CAPÍTULO 3

Funciones trascendentes

Es bien sabido que el problema central de toda la matemática moderna es el estudio de las funciones trascendentes definidas por ecuaciones diferenciales.

Felix Klein (1849-1925)
Lectures on Mathematics (1911)

Introducción Con excepción de las funciones trigonométricas, todas las funciones que hemos encontrado hasta ahora han sido de tres tipos principales: *polinomios*, *funciones racionales* (cocientes de polinomios) y *funciones algebraicas* (potencias fraccionarias de funciones racionales). En un intervalo de su dominio todas las funciones anteriores se pueden construir a partir de números reales y una sola variable real *x*, utilizando un número finito de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) y tomando raíces finitas (potencias fraccionarias). Las funciones que no se pueden construir de esta forma se denominan **funciones trascendentes**. Los únicos ejemplos de funciones de ese tipo que hemos visto hasta ahora son las funciones trigonométricas.

Una buena parte de la importancia del cálculo y de sus aplicaciones más útiles surge de la posibilidad de explicar el comportamiento de las funciones trascendentes que aparecen de forma natural al intentar modelar problemas concretos en términos matemáticos. Este capítulo está dedicado a desarrollar otras funciones trascendentes, entre las que se encuentran las funciones exponencial y logarítmica y las funciones trigonométricas inversas.

Algunas de estas funciones «deshacen» lo que otras «hacen» y viceversa. Cuando una pareja de funciones se comporta de esta forma, se denominan inversas entre sí. Comenzaremos el capítulo estudiando las funciones inversas en general.

3.1 Funciones inversas

Considere la función

$$f(x) = x^3$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 3.1. Como cualquier función, $f(x)$ toma sólo un valor para cada x de su dominio (la recta real completa $\mathbb{R}$). En términos geométricos, cualquier recta *vertical* cruza la gráfica de f en un único punto. Sin embargo, para esta función f, cualquier recta *horizontal* cruza también la gráfica en un único punto. Esto significa que diferentes valores de x siempre producen diferentes valores de $f(x)$. Esta función se denomina *uno a uno*.

DEFINICIÓN 1

Se dice que una función f es **uno a uno** si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que x_1 y x_2 pertenezcan al dominio de f y $x_1 \neq x_2$ o, de forma equivalente, si

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Si una función definida en un único intervalo es creciente (o decreciente), entonces es uno a uno (*véase* la Sección 2.6 para más detalles).

Sea la función $f(x) = x^3$ (Figura 3.1). Como la ecuación

$$y = x^3$$

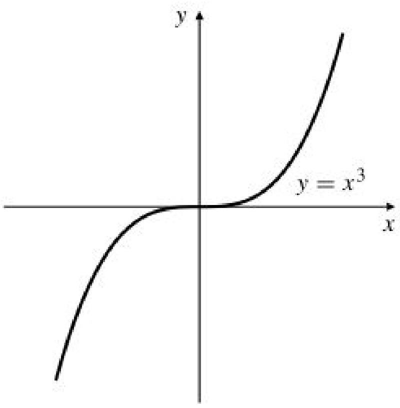


Figura 3.1 La gráfica de $f(x) = x^3$.

tiene una solución única x para todo valor dado y perteneciente al rango de f, f es uno a uno. Concretamente, esta solución se expresa como

$$x = y^{1/3}$$

y define x como función de y. Denominaremos a esta nueva función *inversa de* f y la indicaremos como f^{-1}. Es decir,

$$f^{-1}(y) = y^{1/3}$$

En general, si una función f es uno a uno, entonces para cualquier número y de su rango existirá siempre un único número x de su dominio tal que $y = f(x)$. Como x está determinado de forma única por y, es a su vez una función de y. Escribiremos $x = f^{-1}(y)$ y denominaremos f^{-1} a la inversa de f. La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 3.2(a) es uno a uno y tiene inversa. La función g cuya gráfica se muestra la Figura 3.2(b) no es uno a uno y no tiene inversa.

No hay que confundir el -1 de f^{-1} con un exponente. La función inversa f^{-1} *no* es el inverso $1/f$. Si deseamos indicar el inverso $1/f(x)$ con un exponente se puede escribir como $(f(x))^{-1}$.

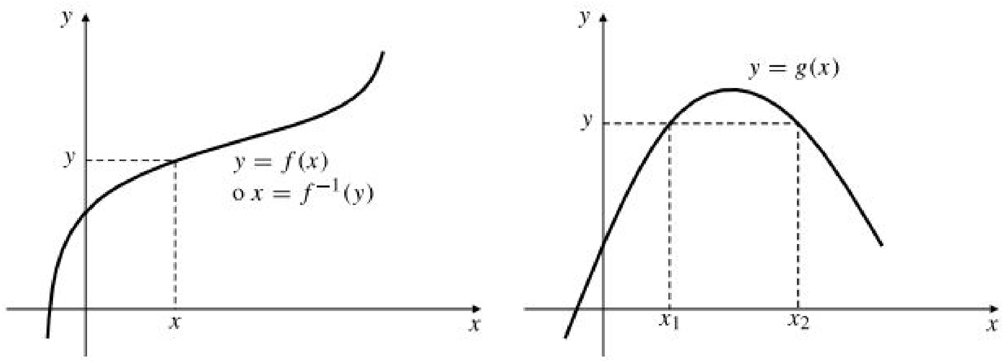


Figura 3.2 (a) f es uno a uno y tiene inversa. $y = f(x)$ significa lo mismo que $x = f^{-1}(y)$. (b) g no es uno a uno.

En general es preferible escribir las funciones denominando x en vez de y a la variable del dominio. Por tanto, invertiremos los papeles de x e y, y replantearemos la definición anterior como sigue.

DEFINICIÓN 2

Si f es uno a uno, entonces tiene **función inversa** f^{-1}. El valor de $f^{-1}(x)$ es el único número y del dominio de f para el que $f(y) = x$. Por tanto,

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

Como se ha visto antes, $y = x^3$ es equivalente a $x = y^{1/3}$ o, invirtiendo los papeles de x e y,

$$y = x^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^3$$

Ejemplo 1 Demuestre que $f(x) = 2x - 1$ es uno a uno y calcule su inversa $f^{-1}(x)$.

Solución Como $f'(x) = 2 > 0$ en $\mathbb{R}$, f es creciente y, por tanto, uno a uno. Sea $y = f^{-1}(x)$. Entonces,

$$x = f(y) = 2y - 1$$

Despejando y en esta ecuación se obtiene $y = \dfrac{x+1}{2}$. Por tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

■

Hay varias cosas que hay que recordar sobre la relación entre una función f y su inversa f^{-1}. La más importante es que las dos ecuaciones

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{y} \quad x = f(y)$$

son *lo mismo*. Son equivalentes de la misma forma que, por ejemplo, $y = x + 1$ y $x = y - 1$. Cualquiera de las ecuaciones se puede sustituir por la otra. Esto implica que el dominio de f^{-1} es el rango de f y viceversa.

La inversa de una función uno a uno es a su vez uno a uno y por tanto tiene también inversa. Por supuesto, la inversa de f^{-1} es f:

$$y = (f^{-1})^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

Se puede sustituir cualquiera de las ecuaciones $y = f^{-1}(x)$ o $x = f(y)$ en la otra y se obtienen las **identidades de cancelación**:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad f^{-1}(f(y)) = y$$

La primera de estas identidades es válida para todo x perteneciente al dominio de f^{-1} y la segunda para todo y perteneciente al dominio de f. Si S representa cualquier conjunto de números reales e I_S es la **función identidad** sobre S, definida como

$$I_S(x) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } S$$

entonces las identidades de cancelación indican que si $\mathcal{D}(f)$ es el dominio de f, entonces

$$f \circ f^{-1} = I_{\mathcal{D}(f^{-1})} \qquad \text{y} \qquad f^{-1} \circ f = I_{\mathcal{D}(f)}$$

siendo $f \circ g(x)$ la composición $f(g(x))$.

Si las coordenadas de un punto $P = (a, b)$ se cambian de orden para formar las de un nuevo punto $Q = (b, a)$, entonces cada punto corresponde a la reflexión del otro respecto a la recta $x = y$ (para ver esto, nótese que la recta PQ tiene pendiente -1, y por tanto es perpendicular a $y = x$. Además, el punto medio de PQ es $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$, que está en $y = x$). Se deduce, por tanto, que las gráficas de las ecuaciones $x = f(y)$ y $y = f(x)$ son reflexiones especulares con respecto a la recta $x = y$. Como la ecuación $x = f(y)$ es equivalente a $y = f^{-1}(x)$, las gráficas de las funciones f^{-1} y f son reflexiones especulares una de otra (*véase* la Figura 3.3).

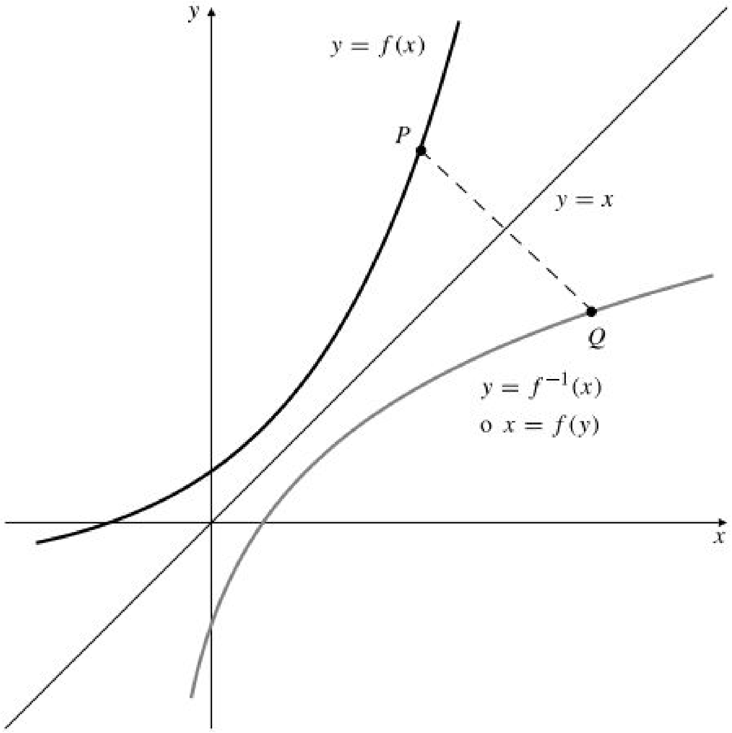


Figura 3.3 La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$.

Presentamos a continuación un resumen de las propiedades de las funciones inversas:

Propiedades de las funciones inversas

1. $y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$.
2. El dominio de f^{-1} es el rango de f.
3. El rango de f^{-1} es el dominio de f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f^{-1}.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f.
7. La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $x = y$.

Ejemplo 2 Demuestre que $g(x) = \sqrt{2x+1}$ es invertible, y calcule su inversa.

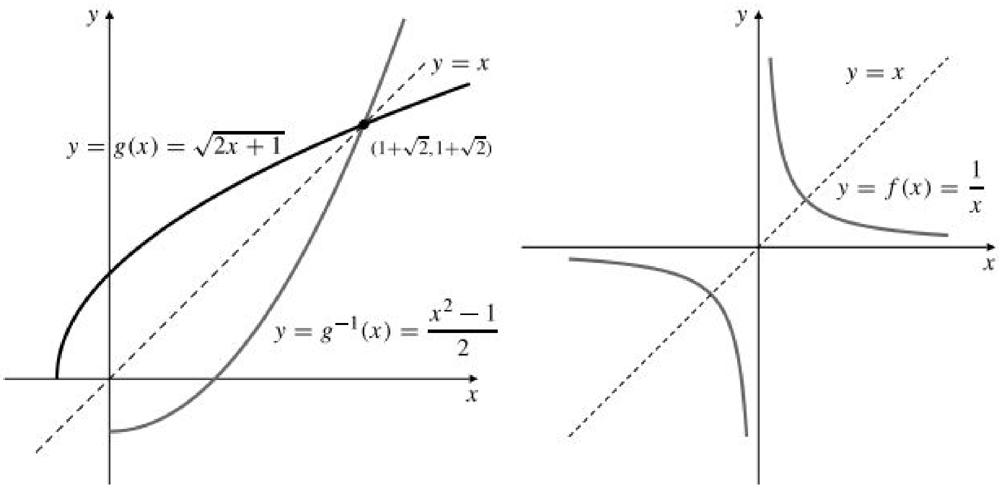
Solución Si $g(x_1) = g(x_2)$, entonces $\sqrt{2x_1+1} = \sqrt{2x_2+1}$. Elevando al cuadrado los dos miembros se obtiene $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, que implica que $x_1 = x_2$. Por tanto, g es uno a uno e invertible. Sea $y = g^{-1}(x)$; entonces

$$x = g(y) = \sqrt{2y+1}$$

de donde se deduce que $x \geqslant 0$ y $x^2 = 2y + 1$. Por tanto, $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ y

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2} \qquad \text{para } x \geqslant 0$$

(La restricción $x \geqslant 0$ se aplica, ya que el rango de g es $[0, \infty)$). *Véase* la Figura 3.4(a) que muestra las gráficas de g y de g^{-1}.



(a) (b)

Figura 3.4 (a) Gráfica de $g(x) = \sqrt{2x+1}$ y de su inversa.
(b) Gráfica de la función $f(x) = 1/x$, que es autoinversa.

DEFINICIÓN 3

Una función f es **autoinversa** si $f^{-1} = f$, es decir, si $f(f(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f.

Ejemplo 3 La función $f(x) = 1/x$ es autoinversa. Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = 1/y$. Por tanto, $y = 1/x$, y $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$ (*véase* la Figura 3.4(b)). La gráfica de cualquier función autoinversa debe ser su propio reflejo respecto a la recta $x = y$ y, por tanto, debe ser simétrica respecto a dicha recta.

Inversión de funciones que no son uno a uno

Muchas funciones importantes, como las funciones trigonométricas, no son uno a uno en todo su dominio. Es todavía posible definir la inversa para tales funciones, pero hay que restringir el dominio artificialmente de forma que la función con el dominio restringido sea uno a uno.

Consideremos como ejemplo la función $f(x) = x^2$. Sin restricciones, su dominio es toda la recta real y, por tanto, no es uno a uno ya que $f(-a) = f(a)$ para todo a. Definamos una nueva función $F(x)$ igual a $f(x)$ pero con un dominio menor, de forma que sea uno a uno. Podemos utilizar como dominio de F el intervalo $[0, \infty)$:

$$F(x) = x^2 \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant x < \infty$$

La Figura 3.5 muestra la gráfica de F. Es la mitad derecha de la parábola $y = x^2$, que es la gráfica de f. Evidentemente, F es uno a uno, por lo que tiene función inversa F^{-1} que se calcula como sigue:

Sea $y = F^{-1}(x)$, entonces $x = F(y) = y^2$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, $y = \sqrt{x}$. De aquí $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esta forma de restringir el dominio de una función que no es uno a uno para hacerla invertible se utilizará cuando invirtamos funciones trigonométricas en la Sección 3.5.

