt} := ((\gamma^*\nabla)s)\left(\frac{d}{dt}\right).$$

E clar că $\frac{\nabla s}{dt}(t_0) \in E_{\gamma(t_0)}$.

De fapt, ca să fim foarte riguroși, ar trebui să marcăm și curba γ în notația pentru derivata covariantă; nu o facem ca să nu mai încărcăm notația. Vom preciza întotdeauna curba înainte de a deriva covariant.

Dacă X e un câmp vectorial pe M , fie γ curba sa integrală prin $x \in M$. Atunci e clar că

$$(\nabla_X s)(0) = \frac{\nabla s}{dt}(0),$$

deci derivata covariantă determină, la rîndul ei, conexiunea.

Local, dacă $s = \sum f_i s_i$, cu formulele din secțiunea anterioară obținem (omitem indicele superior α):

$$\frac{\nabla s}{dt} = \sum (df_k + \gamma^* \theta \cdot f_k) \left(\frac{d}{dt} \right) s_k = \sum \left(\frac{df_k}{dt} + \theta_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \cdot f_k \right) s_k.$$

Definiția 11.4.1. O secțiune $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ se numește *paralelă de-a lungul lui γ* dacă $\frac{\nabla s}{dt} = 0$ pentru orice $t \in I$.

O secțiune se numește paralelă în raport cu câmp X dacă este paralelă în raport cu orice curbă integrală a lui X .

O secțiune se numește paralelă dacă este paralelă în raport cu orice câmp $X \in \mathcal{X}(M)$.

Observația 11.4.2. (i) Definiția de mai sus nu e locală, ea are sens chiar dacă γ nu e cuprinsă într-o hartă de trivializare.

(ii) Motivația denumirii este următoarea. Dacă $M = \mathbb{R}^n$, $E = TM \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, γ e o dreaptă din \mathbb{R}^n și $s = X = \sum X^k e_k$, un câmp vectorial definit de-a lungul drepte, atunci paralelismul lui X față de conexiunea canonică a lui \mathbb{R}^n , pentru care $\theta = 0$, se traduce prin:

$$\frac{dX^k}{dt} = 0,$$

de unde $X^k = \text{const.}$, astfel că vectorul X e constant, deci $X_{\gamma(t_1)}$ e paralel cu $X_{\gamma(t_2)}$. Paralelismul definit de o conexiune, generalizează deci paralelismul uzual euclidian⁴.

Revenind la contextul general, vedem că, local, o secțiune s e paralelă pe γ atunci și numai atunci cînd coordonatele sale f_k satisfac ecuațiile

$$(11.11) \quad \frac{df_k}{dt} + \theta_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \cdot f_k = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Acestea se numesc ecuațiile paralelismului în fibrarea E . Ele se constituie într-un sistem de r ecuații diferențiale ordinare de ordinul 1. Așadar, prin fixarea condiției inițiale, (11.11) devine o problemă Cauchy. Putem enunța

Teorema 11.4.3. Pentru fiecare $e \in E_{\gamma(0)}$ există o unică secțiune locală s paralelă ($\frac{\nabla s}{dt} = 0$) și care verifică $s(0) = e$.

Cu ajutorul noțiunii de paralelism, putem defini acum o aplicație

$$\tau^\gamma : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(t)},$$

prin

$$\tau^\gamma(e) = s(\gamma(t)), \quad \text{cu } s \text{ soluție a lui (11.11).}$$

τ^γ se numește *transport paralel de-a lungul lui γ* . Că transportul paralel e bine definit, rezultă din existența și unicitatea din Teorema 11.4.3. Mai mult, din forma sistemului (11.11), rezultă că τ^γ e aplicație lineară.

În plus, dacă definim inversa curbei γ prin $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ (parcursarea lui γ în sens invers), se vede imediat că τ^γ e bijectivă, și anume $(\tau^\gamma)^{-1} = \tau^{\gamma^{-1}}$.

⁴Așadar, o secțiune paralelă nu e „paralelă“ cu o alta, ci valorile ei în puncte diferite ale curbei sînt „paralele“ între ele.

Dacă imaginea curbei $\text{Im } \gamma$ nu este cuprins într-un singur domeniu de hartă de trivializare, atunci acoperim $\text{Im } \gamma$ (care e compactă) cu un număr finit de astfel de domenii de hartă și transportăm prin paralelism pe porțiuni, valoarea $s(t_i)$ rezultată în $\gamma(t_i) \in U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}}$ devenind condiție inițială pentru transportul paralel pe porțiunea următoare etc.

Așadar am demonstrat rezultatul anunțat în introducerea secțiunii:

Teorema 11.4.4. *Transportul paralel este un izomorfism linear între fibre.*

Reciproc, se poate arăta:

Propoziția 11.4.5. *Transportul paralel determină unic derivata covariantă, deci conexiunea.*

Demonstrație. Fie τ^γ transportul paralel de-a lungul curbei γ , unde $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Notăm, pentru simplitate, $\tau^\gamma(s)(t) = \tau^\gamma(s(0))$ valoarea secțiunii transportate în punctul $\gamma(t)$. Acum arătăm că

$$\frac{\nabla s}{dt}(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau^\gamma(s(t)) - s(0)}{t}.$$

Lucrăm local. Fie

$$\tau^\gamma(s)(t) = \sum f_i^\gamma(t) s_i(t), \quad s(0) = \sum f_i(0) s_i(0).$$

Din formula de medie, avem

$$f_i^\gamma(t) = f_i^\gamma(0) + \frac{df_i^\gamma}{dt} \Big|_{t_0} t, \quad t_0 \in [0, t], \quad t \leq 1.$$

Cum $\tau^\gamma(s)$ e paralelă pe γ , componentele ei satisfac ecuațiile de paralelism:

$$\frac{df_i^\gamma}{dt} + \theta_{\gamma(t)} f_i^\gamma(t) = 0.$$

Acestea, introduse în relația anterioară, folosind și faptul că $\tau^\gamma(s)(0) = s(0)$, furnizează

$$f_i^\gamma(t) = f_i^\gamma(0) - \theta_{\gamma(t_0)} f_i^\gamma(t_0) t = f_i(0) - \theta_{\gamma(t_0)} f_i^\gamma(t_0) t.$$

Acum avem

$$\frac{\tau^\gamma(s)(t) - s(0)}{t} = \sum \left\{ f_i(0) \frac{s_i(t) - s_i(0)}{t} - \theta_{\gamma(t_0)} f_i^\gamma(t_0) s_i(t) \right\}.$$

Trecem aici la limită cu $t \rightarrow 0$, ținem seama că atunci și $t_0 \rightarrow 0$, și obținem relația dorită.

■

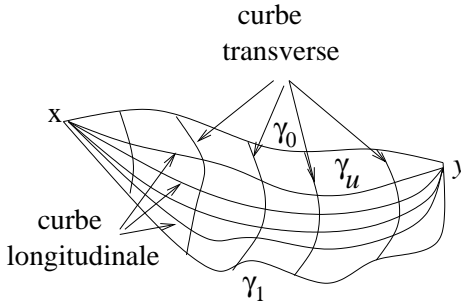
Desigur, problema care se pune este: *cît de mult depinde transportul paralel de curba de-a lungul căreia se face?* E clar că în \mathbb{R}^n el nu depinde de curbă. Dar pe alte varietăți?

Să presupunem că avem două curbe, γ_0 și γ_1 , cu aceleași capete x, y , care se pot deforma diferențiabil una în cealaltă. Mai precis, presupunem că există o aplicație $h: I \times I \rightarrow M$, diferențiabilă în ambele argumente și astfel încît, pentru orice $(u, t) \in I \times I$ să avem

$$h(u, 0) = x, \quad h(u, 1) = y, \quad h(0, t) = \gamma_0(t), \quad h(1, t) = \gamma_1(t).$$

O asemenea aplicație se numește o *omotopie diferențiabilă* între cele două curbe (care se zic *omotope*). Studiul omotopiei este parte a topologiei algebrice și diferențiale, dar

noi nu avem nevoie decât de definiție aici. De obicei, $h(t, u)$ se notează γ_u , pentru că e o deformare, la timpul u , a curbei γ_0 .



Omotopie diferențială între două curbe

Exercițiul 11.4.6. Arătați că omotopia (diferențială) e o relație de echivalență pe mulțimea curbelor care unesc două puncte date.

Putem privi imaginea lui h ca pe o pînză (suprafață 2-dimensională) acoperită cu o rețea de curbe: unele longitudinale, anume cele date de $h(ct., t)$, celelalte transverse, $h(u, ct.)$. Curbele din fiecare familie, longitudinale și transverse, sînt diferențiable și au, fiecare, un cîmp de vectori tangenți, anume $dh(\frac{\partial}{\partial u})$, respectiv $dh(\frac{\partial}{\partial t})$. Astfel, pentru o secțiune $s \in \Gamma(h^*E)$ putem considera derivata covariantă a lui s pe direcția $\frac{\partial}{\partial u}$, respectiv pe direcția $\frac{\partial}{\partial t}$. Mai precis:

$$\frac{\nabla s}{\partial t} = ((h^*\nabla)s)(\frac{\nabla s}{\partial t}), \quad \frac{\nabla s}{\partial u} = ((h^*\nabla)s)(\frac{\nabla s}{\partial u}).$$

Spre deosebire de derivatele parțiale obișnuite, derivatele parțiale covariante nu mai comută. Abaterea de la comutare este dată, conform, (11.5), de curbura. Să notăm, pentru simplitate, $\tilde{\nabla} = h^*\nabla$ și $\tilde{\Theta} = \Theta^{h^*\nabla}$. Cum $\tilde{\Theta} = h^*\Theta$, avem, conform formulei citate:

$$\begin{aligned} 2\Theta_{h(u,t)}(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial u})s &= 2\tilde{\Theta}(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u})s \\ &= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}s - \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}s, \quad \text{pentru că } [\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}] = 0. \end{aligned}$$

Acum, dacă fixăm un $e_0 \in E_x$, există o unică secțiune $s(u, t)$, cu $s(u, 0) = e_0$ și paralelă de-a lungul curbelor longitudinale, deci $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}s = 0$ pentru orice $u \in I$. Existența și diferențibilitatea lui $s(u, t)$ se obțin considerînd acum ecuațiile transportului paralel ca ecuații diferențiale ordinare cu parametrul u . Din calculul de mai sus rezultă că, dacă $\Theta = 0$, atunci derivatele covariante ale oricărei secțiuni pe direcțiile $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ comută: $[\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}] = 0$.

În particular, fie $\sigma = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}s$. Atunci

$$\frac{\tilde{\nabla} \sigma}{\partial t} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}s = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}s = 0,$$

deci σ e paralelă și e unică dacă punem condiția inițială $\sigma(u, 0) = 0$ (pentru că $s(u, 0) = e_0$ care e constantă în raport cu u). Cum și secțiunea nulă satisface ecuația, avem $\sigma \equiv 0$ pe $I \times I$. Rezultă de aici că $\tau^{\gamma_u}(e_0) = s(u, 1)$, transportul paralel al lui e_0 de-a lungul unei

curbe longitudinale, nu depinde de u , deci nu depinde de curba longitudinală pe care ne deplasăm. Am demonstrat:

Teorema 11.4.7. *Transportul paralel asociat unei conexiuni plate depinde numai de clasa de omotopie a curbei de-a lungul căreia se efectuează.*

În particular, dacă $U \subseteq M$ e simplu conex⁵, atunci transportul paralel de-a lungul curbelor din U nu depinde de curbă.

Corolarul 11.4.8. *O conexiune e plată dacă și numai dacă pe orice deschis simplu conex există repere de secțiuni paralele.*

Demonstrație. Să presupunem că avem o conexiune plată și fie U un deschis simplu conex. Fixăm arbitrar un punct $x \in U$ și un reper $\{v_{1x}, \dots, v_{rx}\}$ în E_x . Fie acum $y \neq x$. Transportăm prin paralelism v_{ix} în punctul y (transportul nu depinde de drum) și obținem valorile $v_{iy} \in E_y$. Acestea sînt linear independente: în caz contrar, ar exista o combinație lineară netrivială $\sum a_i v_{iy} = 0$ pe care am putea-o transporta înapoi în x ; cum transportul paralel e izomorfism linear, am obține $\sum a_i v_{ix} = 0$, contradicție. Așadar, aplicațiile $s_i(y) = v_{iy}$ formează un reper de secțiuni paralele.

Reciproca e imediată, din formula (11.5). ■

Urmare a acestui corolar în prezența unei conexiuni plate (caz în care fibrarea se numește plată), restricția fibrării la U simplu conex este trivială: deoarece există o bază de secțiuni pe U (nu are importanță că secțiunile sînt paralele), fibrarea $E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ e trivială. În particular,

Corolarul 11.4.9. *O fibrare vectorială plată peste o bază simplu conexă este trivială.*

Paralelismul unei secțiuni poate fi extins la un subfibrat. Astfel:

Definiția 11.4.10. Subfibratul $E' \subset E$ este paralel în raport cu ∇ dacă E' admite, pe orice deschis de trivializare, un reper de secțiuni paralele.

Fie E' paralel și $\{s_i\}$ reper de secțiuni paralele pe U . Atunci orice secțiune pe U se scrie $s = \sum f_i s_i$ și

$$\nabla s = \sum df_i \otimes s_i + \sum f_i \nabla s_i = \sum df_i \otimes s_i \in \mathcal{C}^\infty(E'|_U).$$

Reciproc, dacă știm că pentru orice secțiune locală s , $\nabla s \in \mathcal{C}^\infty(E'|_U)$, atunci putem găsi un reper de secțiuni paralele. Într-adevăr, fie $\{s_i\}$ un reper arbitrar de secțiuni locale ale lui E' . Căutăm o schimbare de reper $s'_i = \sum g_{ji} s_j$ astfel încît $\nabla s'_i = 0$. Avem

$$0 = \nabla s'_i = \sum_j dg_{ji} s_j + \sum_j g_{ji} \nabla s_j = \sum_j dg_{ji} s_j + \sum_{j,k} g_{ji} h_{kj} s_k.$$

Deci condiția noastră e echivalentă cu sistemul de ecuații

$$dg_{ki} + \sum_j h_{kj} g_{ji} = 0, \quad i, k = 1, \dots, \text{rg } E',$$

care are, evident, soluție. Am demonstrat

Propoziția 11.4.11. *Un subfibrat E' este paralel în raport cu o conexiune dacă și numai dacă $\nabla s \in \mathcal{C}^\infty(E')$ pentru orice $s \in \mathcal{C}^\infty(E')$.*

⁵Reamintim că o mulțime se numește simplu conexă dacă orice curbă pe ea este omotopă cu un punct. De exemplu, \mathbb{R}^n , S^n (pt. $n \geq 2$) sînt simplu conexe, dar $\mathbb{R}^n \setminus \{pt.\}$, sau torul, nu sînt simplu conexe.

5. Conexiuni lineare în fibratul tangent

Vom particulariza acum noțiunile și rezultatele din secțiunile anterioare în cazul fibratului tangent. Vom lua deci $E = TM$ ⁶. În acest caz, o conexiune ∇ este definită pe $\mathcal{X}(M)$ cu valori în $\Omega^1(M)$ sau, așa cum apare de obicei (este, de fapt, derivata covariantă asociată conexiunii):

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \xi(M),$$

cu proprietățile (notăm $\nabla_X Y$ pentru $\nabla Y(X)$)

$$\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z,$$

$$\nabla_X(fZ) = X(f)Z + f\nabla_X Z.$$

Local, dacă $\{x^1, \dots, x^n\}$ e un sistem de coordonate pe un domeniu de hartă pe M , considerăm reperul natural de câmpuri vectoriale $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ (reper de secțiuni locale în TM) și punem

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

unde (aici și mai departe) folosim convenția de sumare a lui Einstein. Funcțiile Γ_{ij}^k se numesc *coeficienți de conexiune* în reperul considerat și coincidența notației cu cea pentru simbolurile lui Christoffel, de la suprafețe, nu e deloc întâmplătoare: vom vedea, în capitolul dedicat subvarietăților riemanniene, că acele simboluri definesc o anume conexiune pe suprafață⁷.

Astfel, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, aplicînd proprietățile conexiunii vom avea

$$\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

În particular, luînd $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, pentru forma de conexiune avem

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i \theta_j^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

deci legătura dintre forma de conexiune și coeficienții de conexiune este

$$\Gamma_{ij}^k = \theta_j^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Formula de schimbare a coeficienților de conexiune la o schimbare de reper rezultă acum imediat din formula (11.4). Astfel, dacă Γ_{ij}^k și $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ sînt coeficienții de conexiune asociați reperelor $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ și $\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\}$, avem:

$$(11.12) \quad \Gamma_{kj}^s \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} = \bar{\Gamma}_{sr}^i \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}.$$

În particular, coeficienții de conexiune nu definesc un câmp tensorial de tip (1,2) așa cum s-ar putea crede după faptul că îi scriem cu 2 indici jos și unul sus.

⁶Conexiunile în TM se mai numesc conexiuni pe M .

⁷Unii autori (de exemplu, Ianuș în [Ia2], pe urmele lui Vrăncianu, [Vr]) scriu indicii de jos în ordine inversă și iau coeficienții de conexiune cu semn schimbat. Cititorul trebuie să aibă mare grijă la convențiile adoptate în fiecare text.

Exercițiul 11.5.1. Demonstrați (11.12) direct, fără a recurge la (11.4).

Exercițiul 11.5.2. Dată o conexiune lineară ∇ , definim $\bar{\nabla}$ prin $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$. Arătați că $\bar{\nabla}$ e conexiune lineară și determinați simbolurile ei Christoffel.

Cum coeficienții de conexiune depind de doi indici jos, se poate pune problema comutativității lor (cu atât mai mult cu cât am văzut că simbolurile lui Christoffel se bucură de această proprietate). Pentru a studia comutativitatea, introducem acum un câmp tensorial specific conexiunilor din fibrarea tangentă:

Definiția 11.5.3. Câmpul tensorial de tip $(0, 2)$ definit prin

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

se numește *torsiunea* conexiunii ∇ .

Observația 11.5.4. E clar că tensorul de torsiune este antisimetric: $T(X, Y) = -T(Y, X)$.

Deoarece croșetul a două câmpuri din reperul natural este nul, obținem imediat:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

deci

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{dacă și numai dacă } T \equiv 0.$$

Din acest motiv, o conexiune cu torsiune nulă („fără torsiune“, se mai spune) se numește *simetrică*. Vom vedea că geometria riemanniană este descrisă de o conexiune fără torsiune. pe de altă parte, teorii mai noi din fizica teoretică au (re)impus recent studiul conexiunilor cu torsiune.

Exemplul 11.5.5. Fie M o varietate paralelizabilă (în particular, un grup Lie) și $\{E_1, \dots, E_n\}$ o paralelizare fixată. Putem defini conexiunea ∇ prin relațiile

$$\nabla_{E_i} E_j = 0,$$

adică cerem anularea coeficienților de conexiune în reperul dat. Cum, în general, $[E_i, E_j] \neq 0$ (pe un grup Lie, dacă considerăm paralelizarea dată de un reper de câmpuri stîng invariante, croșetele acestea sînt combinații lineare cu coeficienți constanți de câmpurile din paralelizare: $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$), ∇ e o conexiune cu torsiune.