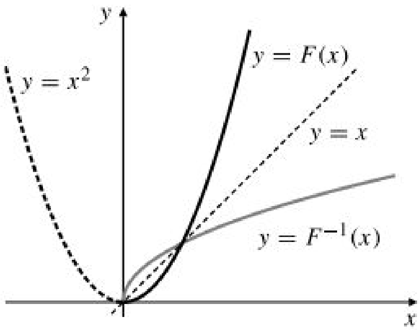


Figura 3.5 Restricción de F de x^2 a $[0, \infty)$ y su inversa F^{-1}.

Derivadas de funciones inversas

Supongamos que la función f es diferenciable en un intervalo (a, b) y que, o bien $f'(x) > 0$ para $a < x < b$, de forma que f es creciente en (a, b), o bien $f'(x) < 0$ para $a < x < b$, de forma que f es decreciente en (a, b). En ambos casos f es uno a uno en (a, b) y tiene inversa f^{-1}, definida como

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y), \qquad (a < y < b)$$

Como estamos suponiendo que la gráfica $y = f(x)$ tiene una tangente *no horizontal* en algún punto x en (a, b), su reflexión, que es la gráfica $y = f^{-1}(x)$, tiene una tangente *no vertical* en algún punto x del intervalo comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, f^{-1} es diferenciable en esos valores de x (Figura 3.6).

Sea $y = f^{-1}(x)$. Se desea obtener dy/dx. Se resuelve la ecuación $y = f^{-1}(x)$ en la forma $x = f(y)$ y se diferencia implícitamente con respecto a x, de modo que se obtiene

$$1 = f'(y)\,\frac{dy}{dx}, \qquad \text{por tanto,} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por tanto, la pendiente de la gráfica de f^{-1} en (x, y) es la inversa de la pendiente de la gráfica de f en (y, x) (Figura 3.6) y

$$\boxed{\frac{d}{dx}\, f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Con la notación de Leibniz se expresa como $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_x = \dfrac{1}{\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y = f^{-1}(x)}}$.

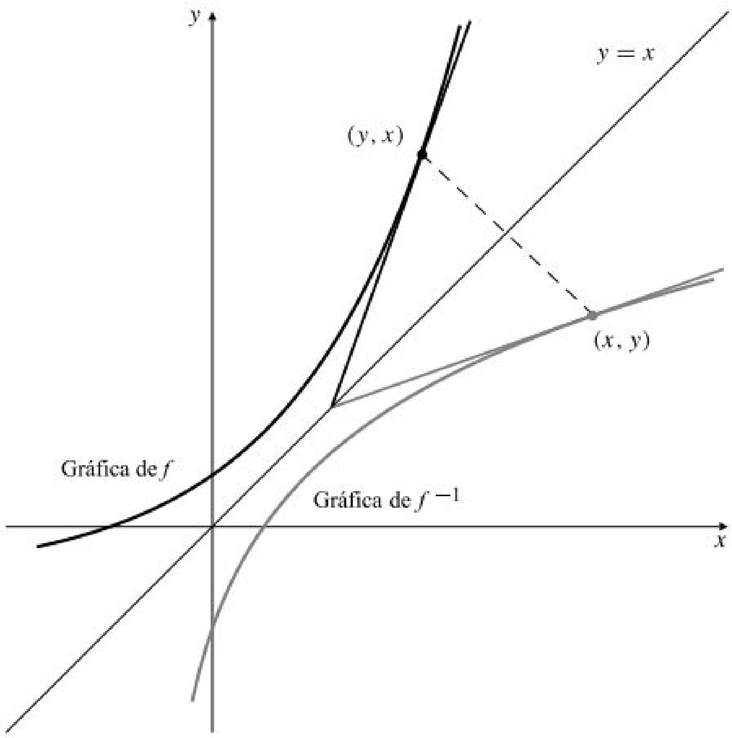


Figura 3.6 Tangentes de las gráficas de f y de f^{-1}.

Ejemplo 4 Demuestre que $f(x) = x^3 + x$ es uno a uno en toda la recta real, y, teniendo en cuenta que $f(2) = 10$, calcule $(f^{-1})'(10)$.

Solución Como $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x, f es creciente y, por tanto, uno a uno e invertible. Si $y = f^{-1}(x)$ entonces

$$x = f(y) = y^3 + y \quad \Rightarrow \quad 1 = (3y^2 + 1)y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

Como $x = f(2) = 10$, esto implica que $y = f^{-1}(10) = 2$. Por tanto,

$$(f^{-1})'(10) = \left.\frac{1}{3y^2 + 1}\right|_{y=2} = \frac{1}{13}$$

Ejercicios 3.1

Demuestre que las funciones f de los Ejercicios 1-12 son uno a uno, y calcule las funciones inversas f^{-1}. Especifique los dominios y los rangos de f y de f^{-1}.

1. $f(x) = x - 1$

2. $f(x) = 2x - 1$

3. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

4. $f(x) = -\sqrt{x - 1}$

5. $f(x) = x^3$

6. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

7. $f(x) = x^2, \quad x \leqslant 0$

8. $f(x) = (1 - 2x)^3$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

11. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 + x}$

12. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

En los Ejercicios 13-20, f es una función uno a uno cuya inversa es f^{-1}. Calcule las inversas de las funciones dadas en función de f^{-1}.

13. $g(x) = f(x) - 2$

14. $h(x) = f(2x)$

15. $k(x) = -3\,f(x)$

16. $m(x) = f(x - 2)$

17. $p(x) = \dfrac{1}{1 + f(x)}$

18. $q(x) = \dfrac{f(x) - 3}{2}$

19. $r(x) = 1 - 2\,f(3 - 4x)$

20. $s(x) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$

En los Ejercicios 21-23, demuestre en las funciones dadas son uno a uno y calcule sus inversas.

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

22. $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^{1/3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

23. $h(x) = x|x| + 1$

24. Calcule $f^{-1}(2)$ si $f(x) = x^3 + x$.

25. Calcule $g^{-1}(1)$ si $g(x) = x^3 + x - 9$.

26. Calcule $h^{-1}(-3)$ si $h(x) = x|x| + 1$.

27. Suponga que la función $f(x)$ cumple $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y que f es uno a uno. Si $y = f^{-1}(x)$, demuestre que $dy/dx = y$.

28. Calcule $(f^{-1})'(x)$ si $f(x) = 1 + 2x^3$.

29. Demuestre que $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 + 1}$ tiene inversa y calcule $(f^{-1})'(2)$.

*__30.__ Calcule $(f^{-1})'(-2)$ si $f(x) = x\sqrt{3 + x^2}$.

31. Si $f(x) = x^2/(1 + \sqrt{x})$, calcule, $f^{-1}(2)$ con una exactitud de cinco cifras decimales.

32. Si $g(x) = 2x + \operatorname{sen} x$, demuestre que g es invertible, y calcule $g^{-1}(2)$ y $(g^{-1})'(2)$ con una exactitud de cinco cifras decimales.

33. Demuestre que $f(x) = x \sec x$ es uno a uno en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. ¿Cuál es el dominio de $f^{-1}(x)$? Calcule $(f^{-1})'(0)$.

34. Si f y g tienen respectivamente como inversas f^{-1} y g^{-1}, demuestre que la inversa de la función compuesta $f \circ g$ es $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

*__35.__ ¿Para qué valores de las constantes a, b y c es autoinversa la función $f(x) = (x - a)/(bx - c)$?

*__36.__ ¿Puede ser autoinversa una función par? ¿Y una función impar?

*__37.__ En esta sección se ha dicho que una función creciente (o decreciente) definida en un único intervalo es necesariamente uno a uno. ¿Es necesariamente cierta la afirmación inversa? Explique por qué.

*__38.__ Repita el Ejercicio 37 con la suposición añadida de que f es continua en el intervalo donde está definida.

3.2 Las funciones exponencial y logarítmica

Comenzaremos considerando las funciones exponencial y logarítmica, que seguramente ya habremos encontrado en nuestros estudios anteriores de matemáticas. En las secciones que siguen presentaremos estas funciones desde diferentes puntos de vista y aprenderemos a calcular sus derivadas.

Exponenciales

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde la **base** a es una constante positiva y el **exponente** x es la variable. No hay que confundir estas funciones con las funciones **potenciales** como $f(x) = x^a$, en las que la base es variable y el exponente es constante. La función exponencial a^x se puede definir para exponentes x enteros y racionales, de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 4 Funciones exponenciales

Si $a > 0$, entonces

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ y } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

En esta definición, $\sqrt[n]{a}$ es el número $b > 0$ que cumple que $b^n = a$.

¿Cómo se puede definir a^x cuando x no es racional? Por ejemplo, ¿qué significa 2^π? Para calcular la derivada de a^x es necesario que la función esté definida para todos los números reales x, no sólo para los números racionales.

En la Figura 3.7 se muestran puntos con coordenadas $(x, 2^x)$ para muchos valores racionales de x muy cerca unos de otros. Parecen estar en una curva suave. La definición de a^x se puede extender a valores x no racionales de forma que a^x sea una función diferenciable de x en toda la recta real. Lo haremos en la sección siguiente. Por el momento, si x es irracional podemos pensar en a^x como el límite de los valores a^r para un conjunto de números racionales r que se aproximan a x:

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \text{ racional}}} a^r$$

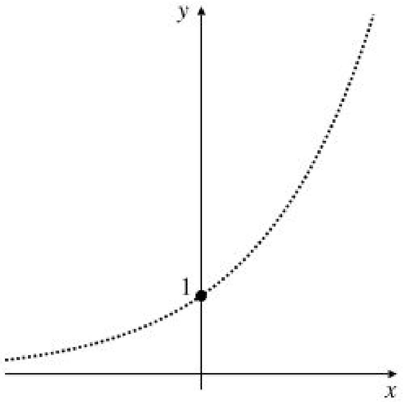


Figura 3.7 $y = 2^x$ para x racional.

Ejemplo 1 Como el número irracional $\pi = 3.141\,592\,653\,59...$ es el límite de la secuencia de números racionales

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3.1, \quad r_3 = 3.14, \quad r_4 = 3.141, \quad r_5 = 3.1415, \quad ...,$$

se puede calcular 2^π como el límite de la correspondiente secuencia

$$2^3 = 8, \quad 2^{3.1} = 8.574\,1877..., \quad 2^{3.14} = 8.815\,2499...$$

Se obtiene $2^\pi = \lim_{n \to \infty} 2^{r_n} = 8.824\,977\,827...$

Las funciones exponenciales cumplen varias identidades denominadas *leyes de los exponentes*:

Leyes de los exponentes

Sean $a > 0$ y $b > 0$, y x e y dos números reales cualesquiera; entonces,

(i) $a^0 = 1$ (ii) $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ (iv) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$ (vi) $(ab)^x = a^x b^x$

Estas identidades se pueden demostrar para el caso de exponentes racionales utilizando las definiciones anteriores. Son también verdaderas para exponentes irracionales, pero no podremos demostrarlo hasta la sección siguiente.

Si $a = 1$, entonces $a^x = 1^x = 1$ para todo x. Si $a > 1$, entonces a^x es una función creciente de x. Si $0 < a < 1$, entonces a^x es decreciente. La Figura 3.8(a) muestra las gráficas de algunas

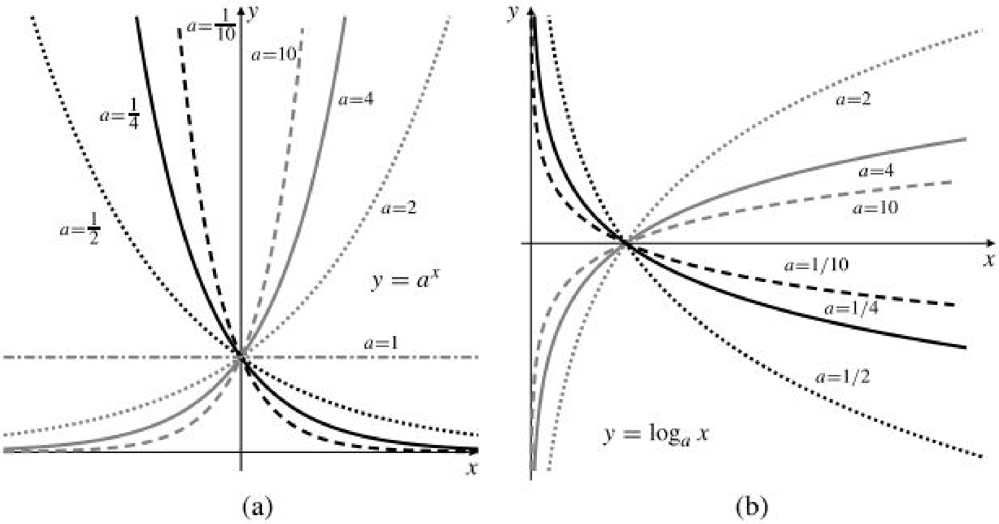


Figura 3.8 (a) Gráficas de algunas funciones exponenciales. (c) Gráficas de algunas funciones logarítmicas.

funciones exponenciales típicas. Todas ellas pasan por el punto (0, 1) ya que $a^0 = 1$ para todo $a > 0$. Obsérvese que $a^x > 0$ para todo $a > 0$ y para todo real x, y que

$$\text{Si} \quad a > 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty.$$

$$\text{Si} \quad 0 < a < 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = 0.$$

La gráfica de $y = a^x$ presenta una asíntota horizontal en el eje x si $a \neq 1$. Es asintótica por la izquierda (cuando $x \to -\infty$) si $a > 1$ y por la derecha (cuando $x \to \infty$) si $0 < a < 1$.

Logaritmos

La función $f(x) = a^x$ es una función uno a uno siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$. Por tanto, f tiene inversa que denominaremos *función logarítmica*.

DEFINICIÓN 5

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a x$, denominada **logaritmo en base a de x**, es la inversa de la función uno a uno a^x:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y, \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

Como el dominio de a^x es $(-\infty, \infty)$, el rango de $\log_a x$ es $(-\infty, \infty)$. Como el rango de a^x es $(0, \infty)$, el dominio de $\log_a x$ es $(0, \infty)$. Como a^x y $\log_a x$ son funciones inversas, se cumplen las siguientes **identidades de cancelación**:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \text{ real} \qquad \text{y} \qquad a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo} \quad x > 0$$

La Figura 3.8(b) muestra las gráficas de algunas funciones logarítmicas típicas. Todas pasan por el punto (1, 0). Cada una de ellas es la reflexión con respecto a la recta $y = x$ de la correspondiente gráfica exponencial de la Figura 3.8(a).

A partir de las leyes de los exponentes se pueden obtener las siguientes leyes de los logaritmos:

Leyes de los logaritmos

Si $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces

(i) $\log_a 1 = 0$ (ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(iii) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$ (iv) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(v) $\log_a(x^y) = y\log_a x$ (vi) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo 2 Si $a > 0$, $x > 0$ e $y > 0$, verifique que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, utilizando las leyes de los exponentes.

Solución Sean $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$. Por la propiedad de definición de funciones inversas, $x = a^u$ y $y = a^v$. Por tanto, $xy = a^u a^v = a^{u+v}$. Invirtiendo de nuevo, se obtiene $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. ■

La ley (vi) de los logaritmos, presentada anteriormente, demuestra que si se conocen los logaritmos en una base particular b se pueden calcular los logaritmos en cualquier otra base a. Las calculadoras científicas disponen en general de programas para calcular logaritmos en base 10 y en base e, un número especial que presentaremos en la Sección 3.3. Los logaritmos en cualquier otra base se pueden calcular utilizando cualquiera de esas funciones. Por ejemplo, los especialistas en computadores necesitan a veces utilizar logaritmos en base 2. Utilizando una calculadora científica, se puede calcular rápidamente

$$\log_2 13 = \frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 2} = \frac{1.113\,943\,352\,31...}{0.301\,029\,995\,664...} = 3.700\,439\,718\,14...$$

Las leyes de los logaritmos se pueden utilizar en algunas ocasiones para simplificar expresiones complicadas.

Ejemplo 3 Simplifique

(a) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15$, (b) $\log_{a^2} a^3$ y (c) $3^{\log_9 4}$.

Solución

(a) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 \dfrac{10 \times 12}{15}$ (leyes (ii) y (iv))

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3 = 3$ (identidad de cancelación)

(b) $\log_{a^2} a^3 = 3\log_{a^2} a$ (ley (v))

$= \dfrac{3}{2}\log_{a^2} a^2$ (ley (v) de nuevo)

$= \dfrac{3}{2}.$ (identidad de cancelación)

(c) $3^{\log_9 4} = 3^{(\log_3 4)/(\log_3 9)}$ (ley (vi))

$= (3^{\log_3 4})^{1/\log_3 9}$

$= 4^{1/\log_3 3^2} = 4^{1/2} = 2$ (identidad de cancelación) ■

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $3^{x-1} = 2^x$.

Solución Tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación en cualquier base a se obtiene

$$(x-1)\log_a 3 = x\log_a 2$$
$$(\log_a 3 - \log_a 2)x = \log_a 3$$
$$x = \frac{\log_a 3}{\log_a 3 - \log_a 2} = \frac{\log_a 3}{\log_a (3/2)}$$

El valor numérico de x se puede obtener utilizando la función «log» en una calculadora científica (esta función es $\log_{10}$). El valor es $x = 2.7095...$

De la misma forma que las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas tienen también un comportamiento asintótico. Todas sus gráficas son asintóticas con el eje y a medida que $x \to 0$ por la derecha:

$$\text{Si} \quad a > 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty.$$
$$\text{Si} \quad 0 < a < 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x\to 0+} \log_a x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty.$$

Ejercicios 3.2

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 1-18.

1. $\dfrac{3^3}{\sqrt{3^5}}$

2. $2^{1/2}8^{1/2}$

3. $(x^{-3})^{-2}$

4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$

5. $\log_5 125$

6. $\log_4\left(\dfrac{1}{8}\right)$

7. $\log_{1/3} 3^{2x}$

8. $2^{\log_4 8}$

9. $10^{-\log_{10}(1/x)}$

10. $x^{1/(\log_a x)}$

11. $(\log_a b)(\log_b a)$

12. $\log_x(x(\log_y y^2))$

13. $(\log_4 16)(\log_4 2)$

14. $\log_{15} 75 + \log_{15} 3$

15. $\log_6 9 + \log_6 4$

16. $2\log_3 12 - 4\log_3 6$

17. $\log_a(x^4 + 3x^2 + 2) + \log_a(x^4 + 5x^2 + 6)$
$\quad -4\log_a\sqrt{x^2+2}$

18. $\log_\pi(1 - \cos x) + \log_\pi(1 + \cos x) - 2\log_\pi \operatorname{sen} x$

Utilice las funciones logaritmo y exponencial con base 10, 10^x y $\log x (= \log_{10} x)$, de una calculadora científica para evaluar las expresiones o resolver las ecuaciones de los Ejercicios 19-24.

19. $3^{\sqrt{2}}$

20. $\log_3 5$

21. $2^{2x} = 5^{x+1}$

22. $x^{\sqrt{2}} = 3$

23. $\log_x 3 = 5$

24. $\log_3 x = 5$

Utilice las leyes de los exponentes para demostrar las leyes de los logaritmos en los Ejercicios 25-28.

25. $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$

26. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

27. $\log_a(x^y) = y\log_a x$

28. $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$

29. Despeje x en $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \dfrac{1}{2}$.

30. Despeje x en $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

Evalúe los límites de los Ejercicios 31-34.

31. $\lim_{x\to\infty} \log_x 2$

32. $\lim_{x\to 0+} \log_x(1/2)$

33. $\lim_{x\to 1+} \log_x 2$

34. $\lim_{x\to 1-} \log_x 2$

***35.** Suponga que $f(x) = a^x$ es diferenciable en $x = 0$ y que $f'(0) = k$, siendo $k \neq 0$. Demuestre que f es diferenciable en cualquier número real x y que

$$f'(x) = ka^x = kf(x)$$

***36.** Continuando con el Ejercicio 35, demuestre que $f^{-1}(x) = \log_a x$ es diferenciable en cualquier $x > 0$ y que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{kx}$$

3.3 La exponencial y el logaritmo natural

En esta sección vamos a definir la función $\ln x$, denominada logaritmo *natural* de x, de una forma que en principio parece no tener nada que ver con los logaritmos considerados en la Sección 3.2. Sin embargo, demostraremos que tiene las mismas propiedades que esos logaritmos, y al final veremos que $\ln x = \log_e x$, el logaritmo de x en una cierta base específica e. Demostraremos que $\ln x$ es una función uno a uno, definida para todos los números reales positivos. Por lo tanto, debe tener una función inversa, e^x, que denominaremos función exponencial. Nuestro objetivo final es llegar a una definición de la función exponencial a^x (para cualquier $a > 0$) que sea válida para todo número real x, en vez de sólo para números racionales, y que sea continua e incluso diferenciable sin tener que suponer esas propiedades como hicimos en la Sección 3.2.

El logaritmo natural

La Tabla 1 muestra las derivadas de las potencias enteras de x. Esas derivadas son múltiplos de potencias enteras de x, pero hay una potencia entera, x^{-1}, que está ausente de esta lista de derivadas. Todavía no conocemos ninguna función cuya derivada sea $x^{-1} = 1/x$. Vamos a remediar esta situación definiendo una función $\ln x$ tal que su derivada sea $1/x$.

Tabla 1. Derivadas de potencias enteras

$f(x)$	$f'(x)$
$\vdots$	$\vdots$
x^4	$4x^3$
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x^1	$1x^0 = 1$
x^0	0
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-2}	$-2x^{-3}$
x^{-3}	$-3x^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$

Para tener una idea de cómo se puede hacer esto, revisemos el Ejemplo 1 de la Sección 2.11. En ese ejemplo demostramos que el área bajo la gráfica de la velocidad de un objeto móvil en un intervalo de tiempo es igual a la distancia recorrida por el objeto en dicho intervalo. Como la derivada de la distancia es la velocidad, la medida del área nos proporcionó una forma de obtener una función (la distancia) que tenía una derivada dada (la velocidad). Esta relación entre área y derivadas es una de las ideas más importantes en cálculo. Se denomina **Teorema Fundamental del Cálculo**. Lo consideraremos en detalle en el Capítulo 5, pero haremos uso de esta idea ahora para definir $\ln x$, cuya derivada queremos que sea $1/x$.

DEFINICIÓN 6 El logaritmo natural

Para $x > 0$, sea A_x el área de la región plana encerrada por la curva $y = 1/t$, el eje t y las rectas verticales $t = 1$ y $t = x$. La función $\ln x$ se define como

$$\ln x = \begin{cases} A_x & \text{si } x \geqslant 1, \\ -A_x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

y se muestra en la Figura 3.9.

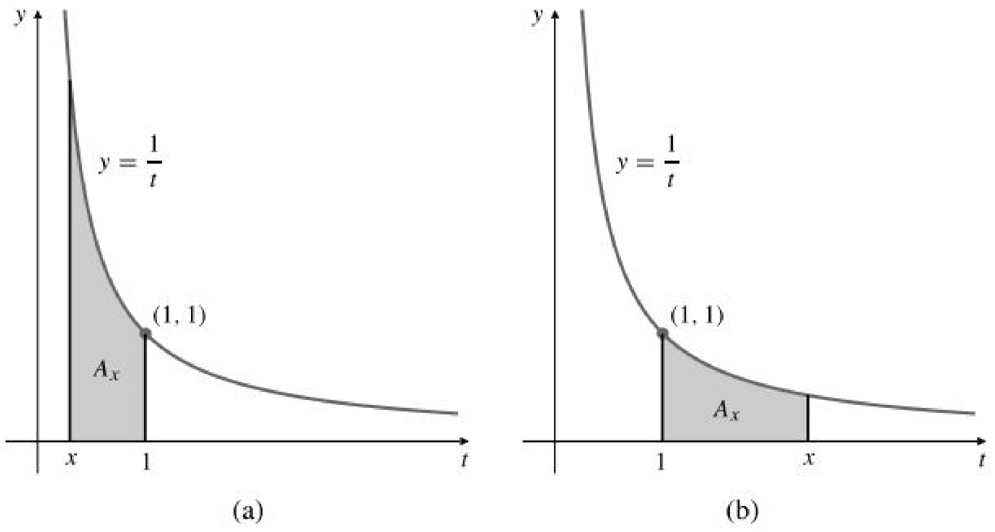


Figura 3.9
(a) $\ln x = -$área A_x si $0 < x < 1$
(b) $\ln x =$ área A_x si $x \geqslant 1$

La definición implica que $\ln 1 = 0$, que $\ln x > 0$ si $x > 1$, que $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ y que es una función uno a uno. Ahora demostraremos que si $y = \ln x$, entonces $y' = 1/x$. La demostración de este resultado es similar a la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo que proporcionaremos en la Sección 5.5.

TEOREMA 1 Si $x > 0$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

DEMOSTRACIÓN Para $x > 0$ y $h > 0$, $\ln(x + h) - \ln x$ es el área de la región plana limitada por $y = 1/t$, $y = 0$, y las rectas verticales $t = x$ y $t = x + h$. Corresponde al área sombreada en la Figura 3.10. Comparando esta área con la de los dos rectángulos se puede ver que

$$\frac{h}{x+h} < \text{área sombreada} = \ln(x + h) - \ln x < \frac{h}{x}$$

Por tanto, el cociente de Newton de $\ln x$ cumple

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x}$$

Haciendo que h tienda a cero por la derecha, se obtiene (por el Teorema del Sándwich aplicado a límites unilaterales)

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

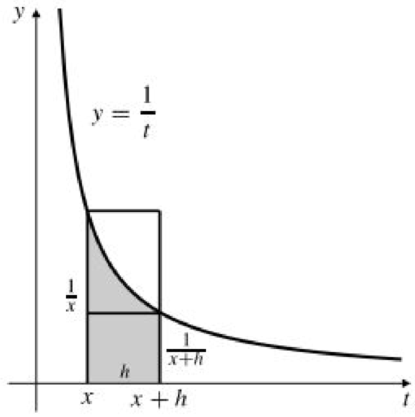


Figura 3.10

Un argumento similar permite demostrar que si $0 < x + h < x$, entonces

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x+h}$$

por lo que

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Combinando estos dos límites laterales se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Las dos propiedades $(d/dx)\ln x = 1/x$ y $\ln 1 = 0$ son suficientes para determinar completamente la función $\ln x$ (esto se deduce del Teorema 13 de la Sección 2.6). A partir de estas dos propiedades se puede deducir que $\ln x$ cumple las leyes apropiadas de los logaritmos.

TEOREMA 2 **Propiedades del logaritmo natural**

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (ii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

(iii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ (iv) $\ln(x^r) = r\ln x$

Como no deseamos *suponer* que las exponenciales son continuas (como hicimos en la Sección 3.2), diremos por el momento que (iv) sólo es válido para exponentes r que sean números racionales.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos el apartado (i), ya que los otros apartados se demuestran por el mismo método. Si $y > 0$ es una constante, entonces por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}(\ln(xy) - \ln x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{para todo } x > 0$$

El Teorema 13 de la Sección 2.6 indica que $\ln(xy) - \ln x = C$ (una constante) para $x > 0$. Haciendo $x = 1$ se tiene $C = \ln y$ y se deduce la identidad (i).

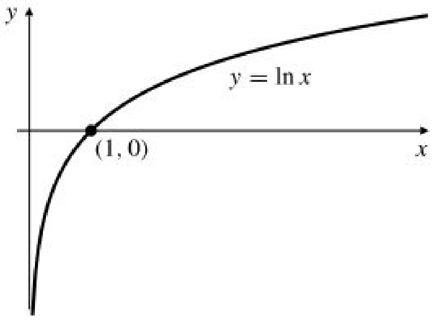


Figura 3.11 Gráfica de $\ln x$.

El apartado (iv) del Teorema 2 demuestra que $\ln(2^n) = n\ln 2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, tenemos también que $\ln(1/2)^n = -n\ln 2 \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Como $(d/dx)\ln x = 1/x > 0$ para $x > 0$, se deduce que $\ln x$ es creciente, por lo que debemos tener (*véase* la Figura 3.11)

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

Ejemplo 1 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Teniendo en cuenta lo anterior calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$.

Solución Si $x > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

por el Teorema 1. Si $x < 0$, entonces, utilizando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Por tanto, $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$, y en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Ejemplo 2 Calcule las derivadas de (a) $\ln|\cos x|$ y (b) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Simplifique sus respuestas tanto como sea posible.

Solución

(a) Utilizando el resultado del Ejemplo 1 y la Regla de la Cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\ln|\cos x| = \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -\tan x$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) &= \frac{1}{x + \sqrt{2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

La función exponencial

La función $\ln x$ es uno a uno en su dominio, el intervalo $(0, \infty)$, por lo que tiene inversa en dicho intervalo. Por el momento, denominaremos a su inversa $\exp x$. Entonces,

$$y = \exp x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \quad (y > 0)$$

Como $\ln 1 = 0$, tenemos que $\exp 0 = 1$. El dominio de exp es $(-\infty, \infty)$, el rango de ln. El rango de exp es $(0, \infty)$, el dominio de ln. Tenemos las siguientes identidades de cancelación:

$$\ln(\exp x) = x \quad \text{para todo } x \text{ real} \quad \text{y} \quad \exp(\ln x) = x \quad \text{para } x > 0$$

Se pueden deducir varias propiedades de exp a partir de las propiedades correspondientes de ln. No es sorprendente que sean propiedades que podría esperarse tuviera la función exponencial.