Pe grupuri Lie, dacă luăm $\{E_i\}$ paralelizarea dată de câmpuri stîng invariante, se verifică ușor că următoarele formule definesc conexiuni:

$$\nabla_{E_i}^+ E_j = [E_i, E_j], \quad \nabla_{E_i}^0 E_j = \frac{1}{2}[E_i, E_j].$$

Torsiunile lor sînt, respectiv, $T^+(X, Y) = [X, Y]$ și $T^0 \equiv 0$.

Din Observația 11.1.6 rezultă că diferența a două conexiuni lineare e un câmp tensorial de tip $(1, 2)$. Cum și torsiunea e de acest tip, obținem:

Propoziția 11.5.6. (i) Pe orice varietate există conexiuni simetrice.

(ii) Dat un câmp tensorial A de tip $(1, 2)$, există o conexiune lineară cu torsiunea A .

Demonstrație. Fixăm o conexiune ∇ pe M (știm că există conexiuni), cu torsiune T , și punem

$$\nabla^0 = \nabla - \frac{1}{2} T^0.$$

Din antisimetria lui ∇^0 rezultă imediat că torsiunea lui ∇^0 este nulă.

Acum definim

$$\nabla' = \nabla^0 + \frac{1}{2}A$$

și verificăm ușor că torsiunea lui ∇' este A . ■

În ce privește curbura unei conexiuni pe M , e convenabil să lucrăm nu cu forma de curbură, ci cu tensorul de curbură. Aici, deoarece toate argumentele sînt de același tip (cîmpuri vectoriale) e mai comod să scriem $R(X, Y)Z$ în loc de $R_{XY}Z$. Avem deci

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

astfel că R e un cîmp tensorial de tip $(1, 3)$, antisimetric în primele două argumente:

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

Local, în reperul natural, punem

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

și rezultă imediat

$$R^l{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma^l{}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l{}_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^l{}_{is} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^l{}_{js}.$$

Observăm că e aceeași formulă care a apărut în demonstrația Teoremei Egregium, la suprafețe, mai precis, în expresia ecuației lui Gauss. Lucrurile se vor lămurii în capitolul dedicat subvarietăților riemanniene.

Prin calcul direct se arată:

Propoziția 11.5.7. (Prima identitate Bianchi.) *Tensorul de curbură al unei conexiuni simetrice satisface identitatea:*

$$\sum_{\text{cicl.}} R(X, Y)Z := R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0.$$

Am văzut deja că anularea curburii are consecințe asupra transportului paralel (vom reveni). În cazul conexiunilor pe M , există și alte consecințe. Mai precis, putem demonstra:

Propoziția 11.5.8. *Varietatea M admite un atlas cu schimbări de coordonate afine dacă și numai dacă admite o conexiune cu curbură și torsiune nule.*

Demonstrație. Dacă M admite un atlas cu schimbări afine de coordonate, $\bar{x}^i = a^i{}_j x^j + b^i x^i$, atunci definim $\Gamma^k{}_{ij} = 0$ și formula (11.12) ne asigură că definiția e coerentă: la o schimbare de coordonate, $\bar{\Gamma}^k{}_{ij}$ depinde linear de $\Gamma^r{}_{st}$, deci și în coordonatele \bar{x}^i coeficienții sînt nuli. Evident că o asemenea conexiune are curbură și torsiune nulă.

Reciproc, presupunem că torsiunea și curbura sînt nule. Arătăm că putem găsi un atlas în care toți coeficienții de conexiune să fie nuli. Într-un asemenea atlas, din (11.12) va rezulta $\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0$, deci \bar{x}^i depinde afin de x^j .

Ca să găsim atlasul acesta, fixăm un atlas inițial cu coordonate x^i și căutăm noile funcții coordonate $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ cu proprietatea $\bar{\Gamma}^k{}_{ij} = 0$. Din nou din (11.12) rezultă că

trebuie să avem

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{kj}^s \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}.$$

Tratăm ecuațiile de mai sus ca pe un sistem de ecuații cu derivate parțiale în necunoscutele \bar{x}^i , pe care îl transformăm într-un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi prin substituția $y_s^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}$. Obținem sistemul:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} = y_s^i, \quad \frac{\partial y_k^i}{\partial x^j} = y_s^i \Gamma_{kj}^s.$$

Nu ne interesează să rezolvăm sistemul; vrem doar să vedem dacă are soluții. Pentru aceasta, îl transformăm într-unul pffaffian. Cum

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} dx^s = y_s^i dx^s$$

și

$$dy_s^i = \frac{\partial y_s^i}{\partial x^j} dx^j = y_k^i \Gamma_{sj}^k dx^j,$$

dacă introducem 1-formele locale $\alpha_1 = d\bar{x}^i - y_s^i dx^s$ și $\alpha_2 = dy_s^i - y_k^i \Gamma_{sj}^k dx^j$, sistemul nostru este echivalent cu cel pffaffian:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Din Teorema lui Frobenius (vezi [Mir]), rezultă că sistemul e integrabil dacă și numai dacă

$$d\alpha_1 = 0, \quad d\alpha_2 = 0 \quad \text{mod } (\alpha_2, \alpha_2).$$

Cu alte cuvinte, ca să obținem condiția de integrabilitate, scriem diferențialele exterioare ale formelor α_1, α_2 în care folosim ecuațiile $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ (remarcați similitudinea cu metoda folosită în demonstrația Teoremei fundamentale a teoriei suprafețelor). Obținem:

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= -dy_s^i \wedge dx^s = -y_k^i \Gamma_{sj}^k dx^j \wedge dx^s, \\ d\alpha_2 &= -y_m^i (\Gamma_{js}^k \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial \Gamma_{sj}^m}{\partial x^l}) dx^l \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Ținând seamă de faptul că y_s^i e matrice nedegenerată pe un deschis (fiind matricea unei schimbări de coordonate) și de anticomutativitatea produsului exterior de 1-forme, condițiile de integrabilitate corespunzătoare sînt:

$$\Gamma_{sj}^k - \Gamma_{js}^k = 0, \quad \Gamma_{js}^k \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial \Gamma_{sj}^m}{\partial x^l} - \Gamma_{ls}^k \Gamma_{kj}^m - \frac{\partial \Gamma_{sl}^m}{\partial x^j} = 0,$$

adică tocmai anularea tensorilor de torsiune și curbură ale conexiunii date. ■

Dacă nu impunem anularea curburii, ci doar a torsiunii, nu mai putem obține un atlas în care coeficienții de conexiune să fie nuli. Dar putem obține un rezultat mai slab, încă foarte util în calcule:

Propoziția 11.5.9. Fie ∇ o conexiune lineară simetrică pe M . Atunci, în jurul oricărui punct x din M , există o hartă de coordonate în care toți coeficienții de conexiune se anulează în punctul x .

Demonstrație. Fie U un deschis de coordonate arbitrar în jurul lui x , cu coordonate x^i . Facem schimbarea de coordonate (sugerată de forma ecuațiilor (11.12)):

$$\bar{x}^i = x^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(x)(x^j - x^j(x))(x^k - x^k(x)).$$

E clar că $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, deci formula anterioară chiar e o schimbare de coordonate. Apoi, din (11.12) rezultă imediat că $\bar{\Gamma}_{jk}^i(x) = 0$. ■

Observația 11.5.10. Teorema Gauss–Bonnet arată că aspectul metric al unei suprafețe compacte este influențat de topologia ei. Mai precis, cum integrala curburii e un multiplu al caracteristicii Euler–Poincaré, nu orice suprafață compactă poate avea orice fel de curbura. La fel, se poate demonstra că anumite clase de coomologie de Rham (numite clase Pontryagin) se pot exprima în termeni de curbura a unei conexiuni în TM . Dacă aceste clase sînt nenule, curbura conexiunii nu poate fi nulă. Morala este că topologia unei varietăți poate obstrucționa existența unor conexiuni cu anumite proprietăți, în speță cu curbura nulă. E clar, însă, că pe o varietate paralelizabilă, conexiunea definită de $\nabla_{E_i} E_j = 0$ are curbura nulă.

Cum am văzut, o conexiune într-un fibrat induce în mod natural conexiuni în fibrările tensoriale asociate. Astfel, o conexiune în fibrarea tangentă va da posibilitatea derivării covariante a câmpurilor tensoriale, în particular a formelor diferențiale. Pentru simplitate, vom nota la fel, ∇ , conexiunea indusă în orice fibrare tensorială (la unii autori apare $\tilde{\nabla}$).

Folosind formula (11.9), deducem că, pe 1-forme, conexiunea acționează prin:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y).$$

Acum, cu prima formulă (11.7), găsim modul cum acționează conexiunea asupra câmpurilor tensoriale. De exemplu, pentru câmpuri tensoriale de tip $(0, k)$ și $(1, k)$ avem:

$$(11.13) \quad \begin{aligned} &(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_k) \\ &= X(S(X_1, \dots, X_k)) - \sum_i S(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Verificarea se face pe câmpuri tensoriale locale de tip monom, apoi se extinde folosind proprietățile conexiunii.

În particular, formula este valabilă pentru k -forme diferențiale.

Exercițiul 11.5.11. Fie ∇ o conexiune simetrică. Atunci diferențiala exterioară unei k -forme diferențiale este alternarea derivatei sale covariante: $d\omega = \mathcal{A}(\nabla\omega)$.

Exemplul 11.5.12. Tensorul de curbura se derivează după formula:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U = X(R(Y, Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y, Z)\nabla_X U.$$

Exercițiul 11.5.13. Găsiți prima identitate a lui Bianchi (suma ciclică a tensorului de curbura) pentru conexiuni cu torsiune.

Propoziția 11.5.14. (A doua identitate Bianchi). Tensorul de curbura al unei conexiuni simetrice satisface identitatea:

$$\sum_{cicl.} (\nabla_X R)(Y, Z) = 0,$$

sau, explicit:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U = 0.$$

Demonstrația, pe care o lăsăm cititorului, se poate face ori direct, aplicînd formula din exemplu și identitatea lui Jacobi, ori traducînd identitatea generală a lui Bianchi din Teorema 11.2.6.

Curbe autoparalele. Am văzut că pentru orice conexiune și orice curbă pe varietate, se poate defini noțiunea de secțiune paralelă de-a lungul acelei curbe. În cazul particular al unei conexiuni în fibratul tangent, această noțiune se poate rafina.

Definiția 11.5.15. Curba $\sigma(t)$ se numește *autoparalelă* față de conexiunea ∇ dacă vectorul său tangent e paralel de-a lungul lui σ (adică $\nabla_{\sigma'(t)}\sigma'(t) = 0$).

Observația 11.5.16. E clar că $\nabla_{\sigma'(t)}\sigma'(t)$ e o generalizare a derivatei a doua pentru funcții reale de o variabilă. Deci autoparalelele unei conexiuni sînt generalizarea curbelor cu accelerație nulă din \mathbb{R}^3 , adică a geodezicilor.

Ecuția curbelor autoparalele se găsește simplu, particularizînd ecuațiile (11.11): dacă, local, $\sigma(t) = (x^i(t))$, atunci $\sigma' = (\frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k})$ și f_k din formula menționată va fi $\frac{dx^k}{dt}$, astfel că obținem:

$$(11.14) \quad \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Similitudinea cu ecuațiile geodezicilor pe suprafețe este evidentă. De aceea, curbele autoparalele se mai numesc geodezice. Dar preferăm să păstrăm această denumire pentru autoparalelele unei anumite conexiuni (Levi-Civita) pe varietăți riemanniene.

Exercițiul 11.5.17. Pe \mathbb{R}^2 , considerăm conexiunea definită de coeficienții de conexiune: $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$, toți ceilalți fiind nuli. Găsiți curbele ei autoparalele printr-un punct oarecare (x_0^1, x_0^2) . Dacă γ și σ sînt două autoparalele care pleacă din 0 ($\gamma(0) = \sigma(0)$) și dacă $\gamma'(0) = r\sigma'(0)$, pentru un $r \in \mathbb{R}$, arătați că $\gamma(t) = \sigma(rt)$ pentru orice t .

Teorema 11.4.3, împreună cu rezultate clasice din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare referitoare la dependența diferențiabilă a soluției de condițiile inițiale și de parametri, se specializează acum la următoarea:

Teorema 11.5.18. Fie ∇ o conexiune lineară pe M , $x \in M$ și $v \in T_x M$ fixați. Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $\varepsilon > 0$ și o curbă autoparalelă unică $\sigma : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow M$, cu $\sigma(0) = x$ și $\sigma'(0) = v$. Curba $\sigma = \sigma(t; x, a, v)$ depinde diferențiabil de x, a, v pentru valori suficiente de mici ale acestora.

În ce măsură determină autoparalele unei conexiuni conexiunea însăși? Altfel spus, este adevărat că dacă două conexiuni lineare au aceleași autoparalele, atunci sînt egale? Formulăm răspunsul în următorul exercițiu:

Exercițiul 11.5.19. Conexiunile ∇ și $\tilde{\nabla}$ au aceleași autoparalele dacă și numai dacă $A(X, X) = 0$, unde $A(X, Y) := \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$. (Indicație: Fie $v \in T_x M$ și σ autoparalela (față de ambele conexiuni) prin x cu viteză inițială v . Atunci $A(v, v) = 0$ prin definiție. Cum x și v au fost arbitrari, am demonstrat o implicație. Cealaltă se demonstrează asemănător).

Folosiți acest rezultat pentru a arăta că: dată o conexiune lineară ∇ , există o conexiune lineară simetrică unică $\bar{\nabla}$ cu aceleași autoparalele.

Exemplul 11.5.20. Pe \mathbb{R}^3 , notăm X_i câmpurile vectoriale globale ∂x^i . Definim conexiunea ∇ prin formulele:

$$\nabla_{X_i} X_j = \text{sgn}(i j k) X_k, \quad \nabla_{X_i} X_i = 0.$$

Cum singurii coeficienți de conexiune vor fi $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ji}^k = 1$ (pentru i, j, k diferiți), ecuațiile autoparalelelor se reduc la $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$, deci autoparalele sînt drepte euclidiene, la fel ca pentru conexiunea plată ∇^0 , dată prin $\nabla_{X_i}^0 X_j = 0$. Dar, spre deosebire de ∇^0 , conexiunea ∇ nu e simetrică: $T(X_i, X_j) = 2X_k$.

Am văzut în Exemplul 11.5.5 că pe orice grup Lie există o conexiune, notată ∇^+ , care satisface $\nabla_{E_i}^+ E_j = 0$ pentru orice câmpuri sîng invariante E_i . În particular, toate câmpurile sîng invariante sînt ∇^+ -paralele pe orice curbă, astfel că orice curbă integrală a lor e ∇^+ -autoparalelă. Se poate arăta mai mult:

Exercițiul 11.5.21. Orice ∇^+ -autoparalelă pe un grup Lie G e traslatată la sînga a unui subgrup cu un parametru $\xi(t)$: $\sigma(t) = L_{\sigma(0)}\xi(t)$.

Următorul exercițiu introduce o noțiune extrem de importantă: olonomia unei conexiuni lineare:

Exercițiul 11.5.22. Fie M o varietate înzestrată cu o conexiune fixată ∇ . Pentru fiecare $x \in M$, considerăm toate bucele în x , diferențiabile pe porțiuni, și pentru fiecare asemenea buclă γ , transportul prin paralelism asociat (care e un izomorfism linear $\tau^\gamma: T_x M \rightarrow T_x M$). Arătați că $\{\tau^\gamma | \gamma = \text{buclă în } x\}$ este un subgrup, notat H_x , al lui $\text{GL}(T_x M)$. H_m se numește *grupul de olonomie în x* .

Arătați că dacă M e conexă, atunci $H_x \cong H_y$ pentru orice $x \neq y$, caz în care putem vorbi despre *subgrupul de olonomie*, fără a mai preciza punctul în care e calculat. (Indicație: dacă M e conexă, atunci e conexă prin arce, fie, deci, σ o curbă care unește x cu y ; asociați unei bucle τ_x în x bucla $\sigma \tau_x \sigma^{-1}$ în y , unde σ^{-1} notează curba parcursă invers, iar alăturarea reprezintă concatenare, nu compunere.)

Arătați că dacă ∇ e plată, atunci $H_x = 0$, pentru orice x .

Problema care se pune, în mod natural, este care anume subgrupuri ale lui $\text{GL}(n)$ pot apărea ca grupuri de olonomie. Problema este extrem de complicată și nu i se cunoaște răspunsul în general, ci numai pentru anumite conexiuni. Pentru conexiuni riemanniene (cf. capitolului următor), rezolvarea completă a venit la începutul anilor '60, prin lucrări ale lui M. Berger și J. Simons. Pentru cazul mai general, al conexiunilor lineare *simetrice*, clasificarea a fost dată în 1999, într-un articol al lui S. Merkulov și L. Schwachhöfer, *Ann. Math.* vol. 150, 77–149.

CAPITOLUL 12

Spații Riemann

Am ajuns acum la subiectul central al acestui curs. După ce am introdus varietățile abstracte și le-am asociat varii construcții (tensori, fibrări, conexiuni) și operații geometrice pe ele (derivare, integrare), putem acum să studiem operația fundamentală în geometrie, anume *măsurarea*. Revenim, astfel, la punctul de vedere din Partea I a cărții, unde am discutat *proprietățile metrice*, locale și globale, ale curbilor și suprafețelor din \mathbb{R}^3 , nimic altceva decât cazuri particulare de (sub)varietăți riemanniene. Ceea ce ne va interesa în primul rând va fi definirea și studiul unei noțiuni de curbură. Vom face acest lucru cu ajutorul unei conexiuni speciale, a lui Levi-Civita. Din păcate, nu ne putem permite o prezentare istorică, euristică; sîntem nevoiți să ne mărginim la o expunere în linia obișnuită a manualelor moderne. Dar cititorul ar avea numai de câștigat dacă ar citi memoriul lui Riemann din 1854 [Ri] (publicat postum, de Dedekind) în care sînt introduse și explicate, motivate matematic și fizic, ideile fundamentale și articolul [Lc] din 1917 al lui Levi-Civita (traduceri ale lor în română se găsesc, de exemplu, pe pagina: gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html)

1. Definiții. Exemple.

Reamintim, cf. Definiția 10.3.5:

Definiția 12.1.1. O metrică riemanniană pe o varietate diferențiabilă M este un cîmp tensorial de tip $(0, 2)$, simetric și pozitiv definit (în particular, nedegenerat)¹.

Altfel spus, a da o metrică riemanniană este echivalent cu a dota fiecare spațiu tangent $T_x M$ cu un produs scalar g_x în așa fel încît asocierea $x \mapsto g_x$ e diferențiabilă. Am văzut în Capitolul 10 că orice varietate diferențiabilă admite metrici riemanniene (aici intervenea în mod esențial paracompacitatea, prin existența partiției unității). O examinare atentă ademonstrației, arată că proprietatea esențială pe care se bazează este aceea că *o combinație convexă de matrice pozitiv definite e pozitiv definită*. Existența metricilor riemanniene pe orice varietate diferențiabilă e un fapt absolut remarcabil. Dacă se renunță la pozitiv definire, adică se caută metrici semi-riemanniene nedegenerate, o teoremă de existență de asemenea generalitate nu mai e posibilă (de exemplu, existența unei metrici Lorentz, adică de semnătură $(n - 1, 1)$, e echivalentă cu existența unui cîmp vectorial nicăieri nul, ceea ce, pe varietăți compacte, implică anularea caracteristicii Euler-Poincaré).

¹Dacă se renunță la pozitiv definire și se impune doar nedegenerarea, se ajunge la noțiune de metrică semi-riemanniană, obiect central în teoria relativității lui Einstein.

De obicei, vom nota metricile riemanniene cu g , h sau, cînd nu e pericol de confuzie, cu \langle, \rangle .

De aici înainte, (M, g) va nota o varietate riemanniană (se mai numește spațiu Riemann).

În coordonate locale (x^i) , o metrică g produce coeficienții $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, care sînt funcții diferențiabile de x . Matricea de funcții (g_{ij}) este simetrică și pozitiv definită. Fiind vorba despre un tensor de tip $(0,2)$, la o schimbare de coordonate, coeficienții g_{ij} se schimbă după formula:

$$(12.1) \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}.$$

Matricea (g_{ij}) e nedegenerată, astfel că există inversa ei, pe care o vom nota (g^{ij}) . E ușor de văzut, folosind formulele anterioare, că, la o schimbare de coordonate, coeficienții g^{ij} se schimbă după formula:

$$\bar{g}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} g^{kl},$$

ceea ce ne spune că (g^{ij}) sînt componentele locale ale unui tensor contravariant de tip $(2,0)$, pe care o săl notăm g^{-1} .

Cu ajutorul formulelor (12.1) se arată ușor că, pe varietăți riemanniene, există o formă volum globală, asociată metricii, pe care o vom nota vol_g . Ea se definește prin:

$$(12.2) \quad \text{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

O vom folosi la integrarea pe varietăți riemanniene.

Cu ajutorul metricii se calculează lungimi de cîmpuri vectoriale, după formula:

$$|X|^2 = g(X, X),$$

care, local, se scrie:

$$|X|^2 = g_{ij} X^i X^j.$$

Apoi se calculează lungimi de curbe:

$$(12.3) \quad L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt,$$

deci pe varietăți riemanniene se poate vorbi despre curbe² parametrizate canonic (demonstrația existenței acestei parametrizări nu diferă cu nimic de cea pe care am dat-o în Capitolul 1) etc.

Pe de altă parte, folosind și g^{-1} , putem defini și calcula lungimea oricărui tensor de tip (r, s) . Cel mai comod este să indicăm formula locală. Dacă $T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, atunci punem:

$$|T|^2 = g_{i_1 l_1} \dots g_{i_r l_r} g^{j_1 m_1} \dots g^{j_s m_s} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} T_{m_1 \dots m_s}^{l_1 \dots l_r}.$$

E ușor de văzut că nu am făcut altceva decît să inducem produsul scalar la toate fibrările tensoriale asociate (operație de algebră lineară, nimic mai mult).

²Vom considera întotdeauna curbele netede pe porțiuni, toate construcțiile pe care le vom face, chiar dacă definite pentru curbe netede, puțind fi extinse la acest caz.

De fapt, g poate fi interpretat ca un izomorfism $g : TM \rightarrow T^*M$ care lucrează prin $g(X)(Y) = g(X, Y)$. Atunci g^{-1} este inversul acestuia³.

Mai precis, oricărui câmp vectorial tangent X îi asociem 1-forma X^\flat prin $X^\flat(Y) = g(X, Y)$. Local, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, atunci $X^\flat = X_j dx^j$, unde $X_j = g_{ji} X^i$. Se spune că trecerea de la X la X^\flat s-a făcut prin *coborîrea indicilor*, ceea ce motivează notația $^\flat$, deoarece, în muzică, bemolul coboară nota la care se referă cu un semiton. Invers, unei 1-forme ω i se asociază un câmp ω^\sharp prin $g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y)$. Dacă, local, $\omega = \omega_i dx^i$, atunci $\omega^\sharp = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, cu $X^j = g^{ji} \omega_i$, deci acum am *ridicat indicii* (diezul ridică nota cu un semiton). Aplicațiile notate diez și bemol se mai numesc *izomorfisme muzicale*.

De exemplu, unei funcții diferențiabile f , i se asociază 1-forma df , iar $(df)^\sharp$ se notează grad f , sau ∇f și e definit prin

$$g(\text{grad } f, Y) = df(Y).$$

Exemplul 12.1.2. Cel mai simplu exemplu este \mathbb{R}^n cu metrica (globală) $g_{ij} = \delta_{ij}$. O vom numi *metrica plată*, pentru că va avea curbura nulă.

Toate suprafețele studiate în Partea I sînt varietăți riemanniene, pe post de metrică avînd prima formă fundamentală (acest lucru va fi și mai vizibil în capitolul următor, cînd vom vorbi despre subvarietăți riemanniene).

Pe $GL(n)$ se poate defini metrica $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$.

Semispațiul superior, $H^n := \{(x^i) | x^n > 0\}$ este un deschis în \mathbb{R}^n , deci e o varietate n -dimensională, acoperită cu o singură hartă. Putem pune pe el metrica $g_{ij} = \frac{1}{(x^n)^2} \delta_{ij}$. Aceasta nu este indusă de metrica plată a lui \mathbb{R}^n , deci avem încă un exemplu de varietate riemanniană abstractă.

Dacă (M_i, g_i) sînt varietăți riemanniene și $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, surjecțiile canonice ale produsului pe factori. Atunci $(M_1 \times M_2, \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ e o varietate riemanniană (metrica $\pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ se mai notează și $g_1 + g_2$ și se numește metrica produs).

Izometrii. Pe varietăți riemanniene, e normal să ne uităm la aplicații diferențiabile care sînt compatibile cu metricile. Astfel:

Definiția 12.1.3. Fie $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ o aplicație diferențiabilă. f se numește *izometrie* dacă $d_x f : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$ e izometrie pentru orice $x \in M_1$.

Explicit, f e izometrie dacă pentru orice $x \in M_1$ și orice $v, w \in T_x M_1$ avem

$$g_2(d_x f(v), d_x f(w)) = g_1(v, w).$$

E clar că orice izometrie e imersie (adică $d_x f$ e injectivă).

Corespunzător, pe varietăți riemanniene sîntem interesați nu de toate difeomorfismele, ci de subgrupul izometriilor (e ușor de văzut că o compunere de izometrii e tot izometrie și că identitatea e o izometrie, așadar izometriile formează un subgrup). Se poate demonstra, cf. [MS], dar depășește cadrul acestui text:

Teorema 12.1.4. *Grupul izometriilor unei varietăți riemanniene conexă este un grup Lie, compact atunci cînd M e compactă.*

³În general, nu există izomorfisme canonice între spațiile tangent și cotangent. Abia în prezența unei metrici sau alte forme pătratiche nedegenerate se pot face asemenea identificări.

Exemplul 12.1.5. (Metrici invariante.) Fie M o varietate și H un subgrup Lie al grupului difeomorfismelor lui M . Spunem că o metrică g e invariantă la acțiunea lui H dacă fiecare element al grupului e o izometrie a lui g . Dacă H e compact, atunci există întotdeauna metrici invariante față de el. Procedeu de obținere a unei asemenea metrici pornind cu una arbitrară (fie ea g_0) se numește *mediere* și utilizează integrarea pe grup și pe varietate. Pe H există o formă volum invariantă la stînga, cf. Exemplul 9.4.7 (2), fie ea ω , față de care se poate integra. Pe de altă parte, M are un element de volum dat de metrica g_0 , fie el vol_0 . Definim acum

$$g = \frac{\int_H a^* g \text{vol}_0}{\int_H \omega}.$$

Observăm că, H fiind compact, $\int_H \omega$ este finit și nenul - e chiar volumul lui H . g este *media* tuturor metricilor care se pot obține prin acțiunea elementelor lui H asupra lui g_0 . Dacă H e finit, atunci la numitor apare cardinalul său și g e chiar o medie aritmetică. Dacă $b \in H$ arbitrar, avem

$$b^* g = \frac{\int_H b^* a^* g \text{vol}_0}{\int_H \omega} = \frac{\int_G (a \circ b)^* g \text{vol}_0}{\int_H \omega} = g,$$

pentru că $a \circ b$ parcurge toate elementele lui H . Deci g e o metrică H -invariantă.

De exemplu, dacă M e un grup Lie G și H e subgrupul translațiilor stîngi $\{L_a\}$, atunci o metrică H -invariantă se numește *sîng invariantă*. Metrici sîng invariante se construiesc foarte ușor. Fie g_e un produs scalar pe algebra Lie $\mathfrak{g} = T_e G$. Punem

$$g_a(X_a, Y_a) := g_e(dL_{a^{-1}} X_a, dL_{a^{-1}} Y_a).$$

Atunci

$$\begin{aligned} (L_b^* g)_a(X_a, Y_a) &= g_{ba} dL_b X_a, dL_b Y_a = g_e(dL_{(ba)^{-1}}(dL_b X_a), dL_{(ba)^{-1}}(dL_b Y_a)) \\ &= g_e(dL_{a^{-1}} X_a, dL_{a^{-1}} Y_a) = g_a(X_a, Y_a), \end{aligned}$$

deci g e sîng invariantă. Reciproc, se vede că orice metrică sîng invariantă induce, prin restricție, un produs scalar pe $T_e G$.

Ce nu mai e atît de simplu e de produs metrici *biinvariante* pe grupuri Lie, adică invariante și la translațiile drepte (vezi, mai jos, Exemplul 12.3.25).

Exercițiul 12.1.6. Fie $f: M \rightarrow (N, g)$ o imersie. Arătați că $f^* g$ este o metrică riemanniană pe M . Spunem că $(M, f^* g)$ e o imersie izometrică a lui (N, g) . În particular, luînd pentru f incluziunea canonică i , se obțin exemple de subvarietăți izometrice. În acest caz, $i^* g$ este pur și simplu restricția lui g la M . Toate suprafețele studiate în Partea 1 sînt de acest tip, pentru (N, g) avînd $(\mathbb{R}^3, g_{ij} = \delta_{ij})$.

Exemplul 12.1.7. Să calculăm coeficienții metricii g induse de pe \mathbb{R}^{n+1} pe sfera S^n folosind parametrizarea prin proiecție stereografică din polul nord ($x^{n+1} \neq 1$):

$$\varphi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right).$$

Dacă (u^i) sînt coordonatele pe \mathbb{R}^n , atunci inversa lui φ este:

$$x^i = \frac{2u^i}{1 + \|u\|^2}, \quad i = 1, \dots, n; \quad x^{n+1} = \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial u^j} &= 2 \frac{\delta_{ij}}{1 + \|u\|^2} - 4 \frac{u^i u^j}{(1 + \|u\|^2)^2}, \quad i, j = 1, \dots, n; \\ &= \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^j} = 4 \frac{u^j}{(1 + \|u\|^2)^2}.\end{aligned}$$

Fie acum V un vector tangent la S^n care, în harta considerată are componentele V^i , adică $V = V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Trebuie să avem $g(V, V) = \langle d\varphi^{-1}(V), d\varphi^{-1}(V) \rangle$, unde \langle, \rangle notează produsul scalar uzual din \mathbb{R}^n . Așadar:

$$\begin{aligned}g(V, V) &= \frac{1}{(1 + \|u\|^2)^4} \left\{ 4(1 + \|u\|^2)^2 \sum (V^i)^2 - 16(1 + \|u\|^2) \left(\sum u^i V^i \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 16\|u\|^2 \left(\sum u^i V^i \right)^2 + 16 \left(\sum u^i V^i \right)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{(1 + \|u\|^2)^2} \sum (V^i)^2.\end{aligned}$$

În concluzie, coeficienții metricii în harta considerată sînt:

$$(12.4) \quad g_{ij}(u) = \frac{4}{(1 + \|u\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

Exercițiul 12.1.8. Arătați că $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e difeomorf cu $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Arătați că $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ cu metrica $dt^2 + t^2g$, unde g e metrica standard a sferei, e izometric cu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ cu metrica indusă de pe \mathbb{R}^n . Găsiți relația dintre metrica aceasta și metrica produs naturală a lui $\mathbb{R} \times S^{n-1}$.

Exercițiul 12.1.9. (i) Arătați că izometriile lui S^n cu metrica indusă de pe \mathbb{R}^{n+1} sînt restricțiile transformărilor din $O(n+1)$.

(ii) Arătați că izometriile semiplanului Poincaré sînt omografii de forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, cu $ad - bc \neq 0$, unde am notat $z = x^1 + ix^2$.

Spații de acoperire. Fie $\pi : M \rightarrow B$ un spațiu de acoperire, cf. 6. Dacă g^B e o metrică riemanniană pe B , atunci M poate fi înzestrat cu o metrică, fie ea g^M , astfel încît π să devină izometrie locală. Vrem, deci:

$$(12.5) \quad g_x^M(v, w) = g_{\pi(x)}^B(d_x\pi(v), d_x\pi(w)), \quad \text{pentru orice } x \in M, v, w \in T_xM.$$

Dar putem citi această formulă și ca pe o definiție a lui g^M . Explicația e că $d_x\pi$ e izomorfism linear între spațiile tangente între care acționează, așa că produsul scalar $g_{\pi(x)}^B$ se transportă prin $(d_x\pi)^{-1}$ pe T_xM . În acest mod, coeficienții locali ai lui g^M și g^B , în hărți adaptate acoperirii, vor fi legați prin relația:

$$g_{ij}^M = g_{ij}^B \circ \pi,$$

și cum π e difeomorfism local, g_{ij}^M sînt funcții diferențiabile.

În particular, acoperirea universală a oricărei varietăți riemanniene se poate înzestra cu o unică metrică riemanniană față de care aplicația de acoperire devine izometrie locală.

Exercițiul 12.1.10. Transformările de acoperire ale spațiului total al unei acoperiri riemanniene sînt izometrii.

Dar construcția inversă nu mai poate fi făcută: o metrică de pe M nu se poate „împinge“ întotdeauna pe B . (12.5) nu poate fi luată ca definiție pentru membrul drept pentru că π nu e bijectivă. Există, însă, situații când acest lucru e posibil:

Propoziția 12.1.11. *Fie (M, g^M) un spațiu Riemann și G un grup care acționează total discontinuu și separabil prin izometrii față de g^M pe M . Atunci $B := M/G$ are o unică metrică g^B față de care proiecția canonică devine izometrie locală.*

Demonstrație. Știm din Teorema 5.6.18 că $\pi : M \rightarrow B$ e aplicație de acoperire. Vrem să folosim (12.5) ca să definim g^B . Trebuie să plecăm cu $b \in B$ și să punem:

$$g_b^B(v, w) = g_x^M((d_x\pi)^{-1}(v), (d_x\pi)^{-1}(w)), \quad \text{pentru orice } b \in B, v, w \in T_bB.$$

Evident, rezultatul nu trebuie să depindă de alegerea lui x în fibra $\pi^{-1}(b)$. Adică, dacă $x \neq y$ sînt în $\pi^{-1}(b)$, trebuie să avem

$$g_x^M((d_x\pi)^{-1}(v), (d_x\pi)^{-1}(w)) = g_y^M((d_y\pi)^{-1}(v), (d_y\pi)^{-1}(w)).$$

Dar, cum x și y sînt în aceeași fibră, există un element $a \in G$ care aplică x pe y : $a(x) = y$. Acest a e o izometrie, deci $d_x a : T_x M \rightarrow T_y M$ e izometrie lineară. Mai mult, cum $\pi \circ a = \pi$, derivînd și inversînd relația, avem $(d_y\pi)^{-1} = d_x a \circ (d_x\pi)^{-1}$, ceea ce arată că definiția lui g^B e consistentă.

Unicitatea rezultă ușor pentru că, la fel ca mai înainte, componentele locale ale lui g^M și g^B trebuie să coincidă (în hărți adaptate acoperirii). ■

Exemplul 12.1.12. 1) \mathbb{Z}_2 acționează prin izometrii față de metrica plată a lui \mathbb{R}^{n+1} : identitatea e izometrie, $x \mapsto -x$ e simetria față de origine. Atunci acțiunea indusă a lui \mathbb{Z}_2 pe S^n va fi prin izometrii față de metrica indusă pe S^n . În consecință, această metrică se proiectează pe $P^n\mathbb{R} = S^n/\mathbb{Z}_2$.

2) **Toruri plate.** Știm că acțiunea lui \mathbb{Z}^2 pe \mathbb{R}^2 prin $(m, n)(x, y) = (x+m, y+n)$ e total discontinuă și separabilă, spațiul orbitelor fiind un tor 2-dimensional. Vrem acum să vedem dacă putem induce metrica plată a lui \mathbb{R}^2 pe tor.

E util să ne plasăm într-un context mai general. Acționăm cu \mathbb{Z}^n pe \mathbb{R}^n prin translații și obținem un tor T^n . Dar translațiile pot fi foarte multe. Alegem deci o bază $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (nu e neapărat cea canonică). Acum \mathbb{Z}^n se identifică cu mulțimea vectorilor $\Gamma := \{\sum_i m_i v_i \mid (m_i) \in \mathbb{Z}^n\}$ (evident Γ e o latice în \mathbb{R}^n așa că are sens cîtul \mathbb{R}^n/Γ care e compact). Acțiunea lui \mathbb{Z}^n se face în felul următor. Dacă $P \in \mathbb{R}^n$ are coordonatele (X^1, \dots, X^n) în \mathcal{B} , atunci $((m_1, \dots, m_n), P) \mapsto (x^1 + m_1, \dots, x^n + m_n)$. Exemplul 2-dimensional cu care am pornit corespunde bazei canonice a lui \mathbb{R}^2 .

Ca să ne convingem că \mathbb{R}^n/Γ e un $T^n := S^1 \times \dots \times S^1$, definim $\varphi' : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ prin:

$$\varphi'(\sum x^j v_j) = (e^{2\pi i x^j}) \pmod{\Gamma}.$$

Dacă $x^j \in \mathbb{Z}$, atunci $\varphi'(\sum x^j v_j) = (1, \dots, 1)$, deci φ' e constant pe Γ și se factorizează la o aplicație bijectivă $\varphi : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$. Folosind compacitatea lui \mathbb{R}^n/Γ se arată că φ e homeomorfism. Acum hărțile se pun pe \mathbb{R}^n/Γ ca în Teorema 5.6.18 și se transportă prin φ pe T^n .

Cum orice translație e o izometrie a metricii plate a lui \mathbb{R}^n , e clar că \mathbb{R}^n/Γ , deci T^n , primește metrica plată indusă. Toate torurile plate sînt local izometrice. Dar nu sînt și

izometrice (global). Problema clasificării pînă la izometrie se reduce la o problemă de clasificare a laticelor.

E clar că în hărțile date de acoperire, componentele metricii induse pe T^n vor fi $g_{ij}^\Gamma = \langle e_i, e_j \rangle$, unde \langle, \rangle e produsul scalar standard pe \mathbb{R}^n . Atunci metricile asociate laticelor Γ și Γ' vor fi izometrice dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle$, adică dacă și numai dacă există o izometrie a lui \mathbb{R}^n care aplică Γ peste Γ' .

2. Conexiunea Levi-Civita

Teorema fundamentală geometriei riemanniene. Am văzut în capitolul anterior că orice conexiune produce un transport prin paralelism care depinde de curba căreia îi e asociat și este izomorfism linear între spațiile tangente de la capetele curbei. În context riemannian, ne interesează acele conexiuni al căror transport paralel e izometrie.