TEOREMA 2 Propiedades de la función exponencial

(i) $(\exp x)^r = \exp(rx)$ (ii) $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$

(iii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (iv) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

Por el momento, la identidad (i) sólo es válida para números r racionales.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos la identidad (i). Las restantes son similares. Si $u = (\exp x)^r$, entonces, por el Teorema 2(iv), $\ln u = r \ln(\exp x) = rx$. Por tanto, $u = \exp(rx)$.

Presentamos a continuación una definición muy importante:

$$\text{Sea} \quad e = \exp(1)$$

El número e cumple $\ln e = 1$, por lo que el área limitada por la curva $y = 1/t$, el eje t y las rectas verticales $t = 1$ y $t = e$ debe ser igual a una unidad cuadrada. *Véase* la Figura 3.12. El número e es uno de los más importantes en matemáticas. Como el número π, es irracional y no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales (estos números se denominan **trascendentes**). Su valor está entre 2 y 3 y sus cifras iniciales son

$$e = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45...$$

Mas adelante veremos que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

fórmula mediante la que se puede calcular el valor de e con cualquier precisión deseada.

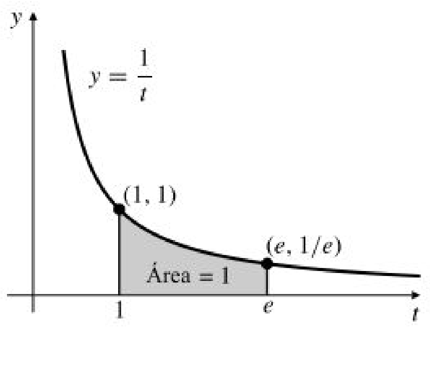


Figura 3.12 Definición de e.

El Teorema 3(i) indica que $\exp r = \exp(1r) = (\exp 1)^r = e^r$ se cumple para todo número racional r. Realizaremos ahora una observación crucial. Sólo conocemos el significado de e^r si r es un número racional (si $r = m/n$, entonces $e^r = \sqrt[n]{e^m}$). Pero $\exp x$ está definida para todo x *real*, sea racional o no. Como $e^r = \exp r$ cuando r es racional, se puede usar $\exp x$ como *definición* de lo que significa e^x para cualquier número real x, y no habrá contradicción en el caso de que x sea racional.

$$e^x = \exp x \qquad \text{para todo } x \text{ real}$$

El Teorema 3 se puede reformular en términos de e^x:

$$\text{(i)} \quad (e^x)^y = e^{xy} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

$$\text{(iii)} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad\qquad \text{(iv)} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

La gráfica de e^x es la reflexión de la gráfica de su inversa, $\ln x$, respecto a la recta $y = x$. La Figura 3.13 permite comparar ambas gráficas. Obsérvese que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = e^x$ cuando $x \to -\infty$. Tenemos que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

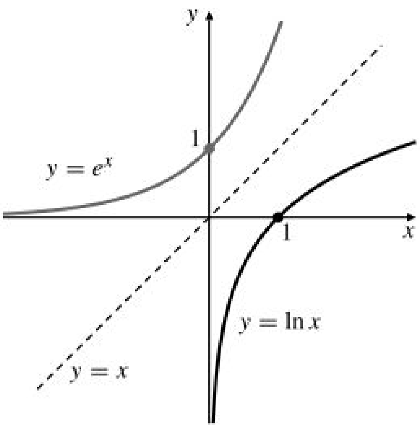


Figura 3.13 Gráficas de e^x y $\ln x$.

Como $\exp x = e$ *es* realmente una función exponencial, su inversa *es* realmente un logaritmo:

$$\ln x = \log_e x$$

La derivada de $y = e^x$ se calcula por diferenciación implícita:

$$
\begin{aligned}
y = e^x \quad &\Rightarrow \quad x = \ln y \\
&\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y = e^x
\end{aligned}
$$

Por tanto, la función exponencial tiene la destacable propiedad de que es su propia derivada y, por tanto, también su propia primitiva:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$$

Ejemplo 3 Calcule las derivadas de

(a) e^{x^2-3x}, (b) $\sqrt{1+e^{2x}}$ y (c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Solución

(a) $\dfrac{d}{dx}\, e^{x^2-3x} = e^{x^2-3x}(2x-3) = (2x-3)e^{x^2-3x}$

(b) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+e^{2x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\,(e^{2x}(2)) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-(-e^{-x})) - (e^x-e^{-x})(e^x+(-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2 - [(e^x)^2 - 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2]}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{4e^{x-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 Sea $f(t) = e^{at}$. Calcule (a) $f^{(n)}(t)$ y (b) $\int f(t)\,dt$.

Solución (a) Tenemos que
$$\begin{aligned}f'(t) &= ae^{at}\\ f''(t) &= a^2e^{at}\\ f'''(t) &= a^3e^{at}\\ &\vdots\\ f^{(n)}(t) &= a^ne^{at}.\end{aligned}$$

(b) Además, $\displaystyle\int f(t)\,dt = \int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\,e^{at} + C$, ya que $\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{1}{a}\,e^{at} = e^{at}$.

■

Exponenciales y logaritmos generales

Podemos utilizar el hecho de que e^x está ahora definido para *todo* número real x, para definir la exponencial arbitraria a^x (siendo $a > 0$) para todo número real x. Si r es racional, entonces $\ln(a^r) = r\ln a$, y, por tanto, $a^r = e^{r\ln a}$. Sin embargo, $e^{x\ln a}$ está definido para todo número real x, por lo que podemos utilizarlo como definición de a^x, sin posibilidad de que surja contradicción si x es racional.

DEFINICIÓN 7 **La exponencial general a^x**

$$a^x = e^{x\ln a}, \qquad (a > 0, \quad x \text{ real})$$

Ejemplo 5 Evalúe 2^π, utilizando las teclas del logaritmo natural (ln) y de la exponencial (exp o e^x) de una calculadora científica, pero no utilizando las teclas y^x o ^.

Solución $2^\pi = e^{\pi\ln 2} = 8.824\,977\,8\ldots$ Si la calculadora tiene una tecla ^ o teclas x^y o y^x, es posible que las funciones estén implementadas utilizando a su vez las funciones exp y ln.

■

Las leyes de los exponentes para a^x, tal como se presentaron en la Sección 3.2, se pueden obtener ahora a partir de las de e^x, y también como la derivada:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$$

También podemos verificar la Regla General de la Potencia para x^a, siendo a un número real, siempre que $x > 0$.

$$\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}e^{a\ln x} = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}$$

No se debe confundir x^π, que es una función potencial de x, con π^x, que es una función exponencial de x.

Ejemplo 6 Demuestre que la gráfica de $f(x) = x^\pi - \pi^x$ tiene pendiente negativa en $x = \pi$.

Solución $f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln \pi$

$f'(\pi) = \pi\pi^{\pi-1} - \pi^\pi \ln \pi = \pi^\pi(1 - \ln \pi)$.

Como $\pi > 3 > e$, tenemos que $\ln \pi > \ln e = 1$, por lo que $1 - \ln \pi < 0$. Como $\pi^\pi = e^{\pi \ln \pi} > 0$, tenemos que $f'(\pi) < 0$. Por tanto, la gráfica de $y = f(x)$ tiene pendiente negativa en $x = \pi$. ■

Ejemplo 7 Calcule el punto crítico de $y = x^x$.

Solución No se puede diferenciar x^x tratándolo como una potencia (como x^a), ya que el exponente varía. Tampoco se puede tratar como una función exponencial (como a^x) porque la base varía. Pero podemos diferenciarlo si lo escribimos primero en términos de la función exponencial $x^x = e^{x\ln x}$ y utilizamos después la Regla de la Cadena y la Regla del Producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^x(1 + \ln x)$$

x^x está definida sólo para $x > 0$, y nunca vale 0 (¿por qué?). Por tanto, el punto crítico se produce cuando $1 + \ln x = 0$, es decir, $\ln x = -1$ o $x = 1/e$. ■

Finalmente, obsérvese que $(d/dx)a^x = a^x \ln a$ es negativo para todo x si $0 < a < 1$ y es positivo para todo x si $a > 1$. Por tanto, a^x es uno a uno y tiene función inversa, $\log_a x$, siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$. Sus propiedades se deducen de la misma forma que en la Sección 3.2. Si $y = \log_a x$, entonces $x = a^y$ y, utilizando diferenciación implícita con respecto a x, se obtiene

$$1 = a^y \ln a \frac{dy}{dx} = x\ln a \frac{dy}{dx}$$

Por tanto, la derivada de $\log_a x$ se expresa como

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

Como $\log_a x$ se puede expresar en función de logaritmos en cualquier otra base, por ejemplo e,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Normalmente sólo utilizaremos logaritmos naturales. No obstante, hay excepciones en química, acústica y otras ciencias donde se usan «escalas logarítmicas» para medir cantidades en las que un incremento de una unidad en la medida corresponde a multiplicar por 10 la cantidad. Para definir esas escalas se usan logaritmos en base 10. En ciencias de computación, donde las potencias de 2 tienen un papel central, los logaritmos en base 2 aparecen muy a menudo.

Diferenciación logarítmica

Supongamos que deseamos diferenciar una función de la forma

$$y = (f(x))^{g(x)} \qquad (\text{para } f(x) > 0)$$

Como la variable aparece tanto en la base como en el exponente, ni la regla general de la potencia, $(d/dx)x^a = ax^{a-1}$, ni la regla exponencial, $(d/dx)a^x = a^x \ln a$, se pueden aplicar directamente. Un método para calcular la derivada de una función como ésa es expresarla en la forma

$$y = e^{g(x) \ln f(x)}$$

y diferenciar después utilizando la Regla del Producto para el exponente. Éste es el método utilizado en el Ejemplo 7.

La derivada del Ejemplo 7 se puede obtener también tomando logaritmos naturales en los dos miembros de la ecuación $y = x^x$ y diferenciando implícitamente:

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

Esta última técnica se denomina **diferenciación logarítmica**.

Ejemplo 8 Calcule dy/dt si $y = (\operatorname{sen} t)^{\ln t}$, con $0 < t < \pi$.

Solución Tenemos que $\ln y = \ln t \operatorname{sen} t$. Entonces,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\ln \operatorname{sen} t + \ln t \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\ln \operatorname{sen} t}{t} + \ln t \cot t\right)$$

$$= (\operatorname{sen} t)^{\ln t}\left(\frac{\ln \operatorname{sen} t}{t} + \ln t \cot t\right)$$

La diferenciación logarítmica es también útil para calcular derivadas de funciones expresadas como productos y cocientes de muchos factores. Al tomar logaritmos se transforman los productos y cocientes en sumas y diferencias. Esto en general facilita el cálculo con respecto a la utilización de las Reglas del Producto y del Cociente, especialmente si la derivada debe calcularse en un punto concreto.

Ejemplo 9 Diferencie $y = [(x + 1)(x + 2)(x + 3)]/(x + 4)$.

Solución

$$\ln |y| = \ln |x + 1| + \ln |x + 2| + \ln |x + 3| - \ln |x + 4|$$

Entonces,

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$y' = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)}{x+4} + \frac{(x+1)(x+3)}{x+4} + \frac{(x+1)(x+2)}{x+4}$$

$$- \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+4)^2}$$

■

Ejemplo 10 Calcule $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}$ si $u = \sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$.

Solución

$$\ln u = \frac{1}{2}(\ln(x+1) + \ln(x^2+1) + \ln(x^3+1))$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+1}\right)$$

En $x = 1$ tenemos que $u = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Por tanto,

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

■

Ejercicios 3.3

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 1-10.

1. $e^3/\sqrt{e^5}$

2. $\ln(e^{1/2}e^{2/3})$

3. $e^{5\ln x}$

4. $e^{(3\ln 9)/2}$

5. $\ln\frac{1}{e^{3x}}$

6. $e^{2\ln\cos x} + \left(\ln e^{\operatorname{sen} x}\right)^2$

7. $3\ln 4 - 4\ln 3$

8. $4\ln\sqrt{x} + 6\ln(x^{1/3})$

9. $2\ln x + 5\ln(x-2)$

10. $\ln(x^2+6x+9)$

Despeje x en las ecuaciones de los Ejercicios 11-14.

11. $2^{x+1} = 3^x$

12. $3^x + 9^{1-x}$

13. $\frac{1}{2^x} = \frac{5}{8^{x+3}}$

14. $2^{x^2-3} = 4^x$

Obtenga los dominios de las funciones de los Ejercicios 15-16.

15. $\ln\frac{x}{2-x}$

16. $\ln(x^2-x-2)$

Resuelva las inecuaciones de los Ejercicios 17-18.

17. $\ln(2x-5) > \ln(7-2x)$

18. $\ln(x^2-2) \leqslant \ln x$

En los Ejercicios 19-48, diferencie las funciones dadas. Si es posible, simplifique sus respuestas.

19. $y = e^{5x}$

20. $y = xe^x - x$

21. $y = \frac{x}{e^{2x}}$

22. $y = x^2e^{x/2}$

23. $y = \ln(3x-2)$

24. $y = \ln|3x-2|$

25. $y = \ln(1+e^x)$

26. $f(x) = e^{(x^2)}$

27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

28. $x = e^{3t}\ln t$

29. $y = e^{(e^x)}$

30. $y = \frac{e^x}{1+e^x}$

31. $y = e^x \operatorname{sen} x$

32. $y = e^{-x}\cos x$

33. $y = \ln\ln x$

34. $y = x\ln x - x$

35. $y = x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$

36. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$

37. $y = 5^{2x+1}$

38. $y = 2^{(x^2-3x+8)}$

39. $g(x) = t^x x^t$

40. $h(t) = t^x - x^t$

41. $f(s) = \log_a(bs + c)$

42. $g(x) = \log_x(2x + 3)$

43. $y = x^{\sqrt{x}}$

44. $y = (1/x)^{\ln x}$

45. $y = \ln|\sec x + \tan x|$

46. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

47. $y = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x)$

48. $y = (\cos x)^x - x^{\cos x}$

49. Calcule la n-ésima derivada de $f(x) = xe^{ax}$.

50. Demuestre que la n-ésima derivada de $(ax^2 + bx + c)e^x$ es una función de la misma forma pero con diferentes constantes.

51. Calcule las cuatro primeras derivadas de e^{x^2}.

52. Calcule la n-ésima derivada de $\ln(2x + 1)$.

53. Diferencie (a) $f(x) = (x^x)^x$ y (b) $g(x) = x^{(x^x)}$. ¿Qué función crece más rápidamente cuando x crece?

*** 54.** Resuelva la ecuación $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a$, siendo $a > 0$. La torre de exponentes crece indefinidamente.

Utilice diferenciación logarítmica para calcular las derivadas que se piden en los Ejercicios 55-57.

55. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Obtenga $f'(x)$.

56. $F(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}$. Obtenga $F'(0)$.

57. $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$ Obtenga $f'(2)$. Obtenga también $f'(1)$.

58. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de $y = x^2e^{-x^2}$?

59. Sea $f(x) = xe^{-x}$. Determine dónde es f creciente y dónde es decreciente. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

60. Obtenga la ecuación de una recta de pendiente 4 que sea tangente a la gráfica de $y = \ln x$.

61. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a la curva $y = e^x$ y pase por el origen.

62. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a la curva $y = \ln x$ y pase por el origen.

63. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a $y = 2^x$ y pase por el punto $(1, 0)$.

64. ¿Para qué valores de $a > 0$ corta la curva $y = a^x$ a la recta $y = x$?

65. Calcule la pendiente de la curva $e^{xy}\ln\dfrac{x}{y} = x + \dfrac{1}{y}$ en $(e, 1/e)$.

66. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $xe^y + y - 2x = \ln 2$ en el punto $(1, \ln 2)$.

67. Calcule la derivada de $f(x) = Ax\cos\ln x + Bx\operatorname{sen}\ln x$. Utilice el resultado como ayuda para calcular las integrales indefinidas

$$\int \cos\ln x\,dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen}\ln x\,dx$$

*** 68.** Sea $F_{A,B}(x) = Ae^x\cos x + Be^x\operatorname{sen} x$. Demuestre que $(d/dx)F_{A,B}(x) = F_{A+B,B-A}(x)$.

*** 69.** Utilizando los resultados del Ejercicio 68, calcule

(a) $(d^2/dx^2)F_{A,B}(x)$ y (b) $(d^3/dx^3)e^x\cos x$.

*** 70.** Calcule $\dfrac{d}{dx}(Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\operatorname{sen} x)$ y utilice el resultado como ayuda para evaluar

(a) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ y (b) $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$.

71. Demuestre la identidad (ii) del Teorema 2 examinando la derivada del miembro izquierdo menos el miembro derecho como se hizo en la demostración de la identidad (i).

72. Deduzca la identidad (iii) del Teorema 2 a partir de las identidades (i) y (ii).

73. Demuestre la identidad (iv) del Teorema 2 para exponentes racionales r mediante el mismo método utilizado en el Ejercicio 71.

*** 74.** Sea $x > 0$ y sea $F(x)$ el área encerrada por la curva $y = t^2$, el eje t y las rectas verticales $t = 0$ y $t = x$. Utilizando el método de la demostración del Teorema 1, demuestre que $F'(x) = x^2$. A continuación, obtenga una fórmula explícita de $F(x)$. ¿Cuál es el área de la región encerrada por $y = t^2$, $y = 0$, $t = 0$ y $t = 2$?

*** 75.** Realice los siguientes pasos para demostrar que $2 < e < 3$. Sea $f(t) = 1/t$ para $t > 0$.

(a) Demuestre que el área por debajo $y = f(t)$, por encima de $y = 0$ y entre $t = 1$ y $t = 2$ es menor que una unidad cuadrada. Deduzca que $e > 2$.

(b) Demuestre que todas las tangentes a la gráfica de f están por debajo de dicha gráfica. *Sugerencia*: $f''(t) = 2/t^3 > 0$.

(c) Obtenga las rectas T_2 y T_3 que son tangentes a $y = f(t)$ en $t = 2$ y $t = 3$, respectivamente.

(d) Calcule el área A_2 por debajo de T_2 y por encima de $y = 0$, entre $t = 1$ y $t = 2$. Calcule también el área A_3 por debajo de T_3 y por encima de $y = 0$, entre $t = 2$ y $t = 3$.

(e) Demuestre que $A_2 + A_3 > 1$ unidad cuadrada. Deduzca que $e < 3$.

3.4 Crecimiento y decrecimiento

En esta sección estudiaremos el uso de funciones exponenciales para modelar las tasas de crecimiento de cantidades para las que dicha tasa de crecimiento está directamente relacionada con su tamaño. El crecimiento de estas cantidades está generalmente gobernado por ecuaciones diferenciales en cuya solución aparecen funciones exponenciales. Antes de entrar en materia, prepararemos el camino examinando la forma de crecimiento de las funciones exponencial y logarítmica.

Crecimiento de exponenciales y logaritmos

En la Sección 3.3 demostramos que tanto e^x como $\ln x$ crecen (hacia infinito) cuando x crece. Sin embargo e^x aumenta muy rápidamente cuando x crece, y $\ln x$ crece muy lentamente. De hecho, e^x crece, para x grande, más deprisa que cualquier potencia positiva de x (no importa lo grande que sea la potencia), mientras que $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x (no importa lo pequeña que sea la potencia). Para verificar este comportamiento comenzaremos por una inecuación que cumple $\ln x$. La recta $y = x - 1$ es tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto (1, 0). El teorema que sigue afirma que la curva está por debajo de esa recta (*véase* la Figura 3.14).

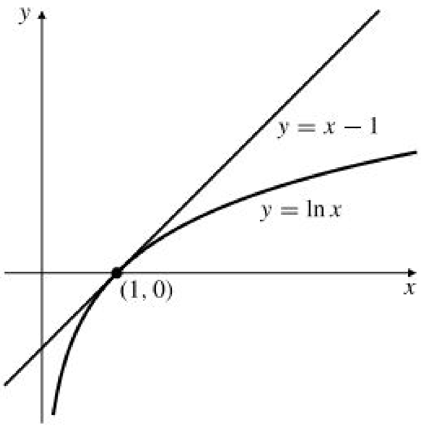


Figura 3.14 $\ln x \leqslant x - 1$ para $x > 0$.

TEOREMA 4 Si $x > 0$, entonces $\ln x \leqslant x - 1$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \ln x - (x - 1)$ para $x > 0$. Entonces $g(1) = 0$ y

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como se observó en la Sección 2.6, estas inecuaciones implican que g crece en (0, 1) y decrece en $(1, \infty)$. Por tanto, $g(x) \leqslant g(1) = 0$ para todo $x > 0$ y $\ln x \leqslant x - 1$ para esos valores de x.

TEOREMA 5 **Propiedades de crecimiento de exp y ln**

Si $a > 0$, entonces

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$

Cada uno de estos límites hace una afirmación sobre quién «gana» en una competición entre una exponencial o un logaritmo y una potencia. Por ejemplo, en el apartado (a), el denominador e^x crece cuando $x \to \infty$, por lo que hace que la fracción x^a/e^x tienda a 0. Por otra parte, si a es un número positivo grande, el numerador x^a también crece y hace que la fracción tienda a infinito. Lo que afirma el apartado (a) es que en esta competición entre la exponencial y la potencia, la exponencial es más fuerte y gana; por tanto, la fracción tiende a 0. La competición del Teorema 5 se puede expresar como sigue:

En una lucha entre una potencia y una exponencial, gana la exponencial.
En una lucha entre una potencia y un logaritmo, gana la potencia.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos primero el apartado (b). Sea $x > 1$, $a > 0$ y sea $s = a/2$. Como $\ln(x^s) = s\ln x$, tenemos que, utilizando el Teorema 4,

$$0 < s\ln x = \ln(x^s) \leqslant x^s - 1 < x^s$$

Por tanto, $0 < \ln x < \dfrac{1}{s}\, x^s$ y, dividiendo por $x^a = x^{2s}$,

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{1}{s}\,\frac{x^s}{x^{2s}} = \frac{1}{sx^s}$$

Pero $1/(sx^s) \to 0$ cuando $x \to \infty$ (ya que $s > 0$). Por tanto, por el Teorema del Sándwich,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

Seguidamente deduciremos el apartado (d) a partir del apartado (b) sustituyendo $x = 1/t$. Como $x \to 0+$ tenemos que $t \to \infty$, y

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1/t)}{t^a} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t^a} = -0 = 0$$

Ahora deduciremos el apartado (a) a partir del apartado (b). Si $x = \ln t$, entonces $t \to \infty$ cuando $x \to \infty$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^a}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t}{t^{1/a}}\right)^a = 0^a = 0$$

Finalmente, (c) se deduce de (a) mediante la sustitución $x = -t$:

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{t\to\infty} |-t|^a e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial

En muchos procesos naturales intervienen cantidades que crecen o decrecen con una velocidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, la masa de un cultivo de bacterias que crece en un medio que proporciona los nutrientes adecuados crecerá con una velocidad proporcional a dicha masa. El valor de una inversión con interés compuesto crece con una velocidad proporcional a dicho valor. La masa de material radiactivo no descompuesto en una muestra de crece con una velocidad proporcional a dicha masa.

Todos estos fenómenos, y otros que muestran un comportamiento similar, se pueden modelar matemáticamente de la misma forma. Si $y = y(t)$ indica el valor de una cantidad y en el instante t, y si y cambia con una velocidad proporcional a su tamaño, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

siendo k la constante de proporcionalidad. La ecuación anterior se denomina **ecuación diferencial de crecimiento o decrecimiento exponencial** ya que, para cualquier valor de la constante C, la función $y = Ce^{kt}$ cumple la ecuación. De hecho, si $y(t)$ representa cualquier solución de la ecuación diferencial $y' = ky$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{e^{kt}}\right) = \frac{e^{kt}y'(t) - ke^{kt}y(t)}{e^{2kt}} = \frac{y'(t) - ky(t)}{e^{kt}} = 0 \quad \text{para todo } t$$

Entonces $y(t)/e^{kt} = C$, una constante, e $y(t) = Ce^{kt}$. Como $y(0) = Ce^0 = C$,

El problema de valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tiene como solución única $y = y_0e^{kt}$

Si $y_0 > 0$, entonces $y(t)$ es una función creciente con t si $k > 0$ y es una función decreciente con t si $k < 0$. Se dice que la cantidad y presenta un **crecimiento exponencial** si $k > 0$ y un **decrecimiento exponencial** si $k < 0$. *Véase* la Figura 3.15.

Figura 3.15 Soluciones del problema de valor inicial $dy/dt = ky$, $y(0) = y_0$, para $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$.

■

Ejemplo 1 **(Crecimiento de un cultivo de células)** Cierto cultivo de células crece con una velocidad proporcional al número de células presentes. Si el cultivo contiene inicialmente 500 células y 800 tras 24 horas, ¿cuántas células habrá después de otras 12 horas?

Solución Sea $y(t)$ el número de células presentes t horas después del instante en el que había 500 células. Por tanto, $y(0) = 500$ y $y(24) = 800$. Como $dy/dt = ky$, tenemos que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 500e^{kt}$$

Por tanto, $800 = y(24) = 500e^{24k}$, con lo que $24k = \ln \frac{800}{500} = \ln(1.6)$. Se deduce que $k = (1/24)\ln(1.6)$ y

$$y(t) = 500e^{(t/24)\ln(1.6)} = 500(1.6)^{t/24}$$

Deseamos conocer el valor de y cuando $t = 36$: $y(36) = 500e^{(36/24)ln(1.6)} = 500(1.6)^{3/2} \approx 1012$. El número de células creció hasta 1012 doce horas después de que hubiera 800 células.

■

El crecimiento exponencial se caracteriza por un **tiempo de doblaje fijo**. Si T es el instante en el que y dobla el tamaño que tenía en $t = 0$, entonces $2y(0) = y(T) = y(0)e^{kT}$. Por tanto, $e^{kT} = 2$. Como $y(t) = y(0)e^{kt}$, tenemos que

$$y(t + T) = y(0)e^{k(t+T)} = e^{kT}y(0)e^{kt} = 2y(t)$$

es decir, siempre se requieren T unidades de tiempo para que y doble su valor. De forma similar, el decrecimiento exponencial requiere siempre un tiempo fijo para reducir el valor a la mitad (denominado generalmente **semivida**). Si $y(T) = \frac{1}{2}y(0)$, entonces $e^{kT} = \frac{1}{2}$ y

$$y(t + T) = y(0)e^{k(t+T)} = \frac{1}{2}\, y(t)$$

Ejemplo 2 **(Decaimiento radiactivo)** Un material radiactivo tiene una semivida de 1200 años. ¿Qué porcentaje de la radiactividad original de la muestra queda después de 10 años? ¿Cuántos años son necesarios para reducir la radiactividad en un 10%?

Solución Sea $p(t)$ el porcentaje de la radiactividad inicial después de t años. Entonces, $p(0) = 100$ y $p(1200) = 50$. Como la radiactividad decrece con una velocidad proporcional a sí misma, $dp/dt = kp$ y

$$p(t) = 100e^{kt}$$

Pero $50 = p(1200) = 100e^{1200k}$, por lo que

$$k = \frac{1}{1200}\ln\frac{50}{100} = -\frac{\ln 2}{1200}$$

El porcentaje que queda después de 10 años es

$$p(10) = 100e^{10k} = 100e^{-10(\ln 2)/1200} \approx 99.424$$

Si después de t queda el 90% de la radiactividad, entonces

$$90 = 100e^{kt}$$

$$kt = \ln\frac{90}{100}$$

$$t = \frac{1}{k}\ln(0.9) = -\frac{1200}{\ln 2}\ln(0.9) \approx 182.4$$

por lo que se requerirá un poco más de 182 años para reducir la radiactividad el 10%. ■

Algunas veces en el crecimiento o decrecimiento exponencial interviene una cantidad que cambia con una velocidad proporcional a la diferencia entre sí misma y un valor fijo:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - a)$$

En este caso se debería utilizar el cambio de la variable dependiente $u(t) = y(t) - a$ para convertir la ecuación diferencial a una forma estándar. Obsérvese que $u(t)$ cambia con la misma velocidad que $y(t)$ (es decir, $du/dt = dy/dt$), por lo que cumple

$$\frac{du}{dt} = ku$$

Ejemplo 3 **(Ley del enfriamiento de Newton)** Un objeto caliente que se introduce en un entorno más frío se enfriará con una velocidad proporcional al exceso de su temperatura con respecto a la del entorno. Si una taza de café situada en una habitación que se mantiene a una temperatura de 20 °C se enfría de 80 °C a 50 °C en cinco minutos, ¿cuánto tiempo tardará en enfriarse hasta 40 °C?