Pentru a găsi o formulare echivalentă a acestei proprietăți, reamintim că orice conexiune lineară ∇ induce conexiuni, notate la fel, în toate fibrările tensoriale asociate fibrării tangente, în particular în fibrarea tensorilor de tip $(0, 2)$. Astfel, derivata covariantă a metricii este tot un câmp tensorial de tip $(0, 2)$ și lucrează după formula, cf. (11.13):

$$(12.6) \quad (\nabla_Z g)(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y).$$

Propoziția 12.2.1. *O conexiune este metrică dacă și numai dacă $\nabla_Z g = 0$ pentru orice $Z \in \mathcal{X}(M)$, altfel spus, conform formulei anterioare, dacă și numai dacă*

$$(12.7) \quad Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad \text{pentru orice } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Demonstrație. E suficient să demonstrăm că $\nabla_Z g = 0$ pentru orice $Z \in T_x M$ și orice $x \in M$.

Să observăm întâi că dacă transportul prin paralelism asociat lui ∇ este izometrie, atunci produsul scalar a orice doi vectori paraleli de-a lungul unei curbe este constant și reciproc. Într-adevăr, fie γ o curbă și fie τ^γ transportul paralel asociat de-a lungul ei, între $\gamma(0)$ și $\gamma(t)$. Dacă X e un câmp paralel pe γ , atunci, prin definiție, $X_{\gamma(t)} = \tau^\gamma(X_{\gamma(0)})$ (la fel pentru Y paralel pe γ). Atunci

$$g(X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}) = g(\tau^\gamma(X_{\gamma(0)}), \tau^\gamma(Y_{\gamma(0)})) = g(X_{\gamma(0)}, Y_{\gamma(0)}),$$

pentru că τ^γ e izometrie. La fel se raționează pentru reciprocă.

Fie acum $x \in M$ arbitrar și γ arbitrară, cu $\gamma(0) = x$. Fie $X_0, Y_0 \in T_x M$ arbitrari și $X = \tau^\gamma(X_0)$, $Y = \tau^\gamma(Y_0)$ transportații lor prin paralelism de-a lungul lui γ . Atunci, conform observației anterioare:

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = \nabla_{\gamma'(t)}(g(X, Y)) = (\nabla_{\gamma'(t)} g)(X, Y) + g(\nabla_{\gamma'(t)} X, Y) + g(X, \nabla_{\gamma'(t)} Y),$$

conform (12.6). Cum X, Y sînt paraleli pe γ , avem $\nabla_{\gamma'(t)} X = \nabla_{\gamma'(t)} Y = 0$, deci obținem:

$$(\nabla_{\gamma'(t)} g)(X, Y) = \frac{d}{dt} g(X, Y) = 0.$$

Egalitatea are loc în x . Dar cum X_0, Y_0 au fost arbitrari, avem $\nabla_{\gamma'(t)}g = 0$ în x . Dar și γ a fost aleasă arbitrar, deci, de fapt, avem $\nabla_Zg = 0$ în x pentru orice $Z \in T_xM$, ceea ce încheie demonstrația. Reciproca este imediată. ■

Dar există oare conexiuni metrice? Dacă da, câte? Încă nu știm să răspundem. Dar, dacă, local, punem $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, atunci ∇ e conexiune metrică dacă și numai dacă

$$(12.8) \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} = 0.$$

Existența unei conexiuni metrice ∇ revine la rezolvarea sistemului (12.8) în necunoscutele Γ_{ij}^k și la verificarea faptului că eventualele soluții reprezintă coeficienți de conexiune, adică se schimbă după formulele (11.12) la o schimbare de coordonate. Dacă impunem și condiția ca ∇ să fie simetrică (fără torsiune), ceea ce revine la $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, atunci făcînd permutări circulare în (12.8) mai obținem relațiile:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{li} = 0, \\ \nabla \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} &= \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \Gamma_{kj}^l g_{li} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} = 0. \end{aligned}$$

Avem acum trei relații. Adunăm două dintre ele și o scădem pe a treia, folosim simetria funcțiilor Γ în indicii de jos și simetria funcțiilor g_{ij} ca să reducem termeni și, în final, obținem:

$$(12.9) \quad 2\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}.$$

Înmulțim această relație cu matricea g^{-1} și găsim:

$$(12.10) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right\},$$

formulă care ne spune că (12.8) se poate rezolva în cazul simetric. Apoi, folosind formulele (12.1), se arată direct că Γ_{ij}^k se schimbă după relațiile (11.12). Am demonstrat:

Teorema 12.2.2. *Fie (M, g) o varietate riemanniană. Există o unică conexiune metrică și fără torsiune.*

Conexiunea găsită poartă numele lui Levi-Civita. După cum se vede, ea e unic determinată de metrică. Formula pe care am găsit-o ne mai spune și că nu am făcut altceva decît să generalizăm derivata covariantă dată de coeficienții Christoffel ai unei suprafețe. În plus, cum curbura gaussiană se exprima numai cu coeficienții Christoffel (Teorema Egregium), avem o indicație că vom putea, cu ajutorul tensorului de curbură al conexiunii Levi-Civita, să formalizăm o noțiune intuitivă de curbură pentru varietăți riemanniene. Aceasta va fi, prin construcție, intrinsecă.

Rezultatul acesta este fundamental pentru toate construcțiile care vor urma. Importanța lui este atât de mare, încît Spivak, de exemplu, în [Sp], îi dă nu mai puțin de șase demonstrații.

Să exprimăm acum și invariant conexiunea Levi-Civita. Va fi un exercițiu util și ca să învățăm să facem trecerea de la o formulă în coordonate (cu indici...) la una scrisă invariant.

Deoarece e mai greu să scriem invariant formule în care apar coeficienții contravarianți g^{ij} , ne vom ocupa de formula (2). Să punem $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = Z^l \frac{\partial}{\partial x^l}$. Înmulțim ambii membri ai (2) cu $X^i Y^j Z^l$ și sumăm după i, j, l . În membrul stâng, ținând seamă de proprietățile conexiunii (care nu e lineară decât în raport cu argumentul „de jos“), obținem:

$$\begin{aligned} 2X^i Y^j Z^l \Gamma_{ij}^k g_{kl} &= 2X^i Y^j Z^l \Gamma_{ij}^k g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = 2g(X^i Y^j \Gamma_{ij}^k, Z) = \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - 2X^i Z^l \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} g_{jl}. \end{aligned}$$

Trecem la membrul drept și calculăm, pe rînd, cele trei sume:

$$\begin{aligned} X^i Y^j Z^l \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} &= X^i \left\{ \frac{\partial(Y^j Z^l g_{jl})}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^l + Y^j \frac{\partial Z^l}{\partial x^i} \right) g_{jl} \right\} \\ &= X(g(Y, Z)) - X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} Z^l + Y^j \frac{\partial Z^l}{\partial x^i} \right) g_{jl}. \end{aligned}$$

Analog, vom obține:

$$\begin{aligned} X^i Y^j Z^l \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} &= Y(g(Z, X)) - Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} Z^l + X^i \frac{\partial Z^l}{\partial x^j} \right) g_{il}, \\ X^i Y^j Z^l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} &= Z(g(X, Y)) - Z^l \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^l} Y^j + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^l} \right) g_{ij}. \end{aligned}$$

Acum (2) devine:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + X^i Z^l \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} g_{jl} - X^i Y^j \frac{\partial Z^l}{\partial x^i} g_{jl} - Y^j Z^l \frac{\partial X^i}{\partial x^j} g_{il} \\ &\quad - Y^j X^i \frac{\partial Z^l}{\partial x^j} g_{il} + Z^l Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^l} g_{ij} + Z^l X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^l} g_{ij}. \end{aligned}$$

Ca să scriem invariant cei șase termeni „cu indici“ din membrul drept, observăm că apar expresii care amintesc de formula locală a croșetului a două cîmpuri:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Grupăm, deci, termeni de felul următor:

$$Z^l \left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} g_{il} - X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) g_{jl}.$$

Cum indicii i, j sînt de sumare, putem să-i schimbăm între ei în termenul al doilea, cel negativ, și obținem:

$$\begin{aligned} & Z^l \left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} g_{il} - X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right) g_{il} \\ &= Z^l \left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} - X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right) g_{il} \\ &= Z^l [Y, X]^i g_{il} = g([Y, X], Z). \end{aligned}$$

Procedînd în fel și cu ceilalți patru termeni, obținem în final formula:

$$(12.11) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Aceasta poartă numele de *formula lui Koszul*⁴ sau *formula cu șase termeni*. Evident că ar fi fost posibil să o demonstrăm întîi pe aceasta și să ajungem de la ea la forma locală (croșetele dispar cînd lucrăm cu cîmpuri din baza canonică, dar tocmai în asta stă dificultatea trecerii de la formule locale la formule invariante).

Observația 12.2.3. Uneori, e mai util să folosim un reper arbitrar, în locul celui natural ($\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$) sau a scrierii invariante. Mare parte din articolele de geometrie scrise înainte de anii șaptezeci sînt scrise astfel (dar metoda e folosită și acum). Iată cum apare conexiunea Levi-Civita în acest limbaj.

Fie $\{e_i\}$ un reper local de cîmpuri tangente și fie θ^i coreperul dual de 1-forme. Conexiunea Levi-Civita va avea formele locale de conexiune θ_j^i date prin

$$\nabla e_i = \theta_j^i \otimes e_j.$$

Am văzut, Exercițiul 11.5.11, că pentru o conexiune simetrică, $d\alpha$ este antisimetrizata lui $\nabla\alpha$, pentru orice formă diferențială α . În particular:

$$d\theta^i(X, Y) = (\nabla_X \theta^i)(Y) - (\nabla_Y \theta^i)(X).$$

Cum formele de conexiune induse în fibrarea duală sînt $-\theta_j^i$ (cf. (11.9) și comentariilor de după), avem:

$$d\theta^i(X, Y) = -\theta_j^i(X)\theta^j(Y) + \theta_j^i(Y)\theta^j(X) = \theta^j \wedge \theta_j^i(X, Y),$$

deci condiția de simetrie este:

$$(12.12) \quad d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i.$$

Notăm coeficienții metricii cu $g_{ij} := g(e_i, e_j)$, astfel că putem scrie

$$g = g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j.$$

Cu aceste două formule, ∇g devine:

$$\begin{aligned} \nabla g &= dg_{ij} \theta^i \otimes \theta^j + g_{ij} (d\theta^i \otimes \theta^j + \theta^i \otimes d\theta^j) \\ &= (dg_{ij} - g_{ik} \theta_j^k - g_{kj} \theta_i^k) \otimes \theta^i \otimes \theta^j. \end{aligned}$$

⁴După numele matematicianului francez Jean-Louis Koszul, născut în 1921.

Condiția de compatibilitate cu metrica, $\nabla g = 0$, se scrie:

$$(12.13) \quad dg_{ij} = g_{ik}\theta_j^k + g_{kj}\theta_i^k.$$

Teorema Teorema 12.2.2 devine, în acest limbaj: *Fie $\{\theta^i\}$ un coreper pe varietatea riemanniană (M, g) , față de care componentele locale ale lui g sînt g_{ij} . Există și sînt unice formele de conexiune θ_j^i care satisfac (12.12) și (12.13).*

Observația 12.2.4. (Existența reperelor ortonormate locale.) În orice punct $x \in M$ putem considera un reper ortonormat de vectori tangenți $\{e_1, \dots, e_n\}$ în $T_x M$. Ca să îl prelungim la un reper ortonormat de cîmpuri locale, alegem o vecinătate V suficient de mică stelată în raport cu x (adică orice punct al ei se poate uni cu x printr-o curbă în V). Acum transportăm prin paralelism vectorii e_i în fiecare punct al lui V . Cum transportul paralel e izometrie, cîmpurile obținute sînt ortonormate.

Nu vom mai preciza de acum vecinătatea: cînd vom avea nevoie, vom considera repere ortonormate locale.

Exercițiul 12.2.5. (Metrici conforme.) Fie g o metrică riemanniană pe M . Arătați că, pentru orice funcție $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $g' := e^{2f}g$ este tot o metrică riemanniană. Metricile g și g' se numesc *conforme* (dacă $f = ct.$, atunci metricile se numesc *omotetice*).

Arătați că unghiurile măsurate de două metrici conforme sînt aceleași.

Dacă ∇ și ∇' sînt conexiunile Levi-Civita ale lui g și g' , arătați că:

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y - df(X)Y - df(Y)X + g(X, Y) \text{grad } f,$$

unde gradientul este calculat față de metrica g .

Un difeomorfism φ al lui M se numește conform dacă φ^*g e conformă cu g . Arătați că mulțimea difeomorfismelor conforme ale lui (M, g) formează un grup care îl conține pe cel al izometriilor.

Exercițiul 12.2.6. (Cîmpuri conforme și Killing.) Un cîmp vectorial X se numește *conform* (resp. *Killing* dacă fluxul său conține numai transformări conforme (resp. izometrii).

(i) Un cîmp X e Killing dacă și numai dacă $\mathcal{L}_X g = 0$ dacă și numai dacă $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$ (adică dacă și numai dacă endomorfismul $\nabla X : TM \rightarrow TM$ prin $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$ e antisimetric).

(ii) Un cîmp X e conform dacă și numai dacă $\mathcal{L}_X g = \varphi g$, pentru o $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Exprimați această ecuație și cu ajutorul conexiunii Levi-Civita.

(iii) Mulțimea cîmpurilor Killing (resp. a cîmpurilor conforme) formează o subalgebră Lie a lui $\mathcal{X}(M)$.

(iv) Două varietăți Riemann care au algebre ale cîmpurilor Killing diferite nu pot fi local izometrice.

(v) Determinați cîmpurile Killing pe \mathbb{R}^n , (can), S^n , (can) și pe semiplanul Poincaré.

Exercițiul 12.2.7. Pe \mathbb{R}^3 introducem următoarea lege de compoziție:

$$(x, y, z) \star (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z').$$

Arătați că (\mathbb{R}^3, \star) e grup Lie (rezolubil). El se notează Sol_3 . Arătați că

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2$$

e o metrică riemanniană sîng invariantă pe Sol_3 și că

$$e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

e un reper ortonormat de câmpuri stîng invariante. Arătați că următoarele câmpuri vectoriale:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}$$

sînt câmpuri Killing pe Sol_3 și determinați curente locale.

Exercițiul 12.2.8. (Coordonate cilindrice.) Fie r, φ, x^3 date prin $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$. Arătați că avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= r \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Notați $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = x^3$ și arătați că în aceste coordonate, metrica plată are componentele $g_{11} = g_{33} = 1$, $g_{22} = r^2$, restul 0. Calculați coeficienții Christoffel asociați.

Divergența unui câmp tensorial simetric de tip $(0, p)$. Fie A un astfel de câmp tensorial. Fixăm un reper ortonormat local și definim câmp $\text{div } A$ de tip $(0, p-1)$ prin:

$$\text{div } A(X_1, \dots, X_{p-1}) = \sum_i (\nabla_{E_i} A)(E_i, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

Se vede că divergența este o contracție a derivatei covariante a lui A .

În particular, dacă A e de tip $(0, 2)$, atunci $\text{div } A$ e o 1-formă.

Pe de altă parte, am definit în 3 o noțiune de divergență pentru un câmp vectorial cu ajutorul unei forme volum. Definisem $\text{div } X$ prin $\mathcal{L}_X \mu = \text{div } X \mu$, unde μ era o formă volum. Pe varietăți Riemann, e normal să lucrăm cu forma volum vol_g indusă de metrică (cf. 12.2). Notăm această divergență cu div_g , sau, cînd metrica e fixată și nu e pericol de confuzie, simplu div .

Exercițiul 12.2.9. 1. Arătați că $\text{div}_g X = \text{tr}(\nabla X) = \sum_i g(\nabla_{E_i} X, E_i)$, unde $\{E_i\}$ e un reper local ortonormat.

2. Arătați că $\text{div } g = 0$ și $\text{div}(\lambda g) = d\lambda$.

3. Curbură riemanniană

Datorită legăturii cu metrica, tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita are proprietăți suplimentare față de tensorul de curbură al unei conexiuni lineare arbitrare. Acestea sînt de două tipuri: algebrice și diferențiale. Pentru comoditate, le vom lista acum și pe cele care nu sînt specifice conexiunii Levi-Civita și au fost deja demonstrate în capitolul anterior.

Propoziția 12.3.1. Pentru orice $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ au loc egalitățile:

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.
- (2) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(Z, R(X, Y)W)$.
- (3) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$.
- (4) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.
- (5) $\sum_{cicl} (\nabla_X R)(Y, Z) = 0$.

Demonstrație. Identitatea (1) este o consecință directă a definiției tensorului de curbură, (3) este Bianchi I, (5) este Bianchi II (adevărate pentru orice conexiune lineară fără torsiune, deci și pentru cea Levi-Civita). Rămîn de demonstrat (2) și (4).

Pentru (2), să observăm că pentru orice X, Y fixați putem defini endomorfismul de curbură $R(X, Y)$ al fibratului tangent prin $R(X, Y)(Z) := R(X, Y)Z$. Atunci (2) exprimă antisimetria acestui endomorfism în raport cu produsul scalar, deci e suficient să demonstrăm că $g(R(X, Y)U, U) = 0$ (conform identității de polarizare: dacă punem aici $U = Z + W$ regăsim (2)). Calculăm pe rând termenii care apar în expresia lui $g(R(X, Y)U, U)$:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y U, U) &= X(g(\nabla_Y U, U)) - g(\nabla_Y U, \nabla_X U) \quad (\nabla \text{ e conexiune metrică}) \\ &= \frac{1}{2} X(Y(g(U, U))) - g(\nabla_Y U, \nabla_X U) \quad (\text{la fel, pentru 1-ul termen}). \end{aligned}$$

Schimbînd între ei X, Y , găsim:

$$g(\nabla_Y \nabla_X U, U) = \frac{1}{2} Y(X(g(U, U))) - g(\nabla_X U, \nabla_Y U),$$

deci, folosind din nou compatibilitatea lui ∇ cu g :

$$g(R(X, Y)U, U) = \frac{1}{2} [X, Y](g(U, U)) - g(\nabla_{[X, Y]} U, U) = 0.$$

Acum (4) e o consecință a primelor trei identități. Folosind Bianchi 1 (adică (3)), avem:

$$g\left(\sum_{cicl.} R(Y, Z)X, W\right) = 0.$$

Acum permutăm aici circular (Y, Z, X, W) și obținem încă trei asemenea ecuații:

$$g\left(\sum_{cicl.} R(W, Y)Z, X\right) = 0, \quad g\left(\sum_{cicl.} R(X, W)Y, Z\right) = 0, \quad g\left(\sum_{cicl.} R(Z, X)W, Y\right) = 0.$$

Desfășurăm sumele ciclice (avem doisprezece termeni) și reducem, folosind (1) și (2), opt dintre ei. Rămînem cu:

$$2g(R(X, Y)Z, W) + 2g(R(W, Z)X, Y) = 0,$$

care, folosind încă o dată (2), este exact relația (4). ■

Exercițiul 12.3.2. Puneți $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}$ și exprimați local identitățile de mai sus.

Observația 12.3.3. (Curbura în termeni de suprafețe parametrizate.) Schițăm acum o construcție care aruncă o nouă lumină asupra tensorului de curbură și pe care o vom folosi mai departe.