Solución Sea $y(t)$ la temperatura del café t minutos después del instante en el que estaba a 80 °C. Entonces $y(0) = 80$ y $y(5) = 50$. La ley de Newton indica que $dy/dt = k(y - 20)$ en este caso, por tanto $u(t) = y(t) - 20$. Entonces, $u(0) = 60$ y $u(5) = 30$. Tenemos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} - k(y - 20) = ku$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(t) &= 60e^{kt} \\ 30 = u(5) &= 60e^{5k} \\ 5k &= \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Deseamos calcular el instante t en el que $y(t) = 40$, es decir, $u(t) = 20$:

$$\begin{aligned} 20 = u(t) &= 60e^{-(t/5)\ln 2} \\ -\frac{t}{5}\ln 2 &= \ln\frac{20}{60} = -\ln 3 \\ t &= 5\,\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 7.92 \end{aligned}$$

El café tardará aproximadamente $7.92 - 5 = 2.92$ minutos en enfriarse de 50 °C a 40 °C. ∎

Interés de inversiones

Supongamos que se invierten 10 000 € con una tasa anual de interés del 8%. El valor de la inversión transcurrido un año será de $10\,000\,(1.08) = 10\,800$ €. Si esta cantidad se invierte un segundo año con la misma tasa de interés crecerá hasta valer $10\,000\,(1.08)^2 = 11\,664$. En general, n años después de la realización de la inversión original, el valor será $10\,000\,(1.08)^n$.

Supongamos ahora que el 8% de interés se *computa semianualmente*, de forma que el interés que realmente se paga es una tasa del 4% en un periodo de seis meses. Tras un año (dos periodos de interés) los 10 000 € habrán crecido hasta valer $10\,000\,(1.04)^2 = 10\,816$ €. Esto representa 16 € más que lo que se obtuvo cuando el 8% se calculó para todo un año. Los 16 € extra son el interés que se paga en el segundo periodo de seis meses por los 400 € ganados en el primer periodo de seis meses. Continuando de esta manera, si el 8% de interés se computa *mensualmente* (12 periodos al año y cada periodo con un interés de $\frac{8}{12}$%) o *diariamente* (365 periodos al año y cada periodo con un interés de $\frac{8}{365}$, entonces los 10.000 € originales crecerían en un año $10\,000\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{12} = 10\,830$ € o $10\,000\left(1 + \frac{8}{36\,500}\right)^{365} = 10\,832.78$ €, respectivamente.

Para cualquier tasa de interés *nominal*, la inversión crece más si el periodo de cómputo es más corto. En general una inversión original de A € invertida al r% anual y computada n veces al año crecerá en un año hasta

$$A\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n \text{ €}$$

Parece natural preguntarnos qué ocurrirá con nuestra inversión si hacemos que el número de periodos al año tienda a infinito, es decir, calculamos el interés de forma *continua*. La respuesta es que en un año A € crecerán hasta valer

$$A \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n = Ae^{r/100} \text{ €}$$

Por ejemplo, con un interés del 8% anual computado de forma continua, nuestros 10 000 € crecerán en un año hasta valer $10\,000\,e^{0.008} \approx 10\,832.87$ € (nótese que sólo son unos pocos céntimos más que cuando lo computamos diariamente). Para justificar este resultado necesitamos el siguiente teorema.

TEOREMA 6 Para todo número real x,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

DEMOSTRACIÓN Si $x = 0$, no hay nada que demostrar. Ambos miembros de la igualdad valen uno. Si $x \neq 0$, sea $h = x/n$. Cuando n tiende a infinito, h tiende a 0. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{x}{n}}\\
&= x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} && \text{(siendo } h = x/n\text{)}\\
&= x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} && \text{(ya que } \ln 1 = 0\text{)}\\
&= x\left(\frac{d}{dt}\ln t\right)\bigg|_{t=1} && \text{(por la definición de derivada)}\\
&= x\,\frac{1}{t}\bigg|_{t=1} = x
\end{aligned}$$

Como ln es diferenciable, es continuo. Por tanto, por el Teorema 7 de la Sección 1.4,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

Tomando exponenciales en los dos miembros se obtiene la fórmula requerida.

En el caso de $x = 1$ la fórmula dada en el Teorema 6 toma la siguiente forma:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Podemos utilizar esta fórmula para calcular aproximaciones a e, como se muestra en la Tabla 2. Al obtener los números de esta tabla hemos hecho trampa en cierto sentido. Se obtuvieron utilizando la función y^x en una calculadora científica. Sin embargo, esta función se calcula realmente como $e^{x\ln y}$. En todo caso, la fórmula de esta tabla no es una forma muy eficiente de calcular e con una gran precisión. Para $n = 100\,000$ sólo son correctas cuatro cifras decimales. Una forma mucho mejor es utilizar la serie

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots$$

como veremos en la Sección 4.8.

Tabla 2.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.593 74...
100	2.704 81...
1000	2.716 92...
10 000	2 718 15...
100 000	2.718 27...

Un comentario final sobre las tasas de interés. Las instituciones financieras algunas veces utilizan tasas de interés *efectivas* en vez de tasas de interés *nominales*. La tasa efectiva indica cuál será el efecto real de la tasa de interés transcurrido un año. Es decir, 10 000 € invertidos con una tasa efectiva del 8% crecerán hasta valer 10 800 € en un año, independientemente del periodo de cómputo. Una tasa nominal del 8% anual computada diariamente es equivalente a una tasa efectiva de aproximadamente 8.3278%.

Crecimiento logístico

Pocas cantidades en la naturaleza pueden sostener un crecimiento exponencial durante periodos extensos de tiempo. El crecimiento generalmente estará limitado por restricciones externas. Por ejemplo, supongamos que un pequeño número de conejos (de ambos sexos) se introduce en una pequeña isla donde no había conejos previamente, y donde no existen depredadores que puedan comerse a los conejos. En virtud de su fertilidad natural, el número de conejos podría crecer exponencialmente, pero este crecimiento al final estará limitado por la cantidad de alimento disponible para los conejos. Supongamos que la isla puede proporcionar suficiente alimento para sostener indefinidamente una población de L conejos. Si hay $y(t)$ conejos en la población en el instante t, podemos esperar que $y(t)$ crezca con una velocidad proporcional a $y(t)$ siempre que $y(t)$ sea lo suficientemente pequeño (mucho menor que L). Un posible modelo para este comportamiento es la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

que se denomina **ecuación logística** ya que modela un crecimiento limitado por el *suministro* de recursos necesarios. Obsérvese que $dy/dt > 0$ si $0 < y < L$ y que esta velocidad es pequeña si y es pequeña (hay pocos conejos para reproducirse) o si y tiene un valor cercano a L (hay casi tantos conejos como los recursos disponibles pueden alimentar). Obsérvese también que $dy/dt < 0$ si $y > L$. Si hay más animales de los que los recursos pueden alimentar, los conejos mueren con mayor velocidad que nacen. Por supuesto, las poblaciones en estado estacionario $y = 0$ y $y = L$ son soluciones de la ecuación logística; en ambos casos $dy/dt = 0$. En la Sección 7.9 examinaremos técnicas para resolver ecuaciones diferenciales como la ecuación logística. Por ahora, invitaremos al lector a verificar por diferenciación que la solución que cumple $y(0) = y_0$ es

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

Obsérvese que, como se esperaba, si $0 < y_0 < L$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = L, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$$

La solución dada anteriormente también sirve para $y_0 > L$. Sin embargo, esta solución no se aproxima a 0 cuando t tiende a $-\infty$ en este caso. Tiene una asíntota vertical en cierto valor negativo de t (*véase* el Ejercicio 30 posterior). La Figura 3.16 muestra varias gráficas de soluciones de la ecuación logística para varios valores positivos de y_0.

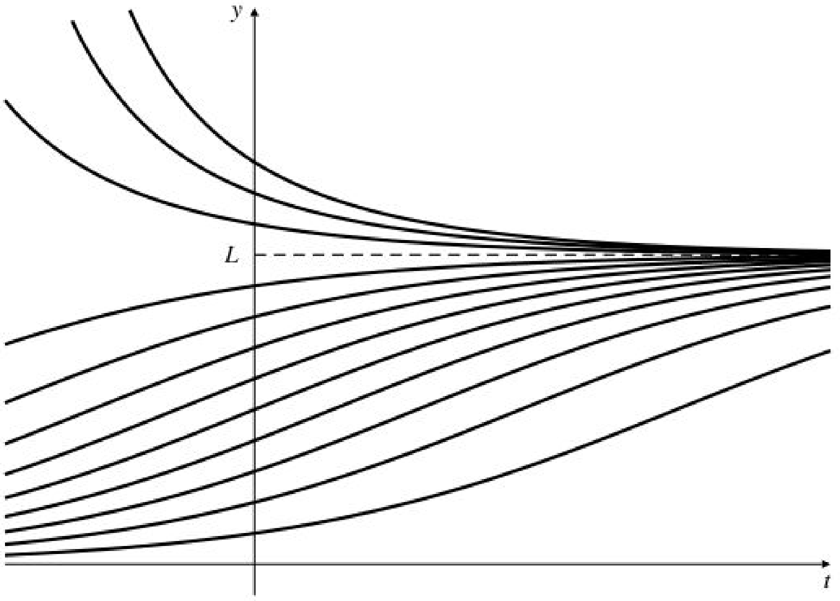


Figura 3.16 Algunas curvas logísticas.

Ejercicios 3.4

Calcule los límites de los Ejercicios 1-8.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-3}e^x$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 2e^{-x}}{x + 3e^{-x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

6. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln|x|)^2$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$

9. (Crecimiento bacteriano) Las bacterias de un cierto cultivo crecen con velocidad proporcional a la cantidad de bacterias presentes. Si inicialmente hay 100 bacterias presentes y la cantidad se dobla en una hora, ¿cuántas bacterias habrá después de hora y media?

10. (Disolución de azúcar) El azúcar se disuelve en el agua con velocidad proporcional a la cantidad que queda sin disolver. Si inicialmente hay 50 kilos de azúcar, y tras cinco horas sólo quedan 20 kilos, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que se disuelva el 90% del azúcar?

11. (Decaimiento radiactivo) Una sustancia radiactiva se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si el 30% de las sustancias se desintegra en 15 años, ¿cuál es la semivida de la sustancia?

12. (Semivida del radio) Si la semivida del radio es de 1690 años, ¿qué porcentaje de la cantidad presente quedará después de (a) 100 años, (b) 1000 años?

13. Calcule la semivida de una sustancia radiactiva si después de un año queda todavía el 99.57% de la cantidad inicial.

14. (Crecimiento bacteriano) En un cierto cultivo donde la velocidad del crecimiento de bacterias es proporcional al número presente, el número se triplica en tres días. Si al final del séptimo día hay 10 millones de bacterias presentes en el cultivo, ¿cuántas había inicialmente?

15. (Peso de un recién nacido) En las primeras semanas después de nacer, un bebé gana peso con velocidad proporcional a su peso. Un bebé que pesa cuatro kilos en el momento de nacer pesa 4.4 kilos después de dos semanas. ¿Cuánto pesaba el bebé cinco días después de nacer?

16. (Corriente eléctrica) Cuando se elimina la fuerza electromotriz en un circuito eléctrico simple que contiene inductancia y resistencia pero no capacitancia la velocidad de decrecimiento de la corriente es proporcional a dicha corriente. Si la corriente es $I(t)$ amperios t segundos después del corte, y si $I = 40$ cuando $t = 0$ y $I = 15$ cuando $t = 0.01$, obtenga una fórmula para $I(t)$.

17. (Interés compuesto) ¿Cuánto dinero hay que invertir hoy con una tasa de interés compuesto nominal del 4% para que crezca hasta un valor de 10.000 € en 7 años?

18. (Interés compuesto) El dinero invertido con interés compuesto (con cómputo instantáneo) se acumula con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si una inversión inicial de 1000 € crece hasta valer 1500 € exactamente en cinco años, calcule (a) el tiempo de doblaje de la inversión y (b) la tasa anual efectiva del interés que se paga.

19. (Poder adquisitivo) Si el poder adquisitivo del dólar decrece con una velocidad efectiva del 9% anual, ¿cuánto tiempo se requerirá para que el poder adquisitivo se reduzca a 25 centavos?

***20. (Tasa de interés efectiva)** Un banco afirma que paga interés en una cuenta de inversión con una tasa efectiva del 9.5%. Si el interés se computa realmente de forma mensual, ¿cuál es la tasa nominal de interés que se paga en la cuenta?

***21.** Suponga que se introducen 1000 conejos en una isla donde no hay depredadores naturales. Durante los cinco años siguientes la población de conejos crece exponencialmente. Tras los dos primeros años la población creció hasta 3500 conejos. Después de los cinco primeros años un virus se propagó en la isla, con lo que la población de conejos decreció exponencialmente. Dos años después de que se introdujera el virus (por tanto, siete años después de que se introdujeran los conejos en la isla), la población de conejos descendió a 3000 individuos. ¿Cuántos conejos habrá en la isla 10 años después de su introducción?

22. En un determinado experimento en una isla aislada se utilizan ratas de laboratorio. Inicialmente se llevan a la isla R ratas y se liberan allí. Teniendo a su disposición suficiente alimento y sin depredadores naturales en la isla, la población de ratas crece exponencialmente y dobla su tamaño en tres meses. Al final del quinto mes, y cada cinco meses desde entonces, se capturan y se matan 1000 ratas. ¿Cuál es el mínimo valor de R que garantiza a los científicos que nunca se quedarán sin ratas?

Ecuaciones diferenciales de la forma $y' = a + by$

23. Suponga que $f(x)$ cumple la ecuación diferencial

$$f'(x) = a + bf(x)$$

siendo a y b constantes.

(a) Resuelva la ecuación diferencial sustituyendo $u(x) = a + bf(x)$ y resolviendo la ecuación diferencial más sencilla que resulta en $u(x)$.
(b) Resuelva el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a + by \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

24. (Concentración de medicamentos en la sangre) Se introduce por vía intravenosa un medicamento con velocidad constante. Tras finalizar su introducción es eliminado por el cuerpo con una velocidad proporcional a su concentración en la sangre. La concentración $x(t)$ del medicamento en la sangre cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

siendo a y b constantes positivas.

(a) ¿Cuál es la concentración límite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ del medicamento en la sangre?
(b) Calcule la concentración del medicamento en la sangre en el instante t, sabiendo que la concentración era cero en $t = 0$.
(c) ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir desde $t = 0$ para que la concentración alcance la mitad de su valor límite?

25. (Enfriamiento) Utilice la ley de enfriamiento de Newton para determinar la lectura de un termómetro cinco minutos después de tomarla en un horno que estaba a 72 °C con respeto una habitación que estaba a 20 °C, si la lectura desciende a 48 °C tras un minuto.

26. (Enfriamiento) Un objeto se sitúa en un congelador que se mantiene una temperatura de −5 °C. Si el objeto se enfría de 45 °C a 20 °C en 40 minutos ¿cuántos minutos deberán transcurrir para que se enfríe a 0 °C?

27. (Calentamiento) Si un objeto en una habitación se calienta de 5 °C a 10 °C en cuatro minutos, y si la habitación se mantiene a 20 °C, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que aquel objeto se caliente hasta 15 °C? Suponga que el objeto se calienta con una velocidad proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura de la habitación.