Fie $f : D = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ diferențiabilă. Putem asimila f cu o suprafață parametrizată în M . Dacă parametrii lui D sînt (t, s) , ea e descrisă de două familii de linii de coordonate, $s = ct$. și $t = ct$., avînd vectorii tangenți respectiv $f_t = df(\partial t)$ și $f_s = df(\partial s)$.

Cîmpurile vectoriale tangente la $\text{Im}(f)$, cum sînt f_t și f_s , nu sînt chiar cîmpuri de vectori tangenți la M , ci de-a lungul lui f . De fapt, sînt secțiuni ale fibratului $f^*(TM) \rightarrow D$, dar o să-i derivăm covariant în rapoet cu coenxiunea Levi-Civita, nemaifăcînd diferența între aceasta și cea indusă în fibratul amintit. Pentru un astfel de cîmp Z , vom nota Z_t , respectiv Z_s , derivata covariantă $\nabla_{f_t} Z$, respectiv $\nabla_{f_s} Z$. Dacă $Z = f_t$, respectiv $Z = f_s$, atunci $Z_t = f_{tt}$, respectiv $Z_s = f_{ss}$ reprezintă accelerațiile curbelor de coordonate.

Local, dacă $\text{Im}(f)$ e cuprinsă într-o vecinătate de coordonate (x^i) , avem

$$f_t = \frac{\partial f^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_s = \frac{\partial f^i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

În particular:

$$f_{ts} = (f_t)_s = \nabla_{f_s} f_t = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^i}{\partial s} \frac{\partial f^j}{\partial t}.$$

Cum $\Gamma_{ij}^k = \gamma^k j i$, formula anterioară demonstrează că

$$(12.14) \quad f_{tt} = f_{ss}.$$

Acum, dacă Z e un vector arbitrar, ca mai sus,

$$Z_{ts} = \nabla_{f_s} \nabla_{f_t} Z,$$

deci

$$Z_{ts} - Z_{st} = R(f_s, f_t)Z + \nabla_{[f_t, f_s]} Z.$$

Dar

$$[f_t, f_s] = [df(\partial t), df(\partial s)] = df[\partial t, \partial s] = df(0) = 0.$$

Am demonstrat:

$$(12.15) \quad Z_{ts} - Z_{st} = R(f_s, f_t)Z.$$

Să definim acum cîmpul tensorial de tip $(0, 4)$

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Acesta se numește tensorul lui Riemann și are expresia localcă:

$$R_{ijkl} = g_{ml} R_{ijk}^m.$$

Vedem că el este echivalent cu tensorul de curbură prin metrică, fiind obținut din acela prin cobîrirea unui indice. Funcțiile R_{ijkl} sînt cele care apar în lucrarea originală a lui Riemann, nu cele legate de coeficienții Christoffel (care nici nu existau încă).

Uneori, se mai folosește notația $R(X, Y; Z, W)$, pentru a pune în evidență gruparea pe perechi a argumentelor. Nu o vom folosi, dar ne vom referi la această grupare.

Propoziția 12.3.1 se poate acum reformula:

Propoziția 12.3.4. *Tensorul de curbură al lui Riemann are următoarele proprietăți:*

- (1) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$, $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ (*antisimetrie în fiecare pereche*).
- (2) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ (*simetrie în perechi*).
- (3) $R(X, Y, Z, W) + R(Z, X, Y, W) + R(Y, Z, X, W) = 0$ (*Bianchi I*).
- (4) $(\nabla_U R)(X, Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(U, X, Z, W) + (\nabla_X R)(Y, U, Z, W) = 0$ (*Bianchi II*).

Demonstrație. Tot ce mai avem de demonstrat este (4). Aceasta e o consecință a lui $\nabla g = 0$ și a lui Bianchi II pentru tensorul de curbură de tip $(1, 3)$. Anume, cum $\nabla g = 0$,

∇_U va „trece prin“ $g(R(X, Y, Z), W)$ și se va reduce la $g(\nabla_U R(X, Y)Z, W)$. Să detaliem calculul:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_U R)(X, Y, Z, W) &= U(R(X, Y, Z, W)) - R(\nabla_U X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_U Y, Z, W) \\
 &\quad - R(X, Y, \nabla_U Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_U W) \\
 &= U(g(R(X, Y)Z, W)) - g(R(\nabla_U X, Y)Z, W) \\
 &\quad - g(R(X, \nabla_U Y)Z, W) - g(R(X, Y)\nabla_U Z, W) - g(R(X, Y)Z, \nabla_U W) \\
 &= g(\nabla_U(R(X, Y)Z), W) + g(R(X, Y)Z, \nabla_U W) - g(R(\nabla_U X, Y)Z, W) \\
 &\quad - g(R(X, \nabla_U Y)Z, W) - g(R(X, Y)\nabla_U Z, W) - g(R(X, Y)Z, \nabla_U W) \\
 &= g((\nabla_U R)(X, Y)Z, W) + g(R(\nabla_U X, Y)Z, W) + g(R(X, \nabla_U Y)Z, W) \\
 &\quad + g(R(X, Y)\nabla_U Z, W) - g(R(\nabla_U X, Y)Z, W) - g(R(X, \nabla_U Y)Z, W) \\
 &\quad - g(R(X, Y)\nabla_U Z, W) = g((\nabla_U R)(X, Y)Z, W).
 \end{aligned}$$

Mai rămîne să sumăm ciclic după U, X, Y și să aplicăm Bianchi II. ■

Exemplul 12.3.5. Conuri riemanniene (deschise). Un exemplu important sînt conurile peste o varietate Riemann. Fie (N, g) o varietate Riemann. Conul deschis peste ea este varietatea $\mathcal{C}(N) := N \times \mathbb{R}^+$ cu metrica $\tilde{g} = t^2 g + dt^2$, unde t este coordonata pe $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Local, fie x^1, \dots, x^n coordonate pe N și fie $x^0 := t$, deci pe $\mathcal{C}(N)$ avem coordonatele x^0, \dots, x^n . Fie Γ_{ij}^k coeficienții Christoffel pe N și $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$, $0 \leq i, j, k \leq n$ cei de pe $\mathcal{C}(N)$. Prin calcul direct găsim formulele:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k, & 1 \leq i, j, k \leq n \\
 \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= -t g_{ij}, & 1 \leq i, j \leq n \\
 \tilde{\Gamma}_{i0}^k &= \tilde{\Gamma}_{0i}^k = \frac{1}{t} \delta_i^k, & 1 \leq i, k \leq n \\
 \tilde{\Gamma}_{i0}^0 &= \tilde{\Gamma}_{00}^i = 0, & 0 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Formulele acestea conduc la formulele corespunzătoare pentru curbura:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^0} &= 0, & 0 \leq i, j \leq n \\
 \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} &= R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + g_{ii}\frac{\partial}{\partial x^j} - g_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}, & 1 \leq i, j \leq n.
 \end{aligned}$$

Curbura secțională. Considerăm acum⁵ cîmpul tensorial de tip $(0, 4)$

$$G(X, Y, Z, W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z).$$

Că G e într-adevăr un cîmp tensorial se verifică imediat. În plus, el are exact aceleași proprietăți algebrice ca și R , adică proprietățile (1)-(3) din Propoziția 12.3.4.

⁵Definiția care urmează se va justifica abia *post factum*, prin proprietățile și semnificația geometrică pe care le va avea. Deocamdată, să spunem doar că ea corepunde unei operații de algebră lineară numite produs Kulkarni-Nomizu.

Fixăm un punct $x \in M$ și considerăm vectorii care apar ca fiind tangenți în acest punct. Observăm că, dacă luăm $X = Z$, $Y = W$, obținem

$$G(X, Y, X, Y) = \|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 \sin^2 \widehat{(X, Y)}.$$

Astfel, G este generalizarea normei produsului vectorial din \mathbb{R}^3 : când X, Y sînt linear independenți, $G(X, Y, X, Y)$ reprezintă aria paralelogramului construit pe cei doi vectori și e o cantitate nenulă.

Să vedem cum se schimbă valoarea $G(X, Y, X, Y)$ la o schimbare de bază. Fie, deci $X' = aX + bY$, $Y' = cX + dY$, cu $ad - bc \neq 0$. Un calcul simplu, care folosește proprietățile lui G , conduce la:

$$G(X', Y', X', Y') = (ad - bc)^2 G(X, Y, X, Y).$$

Dar, cum R are aceleași proprietăți, avem și

$$R(X', Y', X', Y') = (ad - bc)^2 R(X, Y, X, Y).$$

În concluzie, raportul $\frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)}$ este constant, în sensul că nu depinde decît de punctul x și de planul tangent 2-dimensional $\Pi \subseteq T_x M$ subîntins de X, Y , nu și de baza pe care e calculat. Avem așadar, o funcție

$$K(x, \Pi) := \frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)}.$$

Definiția 12.3.6. Funcția $K(x, \Pi)$ se numește *curbura secțională a 2-planului* Π .

Observația 12.3.7. Dacă luăm $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\Pi = L(e_1, e_2)$, găsim, după calcule simple, $K(x, \Pi) = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$. Exprimînd aici R_{1212} cu ajutorul simbolurilor lui Christoffel, regăsim expresia curburii gaussiene din demonstrația Teoremei Egregium. Ceea ce arată că, într-adevăr, curbura secțională ca fiind curbura unei anumite suprafețe care trece prin x și are planul tangent Π în x . Chiar dacă nu avem, deocamdată, suprafața, calculele se fac în planul tangent.

Observația 12.3.8. Cum curbura secțională e definită cu ajutorul tensorului de curbură care, la rîndul lui, e definit numai cu ajutorul metricii, vedem că *orice izometrie locală păstrează curbura secțională*.

Următorul rezultat spune că, pentru a cunoaște tensorul de curbură, e suficient să cunoaștem toate curburile secționale:

Propoziția 12.3.9. *Curbura secțională determină univoc tensorul de curbură.*

Demonstrație. Este un rezultat de algebră lineară, nu face apel la proprietăți diferențiale. Datorită linearității și a tensorialității, e suficient să arătăm că dacă $K(x, \Pi) = 0$ atunci și $R_x(XY)Z = 0$, oricare ar fi $x \in M$, Π plan 2-dimensional în $T_x M$, $X, Y, Z \in T_x M$.

Altfel spus, vrem să arătăm că dacă $R(X, Y, X, Y) = 0$, atunci și $R(X, Y, Z, W) = 0$. Evident, va fi vorba despre polarizare.

Prin ipoteză, avem

$$R(X + Z, Y, X + Z, Y) = 0.$$

Dezvoltăm folosind proprietățile lui R și obținem:

$$R(X, Y, Z, Y) = 0.$$

Atunci avem și

$$R(X, Y + W, Z, Y + W) = 0,$$

care, după dezvoltare, produce:

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, W, Z, Y) = 0.$$

Dar, cu proprietatea (1):

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= -R(X, W, Z, Y) = R(X, W, Y, Z) \\ &= -R(X, Z, Y, W) = R(X, Z, W, Y). \end{aligned}$$

Aceasta, combinată Bianchi I, duce la

$$3R(X, Y, Z, W) = 0.$$

■

Observația 12.3.10. Mai rezultă ceva din demonstrația de mai sus. Deoarece am folosit numai proprietățile algebrice ale tensorului de curbura, nu definiția lui specifică, rezultă că exact același rezultat se obține pentru orice câmp tensorial $(0, 4)$ F care satisface proprietățile (1)-(3) din Propoziția 12.3.4. Adică: dacă $F(X, Y, X, Y) = 0$, atunci și $F(X, Y, Z, W) = 0$.

În particular, *curbura secțională se poate defini numai cu ajutorul lui R , nu și cu vreun alt câmp tensorial cu proprietățile (1) – (3)*. Pentru că dacă s-ar putea defini și cu, să zicem, F , atunci $R - F$ ar avea și el (1)-(3) și ar fi nul pe (X, Y, X, Y) , deci ar fi identic nul.

Dacă funcția $K(x, \Pi)$ e constantă pe M (adică nu depinde nici de x nici de 2-planul Π), (M, g) se numește *cu curbura (secțională) constantă* (sau *formă spațială*). În acest caz, avem:

$$R(X, Y, X, Y) = KG(X, Y, X, Y) = K\{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2\}.$$

Propoziția 12.3.11. *Tensorul de curbura al unei varietăți Riemann cu curbura constantă K e dat de formula:*

$$R(X, Y)Z = K\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}.$$

Demonstrație. Să observăm că tensorul

$$F(X, Y, Z, W) := K\{g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)\}$$

are proprietățile (1)-(3) și, conform ipotezei, $F(X, Y, X, Y) = KG(X, Y, X, Y)$. Atunci, conform discuției dinainte, $R = F$, de unde concluzia. ■

Componentele locale ale tensorului de curbura în cazul curburii constante sînt:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}), \quad \text{sau, echivalent} \\ R_{ijk}^l &= K(g_{ik}\delta_j^l - g_{jk}\delta_i^l). \end{aligned}$$

Exercițiul 12.3.12. Arătați că sfera S^n cu metrica găsită în Exemplul 12.1.7, $g_{ij}(u) = \frac{4}{(1 + \|u\|^2)^2} \delta_{ij}$ are curbura constantă pozitivă, iar semispațiul Poincaré din Exemplul 12.1.2, cu metrica $g_{ij} =$

$\frac{1}{(x^n)^2} \delta_{ij}$, are curbura constantă strict negativă. *Indicație:* Se folosesc formulele locale: trebuie calculați întâi coeficienții Christoffel, apoi componentele R^l_{ijk} ale curburii.

Observația 12.3.13. Calculele sugerate în exercițiul anterior trebuie făcute, pentru a căpăta experiență în manipularea tensorilor în scriere locală. Uneori, însă (sigur nu întotdeauna) ele pot fi evitate. Iată un alt mod de a determina curbura secțională ametricii induse de pe \mathbb{R}^{n+1} pe S^n . Observăm că grupul izometriilor lui S^n care păstrează orientarea, anume $SO(n+1)$ acționează tranzitiv pe 2-planele lui TS^n (adică pe varietaatea Grassmann a acestor plane). În primul rînd, cum $T_p S^n$ e perpendicular pe vectorul p și $SO(n+1)$ acționează prin izometrii ale metricii euclidiene, dacă $A \in SO(n+1)$, $Ap = p'$, atunci $A(T_p S^n) = T_{p'} S^n$. Cum A are rang maxim, păstrează dimensiunea subspațiilor, deci duce un 2-plan în alt 2-plan. Apoi, dacă Π și Π' sînt 2-plane tangente la S^n în p, p' , alegem în primul rînd o matrice $A \in SO(n+1)$ care aplică p peste p' (existența ei e evidentă). Dacă $\{e_1, e_2\}$ e o bază ortonormată în Π , acțiunea lui A produce o bază ortonormată $\{f_1, f_2\}$ a unui 2-plan $A(\Pi) \subset T_{p'} S^n$. Acum determinăm o matrice $A' \in SO(n+1)$ care: (1) fixează p' și (2) aplică $\{f_1, f_2\}$ peste o bază ortonormată $\{e'_1, e'_2\}$ a lui Π_2 . E un exercițiu elementar de algebră lineară. Odată înțeles acest lucru, concluzia e clară: cum $SO(n+1)$ acționează prin izometrii, curbura tuturor 2-planurilor va fi aceeași.

Observația 12.3.14. Cum și \mathbb{R}^n cu metrica plată are, evident, curbura constantă 0, avem acum exemple pentru cele trei situații posibile (K constant negativ, nul, sau pozitiv). Exemplele date sînt toate conexe, simplu conexe și complete (topologic). O teoremă celebră arată că acestea sînt singurele forme spațiale cu aceste proprietăți. Rezultă că orice altă formă spațială este acoperit de unul dintre aceste modele, adică e un cît ale unuia dintre ele printr-un grup discret. Astfel, problema clasificării spațiilor cu curbura constantă revine la una de clasificare a grupurilor care pot acționa prin izometrii pe cele trei modele, cf. [Wo].

De exemplu, toate torurile plate au curbura secțională nulă (de aici denumirea), dar nu sînt simplu conexe și am văzut că nu sînt izometrice.

În dimensiune 2, am mai întîlnit pseudosfera, cu curbura gaussiană (deci secțională, cînd o privim ca varietate Riemann) constantă -1 . Rezultă că și pseudosfera (care nu e simplu conexă) trebuie să fie un cît al semiplanului Poincaré.

O condiție mai slabă decît constanța curburii secționale este independența ei de 2-plan. Condiția e doar aparent mai slabă:

Propoziția 12.3.15. (F. Schur.) *Fie (M, g) un spațiu Riemann conex de dimensiune cel puțin 3. Dacă în orice $x \in M$, funcția $K(x, \Pi)$ nu depinde de Π , atunci (M, g) are curbura secțională constantă.*

Demonstrație. Dacă curbura secțională e funcție doar de punct, avem

$$R(X, Y)Z = K(x) \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}.$$

Vrem să arătăm că avem $K = ct$. Nu putem face altceva decît să derivăm egalitatea de mai sus în raport cu un cîmp arbitrar U și să încercăm să obținem $U(K) = 0$. Scriem, deci:

$$\nabla_U(R(X, Y)Z) = U(K) \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} + K \nabla_U \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}.$$

Membrul stîng se dezvoltă la:

$$(\nabla_U R)(X, Y)Z + R(\nabla_U X, Y)Z + R(X, \nabla_U Y)Z + R(X, Y)\nabla_U Z,$$

și, folosind din nou ipoteza, devine:

$$\begin{aligned} & (\nabla_U R)(X, Y)Z + K \{g(\nabla_U X, Z)Y - g(Y, X)\nabla_U X\} \\ & + K \{g(X, Z)\nabla_U Y - g(\nabla_U Y, Z)X\} + K \{g(X, \nabla_U Z)Y - g(Y, \nabla_U Z)X\} \end{aligned}$$

Folosind $\nabla_U g = 0$, al doilea termen din membrul drept devine:

$$\begin{aligned} & K \{g(\nabla_U X, Z)Y + g(X, \nabla_U Z)Y + g(X, Z)\nabla_U Y \\ & - g(\nabla_U Y, Z)X - g(Y, \nabla_U Z)X - g(Y, Z)\nabla_U X\}. \end{aligned}$$

Permutăm circular (U, X, Y) , aplicăm Bianchi II în membrul stîng, reducem termenii asemenea în cei doi membri și rămînem cu:

$$\begin{aligned} (12.16) \quad 0 &= U(K) \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \\ &+ Y(K) \{g(U, Z)X - g(X, Z)U\} \\ &+ X(K) \{g(Y, Z)U - g(U, Z)Y\}. \end{aligned}$$

Cum $\dim M \geq 3$, putem presupune că U, X, Y sînt mutual ortogonali (în particular independenți). Rezultă:

$$\begin{aligned} U(K)g(Y, Z) - Y(K)g(U, Z) &= 0, \\ U(K)g(X, Z) - X(K)g(U, Z) &= 0, \\ X(K)g(Y, Z) - Y(K)g(X, Z) &= 0. \end{aligned}$$

E suficient acum să alegem $Z = Y$ ca să obținem, din prima egalitate, $U(K) = 0$, ceea ce doream. Cum M e conexă și U arbitrar, rezultă că funcția K e constantă. ■

Tensorul lui Ricci. Cum tensorul de curbura este linear în toate cele trei argumente, putem fixa două dintre ele și obținem un endomorfism al spațiului tangent căruia îi putem calcula urma, obținînd astfel un tensor de tip $(0, 2)$, sau $(1, 2)$, în funcție de argumentele pe care le fixăm. Reamintim că urma unui endomorfism f pe un spațiu euclidian se calculează cu formula $\sum \langle f(v_i), v_i \rangle$, unde $\{v_i\}$ e o bază ortonormată arbitrară (iar rezultatul e un scalar care nu depinde de baza aleasă). Să vedem ce posibilități avem.