La ecuación logística

*28. Suponga que la cantidad $y(t)$ muestra un crecimiento logístico. Si los valores de $y(t)$ en los instantes $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ son y_0, y_1 y y_2, respectivamente, calcule la ecuación que cumple el valor límite L de $y(t)$, y despeje L. Si $y_0 = 3$, $y_1 = 5$ y $y_2 = 6$, calcule L.

*29. Demuestre que una solución $y(t)$ de la ecuación logística con $0 < y(0) < L$ crece más rápidamente cuando su valor es $L/2$ (*Sugerencia*: No es necesario utilizar la fórmula de la ecuación para ver esto).

*30. Si $y_0 > L$, calcule el intervalo en el que la solución dada de la ecuación logística es válida. ¿Qué sucede con la solución cuando t se acerca al extremo izquierdo de este intervalo?

*31. Si $y_0 < 0$, calcule el intervalo en el que la solución dada de la ecuación logística es válida. ¿Qué sucede con la solución cuando t se aproxima al extremo derecho de este intervalo?

32. **(Modelado de epidemias)** El número y de personas infectadas por un virus altamente contagioso se modela mediante la curva logística

$$y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$$

donde t se mide en meses a partir del instante inicial del brote. En ese instante había 200 personas infectadas, y el número creció hasta 1000 tras un mes. Finalmente, el número creció hasta 10 000. Calcule los valores de los parámetros L, M y k del modelo.

33. Continuando con el Ejercicio 32, ¿cuántas personas estaban infectadas tres meses después del descubrimiento del brote, y con qué rapidez crecía su número con el tiempo?

3.5 Funciones trigonométricas inversas

Las seis funciones trigonométricas son periódicas y, por tanto, no son uno a uno. Sin embargo, tal como hicimos con la función x^2 en la Sección 3.1, podemos restringir sus dominios de forma que las funciones restringidas sean uno a uno e invertibles.

Función inversa del seno (o arcoseno)

Definamos una función Sen x (nótese la letra mayúscula) como sen x, restringida de forma que su dominio sea el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$:

DEFINICIÓN 8 La función restringida Sen x

$$\text{Sen}\, x = \text{sen}\, x \qquad \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Como su derivada $\cos x$ es positiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la función Sen x es creciente en su dominio, por lo que es una función uno a uno. Su dominio es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y su rango $[-1, 1]$ (*véase* la Figura 3.17).

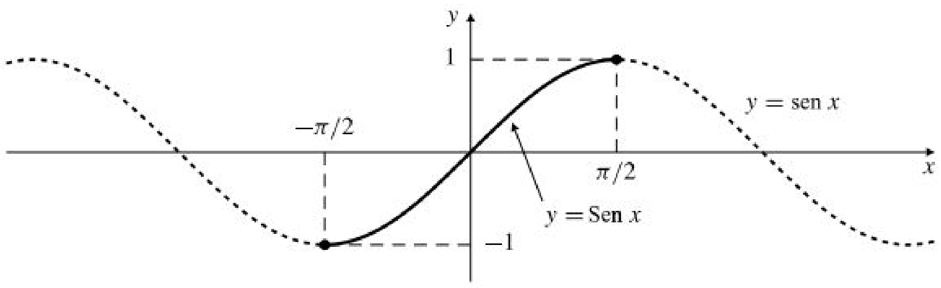


Figura 3.17 La gráfica de Sen x forma parte de la gráfica de sen x.

Como es uno a uno, Sen tiene función inversa que se indica como sen^{-1} (o en algunos libros y programas de ordenador como arcsen, Arcsen o asen) y que se denomina función **inversa del seno** o **arcoseno**.

DEFINICIÓN 9 La función inversa $\text{sen}^{-1} x$ o arcsen x

$$y = \text{sen}^{-1} x \iff x = \text{Sen}\, y$$
$$\iff x = \text{sen}\, y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de sen^{-1} se muestra en la Figura 3.18. Es la reflexión de la gráfica de Sen con respecto a la recta $y = x$. El dominio de sen^{-1} es $[-1, 1]$ (el rango de Sen), y el rango de sen^{-1} es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (el dominio de Sen). Las identidades de cancelación para Sen y sen^{-1} son

$$\text{sen}^{-1}(\text{Sen}\, x) = \text{arcsen}\,(\text{Sen}\, x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\text{Sen}\,(\text{sen}^{-1} x) = \text{Sen}\,(\text{arcsen}\, x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

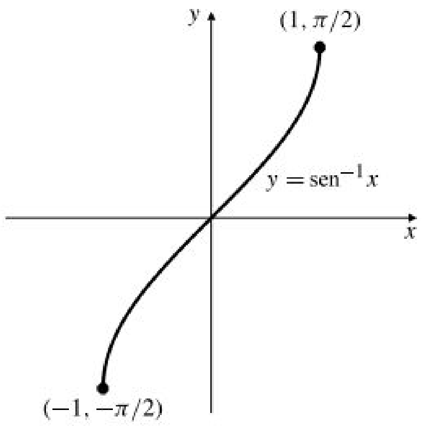


Figura 3.18 La función arcoseno.

Observación Como en el caso de la función inversa general f^{-1}, sen^{-1} *no* representa $1/\text{sen}\, x$ (que ya conocemos como $\csc x$). Hay que ver $\text{sen}^{-1} x$ como «el ángulo entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x».

Ejemplo 1

(a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (ya que $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$).

(b) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ (ya que $\text{sen}\,(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$).

(c) $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (ya que $\text{sen}\,(-\frac{\pi}{2}) = -1$).

(d) $\text{sen}^{-1} 2$ no está definida (2 no está en el rango del seno).

Ejemplo 2 Calcule (a) $\text{sen}\,(\text{sen}^{-1} 0.7)$, (b) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, 0.3)$, (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\frac{4\pi}{5})$ y (d) $\cos(\text{sen}^{-1} 0.6)$.

Solución

(a) $\text{sen}\,(\text{sen}^{-1} 0.7) = 0.7$ (identidad de cancelación).

(b) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, 0.3) = 0.3$ (identidad de cancelación).

(c) El número $\frac{4\pi}{5}$ no está en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, por lo que no se puede aplicar la identidad de cancelación directamente. Sin embargo, $\text{sen}\frac{4\pi}{5} = \text{sen}\,(\pi - \frac{\pi}{5}) = \text{sen}\frac{\pi}{5}$ por la identidad del ángulo suplementario. Por tanto, $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\frac{4\pi}{5}) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$ (por cancelación).

(d) Sea $\theta = \text{sen}^{-1} 0.6$, como se muestra en el triángulo rectángulo de la Figura 3.19, cuya hipotenusa es 1 y su cateto opuesto θ es igual a 0.6. Por el Teorema de Pitágoras, el cateto adyacente θ es $\sqrt{1-(0.6)^2} = 0.8$. Por tanto, $\cos(\text{sen}^{-1} 0.6) = \cos\theta = 0.8$.

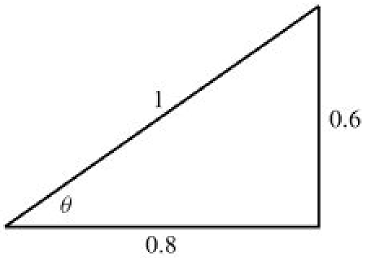


Figura 3.19

Ejemplo 3 Simplifique la expresión $\tan(\text{sen}^{-1} x)$.

Solución Se desea calcular la tangente de un ángulo cuyo seno es x. Supongamos primero que $0 \leqslant x < 1$. Como en el Ejemplo 2, se dibuja un triángulo rectángulo (Figura 3.20) con un ángulo θ, y se designan los lados de forma que $\theta = \text{sen}^{-1} x$. El cateto opuesto a θ es x y la hipotenusa vale 1. El cateto restante es $\sqrt{1-x^2}$ y tenemos que

$$\tan(\text{sen}^{-1} x) = \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como los dos miembros de la ecuación anterior son funciones impares de x, se obtiene el mismo resultado para $-1 < x < 0$..

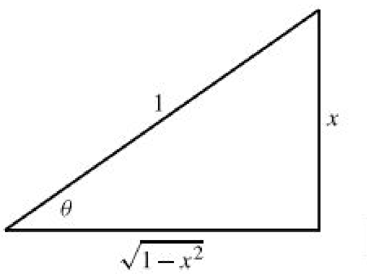


Figura 3.20

A continuación utilizaremos la diferenciación implícita para calcular la derivada de la función inversa del seno. Si $y = \text{sen}^{-1} x$, entonces $x = \text{sen}\, y$, y $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Diferenciando con respecto a x, se obtiene

$$1 = (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, sabemos que $\cos y \geqslant 0$. Por tanto,

$$\cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

y $dy/dx = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-x^2}$;

$$\frac{d}{dx}\text{sen}^{-1} x = \frac{d}{dx}\text{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nótese que la función inversa del seno es diferenciable solamente en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$. La pendiente de su gráfica tiende a infinito cuando $x \to -1+$ o cuando $x \to 1-$ (*véase* la Figura 3.18).

Ejemplo 4 Calcule la derivada de $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ y después evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, siendo $a>0$.

Solución Utilizando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}\,\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}}\,\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\qquad \text{si } a>0$$

Por tanto,

$$\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}+C\qquad (a>0)}$$

Ejemplo 5 Calcule la solución y del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{4}{\sqrt{2-x^2}} & (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})\\ y(1)=2\pi \end{cases}$$

Solución Utilizando la integral del ejemplo anterior, tenemos que

$$y=\int\frac{4}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

para alguna constante C. Además, $2\pi=y(1)=4\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})+C=4\left(\frac{\pi}{4}\right)+C=\pi+C$. Por lo tanto, $C=\pi$ y $y=4\operatorname{sen}^{-1}(x/\sqrt{2})+\pi$.

Ejemplo 6 **(Curva en diente de sierra)** Sea $f(x)=\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x)$ para todo número real x.

(a) Calcule y simplifique $f'(x)$.

(b) ¿Dónde es f diferenciable? ¿Dónde es f continua?

(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución (a) Utilizando la Regla de la Cadena y la igualdad pitagórica se calcula

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}x)^2}}(\cos x)$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}1 & \text{si } \cos x>0\\ -1 & \text{si } \cos x<0\end{cases}$$

(b) f es diferenciable en todos los puntos donde $\cos x\neq 0$, es decir, en todas partes excepto en los múltiplos impares de $\pi/2$, concretamente $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ...

Como el seno es continuo en todas partes y toma valores en el intervalo $[-1,1]$, y ya que sen^{-1} es continua en el intervalo $[-1,1]$, se deduce que f es continua en toda la recta real.

(c) Como f es continua, su gráfica no tiene interrupciones. La gráfica está formada por segmentos de rectas cuyas pendientes van alternando entre 1 y -1 en los intervalos entre los múltiplos impares consecutivos de $\pi/2$. Como $f'(x)=1$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (siendo $\cos x\geqslant 0$), la gráfica debe ser como se muestra en la Figura 3.21.

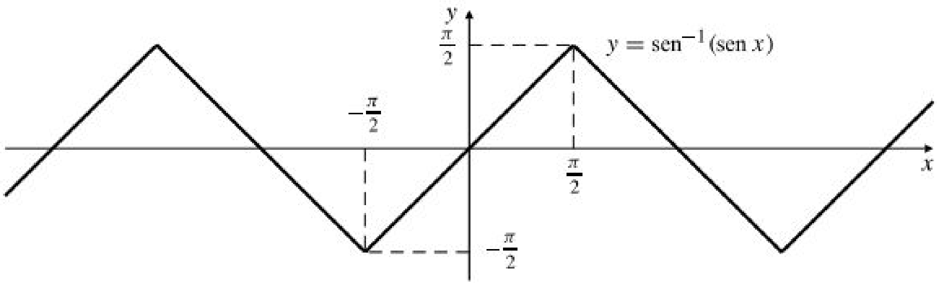
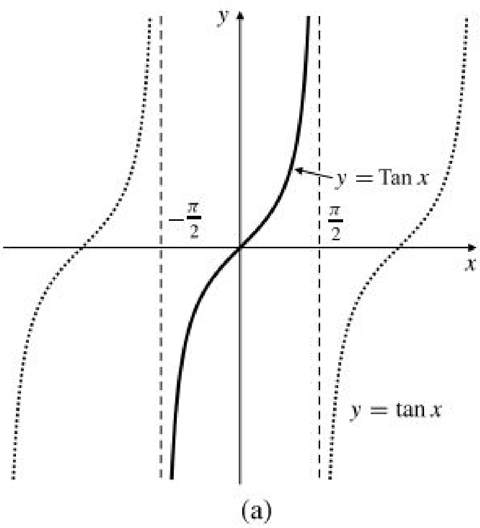


Figura 3.21 Gráfica en diente de sierra.

Función inversa de la tangente (o arcotangente)

La función inversa de la tangente se define de forma similar a la inversa del seno. Comenzaremos por restringir la tangente a un intervalo en el que sea uno a uno. En este caso utilizaremos el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Véase* la Figura 3.22(a).



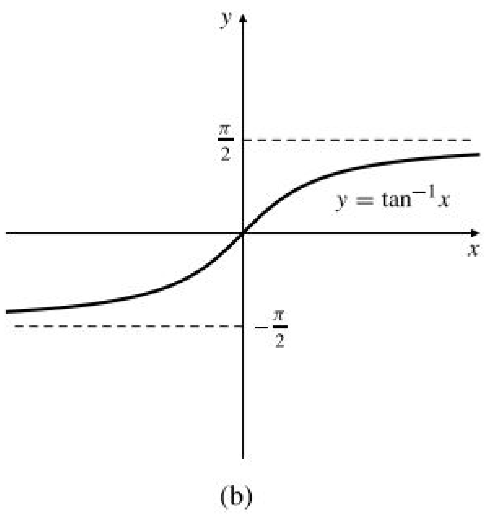


Figura 3.22 (a) Gráfica de $\tan x$. (b) Gráfica de $\tan^{-1} x$.

DEFINICIÓN 10 **La función restringida Tan x**

$$\text{Tan}\, x = \tan x \qquad \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

La inversa de la función Tan se denomina **función inversa de la tangente** y se indica como $\tan^{-1}$ (o arctan, Arctan o atan). El dominio de $\tan^{-1}$ es toda recta real (el rango de Tan). Su rango es el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

DEFINICIÓN 11 **La función inversa de la tangente $\tan^{-1} x$ o $\arctan x$**

$$y = \tan^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{Tan}\, y$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tan y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de $\tan^{-1}$ se muestra en la Figura 3.22(b); corresponde a la reflexión de la gráfica de Tan respecto a la recta $y = x$.

Las identidades de cancelación para Tan y $\tan^{-1}$ son

$$\tan^{-1}(\text{Tan}\, x) = \arctan(\text{Tan}\, x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Tan}(\tan^{-1} x) = \text{Tan}(\arctan x) = x \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

Ejemplo 7 Evalúe: (a) $\tan(\tan^{-1} 3)$, (b) $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{3\pi}{4}\right)$ y (c) $\cos(\tan^{-1} 2)$.