Fixăm un reper ortonormat local $\{E_i\}$. O primă variantă este să fixăm primele două argumente. Am avea de calculat $\sum_i g(R(X, Y)E_i, E_i)$. Dar, datorită proprietăților (1)-(2) avem $g(R(X, Y)E_i, E_i) = g(R(E_i, E_i)X, Y) = 0$. Deci nu obținem nimic interesant.

Putem fixa primul și al treilea argument, obținînd $\sum_i g(R(X, E_i)Y, E_i)$ care nu mai e identic nul.

Putem fixa al doilea și al treilea argument: $\sum_i g(R(E_i, X)Y, E_i)$, dar acesta e egal cu cel dinainte cu semn schimbat.

Măcar pentru că e singura urmă nenulă a tensorului de curbura, merită să studiem tensorul obținut. Dar el se va dovedi extrem de important. Așadar:

Definiția 12.3.16. Tensorul lui Ricci⁶ de tip $(0, 2)$, este

$$Ric(X, Y) := \sum_i g(R(X, E_i)Y, E_i) = \sum_i R(X, E_i, Y, E_i),$$

unde $\{E_i\}$ e orice reper ortonormat local.

Local, componentele sale sînt:

$$R_{ij} = R_{ijs}^s,$$

adică tensorul Ricci este contracția C_2^1 a tensorului de curbură.

Simetria în perechi a tensorului lui Riemann (de fapt, simetria conexiunii Levi-Civita) demonstrează:

Lema 12.3.17. *Tensorul lui Ricci este simetric.*

Ca atare, îi putem asocia și un endomorfism, notat tot Ric , prin

$$g(Ric(X), Y) = Ric(X, Y).$$

Fiind simetric, $Ric(X)$ are toate valorile proprii reale. De fapt, Ricci a introdus tensorul care-i poartă numele ca un fel de analog abstract al celei de-a doua forme fundamentale a suprafețelor, valorile proprii ale căreia reprezintă curburile secționale. Dar valorile proprii ale lui Ric nu au semnificație geometrică (de aceea Ricci nu și-a folosit tensorul). În schimb, Ric s-a dovedit ulterior legat de volumul varietății și de topologia ei. Într-un mod foarte informal, explicația e că Ric e o urmă, iar urma e derivata unui determinant (formula lui Liouville), în timp ce determinantul trimite la volum; astfel, Ric , fiind obiect tensorial, deci local, ar trebui să spună ceva despre rata de creștere a volumului sferelor mici centrate într-un punct al varietății: inegalitatea lui Bishop exact asta exprimă (cf. [Be].)

Pe de altă parte, e bine definită și urma acestui operator. Este o funcție diferențiable care se numește *curbură scalară* și se calculează cu formula:

$$Scal = \sum_i g(Ric(E_i), E_i) = \sum_i Ric(E_i, E_i).$$

Să fixăm acum un vector X unitar și să-l includem într-un reper ortonormat $\{E_i\}$ cu $X = E_1$. Avem:

$$Ric(X, X) = \sum_i g(R(X, E_i)X, E_i) = \sum_2^n K(\Pi_i),$$

unde Π_i e planul subîntins de X și de E_i . Așadar, $Ric(X, X)$ e suma curburilor secționale ale planelor ortogonale care trec prin X .

Observația 12.3.18. În teoria relativității generalizate, Einstein a folosit tensorul lui Ricci pentru a modela matematic gravitația. De aici importanța considerabilă a acestui obiect geometric și, în general, a geometriei riemanniene, pentru fizica teoretică. Formula următoare, de exemplu, este fundamentală pentru teoria relativității (cf. 2 pentru definiția lui $\operatorname{div} Ric$):

Exercițiul 12.3.19. $dScal = 2 \operatorname{div} Ric$.

Cum Ric e simetric, el poate fi, în principiu, proporțional cu g . Are deci sens:

⁶După numele lui Gregorio Ricci-Curbastro, 1853–1925, unul dintre fondatorii calculului tensorial pe varietăți.

Definiția 12.3.20. (M, g) se numește *spațiu Einstein* dacă există o funcție $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M)$ astfel încât $Ric = \lambda g$.

Denumirea a fost dată pentru că aceste spații s-au dovedit cele mai potrivite în tratarea matematică a teoriei relativității. E ușor de văzut, aplicând egalitatea din definiție pe un reper ortonormat și sumând, că $\lambda = Scal/n$. Și pentru spații Einstein, are loc un rezultat de tip Schur:

Propoziția 12.3.21. *Fie (M, g) un spațiu Einstein conex, de dimensiune cel puțin 3. Atunci $\lambda = ct$.*

Demonstrație. Se poate proceda exact la fel ca în demonstrația lui Schur. Dar iată și o altă demonstrație. Derivăm relația $Ric = \lambda g$, folosind Exercițiul 12.3.19 și Exercițiul 12.2.9 (2). Obținem $\frac{1}{2}dScal = \text{div}(\lambda g) = d\lambda$. Rezultă că $Scal - 2\lambda = ct$. Cum $Scal = n\lambda$, avem $(n-2)\lambda = ct$, ceea ce implică, pentru că M e conex, $\lambda = ct$. dacă $n \geq 3$. ■

Astfel, spațiile Einstein (care nu sînt suprafețe) au, în particular, curbura scalară constantă. Toate spațiile cu curbura constantă sînt Einstein, dar nu reciproc. De exemplu, pe s-au construit metrice Einstein fara curbura secțională constantă pe multe spații omogene, în particular pe sferile S^{2n+1} și S^{4n+3} . Spațiile Einstein sînt extrem de importante pentru geometria diferențială și pentru fizica teoretică. Le sînt dedicate enorm de multe articole și mai multe monografii, fundamentală rămînînd deocamdată [Be].

Observația 12.3.22. (Olonomie riemanniană.) Noțiunea de olonomie a unei conexiuni a fost introdusă în Exercițiul 11.5.22. Pentru conexiunea Levi-Civita, notiunea corespunzătoare este *olonomie riemanniană*. Aici, grupurile care pot apărea trebuie să fie subgrupuri ale lui $O(n)$, pentru că acesta este grupul structural al fibratului tangent. Clasificarea a fost obținută de M. Berger (*Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1953), 279–330) și cuprinde surprinzător de puține grupuri (pentru fiecare, alturăm tipul de geometrie pe care o generează): $SO(n)$ (varietăți orientabile), $U(n)$ (varietăți Kähler), $SU(n)$ (varietăți Kähler-Einstein cu curbura scalară nulă), $Sp(n) \cdot Sp(1)$ (varietăți quaternionic-Kähler), $Sp(n)$ (varietăți hiperkähler), G_2 , $Spin_7$. E remarcabil că, excepție făcînd $SO(n)$ și $U(n)$, toate celelalte olonomii corespund unor metrice Einstein. Există acum exemple compacte pentru fiecare caz. Pentru detalii, cf. [Be].

Exercițiul 12.3.23. Arătați că o varietate riemanniană de dimensiune 2 sau 3 e spațiu Einstein dacă și numai dacă are curbura secțională constantă.

Exercițiul 12.3.24. Determinați conexiunea Levi-Civita a unei metrici produs în funcție de conexiunile Levi-Civita ale factorilor. Determinați tensorul de curbura al metricii produs și demonstrați că planele generate de vectori tangenți la factori au curbura secțională nulă. Arătați că un produs riemannian de spații Einstein cu aceeași curbura scalară e spațiu Einstein.

Exemplul 12.3.25. (Metrice riemanniene biinvariante pe grupuri Lie.) Fie G un grup Lie conex și fie g o metrică sîng invariantă (am văzut în Exemplul 12.1.5 cum se construiește). Ca de obicei, identificăm cîmpurile sîng invariante cu elemente ale algebrei Lie $\mathfrak{g} = T_e G$. Avem următoarele echivalențe:

- (1) g e drept-invariantă (deci biinvariantă).
- (2) g e Ad_a -invariantă, pentru orice $a \in G$ (vezi 4 pentru definiția lui Ad).

- (3) Aplicația $a \mapsto a^{-1}$ e izometrie a lui g .
 (4) $g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) = 0$ pentru orice $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.
 (5) Conexiunea Levi-Civita a lui g e dată de formula: $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, pentru orice $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Echivalența dintre (1) și (2) rezultă din definiția lui $Ad_a = d_e I_a = d_e(L_a \circ R_{a^{-1}})$. Astfel, Ad_a este un endomorfism al lui g . Diferențiala sa, $d_e Ad_a$, se identifică, deci, cu Ad_a . În consecință, $Ad_a^* g = (d_e(L_a \circ R_{a^{-1}}))^* g = (d_e R_{a^{-1}})^*((d_e L_a)^* g)$. Dar cum g e L_a -invariantă, rezultă $Ad_a^* g = (d_e R_{a^{-1}})^* g$, deci Ad_a -invarianța e echivalentă cu R_a -invarianța.

Pentru echivalența dintre (1) și (3), dacă $i : G \rightarrow G$ notează aplicația de inversare, atunci $d_e i = -Id$ (vezi Exercițiul 6.2.7). Cum avem nevoie de $d_a i$ pentru orice $a \in G$, scriem $i = R_a \circ i \circ L_a$ și derivăm în a , aplicînd regula lanțului: $d_a i = (d_a R_a) \circ (d_e i) \circ (d_a L_a) = -(d_a R_a) \circ (d_a L_a)$. Dacă g e biinvariantă, atunci $d_a R_a$ și $d_a L_a$ sînt izometrii și rezultă $d_a i$ izometrie. Reciproc, scriem $R_a = i \circ L_{a^{-1}} i$: dacă i e izometrie, cum și L_a e izometrie, rezultă R_a izometrie.

Demonstrăm acum că (2) e echivalent cu (4). Cum în (4) apare croșetul, ne aducem aminte că $(d_e Ad)(X) = ad_X$ și că $ad_X Y = [X, Y]$, pentru $X, Y \in \mathfrak{g}$ (vezi 4). Așadar, pornim cu $g(Ad_a X, Ad_a Y) = g(X, Y)$ și derivăm. Scriem $g(Ad_{\exp(tZ)} X, Ad_{\exp(tZ)} Y) = g(X, Y)$, derivăm în raport cu t și calculăm în $t = 0$. Cum $Ad_e = Id$ și membrul drept nu depinde de t , obținem $g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) = 0$ (relație care spune, de fapt, că ad_Z e un endomorfism antisimetric în raport cu g). Reciproca e un pic mai delicată și necesită cunoștințe mai multe de grupuri Lie (aici se folosește conexiunea); demonstrația se găsește în orice carte de grupuri Lie.

Demonstrăm echivalența (4) cu (5). Forma identității (4) sugerează să folosim formula lui Koszul pentru conexiunea Levi-Civita. În ea, primii trei termeni se anulează, deoarece produsul scalar a două câmpuri sîng-invariante e invariant:

$$\begin{aligned} g_a(X_a, Y_a) &= g_a(dL_a X_e, dL_a X_e), \text{ datorită invarianței câmpurilor} \\ &= (L_a^* g)(X_e, X_e) = g(X_e, X_e), \text{ din invarianța lui } g. \end{aligned}$$

În consecință, primii trei termeni ai formulei lui Koszul (care conțin derivate ale produselor scalare constante) se anulează. Rămîn trei termeni care, folosind (4) conduc la (5). Pentru reciprocă, folosim $\nabla g = 0$:

$$\begin{aligned} g([Z, X], Y) &= 2g(\nabla_Z X, Y) = 2Z(g(X, Y)) - 2g(X, \nabla_Z Y) \\ &= -g(X, \nabla_Z Y) \text{ pentru că } g(X, Y) = ct. \\ &= -g(X, [Z, Y]) \text{ conform (4)}. \end{aligned}$$

Tensorul de curbură al unei metrici biinvariante se poate calcula foarte ușor folosind (5) și identitatea Jacobi. Avem, pentru $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \frac{1}{4} [X, [Y, Z]] - \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4} [[X, Y], Z] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4} [[X, Y], Z]. \end{aligned}$$

Rezultă și o formulă simplă pentru curbura secțională a oricărui plan generat de vectori stîng invarianți. Cum

$$g(R(X, Y)X, Y) = -\frac{1}{4} g([X, Y], X, Y) = \frac{1}{4} g([X, Y], [X, Y]), \text{ cf. (4),}$$

obținem (notăm $X \wedge Y$ planul generat de X, Y):

$$K(X \wedge Y) = \frac{1}{4} \frac{g([X, Y], [X, Y])}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Aplicat pe vectori din \mathfrak{g} , tensorul lui Ricci se poate exprima ca:

$$Ric(X, Y) = -\frac{1}{4} \text{tr}(ad_X \circ ad_Y).$$

În particular, vedem că *un grup Lie cu metrică biinvariantă are curbură secțională pozitivă*, iar dacă G e abelian, atunci orice metrică biinvariantă e plată.

Un exemplu de metrică biinvariantă se obține considerînd *forma Killing* a unui grup Lie:

$$B(X, Y) = \text{tr}(ad_X \circ ad_Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Cum $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, B e simetrică. Cum ad_X e linear în X , B e bilineară. În general, B nu e pozitiv definită. Grupurile Lie pentru care B e nedegenerată se numesc *semi-simple* și sînt clasificate (vezi [He]). Se știe că un grup semisimplu e compact dacă și numai dacă forma Killing e negativ definită, deci $-B$ poate fi luată drept metrică. Așa sînt, de exemplu, grupurile $O(n)$ și $U(n)$.

Pe de altă parte, se arată ușor că $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$ și că B e stîng invariantă. Astfel, pe un grup G semisimplu și compact, $-B$ e o metrică biinvariantă, cu curbura secțională pozitivă (nu neapărat constantă). În plus, formula pe care am găsit-o pentru Ric arată $(G, -B)$ e spațiu Einstein cu curbura scalară pozitivă.

4. Geodezice

Definiția 12.4.1. Autoparalelele conexiunii Levi-Civita se numesc geodezice.

Toate rezultatele obținute în paragraful 5 din capitolul anterior rămîn valabile, cu formulele aferente, numai că acum simbolurile lui Christoffel care apar se referă la conexiunea Levi-Civita. Pentru comoditate, reformulăm aici principalele rezultate, adăgînd fapte specifice contextului riemannian.

Ecuția locală geodezicelor este:

$$(12.17) \quad \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Exercițiul 12.4.2. Dacă γ e geodezică, atunci o reparametrizare a ei $\gamma \circ h$ e tot geodezică dacă și numai dacă h e funcție afină.

Observația 12.4.3. Geodezicele, ca orice alte curbe pe varietate, pot fi reparametrizate prin lungime de arc, exact ca și curbele din \mathbb{R}^3 . Cum lungimea vectorului tangent la o geodezică e constantă:

$$\frac{d}{dt} g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = dg(\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t)) = 0,$$

reparametrizarea prin lungime de arc e afină, deci, cu exercițiul anterior, se obține tot o geodezică. Așadar, când va fi nevoie, vom putea presupune că geodezicele au vector tangent de lungime 1.

Teorema 12.4.4. Fie $v \in T_x M$. Există $\varepsilon > 0$ și o unică geodezică $\gamma_v : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ cu $\gamma_v(0) = x$ și $\gamma'_v(0) = v$. În plus, γ_v depinde diferențiabil de x și de v .

Observația 12.4.5. Cum $t \mapsto at$ e o schimbare afină de parametru, dacă γ_v e geodezică cu condițiile inițiale (x, v) , atunci $\gamma(at)$ e geodezică cu condițiile inițiale $(x, \frac{v}{a})$:

$$(12.18) \quad \gamma_v(t) = \gamma_{av}\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0, t \in [0, \varepsilon].$$

În particular, γ_{av} e definită pe $[0, \frac{\varepsilon}{a}]$. Astfel, cu cât este mai lung vectorul viteză, cu atât mai scurt va fi intervalul maximal de definiție al lui γ (atunci când nu e întreg \mathbb{R}).

Pe de altă parte, cum γ_v depinde diferențiabil de v și mulțimea $T_x M := \{v \in T_x M \mid \|v\| = 1\}$, sfera unitate din $T_x M$, e compactă, γ_v , există un $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice $v \in T_x M$, γ_v e definită pe $[0, \varepsilon_0]$. Cu cele de mai sus, rezultă că pentru orice $w \in T_x M$ cu $\|w\| \leq \varepsilon_0$, γ_w e definită pe $[0, 1]$.

Definiția 12.4.6. O varietate riemanniană (M, g) pe care orice geodezică e definită pe \mathbb{R} se numește completă geodezic.

Metrica plată a lui \mathbb{R}^n e geodezic completă, pentru că geodezicele ei sînt drepte obișnuite. Dar vom vedea și alte exemple nebanale.

Exercițiul 12.4.7. Arătați că o curbă pe o varietate produs e geodezică dacă și numai dacă proiecțiile sale pe factori sînt geodezice. Arătați că varietatea produs e completă geodezic dacă și numai dacă ambii factori sînt compleți geodezic.

Exercițiul 12.4.8. Scrieți și rezolvați ecuația geodezicelor pe semiplanul Poincaré ($n = 2$). Trebuie să obțineți drepte euclidiene verticale și semicercuri euclidiene centrate pe frontiera $\{x^2 = 0\}$. Observați că și această varietate e completă geodezic. Avînd curbura strict negativă, ea constituie un model pentru geometria hiperbolică, rolul dreptelor fiind jucat de geodezice.

Observația 12.4.9. În general, ecuația geodezicelor este greu de rezolvat direct. De aceea, vom căuta alte metode, indirecte, pentru a găsi geodezicele unor varietăți.

Aplicația exponențială. Următoarea construcție este esențială pentru tot ce urmează. Fie $V_x \subset T_x M$ mulțimea vectorilor v pentru care γ_v e definită cel puțin pe intervalul $[0, 1]$. Cum γ_0 e geodezica constantă x , rezultă că V_x conține vectorul nul din

$T_x M$. Definim aplicația exponențială în x drept

$$\exp_x : V_p \rightarrow M, \quad \exp_x(v) = \gamma_v(1).$$

Astfel, exponențiala asociază unui vector tangent în x punctul corespunzător lui $t = 1$ de pe unica geodezică prin x pe direcția v . Cu observațiile dinainte, domeniul de definiție al exponențialei conține măcar o vecinătate⁷ în jurul lui 0 din $T_x M$. Dacă varietatea nu e completă, sigur această vecinătate nu coincide cu $T_x M$.

Relația (12.18) ne lămurește asupra comportării exponențialei:

$$(12.19) \quad \exp_x tv = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Așadar, orice punct de pe geodezica de direcție inițială v poate fi descris ca imagine a exponențialei din x . În altă formulare, unei raze $t \mapsto tv$ prin o în $T_x M$ îi corespunde o geodezică radială $\exp_x(tv)$. Rezultatul precis e următorul:

Teorema 12.4.10. *Aplicația exponențială în x aplică difeomorf o vecinătate a vectorului nul din $T_p M$ pe o vecinătate a lui x în M .*

Demonstrație. Ideea e să calculăm diferențiala lui \exp_x în $0 \in T_p M$, să vedem că e izomorfism și să aplicăm teorema funcției inverse.

Avem de calculat $d_0 \exp : T_0(T_x M) \rightarrow T_x M$. Dar $T_x M$ e un spațiu vectorial și spațiul său tangent în orice punct se identifică de fapt cu el însuși (e aceeași identificare ca și cea din \mathbb{R}^3 dintre punctul P , vectorul de poziție \overrightarrow{OP} și vectorul \overrightarrow{OP} translatat cu originea în P). Astfel, putem considera că $d_0 \exp_x : T_x M \rightarrow T_x M$. Pentru un $v \in T_x M$ avem:

$$d_0 \exp_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = \gamma'_v(0) = v,$$

adică $d_0 \exp_x = Id_{T_x M}$, ceea ce încheie demonstrația. ■

Să notăm cu $W \subseteq TM$ mulțimea vectorilor tangenți v pentru care e definită $\gamma_v(1)$. E clar că W e deschisă și conține toți vectorii nuli $0 \in T_x M$, $x \in M$. Din dependența diferențiabilă a soluțiilor ecuațiilor diferențiale de condițiile inițiale, rezultă că $\exp : W \rightarrow M$ e diferențiabilă.

Definim acum $\Phi : W \rightarrow M \times M$ prin $\Phi(x, v) = (x, \exp_x(v))$.

Corolarul 12.4.11. *Fie x_0 un punct fixat în M . Atunci Φ e difeomorfism local al unei vecinătăți V a lui $0_{x_0} \in TM$ pe o vecinătate a lui $(x_0, x_0) \in M \times M$.*

Demonstrație. E suficient să arătăm că $d_{(x_0, 0_{x_0})} \Phi$ are rang maxim. Local, matricea iacobiană a lui Φ în $(x_0, 0_{x_0})$ este de forma $J_{(x_0, 0)}(\Phi) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & J_0(\exp_x(v)) \end{pmatrix}$, unde $J_0(\exp_x(v))$ notează matricea iacobiană a lui $d_0 \exp_x$. Dar am văzut că $d_0 \exp_x = Id$. ■

Exemplul 12.4.12. Fie G un grup Lie cu o metrică biinvariantă g . În Exemplul 12.3.25 (5) am găsit pentru conexiunea Levi-Civita formula $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ pe câmpuri stîng invariante. În particular, orice câmp stîng invariant satisface $\nabla_X X = 0$, deci orbitele sale sînt geodezice ale metricii biinvariante (oricare ar fi aceasta!). Pe de altă parte, pentru orice $a \in G$ și $v \in T_a G$, v face parte dintr-un câmp stîng invariant: îl transportăm pe

⁷Considerăm pe $T_x M$ topologia naturală indusă de produsul scalar g_x .

v în e punînd $\xi = d_a L_{a^{-1}} v$, apoi ataşăm cîmpul sîng invariant X^ξ şi rezultă $X_a^\xi = v$. Astfel, geodezica $\gamma_v(t)$ este orbita lui X^ξ prin a . În concluzie, geodezicele lui (G, g) sînt de forma $\exp(t\xi)$, cu $\xi \in \mathfrak{g}$. Altfel spus, *aplicaţia exponenţială de grup coincide cu exponenţiala riemanniană unei metrici biinvariante*. În particular, exponenţiala unei metrici biinvariante e surjectivă.

Exemplul 12.4.13. (Grupul lui Heisenberg. Continuare.) (cf. [GHL]) Fie H grupul descris în Exemplul 8.4.20. Îl înzestrăm cu metrica g pentru care cîmp X, Y, V care generează \mathfrak{h} sînt ortonormale în fiecare punct. Metrica g e automat sîng invariantă. Să vedem dacă e şi drept invariantă. Vom nota, pentru comoditate, $a \in H$ cu $a = (x, y, z)$ şi vom scrie legea de înmulţire ca

$$(x, y, z) \times (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Un calcul simplu arată că, de exemplu, $dR_a(V) = V - xZ$. Dar atunci

$$g(dR_a(V), dR_a(V)) = 1 + x^2 \neq 1 = g(V, V),$$

deci R_a nu e izometrie şi g nu e biinvariantă.

Folosind formula lui Koszul, calculul conexiunii Levi-Civita se reduce la calculul croşetelor generatorilor X, Z, V . Obţinem:

$$[X, V] = Z, \quad [X, Z] = [Z, V] = 0,$$

de unde

$$\begin{aligned} \nabla_X V &= -\nabla_V X = \frac{1}{2}Z, & \nabla_V Z &= -\nabla_Z V = \frac{1}{2}X, & \nabla_Z X &= -\nabla_X Z = -\frac{1}{2}V, \\ \nabla_X X &= \nabla_Z Z = \nabla_V V = 0. \end{aligned}$$

Rezultă că orbitele generatorilor X, Z, V sînt geodezice. Ca să găsim forma generală a geodezicelor (care pleacă din identitate) pe grupul Heisenberg, fie $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Cum vectorul ei tangent este

$$\gamma' = x'X + y'V + (z' - xy')Z,$$

găsim

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = [x'' + y'(z' - xy')]X + (z' - xy')'Z + [y'' - x'(z' - xy')]V.$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale ale geodezicelor este:

$$\begin{cases} x'' + y'(z' - xy') = 0 \\ (z' - xy')' = 0 \\ y'' - x'(z' - xy') = 0 \end{cases}$$

Pentru simplitate, presupunem geodezica parametrizată canonic: $g(\gamma', \gamma') = 1$, ceea ce implică

$$(x')^2 + (y')^2 + (z' - xy')^2 = 1.$$

Relaţia aceasta sugerează să trecem la coordonate sferice, adică să considerăm $\gamma'(t)$ de forma $(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta)$. Acum sistemul devine:

$$\begin{cases} x'' + (\sin \varphi) y' = 0 \\ z' - x y' = \sin \varphi \\ y'' - (\sin \varphi) x' = 0 \end{cases}$$

Cu condițională $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $x'(0) = \cos\theta \cos\varphi$, $y'(0) = \sin\theta \cos\varphi$, găsim soluția:

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{ctg}\varphi\{\sin(t \sin\varphi + \theta) - \sin\theta\}, \\y(t) &= \operatorname{ctg}\varphi\{\cos\theta - \cos(t \sin\varphi + \theta)\}, \\z(t) &= \frac{t}{2} \left(\sin\varphi + \frac{1}{\sin\varphi} \right) - \frac{1}{4} \{\sin 2(t \sin\varphi + \theta) - \sin 2\theta\} \\&\quad + \sin\theta \operatorname{ctg}^2\varphi\{\cos(t \sin\varphi + \theta) - \cos\theta\}, \quad \text{pentru } \sin\varphi \neq 0.\end{aligned}$$

Pe planul orizontal, aceste curbe se proiectează în cercuri (de rază $\operatorname{ctg}\varphi$) prin origine.

Dacă, însă, $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, obținem $x(t) = y(t) = 0$, $z = \pm t$.

Dacă $\sin\varphi = 0$, rezultă:

$$\gamma(t) = (t \cos\theta, t \sin\theta, \frac{1}{2} t^2 \cos\theta \sin\theta).$$

În fine, calculînd aplicația exponențială de grup, găsim că subgrupul cu un parametru corespunzător unui câmp sîng invariant oarecare $\alpha X + \beta Z + \delta V$ este

$$t \mapsto (t\alpha, t\beta, t\delta + \frac{1}{2} t^2 \alpha\beta),$$

și nu e întotdeauna geodezică. Deci exponențiala de grup nu coincide cu exponențiala riemanniană.

Cu exact aceleași metode se determină conexiunea Levi-Civita, curbura și geodezicele grupului Heisenberg generalizat (vezi, de exemplu, V. Marenich, *Geodesics in Heisenberg Groups*, Geom. Dedicata **66** (1997), 175–185.)

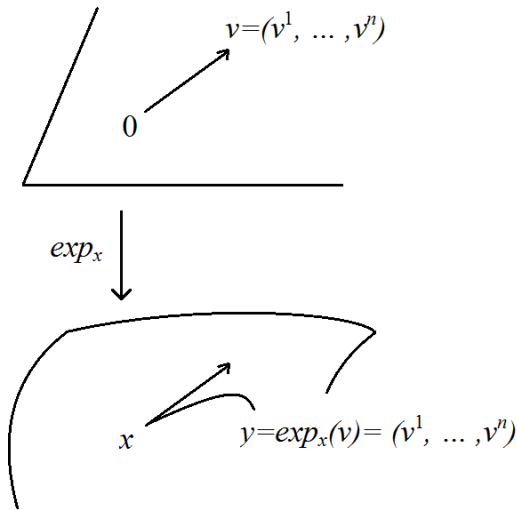
Coordonate normale. Conform teoremei anterioare, în jurul oricărui punct $x \in M$ există o vecinătate U al cărei fiecare punct y e de forma $\exp_x(v)$, cu v dintr-o vecinătate V (posibil foarte mică) a lui 0 din $T_x M$. Asta înseamnă că orice y este de forma $\gamma_v(1)$, adică poate fi unit cu x printr-o geodezică. Mai mult, cum \exp_x e difeomorfism între V și U , geodezica dintre x și y e unică.

Dacă inversăm \exp_x , obținem un difeomorfism de la U la V notat, cum altfel?, \log_x . Deci $\log_x(y) = v$, cu $\exp_x v = y$. Pe $T_x M$ putem fixa un reper ortonormat față de produsul scalar g_x . În acest reper, orice v are niște coordonate $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Compunînd aplicația $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ care vede v prin coordonatele sale cu \log_x , obținem o aplicație diferențiabilă

$$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(y) = (v^1, \dots, v^n), \text{ unde } y = \exp_x v.$$

Am obținut un sistem de coordonate (U, Φ) în jurul lui x , în care x are coordonatele $(0, \dots, 0)$. Un punct e identificat de componentele vectorului care-i corespunde prin \exp_x . Coordonatele acestea se numesc *normale* sau *geodezice*⁸. Utilitatea lor constă în forma extrem de simplă pe care o iau tensorul metric și coeficienții Christoffel în punctul x atunci cînd sînt exprimați în coordonate normale:

⁸Erau folosite încă de Gauss. E un exercițiu util să le identificați în articolul său din 1827.



Propoziția 12.4.14. În coordonate normale centrate în x , avem

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(x) = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_x = 0.$$

Demonstrație. Dacă notăm cu x^i coordonatele normale, atunci avem

$$(12.20) \quad x^i(\exp_x(tv)) = x^i(\gamma_{tv}(1)) = tv^i, \quad \text{unde } v = v^i e_i.$$

Calculăm acum coeficienții $g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x)$ (dar acum $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sînt diferiți de cei din baza naturală). Avem nevoie de legătura dintre $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$ și e_j . Din formula anterioară rezultă:

$$v = \gamma'_v(0) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = v^j e_j,$$

deci

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \delta_i^j e_j,$$

de unde

$$g_{ij}(x) = \delta_i^k \delta_j^l \delta_{kl} = \delta_{ij}.$$

Pentru a doua relație, scriem ecuația geodezicelor în coordonate normale folosind (12.20). Avem deci $\frac{dx^i}{dt} = v^i$, astfel că ecuația devine:

$$\Gamma_{ij}^k v^i v^j (\gamma_v(t)) = 0.$$

Așadar, în $x = \gamma_v(0)$ avem $\Gamma_{ij}^k v^i v^j(x) = 0$ pentru orice v^i . Punem $v^i = \delta_l^i$, $v^j = \delta_m^j$ (adică luăm $v = e_l + e_m$) și găsim $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$.

Ultima egalitate e o consecință a celei de-a doua. Cu formula pentru coeficienți Christoffel avem:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} g^{ks}(s) \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} \Big|_x + \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i} \Big|_x - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \Big|_x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \Big|_x + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \Big|_x - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_x \right). \end{aligned}$$

Permutăm indicii (ijk), adunăm (ținem seamă de simetria $g_{ij} = g_{ji}$) și obținem relația dorită. ■

Observația 12.4.15. Coordonatele normale sînt foarte utile în demonstrarea unor identități tensoriale. Iată, spre exemplu, cum ar decurge o demonstrație locală a Teoremei lui Schur. Avem de demonstrat că ecuația

$$R_{ijkl} = f(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

implică $f = ct$. Derivăm în raport cu x^h în x (notăm derivata unei funcții F în raport cu x^h cu $F_{,h}$) ținînd seamă că $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ iar $g_{ij,h}(x) = 0$ și găsim (pentru comoditate omitem argumentul x):

$$R_{ijkl,h} = f_h(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}).$$

Permutăm circular (ijh), folosim Bianchi II. Rezultă:

$$0 = f_h(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + f_i(\delta_{jl}\delta_{hk} - \delta_{jk}\delta_{hl}) + f_j(\delta_{hl}\delta_{ik} - \delta_{hk}\delta_{il}).$$

Cum $\dim M \geq 3$, odată fixat h , putem găsi $i \neq h$, $j \neq h$, $i \neq j$, $l = i$, $k = j$. Rămîne $f_h = 0$ în x de unde concluzia.

Exercițiul 12.4.16. (Spații local simetrice.) Arătați că următoarele trei condiții sînt echivalente:

(i) $\nabla R = 0$.

(ii) Dacă X, Y, Z sînt cîmpuri paralele de-a lungul curbei γ , atunci și $R(X, Y)Z$ e paralel de-a lungul lui γ .

(iii) Curbura secțională e invariantă la transportul paralel de-a lungul oricărei curbe.

Un spațiu care satisface oricare dintre aceste condiții se numește *local simetric*. Motivația denumirii este următoarea. Pentru fiecare $x \in M$ fixat, considerăm o vecinătate normală de coordonate U și definim aplicația $\sigma_x : U \rightarrow U$ prin $\sigma_x(y) = z$, unde z e unicul punct de pe geodezică prin x care ajunge în y , la aceeași distanță de x ca și y . E vorba despre simetria geodezică. Diferențiala ei este $v \mapsto -v \in T_x M$. Se arată că local simetria este echivalentă cu proprietatea lui σ_x de a fi izometrie. Pentru o introducere accesibilă în teoria spațiilor simetrice, cf. [ON]; pentru o tratare aplicată, cf. [KN], [He].

Proprietăți metrice. Teorema Hopf-Rinow. Am văzut, (12.3), cum se pot calcula lungimi de curbe cu ajutorul metricii riemanniene. Dacă orice două puncte pot fi unite cu o curbă diferențiabilă (chiar numai pe porțiuni), atunci e tentant să definim distanța dintre puncte ca fiind infimumul acestor lungimi (sau minimumul, dacă am ști că el se atinge pe una dintre curbe). Am obține astfel un spațiu metric atașat varietății riemanniene. Vom demonstra că acest lucru e posibil.

În acest paragraf, M este o varietate conexă (cum, pe varietăți, conexiunea implică conexiunea prin arce, rezultă că orice două puncte sînt unite de o curbă ca mai sus).

Definim funcția $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ prin

$$(12.21) \quad d(x, y) = \inf_{\gamma} \{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M, \text{netedă pe porțiuni}, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

Propoziția 12.4.17. d definită în (12.21) este o distanță, adică satisface:

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,
- (3) $d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$.

Demonstrație. Simetria lui d rezultă din posibilitatea parcurgerii invers, de la y la x , a oricărei curbe, prin reparametrizare, lungimea rămânând aceeași.

Inegalitatea triunghiului rezultă din posibilitatea juxtapunerii curbelor.

Pentru (3), trebuie demonstrat doar că $d(x, y) = 0$ implică $x = y$. Prin absurd, dacă $x \neq y$, fie o vecinătate $V \ni x$ cu $y \notin V$. Considerăm și o vecinătate de coordonate normale U în jurul lui x corespunzătoare unei bile deschise de rază r din $T_x M$. Atunci orice geodezică $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ care pleacă din x și are imaginea cuprinsă în U are lungimea

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|v\| dt \geq r(b-a).$$

Facem acum intersecția $U \cap V$. Atunci orice curbă care unește x cu y are întâi de străbătut $U \cap V$, deci are lungimea cel puțin $r(b-a)$. Astfel, $d(x, y) \geq r(b-a)$, contradicție. ■

Cum știm, o distanță induce în mod natural o topologie a cărei bază e dată de bile deschise: $B(x, r) := \{y \in M \mid d(y, x) < r\}$. Poate în mod neașteptat, nu obținem astfel nimic nou:

Propoziția 12.4.18. Pe o varietate riemanniană conexă, topologia indusă de distanță coincide cu topologia de varietate.

Demonstrație. E suficient să arătăm că în fiecare bilă deschisă $B(x, r)$ se poate include un deschis din topologia de varietate și reciproc.

Cum o domeniile hărților unui atlas pe M constituie o bază pentru topologia lui M , vom arăta că în orice domeniu de hartă intră o bilă deschisă și reciproc.

Fie (U, φ) o hartă în jurul lui x . Cum φ e homeomorfism între U și \mathbb{R}^n , topologia lui U coincide cu cea dată de distanța euclideană d_0 de pe \mathbb{R}^n (transportată prin φ^{-1} pe U).

E mai comod să ne situăm în \mathbb{R}^n . Avem de comparat topologia lui $\varphi(U)$ indusă de metrică standard a lui \mathbb{R}^n cu cea indusă de distanța transportată de pe U . Dar și această a doua topologie e indusă tot de o normă, anume $\|u\| = \sqrt{g_{ij}v^i v^j}$, unde g_{ij} sînt componentele metricii riemanniene în harta (U, φ) . Cum orice două norme pe \mathbb{R}^n sînt echivalente, totul e demonstrat. ■

Observația 12.4.19. Nu e un rezultat chiar banal: există o infinitate de metrici riemanniene și toate induc aceeași topologie.

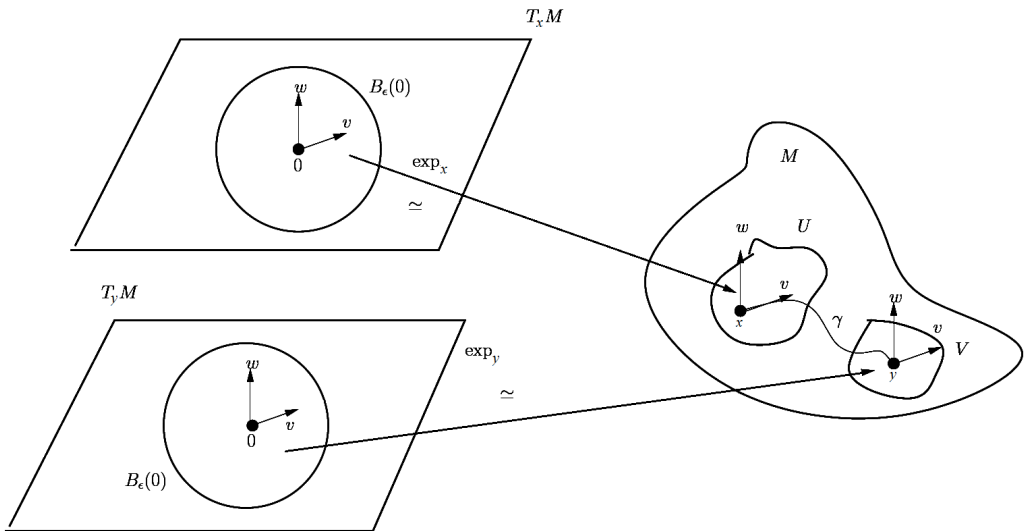
Vrem acum să vedem dacă infimumul care definește distanța e, de fapt, un minim. Vom vedea că acest lucru e adevărat că, cel puțin pentru puncte suficient de apropiate.