Solución

(a) $\tan(\tan^{-1} 3) = 3$ por cancelación.

(b) $\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4}) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(c) $\cos(\tan^{-1} 2) = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ por las relaciones del triángulo de la Figura 3.23. De forma alternativa, tenemos que $\tan(\tan^{-1} 2) = 2$, por lo que $\sec^2(\tan^{-1} 2) = 1 + 2^2 = 5$. Entonces $\cos^2(\tan^{-1} 2) = \frac{1}{5}$. Como el coseno es positivo en el rango de $\tan^{-1}$, tenemos que $\cos(\tan^{-1} 2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

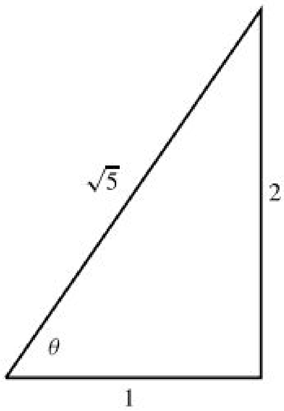


Figura 3.23

La derivada de la función tangente inversa se puede obtener también por diferenciación implícita: si $y = \tan^{-1} x$, entonces $x = \tan y$ y

$$1 = (\sec^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)\frac{dy}{dx}$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ejemplo 8 Calcule $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, y a partir del resultado anterior evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$.

Solución Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{a^2}}\,\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ejemplo 9 Demuestre que $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \tan^{-1} x - \dfrac{\pi}{4}$ para $x > -1$.

Solución Sea $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1} x$. En el intervalo $(-1, \infty)$ tenemos, por la Regla de la Cadena y la Regla del Cociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\,\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)}\,\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x) = C$ (constante) en ese intervalo. Para obtener C se calcula $f(0)$:

$$C = f(0) = \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1} 0 = -\frac{\pi}{4}$$

Así, la identidad dada se cumple en $(-1, \infty)$. ■

Observación Algunos programas de computador, especialmente las hojas de cálculo, implementan dos versiones de la función arcotangente, denominados generalmente «atan» y «atan2». La función atan es simplemente la función $\tan^{-1}$ que ya hemos definido; atan (y/x) devuelve el ángulo en radianes entre la recta que va del origen al punto (x, y) y el eje x positivo, suponiendo que (x, y) está en los cuadrantes I o IV del plano. La función atan2 es una función de dos variables: atan2 (x, y) devuelve ese ángulo para cualquier punto (x, y) que no esté en el eje y. *Véase* la Figura 3.24. Algunos programas, por ejemplo Matlab, invierten el orden de las variables x e y en su función atan2. Maple utiliza `arctan (x)` y `arctan (y, x)` para sus versiones de arcotangente de una y dos variables.

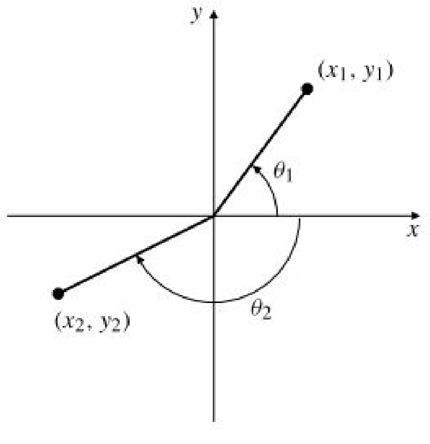


Figura 3.24
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1}(y_1/x_1) \\ &= \text{atan}\,(y_1/x_1) \\ &= \text{atan2}\,(x_1, y_1) \\ &= \text{arctan}\,(y_1/x_1) \quad \text{(Maple)} \\ &= \text{arctan}\,(y_1, x_1) \quad \text{(Maple)} \\ \theta_2 &= \text{atan2}\,(x_2, y_2) \\ &= \text{arctan}\,(y_2, x_2) \quad \text{(Maple)} \end{aligned}$$

Otras funciones trigonométricas inversas

La función $\cos x$ es uno a uno en el intervalo $[0, \pi]$, lo que podríamos definir la **función inversa del coseno**, $\cos^{-1} x$ (o arccos x, Arccos x o acos x), de forma que

$$y = \cos^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

Sin embargo $\cos y = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - y)$ (identidad del ángulo complementario), y $\frac{\pi}{2} - y$ está en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuando $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Así, la definición anterior nos lleva a

$$y = \cos^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

Es más fácil utilizar este resultado para definir directamente $\cos^{-1} x$:

DEFINICIÓN 12 **La función inversa del coseno $\cos^{-1} x$ o $\arccos x$**

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{para} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Las identidades de cancelación para $\cos^{-1} x$ son

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \qquad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \qquad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La derivada de $\cos^{-1} x$ es el negativo de la de $\operatorname{sen}^{-1} x$ (¿por qué?):

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La gráfica de $\cos^{-1}$ se muestra en la Figura 3.25(a).

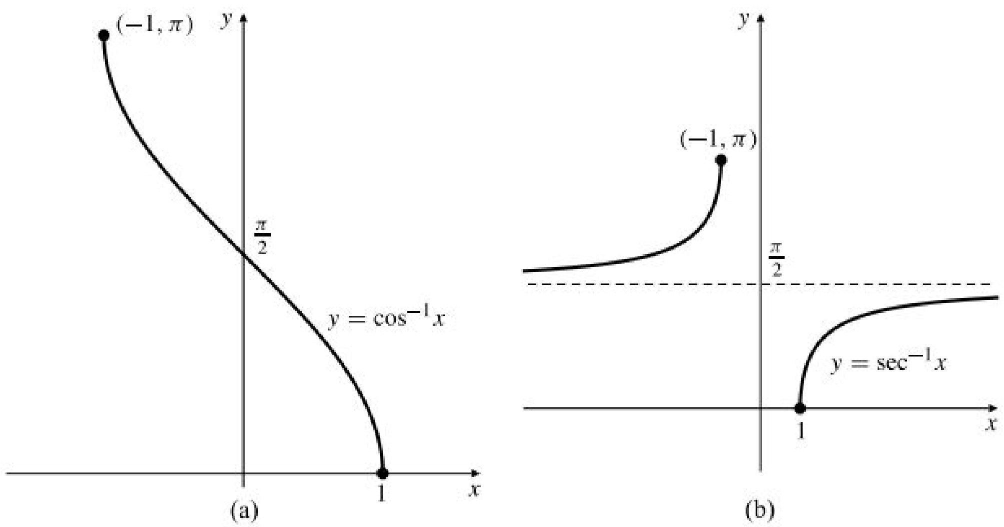


Figura 3.25 Gráficas de $\cos^{-1}$ y $\sec^{-1}$.

Las calculadoras científicas en general implementan sólo las funciones trigonométricas primarias: seno, coseno y tangente, y sus inversas. Las funciones secundarias: secante, cosecante y cotangente, se calculan utilizando la tecla $1/x$ de la calculadora. Para calcular $\sec x$ se calcula $\cos x$ y se toma el inverso de la respuesta. Las funciones inversas de las funciones trigonométricas secundarias se expresan también fácilmente por medio de las de sus funciones recíprocas. Por ejemplo, se define:

DEFINICIÓN 13 La función inversa de la secante $\sec^{-1} x$ (o arcsec x)

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{para } |x| \geqslant 1$$

El dominio de $\sec^{-1}$ es la unión de los intervalos $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, y su rango es $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. La gráfica de $y = \sec^{-1} x$ se muestra en la Figura 3.25(b). Es la reflexión respecto a la recta $y = x$ de la parte de la gráfica de $\sec x$ para x entre 0 y π. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\sec(\sec^{-1} x) &= \sec\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \text{para } |x| \geqslant 1 \\
\sec^{-1}(\sec x) &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sec x}\right) \\
&= \cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } [0, \pi],\ x \neq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Algunos autores prefieren definir $\sec^{-1}$ como la inversa de la restricción de $\sec x$ a los intervalos separados $[0, \pi/2)$ y $[\pi, 3\pi/2)$, porque esto evita la aparición del valor absoluto en la fórmula de la derivada. Sin embargo, es mucho más difícil calcular valores con esa definición. Nuestra definición facilita la obtención de valores como $\sec^{-1}(-3)$ con una calculadora. Las calculadoras científicas en general sólo incorporan las funciones inversas del seno, el coseno y la tangente.

Se puede calcular la derivada de $\sec^{-1}$ a partir de la de $\cos^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec^{-1} x &= \frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Nótese que hemos tenido que utilizar $\sqrt{x^2} = |x|$ en la última línea. Hay valores negativos de x en el dominio de $\sec^{-1}$. Obsérvese en la Figura 3.25(b) que la pendiente de $y = \sec^{-1}(x)$ es siempre positiva.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}}$$

La fórmula de integración correspondiente toma formas diferentes en los intervalos donde $x \geqslant 1$ o $x \leqslant -1$:

$$\boxed{\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \begin{cases} \sec^{-1} x + C & \text{en intervalos donde } x \geqslant 1 \\ -\sec^{-1} x + C & \text{en intervalos donde } x \leqslant -1 \end{cases}}$$

Finalmente, nótese que $\csc^{-1}$ y $\cot^{-1}$ se definen de forma similar a $\sec^{-1}$. Se utilizan raramente.

DEFINICIÓN 14 Las funciones inversas de la cosecante y la cotangente

$$\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (|x| \geqslant 1); \qquad \cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \neq 0)$$

Ejercicios 3.5

En los Ejercicios 1-12, calcule las expresiones dadas.

1. $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$

3. $\tan^{-1}(-1)$ **4.** $\sec^{-1}\sqrt{2}$

5. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 0.7)$ **6.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0.7)$

7. $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{2\pi}{3}\right)$ **8.** $\operatorname{sen}^{-1}(\cos 40^\circ)$

9. $\cos^{-1}(\operatorname{sen}(-0.2))$ **10.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right)$

11. $\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ **12.** $\tan(\tan^{-1} 200)$

En los Ejercicios 13-18, simplifique las expresiones dadas.

13. $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ **14.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$

15. $\cos(\tan^{-1} x)$ **16.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

17. $\tan(\cos^{-1} x)$ **18.** $\tan(\sec^{-1} x)$

En los Ejercicios 19-32, diferencie las funciones dadas y simplifique su resultado hasta donde sea posible.

19. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)$ **20.** $y = \tan^{-1}(ax+b)$

21. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ **22.** $f(x) = x\operatorname{sen}^{-1} x$

23. $f(t) = t\tan^{-1} t$ **24.** $u = z^2\sec^{-1}(1+z^2)$

25. $F(x) = (1+x^2)\tan^{-1} x$ **26.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{a}{x}$

27. $G(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen}^{-1} 2x}$ **28.** $H(t) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\operatorname{sen} t}$

29. $f(x) = (\operatorname{sen}^{-1} x^2)^{1/2}$ **30.** $y = \cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

31. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} \quad (a>0)$

32. $y = a\cos^{-1}\left(1-\dfrac{x}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} \quad (a>0)$

33. Calcule la pendiente de la curva $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{y}\right) = \dfrac{\pi x}{y^2}$ en el punto $(1, 2)$.

34. Obtenga las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ que tienen pendiente 2.

35. Demuestre que, en sus respectivos dominios, sen^{-1} y $\tan^{-1}$ son funciones crecientes y $\cos^{-1}$ es una función decreciente.

36. La derivada de $\sec^{-1} x$ es positiva para todo x de su dominio $\sec^{-1}$. ¿Implica esto que $\sec^{-1}$ es creciente en su dominio? ¿Por qué?

37. Dibuje aproximadamente la gráfica de $\csc^{-1} x$ y calcule su derivada.

38. Dibuje aproximadamente la gráfica de $\cot^{-1} x$ y calcule su derivada.

39. Demuestre que $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ para $x > 0$. ¿Cuánto vale la suma si $x < 0$?

40. Calcule la derivada de $g(x) = \tan(\tan^{-1} x)$ y dibuje aproximadamente la gráfica de g.

En los Ejercicios 41-44, dibuje las gráficas de las funciones dadas calculando y simplificando en primer lugar la derivada de la función. ¿Dónde es continua cada función? ¿Dónde es diferenciable?

***41.** $\cos^{-1}(\cos x)$ ***42.** $\operatorname{sen}^{-1}(\cos x)$

***43.** $\tan^{-1}(\tan x)$ ***44.** $\tan^{-1}(\cot x)$

45. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ si $|x| < 1$.

46. Demuestre que

$$\sec^{-1} x = \begin{cases} \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \pi - \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

47. Demuestre que $\tan^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ para todo x.

48. Demuestre que

$$\sec^{-1} x = \begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \pi - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

*49. Demuestre que la función $f(x)$ del Ejemplo 9 es también constante en el intervalo $(-\infty, -1)$. Calcule el valor de la constante. *Sugerencia*: Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

*50. Calcule la derivada de $f(x) = x - \tan^{-1}(\tan x)$. ¿Qué implica su respuesta sobre $f(x)$? Calcule $f(0)$ y $f(\pi)$. ¿Hay aquí una contradicción?

*51. Calcule la derivada de $f(x) = x - \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ y dibuje la gráfica de f en ese intervalo.

En los Ejercicios 52-55, resuelva los problemas de valor inicial.

◆52. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

◆53. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{9+x^2} \\ y(3) = 2 \end{cases}$

◆54. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(1/2) = 1 \end{cases}$

◆55. $\begin{cases} y' = \dfrac{4}{\sqrt{25-x^2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3.6 Funciones hiperbólicas

Cualquier función definida en la recta real se puede expresar (de forma única) como la suma de una función par y una función impar (*véase* el Ejercicio 35 de la Sección P.5). Las **funciones hiperbólicas** $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ son, respectivamente, las funciones par e impar cuya suma es la función exponencial e^x.

DEFINICIÓN 15 Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico

Para cualquier número real x el **coseno hiperbólico**, $\cosh x$, y **seno hiperbólico**, $\operatorname{senh} x$, se definen como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Recuérdese que el coseno y el seno se denominan *funciones circulares* debido a que, para todo t, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. De forma similar, cosh y senh se denominan *funciones hiperbólicas* porque el punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está en la hipérbola rectangular cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$,

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \qquad \text{para todo } t \text{ real}$$

Para ver esto, obsérvese que

$$\begin{aligned}\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})\right) \\ &= \frac{1}{4}(2+2) = 1\end{aligned}$$

En este caso t no se puede interpretar como longitud de un arco ni como un ángulo, como hacíamos en el caso circular; sin embargo, el *área* del *sector hiperbólico* que está limitado por $y = 0$, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ es de $t/2$ unidades cuadradas (*véase* el Ejercicio 21 de la Sección 8.4), lo mismo que el área del sector circular limitado por $y = 0$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ (*véase* la Figura 3.26).