Toată discuția ne va duce înspre noțiunea de vecinătate convexă a unui punct, rolul segmentelor din definiția euclideană a convexității fiind jucat de geodezice.

Rezultatul următor, de care vom avea nevoie, este oricum foarte important în sine. El arată că aplicația exponențială nu e doar izometrie locală în $0 \in T_x M$, ci rămîne izometrie de-a lungul oricărei geodezice care pleacă din x , atîta vreme cît geodezica e definită. Pentru a-l formula, să reamintim că pentru orice $v \in T_x M$, $T_v(T_x M)$ se identifică natural cu $T_x M$. În consecință, un vector $V_v \in T_v(T_x M)$ se va numi *radial* dacă e colinear cu v .

Propoziția 12.4.20. (Lema lui Gauss.) Fie $x \in M$ și $v \in T_x M \setminus \{0\}$. Fie $V_v, W_v \in T_v(T_x M)$, cu V_v radial. Atunci:

$$g(d_v \exp_x(V_v), d_v \exp_x(W_v)) = g(V_v, W_v).$$



Demonstrație. Cum, prin ipoteză, $V_v = \alpha v$, vom presupune $V_v = v$.

Considerăm acum o suprafață parametrizată (vezi Observația 12.3.3) $\tilde{f}: D \rightarrow T_x M$, $\tilde{f}(t, s) = t(V_v + sW_v)$. Avem $\tilde{f}_t(1, 0) = V_v$, $\tilde{f}_s(1, 0) = W_v$. Lui \tilde{f} îi corespunde suprafața parametrizată $f: D \rightarrow M$, $f(t, s) = \exp_x(\tilde{f}(t, s))$, pentru care avem

$$f_t(1, 0) = d_v \exp_x(V_v), \quad f_s(1, 0) = d_v \exp_x(W_v).$$

Trebuie deci să arătăm că

$$g(f_t(1, 0), f_s(1, 0)) = g(V_v, W_v).$$

Prin construcție, suprafața parametrizată f în M e una specială: una dintre familiile de curbe de coordonate e formată din geodezice, anume $\{s = ct.\}$. Viteza lor inițială e $V_v + sW_v$. Atunci $f_{tt} = 0$ și

$$g(f_t, f_t) = ct. = g(V_v + sW_v, V_v + sW_v).$$

Derivăm (covariant) în raport cu t și folosim $f_{ts} = f_{st}$ (cf. (12.14)). Rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(f_t, f_s) = g(f_t, f_{st}) = g(f_t, f_{ts}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(f_t, f_t) = g(V_v + sW_v, V_v + sW_v),$$

de unde

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{(1,0)}(g(f_t, f_s) = g(V_v, W_v), \quad \text{pentru orice } t.$$

Pe de altă parte, $g(f_t, f_s)(0,0) = 0$ pentru că, indiferent de s , $f(0,s) = \exp_x(0) = x$. În concluzie,

$$g(f_t, f_s)(t,0) = tg(V_v, W_v), \quad \text{pentru orice } t$$

și pentru $t = 1$ se obține concluzia. ■

Corolarul 12.4.21. (i) *Exponențiala e izometrie pe direcții radiale. În particular, razele $t \mapsto \exp_x(tv)$ sînt perpendiculare pe hipersuprafețele $v \mapsto \exp_x(tv)$.*

Să observăm că, în notațiile din Corolarul 12.4.11, cu x în loc de x_0 , dacă luăm $\bar{U} = W \cap T_x M$, vedem că $\exp_x|_{\bar{U}} = \Phi|_{\bar{U}}$ e difeomorfism local în jurul lui 0_x . Astfel, pentru x dat, există o vecinătate U și un $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că orice $y, z \in U$ sînt de forma $z = \exp_y v$, cu $\|v\| < \varepsilon$. Altfel spus, y și z sînt unite de o unică geodezică γ de lungime strict mai mică decît ε .

Fie $B(0, \varepsilon) \subset T_x M$ și fie $B' = \exp_x(B(0, \varepsilon))$ bila geodezică corespunzătoare centrată în x . Pe $B \setminus \{x\}$ putem introduce un analog al coordonatelor polare. Anume, $B \setminus \{x\}$ e difeomorfă cu $(0, \varepsilon) \times S^{n-1}$ prin $f(t, v) = \exp_x(tv)$. Se verifică ușor că f e difeomorfism. Atunci, pentru că razele sînt perpendiculare pe sferile $\{t\} \times S^{n-1}$, avem:

Corolarul 12.4.22. *În coordonate polare, metrica g se scrie $g = dt^2 + h_{(t,v)}$, unde $h_{(t,v)}$ e metrica indusă pe $f(\{t\} \times S^{n-1})$ în punctul $f(t, v)$.*

Expresia lui h nu interesează. Important e că avem o direcție (radială) pe care metrica nu depinde de v . Acum putem demonstra:

Teorema 12.4.23. *Pentru orice $x \in M$, există o vecinătate U și un $\varepsilon > 0$ astfel încît orice $y, z \in U$ sînt unite de o unică geodezică γ de lungime mai mică decît ε și cu $L(\gamma) = d(y, z)$.*

Demonstrație. Existența lui U , ε și γ au fost deja demonstrate.

Rămîne să arătăm că γ e minimală. Fie c o altă curbă care unește y cu z . După o reparametrizare, putem presupune că c și γ sînt definite pe $[0, 1]$.

În jurul lui y , considerăm o bilă geodezică B ca mai sus, de rază ε . În coordonate polare, curba c se scrie $c(s) = f(t(s), v(s))$. Să presupunem că c iese din B înainte de a atinge z și fie $c(s_0)$ primul punct în care c atinge frontiera lui B . Atunci:

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{g_{c(s)}(c'(s), c'(s))} ds > \int_0^{s_0} \sqrt{g_{c(s)}(c'(s), c'(s))} ds \leq \int_0^{s_0} \|t'(s)\| ds \geq \varepsilon.$$

Pe de altă parte, dacă $\text{Im}(c) \subset B$, atunci:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^1 \sqrt{g_{c(s)}(c'(s), c'(s))} ds \geq \int_0^1 \sqrt{t'(s)^2 + h_{t(s), v(s)}(c'(s), c'(s))} ds \\ &\geq t(1) - t(0) = L(\gamma). \end{aligned}$$

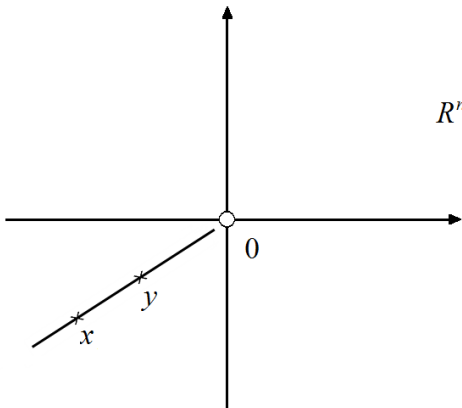
Evident, egalitatea se atinge dacă și numai dacă $t(s)$ e monotonă și $v(s) = ct$., ceea ce revine la faptul că c are viteză constantă, fie ea v_0 . Astfel, din $L(\gamma) = L(c)$ deducem

$c(s) = f(v_0 s, v)$, deci $c = \gamma$. ■

Observația 12.4.24. Nu rezultă din demonstrație că geodezica minimală ar fi inclusă în U . Se poate construi și o astfel de vecinătate (convexă din punctul de vedere al geodezicelor). Într-adevăr, H.C Whitehead a demonstrat că orice punct admite o vecinătate care e normală pentru fiecare punct al ei. Mai mult, rezultatul e adevărat pentru conexiuni lineare arbitrare: și pentru acestea existind o noțiune de aplicație exponențială asociată curbelor autoparalele etc. O demonstrație se poate găsi, de exemplu, în [Ia2].

Completitudine. (după [Mi2]). Pe un spațiu Riemann, topologia de varietate fiind, *a posteriori*, una metrică, se poate pune problema completitudinii (orice șir Cauchy e convergent). Pe de altă parte, am introdus și noțiunea, specific riemanniană, de *completitudine geodezică*: orice geodezică e definită pe întreg \mathbb{R} , adică, echivalent, pentru orice x , aplicația exponențială \exp_x e definită pe tot $T_x M$. Teorema următoare lămurește relația dintre cele două noțiuni de completitudine.

Exemplul 12.4.25. \mathbb{R}^n cu metrica plată e complet geodezic: geodezicele sînt drepte, definite pe tot \mathbb{R} . În schimb \mathbb{R}^n fără un punct, cu aceeași metrică, nu mai e complet geodezic (vezi figura alăturată). Semispațiul superior deschis, cu metrica plată indusă, nu e complet geodezic, pentru că geodezicele sale sînt segmente deschise de dreaptă. Dar cu metrica Poincaré, el este complet geodezic. Sfera, cu orice metrică am dota-o, e completă geodezic (pentru că e compactă, vezi mai jos).



Geodezica prin x și y nu se poate prelungi indefinit pentru că ar trece prin originea care lipsește.

Demonstrăm întâi o consecință extrem de importantă a completitudinii geodezice:

Propoziția 12.4.26. *Dacă există un punct $x \in M$ astfel încât \exp_x e definită pe tot $T_x M$, atunci pentru orice $y \in M$ există o unică geodezică minimală care unește x cu y .*

Demonstrație. Cum \exp_x e definit pe tot \mathbb{R} , e clar că orice geodezică din x e definită pe \mathbb{R} . Dar nu e evident că plecînd din x putem ajunge (pe geodezice) în orice alt punct din M .

Fie $S := S_{\varepsilon'}(x)$, $\varepsilon' < \varepsilon$, o sferă (față de distanța d) mică centrată în x , unde ε este cel prescris de Teorema 12.4.23. Cum S e compactă, există $x' \in S$ care minimizează

distanța de la y la S (x' e un cel mai apropiat punct de y pe S). Atunci:

$$d(x, y) = d(x', y) + \varepsilon'.$$

Fie γ geodezica de viteză 1 care unește x cu x' (existența ei e asigurată de Teorema 12.4.23). În particular, avem:

$$d(\gamma(r), y) = d(x, y) - r.$$

Cum γ e definită pe tot \mathbb{R} , încercăm să arătăm că ea ajunge în y și e minimală pe toată lungimea ei.

Fie $A := \{t \in \mathbb{R} \mid d(\gamma(t), y) = d(x, y) - t\}$. Conform relației anterioare, $r \in A$, deci $A \neq \emptyset$. Dacă arătăm că $l := d(x, y) \in A$, atunci $d(\gamma(l), y) = l - l = 0$, deci $\gamma(l) = y$ și demonstrația e încheiată.

Cum A e, prin definiție, închisă, la fel este intersecția $A \cap [0, l]$. Fie $t_0 = (\max A) \cap [0, l]$ și fie $z = \gamma(t_0)$. Alegem o vecinătate $B_{\varepsilon''}(z)$, cu $\varepsilon'' < \varepsilon$ (de data asta aplicăm Teorema 12.4.23 pentru z). Ca mai sus, alegem z' pe frontiera $S_{\varepsilon''}(z)$, punctul cel mai apropiat de y , și avem:

$$d(z', y) = d(z, y) - \varepsilon'' = d(x, y) - t_0 - \varepsilon''.$$

Dacă arătăm că $z' = \gamma(t_0 + \varepsilon'')$, atunci $t_0 + \varepsilon'' \in A$, contradicție cu alegerea lui t_0 , de unde $l \in A$. Or, pe de o parte avem

$$d(x, z') \geq d(x, y) - d(z', y) = d(x, y) - t_0 + \varepsilon'';$$

și, pe de altă parte, curba obținută prin concatenarea lui $\gamma|_{[x, z]}$ cu geodezica între z și z' are exact aceeași lungime $d(x, y) - t_0 + \varepsilon''$, astfel că e o geodezică netedă. Este ceea ce voiam să obținem. ■

Acum putem demonstra:

Teorema 12.4.27. (Hopf-Rinow). Fie (M, g) o varietate Riemann și fie d distanța indusă de g . Următoarele afirmații sînt echivalente:

- (i) (M, g) e completă geodezică.
- (ii) (M, d) e spațiu metric complet.

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii). Cum (M, g) e completă, exponențiala din orice punct e definită pe tot M . Fie $\{x_n\}$ un șir Cauchy și fie γ_n geodezicele minimale unice care unesc x cu x_n . Notînd $l_n = d(x, x_n)$ avem:

$$\gamma_n(0) = x, \quad \gamma_n(l_n) = x_n = \exp_x l_n v_n,$$

cu $v_n \in T_x M$ vectori unitari. Se vede ușor că șirul $\{l_n v_n\}$ e mărginit în $T_x M$ (cu distanța indusă de metrica lui M). Atunci admite un subșir convergent. Deci șirul Cauchy $\{x_n\}$ admite un subșir convergent, așadar e convergent.

(ii) \Rightarrow (i). Fie $\gamma : I \rightarrow M$, cu $I = (a, b)$, o geodezică. Vrem să arătăm că putem extinde γ dincolo de b (analog se va demonstra că γ se prelungește dincolo de a). Fie atunci un șir $b_n \rightarrow b$. Atunci

$$d(\gamma(b_n), \gamma(b_m)) \leq L(\gamma|_{[b_n, b_m]}) \leq |b_n - b_m|, \text{ (}\gamma \text{ param. canonic),}$$

deci $\{\gamma(b_n)\}$ e șir Cauchy, așadar are o limită $x \in M$. Dar limita x nu depinde de șirul considerat. Într-adevăr, dacă $b'_n \rightarrow b$, atunci $d(\gamma(b_n), \gamma(b'_n)) \leq |b_n - b'_n|$. Asta înseamnă că γ

se poate prelungi prin continuitate în punctul b . Fie $\bar{\gamma} : (a, b] \rightarrow M$ prelungirea continuă. Alegem o vecinătate U a lui $x = \bar{\gamma}(b)$ ca în Teorema 12.4.23: orice geodezică prin x e definită cel puțin pînă la $t = \varepsilon$. Alegem acum b'_n cu $|b'_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\gamma(b'_n) \in U$. Atunci γ e definită pînă la $b + \frac{\varepsilon}{2}$ și demonstrația e încheiată. ■

De acum înainte, pentru spații Riemann nu mai trebuie precizat despre ce fel de completitudine e vorba.

Cum completitudinea de spațiu metrică e echivalentă cu proprietatea lui Heine-Borel (orice mulțime închisă și mărginită e compactă), obținem:

Corolarul 12.4.28. *O varietate Riemann compactă e completă.*

Exercițiul 12.4.29. Fie $M \rightarrow B$ o acoperire riemanniană. Atunci M e completă dacă și numai dacă B e completă. În particular, acoperirea universală a unei varietăți riemanniene complete e completă.

Exercițiul 12.4.30. Un con riemannian (vezi Exemplul 12.3.5) e complet dacă și numai dacă $(N, g) = (S^n, can)$.

Observația 12.4.31. E clar că o izometrie (aplicație diferențiabilă, cu diferențiala în orice punct aplicație ortogonală) păstrează distanțele induse de metrici. Nu e, însă, deloc evident că o aplicație care păstrează distanțele e o izometrie. În primul rînd, nu e clar că ar trebui să fie diferențiabilă. Și totuși, cu ipoteze foarte blînde, așa stau lucrurile: *o aplicație surjectivă între două spații Riemann care păstrează distanțele induse de metricile respective este izometrie. În particular, e diferențiabilă.* Ceea ce înseamnă că distanța determină tensorul metric. Este o teoremă farte profundă a lui Meyers și Steenrod. Cititorul interesat poate găsi demonstrații, de exemplu, în [KN], vol. 1, sau în [He].

Bibliografie

- [Be] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, 1987.
- [BC] R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Academic Press, 1964.
- [BT] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, 1982.
- [Ca1] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [Ca2] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [Ch] S. S. Chern, *Curves and surfaces in Euclidean spaces*, Studies in global Analysis and geometry, The Math. Assoc. of America, 1967.
- [CCL] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, 2000.
- [Co] L. Conlon, *Differentiable manifolds. A first course*, Birkhäuser, 1993.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer, 1987.
- [GO] Ghe. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale*, vol. I-II, Ed. Academiei, 1976, 1979.
- [Gr] A. Girjoabă, *100 de probleme alese despre curbe și suprafețe*, Psihomedica, Sibiu, 2008.
- [Gr] M. J. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, W. A. Benjamin, 1967.
- [GP] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
- [Ha] A. Halanay, *Ecuatii diferențiale*, Ed. didactică și pedagogică, 1973.
- [He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Amer.Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Ia1] S. Ianuș, *Curs de geometrie diferențială*, Univ. București, 1981.
- [Ia2] S. Ianuș, *Geometrie diferențială, cu aplicații în teoria relativității*, Ed. Academiei, 1983.
- [Jo] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer, 2002.
- [Ke] J. L. Kelley, *General topology*, Springer, 1975.
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I-II, Interscience, 1963, 1969.
- [KI] W. Klingenberg, *An introduction to differential geometry*, Springer, 1977.
- [La] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Univ. de Grenoble, 1996.
- [Le] J.M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, GSM **107**, Amer. Math. Soc., 2009.
- [Lc] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. **42** (1917), 173–205.
- [MR] J. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Springer, 1999.
- [Ma] M. Martin, *Introducere în geometria diferențială a curbelor și suprafețelor*, Univ. București 1976.
- [Mas] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer, 1977.
- [Mi1] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.
- [Mi2] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.
- [Mir] Șt. Mirică, *Ecuatii diferențiale*, Univ. București 1976, 1979.
- [MS] S.B. Myers, N.E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. Math. **40** (1939), 400–416.
- [Na] R. Narasimhan, *Analiză pe varietăți reale și complexe*, Theta, București, 2001.
- [ON] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [OP] J. Oprea, *Differential geometry and its applications. Second edition.*, Math. Assoc. Amer., 2007.
- [Po] M. Postnikov, *Leçons de géométrie, sém. III-V*, ed. Mir.

- [Ri] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **13**, 1867.
- [Sa] H. Samelson, *Orientability of hypersurfaces in \mathbb{R}^n* , Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 301–302.
- [Sp] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. I-V, Publish or Perish, 1971-1975.
- [Ta] C.H. Taubes, *Differential geometry. Bundles, Connections, Metrics and Curvature*, Oxford GTM 23, Oxford Univ. Press 2011.
- [Ta1] C.H. Taubes, *Metrics, connections and gluing theorems*, CBMS 89, AMS 1996.
- [Te] K. Teleman, *Metode și rezultate în geometria diferențială modernă*, Ed. Științifică și enciclopedică, 1979.
- [Va] I. Vaisman, *A first course in differential geometry*, Marcel Dekker, 1984.
- [Vr] G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. I-IV, Ed. Academiei, 1957-1968.
- [Wa] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.
- [Wo] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Boston, 1974.